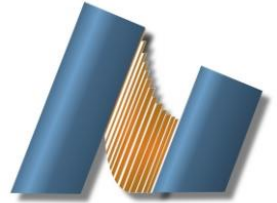




**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
CENTRO DE NANOCIENCIAS Y NANOTECNOLOGÍA



LICENCIATURA EN NANOTECNOLOGÍA  
Microelectrónica y Nanofabricación

**DISEÑO Y EVALUACIÓN DE ALGORITMOS CUÁNTICOS  
PARA EL CÁLCULO DEL TENSOR CUÁNTICO GEOMÉTRICO  
DE UN CÚBIT CON ROTACIONES GENÉRICAS Y DE DOS  
CÚBITS CON ENTRELAZAMIENTO**

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN NANOTECNOLOGÍA

**PRESENTA:**

Jorge Esteban Bolio Martínez

**DIRECTOR DE TESIS:**

Dr. Fernando Rojas Íñiguez

Ensenada, Baja California, septiembre 2023.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hago constar que el trabajo que presento es de mi autoría y que todas las ideas, citas textuales, datos, ilustraciones, gráficas, etc. sacados de cualquier obra o debidas al trabajo de terceros, han sido debidamente identificados y citados en el cuerpo del texto y en la bibliografía, y acepto que en caso de no respetar lo anterior puedo ser sujeto de sanciones universitarias.

Afirmo que el material presentado no se encuentra protegido por derechos de autor, y me hago responsable de cualquier reclamo relacionado con la violación de derechos de autor.



---

Jorge Esteban Bolio Martínez

# Dedicatoria

*A mi chichí, a mi familia, a mis amigos, a las personas que me acompañan en mi corazón,  
a Alfas, y a Dios.*

# Agradecimientos

Ninguna tesis, ningún trabajo, ningún título universitario, y ningún objetivo, puede ser conseguido sin la ayuda de los demás. La cantidad de personas a las que les tengo que agradecer, no solo en el proceso de realizar esta tesis, sino en el de llegar a este punto de culminar con mis estudios universitarios, es tan extensa que es imposible mencionar a todos los que estuvieron presentes en este camino.

En primer lugar le agradezco a mi chichí, cuyo amor incondicional me ha dado fuerza para nunca bajar la cabeza.

A mis papás, María José y Jorge Carlos, que siempre han creído en mí y se han sacrificado infinitas veces por mis sueños. Siempre me han enseñado que lo más importante es hacer lo correcto, y pelear por ello sin importar lo que piensen los demás.

A mis hermanos, Paulina, Sebastián y Santiago, que me han hecho comprender que la familia es lo más importante, que siempre voy a estar acompañado, y que siempre me voy a preocupar por ellos.

A mi tía Beba, que nunca ha dejado de estar pendiente de mí ni un solo día, y que siempre escucha mis metas y objetivos con mucha atención y cariño cada vez que nos vemos.

A mis tíos y tías, Fernando, Kike, Tere, por siempre estar presentes en mi vida.

A mis mascotas, por su compañía. Brandi, Shagui, Pepita, Muñeco, la Chiquis, la Coca, la Coneja, Renato, la Chispa, y el Buhito.

A mis amigos, que más que amigos, son familia. Por orden alfabético: Annie, Adrianas, Diego, Enrique, Estrada, Gabo, Héctor, Juanma, Manuel, Santiago. Son mi vida.

A mis amigos de Ensenada, que estuvieron en momentos muy difíciles en este proceso: Tadeo, Mauricio, Deyanira, Alvizo, Abdiel, Román, Billy.

A las personas que ya no me acompañan en vida, pero siempre en mi corazón. Mi abuelo, con el que con cariño recuerdo varios momentos de mi infancia. Mi abuelita, que siempre me

demonstró su apoyo y cariño, que siempre le gustaban nuestras visitas, y a la que le agradezco infinitamente las oportunidades que nos dio. A mi buen amigo chapo, me enseñaste tantas cosas, y me hubiera gustado compartir más tiempo contigo. Eres y serás, una de las almas más puras y bondadosas que he conocido.

A los profesores que tuve en la licenciatura. Gracias por responder siempre mis dudas, y por ser comprensivos y abiertos a platicar en todo momento.

A mis sinodales, Dr. Jorge Villavicencio, Dr. Diego Morachis, Dr. Eduardo Murillo, Dr. Gibraham Graciano, por revisar mi tesis y ayudarme a terminar mi proceso de titulación.

A los investigadores que me abrieron las puertas de sus laboratorios, y me transmitieron sus enseñanzas, Dr. Victor, Dr. Luis, Dr. Wencel, Dr. Xiaohang.

A las personas del CNyN que me ayudaron en todo momento, excompañeros y personal del CNyN.

A Fernando Rojas, mi supervisor de tesis. Gracias por darme la oportunidad de realizar investigación en información cuántica, y por tu apoyo en todo momento. Espero que sigamos colaborando en el futuro.

Al proyecto DGAPA PAPIIT IN111122, por la beca que se me otorgó para llevar a cabo esta tesis.

# Resumen

El estudio de la mecánica cuántica, desde una perspectiva geométrica, relaciona las propiedades físicas con las características y los elementos de un espacio métrico. En particular, el tensor cuántico geométrico (TCG), cuya parte real e imaginaria corresponden respectivamente a la métrica de Fubini-Study y a la curvatura de Berry, captura la información geométrica más importante de un sistema cuántico. De esta manera, ha sido utilizado para estudiar fenómenos eléctricos, evoluciones cuánticas, y transiciones de fase cuánticas y topológicas.

Por su parte, la computación cuántica es una tecnología en desarrollo que aprovecha los fenómenos cuánticos de superposición y entrelazamiento para realizar cálculos complejos que son ineficientes para la computación clásica. Entre sus potenciales aplicaciones, destaca la simulación de sistemas cuánticos, el cálculo de fases geométricas, y la cuantificación de valores esperados. En adición, diversos autores han utilizado la computación cuántica para calcular el tensor cuántico geométrico de modelos físicos, como el modelo XY, el modelo de Lipkin-Meshkov-Glick o el modelo topológico de Su-Schrieffer-Heeger.

En esta tesis, se diseñaron 36 algoritmos cuánticos para calcular la parte real e imaginaria del TCG de los sistemas de un cúbit con rotaciones genéricas y de dos cúbits con entrelazamiento. Los algoritmos se implementaron en *Qiskit*, y se ejecutaron en el simulador de computación cuántica *QasmSimulator*, así como en la computadora cuántica *IBM\_Lagos*. Los tensores se calcularon en función de uno de los parámetros de los sistemas físicos, y se hicieron pruebas a diferente número de mediciones por algoritmo para evaluar la eficiencia. Los resultados se compararon con los valores teóricos de los tensores y se comprobó que los algoritmos cuánticos funcionan adecuadamente. En adición, se exhibió el funcionamiento de *IBM\_Lagos* para ejecutar los respectivos algoritmos y se relacionó el TCG con el grado de entrelazamiento del sistema de dos cúbits.

# Contenido

<b>I. Capítulo I: Introducción</b>	<b>1</b>
1. Antecedentes .....	1
2. Motivación .....	4
3. Hipótesis .....	5
4. Objetivos .....	5
4.1. Objetivo general .....	5
4.2. Objetivos específicos .....	5
<b>II. Capítulo II: Marco teórico</b>	<b>7</b>
I. Geometría de los estados cuánticos .....	7
1. Formalismo de la mecánica cuántica .....	7
1.1. Estados cuánticos .....	7
1.2. Espacio de Hilbert .....	7
1.2.1. Espacio de Hilbert de dimensión finita .....	8
1.3. Perspectiva geométrica de la mecánica cuántica .....	8
2. La distancia entre dos estados cuánticos .....	8
2.1. Distancia entre dos elementos del espacio de Hilbert .....	9
2.2. Espacios proyectivos $\mathbb{P}$ .....	9
2.2.1. Espacio proyectivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}$ .....	10
2.2.2. Espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}$ .....	10
2.3. Los estados cuánticos y el espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .....	10
2.3.1. El espacio cuántico de dos niveles y $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .....	11
2.4. Métrica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ : métrica de Fubini-Study .....	11
2.4.1. Espacio métrico y función distancia .....	12
2.4.2. Tensor métrico .....	12
2.4.2.1. Notación de Einstein .....	13
2.4.2.2. Definición formal del tensor métrico .....	13
2.4.2.3. Tensor métrico Riemmaniano .....	14
2.4.2.4. Cálculo de la longitud de una curva a partir del tensor métrico Riemmaniano .....	15
2.4.2.5. La métrica y el cambio en el sistema coordenado del espacio métrico .....	16
2.4.2.6. Tensor métrico Hermitiano .....	16
2.4.3. Métrica del espacio de los estados cuánticos $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ : métrica de Fubini-Study .....	17



3. Curvatura de Berry.....	17
3.1. Fase de Berry.....	17
3.1.1. Fase de Berry: caso discreto .....	18
3.1.2. Fase de Berry: caso continuo .....	19
3.2. Curvatura de Berry .....	19
4. Tensor cuántico geométrico (TCG) .....	21
4.1. TCG y la métrica de Fubini-Study .....	22
4.2. TCG y la curvatura de Berry .....	24
II. Computación cuántica .....	25
1. Modelo del circuito cuántico .....	25
2. Cúbits .....	26
2.1. Esfera de Bloch .....	26
2.2. El estado de N cúbits .....	27
2.3. Entrelazamiento .....	27
2.4. Estado de dos cúbits .....	28
2.4.1. Estados entrelazados de dos cúbits: estados de Bell .....	28
2.4.2. Concurrencia y estados entrelazados.....	29
2.5. Cúbits ancilla .....	29
3. Compuertas cuánticas .....	29
3.1. Matrices unitarias $U(n)$ .....	30
3.2. Compuerta cuántica de N cúbits .....	30
3.3. Compuertas cuánticas de 1 cúbit .....	30
3.3.1. Compuerta NOT .....	31
3.3.2. Compuerta Hadamard .....	31
3.3.3. Compuerta RX .....	32
3.3.4. Compuerta RY .....	32
3.3.5. Compuerta RZ .....	33
3.3.6. Compuerta de fase $Ph$ .....	33
3.3.7. Compuerta $S^\dagger$ .....	33
3.3.8. Compuerta general de un cúbit .....	33
3.4. Compuertas cuánticas de dos cúbits .....	34
3.4.1. Compuerta CNOT .....	34
3.4.2. Compuertas controladas .....	35
3.4.2.1. Compuertas controladas con N cúbits de control .....	36
3.4.3. Compuerta general de N cúbits .....	37
3.5. Operaciones cuánticas no unitarias .....	37
3.5.1. Ejemplo de una operación no unitaria .....	38
3.6. Algoritmo cuántico para el cálculo del valor esperado de un operador no unitario .....	38

4. Medición de un cúbit .....	40
4.1. Medición de un cúbit en diferentes bases .....	41
4.1.1. Medición en la base X .....	42
4.1.2. Medición en la base Y .....	42
<b>III. Capítulo III: Metodología</b> .....	<b>44</b>
1. Modelo de un cúbit con rotaciones genéricas .....	45
2. Modelo de dos cúbits con entrelazamiento .....	47
<b>IV. Capítulo IV: Resultados y discusión</b> .....	<b>50</b>
1. Modelo de un cúbit con rotaciones genéricas .....	50
1.1. Cálculo del teórico $TCG_{1q}$ .....	50
1.2. Algoritmos cuánticos para calcular el $TCG_{1q}$ .....	51
1.2.1. Algoritmos para calcular $\langle O_a \rangle, \langle O_b \rangle, \langle O_\theta \rangle$ .....	51
1.2.2. Algoritmos para calcular $\langle O_{aa} \rangle, \langle O_{bb} \rangle, \langle O_{\theta\theta} \rangle$ .....	52
1.2.3. Algoritmos para calcular $\langle O_{ab} \rangle, \langle O_{a\theta} \rangle, \langle O_{b\theta} \rangle$ .....	53
1.3. Cálculo del tensor cuántico geométrico $TCG_{1q}$ por medio de la ejecución de algoritmos cuánticos .....	54
2. Modelo de dos cúbits con entrelazamiento .....	60
2.1. Cálculo teórico del $TCG_{2q}$ .....	60
2.2. Algoritmos cuánticos para calcular el $TCG_{2q}$ .....	62
2.2.1. Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i} \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle,$ $\rho_i, \rho_j \in \{a_1, b_1, \theta_1\}, i \leq j$ .....	62
2.2.2. Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i} \rangle, \rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ .....	63
2.2.3. Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle,$ $\rho_i, \rho_j \in \{a_2, b_2, \theta_2\}, i \leq j$ .....	64
2.2.4. Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle,$ $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}, \rho_j \in \{a_1, b_1\}$ .....	64
2.2.5. Algoritmo cuántico para calcular $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle,$ $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}, \rho_j \in \{\theta_1\}$ .....	65
2.3. Cálculo del tensor cuántico geométrico $TCG_{2q}$ por medio de la ejecución de algoritmos cuánticos .....	67
2.4. Relación entre el grado de entrelazamiento del sistema de dos cúbits con el TCG .....	73
<b>V. Capítulo V: Conclusiones y trabajo a futuro</b> .....	<b>74</b>
1. Conclusiones .....	74

2. Trabajo a futuro .....	76
<b>VI. Anexos</b>	<b>78</b>
1. Anexo 1: Descomposición unitaria de los operadores para el caso de dos cúbits con entrelazamiento .....	78
<b>VII. Referencias</b>	<b>81</b>

# Lista de tablas

- 1. Tabla 1: Descomposición de los operadores  $\{O_{\rho_i}, O_{\rho_i\rho_j}\}$  como una suma ponderada de matrices unitarias para el caso de un cúbit con rotaciones genéricas ..... 46
- 2. Tabla 2: Descomposición de las derivadas de  $U_{2q}$  como suma ponderada de matrices unitarias para el caso de dos cúbits con entrelazamiento ..... 48
- 3. Tabla 3: Compuertas cuánticas V1, V2 ..... 63
- 4. Tabla 4: Compuertas cuánticas V3, V4 ..... 64
- 5. Tabla 5: Compuertas cuánticas V5, V6 ..... 65

# Lista de figuras

Figura 1: Espacio proyectivo $\mathbb{RP}^2$ .....	10
Figura 2: Esfera de Bloch y espacio cuántico de dos niveles .....	12
Figura 3: Evolución discreta de $ u_0\rangle$ en una trayectoria cerrada .....	18
Figura 4: Fase de Berry en el espacio paramétrico .....	20
Figura 5: Modelo del circuito cuántico .....	25
Figura 6: Esfera de Bloch y los estados de un cúbit .....	26
Figura 7: Compuerta cuántica G que actúa sobre un cúbit $ \psi\rangle$ .....	31
Figura 8: Rotación del vector $ \psi_0\rangle$ en un ángulo de $\theta_x/2$ alrededor del eje x de la esfera de Bloch .....	32
Figura 9: Compuerta general de un cúbit .....	33
Figura 10: Compuerta CNOT .....	34
Figura 11: Compuertas controladas .....	35
Figura 12: Compuerta controlada con dos cúbits de control .....	36
Figura 13: Circuito cuántico que realiza una operación no unitaria .....	38
Figura 14: Algoritmos cuántico para calcular el valor esperado de un operador no unitario .....	40
Figura 15: Medición de un cúbit .....	40
Figura 16: Circuito cuántico para medir un cúbit en la base $\{ b\rangle,  b^\perp\rangle\}$ .....	42
Figura 17: Circuito cuántico para medir un cúbit en la base X .....	42
Figura 18: Circuito cuántico para medir un circuito en la base Y .....	43
Figura 19: Sistema de dos cúbits con entrelazamiento .....	47
Figura 20: Algoritmos cuánticos para calcular los valores de esperados $\langle O_a \rangle, \langle O_b \rangle, \langle O_\theta \rangle$ .....	51
Figura 21: Algoritmos cuánticos para calcular los valores esperados $\langle O_{aa} \rangle, \langle O_{bb} \rangle$ del sistema cuántico de un cúbit $U_{1q}$ .....	52
Figura 22: Algoritmos cuánticos para calcular los valores esperados $\langle O_{ab} \rangle, \langle O_{a\theta} \rangle, \langle O_{b\theta} \rangle$ , del sistema cuántico de un cúbit $U_{1q}$ .....	53
Figura 23: Tensor cuántico geométrico del sistema genérico de un cúbit en función del parámetro $\theta$ .....	54
Figura 24: Componente $TGG_{1q}(a, b)$ del tensor cuántico geométrico con distintos valores de los parámetros a y b .....	55
Figura 25: Cálculo de la componente del tensor $TGG_{1q}(a, b)$ a diferentes números de <i>shots</i> por algoritmo cuántico .....	56
Figura 26: Cálculo de la parte real de la componente del tensor cuántico geométrico $TGG_{1q}(a, b)$ para el sistema de un cúbit en IBM_Lagos .....	57

Figura 27: Cálculo de la parte imaginaria de la componente del tensor cuántico geométrico $TCG_{1q}(a, b)$ para el sistema de un cúbit en IBM_Lagos .....	58
Figura 28: Sistema de dos qubits con entrelazamiento parametrizado por los ángulos $a_1, b_1, \theta_1, a_2, b_2, \theta_2$ .....	60
Figura 29: Circuito cuántico para calcular $\langle O_{a_1} \rangle$ .....	63
Figura 30: Algoritmo cuántico para calcular $\langle O_{\rho_i} \rangle$ .....	63
Figura 31: Algoritmo cuántico para calcular los valores esperados $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle, \rho_i, \rho_j \in \{a_2, b_2, \theta_2\}, i \leq j$ .....	64
Figura 32: Algoritmo cuántico para calcular los valores esperados $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle, \rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}, \rho_j \in \{a_1, b_1\}$ .....	65
Figura 33: Algoritmo cuántico para calcular los valores esperados $\langle O_{\rho_i \theta_1} \rangle, \rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ .....	66
Figura 34: Componente $TCG_{2q}^{11}$ del tensor cuántico geométrico en función de $\theta_1$ .....	67
Figura 35: Componente $TCG_{2q}^{12}$ del tensor cuántico geométrico en función de $\theta_1$ .....	68
Figura 36: Componente $TCG_{2q}^{21}$ del tensor cuántico geométrico en función de $\theta_1$ .....	69
Figura 37: Elemento del tensor cuántico geométrico $TCG_{2q}(b_1, b_2)$ y los valores esperados $\langle O_{b_1 b_2} \rangle, \langle O_{b_1} \rangle, \langle O_{b_2} \rangle$ que lo componen .....	70
Figura 38: Componente $TCG_{2q}^{22}$ del tensor cuántico geométrico en función de $\theta_1$ .....	71
Figura 39: Cálculo analítico y por algoritmos cuánticos del elemento del tensor $TCG_{2q}(a_1, a_2)$ .....	72

# Capítulo I: Introducción

## 1. Antecedentes

En las últimas décadas, ha proliferado el interés por estudiar la mecánica cuántica desde una perspectiva geométrica, la cual relaciona las propiedades físicas de un sistema cuántico con las características geométricas de un espacio métrico <sup>[1]</sup>. A través de este enfoque, se han podido describir y explicar sistemas físicos <sup>[2]</sup>, fenómenos de entrelazamiento <sup>[3]</sup>, transiciones de fase cuánticas y topológicas <sup>[4]</sup>, así como la evolución de los estados cuánticos <sup>[5]</sup>.

Por su parte, el espacio de los estados cuánticos es descrito por el espacio complejo proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}$ , en el que la noción de distancia se define naturalmente por la métrica de Fubini-Study <sup>[6]</sup>. Este elemento geométrico cuantifica la distinguibilidad estadística entre dos estados cuánticos que se derivan de una misma familia de hamiltonianos <sup>[7]</sup>, y se ha utilizado para identificar transiciones de fase cuánticas y topológicas <sup>[8]</sup>. A su vez, la métrica se ha generalizado para el caso de estados mixtos <sup>[9]</sup>, y ha sido calculada en el modelo XY <sup>[7]</sup>, en el modelo de Dicke <sup>[10]</sup>, en el modelo SSH <sup>[11]</sup>, y en ciertos modelos de aislantes topológicos <sup>[12]</sup>.

Asimismo, M. V. Berry introdujo en 1984 la aclamada fase de Berry, también conocida como fase geométrica <sup>[13]</sup>, que se define como el factor de fase que adquiere un sistema cuántico al evolucionar adiabáticamente sobre una trayectoria cerrada en el espacio paramétrico. Esta fase es independiente del dinamismo del sistema cuántico, y por lo tanto, es de naturaleza geométrica <sup>[14]</sup>. Sus implicaciones están presentes en fenómenos como el efecto Hall cuántico <sup>[15]</sup>, el efecto Aharonov-Bohm <sup>[15]</sup> o la polarización eléctrica en condiciones de cero temperatura y nulo campo eléctrico <sup>[16]</sup>.

Consecuentemente, la fase de Berry ha sido estudiada en diversos sistemas cuánticos. Sjöqvist (2000) calculó la fase geométrica para un sistema de spines- $\frac{1}{2}$  entrelazados <sup>[17]</sup>, mientras que Basu (2006) dedujo la relación entre la fase y la concurrencia del sistema mencionado <sup>[18]</sup>; a su vez, en el 2004, De Chiara y Palma calcularon la fase de Berry para el sistema de spin- $\frac{1}{2}$  dentro de un campo magnético variable <sup>[19]</sup>; en el mismo año, Yi, Wang,

y Zheng obtuvieron la fase de Berry en un sistema compuesto bipartito <sup>[20]</sup>. Además, el estudio de la fase de Berry se ha generalizado para sistemas abiertos <sup>[21]</sup>, estados mixtos <sup>[22]</sup>, y evoluciones no adiabáticas <sup>[23]</sup>.

A su vez, el tensor cuántico geométrico (TCG) es un elemento matemático cuya parte real es el tensor métrico de Fubini-Study, mientras que la parte imaginaria corresponde a la curvatura de Berry, que se define como la fase de Berry por unidad de área en el espacio paramétrico <sup>[24]</sup>. De esta manera, el TCG captura la información geométrica más importante de un sistema cuántico, y por lo tanto, es clave para comprender gran variedad de fenómenos físicos.

Subsecuentemente, el tensor cuántico geométrico se ha calculado analítica y numéricamente en diversos modelos. Cheng mostró el TCG del sistema de spin  $\frac{1}{2}$  en un campo magnético <sup>[24]</sup>, mientras que Kolodrubetz, Gritsev, y Polkovnikov hicieron lo propio para el modelo XY con un campo transversal <sup>[25]</sup>. Por su parte, Rattacaso y colaboradores (2020) calcularon el TCG para estados cuánticos fuera del equilibrio <sup>[26]</sup>, mientras que Bleu (2018) et al. estudiaron el tensor en sistemas cuánticos de dos bandas <sup>[27]</sup>. Recientemente, Gutiérrez-Ruiz et al. (2021) cuantificaron el tensor cuántico geométrico para una versión del modelo LMG <sup>[28]</sup>, mientras que Chen et al. Computaron apenas en el 2023 el TCG de variaciones hermíticas y no hermíticas del modelo SSH <sup>[29]</sup>.

Además, en los últimos años el TCG ha sido cuantificado experimentalmente. En el 2019, Yu, M. y colaboradores reportaron la primera medición experimental completa del tensor cuántico geométrico en un par de cúbits, conformados por vacancias de nitrógeno en diamante <sup>[30]</sup>. Por su parte, Gianfrate et al. (2020) cuantificaron el TCG de una microcavidad planar de GaAs/AlGaAs <sup>[31]</sup>, mientras que Tan, et al. (2019) consiguieron medir el tensor cuántico geométrico en cúbits superconductores <sup>[32]</sup>.

Por otro lado, la computación cuántica es una tecnología en desarrollo que aprovecha los fenómenos cuánticos de superposición y entrelazamiento para realizar cálculos, con el fin de resolver una clase específica de problemas más rápido que la computación clásica. Sus potenciales aplicaciones son variadas, e incluyen soluciones en ciberseguridad, en el diseño



de fármacos, en la innovación en materiales, en finanzas, en problemas de optimización y en la simulación de sistemas cuánticos <sup>[33,34]</sup>.

Con la llegada en el último lustro de las primeras computadoras cuánticas (con un número relativamente pequeño de cúbits), se ha utilizado esta tecnología para calcular las propiedades geométricas de sistemas cuánticos. Zang et al. reportaron en el 2017 la medición de la fase de Berry en circuitos superconductores <sup>[35]</sup>, mientras que Murta, Catarina y Fernández-Rossier (2020) diseñaron un algoritmo para obtener la fase de Berry por la vía de la computación cuántica sin requerir la integración de la curvatura <sup>[36]</sup>; por su parte, Tamiya, Koh y Nakagawa (2020) utilizaron el algoritmo cuántico variacional de eigenvalores (VQE, por sus siglas en inglés) para evaluar la fase de Berry <sup>[37]</sup>, mientras que Xiao, Freericks y Kemper (2021) demostraron la robustez de invariantes topológicas en una computadora cuántica con ruido <sup>[38]</sup>. Por su parte, Stokes et. al (2019) diseñaron un algoritmo cuántico para aproximar el tensor cuántico geométrico en circuitos parametrizados <sup>[39]</sup>, mismo año en el que Tan et al. midieron el tensor cuántico geométrico en cúbits superconductores <sup>[40]</sup>. Por último, el año pasado, Zheng et al. (2022) utilizaron un sistema de cuatro cúbits para obtener el tensor cuántico geométrico del modelo BHZ <sup>[41]</sup>.

De esta manera, las publicaciones que se mencionan en este apartado han sido valiosas para los campos de investigación en geometría cuántica, transiciones de fase, invariantes topológicas, y computación cuántica, y sostienen amplia relevancia en la motivación para realizar esta trabajo. Por lo tanto, en esta tesis se propone el diseño de algoritmos cuánticos para calcular el tensor cuántico geométrico del modelo de: a) Un cúbit con rotaciones genéricas, b) Dos cúbits con entrelazamiento. El enfoque del trabajo consistió en la cuantificación por medio del modelo del circuito cuántico de los valores esperados de los gradientes de las matrices unitarias que describen los sistemas cuánticos correspondientes. Dichos valores esperados, al multiplicarse, componen cada uno de los elementos de ambos tensores cuánticos geométricos.

## 2. Motivación

El desarrollo de este trabajo está motivado por varios aspectos. El primero, por las potenciales aplicaciones del tensor cuántico geométrico para detectar transiciones de fase cuánticas y topológicas, que pueden tener impacto en el diseño y la fabricación de una computadora cuántica con protección topológica ante la decoherencia ambiental. El segundo, por la reciente posibilidad de ejecutar algoritmos cuánticos en computadoras con varias unidades de cúbits, lo que plantea un nuevo paradigma para el cálculo de las características geométricas de un sistema cuántico. Por último, por lo general no es eficiente simular sistemas con correlaciones cuánticas bajo un esquema de computación clásica. De esta manera, la intención de estudiar el modelo de dos cúbits con entrelazamiento es aprovechar las cualidades que ofrece la computación cuántica para simular sistemas con correlaciones cuánticas, y a su vez, servir como base para el cálculo del tensor cuántico geométrico de un amplio volumen de cúbits entrelazados.

### 3. Hipótesis

Es posible plantear un conjunto de algoritmos cuánticos que calculen el tensor cuántico geométrico del espacio asociado a un cúbit con rotaciones genéricas, y a un sistema de dos cúbits con entrelazamiento, que involucra derivadas de operadores unitarios en distintas direcciones.

### 4. Objetivos

#### 4.1 Objetivo general

Diseñar y programar los algoritmos cuánticos que calculen el tensor cuántico geométrico del espacio asociado a un cúbit con rotaciones genéricas, y a un sistema de dos cúbits con entrelazamiento.

#### 4.2 Objetivos específicos

- Establecer el espacio paramétrico del modelo de un cúbit con rotaciones genéricas, y del sistema de dos cúbits con entrelazamiento.
- Determinar los valores esperados que se requieren para calcular el TCG de cada sistema cuántico, que involucra derivadas de operadores unitarios (que no son unitarias).
- Calcular analíticamente el TCG de ambos sistemas de cúbits.
- Descomponer los operadores respectivos a los valores esperados como una suma ponderada de matrices unitarias, que representarán el espacio tangencial del espacio de parámetros del sistema.
- Esquematizar los algoritmos cuánticos para cuantificar el TCG del sistema de un cúbit con rotaciones genéricas.
- Diseñar los algoritmos cuánticos para calcular el TCG del sistema de dos cúbits con entrelazamiento, cuyo espacio paramétrico es mayor que el sistema de un cúbit.
- Implementar los algoritmos cuánticos en el simulador de computación cuántica *QasmSimulator* y en la computadora cuántica *IBM\_Lagos*.

- Evaluar cualitativamente el rendimiento de los algoritmos cuánticos y su comparación con el resultado analítico.
- Relacionar algunos elementos del TCG con el grado de entrelazamiento del sistema de dos cúbits.

# Capítulo II: Marco teórico

## I. Geometría de los estados cuánticos

### 1. Formalismo de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica estudia los estados cuánticos y las observables de un sistema físico; los primeros son representados por funciones de onda y los segundos por operadores, los cuales cumplen con las condiciones suficientes para ser representados como vectores y transformaciones lineales, respectivamente <sup>[42]</sup>. Por consiguiente, la mecánica cuántica se puede analizar dentro del formalismo de un espacio vectorial generalmente complejo, continuo e infinito  $\mathbb{C}$  <sup>[43,44]</sup>.

Por su parte, las funciones de onda  $f(x)$  cumplen con ser funciones de cuadrado integrable en un intervalo dado, es decir,

$$\int_{x_0}^{x_f} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad (1)$$

de manera que el espacio vectorial en el que se desarrolla la mecánica cuántica es particularmente, el subespacio complejo  $L^2$ , también conocido como espacio de Hilbert <sup>[45]</sup>, por la naturaleza probabilística en la descripción de estos sistemas físicos.

#### 1.1 Estados cuánticos

Un estado cuántico  $|\psi\rangle$  con eigenestados  $\{|k\rangle\}$  y eigenvalores  $\{P_k\}$  respectivos a algún operador dinámico  $P$  que cumplen la ecuación de eigenvalores  $P|k\rangle = P_k|k\rangle$ , es descrito de manera general como,

$$|\psi\rangle = \sum_k a_k |k\rangle, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

en donde  $a_k = \langle k|\psi\rangle$ ,  $\sum_k |a_k|^2 = 1$ , tal que  $|a_k|^2$  representa la probabilidad de que el sistema colapse en el estado  $|k\rangle$  al realizar una medición. De esta forma, cada estado cuántico  $|\psi(a_1, a_2, a_3, \dots)\rangle$  está caracterizado por un conjunto complejo  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  que se relaciona con las componentes de un vector unitario en el espacio de Hilbert <sup>[46]</sup>.

## 1.2 Espacio de Hilbert

El espacio de Hilbert ( $\mathcal{H}$ ) está definido como el conjunto de vectores  $\psi_{\mathcal{H}1}, \psi_{\mathcal{H}2}, \dots, \psi_{\mathcal{H}n}$  y escalares  $\upsilon_{\mathcal{H}1}, \upsilon_{\mathcal{H}2}, \dots, \upsilon_{\mathcal{H}n}$ , tal que se satisfacen las siguientes propiedades <sup>[47]</sup>:

- 1)  $\mathcal{H}$  es un espacio vectorial.
- 2)  $\mathcal{H}$  tiene un producto interno entre cualesquiera dos vectores  $\psi_{\mathcal{H}m}, \psi_{\mathcal{H}k}$ , que se define como  $(\psi_{\mathcal{H}m}, \psi_{\mathcal{H}k}) = \int_{x_0}^{x_f} \psi_{\mathcal{H}mk}^* \cdot \psi_{\mathcal{H}k} dx$ , tal que:
  - a)  $(\psi_{\mathcal{H}m}, \psi_{\mathcal{H}k}) = (\psi_{\mathcal{H}k}, \psi_{\mathcal{H}m})^*$ .
  - b) El producto interno es lineal con respecto al segundo factor y antilineal con respecto al primero.
  - c) El producto interno de un vector  $\psi_{\mathcal{H}k}$  con él mismo es un número real positivo, y solo es cero cuando  $\psi_{\mathcal{H}k} = 0$ .
- 3)  $\mathcal{H}$  es separable.
- 4)  $\mathcal{H}$  es completo.

### 1.2.1 Espacio de Hilbert de dimensión finita

Los sistemas físicos de la mecánica cuántica son generalmente descritos por espacios de Hilbert de dimensión infinita; no obstante, cuando los estados cuánticos de un sistema son finitos y discretos, se puede utilizar el formalismo de un espacio de Hilbert finito de dimensión  $\mathcal{N}$  ( $\mathcal{H}^{\mathcal{N}}$ ), en donde cada estado cuántico está representado por un vector unitario de dicha dimensión <sup>[48,49]</sup>. Algunos ejemplos incluyen a la descripción cuántica del momento angular <sup>[49]</sup>, el fenómeno de polarización de un fotón <sup>[50]</sup> y el estudio del procesamiento de información cuántica <sup>[51]</sup>.

### 1.3 Perspectiva geométrica de la mecánica cuántica

Como se mencionó, la mecánica cuántica se estudia a través del formalismo de los espacios de Hilbert. Por otro lado, de la misma manera que en otros campos de la física, la mecánica cuántica puede ser formulada por medio de un lenguaje puramente geométrico; la geometría, por su parte, está presente en la cuántica desde un nivel fundamental, dado que el espacio de los estados cuánticos presenta estructuras geométricas como la métrica y la curvatura, que inducen y explican fenómenos cuánticos no triviales <sup>[52]</sup>.

Así pues, el elemento matemático más utilizado para exhibir las propiedades geométricas del espacio cuántico es el tensor cuántico geométrico, cuyas partes real e imaginaria corresponden respectivamente a la métrica del espacio  $\mathbb{C}P$  y a la curvatura de Berry del espacio paramétrico. De esta manera, a través del análisis geométrico de la mecánica cuántica se han podido describir y explicar sistemas físicos, fenómenos de entrelazamiento, transiciones de fase cuánticas y topológicas, evoluciones cuánticas, por mencionar algunos ejemplos <sup>[53,54]</sup>.

En las siguientes secciones, se introducen los conceptos para comprender y calcular cada una de las componentes del tensor cuántico geométrico, así como los componentes del modelo del circuito cuántico, y los algoritmos base para la determinación de valores esperados; todo estos elementos fueron centrales en el trabajo que se llevó a cabo en esta tesis.

## 2. La distancia entre dos estados cuánticos

### 2.1 Distancia entre dos elementos del espacio de Hilbert

La distancia en el espacio de Hilbert entre dos vectores unitarios con coeficientes complejos,  $|\psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)\rangle$  y  $|\psi'(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)\rangle$ , está dada por la magnitud de la diferencia vectorial de los estados,

$$\text{Distancia}_{\mathcal{H}}(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) = \sqrt{|\alpha_1 - \beta_1|^2 + |\alpha_2 - \beta_2|^2 + \dots + |\alpha_N - \beta_N|^2}. \quad (3)$$

Esto implica que la distancia en  $\mathcal{H}^N$  entre dos estados cuánticos que difieren únicamente por una fase global  $\Phi$ , no es necesariamente cero,

$$\text{Distancia}_{\mathcal{H}^N}(|\psi\rangle, e^{i\Phi}|\psi\rangle) \neq 0 \Leftrightarrow \Phi \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Sin embargo, dado que los estados cuánticos poseen invariancia gauge,  $|\psi\rangle \equiv e^{i\Phi}|\psi\rangle$ , la ecuación (4) no cumple con una de las condiciones propias de toda función distancia (ver sección 2.4.1). Por lo tanto, es necesario redefinir la distancia entre dos estados de maneras más convenientes, específicamente, dentro del espacio complejo proyectivo <sup>[55]</sup>.

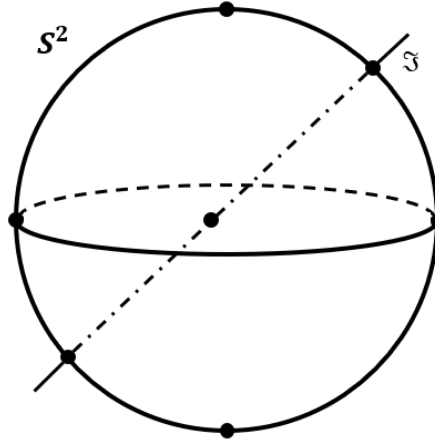
## 2.2 Espacios proyectivos $\mathbb{P}$

### 2.2.1 Espacio proyectivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}$

El espacio proyectivo real de dimensión  $n$ , denotado por  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ , se define como el conjunto de rayos que pasan por el origen del espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En consecuencia, cada rayo corta en dos puntos antipodales a la esfera unitaria  $S^n$  centrada en el origen de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (ver figura 1 para el caso  $n = 2$ ), y por lo tanto,

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n \simeq S^n / \mathbb{Z}_2, \quad (5)$$

tal que  $\mathbb{Z}_2$  es un grupo de dos elementos <sup>[56]</sup>.



**Figura 1.** Espacio proyectivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ . Cada rayo  $\xi \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  intersecta en dos puntos a la esfera  $S^2$ .

### 2.2.2 Espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}$

El espacio proyectivo complejo de dimensión  $n$ , denotado por  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , es el conjunto de rayos que pasan por el origen del espacio  $\mathbb{C}^{n+1}$ . A su vez, dos elementos  $Z, Z' \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , representan el mismo punto ( $Z = Z'$ ) si,

$$cZ = c(z_1 : z_2 : \dots : z_{n+1}) = Z', \quad \{z_i\} \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad (6)$$

tal que al menos algún  $z_k$  es diferente de cero. Por su parte, el conjunto  $\{z_i\}$  recibe el nombre de coordenadas homogéneas del punto  $Z$  <sup>[57]</sup>. A su vez, el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  puede ser mapeado como una esfera de dimensión  $2n + 1$ ,



$$\mathbb{CP}^n \simeq S^{2n+1}/U(1), \quad (7)$$

donde  $U(1)$  es el grupo unitario de grado 1. Además, el producto interno  $f_{\text{int}}$  de dos puntos  $Z_p, Z_{p'}$  en el espacio proyectivo se define como <sup>[57]</sup>,

$$f_{\text{int}}(Z_p, Z_{p'}) = \sum_k \overline{Z_{pk'}} Z_{pk}, \quad (8)$$

tal que  $Z_p = (Z_{p1}, Z_{p2}, \dots, Z_{p(n+1)})$ . Por último, cabe agregar que  $\mathbb{CP}^n$  es un espacio métrico, con una métrica de Kähleriana <sup>[58]</sup> que es descrita en la sección 2.4.3.

### 2.3 Los estados cuánticos y el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$

En la mecánica cuántica, cada estado cuántico  $|\psi_a\rangle$  tiene un respectivo vector en el espacio de Hilbert (ver sección 1.1). Además, carece de significado físico el multiplicar este vector por una fase  $e^{i\xi}$ , o por un escalar. Por consiguiente, dentro del formalismo de un espacio de Hilbert finito de dimensión  $n + 1$ , se cumple,

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \sim (za_1, za_2, \dots, za_{n+1}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

donde  $\{a_k\}$  y  $\{za_k\}$  son las componentes respectivas de los vectores  $|\psi_a\rangle$  y  $z|\psi_a\rangle$  en el espacio  $\mathcal{H}^{n+1}$ . Por otro lado, la ecuación (9) es similar a la ecuación (6), la cual define a un punto dentro del espacio complejo proyectivo (sección 2.2.2), por lo que se visualiza una correspondencia entre un estado  $|\psi_a\rangle$  y un elemento de  $\mathbb{CP}^n$ . La posibilidad de introducir un producto interno, y de poder representar propiedades como la superposición, permite describir al espacio de los estados cuánticos como un espacio complejo proyectivo <sup>[46]</sup>.

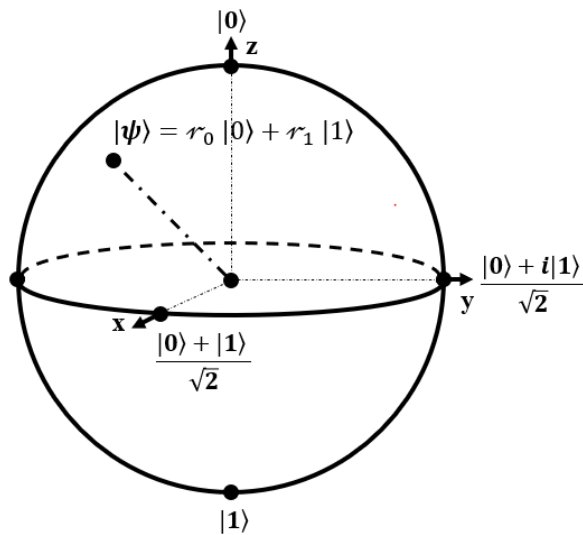
#### 2.3.1 El espacio cuántico de dos niveles y $\mathbb{CP}^1$

Un sistema cuántico de dos niveles, como el sistema de un electrón de spin-1/2, está caracterizado por el conjunto de vectores complejos  $(c_1, c_2)^t$  que residen en el espacio de Hilbert de dimensión dos <sup>[46]</sup>, y por otro lado, por los elementos del espacio proyectivo  $\mathbb{CP}^1$  (ver sección 2.3). De acuerdo con la ecuación (7),

$$\mathbb{CP}^1 \simeq S^3/U(1) \simeq S^2, \quad (10)$$

tal que  $S^2$  es la superficie de la esfera que reside en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Esta esfera recibe el nombre de la esfera de Bloch, cuyos puntos de la superficie corresponden a los estados cuánticos del sistema de dos niveles <sup>[59]</sup>.

Dicha esfera se aprecia a continuación en la figura 2. En esta configuración, los puntos de la esfera que se intersectan con el eje  $z$  positivo y negativo se definen como el estado  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  respectivamente: mientras tanto, los estados de la superficie corresponden a una combinación lineal entre tales estados,  $|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1|1\rangle$ .



**Figura 2.** Esfera de Bloch cuya superficie representa el espacio cuántico de dos niveles.

En las secciones 2.2 y 2.3 se introdujo el espacio complejo proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y su relación con el espacio de los estados cuánticos. A continuación, se elabora sobre el concepto de distancia dentro de este espacio, y por ende, sobre la métrica de los estados cuánticos.

## 2.4 Métrica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ : métrica de Fubini-Study

### 2.4.1 Espacio métrico y función distancia

Un espacio métrico es un conjunto no vacío  $\mathcal{M}$ , que cuenta con una estructura conocida como métrica o función distancia  $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Esta función toma un par de elementos  $x, y \in \mathcal{M}$ , y les asigna un valor real no-negativo, tal que se cumplen las siguientes cuatro propiedades <sup>[60,61]</sup>:

- 1)  $d(x, y) \geq 0$ ,
- 2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- 3)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- 4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

(11)

De esta manera, dentro de un mismo espacio métrico es posible definir una variedad de funciones distancia, siempre que se obedezcan las condiciones de la ecuación (11).

## 2.4.2 Tensor métrico

El tensor métrico  $g^{\mathcal{M}}$  es una herramienta geométrica que define la distancia infinitesimal entre dos puntos vecinos que forman parte de un espacio métrico  $\mathcal{M}$ . Por lo tanto, permite calcular la distancia entre dos puntos así como la longitud de cualquier curva paramétrica dentro del espacio. De esta manera, varias de las propiedades geométricas de  $\mathcal{M}$  son determinadas por el tensor métrico <sup>[62,63,64,65]</sup>.

### 2.4.2.1 Notación de Einstein

En su desarrollo de la teoría de la relatividad, Einstein introdujo una notación para representar la sumatoria de términos con índices similares ( $w_i, x_i$ ); tal notación se muestra a continuación <sup>[66]</sup>.

$$w_i x_i \cong \sum_{i=1}^n w_i x_i. \quad (12)$$

A su vez, la notación de Einstein para representar una doble sumatoria, dado un par de parejas con índices iguales ( $w_{ij}, x_i; w_{ij}, y_j$ ), se define como <sup>[66]</sup>,

$$w_{ij} x_i y_j \cong \sum_i^n \sum_j^n w_{ij} x_i y_j. \quad (13)$$

Por lo tanto, dada una matriz cuadrada  $T(n)$  cuyos elementos están dados por  $t_{ij}$ , y dado un vector  $s(n) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , se cumple,

$$t_{ij} s_i s_j \cong s T s', \quad (14)$$

tal que  $s'$  es el vector transpuesto de  $s$ .

#### 2.4.2.2 Definición formal del tensor métrico

Dado un espacio métrico  $\mathcal{M}^n$  cuya base está dada por  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ , el tensor métrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n}(m)$  está definido como un tensor covariante, simétrico, de rango dos y de dimensión  $n \times n$ , como se visualiza a continuación,

$$\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n}(m_p) = \begin{pmatrix} \mathcal{g}_{m_1 m_1}^{\mathcal{M}^n} & \mathcal{g}_{m_1 m_2}^{\mathcal{M}^n} & \dots & \dots & \mathcal{g}_{m_1 m_n}^{\mathcal{M}^n} \\ \mathcal{g}_{m_2 m_1}^{\mathcal{M}^n} & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \mathcal{g}_{m_\mu m_\nu}^{\mathcal{M}^n} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{g}_{m_n m_1}^{\mathcal{M}^n} & \dots & \dots & \dots & \mathcal{g}_{m_n m_n}^{\mathcal{M}^n} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

tal que cada punto  $m_p \in \mathcal{M}^n$  cuenta con un tensor métrico asociado  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n}(m_p)$  que cumple con las siguientes propiedades <sup>[67,68]</sup>:

- 1) Las segundas derivadas de  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n}$  existen y son continuas.
- 2) El tensor  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n}$  es simétrico ( $\mathcal{g}_{ij}^{\mathcal{M}^n} = \mathcal{g}_{ji}^{\mathcal{M}^n}$ ).
- 3)  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n}$  no es una matriz singular, es decir,  $(\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n})^{-1}$  existe.
- 4) La distancia que se calcula a partir del tensor métrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}^n}$  es independiente del sistema de coordenadas de  $\mathcal{M}^n$ .

#### 2.4.2.3 Tensor métrico Riemmaniano

El tensor métrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}_S}$  de un espacio métrico suave  $\mathcal{M}_S$  se le conoce como tensor métrico Riemmaniano si es definido positivo, es decir, para cualquier vector  $v(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{M}_S$ ,  $v \neq (0, 0, \dots, 0)$ , se cumple que <sup>[69]</sup>,

$$\mathcal{g}_{ij}^{\mathcal{M}_S} v_i v_j > 0. \quad (16)$$

---

<sup>1</sup>En la notación de Einstein los índices pueden ser representados por subíndices o superíndices.

Consiguientemente, la distancia infinitesimal  $ds_{\mathcal{M}_s}$  entre dos elementos vecinos  $p_s$  y  $p_s + dp_s$  del espacio métrico  $\mathcal{M}_s$  con coordenadas  $m_{s1}, m_{s2}, \dots, m_{sn}$  esta dada en función del tensor geométrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}_s}(p_s)$  como <sup>[70]</sup>,

$$ds_{\mathcal{M}}^2(p, p + dp) = \mathcal{g}_{m_{si}, m_{sj}}^{\mathcal{M}_s} dm_{si} dm_{sj}. \quad (17)$$

#### 2.4.2.4 Cálculo de la longitud de una curva a partir del tensor métrico Riemmaniano

La longitud de una curva  $\zeta(t)$  parametrizada por  $\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots$ , que reside dentro del espacio métrico  $\mathcal{M}^n$ , está dada por <sup>[71]</sup>.

$$L_{\zeta}(t) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\left| \mathcal{g}_{ij}^{\mathcal{M}} \frac{d\zeta_i}{dt} \frac{d\zeta_j}{dt} \right|} dt, \quad (18)$$

tal que  $t_0 \leq t \leq t_f$  y  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}}$  es el tensor geométrico Riemmaniano de  $\mathcal{M}^n$ .

##### 2.4.2.4.1 Cálculo de la longitud de una curva paramétrica en el espacio $\mathbb{R}^3$

Dado un espacio  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$ , y con una distancia  $\ell_2$ , el tensor geométrico está definido como,

$$\mathcal{g}^{\mathbb{R}^3(r, \theta, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Consiguientemente, con base en la ecuación (18), la longitud de una curva  $\xi$  parametrizada por  $r(t) = 2t, \theta(t) = \sin t, z(t) = t^2$ , está dada por,

$$L_{\xi}(t) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\left| \mathcal{g}_{ij}^{\mathcal{M}} \frac{d\xi_i}{dt} \frac{d\xi_j}{dt} \right|} dt, \quad (20)$$

de manera que  $\xi_1 = r(t), \xi_2 = \theta(t), \xi_3 = z(t)$ . Al sustituir en la ecuación (20) los valores del tensor métrico y las derivadas de las funciones  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , se obtiene la longitud de la curva paramétrica en función de  $t$ ,

$$\begin{aligned}
L_{\xi}(t) &= \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{|\mathcal{g}_{11}^{\mathcal{M}}(2)^2 + \mathcal{g}_{22}^{\mathcal{M}}(\cos t)^2 + \mathcal{g}_{34}^{\mathcal{M}}(2t)^2|} dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{|(2)^2 + (r^2)(\cos t)^2 + (2t)^2|} dt = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{|4t^2 \cos t + 4t^2 + 4|} dt,
\end{aligned} \tag{21}$$

tal que  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

#### 2.4.2.5 La métrica y el cambio en el sistema coordenado del espacio métrico

El tensor métrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}}$  conserva la distancia entre cualesquier dos elementos del espacio métrico asociado  $\mathcal{M}^n$  sin importar el sistema de coordenadas que se tome como referencia; no obstante, las componentes del tensor métrico sí varían dependiendo del nuevo sistema coordenado [72].

De esta manera, dado el tensor métrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}'}$  asociado a un sistema de coordenadas  $m_1', m_2', \dots, m_n'$ , del espacio  $\mathcal{M}^n$ , el tensor métrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}''}$  que corresponde al nuevo sistema coordenado dado por  $m_1'', m_2'', \dots, m_n''$ , se define como,

$$\mathcal{g}_{ij}^{\mathcal{M}''} = \mathcal{g}_{rs}^{\mathcal{M}'} \frac{dm_r'}{dm_i''} \frac{dm_s'}{dm_j''}, \tag{22}$$

como consecuencia de que el tensor métrico  $\mathcal{g}^{\mathcal{M}}$  es por definición un tensor covariante [73].

#### 2.4.2.6 Tensor métrico hermitiano

Un tensor métrico dado por una matriz compleja, hermitiana, y que además es definido positivo, se conoce como tensor métrico hermitiano  $\mathcal{g}^{\mathcal{h}}$ . Consiguientemente, dada una variedad compleja  $M^n$ , el tensor métrico hermitiano asociado está descrito por,

$$\mathcal{g}^{\mathcal{h}^n} = \mathcal{g}^{M^n} + i\omega^{M^n}, \tag{23}$$

tal que  $\mathcal{g}^{M^n}$  es un tensor riemanniano y  $\omega^{M^n}$  es una forma bilineal no degenerada y antisimétrica conocida como forma fundamental. En caso de que  $d\omega^{M^n} = 0$ , el tensor

adquiere el nombre de métrica de Kähler, y el espacio métrico recibe el nombre de variedad de Kähler<sup>[74]</sup>.

### 2.4.3 Métrica del espacio de los estados cuánticos $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ : métrica de Fubini-Study

Dentro del espacio  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , la distancia entre dos elementos está dada por la métrica Kähleriana de Fubini-Study<sup>[75]</sup>, que se define como<sup>[76]</sup>,

$$D_{\text{FS}}(\psi_1, \psi_2) = \sqrt{1 - |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2}, \quad (24)$$

tal que  $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Por su parte,  $D_{\text{FS}}(\psi_1, \psi_2)$  mide la distancia estadística entre dos estados cuánticos<sup>[77]</sup>, es decir, indica qué tan difícil es distinguir el estado cuántico  $\psi_1$  del estado cuántico  $\psi_2$  en un experimento reiterativo<sup>[78]</sup>. Consiguientemente, la distancia de Fubini-Study entre dos estados cuánticos infinitesimalmente cercanos,  $\psi(\lambda)$  y  $\psi(\lambda + d\lambda)$ , está determinada por,

$$D_{\text{FS}}(\psi(\lambda), \psi(\lambda + d\lambda)) = \sqrt{1 - |\langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda + d\lambda) \rangle|^2}, \quad (25)$$

tal que  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  es el conjunto de parámetros que definen a  $\psi(\lambda)$  en el espacio  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , y cuyo tensor métrico asociado es el tensor métrico de Fubini-Study  $\mathcal{G}^{\text{FS}}$ .

Asimismo, la distancia de Fubini-Study cuenta con varias aplicaciones dentro de la mecánica cuántica, entre las que se incluyen: el estudio de la evolución de los estados cuánticos<sup>[79]</sup>, la clasificación de transiciones de fase cuánticas y topológicas<sup>[80]</sup>, algoritmos variacionales<sup>[81,82]</sup> e inclusive, aprendizaje automático cuántico<sup>[83]</sup>.

A continuación, se trata el tema de la curvatura de Berry, cuya información geométrica permite entender una variedad de fenómenos dentro de la mecánica cuántica y su conexión con el tensor cuántico geométrico.

## 3. Curvatura de Berry

### 3.1 Fase de Berry

La fase de Berry, también conocida como fase geométrica<sup>[84]</sup>, es la fase que adquiere un estado cuántico después de evolucionar adiabáticamente en una trayectoria cerrada sobre un

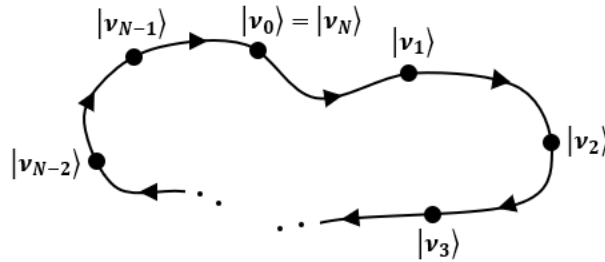
espacio paramétrico; cumple con ser invariante gauge, y por lo tanto, es un fenómeno observable<sup>[85]</sup>. Su existencia desempeña un rol importante en fenómenos físicos tales como el efecto Hall cuántico, anómalo y topológico, la polarización eléctrica, la magnetización orbital<sup>[86]</sup>, y tiene aplicaciones en la física molecular, atómica y nuclear, en fotónica, óptica clásica, y en materia condensada<sup>[85]</sup>.

### 3.1.1 Fase de Berry: caso discreto

Dado un estado cuántico inicial  $|v_0\rangle$  que evoluciona adiabáticamente  $N$  veces ( $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots |v_N\rangle$ ) en una trayectoria cerrada ( $|v_N\rangle = |v_0\rangle$ ), se acumula una fase,

$$\phi_B = -\text{Im} [\ln(\langle v_0|v_1\rangle\langle v_1|v_2\rangle \dots \langle v_{N-1}|v_N\rangle)], \quad (26)$$

la cual recibe el nombre de fase de Berry, cuyo valor es invariante gauge<sup>[87]</sup>; esto significa que, en el caso de una transformación gauge de los estados cuánticos  $|v_\tau\rangle \rightarrow e^{i\theta(\tau)}|v_\tau\rangle$ , la fase de Berry mantiene su valor, dado que cada  $|v_\tau\rangle$  aparece como bra y como ket en la formulación matemática de la ecuación (26) y por ende las fases se cancelan.



**Figura 3.** Evolución discreta de  $|v_0\rangle$  en una trayectoria cerrada. Posterior a la evolución,  $|v_0\rangle$  adquiere una fase geométrica.

Consiguientemente, la ecuación (26) resulta equivalente a,

$$\phi_B = - \sum_{\tau=0}^{N-1} \text{Im}[\ln(\langle v_\tau|v_{\tau+1}\rangle)], \quad (27)$$

con la sutil diferencia de que, en este caso, la fase  $\phi_B$  sólo es invariante gauge módulo  $2\pi$ . Esta formulación matemática es más conveniente para tratar el caso continuo de la fase de Berry.



### 3.1.2 Fase de Berry: caso continuo

Un estado cuántico  $|v(\lambda)\rangle$  que depende de  $n$  parámetros  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  y que a su vez es suave y diferenciable en  $\lambda$ , acumula una fase al evolucionar de manera continua y adiabática en una trayectoria cerrada sobre el espacio paramétrico<sup>[88]</sup> definido por  $\lambda$ . Dicha fase es la fase de Berry  $\Phi_B$ , y con base en la ecuación (27), tiene la siguiente formulación matemática en el límite continuo<sup>[88,89]</sup>,

$$\Phi_B = -\text{Im} \left[ \oint \langle v(\lambda) | \nabla_\lambda | v(\lambda) \rangle \cdot d\lambda \right] = \oint i \langle v(\lambda) | \nabla_\lambda | v(\lambda) \rangle \cdot d\lambda = \oint A(\lambda) \cdot d\lambda, \quad (28)$$

tal que el término  $i \langle v(\lambda) | \nabla_\lambda | v(\lambda) \rangle$  es un vector de  $n$  componentes que se conoce como conexión de Berry<sup>[90]</sup>  $A(\lambda) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ . De esta forma, la fase de Berry es definida como la integral de  $A(\lambda)$  sobre una trayectoria cerrada en el espacio de parámetros. Por lo tanto, la fase de Berry depende del camino en el que un estado evoluciona dentro del espacio paramétrico<sup>[91]</sup> y por ende, se considera de carácter geométrico.

A su vez, es importante enfatizar que la conexión de Berry no es invariante gauge<sup>[92]</sup>, y por lo tanto, no puede ser observada. Por el contrario, la fase de Berry en el límite continuo sí cumple con esta condición (módulo  $2\pi$ ) y por lo tanto, es posible medirla.

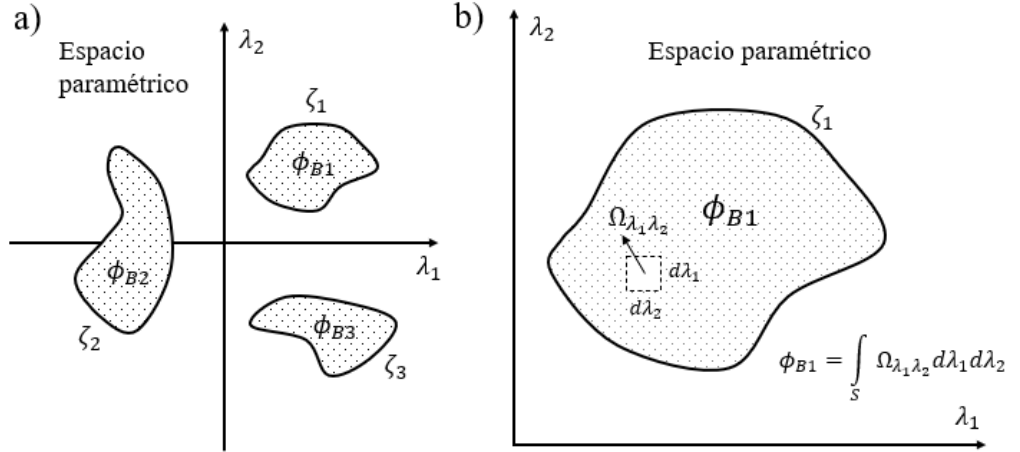
### 3.2 Curvatura de Berry

En el apartado anterior, se definió a la fase de Berry como una integral de línea sobre una trayectoria cerrada  $\zeta$ . No obstante, al utilizar el teorema generalizado de Stokes sobre la ecuación (28), la fase de Berry se calcula como una integral de superficie en el espacio paramétrico definido por  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , como se visualiza a continuación,

$$\Phi_B = \oint_\zeta A(\lambda) \cdot d\lambda = \iint_S \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^{\mu-1} (\delta_\mu A_\nu - \delta_\nu A_\mu) d\lambda_\mu \wedge d\lambda_\nu = \iint_S \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \Omega_{\mu\nu} d\lambda_\mu \wedge d\lambda_\nu, \quad (29)$$

en donde  $S$  es la superficie encerrada por  $\zeta$  en el espacio paramétrico,  $A_\nu$  y  $A_\mu$  son componentes de la conexión de Berry  $A(\lambda)$ , cuyo término  $\Omega_{\mu\nu} = \delta_\mu A_\nu - \delta_\nu A_\mu$  recibe el nombre de curvatura de Berry, la cual es definida como la fase de Berry por unidad de área  $d\lambda_\mu \wedge d\lambda_\nu$ .

De esta manera, la fase de Berry no es más que la suma de la curvatura en cada punto de la superficie encerrada por  $\zeta$  en el espacio de parámetros <sup>[93]</sup>. Dicha curvatura es, como la fase, una cantidad invariante gauge y, por lo tanto, es conveniente utilizarla para calcular  $\phi_B$ .



**Figura 4.** Fase de Berry en el espacio paramétrico. a) Las fases de Berry dependen de su trayectoria cerrada en el espacio paramétrico. b) La fase de Berry como una integral sobre la superficie encerrada por  $\zeta_1$  en el espacio paramétrico de dos dimensiones.

Por su parte, cada punto  $\lambda_p$  del espacio paramétrico propio del conjunto de estados  $|v(\lambda)\rangle$  cuenta con un tensor antisimétrico asociado  $\Omega_v(\lambda_p)$ , de dimensión  $n$  y rango 2. Este tensor recibe el nombre de tensor de curvatura de Berry <sup>[94]</sup>, y se construye a partir de la familia de curvaturas  $\Omega_{\mu\nu}(\lambda_p)$ ,  $\mu, \nu \in \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , como se muestra a continuación,

$$\Omega_v(\lambda_p) = \begin{pmatrix} \Omega_{\lambda_1\lambda_1} & \Omega_{\lambda_1\lambda_2} & \dots & \dots & \Omega_{\lambda_1\lambda_n} \\ \Omega_{\lambda_2\lambda_1} & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \Omega_{\mu\nu} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{\lambda_n\lambda_1} & \dots & \dots & \dots & \Omega_{\lambda_n\lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Asimismo, la curvatura y la fase de Berry tienen relevancia en diversos campos de la física. Son responsables de fenómenos como la ferroelectricidad, las transiciones de fase topológicas, la magnetización orbital y el efecto Hall (cuántico y anómalo), y tienen aplicaciones en física de la materia condensada, electrónica, espintrónica, computación cuántica topológica, entre otras <sup>[93,95]</sup>.

En la siguiente sección, se aborda el concepto del tensor cuántico geométrico (TCG), el cual contiene algunas de las características geométricas más importantes del espacio de los estados cuánticos, como son la métrica de Fubini-Study y la curvatura de Berry.

#### 4. Tensor cuántico geométrico (TCG)

Como se revisó en la sección 2.3, el espacio de los estados cuánticos puede describirse como el espacio complejo proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ , cuya noción de distancia está determinada a través de la métrica de Fubini-Study. Por otra parte, el enfoque geométrico de la mecánica cuántica plantea una descripción de los fenómenos cuánticos a partir de las características geométricas del espacio  $\mathbb{C}P^n$  y del espacio paramétrico, las cuales son proporcionadas por el tensor cuántico geométrico (TCG) [96].

El TCG se introduce a continuación; dado un hamiltoniano  $\mathcal{H}(\lambda)$  que depende suavemente de  $n$  parámetros  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , los cuales conforman la base del espacio cuántico  $\mathcal{M}^c$ , tal que cada punto  $\lambda_p$  de  $\mathcal{M}^c$  corresponde a una combinación lineal  $|\psi(\lambda_p)\rangle = \sum \phi_N$  de los eigenestados de  $\mathcal{H}(\lambda)$ , se define el tensor cuántico geométrico  $Q^\Psi$  en el punto  $\lambda_p$  como [97],

$$Q_{\lambda_\mu \lambda_\nu}^\Psi(\lambda_p) = \langle \delta\psi_{\lambda_\mu}(\lambda_p) | \delta\psi_{\lambda_\nu}(\lambda_p) \rangle - \langle \delta\psi_{\lambda_\mu}(\lambda_p) | \psi(\lambda_p) \rangle \langle \psi(\lambda_p) | \delta\psi_{\lambda_\nu}(\lambda_p) \rangle, \quad (31)$$

tal que  $Q_{\lambda_\mu \lambda_\nu}^\Psi$  es el elemento de la fila  $\mu$  y columna  $\nu$  de  $Q^\Psi$ , como se visualiza a continuación en la ecuación (32),

$$Q^\Psi(\lambda_p) = \begin{pmatrix} Q_{\lambda_1 \lambda_1}^\Psi & Q_{\lambda_2 \lambda_1}^\Psi & \dots & \dots & Q_{\lambda_1 \lambda_n}^\Psi \\ Q_{\lambda_2 \lambda_1}^\Psi & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & Q_{\lambda_\mu \lambda_\nu}^\Psi & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ Q_{\lambda_n \lambda_1}^\Psi & \dots & \dots & \dots & Q_{\lambda_n \lambda_n}^\Psi \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Dicho tensor cuántico geométrico  $Q^\Psi$  es de rango dos y dimensión  $n$ , el cual está conformado por una parte real que corresponde a la métrica de Fubini-Study  $g^\Psi$  y una imaginaria respectiva a la curvatura de Berry  $\Omega^\Psi$  [97],

$$\mathcal{Q}_{\lambda_\mu\lambda_\nu}^\Psi(\lambda_p) = \mathcal{G}_{\lambda_\mu\lambda_\nu}^\Psi + i \left[ -\frac{1}{2} \Omega_{\lambda_\mu\lambda_\nu}^\Psi \right]. \quad (33)$$

De esta manera,  $\mathcal{Q}^\Psi$  provee información geométrica sobre los estados cuánticos  $|\psi(\lambda)\rangle$  que se utiliza para detectar transiciones de fase cuánticas y topológicas <sup>[98]</sup>, para describir fenómenos de interferencia, entrelazamiento, y la evolución de estados <sup>[99,100]</sup>, así como para explicar una variedad de fenómenos cuánticos mencionados en las secciones previas de este documento. En las siguientes secciones, se muestra el desarrollo matemático que relaciona al tensor cuántico geométrico con la métrica de Fubini-Study y la curvatura de Berry.

#### 4.1 TCG y la métrica de Fubini-Study

Como se mencionó en la sección 2.4.3, la métrica de Fubini-Study entre dos estados infinitesimalmente cercanos está dada por,

$$D_{\text{FS}}(\psi(\lambda), \psi(\lambda + d\lambda)) = \sqrt{1 - |\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda + d\lambda)\rangle|^2}; \quad (34)$$

asimismo, mediante la expansión de Taylor de varias variables<sup>1</sup>,

$$|\psi(\lambda + d\lambda)\rangle = |\psi\rangle + \sum_{i=1}^n |\delta_i\psi_i\rangle d\lambda_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |\delta_{ij}\psi_{ij}\rangle d\lambda_i d\lambda_j + O(d\lambda^3); \quad (35)$$

$$\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda + d\lambda)\rangle = 1 + \sum_{i=1}^n \langle\psi|\delta_i\psi_i\rangle d\lambda_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle\psi|\delta_{ij}\psi_{ij}\rangle d\lambda_i d\lambda_j + O(d\lambda^3) \quad (36)$$

tal que  $\delta_k\psi_k = \frac{\delta\psi}{\delta\lambda_k}$ ,  $\delta_{kh}\psi_{kh} = \frac{\delta^2\psi}{\delta\lambda_k\delta\lambda_h}$ . Posteriormente, al sustituir la ecuación (36) dentro de la ecuación (34) y aproximar a segundo orden, la distancia infinitesimal de Fubini-Study resulta equivalente a,

$$ds_{\text{FS}} = \sqrt{1 - |\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda + d\lambda)\rangle|^2} = \sqrt{1 - \langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda + d\lambda)\rangle[\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda + d\lambda)\rangle]^*} \quad (37)$$

$$\approx \sqrt{-\left[ \sum_{i=1}^n \langle\psi|\delta_i\psi_i\rangle d\lambda_i + \sum_{i=1}^n \langle\delta_i\psi_i|\psi\rangle d\lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle\psi|\delta_{ij}\psi_{ij}\rangle d\lambda_i d\lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle\delta_{ij}\psi_{ij}|\psi\rangle d\lambda_i d\lambda_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle\delta_j\psi_j|\psi\rangle \langle\psi|\delta_i\psi_i\rangle d\lambda_i d\lambda_j \right]}$$

$$\approx \sqrt{-\left[ \sum_{i=1}^n (\langle \psi | \delta_i \psi_i \rangle + \langle \delta_i \psi_i | \psi \rangle) d\lambda_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} (\langle \delta_{ij} \psi_{ij} | \psi \rangle + \langle \psi | \delta_{ij} \psi_{ij} \rangle) + (\langle \delta_i \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \delta_j \psi_j \rangle) \right] d\lambda_i d\lambda_j \right]}.$$

Posteriormente, al considerar las siguientes relaciones matemáticas,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \delta_i \psi_i \rangle + \langle \delta_i \psi_i | \psi \rangle &= 0; \\ \langle \delta_{ij} \psi_{ij} | \psi \rangle + \langle \psi | \delta_{ij} \psi_{ij} \rangle + \langle \delta_j \psi_j | \delta_i \psi_i \rangle + \langle \delta_i \psi_i | \delta_j \psi_j \rangle &= 0, \\ \langle \delta_j \psi_j | \delta_i \psi_i \rangle + \langle \delta_i \psi_i | \delta_j \psi_j \rangle &= 2\text{Re}[\langle \delta_i \psi_i | \delta_j \psi_j \rangle] \\ \text{Re}[\langle \delta_i \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \delta_j \psi_j \rangle] &= \langle \delta_i \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \delta_j \psi_j \rangle \end{aligned} \quad (38)$$

y sustituir tales ecuaciones dentro de la ecuación (37),

$$\begin{aligned} ds_{\text{FS}}^2 &\approx - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{1}{2} (\langle \delta_j \psi_j | \delta_i \psi_i \rangle + \langle \delta_i \psi_i | \delta_j \psi_j \rangle) + (\langle \delta_j \psi_j | \psi \rangle \langle \psi | \delta_i \psi_i \rangle) \right] d\lambda_i d\lambda_j \quad (39) \\ &\approx - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{1}{2} (2\text{Re}[\langle \delta_i \psi_i | \delta_j \psi_j \rangle]) + (\text{Re}[\langle \delta_i \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \delta_j \psi_j \rangle]) \right] d\lambda_i d\lambda_j \\ &\approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \text{Re}[\langle \delta_i \psi_i | \delta_j \psi_j \rangle - \langle \delta_i \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \delta_j \psi_j \rangle] d\lambda_i d\lambda_j, \end{aligned}$$

se identifica que el primer término dentro de la sumatoria de la ecuación (39) es la parte real del tensor cuántico geométrico, de manera que, en notación de Einstein,

$$ds_{\text{FS}}^2 \approx \text{Re} \left[ Q_{\lambda_i \lambda_j}^{\Psi} \right] d\lambda_i d\lambda_j. \quad (40)$$

Consiguientemente, al revisar la ecuación (17) que define la métrica de Fubini-Study  $\mathcal{G}_{p_i p_j}^{\text{FS}}$ ,

$$ds_{\text{FS}}^2 = \mathcal{G}_{p_i p_j}^{\text{FS}} dp_i dp_j, \quad (41)$$

se concluye, que, en efecto,

$$\text{Re} \left[ Q_{\lambda_i \lambda_j}^{\Psi} \right] = \mathcal{G}_{\lambda_i \lambda_j}^{\text{FS}}. \quad (42)$$

## 4.2 TCG y la curvatura de Berry

De acuerdo con la ecuación (29), la curvatura de Berry se calcula como,

$$\Omega_{\lambda\mu\lambda\nu} = \delta_{\lambda\mu}A_\nu - \delta_{\lambda\nu}A_\mu, \quad (43)$$

tal que  $A_\nu = i\langle v|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle$  y  $A_\mu = i\langle v|\delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}\rangle$ . Por lo tanto, al sustituir los componentes de la conexión de Berry dentro de la ecuación (43),

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda\mu\lambda\nu} &= i\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle + i\langle v|\delta_{\lambda\nu\lambda\mu}v_{\lambda\nu\lambda\mu}\rangle - (i\langle \delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}|\delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}\rangle + i\langle v|\delta_{\lambda\mu\lambda\nu}v_{\lambda\mu\lambda\nu}\rangle) \quad (44) \\ &= i(\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle - \langle \delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}|\delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}\rangle) = i(\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle - (\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle)^*) \\ &= i(2i * \text{Im}[\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle]) = -2\text{Im}[\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle]. \end{aligned}$$

A su vez, al considerar que  $\text{Re}[\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|v\rangle] = \text{Re}[\langle v|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle] = 0$ , entonces,

$$-2 * \text{Im}[\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|v\rangle\langle v|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle] = 0, \quad (45)$$

de manera que al sumar las ecuaciones (44) y (45),

$$\Omega_{\lambda\mu\lambda\nu} = -2 * \text{Im}[\langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle - \langle \delta_{\lambda\mu}v_{\lambda\mu}|v\rangle\langle v|\delta_{\lambda\nu}v_{\lambda\nu}\rangle] = -2 * \text{Im}[\mathcal{Q}_{\lambda\mu\lambda\nu}^\Psi]. \quad (46)$$

Por lo tanto, se concluye con la relación entre el tensor cuántico geométrico y la curvatura de Berry:

$$\text{Im}[\mathcal{Q}_{\lambda\mu\lambda\nu}^\Psi] = -\frac{1}{2}\Omega_{\lambda\mu\lambda\nu}. \quad (47)$$

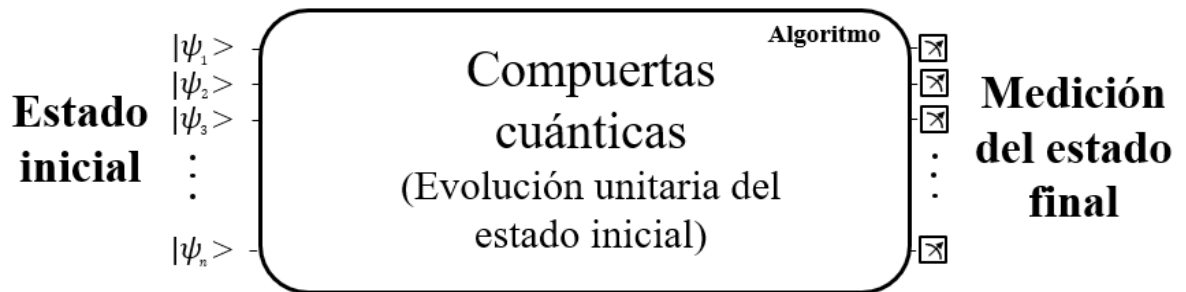
Hasta el momento, se ha hecho referencia al tensor cuántico geométrico y a los elementos que lo conforman. En la siguiente sección, se introducen los temas relacionados con la computación cuántica, para construir y desarrollar el algoritmo del TCG bajo el marco de referencia del modelo del circuito cuántico.

## II. Computación cuántica

La computación cuántica es el procesamiento de la información que utiliza y aprovecha fenómenos cuánticos como la superposición y el entrelazamiento. Por su parte, una computadora cuántica está compuesta por un conjunto de cúbits, sobre los cuales se inicializa, procesa y extrae información, y tiene el objetivo de solucionar problemas que una computadora clásica no puede realizar de manera eficiente.

### 1. Modelo del circuito cuántico

La estructura más explorada para realizar el procesamiento de información cuántica es el modelo del circuito cuántico. En este modelo, una serie de cúbits representan el estado cuántico inicial, el cual evoluciona ante la aplicación de una serie de compuertas cuánticas que corresponden a una operación unitaria sobre el sistema; a esta operación unitaria se le conoce como algoritmo cuántico; finalmente, la información es extraída al realizar la medición final de los cúbits <sup>[101]</sup>, como se muestra en la figura 5.



**Figura 5.** Modelo del circuito cuántico. Se compone de un conjunto de cúbits que representan el estado inicial, compuertas cuánticas que evolucionan el estado cuántico y un sistema de medición.

### 2. Cúbits

La unidad de información en la computación clásica es el bit, el cual solo toma uno de dos valores, el ‘0’ o el ‘1’. Análogamente, la unidad de información en la computación cuántica se conoce como cúbit, el cual es definido como la superposición lineal de dos estados,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (48)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , y cuyos estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  conforman una base ortonormal. Por lo tanto, el cúbit  $|\psi\rangle$  es un estado cuántico contenido en

un espacio de Hilbert de dos dimensiones <sup>[102]</sup>. A su vez, posterior a una medición, la probabilidad de que el cúbit colapse al estado  $|0\rangle$  es de  $|\alpha|^2$ , mientras que al estado  $|1\rangle$ , de  $|\beta|^2$ .

Asimismo, dado que la fase global de un sistema cuántico carece de significado físico <sup>[103]</sup>, el estado general de un cúbit se expresa como,

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle, \quad (49)$$

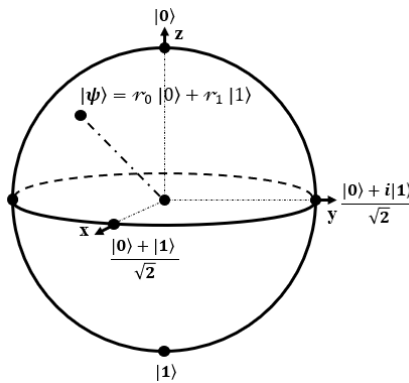
tal que  $\theta = \{-4\pi, 4\pi\}$  y  $\phi = \{-\pi, \pi\}$ . Por su parte, un cúbit también puede ser formulado de manera general como la multiplicación de una matriz unitaria  $U \in SU(2)$  con un estado cuántico inicial  $|\psi_0\rangle$ , como se muestra a continuación <sup>[104]</sup>,

$$|\psi\rangle = U(\theta, \phi_1, \phi_2)|\psi_0(\theta_0, \phi_0)\rangle. \quad (50)$$

## 2.1. Esfera de Bloch

La esfera de Bloch (figura 6) es un instrumento para visualizar geoméricamente un cúbit, y está definida como una esfera de radio 1 en el espacio tridimensional, tal que los puntos de su superficie corresponden a los estados cuánticos de un sistema de dos niveles <sup>[105]</sup>.

De esta manera, el estado de un cúbit está representado por un vector unitario dentro de la esfera, llamado vector de Bloch, cuya orientación está dada por los ángulos  $\{\theta, \phi\}$  de la ecuación (2). En esta representación, el estado  $|0\rangle$  está dado por el vector de Bloch que apunta en la dirección z, mientras que el vector que apunta en la dirección contraria representa el estado  $|1\rangle$ .



**Figura 6.** Esfera de Bloch cuya superficie representa el conjunto de estados de un cúbit.



## 2.2. El estado de N cúbits

De manera análoga al caso de un solo cúbit, el estado de un conjunto de  $N$  cúbits está determinado por la superposición de  $2^N$  estados cuánticos,

$$|\psi_{N-qubits}\rangle = \alpha_0 \underbrace{|00 \dots 0\rangle}_{N \text{ dígitos}} + \alpha_1 |00 \dots 1\rangle + \dots + |1 \dots 10\rangle + \alpha_{2^N} |1 \dots 11\rangle, \quad (51)$$

de manera que  $\sum |\alpha_k|^2 = 1$ , tal que  $\{|00 \dots 0\rangle, |00 \dots 1\rangle, \dots, |1 \dots 11\rangle\}$  es una base ortonormal a la que se le conoce como base computacional; por consiguiente, un incremento lineal en el número de cúbits incrementa exponencialmente el tamaño del espacio cuántico <sup>[106]</sup>.

## 2.3. Entrelazamiento

El entrelazamiento es un fenómeno cuántico que retrata el comportamiento de un grupo de elementos (partículas, moléculas, cúbits) en el que no se puede describir el estado de cada uno de ellos de manera independiente; esto implica que, en el caso de tener, por ejemplo, dos fotones entrelazados, la medición del estado cuántico de alguno tiene un efecto inmediato sobre el estado del segundo <sup>[107]</sup>.

De manera formal, dado un espacio vectorial  $\mathcal{H}^n$  cuya descomposición tensorial es  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ , tal que  $|\psi_{\mathcal{F}}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ , se dice que un estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  es separable si se puede descomponer como,

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle; \quad (52)$$

en caso contrario,  $|\psi\rangle$  es un estado entrelazado <sup>[108]</sup>.

Por su parte, el entrelazamiento es crítico en los algoritmos en los que se cree contar con una ventaja cuántica, e inclusive, diversos autores consideran que este fenómeno es el que permite a la computación cuántica ser más eficiente para la resolución de ciertos problemas <sup>[109, 110]</sup>.

## 2.4. Estado de dos cúbits

El estado de dos cúbits, según la ecuación (51), se describe como la superposición de los estados cuánticos que conforman la base computacional  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ,

$$|\psi_{dosqubits}\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{11}|11\rangle, \quad (53)$$

donde  $|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1$ , de manera que el cuadrado de la amplitud de cada uno de los coeficientes complejos  $\{a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}\}$  representa la probabilidad de que el estado de dos cúbits, al ser medido, colapse al estado correspondiente<sup>[111]</sup>.

### 2.4.1. Estados entrelazados de dos cúbits: estados de Bell

Un sistema cuántico conformado por dos cúbits ( $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ ) presenta entrelazamiento siempre que no se pueda describir como  $|\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$ . Algunos ejemplos son los estados de Bell, que se visualizan en la ecuación (54) y cuentan con máximo grado de entrelazamiento<sup>[112, 113]</sup>.

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned} \quad (54)$$

### 2.4.2. Concurrencia y estados entrelazados

En el caso del sistema cuántico de dos cúbits, la concurrencia es una de las medidas que indica el grado de entrelazamiento; se formula como <sup>[114]</sup>,

$$\text{Concurrencia} (|\psi_{\text{doscúbits}} \rangle) = | \langle \psi_{\text{doscúbits}} | \tilde{\psi}_{\text{doscúbits}} \rangle |, \quad (55)$$

tal que,

$$|\tilde{\psi}_{\text{doscúbits}} \rangle = -a_{11}^* |00 \rangle + a_{10}^* |01 \rangle + a_{01}^* |10 \rangle + a_{00}^* |11 \rangle. \quad (56)$$

Consiguientemente, mediante las ecuaciones (53), (55) y (56), se define la concurrencia como,

$$\text{Concurrencia} (|\psi_{\text{doscúbits}} \rangle) = |2a_{01}^* a_{10}^* - 2a_{00}^* a_{11}^*|, \quad (57)$$

de manera que adquiere un valor de uno si un sistema cuántico cuenta con máximo grado de entrelazamiento (como en el caso de los estados de Bell que se presentan en la sección anterior), o de cero, si el sistema es un estado separable como los elementos de la base computacional <sup>[115]</sup>.

### 2.5. Cúbits ancilla

Dentro del área de algoritmos cuánticos, los cúbits que reproducen el estado cuántico que se desea estudiar o evolucionar, se conocen como cúbits del sistema  $|\psi_s \rangle$ . En adición, un conjunto extra de cúbits, llamados cúbits ancilla  $|\psi_a \rangle$ , puede ser introducido para asistir el estudio o la evolución cuántica de los cúbits del sistema <sup>[116, 117]</sup>.

Entre sus aplicaciones se encuentra la ampliación del espacio de Hilbert de los cúbits del sistema, para realizar operaciones cuánticas que no pueden ejecutarse de otra forma; a su vez, pueden ser utilizados para conocer información sobre el estado de un conjunto de cúbits sin la necesidad de realizar una medición sobre estos últimos <sup>[118]</sup>.

## 3. Compuertas cuánticas

Un sistema cuántico cerrado, como lo es un conjunto de cúbits (siempre que no tenga interacción con el ambiente), sólo puede evolucionar de manera unitaria. En el modelo del circuito cuántico, el estado conformado por un conjunto de cúbits es manipulado y

transformado por compuertas cuánticas, que se representan matemáticamente por medio de matrices unitarias <sup>[118, 119]</sup>.

### 3.1. Matrices unitarias $U(n)$

Las matrices unitarias  $U(n)$  son una clase de matrices cuadradas que tienen la propiedad de que al actuar sobre un espacio vectorial  $V^n$ , conservan la norma de los vectores así como el ángulo entre ellos. Formalmente, se cumple que,

$$U(n) \text{ es unitaria} \leftrightarrow UU^* = I_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (58)$$

donde  $U^*$  es la matriz traspuesta conjugada de  $U$  mientras que  $I_n$  es la matriz identidad de dimensión  $n$  <sup>[120]</sup>; si además,  $\det(U(n)) = 1$ , a la matriz se le conoce como unitaria especial  $SU(n)$ , tal que cualquier matriz unitaria se puede describir como,

$$U(n) = e^{i\phi} SU(n), \quad \phi \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

### 3.2. Compuerta cuántica de $N$ cúbits

Una compuerta cuántica  $Q$  que evoluciona el estado de  $N$  cúbits  $|\psi_N\rangle$  se representa por una matriz unitaria  $U_Q(N)$ , de manera que posterior a la aplicación de la compuerta, el estado de los cúbits está dado por  $U_Q|\psi_N\rangle$ . Asimismo, cualquier compuerta cuántica  $Q$  puede ser descompuesta por una serie de compuertas que actúan únicamente en uno o en dos cúbits <sup>[121]</sup>, lo que facilita la implementación física de los algoritmos cuánticos. En las subsecuentes secciones, se presentan las principales compuertas de uno y dos cúbits.

### 3.3. Compuertas cuánticas de 1 cúbit

Una compuerta cuántica general  $G$  que actúa sobre un único cúbit está descrita por una matriz unitaria  $U_G(2)$ , dada de manera general como,

$$U_G(2) = e^{i\phi} SU_G(2) = e^{i\phi} \begin{pmatrix} e^{ia} \cos(\frac{\theta}{2}) & -e^{-ib} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ e^{ib} \sin(\frac{\theta}{2}) & e^{-ia} \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (60)$$

tal que  $\theta \in (0, 4\pi)$  y  $a, b, \phi \in (-\pi, \pi)$  <sup>[122]</sup>. A continuación, se describen las compuertas cuánticas de un cúbit que se utilizaron en este trabajo.

$$|\psi\rangle \rightarrow \boxed{G} := G|\psi\rangle$$

**Figura 7.** Compuerta cuántica  $G$  que actúa sobre un cúbit  $|\psi\rangle$ . El estado del cúbit posterior a la transformación unitaria está dado por  $G|\psi\rangle$ .

### 3.3.1. Compuerta NOT

La compuerta NOT, que también se conoce como compuerta X, está dada por la matriz unitaria <sup>[123]</sup>,

$$NOT \equiv X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

cuyo efecto es el de invertir el estado de un cúbit, de manera que

$$\begin{aligned} NOT|0\rangle &= |1\rangle, \\ NOT|1\rangle &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (62)$$

### 3.3.2. Compuerta Hadamard

La compuerta Hadamard es una de las compuertas de un cúbit más utilizadas para realizar algoritmos cuánticos, ya que realiza un mapeo de las bases computacionales hacia una superposición de estados con igual probabilidad de ocupación; está definida matricialmente como <sup>[123]</sup>,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

cuyo efecto sobre las bases computacionales se muestra en la ecuación (64).

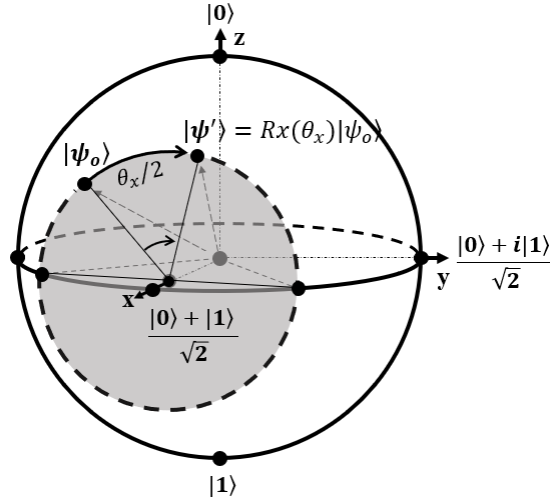
$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned} \quad (64)$$

### 3.3.3. Compuerta RX

Previamente, se definió a la esfera de Bloch en la sección 2.1 como una herramienta de visualización en la que la orientación del vector de Bloch indica el estado de un cúbit; por lo tanto, la rotación del vector de Bloch es en sí una transformación unitaria. La compuerta cuántica que corresponde a la rotación del vector sobre el eje X de la esfera de Bloch se conoce como RX ( $\theta_x$ ), y está definida matricialmente como<sup>[123]</sup>,

$$RX(\theta_x) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad \theta_x \in (0, 4\pi), \quad (65)$$

de manera que el ángulo de rotación alrededor del eje x está dado por  $\theta_x/2$ , como se aprecia a continuación en la figura 8.



**Figura 8.** Rotación del vector  $|\psi_0\rangle$  en un ángulo de  $\theta_x/2$  alrededor del eje x de la esfera de Bloch. El estado cuántico posterior a la rotación es  $|\psi'\rangle = Rx(\theta_x)|\psi_0\rangle$ .

### 3.3.4. Compuerta RY

Consiguientemente, la rotación del vector de Bloch en un ángulo de  $\theta_y/2$  alrededor del eje y, está dada por la compuerta cuántica RY( $\theta_y/2$ ), cuya representación matricial se muestra a continuación<sup>[123]</sup>,

$$RY(\theta_y/2) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad \theta_y \in (0, 4\pi). \quad (66)$$

### 3.3.5. Compuerta RZ

Asimismo, la rotación del vector de Bloch alrededor del eje z de la esfera de Bloch, en un ángulo de  $\theta_z/2$ , está dada por la compuerta cuántica  $RZ(\theta_z/2)$ , definida matricialmente como <sup>[113]</sup>,

$$RZ(\theta_z/2) = \begin{pmatrix} e^{-i(\frac{\theta_z}{2})} & 0 \\ 0 & e^{i(\frac{\theta_z}{2})} \end{pmatrix}, \quad \theta_z \in (0, 4\pi). \quad (67)$$

### 3.3.6. Compuerta de fase Ph

La compuerta  $Ph(\delta)$  se utiliza para agregar una fase al estado de un cúbit, tal que  $Ph(\delta)|\psi\rangle := e^{i\delta}|\psi\rangle$ . La definición matricial de la compuerta de fase se describe a continuación <sup>[123]</sup>,

$$Ph(\delta) = e^{i\delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta \in (0, 2\pi). \quad (68)$$

### 3.3.7. Compuerta $S^\dagger$

La compuerta  $S^\dagger$  es otra de las compuertas que agregan una fase al estado de un cúbit  $|\psi\rangle = w_0|0\rangle + w_1|1\rangle$ , de manera que  $S^\dagger|\psi\rangle = w_0|0\rangle + e^{i(-\pi/2)}w_1|1\rangle$ . Esta compuerta se visualiza matricialmente como <sup>[124]</sup>,

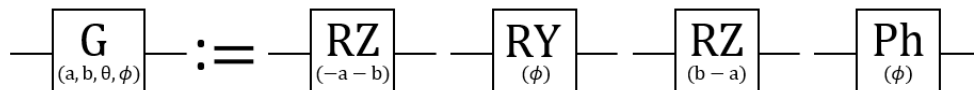
$$S^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (69)$$

### 3.3.8. Compuerta general de un cúbit

Es posible descomponer cualquier compuerta G de un cúbit con tres compuertas de rotación (RZ, RY, RZ) y una compuerta de fase  $Ph(\delta)$ . Al tomar como definición de una compuerta general la ecuación (60), la compuerta G está dada por <sup>[125]</sup>,

$$G(a, b, \theta, \phi) = Ph(\phi) \cdot RZ(b - a) \cdot RY(\theta) \cdot RZ(-a - b), \quad (70)$$

que se representa en el modelo cuántico se indica en la figura 9.



**Figura 9.** Compuerta general de un cúbit en el modelo del circuito cuántico.

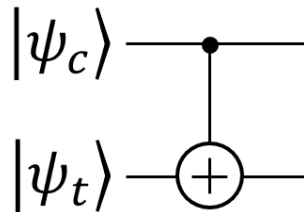
Es importante hacer la observación de que el orden de las compuertas es inverso al comparar la ecuación (70) y el circuito de la figura 9, debido a que en el modelo del circuito cuántico, el orden en el que actúan una serie de compuertas es de izquierda a derecha.

### 3.4. Compuertas cuánticas de 2 cúbits

Para implementar un algoritmo cuántico sólo es necesario contar con compuertas de uno o dos cúbits. Las compuertas cuánticas de dos cúbits están definidas por matrices del grupo  $U(4)$ , y ofrecen la posibilidad de crear entrelazamiento entre un conjunto de bits cuánticos. Entre las principales se encuentran la CNOT, las compuertas controladas, y la compuerta SWAP. A continuación, se presentan las compuertas de múltiples cúbits que se emplearon en este trabajo.

#### 3.4.1. Compuerta CNOT

La compuerta CNOT es la compuerta de dos cúbits más utilizada; la razón detrás es por la posibilidad de componer cualquier algoritmo cuántico a través de compuertas generales de un cúbit y compuertas CNOT <sup>[126]</sup>. Esta compuerta actúa sobre dos cúbits, el cúbit de control y el cúbit *target*, como se muestra a continuación en la figura 10.



**Figura 10.** Compuerta CNOT. Se muestra el cúbit de control  $|\psi_c\rangle$  y el cúbit *target*  $|\psi_t\rangle$ . El estado del cúbit de control determina si la compuerta NOT es aplicada sobre el cúbit *target*.

El funcionamiento de la compuerta es de la siguiente manera. Si el cúbit de control está en el estado  $|1\rangle$ , el cúbit *target* sufre una transformación unitaria equivalente a la aplicación de una compuerta NOT; en el caso de que el cúbit de control se encuentre en el estado  $|0\rangle$ , el cúbit *target* no experimenta ninguna transformación <sup>[126]</sup>. La acción de la compuerta se visualiza en la ecuación (71),



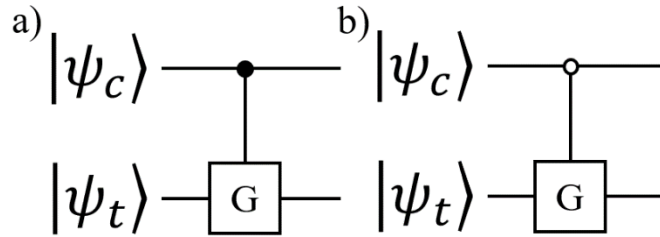
$$\text{CNOT}[(\alpha|0_c \rangle + \beta|1_c \rangle) \otimes |0 \rangle_t] := \alpha|0_c 0_t \rangle + \beta|1_c 1_t \rangle, \quad (71)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Consiguientemente, la matriz unitaria que corresponde a la compuerta CNOT se muestra a continuación <sup>[127]</sup>,

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

### 3.4.2. Compuertas controladas

Una compuerta cuántica que actúa sobre dos cúbits recibe el nombre de compuerta controlada (CG) si el estado de uno de los cúbits (cúbit de control) indica la probabilidad con la que se aplica determinada compuerta G al segundo de los cúbits (cúbit *target*). El estado del cúbit de control que activa la ejecución de la compuerta G puede definirse como  $|0\rangle$  (se indica con un círculo sin rellenar) o  $|1\rangle$  (círculo relleno), tal como se muestra en la figura 11.



**Figura 11.** Compuertas controladas. a) La compuerta tiene un estado de activación de uno en el cúbit de control  $|\psi_c\rangle$ . b) El estado de activación es de cero.

Consiguientemente, el efecto de una compuerta controlada CG sobre un par de cúbits, dada una compuerta general  $G(a, b, \theta)$  y un estado de activación de  $|1\rangle$  en el cúbit de control, se observa a continuación,

$$\begin{aligned} \text{CG}_{|1\rangle}(a, b, \theta)[a_{00}|00 \rangle + a_{01}|01 \rangle + a_{10}|10 \rangle + a_{11}|11 \rangle] = & \quad (73) \\ = a_{00}|00 \rangle + a_{01}|01 \rangle + a_{10}|1 \rangle \otimes G(a, b, \theta)|0 \rangle + a_{11}|1 \rangle \otimes G(a, b, \theta)|1 \rangle, & \end{aligned}$$

mientras que, si el estado de activación es el  $|0 \rangle$ , el estado cuántico queda definido como,

$$CG_{|0\rangle}(a, b, \theta)[a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle] = \quad (74)$$

$$a_{00}|0\rangle \otimes G(a, b, \theta)|0\rangle + a_{01}|0\rangle \otimes G(a, b, \theta)|1\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle.$$

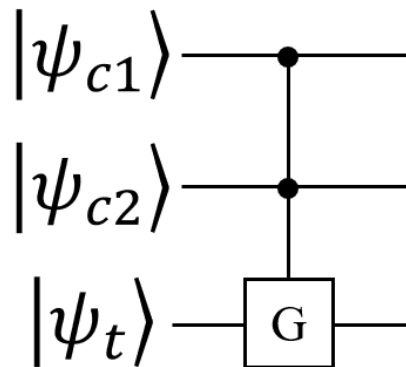
A su vez, la matriz unitaria que describe la acción de la compuerta controlada de dos cúbits  $CG(a, b, \theta)$  es mostrada subsecuentemente <sup>[128]</sup>:

$$CG_{|1\rangle}(a, b, \theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ia} \cos(\frac{\theta}{2}) & -e^{-ib} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 0 & e^{ib} \sin(\frac{\theta}{2}) & e^{-ia} \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (75)$$

$$CG_{|0\rangle}(a, b, \theta) := \begin{pmatrix} e^{ia} \cos(\frac{\theta}{2}) & -e^{-ib} \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 \\ e^{ib} \sin(\frac{\theta}{2}) & e^{-ia} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

### 3.4.2.1. Compuertas controladas con N cúbits de control

Para realizar algoritmos cuánticos más complejos, es necesario contar con más de un cúbit de control en una compuerta controlada; la compuerta solo tendrá efecto en el cúbit *target* si el estado de los cúbits de control es el adecuado. En la figura 12, se visualiza una compuerta con dos cúbits de control.



**Figura 12.** Compuerta controlada con dos cúbits de control. La compuerta sólo tendrá efecto en el cúbit *target* si los cúbits de control se encuentran en el estado  $|11\rangle$ .

Asimismo, la matriz unitaria que corresponde a una compuerta controlada CG con  $n$  cúbits de control, está dada como <sup>[129]</sup>,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{11} & G_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad (77)$$

tal que  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$  y  $G_{22}$  son las componentes matriciales de la compuerta cuántica  $G$ .

### 3.4.3. Compuerta general de $N$ cúbits

Una compuerta general de  $N$  cúbits es una compuerta capaz evolucionar un estado cuántico de  $N$  cúbits  $|\psi_n\rangle$  hacia cualquier otro estado  $|\psi'_n\rangle$ . Además, se representa por una matriz unitaria  $U(2^N)$  con  $2^N$  parámetros reales linealmente independientes, de manera que el número de parámetros crece de manera exponencial con el número de cúbits; por ejemplo, una compuerta cuántica de dos cúbits cuenta con 16 parámetros linealmente independientes <sup>[130]</sup>.

Por otro lado, en la sección 3.2 se mencionó que cualquier algoritmo cuántico, incluida una compuerta de  $N$  cúbits, se puede componer con compuertas de uno y dos cúbits; sin embargo, el número de compuertas necesarias crece exponencialmente con respecto al número  $N$  de cúbits <sup>[131]</sup>.

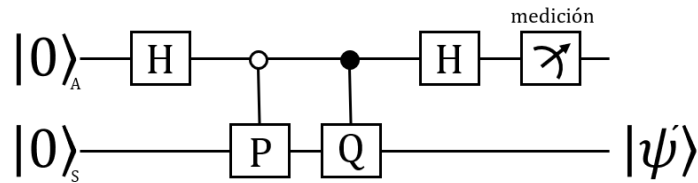
### 3.5. Operaciones cuánticas no unitarias

Hasta ahora, únicamente se ha mencionado sobre la posibilidad de realizar operaciones unitarias. No obstante, se ha demostrado que es posible aplicar operaciones no unitarias a un conjunto de cúbits que se encuentra dentro de un sistema cuántico más extenso. Esto se logra a través de la adición de cúbits ancilla, o con la ampliación del espacio de Hilbert en el que se define el conjunto de cúbits <sup>[132]</sup>.

La importancia de esta clase de transformaciones radica en que a través de operaciones no unitarias, es posible solucionar una variedad más amplia de problemas, e incluso se piensa que la resolución eficiente de problemas NP requiere de este grupo de operaciones <sup>[133]</sup>. Algunos de los trabajos que incluyen operaciones cuánticas no unitarias son el algoritmo realizado por Viyuela et al. para observar la fase de Uhlmann a través de cúbits superconductores <sup>[134]</sup>, la simulación de sistemas cuánticos abiertos realizada por Chang et al. <sup>[135]</sup>, o el algoritmo cuántico de búsqueda diseñado por Zakaria <sup>[136]</sup>.

### 3.5.1. Ejemplo de una operación cuántica no unitaria

Considérese el circuito cuántico que se muestra a continuación en la figura 13,



**Figura 13.** Circuito cuántico que realiza una operación no unitaria sobre el cúbit  $|0\rangle_S$ . P y Q son compuertas de un cúbit.

en donde P y Q son compuertas de un cúbit; consiguientemente, el estado de los dos cúbits previo a la medición del cúbit A está dado por,

$$\frac{1}{2} (|0\rangle_A(P + Q)|0\rangle_S + |1\rangle_A(P - Q)|0\rangle_S), \quad (78)$$

tal que se presentan dos posibilidades después de medir: si el cúbit A colapsa al estado  $|0\rangle$ , el cúbit S se encuentra en el estado  $(P + Q)|0\rangle$ ; por otra parte, si colapsa al estado  $|1\rangle$ , el segundo cúbit evoluciona al estado  $(P - Q)|0\rangle$ . En la mayoría de los casos, las matrices de transformación  $(P + Q)$  y  $(P - Q)$  no son unitarias dado que  $P, Q \in U(2)$ , por lo que en ambas posibilidades, el cúbit S experimenta una operación no unitaria <sup>[137]</sup>.

### 3.6. Algoritmo cuántico para el cálculo del valor esperado de un operador no unitario

Realizar operaciones cuánticas no unitarias no es algo trivial; no obstante, Somma et al. publican en el 2002 un algoritmo cuántico para calcular el valor esperado de un operador no

unitario  ${}_S\langle\psi|O|\psi\rangle_S$ , siempre que el operador  $O$  pueda ser descrito como una suma ponderada de matrices unitarias <sup>[138]</sup>,

$$O = \sum_{i=1}^{2^m} \rho_i U_i^\dagger V_i, \quad (79)$$

donde  $U_i, V_i \in U(n)$ , y  $\rho_i \in \mathbb{R}^+$ .

El circuito cuántico correspondiente requiere de dos conjuntos de cúbits; el primero está conformado por  $m + 1$  cúbits ancilla, mientras que el segundo está dado por  $n$  cúbits que contienen la información del estado  $|\psi\rangle_S$ . Los pasos para implementar el algoritmo diseñado por Somma et al. se presentan a continuación <sup>[138, 139]</sup>:

1. Calcular la constante  $\mathcal{N}_c$ , definida como,

$$\mathcal{N}_c = \sum_i^{2^m} \rho_i. \quad (80)$$

2. Aplicar una compuerta Hadamard al primer cúbit ancilla  $|0\rangle_M$ , llamado cúbit de medición.
3. Implementar la compuerta  $P_c$ , tal que,

$$P_c \left( |0\rangle_{A_1} \otimes |0\rangle_{A_2} \dots \otimes |0\rangle_{A_m} \right) = \quad (81)$$

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{\mathcal{N}_c}} |00 \dots 0\rangle_A + \sqrt{\frac{\rho_2}{\mathcal{N}_c}} |00 \dots 1\rangle_A + \dots + \sqrt{\frac{\rho_m}{\mathcal{N}_c}} |11 \dots 1\rangle_A.$$

4. Inicializar el estado del sistema,

$$|\psi\rangle_S = |\psi\rangle_{S_1} \otimes |\psi\rangle_{S_2} \dots \otimes |\psi\rangle_{S_m}. \quad (82)$$

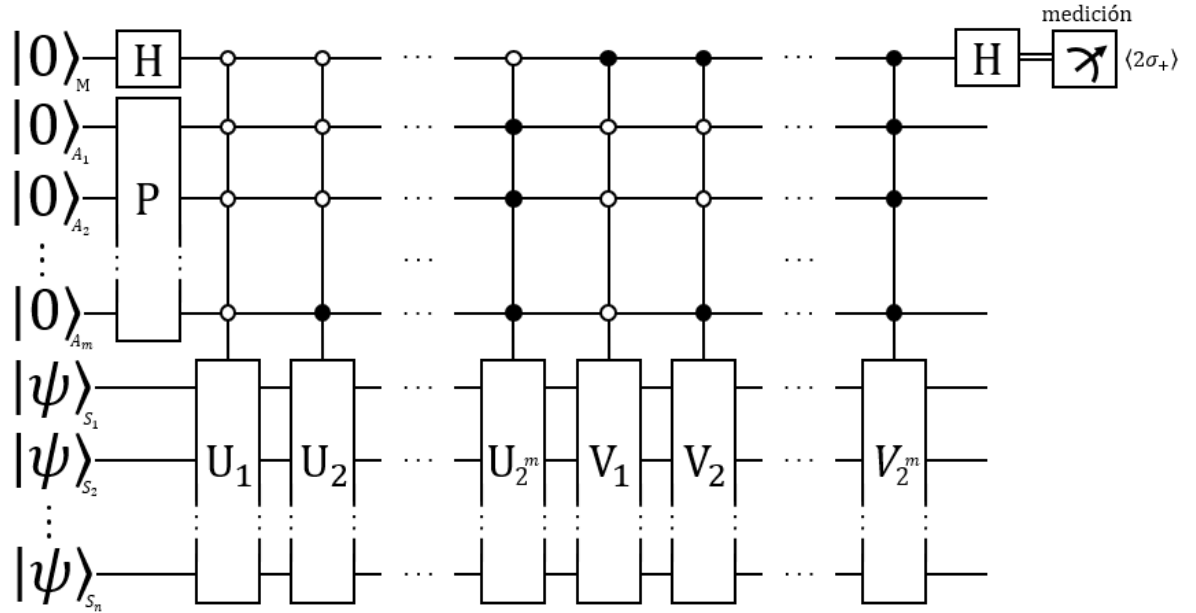
5. Implementar las compuertas controladas  $CU_1, CU_2, \dots, CU_n$ , así como  $CV_1, CV_2, \dots, CV_n$ .
6. Aplicar una segunda compuerta Hadamard al cúbit de medición.
7. Medir el valor esperado  $\langle 2\sigma_+ \rangle$  en el cúbit de medición<sup>1</sup>. Después de un número polinomial de mediciones, se cumple que,

$$\mathcal{N}_c * \langle 2\sigma_+ \rangle \cong {}_S\langle\psi|O|\psi\rangle_S. \quad (83)$$

---

<sup>1</sup> Para realizar la medición del valor esperado complejo  $\langle 2\sigma_+ \rangle = \langle \sigma_x \rangle + i\langle \sigma_y \rangle$  de un cúbit, se mide en la base  $\sigma_x$  para calcular la parte real y posteriormente en la base  $\sigma_y$  para la imaginaria.

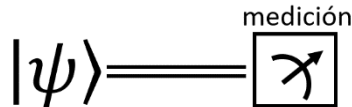
Consecuentemente, en la figura 14 se presenta el circuito cuántico correspondiente para calcular  ${}_S\langle\psi|O|\psi\rangle_S$ .



**Figura 14.** Algoritmo cuántico para calcular el valor esperado de un operador que puede ser no unitario, tal que  ${}_S\langle\psi|O|\psi\rangle_S = \mathcal{N}\langle 2\sigma_+ \rangle$ . El cúbit M es el cúbit de medición, los cúbits  $A_i$  hacen referencia a los ancilla y los cúbits  $S_i$  a los del sistema.

#### 4. Medición de un cúbit

En el modelo del circuito cuántico, la extracción de información de una computadora cuántica se realiza por medio de la medición del estado de los cúbits <sup>[140]</sup>. El símbolo que representa esta operación se muestra a continuación en la figura 15.



**Figura 15.** Símbolo en el modelo del circuito cuántico que indica la medición de un cúbit.

Por su parte, la mecánica cuántica dicta que al medir el estado de un cúbit  $|\psi_q\rangle$ , solo se puede discernir entre dos estados que conforman una base ortonormal  $u_b = \{|u\rangle, |u^\perp\rangle\}$ . Por otro lado, el estado de un cúbit se puede expresar como la combinación lineal de los elementos de cualquier base ortonormal de  $\mathcal{H}^2$  <sup>[141]</sup>,

$$|\psi\rangle = m_1|u\rangle + m_2|u^\perp\rangle, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{C}, \quad (84)$$

tal que, posterior a una medición en la base  $u_b$ , el estado  $|u\rangle$  es medido con una probabilidad de  $|m_1|^2$ , mientras que el estado  $|u^\perp\rangle$  con una probabilidad de  $|m_2|^2$ .

Así pues, el tipo de medición que más se utiliza en el modelo del circuito cuántico es en la base computacional, denotada por  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , en donde  $|0\rangle$  [ $|1\rangle$ ] se refiere al estado alineado al eje z positivo [negativo] de la esfera de Bloch, de manera que <sup>[142]</sup>,

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad de medir } |0\rangle &= |\langle 0|\psi\rangle|^2, \\ \text{Probabilidad de medir } |1\rangle &= |\langle 1|\psi\rangle|^2. \end{aligned} \tag{85}$$

Por otra parte, realizar mediciones en bases diferentes a las computacionales puede tener sus ventajas y aplicaciones, por lo que se presentan algunas alternativas.

#### 4.1. Medición de un cúbit en diferentes bases

Dado el estado de un cúbit descrito por las bases computacionales  $|\psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ , y dada una base ortonormal en  $\mathcal{H}^2$ ,  $\{|b\rangle, |b^\perp\rangle\}$ , existe una matriz unitaria  $U_b$ , tal que <sup>[143]</sup>,

$$U_b|\psi\rangle = \alpha_1 U_b|0\rangle + \beta_1 U_b|1\rangle = \alpha_1|b\rangle + \beta_1|b^\perp\rangle, \tag{86}$$

en donde  $U_b$  se construye como,

$$U_b = |b\rangle\langle 0| + |b^\perp\rangle\langle 1|, \tag{87}$$

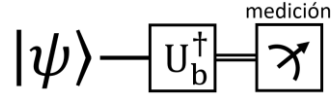
tal que,

$$\begin{aligned} U_b|0\rangle &= |b\rangle, \\ U_b|1\rangle &= |b^\perp\rangle. \end{aligned} \tag{88}$$

De esta manera, la medición del estado  $|\psi\rangle$  en la base  $\{|b\rangle, |b^\perp\rangle\}$  es equivalente a la medición en las bases computacionales del estado  $U_b^\dagger|\psi\rangle$ , como se observa a continuación en la ecuación (89).

$$\begin{aligned} |\langle b|\psi\rangle|^2 &= |(\langle 0|U_b^\dagger)|\psi\rangle|^2 = |\langle 0|(U_b^\dagger|\psi\rangle)|^2, \\ |\langle b^\perp|\psi\rangle|^2 &= |(\langle 1|U_b^\dagger)|\psi\rangle|^2 = |\langle 1|(U_b^\dagger|\psi\rangle)|^2. \end{aligned} \tag{89}$$

Por otra parte, la mayoría de las computadoras cuánticas sólo cuentan con la capacidad de realizar mediciones en la base computacional, por lo que para medir en otras bases, se debe introducir una transformación auxiliar  $U_b$ , como se muestra en la figura 16.



**Figura 16.** Circuito cuántico para medir un cúbit en la base  $\{|b\rangle, |b^\perp\rangle\}$ . La compuerta  $U_b^\dagger$  está determinada por  $\{|b\rangle, |b^\perp\rangle\}$ .

#### 4.1.1. Medición en la base X

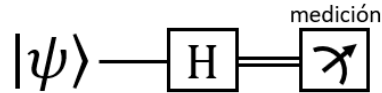
La base ortonormal  $X: \{\psi_x^+, \psi_x^-\}$ , dada por los eigenvectores de la matriz de Pauli  $\sigma_x$ ,

$$\psi_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_x^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (90)$$

cuenta con una matriz unitaria asociada  $U_{bx}$ ,

$$U_{bx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (91)$$

de manera que se cumple que  $U_{bx}^\dagger = H$ . Por lo tanto, el circuito cuántico para medir el estado de un cúbit  $|\psi\rangle$  en la base  $X$  se compone de en la figura 17, en donde la medición final se realiza en las bases computacionales.



**Figura 17.** Circuito cuántico para medir un cúbit en la base  $X$ .

#### 4.1.2. Medición en la base Y

Por su parte, la base ortonormal  $Y: \{\psi_y^+, \psi_y^-\}$ , que se compone por los eigenvectores de la matriz de Pauli  $\sigma_y$ ,

$$\psi_y^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \psi_y^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (92)$$

tiene una matriz asociada  $U_{by}$ ,

$$U_{by} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (93)$$



tal que  $U_{by} = H \cdot S^\dagger$ ; por lo tanto, es posible medir un estado  $|\psi\rangle$  en la base  $Y$  a través del circuito cuántico que se muestra en la figura 18. La medición final se efectúa en las bases computacionales.



**Figura 18.** Circuito cuántico para medir un cúbit en la base  $Y$ .

De esta manera, se ha hecho referencia a la mayoría de los temas y conceptos relacionados con este trabajo. A continuación se presenta el capítulo de metodología, en donde se indican los procedimientos con los que se diseñaron los algoritmos cuánticos para calcular el TCG de los dos modelos físicos propuestos.

## Capítulo III: Metodología

En este capítulo, se discuten los métodos que se llevaron a cabo para diseñar un conjunto de algoritmos cuánticos con el objetivo de calcular el tensor cuántico geométrico (TCG) de dos sistemas físicos: el sistema de un cúbit con rotaciones genéricas, y el sistema de dos cúbits con entrelazamiento.

Como primera parte, se establecieron los modelos respectivos de cada sistema. Las rotaciones genéricas de un cúbit se representaron como una compuerta cuántica general; por su parte, el sistema de dos cúbits se definió como el circuito cuántico compuesto por una compuerta general de un cúbit, en conjunto de una compuerta controlada genérica de dos cúbits, cuya función fue la de inducir entrelazamiento en el sistema. El circuito se visualiza en la figura 19 dentro de la sección de metodología: modelo de dos cúbits con entrelazamiento.

Con base en los circuitos mencionados en el párrafo anterior, se determinaron las matrices unitarias  $U_{modelo}(\rho)$ , así como los parámetros  $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$  que describen cada modelo cuántico, y que a su vez precisan el espacio paramétrico de cada sistema; con esta información, se establecieron los valores esperados<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} \langle O_{\rho_i} \rangle &= \langle 0 | U_{modelo}^\dagger \partial_{\rho_i} U_{modelo} | 0 \rangle, \\ \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle &= \langle 0 | (\partial_{\rho_i} U_{modelo})^\dagger \partial_{\rho_j} U_{modelo} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad \rho_i, \rho_j \in \{\rho\}, i \leq j, \quad (94)$$

con los que se calcularon analíticamente las componente  $m, n$  del  $TQG_{modelo}$  de la forma,

$$(TQG_{modelo})_{m,n} = \langle O_{\rho_m \rho_n} \rangle - (\langle O_{\rho_m} \rangle)^\dagger \langle O_{\rho_n} \rangle. \quad (95)$$

Consecuentemente, se realizó el cálculo del  $TQG_{modelo}$  vía computación cuántica, que consistió en la cuantificaron a través de algoritmos cuánticos de los valores esperados que se definieron en la ecuación (94). No obstante, cabe señalar que el diseño de los algoritmos no

---

<sup>2</sup> En esta sección,  $\partial_\rho U$  indica la derivada de la matriz  $U$  con respecto a  $\rho$ .

es trivial, dado que los gradientes de  $U_{modelo}$  no son unitarios, y por consecuencia, los operadores  $\{O_{\rho_i}, O_{\rho_i, \rho_j}\}$  tampoco lo son.

Por consiguiente, los operadores  $\{O_{\rho_i}, O_{\rho_i, \rho_j}\}$  se descompusieron como una suma ponderada de matrices unitarias  $O = \sum \alpha_s U_s$ ,  $\alpha_s \in \mathbb{R}$ , con lo que se diseñó un conjunto de algoritmos cuánticos por medio del esquema propuesto por Somma et al. <sup>[138]</sup> (sección 3.6 del marco teórico), para calcular los valores esperados que se mencionan en la ecuación (94).

Posteriormente, los circuitos cuánticos se optimizaron para minimizar el número de compuertas. A su vez, se utilizaron en su mayoría compuertas cuánticas de rotación (RX, RY, RZ), y sus respectivas controladas, para facilitar la implementación de los algoritmos.

Los circuitos fueron implementados en la interfaz de computación cuántica *IBM Quantum Lab*, a través del kit de desarrollo de software de computación cuántica *Qiskit*, en su versión 0.24.1. Consiguientemente, se ejecutaron los algoritmos en el simulador de computación cuántica de IBM, *QasmSimulator*, así como en la computadora cuántica de siete cúbits, *IBM\_Lagos*<sup>3</sup>. Por su parte, cada algoritmo se ejecutó 20000 veces; en las primeras 10000 se midió en la base  $\sigma_x$ , y en las restantes en la base  $\sigma_y$ , con lo que se calcularon las partes real e imaginaria de los valores esperados correspondientes.

Finalmente, se calculó el TCG de cada modelo cuántico con los valores esperados que se computaron a través de la ejecución de los algoritmos, y por último, se comparó de manera cualitativa la similitud entre los valores teóricos del TCG con los que se obtuvieron por la vía de la computación cuántica, con el fin de evaluar los algoritmos. A continuación, se muestran los desarrollos específicos de cada modelo.

## 1. Modelo de un cúbit con rotaciones genéricas

El modelo de un cúbit genérico es descrito por la matriz unitaria  $U_{1q}$ ,

$$U_{1q} = \begin{pmatrix} e^{ia} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{-ib} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{ib} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-ia} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (96)$$

---

<sup>3</sup> La computadora cuántica *IBM\_Lagos* cuenta con tiempos de coherencia medios  $T1$ : 123.36  $\mu s$ ,  $T2$ : 74.42  $\mu s$ , y un tiempo medio de compuerta de 330.67 ns.

cuyos tres parámetros  $\rho_{1q} = \{a, b, \theta\}$  determinan la dirección del vector de Bloch y por ende el estado del cúbit. Dado el número de parámetros, se estableció un espacio paramétrico de tres dimensiones, y se definieron los nueve valores esperados ( $\langle O_{\rho_i} \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle, \rho_i, \rho_j \in \{\rho_{1q}\}, i \leq j$ ) para encontrar el  $TCC_{1q}$  de este modelo físico. Posteriormente, cada uno de los operadores  $O_{\rho_i}, O_{\rho_i \rho_j}$  se describieron como una suma ponderada de matrices unitarias, como se detallan en la tabla 1.

**Tabla 1.** Descomposición de los operadores  $\{O_{\rho_i}, O_{\rho_i \rho_j}\}$  como una suma ponderada de matrices unitarias para el caso de un cúbit con rotaciones genéricas.

Operador	$O = \sum \alpha_s U_s$
$U^\dagger \partial_a U$	$\frac{1}{2} U^\dagger [Rz(-2a - \pi) Ry(\theta) + Rz(-2a - \pi) Ry(-\theta)]$
$U^\dagger \partial_b U$	$\frac{1}{2} U^\dagger [Rz(2b) Rx(-\theta) + Rz(2b) Rx(\theta - 2b)]$
$U^\dagger \partial_\theta U$	$\frac{1}{2} U^\dagger [Rz(b - a - \pi) Ry(\pi - \theta) Rz(\eta)]$
$\partial_a U^\dagger \partial_a U$	$\frac{1}{4} (Ry(2\theta) + Ry(-2\theta) + 2I)$
$\partial_b U^\dagger \partial_b U$	$\frac{1}{4} (Rx(2\theta + 2\pi) + Ry(-2\theta - 2\pi) + 2I)$
$\partial_\theta U^\dagger \partial_\theta U$	$\frac{1}{4} I$
$\partial_a U^\dagger \partial_b U$	$\frac{1}{4} [Ry(\theta) Rz(\gamma) Rx(-\theta) + Ry(\theta) Rz(\gamma) Rx(\theta - 2\pi) + Ry(-\theta) Rz(\gamma) Rx(-\theta) + Ry(-\theta) Rz(\gamma) Rx(\theta - 2\pi)]$
$\partial_a U^\dagger \partial_\theta U$	$\frac{1}{4} [Ry(\theta) Rz(\phi) Ry(\pi - \theta) Rz(\eta) + Ry(-\theta) Rz(\phi) Ry(\pi - \theta) Rz(\eta)]$
$\partial_b U^\dagger \partial_\theta U$	$\frac{1}{4} [Rx(\theta) Rz(\eta) Ry(\pi - \theta) Rz(\eta) + Rx(-\theta - 2\pi) Rz(\eta) Ry(\pi - \theta) Rz(\eta)]$

**Tabla 1.** La matriz identidad de dimensión 2 está dada por  $I_2$ . Por su parte,  $U = U_{1q}$ ;  $\partial_\rho U_{1q} = \partial U_{1q} / \partial \rho$ ;  $\phi = a + b$ ;  $\gamma = 2\phi + \pi$ ;  $\eta = -a - b - \pi$ ;

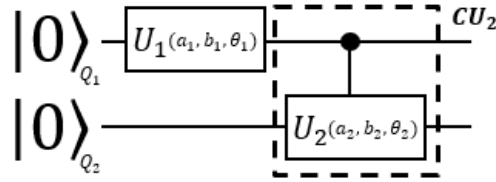
De esta manera, con la información de la tabla 1 se diseñaron nueve algoritmos cuánticos, uno por cada valor esperado, los cuales se implementaron en la interfaz de *IBM Quantum Lab*. Los parámetros  $a = \pi/4, b = \pi/6$ , se mantuvieron constantes, mientras que  $\theta$  se varió de 0 a  $4\pi$  con incrementos de  $(2/25)\pi$ . De esta forma, se calculó el tensor cuántico geométrico de un cúbit con rotaciones genéricas en función del parámetro  $\theta$ , a partir de los

valores esperados que se obtuvieron por medio de la ejecución de los circuitos en *QasmSimulator*, y se compararon los resultados con los valores teóricos del tensor cuántico.

Por último, se estudió el desempeño de los algoritmos sobre la componente del tensor  $TCG_{1q}(a, b)$  en el caso de: a) variar el número de mediciones<sup>4</sup> (*shots*), b) cambiar el valor de los parámetros  $a$  y  $b$ , c) ejecutar los algoritmos en la computadora cuántica *IBM\_Lagos*.

## 2. Modelo de dos cúbits con entrelazamiento

El modelo particular de dos cúbits con entrelazamiento que se estudió en esta tesis se definió con base en el circuito cuántico que se muestra en la figura 19,



**Figura 19.** Sistema de dos cúbits con entrelazamiento parametrizado por los ángulos  $a_1, b_1, \theta_1, a_2, b_2, \theta_2$ .

donde  $U_1$  es una compuerta general de un cúbit con parámetros  $a_1, b_1, \theta_1$ , y  $CU_2$  es una compuerta controlada genérica parametrizada por  $a_2, b_2, \theta_2$ , de manera que la matriz unitaria que especifica este modelo cuántico está dada por,

$$U_{2q} = CU_2(U_1 \otimes I_2) = \quad (97)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{ia_1} \cos(\frac{\theta_1}{2}) & 0 & -e^{-ib_1} \sin(\frac{\theta_1}{2}) & 0 \\ 0 & e^{ia_1} \cos(\frac{\theta_1}{2}) & 0 & -e^{-ib_1} \sin(\frac{\theta_1}{2}) \\ e^{i(a_2+b_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & -e^{i(-b_2+b_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & e^{i(a_2-a_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) & -e^{-i(b_2+a_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) \\ e^{i(b_2+b_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & e^{i(-a_2+b_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & e^{i(b_2-a_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) & e^{-i(a_2+a_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) \end{pmatrix}$$

tal que  $I_2$  es la matriz identidad de dimensión dos; consiguientemente, se precisaron los parámetros del sistema cuántico,  $\rho_{2q} = \{a_1, b_1, \theta_1, a_2, b_2, \theta_2\}$ , y con base en la ecuación (94), se establecieron los 27 valores esperados necesarios para calcular el tensor cuántico geométrico del sistema de dos cúbits con entrelazamiento ( $TCG_{2q}$ ).

Posteriormente, los operadores correspondientes ( $O_{\rho_i}, O_{\rho_i \rho_j}, \rho_i, \rho_j \in \{\rho_{2q}\}, i \leq j$ ) se descompusieron como una suma ponderada de matrices unitarias descritas en la tabla 2, la

<sup>4</sup>Al número de mediciones que se realiza sobre un algoritmo cuántico se conoce como número de *shots*.

cual muestra la descomposición unitaria únicamente de las derivadas de  $U_{2q}$  (para ver la descomposición explícita de los operadores, véase el Anexo 1).

**Tabla 2.** Descomposición de las derivadas de  $U_{2q}$  como suma ponderada de matrices unitarias para el caso de dos cúbits con entrelazamiento.

Derivadas	$\partial_\rho U_{2q} = \sum \alpha_s U_s$
$\partial_{a_1} U_{2q}$	$\frac{1}{2}(CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(-\theta_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{b_1} U_{2q}$	$\frac{1}{2}(CU_2[(Rz(2b_1)Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(2b_1)Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\frac{1}{2}(CU_2[(Rz(b_1 - a_1 - \pi)Ry(\pi - \theta_1)Rz(\eta_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{a_2} U_{2q}$	$\frac{1}{2}[(CRz(-2a_2 - \pi)CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{b_2} U_{2q}$	$\frac{1}{2}[(CRz(2b_2)CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{\theta_2} U_{2q}$	$\frac{1}{2}[(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$

**Tabla 2.** La notación  $\partial_\rho U_{2q}$  indica la derivada parcial de  $U_{2q}$  con respecto al parámetro  $\rho$ ;  $I_2, I_4, Ph_2, Ph_4$  hacen referencia a las matrices identidad y de fase de dimensiones dos y cuatro; a su vez,  $\eta_1 = -a_1 - b_1 - \pi$ ;  $\eta_2 = -a_2 - b_2 - \pi$ .

De esta forma, se diseñaron 27 algoritmos cuánticos a través del esquema descrito por Somma et al. <sup>[97]</sup>, cada uno para calcular un determinado valor esperados ( $\langle O_{\rho_i} \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ ,  $\rho_i, \rho_j \in \{\rho_{2q}\}, i \geq j$ ). Asimismo, los circuitos se implementaron en *IBM Quantum Lab*, y se ejecutaron de manera que se varió el parámetro  $\theta_1$  de 0 a  $4\pi$  en incrementos de  $\pi/5$ ; mientras tanto, los parámetros  $a_1 = \pi/4, b_1 = \pi/6, a_2 = \pi/7, b_2 = 2\pi/3, \theta_2 = \pi/3$ , se mantuvieron constantes.

Posteriormente, se calculó el tensor cuántico geométrico del sistema de dos cúbits con entrelazamiento en función del parámetro  $\theta_1$ , a partir de los valores esperados que se obtuvieron por vía de la computación cuántica, y se compararon estos resultados con los valores teóricos del tensor.

A su vez, se visualizó el rendimiento de los algoritmos cuánticos sobre el cálculo de la componente del tensor  $TCC_{2q}(a_2, b_1)$  en los siguientes casos: a) modificación de los valores

de los parámetros  $a_1, b_1, a_2, b_2$ . b) variación del número de *shots* o experimentos de medición. Por último, se analizó la posible relación de algún elemento de la métrica y la curvatura con la concurrencia del sistema cuántico en este modelo.

En el siguiente capítulo, se detallan los algoritmos cuánticos que se diseñaron para calcular el tensor cuántico geométrico de uno y dos cúbits, así como los resultados que se obtuvieron al ejecutar los circuitos cuánticos en el simulador de computación cuántica *QasmSimulator* y en la computadora cuántica real *IBM\_Lagos*.

# Capítulo IV: Resultados y discusión

En este capítulo se presenta el cálculo del tensor cuántico geométrico en dos modelos: el modelo genérico de rotación de un cúbit, y el modelo de un estado particular de dos cúbits con entrelazamiento. El tensor cuántico geométrico se calculó de manera analítica, y posteriormente, a través de la ejecución de algoritmos cuánticos para su comparación.

## 1. Modelo de un cúbit con rotaciones genéricas

Es posible describir el estado general de un cúbit  $|\psi_q\rangle$  como la multiplicación de una matriz  $SU(2)$  por un estado inicial  $|\psi_{q0}\rangle$ . Dicha matriz unitaria está dada por,

$$U_{1q} = \begin{pmatrix} e^{ia} \cos(\frac{\theta}{2}) & -e^{-ib} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ e^{ib} \sin(\frac{\theta}{2}) & e^{-ia} \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (98)$$

tal que los parámetros  $a, b$  y  $\theta$  definen el estado del cúbit. Dado que  $U_{1q}$  depende de tres parámetros independientes, el tensor cuántico geométrico asociado ( $TCG_{1q}$ ) es un tensor de rango dos y dimensión tres, de manera que el elemento del tensor  $TCG_{1q}$  ( $i, j$ ) corresponde a los parámetros  $p_i, p_j$ , donde  $p_1 = a, p_2 = b, y p_3 = \theta$ .

### 1.1 Cálculo teórico del $TCG_{1q}$

El cálculo de la parte real del tensor cuántico geométrico  $TCG_{1q}$  del modelo de un cúbit genérico que se caracteriza por la matriz unitaria  $U_{1q}$ , se muestra a continuación,

$$Re(TCG_{1q}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) & -\sin^2(\theta) & 0 \\ -\sin^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (99)$$

mientras que la componente imaginaria del tensor cuántico geométrico está dada por,

$$Im(TCG_{1q}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}. \quad (100)$$

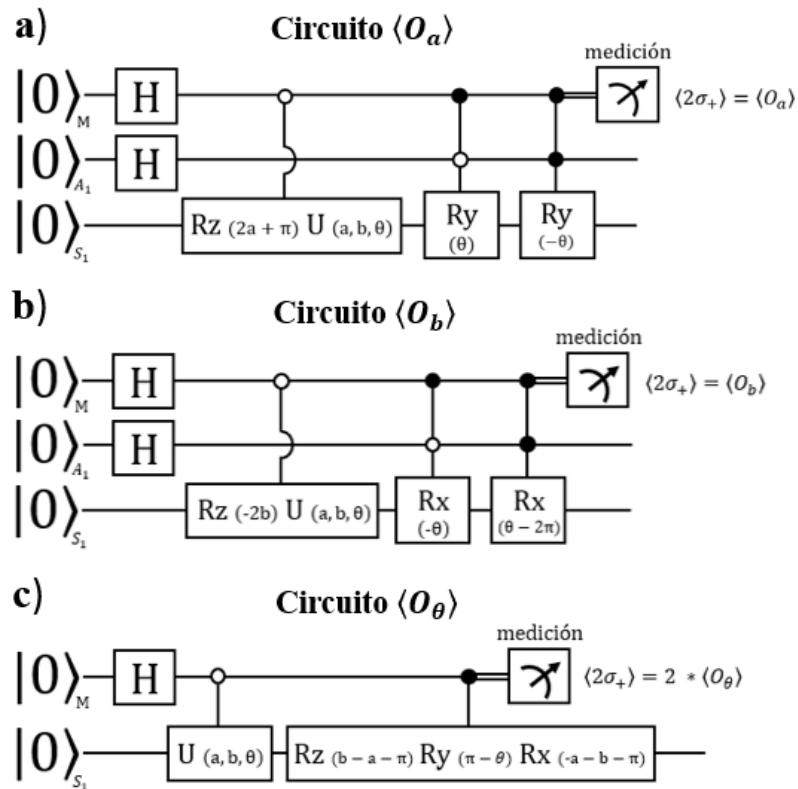


## 1.2 Algoritmos cuánticos para calcular el $TCG_{1q}$

Se calculó el  $TCG_{1q}$  dentro del marco de referencia de la computación cuántica y el modelo del circuito cuántico. Se presentan a continuación los algoritmos cuánticos que se diseñaron para calcular los nueve valores esperados ( $\langle O_{\rho_i} \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ ,  $\rho_i, \rho_j \in \{a, b, \theta\}, i \leq j$ ) necesarios para calcular las nueve componentes del TCG correspondiente. Los algoritmos que se presentan ya han sido simplificados para disminuir el número de compuertas cuánticas y por ende, el tiempo de ejecución. La implementación de los algoritmos en *Qiskit* está referida en los anexos 2-10.

### 1.2.1 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_a \rangle, \langle O_b \rangle, \langle O_\theta \rangle$

Los algoritmos cuánticos que se diseñaron para calcular los valores esperados  $\langle O_a \rangle = \langle 0|U_{1q}^\dagger \partial_a U_{1q}|0\rangle$ ,  $\langle O_b \rangle = \langle 0|U_{1q}^\dagger \partial_b U_{1q}|0\rangle$ , y  $\langle O_\theta \rangle = \langle 0|U_{1q}^\dagger \partial_\theta U_{1q}|0\rangle$ , se muestran en la figura 20,



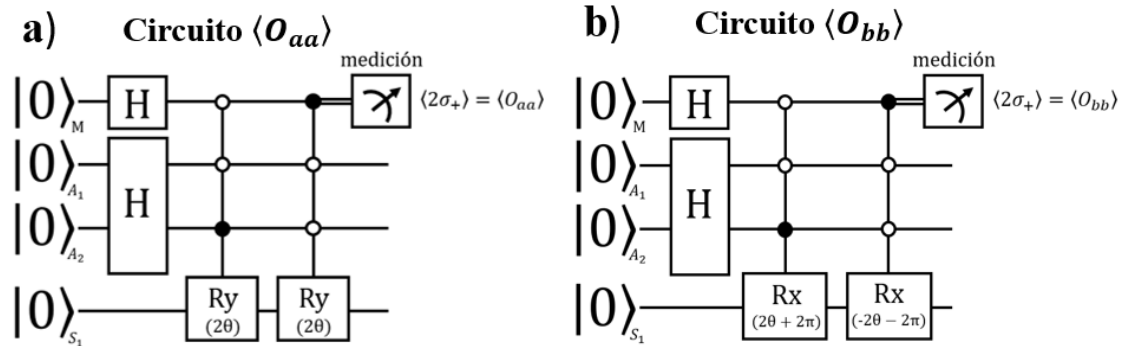
**Figura 20.** Algoritmos cuánticos para calcular los valores esperados: a)  $\langle O_a \rangle$ , b)  $\langle O_b \rangle$ , c)  $\langle O_\theta \rangle$ , del sistema cuántico de un cúbit. La letra M indica que el cúbit es el de medición, la A que es un cúbit ancilla, y la S que el cúbit corresponde al sistema del que se busca calcular el tensor cuántico geométrico.

en donde se aprecian tres tipos de cúbits; los cúbits M, que representan los cúbits de medición, y sobre los cuales se extrajo la información para calcular los valores esperados; los cúbits  $A_i$ , que hacen alusión a los cúbits ancilla, los cuales permiten realizar operaciones cuánticas no unitarias; y los cúbits  $S_i$ , que hacen referencia al sistema cuántico que se estudia.

A su vez, se visualiza un esquema similar entre los circuitos  $\langle O_a \rangle$  y  $\langle O_b \rangle$ ; ambos circuitos utilizan un cúbit ancilla, y cada uno involucra cinco compuertas cuánticas. La razón detrás de su semejanza radica en que ambos operadores fueron descompuestos como suma de dos matrices unitarias; en contraste,  $O_\theta$  es en sí es unitario, y por lo tanto cuenta con un circuito menos complejo que no necesita de cúbits ancilla.

### 1.2.2 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{aa} \rangle, \langle O_{bb} \rangle, \langle O_{\theta\theta} \rangle$

Se presentan en la figura 21 los circuitos cuánticos para calcular  $\langle O_{aa} \rangle = \langle 0 | \partial_a U_{1q}^\dagger \partial_a U_{1q} | 0 \rangle$ , y  $\langle O_{bb} \rangle = \langle 0 | \partial_b U_{1q}^\dagger \partial_b U_{1q} | 0 \rangle$ . Se observa que cada algoritmo cuenta con dos cúbits ancilla, como consecuencia de que ambos operadores fueron descompuestos como suma de cuatro matrices unitarias. Por otro lado, estos circuitos están compuestos por menos compuertas cuánticas que los algoritmos respectivos para calcular  $\langle O_a \rangle$  y  $\langle O_b \rangle$ , aunque estos últimos cuenten con una menor cantidad de cúbits como se mostró en la figura 20.

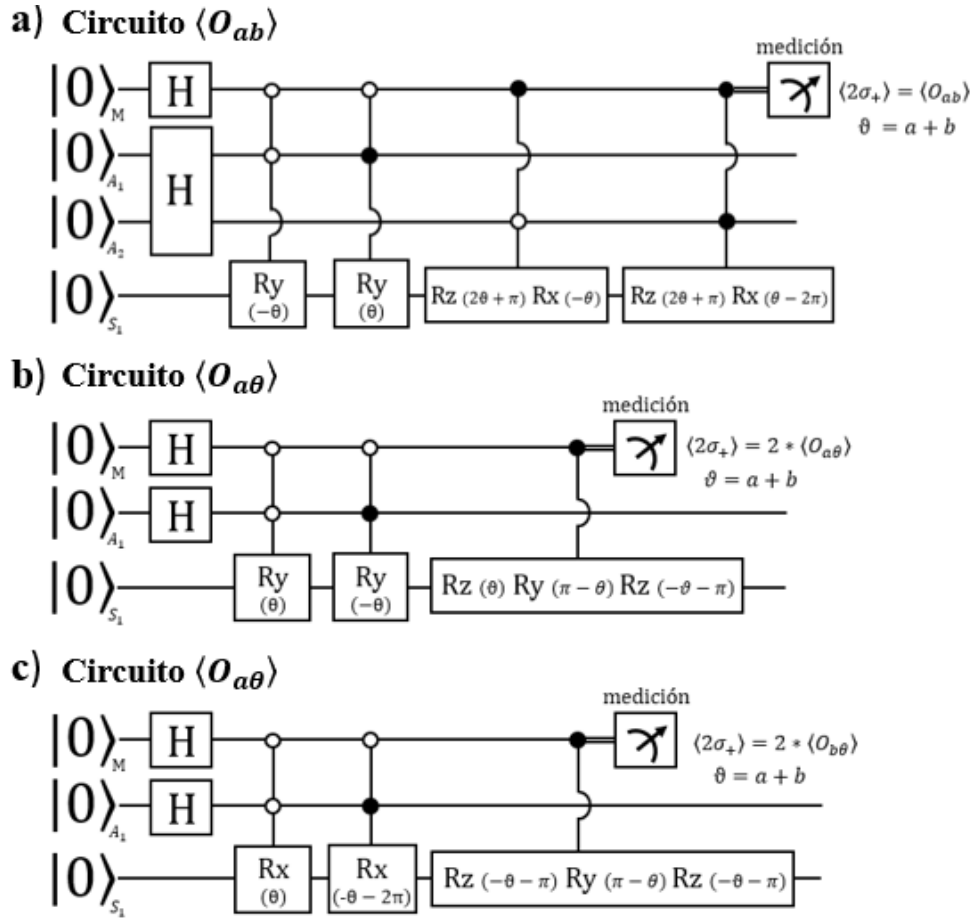


**Figura 21.** Algoritmos cuánticos para calcular los valores esperados: a)  $\langle O_{aa} \rangle$ , b)  $\langle O_{bb} \rangle$ , del sistema cuántico de un cúbit  $U_{1q}$ . Ambos circuitos cuentan con dos cúbits ancilla y con cuatro compuertas cuánticas.

Por su parte, no fue necesario diseñar un circuito para calcular el valor esperado  $\langle O_{\theta\theta} \rangle = \langle 0 | \partial_\theta U_{1q}^\dagger \partial_\theta U_{1q} | 0 \rangle$ , pues cuenta con un valor constante de  $1/4$  como se mencionó en la tabla 1 dentro del capítulo de Metodología: modelo de un cúbit genérico.

### 1.2.3 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{ab} \rangle$ , $\langle O_{a\theta} \rangle$ , $\langle O_{b\theta} \rangle$

Posteriormente, en la figura 22 se presentan los algoritmos cuánticos que se diseñaron para calcular los valores esperados  $\langle O_{ab} \rangle = \langle 0 | \partial_a U_{1q}^\dagger \partial_b U_{1q} | 0 \rangle$ ,  $\langle O_{a\theta} \rangle = \langle 0 | \partial_a U_{1q}^\dagger \partial_\theta U_{1q} | 0 \rangle$ , y  $\langle O_{b\theta} \rangle = \langle 0 | \partial_b U_{1q}^\dagger \partial_\theta U_{1q} | 0 \rangle$ ,

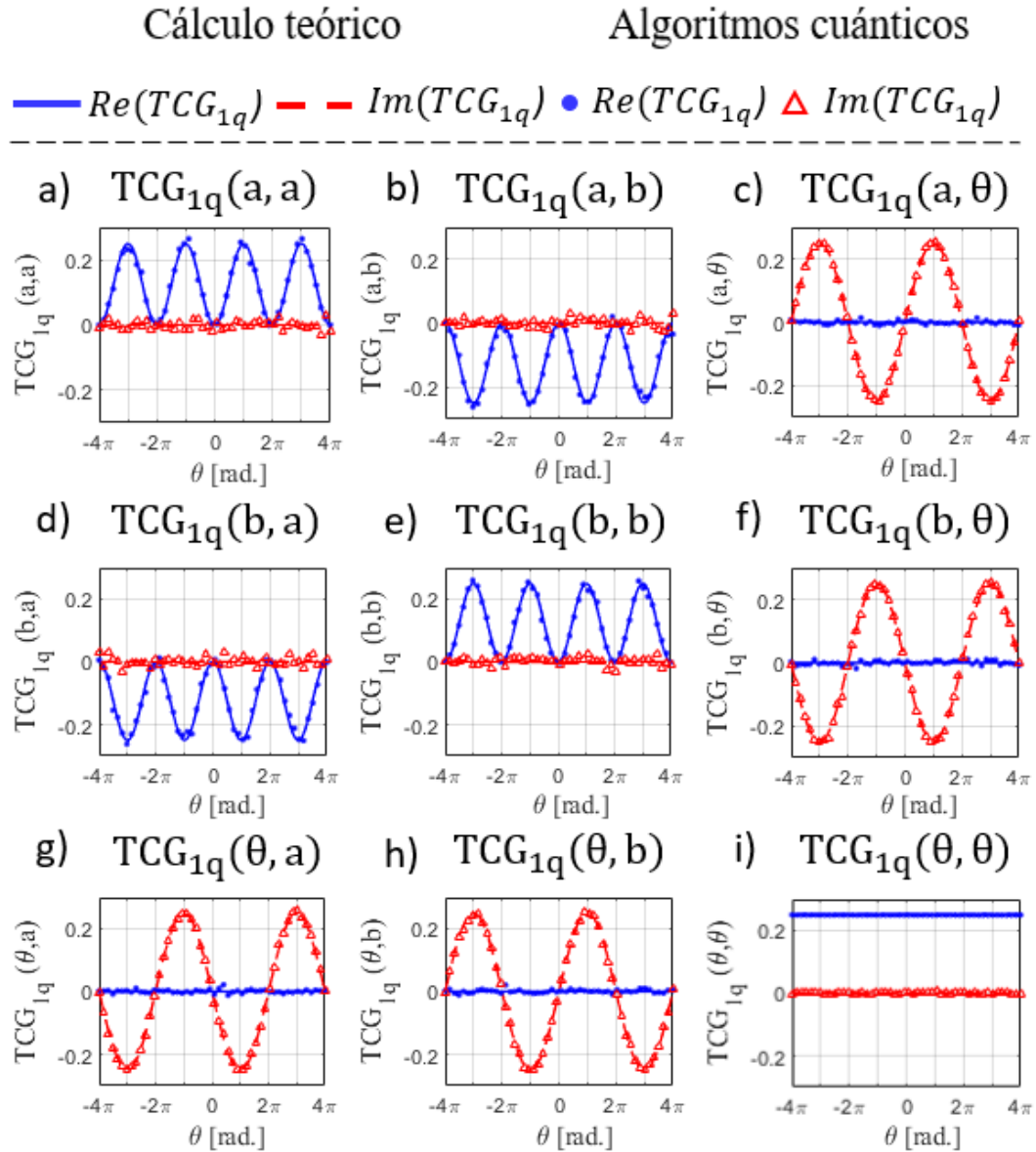


**Figura 22.** Algoritmos cuánticos para calcular los valores esperados: a)  $\langle O_{ab} \rangle$ , b)  $\langle O_{a\theta} \rangle$ , c)  $\langle O_{b\theta} \rangle$ , del sistema cuántico de un cúbit  $U_{1q}$ .

en donde se observan circuitos más complejos que los previos, dado que los operadores  $O_{ab}$ ,  $O_{a\theta}$ , y  $O_{b\theta}$  están compuestos por la multiplicación de dos gradientes con respecto a diferentes parámetros. Con estos nueve algoritmos, fue posible calcular la parte real e imaginaria de los valores esperados  $\langle O_{\rho_i} \rangle$ ,  $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ ,  $\rho_i, \rho_j \in \{a, b, \theta\}$ ,  $i \geq j$ , y por ende, las nueve componentes del  $TCC_{1q}$  (a través de la ecuación (95)), cuyos resultados de ejecución se muestran en la siguiente sección.

### 1.3 Cálculo del tensor cuántico geométrico $TCG_{1q}$ por medio de la ejecución de algoritmos cuánticos

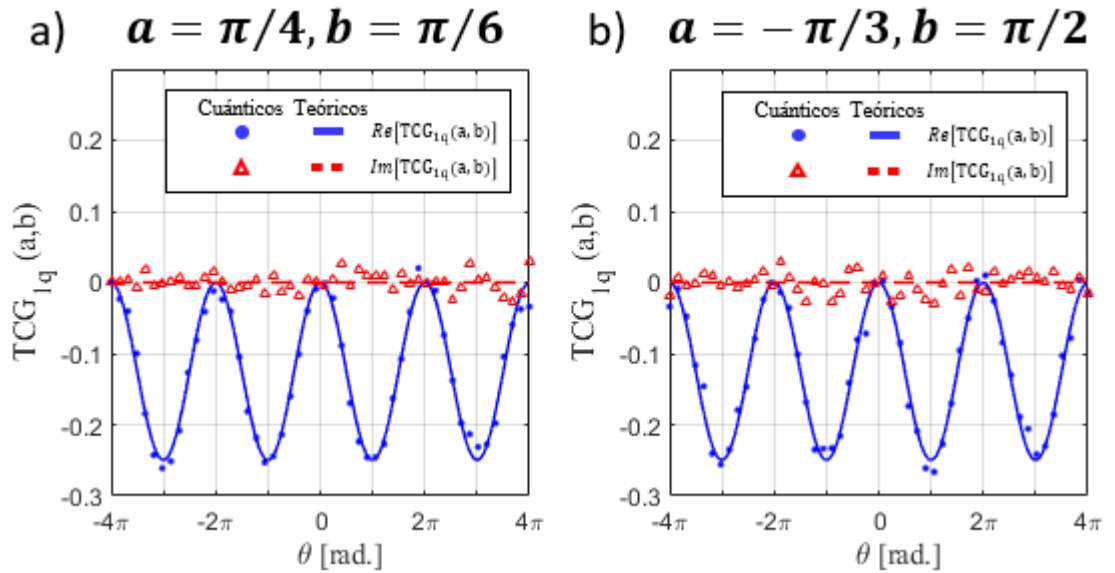
En la figura 23 se presentan las partes real e imaginaria de las componentes del tensor cuántico geométrico  $TCG_{1q}$  que se obtuvieron por la vía de la computación cuántica, así como los respectivos valores teóricos del tensor; ambos se muestran en función de  $\theta$ .



**Figura 23.** Tensor cuántico geométrico del sistema genérico de un cúbit en función del parámetro  $\theta$ . Se visualizan los valores que se obtuvieron de manera teórica, y por vía de la computación cuántica (*QasmSimulator*), de cada una de las nueve componentes: a)  $TCG_{1q}(a, a)$ , b)  $TCG_{1q}(a, b)$ , c)  $TCG_{1q}(a, \theta)$ , d)  $TCG_{1q}(b, a)$ , e)  $TCG_{1q}(b, b)$ , f)  $TCG_{1q}(b, \theta)$ , g)  $TCG_{1q}(\theta, a)$ , h)  $TCG_{1q}(\theta, b)$ , i)  $TCG_{1q}(\theta, \theta)$ . Los parámetros restantes,  $a = \pi/4$ ,  $b = \pi/6$ , se mantuvieron constantes.

De esta manera, se visualiza en la figura 23 que los resultados que se obtuvieron por medio de la ejecución de los algoritmos cuánticos en el simulador de computación cuántica *QasmSimulator* reproducen correctamente el comportamiento de la parte real e imaginaria de las componentes del tensor cuántico geométrico, para el sistema de un cúbit genérico.

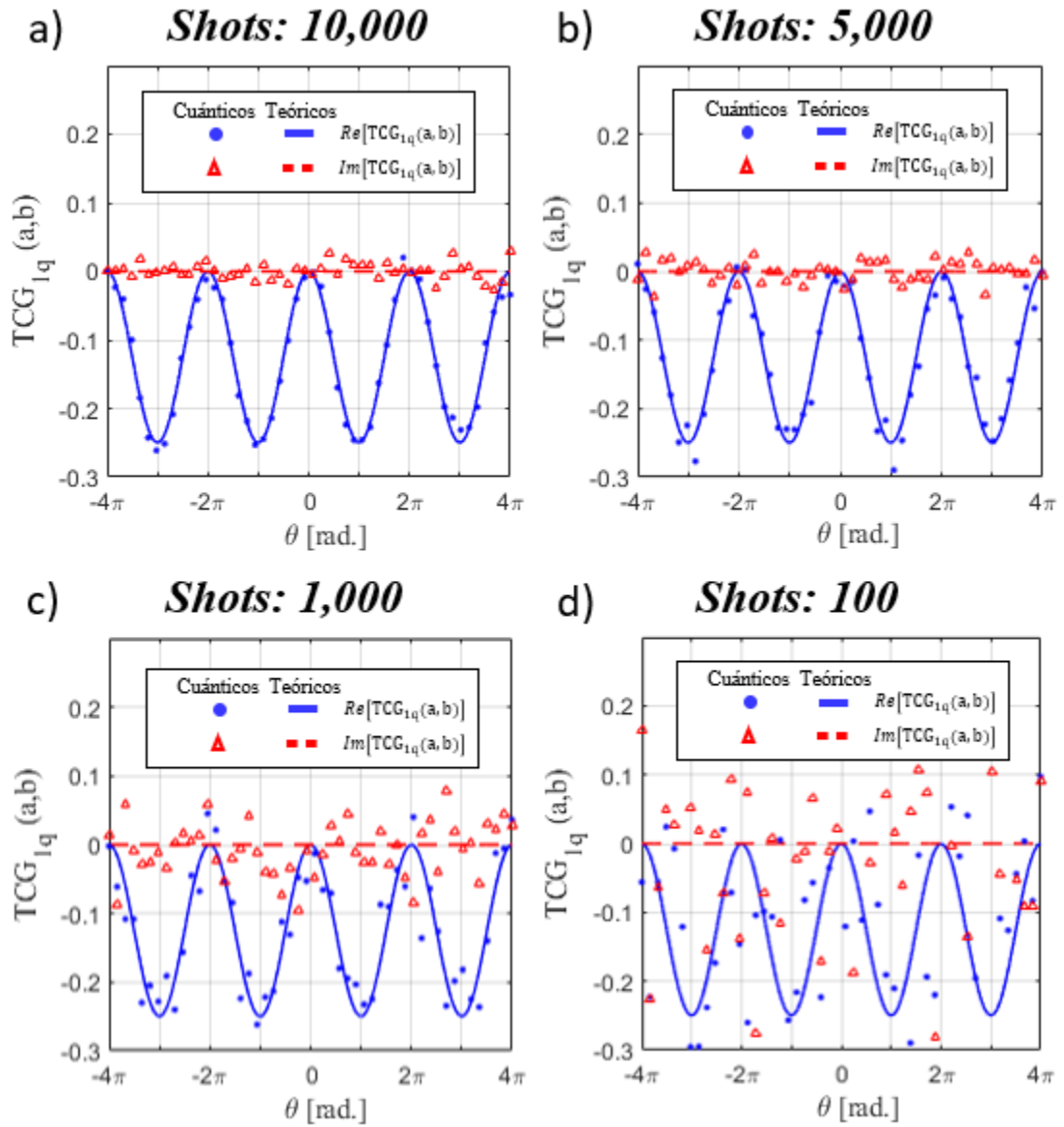
A su vez, el cálculo teórico del  $TCG_{1q}$  (ecuaciones (99)-(100)) indica que el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  no tienen injerencia sobre las componentes del tensor; para comprobar que los algoritmos son consistentes con esto último, en las figuras 24a y 24b se exhibe la componente  $TCG_{1q}(a, b)$  con diferentes valores de  $a$  y  $b$ ; se visualiza que los resultados son equivalentes, y por lo tanto, los algoritmos son coherentes con el cálculo teórico del  $TCG_{1q}$ .



**Figura 24.** Componente  $TCG_{1q}(a, b)$  del tensor cuántico geométrico con distintos valores de los parámetros  $a$  y  $b$ : a)  $a = \pi/4, b = \pi/6$ ; b)  $a = -\pi/3, b = \pi/2$ .

En la figura 25 se aprecia el efecto que tiene el número de *shots* (cantidad de mediciones que se realizaron por algoritmo cuántico) sobre el cálculo del tensor cuántico geométrico. En este caso, se visualiza que al realizar entre 5000 a 10000 mediciones por algoritmo, se obtienen buenos resultados; por su parte, alrededor de 1000 mediciones surgen discrepancias de hasta  $\pm 0.1$  en la componente del tensor  $TCG_{1q}(a, b)$ , las cuales son significativas dado que el rango de valores es de  $\pm 0.25$ ; aun así, es posible relacionar los valores teóricos con los que se obtuvieron por la vía de la computación cuántica. Finalmente, una cantidad de

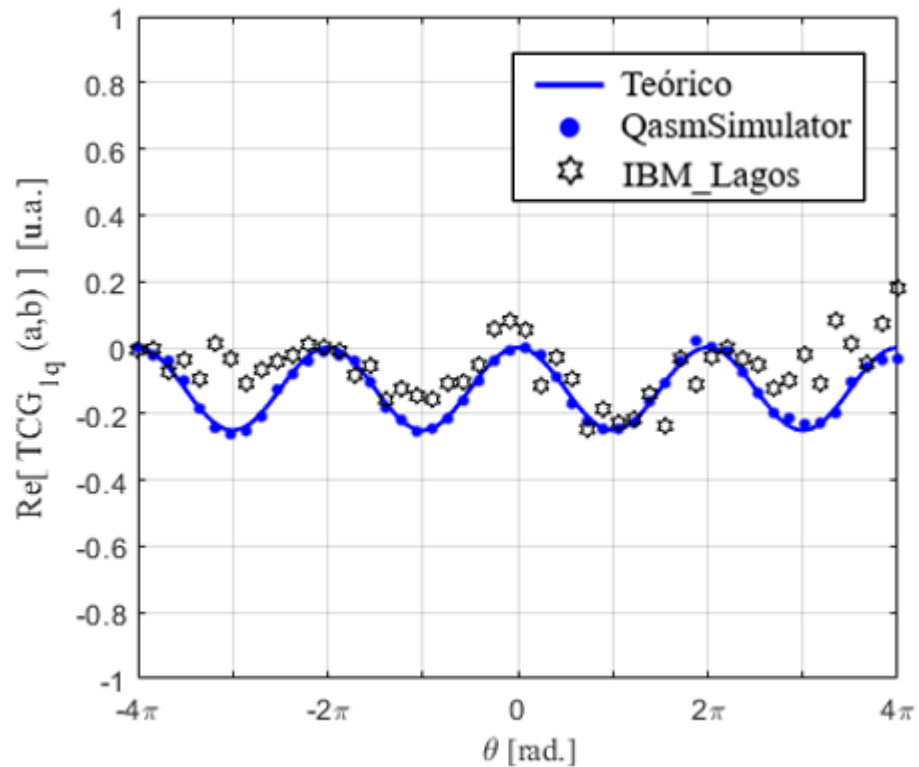
*shots* de 100 produce resultados que aparentan ser aleatorios; por lo tanto, la cantidad óptima de mediciones por algoritmo para obtener información sobre el tensor cuántico geométrico está en el rango de los miles de mediciones.



**Figura 25.** Cálculo de la componente del tensor  $TCG_{1q}(a,b)$  a diferentes números de *shots* por algoritmo cuántico. Cantidad de shots: a) 10,000; b) 5,000; c) 1,000; d) 100.

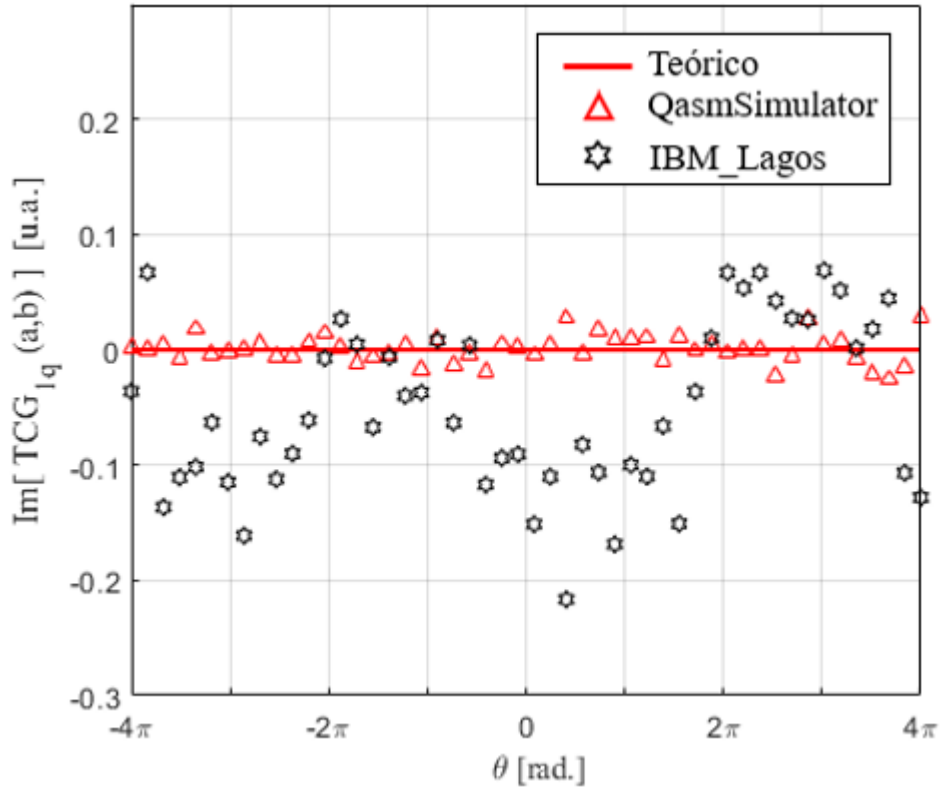
Por último, en las figuras 26 y 27 se exhiben los valores de la componente real e imaginaria de  $TCG_{1q}(a,b)$ , a partir de la ejecución de los algoritmos en la computadora cuántica *IBM\_Lagos*.

De esta manera, se visualiza que en ambos casos los resultados no se ajustan con los valores teóricos del tensor. Por un lado, el valor de la parte real del  $TCG_{1q}(a, b)$  emula correctamente la existencia y la ubicación de los mínimos y los máximos que se obtuvieron a través del cálculo analítico, como se observa en la figura 26; sin embargo, para aproximadamente la mitad de los valores de  $\theta_1$  el error relativo oscila entre 50-100 %, y por lo tanto resulta complicado reconstruir el tensor cuántico geométrico a partir de los valores que se calcularon en la computadora *IBM\_Lagos*.



**Figura 26.** Cálculo de la parte real de la componente del tensor cuántico geométrico  $TCG_{1q}(a, b)$  para el sistema de un cúbit, a través de la ejecución de los algoritmos en la computadora cuántica *IBM\_Lagos*.

Por su parte, los resultados de la parte imaginaria del  $TCG_{1q}(a, b)$  que se distinguen en la figura 27 fueron menos favorable; los valores se alejan demasiado del cero, tal que el 80 % de los puntos cuentan con un valor absoluto mayor a 0.05. Esta cantidad, aunque en un principio pequeña, es significativa, dado que el valor máximo que se puede obtener para la componente  $Im[TCG_{1q}(a, b)]$  es de 0.25.



**Figura 27.** Cálculo de la parte imaginaria de la componente del tensor cuántico geométrico  $TCG_{1q}(a,b)$  para el sistema de un cúbit, a través de la ejecución de los algoritmos en la computadora cuántica *IBM\_Lagos*.

Aun así, cabe mencionar que el diseño de los algoritmos cuánticos no es en sí la causa de las discrepancias entre los valores teóricos del tensor y los que se cuantificaron en *IBM\_Lagos*. Como se muestra en las figuras 23-25, la ejecución de los algoritmos en *QasmSimulator* produjo resultados que reproducen correctamente el tensor cuántico geométrico. Por lo tanto, el origen detrás de la disparidad que se muestra en las figuras 26 y 27 reside en errores inherentes de la computadora cuántica *IBM\_Lagos*. De acuerdo con Aseginolaza et al. (2023), las computadoras cuánticas actuales son imperfectas, y cuentan con varios errores en el proceso de cálculo <sup>[144]</sup>. Estos errores aparecen en la inicialización de los cúbits, en el accionar de cada compuerta cuántica, e inclusive, en el momento de la medición. Dichos errores se van acumulando hasta que los resultados pierden significado, como se observa en la figura 27.

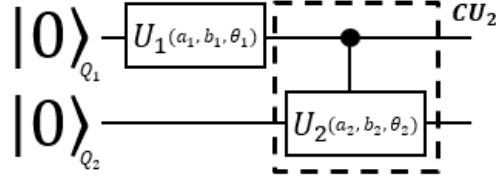
No obstante, se hace notar que cuando  $\theta$  adquiere valores cercanos a  $\pm 2\pi$ , la precisión incrementa tanto para la parte real como la parte imaginaria; por lo tanto, los errores no son



sistemáticos, y tienen dependencia con respecto al valor de los parámetros. En adición, Shi y Malaney (2023) reportaron una fidelidad de la computadora cuántica *IBM\_Lagos* apenas superior a 0.60 <sup>[145]</sup>; en su trabajo, lograron aumentar la fidelidad en un 15 %, a través de técnicas de mitigación de errores. Por lo tanto, las discrepancias que se visualizan en las figuras 26-27 son naturales dado el paradigma actual de las computadoras cuánticas, y se pueden disminuir a través de la implementación de algoritmos de corrección de errores, o del progreso en las técnicas de control de cúbits.

## 2. Modelo de dos cúbits con entrelazamiento

El modelo particular de dos cúbits con entrelazamiento que está basado en el circuito cuántico de la figura 28,



**Figura 28.** Sistema de dos cúbits con entrelazamiento parametrizado por los ángulos  $a_1, b_1, \theta_1, a_2, b_2, \theta_2$ .

en donde  $U_1$  y  $U_2$  son dos compuertas genérica, y cuyo estado cuántico está definido como,

$$|\psi_{2q}\rangle = e^{ia_1} \cos\frac{\theta_1}{2} |00\rangle + (0)|01\rangle + e^{i(a_2+b_1)} \cos\frac{\theta_2}{2} \sin\frac{\theta_1}{2} |10\rangle + e^{i(b_2+b_1)} \sin\frac{\theta_1}{2} \sin\frac{\theta_2}{2} |11\rangle, \quad (101)$$

el cual, a su vez está descrito por la matriz unitaria  $U_{2q}$ ,

$$U_{2q} = CU_2(U_1 \otimes I_2) = \quad (102)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{ia_1} \cos(\frac{\theta_1}{2}) & 0 & -e^{-ib_1} \sin(\frac{\theta_1}{2}) & 0 \\ 0 & e^{ia_1} \cos(\frac{\theta_1}{2}) & 0 & -e^{-ib_1} \sin(\frac{\theta_1}{2}) \\ e^{i(a_2+b_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & -e^{i(-b_2+b_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & e^{i(a_2-a_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) & -e^{-i(b_2+a_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) \\ e^{i(b_2+b_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & e^{i(-a_2+b_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \sin(\frac{\theta_1}{2}) & e^{i(b_2-a_1)} \sin(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) & e^{-i(a_2+a_1)} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1}{2}) \end{pmatrix}$$

tal que  $U_{2q}|00\rangle = |\psi_{2q}\rangle$ , de manera que los parámetros  $\rho_{2q} = \{a_1, b_1, \theta_1, a_2, b_2, \theta_2\}$  especifican el estado del sistema; como consecuencia de la cantidad de parámetros, el tensor cuántico geométrico respectivo,  $TCG_{2q}$ , es un tensor de dimensión seis y rango dos, tal que el elemento del tensor  $TCG_{2q}(i, j)$  corresponde a los parámetros  $\rho_i, \rho_j$ , donde  $\rho_1 = a_1, \rho_2 = b_1, \rho_3 = \theta_1, \rho_4 = a_2, \rho_5 = b_2, \rho_6 = \theta_2$ .

### 2.1 Cálculo teórico del $TCG_{2q}$

A continuación, se muestra los valores del tensor cuántico geométrico  $TCG_{2q}$  que se calcularon analíticamente, de manera que las matrices de tres por tres,  $TCG_{2q}^{11}, TCG_{2q}^{12}, TCG_{2q}^{21}, TCG_{2q}^{22}$ , componen el tensor,

$$TCG_{2q} = \begin{pmatrix} TCG_{2q}^{11} & TCG_{2q}^{12} \\ TCG_{2q}^{21} & TCG_{2q}^{22} \end{pmatrix}, \quad (103)$$

tal que la parte real del  $TCG_{2q}$  está dada por <sup>5</sup>,

$$Re[TCG_{2q}^{11}] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2\sin^2(\theta_1) & -2\sin^2(\theta_1) & 0 \\ -2\sin^2(\theta_1) & 2\sin^2(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cong Re[TCG_{1q}], \quad (104)$$

$$Re[TCG_{2q}^{12}] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\sin^2(\theta_1)(\cos(\theta_2) + 1) & \sin^2(\theta_1)(\cos(\theta_2) - 1) & 0 \\ \sin^2(\theta_1)(\cos(\theta_2) + 1) & -\sin^2(\theta_1)(\cos(\theta_2) - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (105)$$

$$Re[TCG_{2q}^{21}] = [Re[TCG_{2q}^{12}]]^T, \quad (106)$$

$$Re[TCG_{2q}^{22}] = \quad (107)$$

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 \left[ \cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - \cos^4\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin^4\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right] & -2\sin^4\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin^2(\theta_2) & 0 \\ -2\sin^4\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin^2(\theta_2) & 8 \left[ \cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - \cos^4\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin^4\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos(\theta_1) \end{pmatrix},$$

mientras que la parte imaginaria del tensor cuántico geométrico se describe como,

$$Im[TCG_{2q}^{11}] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & -2\sin(\theta_1) \\ -2\sin(\theta_1) & 2\sin(\theta_1) & 0 \end{pmatrix} \cong Im[TCG_{1q}], \quad (108)$$

$$Im[TCG_{2q}^{12}] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1)(\cos(\theta_2) + 1) & -\sin(\theta_1)(\cos(\theta_2) - 1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (109)$$

$$Im[TCG_{2q}^{21}] = -[Im[TCG_{2q}^{12}]]^T, \quad (110)$$

$$Im[TCG_{2q}^{22}] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta_2)(\cos(\theta_1) - 1) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_2)(\cos(\theta_1) - 1) \\ \sin(\theta_2)(\cos(\theta_1) - 1) & -\sin(\theta_2)(\cos(\theta_1) - 1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (111)$$

---

<sup>5</sup> La notación  $A^T$  representa la matriz traspuesta de  $A$ .

en donde se observa que la componente  $TCG_{2q}^{11}$  es equivalente al tensor cuántico geométrico del caso de un cúbit. La razón detrás es que en los valores esperados  $\langle O_{\rho_i} \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ , ( $\rho_i, \rho_j \in \{a_1, b_1, \theta_1\}, i \leq j$ ), las componentes de los operadores relacionadas con la compuerta  $CU_2$  se cancelan, y por lo tanto  $TCG_{2q}^{11}$  depende únicamente de la matriz unitaria genérica  $U_1$ , que emula al caso de un cúbit genérico. A su vez, se comprueba en las ecuaciones (103)-(111) que la parte real e imaginaria del tensor cuántico geométrico es simétrica y antisimétrica respectivamente, de acuerdo con las referencias [67], [68], y [93], y con las secciones (2.4.2.2) y (3.2) del marco teórico.

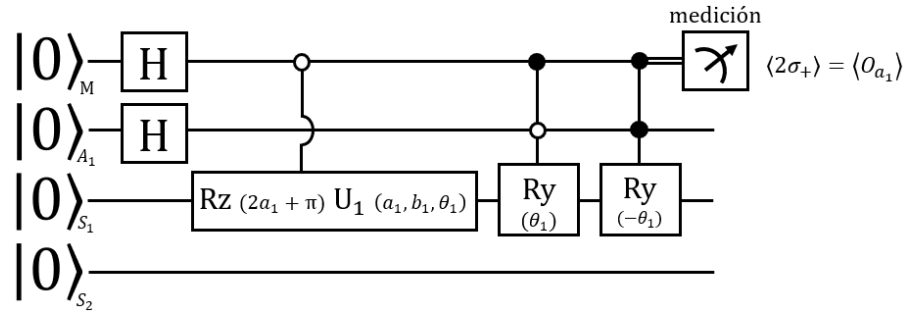
A continuación, se presentan los algoritmos que se diseñaron para calcular las componentes del tensor cuántico geométrico de dos cúbits con entrelazamiento por la vía de la computación cuántica.

## 2.2 Algoritmos cuánticos para calcular el $TCG_{2q}$

El tensor cuántico geométrico de dos cúbits con entrelazamiento se computó a través de la de la ecuación (95) y de la ejecución de 27 algoritmos cuánticos, cada uno para calcular uno de los valores esperados  $\langle O_{\rho_i} \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ ,  $\rho_i, \rho_j \in \{\rho_{2q}\}, i \leq j$ . Los algoritmos cuánticos se dividieron en cinco categorías, dependiendo de si los parámetros  $\rho_i, \rho_j$  corresponden a la compuerta cuántica  $U_1$  o  $CU_2$ .

### 2.2.1 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i} \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle, \rho_i, \rho_j \in \{a_1, b_1, \theta_1\}$

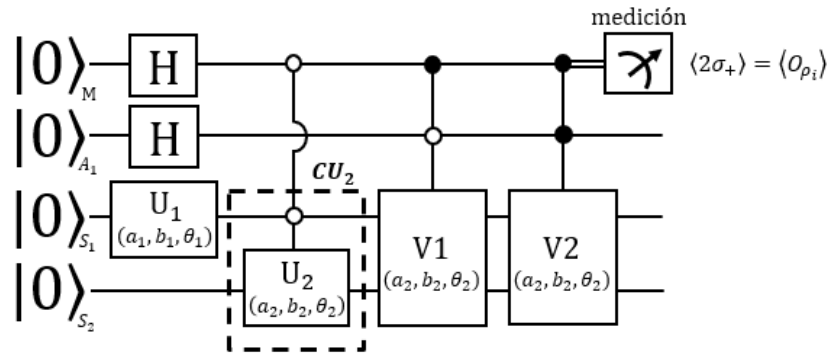
Los algoritmos cuánticos para calcular los nueve valores esperados  $\langle O_{\rho_i} \rangle = \langle 0 | U_{2q}^\dagger \partial_{\rho_i} U_{2q} | 0 \rangle, \langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle = \langle 0 | \partial_{\rho_j} U_{2q}^\dagger \partial_{\rho_i} U_{2q} | 0 \rangle$ ,  $\rho_i, \rho_j \in \{a_1, b_1, \theta_1\}$  son equivalentes a los algoritmos que se presentaron para el modelo de un cúbit genérico. Aunque en un principio, los circuitos que se diseñaron para este caso fueron más complejos, con hasta ocho compuertas de dos cúbits controladas según el modelo de Somma. et al <sup>[148]</sup>, después de simplificar los algoritmos los resultados fueron equivalentes a los de la sección 1.2. De esta manera, se presenta en la figura 29 el circuito cuántico para calcular el valor esperado  $\langle O_{a_1} \rangle$ , y se visualiza su equivalencia con el circuito para calcular  $\langle O_a \rangle$  que se expuso en la figura 20a.



**Figura 29.** Circuito cuántico para calcular  $\langle O_{a_1} \rangle$ . El circuito se visualiza equivalente al de la figura 20a.

### 2.2.2 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i} \rangle$ , $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$

En la figura 30 se presenta el esquema que se utilizó para el diseño de los tres algoritmos para calcular los valores esperados  $\langle O_{\rho_i} \rangle = \langle 0|U_{2q}^\dagger \partial_{\rho_i} U_{2q}|0\rangle$ , tal que los parámetros  $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$  corresponden a la compuerta  $CU_2$ .



**Figura 30.** Algoritmo cuántico para calcular  $\langle O_{\rho_i} \rangle$ . Las compuertas V1 y V2 dependen de  $\rho_i$ .

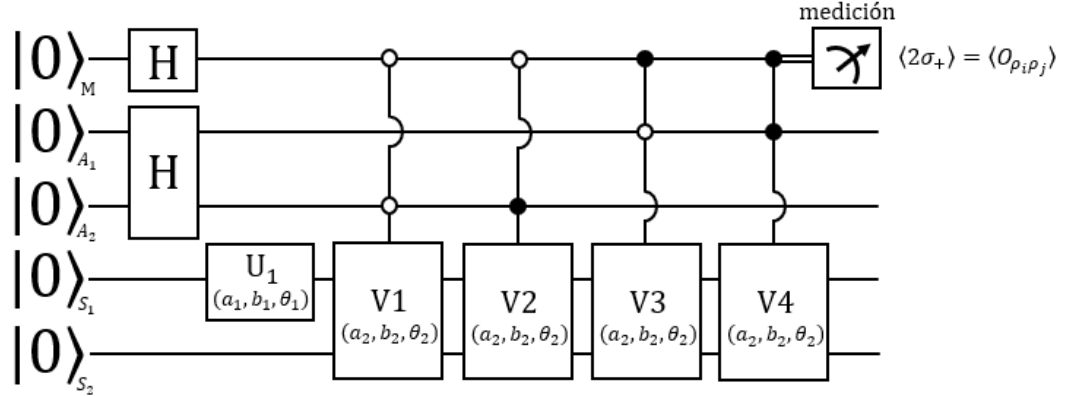
Asimismo, las compuertas cuánticas V1 y V2 dependen del parámetro en cuestión  $\rho_i$ , y se construyen a partir de la descomposición unitaria de las derivadas  $\partial_{\rho_i} U_{2q}$ , que se mostraron en la tabla 2 del capítulo de metodología. A continuación, se especifican en la tabla 3 las compuertas cuánticas V1 y V2 en dependencia del parámetro  $\rho_i$ .

**Tabla 3.** Compuertas cuánticas V1, V2.

$\rho_i$	V1	V2
$a_2$	$CRz(-2a_2 - \pi)CRy(\theta_2)$	$Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRy(-\theta_2)$
$b_2$	$CRz(2b_2)CRx(-\theta_2)$	$Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2)$
$\theta_2$	$CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2)$	$Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2)$

### 2.2.3 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ , $\rho_i, \rho_j \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ , $i \geq j$ .

Posteriormente, en la figura 31 se ilustra el esquema de los seis algoritmos cuánticos que se diseñaron para calcular los valores esperados  $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle = \langle 0 | \partial_{\rho_i} U_{2q}^\dagger \partial_{\rho_j} U_{2q} | 0 \rangle$ , tal que  $\rho_i, \rho_j \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ ,  $i \leq j$ .



**Figura 31.** Algoritmo cuántico para calcular los valores esperados  $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ ,  $\rho_i, \rho_j \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ ,  $i \geq j$ .

A su vez, las compuertas cuánticas V1, y V2 que se visualizan en el circuito cuántico de la figura 31 dependen de la selección del parámetro  $\rho_i$ , y son referidas en la tabla 3. Por su parte, las compuertas V3 y V4 dependen de  $\rho_j$ , cuya equivalencia se presenta en la tabla 4.

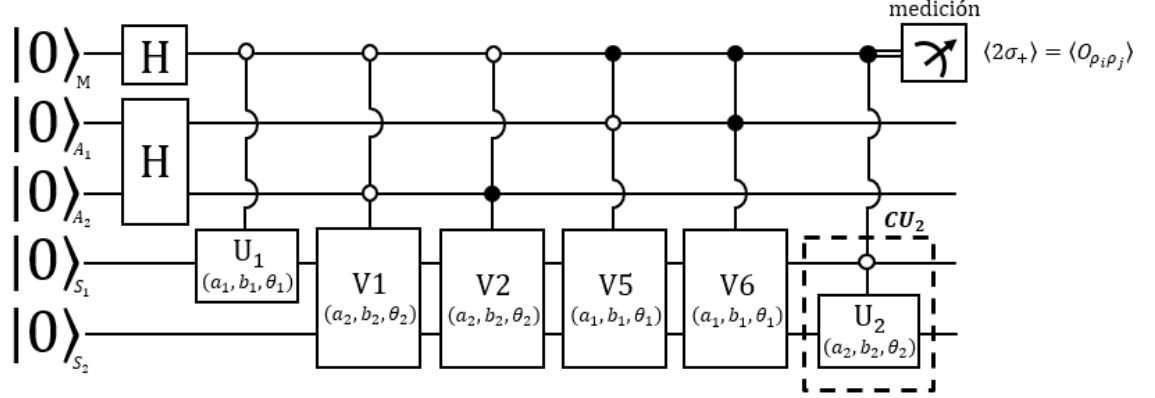
**Tabla 4.** Compuertas cuánticas V3, V4.

$\rho_j$	V3	V4
$a_2$	$CRz(-2a_2 - \pi)CRY(\theta_2)$	$Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRY(-\theta_2)$
$b_2$	$CRz(2b_2)CRx(-\theta_2)$	$Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2)$
$\theta_2$	$CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRY(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2)$	$Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRY(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2)$

### 2.2.4 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ , $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ , $\rho_j \in \{a_1, b_1\}$

Consiguientemente, en la figura 32 se exhibe el diseño de los algoritmos cuánticos para calcular  $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle = \langle 0 | \partial_{\rho_i} U_{2q}^\dagger \partial_{\rho_j} U_{2q} | 0 \rangle$ , tal que  $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ ,  $\rho_j \in \{a_1, b_1\}$ . El esquema es parecido al algoritmo de la figura 31, pero con la adición de una compuerta controlada

$CU_2$ . La parte izquierda del circuito hace referencia a  $\partial_{\rho_i} U_{2q}^\dagger$ , mientras que la derecha a  $\partial_{\rho_j} U_{2q}$ .



**Figura 32.** Algoritmo cuántico para calcular los valores esperados  $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ ,  $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ ,  $\rho_j \in \{a_1, b_1\}$ .

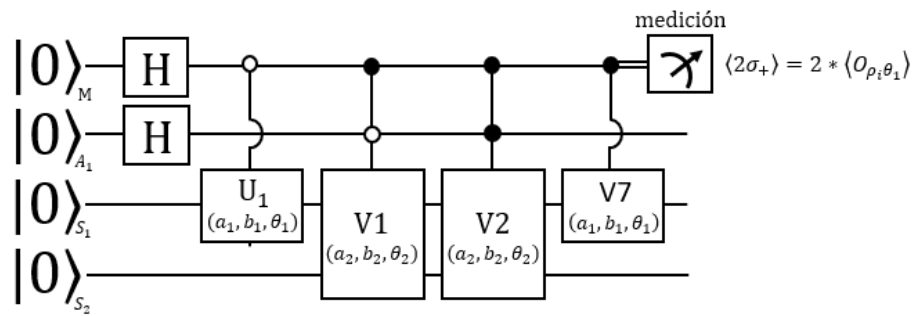
Por su parte, las compuertas V1 y V2 están dadas en dependencia del parámetro  $p_i$ , de la misma manera que en el circuito de la figura 32, y como se indica en la tabla 3. De igual forma, la composición de las compuertas V5 y V6 se presenta en la tabla 5, de acuerdo con en el parámetro  $\rho_j$  en cuestión.

**Tabla 5.** Compuertas cuánticas V5, V6.

$\rho_j$	V5	V6
$a_1$	$(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(\theta_1)) \otimes I_2$	$(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(-\theta_1)) \otimes I_2$
$b_1$	$(Rz(2b_1)Rx(-\theta_1)) \otimes I_2$	$(Rz(2b_1)Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2$

### 2.2.5 Algoritmos cuánticos para calcular $\langle O_{\rho_i \rho_j} \rangle$ , $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ , $\rho_j \in \{a_1, b_1\}$

Por último, se presentan en la figura 33 los algoritmos cuánticos para calcular los valores esperados  $\langle O_{\rho_i \theta_1} \rangle = \langle 0 | \partial_{\rho_i} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q} | 0 \rangle$ ,  $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ , tal que las compuertas V1 y V2 se componen como se indica en la tabla 3, con base en el parámetro respectivo  $\rho_i$ . Asimismo, el valor de la compuerta V7 está dado como  $Rz(b_1 - a_1 - \pi)Ry(\pi - \theta_1)Rz(\eta_1)$ , tal que  $\eta_1 = -a_1 - b_1 - \pi$ .



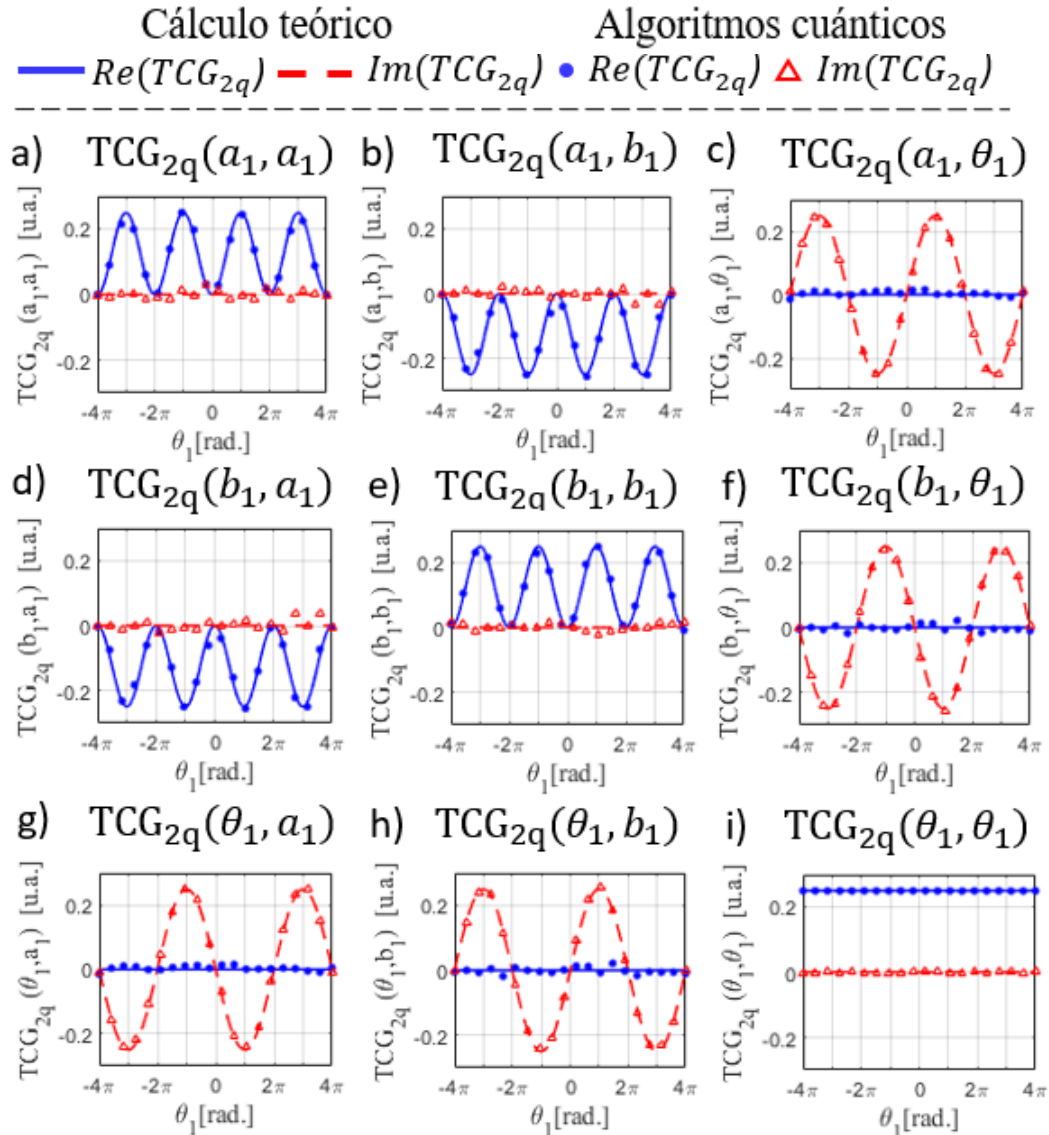
**Figura 33.** Algoritmo cuántico para calcular los valores esperados  $\langle O_{\rho_i \theta_1} \rangle$ ,  $\rho_i \in \{a_2, b_2, \theta_2\}$ .

Con esto se terminan de presentar los algoritmos cuánticos que se diseñaron para calcular el tensor cuántico geométrico de dos cúbits  $TCG_{2q}$ . Los circuitos se implementaron en *IBM Quantum Lab* como se mencionó en el apartado de metodología. En la siguiente sección, se muestran los resultados que se obtuvieron a través de la ejecución de los algoritmos.



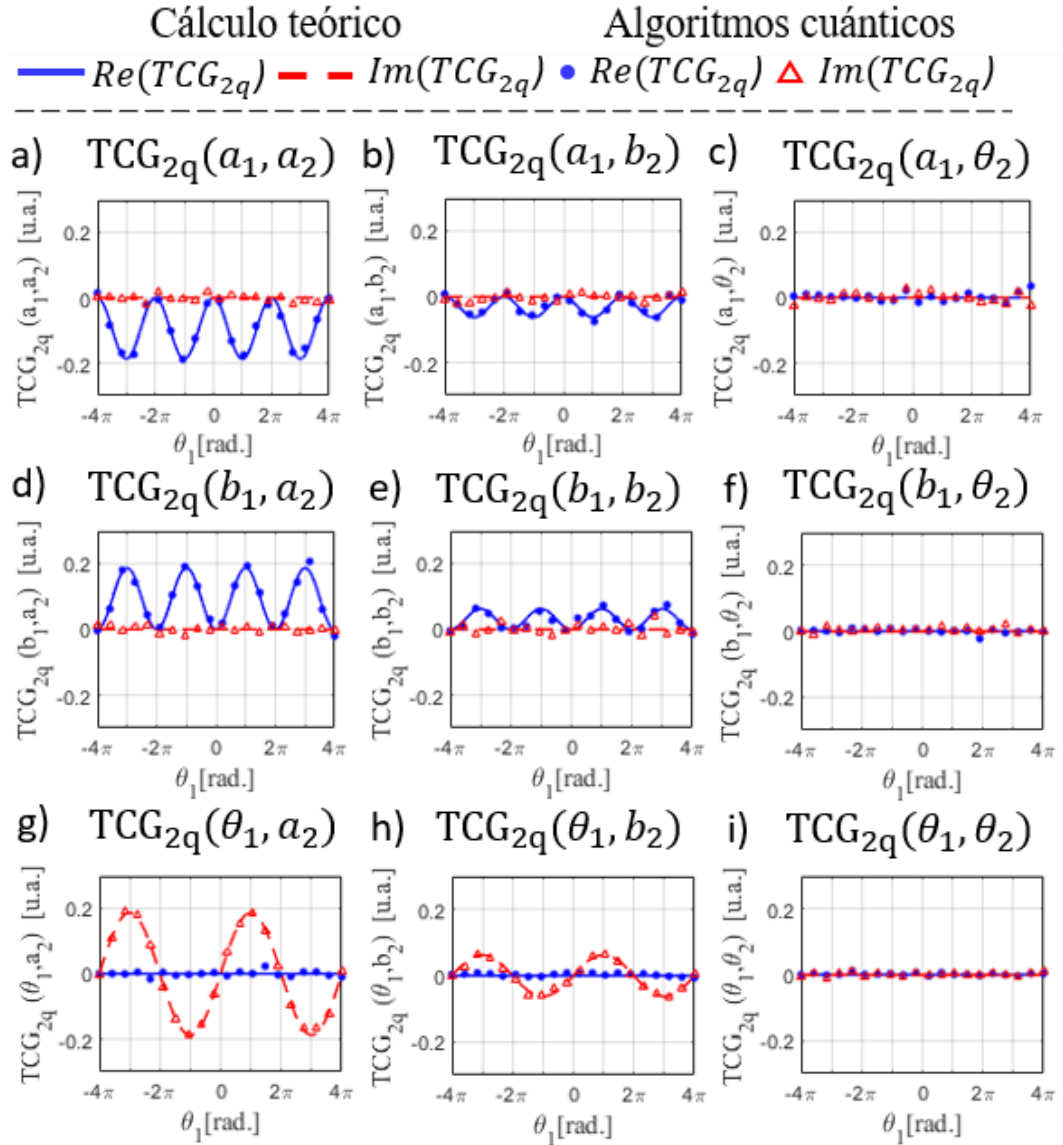
### 2.3 Cálculo del tensor cuántico geométrico $TCG_{2q}$ por medio de la ejecución de algoritmos cuánticos

A continuación, se presentan en las figuras 34-38 los valores del tensor cuántico geométrico  $TCG_{2q}$  que se obtuvieron a través de la ejecución de los algoritmos en el simulador de computación cuántica *QasmSimulator*; los resultados están dados en función del parámetro del sistema,  $\theta_1$ .



**Figura 34.** Componente  $TCG_{2q}^{11}$  del tensor cuántico geométrico en función de  $\theta_1$ . Se indican los valores teóricos de los elementos del  $TCG_{2q}$ , así como los que se obtuvieron a partir de la ejecución de los algoritmos cuánticos en *QasmSimulator*: a)  $TCG_{2q}(a_1, a_1)$ , b)  $TCG_{2q}(a_1, b_1)$ , c)  $TCG_{2q}(a_1, \theta_1)$ , d)  $TCG_{2q}(b_1, a_1)$ , e)  $TCG_{2q}(b_1, b_1)$ , f)  $TCG_{2q}(b_1, \theta_1)$ , g)  $TCG_{2q}(\theta_1, a_1)$ , h)  $TCG_{2q}(\theta_1, b_1)$ , i)  $TCG_{2q}(\theta_1, \theta_1)$ . Se mantuvieron constantes los valores de los parámetros,  $a_1 = \pi/4$ ,  $b_1 = \pi/6$ ,  $a_2 = \pi/7$ ,  $b_2 = 2\pi/3$ ,  $\theta_2 = \pi/3$ .

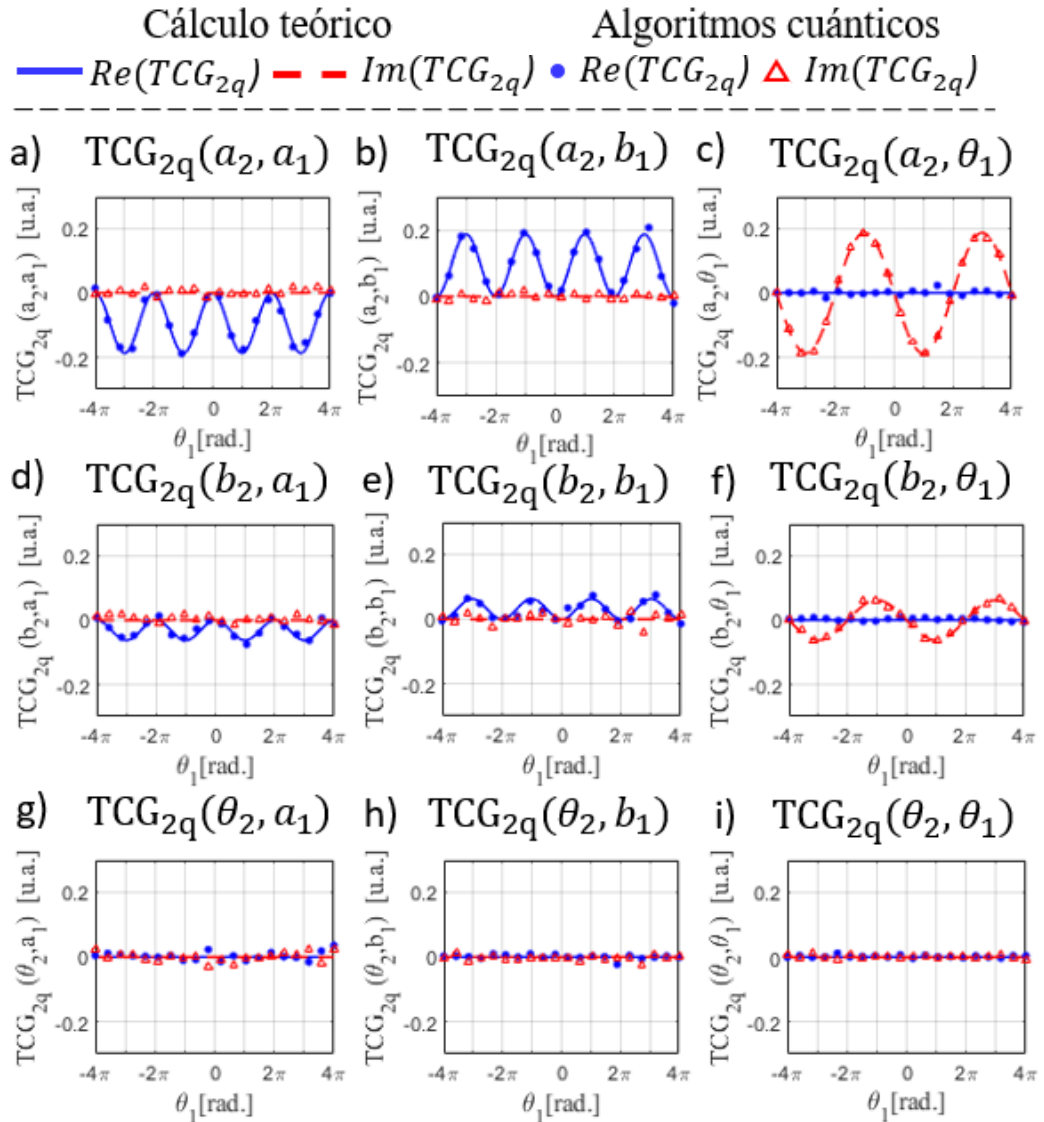
De esta manera, se comprueba en la figura 34 que la componente del tensor,  $TCG_{2q}^{11}$ , se reproduce correctamente por medio de la ejecución de los algoritmos cuánticos; a su vez, los resultados emulan el tensor cuántico geométrico para el caso de un cúbit (ver figura 23).



**Figura 35.** Componente  $TCG_{2q}^{12}$  del tensor cuántico geométrico en función de  $\theta_1$ . Se indican los valores teóricos del tensor, así como los que se obtuvieron por la vía cuántica: a)  $TCG_{2q}(a_1, a_2)$ , b)  $TCG_{2q}(a_1, b_3)$ , c)  $TCG_{2q}(a_1, \theta_2)$ , d)  $TCG_{2q}(b_1, a_2)$ , e)  $TCG_{2q}(b_1, b_2)$ , f)  $TCG_{2q}(b_1, \theta_2)$ , g)  $TCG_{2q}(\theta_1, a_2)$ , h)  $TCG_{2q}(\theta_1, b_2)$ , i)  $TCG_{2q}(\theta_1, \theta_2)$ . Los parámetros  $a_1, b_1, a_2, b_2, \theta_2$ , se mantuvieron constantes, mientras que se utilizó *QasmSimulator* para ejecutar los algoritmos.

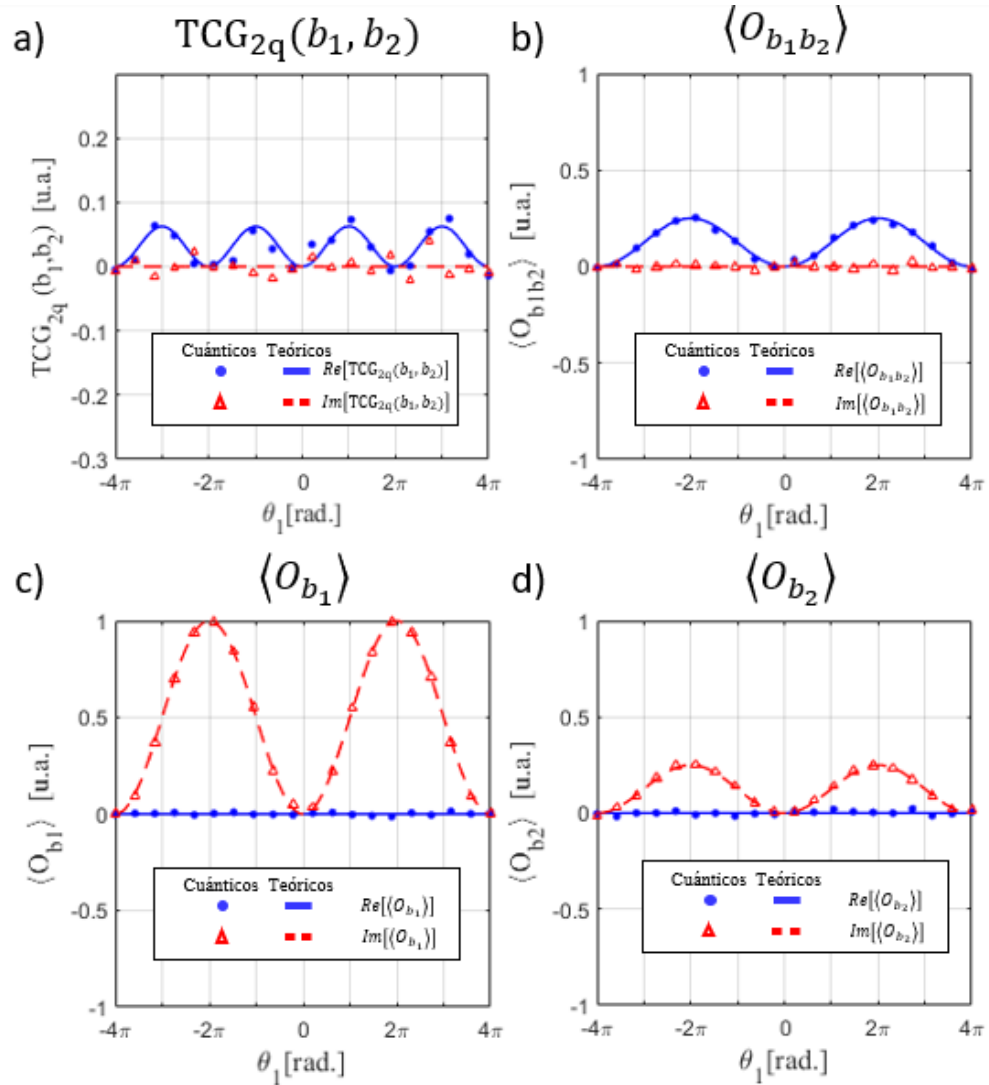
Consiguientemente, en las figuras 35 y 36 se comprueba el correcto funcionamiento de los algoritmos para calcular las componentes  $TCG_{2q}^{12}$  y  $TCG_{2q}^{13}$ . Por su parte, en todos los

elementos del tensor se visualiza una ligera diferencia aleatoria entre los valores teóricos y los calculados vía computación cuántica. Esta discrepancia es completamente normal, cuya causa radica en la naturaleza probabilística de la medición de un cúbit; no obstante, los elementos del tensor  $TCG_{2q}(b_1, b_2)$ ,  $TCG_{2q}(a_1, b_2)$ ,  $TCG_{2q}(b_2, b_2)$ , y  $TCG_{2q}(b_2, a_1)$ , muestran en las figuras 35b, 35e, 36d y 36e una discrepancia mayor en los valores cuantificados por los algoritmos cuánticos.



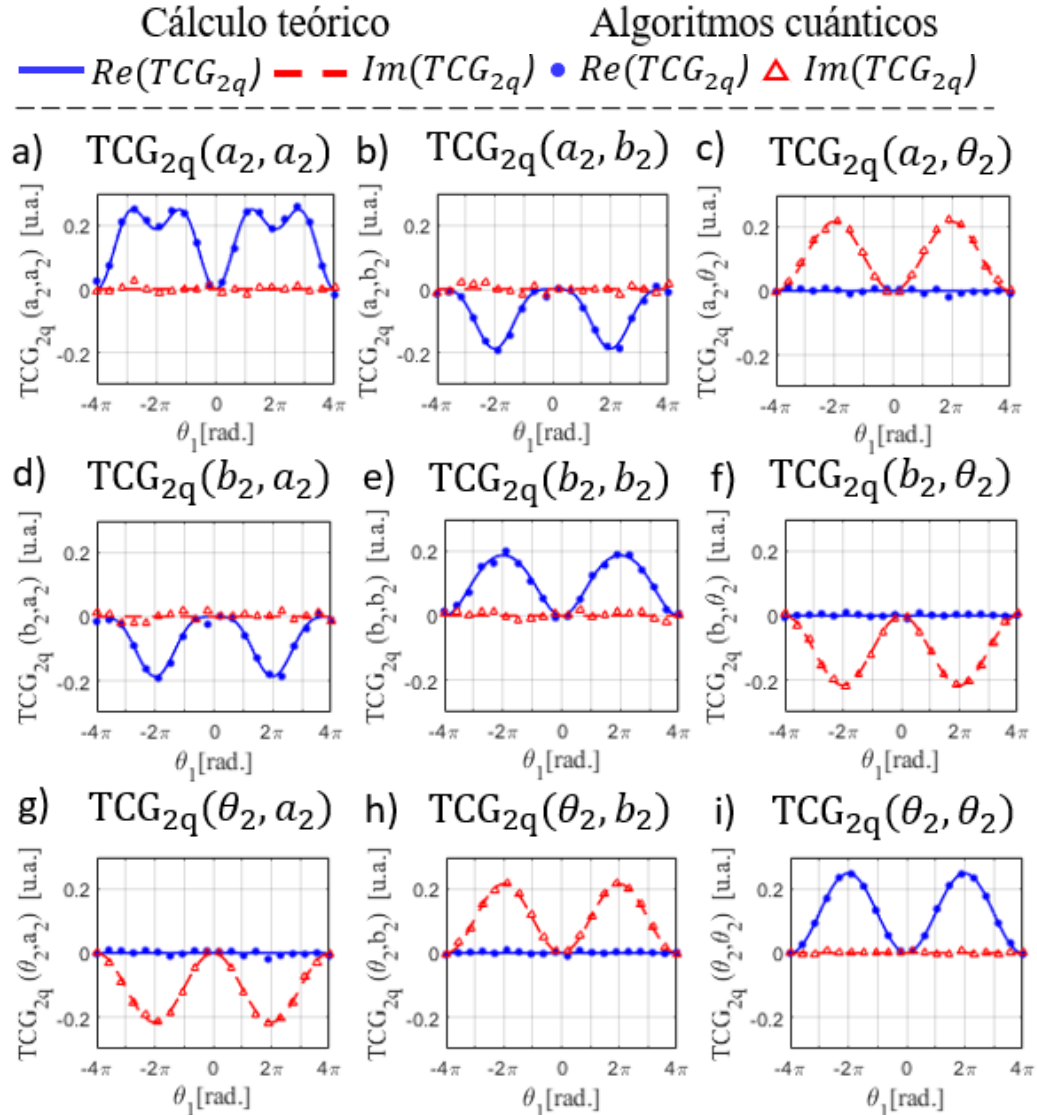
**Figura 36.** Componente  $TCG_{2q}$ <sup>21</sup> del tensor cuántico geométrico en función de  $\theta_1$ . Se indican los valores teóricos del tensor, así como los que se obtuvieron por la vía cuántica: a)  $TCG_{2q}(a_2, a_1)$ , b)  $TCG_{2q}(a_2, b_1)$ , c)  $TCG_{2q}(a_2, \theta_1)$ , d)  $TCG_{2q}(b_2, a_1)$ , e)  $TCG_{2q}(b_2, b_1)$ , f)  $TCG_{2q}(b_2, \theta_1)$ , g)  $TCG_{2q}(\theta_2, a_1)$ , h)  $TCG_{2q}(\theta_2, b_1)$ , i)  $TCG_{2q}(\theta_2, \theta_1)$ . Los parámetros  $a_1, b_1, a_2, b_2, \theta_2$ , se mantuvieron constantes, y los algoritmos cuánticos fueron ejecutados en *QasmSimulator*.

Para entender que hace diferente el cálculo de dichas componentes, se observó y analizó en la figura 37 la determinación cuántica de los valores esperados que se emplearon para calcular el elemento del tensor  $TCG_{2q}(b_1, b_2)$ ; de esta forma, se visualiza que la discrepancia es mínima en los valores esperados  $\langle O_{b_1 b_2} \rangle$ ,  $\langle O_{b_1} \rangle$ ,  $\langle O_{b_2} \rangle$ , por lo que se descarta algún tipo de defecto en el diseño de los algoritmos. En cambio, la discrepancia que se observa en la figura 37a se da como consecuencia de los pequeños errores absolutos que se acarrean al calcular el elemento del tensor  $TCG_{2q}(b_1, b_2)$  mediante la ecuación (95).



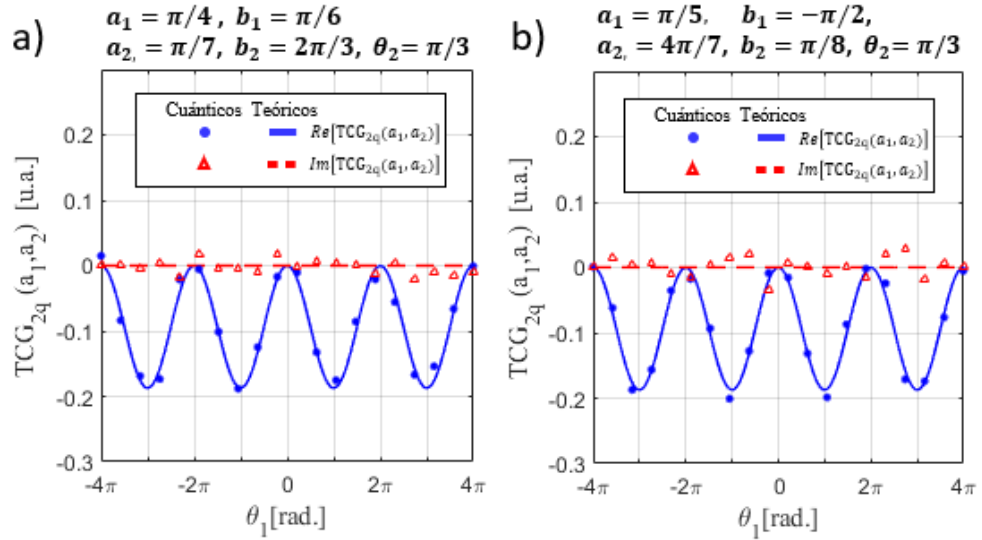
**Figura 37.** Elemento del tensor cuántico geométrico: a)  $TCG_{2q}(b_1, b_2) = \langle O_{b_1 b_2} \rangle - \langle O_{b_1} \rangle^* \langle O_{b_2} \rangle$ , y los valores esperados b)  $\langle O_{b_1 b_2} \rangle$ , c)  $\langle O_{b_1} \rangle$ , d)  $\langle O_{b_2} \rangle$  que lo componen, en función del ángulo  $\theta_1$ ; se exhiben tanto los valores teóricos como los que se cuantificaron a través de algoritmos cuánticos. Los algoritmos se ejecutaron en *QasmSimulator*.

Por último, en la figura 38 se presentan los resultados que se obtuvieron al calcular la componente del tensor,  $TCG_{2q}^{22}$ , a través de la ejecución de los algoritmos en *QasmSimulator*. Se visualizan estructuras más complejas, específicamente en las componentes del tensor  $TCG_{2q}(a_2, a_1)$ ,  $TCG_{2q}(a_2, b_2)$ , y  $TCG_{2q}(a_2, \theta_2)$ ; aun así, se observa que el cálculo del tensor a través de un enfoque de computación cuántica reproduce adecuadamente los nueve elementos que se consideran a continuación.



**Figura 38.** Componente  $TCG_{2q}^{22}$  del tensor cuántico geométrico en función de  $\theta_1$ . Se indican los valores teóricos del tensor, así como los que se obtuvieron por la vía cuántica: a)  $TCG_{2q}(a_2, a_2)$ , b)  $TCG_{2q}(a_2, b_2)$ , c)  $TCG_{2q}(a_2, \theta_2)$ , d)  $TCG_{2q}(b_2, a_2)$ , e)  $TCG_{2q}(b_2, b_2)$ , f)  $TCG_{2q}(b_2, \theta_2)$ , g)  $TCG_{2q}(\theta_2, a_2)$ , h)  $TCG_{2q}(\theta_2, b_2)$ , i)  $TCG_{2q}(\theta_2, \theta_2)$ . Los parámetros  $a_1, b_1, a_2, b_2, \theta_2$ , se mantuvieron constantes, mientras que los algoritmos fueron ejecutados en *QasmSimulator*.

Asimismo, el cálculo analítico del tensor cuántico geométrico (ecuaciones (108)-(116)), demuestra que es independiente de los parámetros  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Sin embargo, los algoritmos que se diseñaron en este trabajo contienen compuertas cuánticas definidas por dichos parámetros. En la figura 39 se visualiza el cálculo por algoritmos cuánticos del elemento del tensor  $TCG_{2q}(a_1, a_2)$ , con una variación en dichos parámetros. Ambos resultados reproducen correctamente los valores teóricos, y por ende, el valor de los ángulos  $a_1, a_2, b_1, b_2$  no influyen en el cálculo por la vía de la computación cuántica.



**Figura 39.** Cálculo analítico y por algoritmos cuánticos del elemento del tensor  $TCG_{2q}(a_1, a_2)$ , a diferentes valores de  $a_1, a_2, b_1, b_2$ : a)  $a_1 = \pi/4, b_1 = \pi/6, a_2 = \pi/7, b_2 = 2\pi/3, \theta_2 = \pi/3$ , b)  $a_1 = \pi/5, b_1 = -\pi/2, a_2 = 4\pi/7, b_2 = \pi/8, \theta_2 = \pi/3$ . Los algoritmos se ejecutaron en *QasmSimulator*.

De esta manera, se comprueba que los algoritmos que se presentan en este trabajo en su forma de circuito cuántico calculan correctamente el tensor cuántico geométrico para el sistema de dos cúbits entrelazados, al ejecutarse dentro del simulador de computación cuántica *QasmSimulator*. Esto significa, en un principio, que los algoritmos cuánticos funcionan dentro de un esquema de computación cuántica resistente a errores.

#### 2.4 Relación entre el grado de entrelazamiento del sistema de dos cúbits con el TCG.

Se determinó el grado de entrelazamiento del estado de dos cúbits  $\psi_{2q}$  a través del cálculo de la concurrencia del sistema, mediante ecuación (112),

$$\text{Concurrencia} (|\psi_{2q} \rangle) = | \langle \psi_{2q} | \tilde{\psi}_{2q} \rangle | = \frac{1}{2} \sin(\theta_1) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right). \quad (112)$$

Posteriormente, el análisis de las componentes del  $TCG_{2q}$  culminó con la relación entre el grado de entrelazamiento del sistema y la componente de la métrica de Fubini-Study respectiva a los parámetros  $b_1, b_2$ , dada por,

$$\text{Re}[TCG_{2q}(b_1, b_2)] = (\text{Concurrencia} (|\psi_{2q} \rangle))^2. \quad (113)$$

De esta manera, se demuestra que es posible calcular una propiedad física no clásica que caracteriza la no separabilidad de un sistema cuántico por medio de las características geométricas local como la métrica del espacio paramétrico asociado. Este resultado es muy importante para establecer la relación entre las métricas (propiedad local) y el grado de entrelazamiento.

# Capítulo V: Conclusiones y trabajo a futuro

## 1. Conclusiones

Este trabajo tuvo como objetivo diseñar un conjunto de algoritmos cuánticos para calcular las componentes complejas del TCG del sistema de un cúbit con rotaciones genéricas y de un sistema particular de dos cúbits con entrelazamiento, así como de probar el funcionamiento de los algoritmos en una computadora cuántica.

La funcionalidad de los algoritmos cuánticos fue verificada en ambos sistemas con el cálculo analítico del TCG (ecuaciones (99) y (100)). Por su parte, los valores teóricos denotaron la simetría de la parte real de los tensores geométricos, así como el carácter antisimétrico de la parte imaginaria; adicionalmente, este cálculo develó que el TCG del sistema de un cúbit está embebido en el tensor referente al sistema de dos cúbits entrelazados. Además, un resultado relevante es que se encontró una relación entre las componentes del TCG y la concurrencia (grado de entrelazamiento) del sistema de dos cúbits.

Con respecto al caso del sistema cuántico de un cúbit, se esquematizaron nueve algoritmos cuánticos que se ejecutaron en el simulador de computación cuántica *QasmSimulator*, cuyos resultados reprodujeron exitosamente las nueve componentes complejas del TCG en función del parámetro  $\theta$ . Las discrepancias detectadas fueron mínimas, cuya causa se atribuyó a la naturaleza probabilística de la medición de un cúbit. Además, los valores de los ángulos  $a$  y  $b$  no influyeron en los cálculos vía computación cuántica del tensor, en conformidad con los valores teóricos.

En el segundo sistema, se diseñaron 27 algoritmos cuánticos para el caso de dos cúbits con entrelazamiento. La ejecución de los circuitos en *QasmSimulator* permitió encontrar las 36 componentes complejas del TCG con desviaciones menores. A su vez, los algoritmos demostraron su funcionamiento sin importar la variación en los parámetros  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , respectivos al sistema de dos cúbits. En referencia al número de mediciones por algoritmo,



en ambos casos se determinó que se requiere una cantidad en el orden de los miles de muestras para tener resultados aceptables.

Por último, se evaluó cualitativamente el desempeño de los algoritmos en el ordenador cuántico *IBM\_Lagos*. Se calculó una componente compleja de cada TCG por medio de la ejecución de los circuitos en esta computadora, y se comparó con los valores teóricos de los tensores. Los resultados fueron deficientes; en el mejor de los casos, se reprodujo el número y la ubicación de los máximos y mínimos de la componente real del tensor en función de  $\theta$ .

En conclusión, los algoritmos cuánticos que se presentaron en esta tesis calculan adecuadamente el TCG del sistema de un cúbit con rotación genérica y del sistema de dos cúbits con entrelazamiento, siempre que se ejecuten en un simulador de computación cuántica o en una computadora cuántica con tolerancia a errores. Sin embargo, los algoritmos son deficientes cuando son ejecutados en el paradigma actual de computación cuántica, como se demostró con el ordenador *IBM\_Lagos*. Este trabajo expande el potencial de los ordenadores cuánticos hacia el cálculo de las características geométricas de los estados cuánticos, y sienta las bases para la cuantificación del tensor cuántico geométrico de sistemas más complejos que representen distintos modelos físicos.

## 2. Trabajo a futuro

En esta investigación se diseñó un conjunto de algoritmos cuánticos que calcularon correctamente el TCG del sistema de un cúbit genérico y del sistema de dos cúbits con entrelazamiento, siempre que los circuitos se ejecuten dentro de un esquema de computación cuántica exento de errores. De esta manera, este trabajo se convierte en una base para calcular el tensor cuántico de sistemas más complejos (mayor cantidad de cúbits) dentro del paradigma de computación cuántica actual. A continuación, se especifican las áreas de oportunidad para potenciar los resultados de este trabajo.

- **Algoritmos con corrección cuántica de errores:** Como se mostró en esta investigación, los algoritmos cuánticos no tuvieron buenos resultados al ejecutarse en una computadora cuántica real, dado la cantidad de errores que todavía poseen estos ordenadores. Para mejorar los resultados, se pueden agregar algoritmos cuánticos de corrección de errores, que en su caso incrementarán la precisión de los algoritmos.
- **Escalamiento de los algoritmos para sistemas cuánticos entrelazados de  $n$  cúbits:** El sistema más grande que se estudió en esta tesis fue de dos cúbits. Sin embargo, para que la computación cuántica presente una ventaja en contraposición a la computación clásica, la magnitud de los sistemas cuánticos debe estar en el orden de cientos de cúbits, y debe de existir entrelazamiento. Por lo tanto, se plantea la posibilidad de extender los algoritmos para un caso particular de  $n$  cúbits entrelazados, donde se presentaron las bases con este trabajo.
- **Cálculo del tensor cuántico geométrico de modelos de sistemas cuánticos de interés:** En este trabajo se calculó el TCG de dos sistemas compuestos por cúbits, a partir de la matriz unitaria respectiva de cada uno. No obstante, existe la posibilidad de reparametrizar dichas matrices unitarias para que hagan referencia a otros modelos físicos de interés. Por ejemplo, es posible reparametrizar la matriz unitaria respectiva a un cúbit para tomar la forma del propagador del modelo del aislante topológico SSH. En consecuencia el TCG de este último modelo se puede calcular a partir del TCG de un cúbit, sin necesidad de rediseñar los algoritmos o de ejecutarlos nuevamente. Por lo tanto, en el supuesto de contar con un conjunto de algoritmos

cuánticos con la capacidad de calcular el TCG de un sistema de  $n$  cúbits, es posible cuantificar el TCG de cualquier sistema cuyo propagador pueda ser reparametrizado como la matriz unitaria respectiva del estado cuántico de  $n$  cúbits. La principal ventaja es que la complejidad de la transformación entre los tensores cuánticos de los sistemas depende del número de parámetros, y no de la dimensión del espacio cuántico.

# VI. Anexos

## 1. Anexo 1: Descomposición unitaria de los operadores para el caso de dos cúbits con entrelazamiento.

Operador	$O = \sum \alpha_s U_s = (\sum \alpha_{s1} U_{s1})^\dagger (\sum \alpha_{s2} U_{s2})$
$U_{2q}^\dagger \partial_{a_1} U_{2q}$	$\frac{1}{2}(U_{2q}^\dagger C U_2 [(Rz(-2a_1 - \pi) Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + U_{2q}^\dagger C U_2 [(Rz(-2a_1 - \pi) Ry(-\theta_1)) \otimes I_2])$
$U_{2q}^\dagger \partial_{b_1} U_{2q}$	$\frac{1}{2}(U_{2q}^\dagger C U_2 [(Rz(2b_1) Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + U_{2q}^\dagger C U_2 [(Rz(2b_1) Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2])$
$U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\frac{1}{2}(U_{2q}^\dagger C U_2 [(Rz(b_1 - a_1 - \pi) Ry(\pi - \theta_1) Rz(\eta_1)) \otimes I_2])$
$U_{2q}^\dagger \partial_{a_2} U_{2q}$	$\frac{1}{2}[(U_{2q}^\dagger CRz(-2a_2 - \pi) CRy(\theta_2) + U_{2q}^\dagger Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) CRz(-2a_2 - \pi) CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$U_{2q}^\dagger \partial_{b_2} U_{2q}$	$\frac{1}{2}[(U_{2q}^\dagger CRz(2b_2) CRx(-\theta_2) + U_{2q}^\dagger Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) Rz(2b_2) Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_2} U_{2q}$	$\frac{1}{4}[U_{2q}^\dagger (CRz(b_2 - a_2 - \pi) CRy(\pi - \theta_2) CRz(\eta_2) + U_{2q}^\dagger Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) CRz(b_2 - a_2 - \pi) CRy(\pi - \theta_2) CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{a_1} U_{2q}^\dagger \partial_{a_1} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4}(C U_2 [(Rz(-2a_1 - \pi) Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + C U_2 [(Rz(-2a_1 - \pi) Ry(-\theta_1)) \otimes I_2]) \right)^\dagger (C U_2 [(Rz(-2a_1 - \pi) Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + C U_2 [(Rz(-2a_1 - \pi) Ry(-\theta_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{b_1} U_{2q}^\dagger \partial_{b_1} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4}(C U_2 [(Rz(2b_1) Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + C U_2 [(Rz(2b_1) Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2]) \right)^\dagger (C U_2 [(Rz(2b_1) Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + C U_2 [(Rz(2b_1) Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{\theta_1} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4}(C U_2 [(Rz(b_1 - a_1 - \pi) Ry(\pi - \theta_1) Rz(\eta_1)) \otimes I_2]) \right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi) CRy(\pi - \theta_2) CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) CRz(b_2 - a_2 - \pi) CRy(\pi - \theta_2) CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{a_2} U_{2q}^\dagger \partial_{a_2} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4}[(CRz(-2a_2 - \pi) CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) CRz(-2a_2 - \pi) CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)] \right)^\dagger [(CRz(-2a_2 - \pi) CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) CRz(-2a_2 - \pi) CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{b_2} U_{2q}^\dagger \partial_{b_2} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4}[(CRz(2b_2) CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) Rz(2b_2) Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)] \right)^\dagger [(CRz(2b_2) CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi) CPh_2(\pi) Rz(2b_2) Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)]$

$\partial_{\theta_2} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_2} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} [(CRz(2b_2)CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)] \right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{a_1} U_{2q}^\dagger \partial_{b_1} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} (CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(-\theta_1)) \otimes I_2]) \right)^\dagger (CU_2[(Rz(2b_1)Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(2b_1)Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{a_1} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} (CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(-\theta_1)) \otimes I_2]) \right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{b_1} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} (CU_2[(Rz(2b_1)Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(2b_1)Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2]) \right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{a_2} U_{2q}^\dagger \partial_{b_2} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} [(CRz(-2a_2 - \pi)CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)] \right)^\dagger [(CRz(2b_2)CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{a_2} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_2} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} [(CRz(-2a_2 - \pi)CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)] \right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{b_2} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_2} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} [(CRz(2b_2)CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)] \right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{a_2} U_{2q}^\dagger \partial_{a_1} U_{2q}$	$\left( \frac{1}{4} [(CRz(-2a_2 - \pi)CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)] \right)^\dagger (CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(-\theta_1)) \otimes I_2])$

$\partial_{a_2} U_{2q}^\dagger \partial_{b_1} U_{2q}^\dagger$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(-2a_2 - \pi)CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger (CU_2[(Rz(2b_1)Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(2b_1)Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{a_2} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(-2a_2 - \pi)CRy(\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(-2a_2 - \pi)CRy(-\theta_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{b_2} U_{2q}^\dagger \partial_{a_1} U_{2q}$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(2b_2)CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger (CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(-\theta_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{b_2} U_{2q}^\dagger \partial_{b_1} U_{2q}$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(2b_2)CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger (CU_2[(Rz(2b_1)Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(2b_1)Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{b_2} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(2b_2)CRx(-\theta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)Rz(2b_2)Rx(\theta_2 - 2b_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$
$\partial_{\theta_2} U_{2q}^\dagger \partial_{a_1} U_{2q}$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger (CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(-2a_1 - \pi)Ry(-\theta_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{\theta_2} U_{2q}^\dagger \partial_{b_1} U_{2q}$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger (CU_2[(Rz(2b_1)Rx(-\theta_1)) \otimes I_2] + CU_2[(Rz(2b_1)Rx(\theta_1 - 2b_1)) \otimes I_2])$
$\partial_{\theta_2} U_{2q}^\dagger \partial_{\theta_1} U_{2q}$	$\left(\frac{1}{4}[(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]\right)^\dagger [(CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2) + Ph_4(\pi)CPh_2(\pi)CRz(b_2 - a_2 - \pi)CRy(\pi - \theta_2)CRz(\eta_2))(U_1 \otimes I_2)]$

## VII. Referencias

1. Brody, D. C., & Hughston, L. P. (2001). Geometric quantum mechanics. *Journal of Geometry and Physics*, 38(1), 19–53. [https://doi.org/10.1016/s0393-0440\(00\)00052-8](https://doi.org/10.1016/s0393-0440(00)00052-8)
2. Brody, D. C., & Hughston, L. P. (2001). Geometric quantum mechanics. *Journal of Geometry and Physics*, 38(1), 19–53. [https://doi.org/10.1016/s0393-0440\(00\)00052-8](https://doi.org/10.1016/s0393-0440(00)00052-8)
3. Chruściński, D. (2006). Geometric aspects of quantum mechanics and quantum entanglement. *Journal of Physics. Conference Series*, 30, 9–16. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/30/1/002>.
4. Carollo, A., Valenti, D., & Spagnolo, B. (2020). Geometry of quantum phase transitions. *Physics Reports*, 838, 1–72. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.11.002>
5. Anandan, J., & Aharonov, Y. (1990). Geometry of quantum evolution. *Physical Review Letters*, 65(14), 1697–1700. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.65.1697>
6. Petz, D., & Sudár, C. (1996). Geometries of quantum states. *Journal of Mathematical Physics*, 37(6), 2662–2673. <https://doi.org/10.1063/1.531535>
7. Zanardi, P., Giorda, P., & Cozzini, M. (2007). Information-theoretic differential geometry of quantum phase transitions. *Physical Review Letters*, 99(10). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.99.100603>
8. Zanardi, P., Giorda, P., & Cozzini, M. (2007). Information-theoretic differential geometry of quantum phase transitions. *Physical Review Letters*, 99(10). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.99.100603>
9. Mondal, D. (n.d.). *Generalized fubini-study metric and fisher information metric*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/1503.04146>
10. Dey, A., Mahapatra, S., Roy, P., & Sarkar, T. (2012). Information geometry and quantum phase transitions in the Dicke model. *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 86(3). <https://doi.org/10.1103/physreve.86.031137>
11. Huang, Z., & Balatsky, A. V. (n.d.). *Complexity and geometry of quantum state manifolds*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/1711.10471>
12. Dobardžić, E., Milovanović, M. V., & Regnault, N. (2013). Geometrical description of fractional Chern insulators based on static structure factor calculations. *Physical Review. B, Condensed Matter and Materials Physics*, 88(11). <https://doi.org/10.1103/physrevb.88.115117>
13. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. (1984). *Proceedings of the Royal Society of London*, 392(1802), 45–57. <https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023>
14. Anandan, Jeeva. (1992). The geometric phase. *Nature*, 360(6402), 307–313. <https://doi.org/10.1038/360307a0>

15. Tong, D. (n.d.). *The Quantum Hall Effect TIFR Infosys Lectures*. Arxiv.org. Retrieved September 10, 2023, from <http://arxiv.org/abs/1606.06687>
16. Resta, R. (1997). Polarization as a Berry Phase. *Europhysics News*, 28(1), 18–20. <https://doi.org/10.1007/s00770-997-0018-4>
17. Sjöqvist, E. (2000). Geometric phase for entangled spin pairs. *Physical Review. A*, 62(2). <https://doi.org/10.1103/physreva.62.022109>
18. Basu, B. (2006). Relation between concurrence and Berry phase of an entangled state of two spin-(1/2) particles. *EPL (Europhysics Letters)*, 73(6), 833–838. <https://doi.org/10.1209/epl/i2005-10478-2>
19. De Chiara, G., & Palma, G. M. (2003). Berry phase for a Spin1/2 Particle in a classical fluctuating field. *Physical Review Letters*, 91(9). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.91.090404>
20. Yi, X. X., Wang, L. C., & Zheng, T. Y. (2004). Berry phase in a composite system. *Physical Review Letters*, 92(15). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.92.15040>
21. Whitney, R. S., & Gefen, Y. (2003). Berry phase in a nonisolated system. *Physical Review Letters*, 90(19). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.90.190402>
22. Anandan, J., Sjoqvist, E., Pati, A. K., Ekert, A., Ericsson, M., Oi, D. K. L., & Vedral, V. (2002). Singularities of the mixed state phase - Reply. *Physical Review Letters*, 89(26). <https://pureportal.strath.ac.uk/en/publications/singularities-of-the-mixed-state-phase-reply>
23. Moore, D. (1991). The calculation of nonadiabatic Berry phases. *Physics Reports*, 210(1), 1–43. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90089-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90089-5)
24. Cheng, R. (n.d.). *Quantum geometric tensor (fubini-study metric) in simple quantum system: A pedagogical introduction*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/1012.1337>
25. Kolodrubetz, M., Gritsev, V., & Polkovnikov, A. (2013). Classifying and measuring geometry of a quantum ground state manifold. *Physical Review. B, Condensed Matter and Materials Physics*, 88(6). <https://doi.org/10.1103/physrevb.88.064304>
26. Rattacaso, D., Vitale, P., & Hamma, A. (2020). Quantum geometric tensor away from equilibrium. *Journal of Physics Communications*, 4(5), 055017. <https://doi.org/10.1088/2399-6528/ab9505>
27. Bleu, O., Malpuech, G., Gao, Y., & Solnyshkov, D. D. (2018). Effective theory of nonadiabatic quantum evolution based on the quantum geometric tensor. *Physical Review Letters*, 121(2). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.020401>
28. Gutiérrez-Ruiz, D., Gonzalez, D., Chávez-Carlos, J., Hirsch, J. G., & Vergara, J. D. (2021). Quantum geometric tensor and quantum phase transitions in the Lipkin-Meshkov-Glick model. *Physical Review. B*, 103(17). <https://doi.org/10.1103/physrevb.103.174104>



29. Ye, C. C., Vleeshouwers, W. L., Heatley, S., Gritsev, V., & Smith, C. M. (2023). Quantum geometry of non-Hermitian topological systems. In *arXiv [cond-mat.stat-mech]*. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/2305.17675>
30. Yu, M., Yang, P., Gong, M., Cao, Q., Lu, Q., Liu, H., Zhang, S., Plenio, M. B., Jelezko, F., Ozawa, T., Goldman, N., & Cai, J. (2020). Experimental measurement of the quantum geometric tensor using coupled qubits in diamond. *National Science Review*, 7(2), 254–260. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwz193>
31. Gianfrate, A., Bleu, O., Dominici, L., Ardizzone, V., De Giorgi, M., Ballarini, D., Lerario, G., West, K. W., Pfeiffer, L. N., Solnyshkov, D. D., Sanvitto, D., & Malpuech, G. (2020). Measurement of the quantum geometric tensor and of the anomalous Hall drift. *Nature*, 578(7795), 381–385. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-1989-2>
32. Tan, X., Zhang, D.-W., Yang, Z., Chu, J., Zhu, Y.-Q., Li, D., Yang, X., Song, S., Han, Z., Li, Z., Dong, Y., Yu, H.-F., Yan, H., Zhu, S.-L., & Yu, Y. (2019). Experimental measurement of the quantum metric tensor and related topological phase transition with a superconducting qubit. *Physical Review Letters*, 122(21). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.122.210401>
33. Gamble, S. (2019). *Quantum computing: What it is, why we want it, and how we're trying to get it*. National Academies Press.
34. Bova, F., Goldfarb, A., & Melko, R. G. (2021). Commercial applications of quantum computing. *EPJ Quantum Technology*, 8(1). <https://doi.org/10.1140/epjqt/s40507-021-00091-1>
35. Zhang, Z., Wang, T., Xiang, L., Yao, J., Wu, J., & Yin, Y. (2017). Measuring the Berry phase in a superconducting phase qubit by a shortcut to adiabaticity. *Physical Review A*, 95(4). <https://doi.org/10.1103/physreva.95.042345>
36. Murta, B., Catarina, G., & Fernández-Rossier, J. (2020). Berry phase estimation in gate-based adiabatic quantum simulation. *Physical Review A*, 101(2). <https://doi.org/10.1103/physreva.101.020302>
37. Tamiya, S., Koh, S., & Nakagawa, Y. O. (2021). Calculating nonadiabatic couplings and Berry's phase by variational quantum eigensolvers. *Physical Review Research*, 3(2). <https://doi.org/10.1103/physrevresearch.3.023244>
38. Xiao, X., Freericks, J., & Kemper, A. (2021). Robustness of topology of wavefunctions in NISQ quantum machines. *APS March Meeting Abstracts, 2021*, Y29.012. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021APS..MARY29012X/abstract?>
39. Stokes, J., Izaac, J., Killoran, N., & Carleo, G. (2020). Quantum natural gradient. *Quantum*, 4(269), 269. <https://doi.org/10.22331/q-2020-05-25-269>
40. Tan, X., Zhang, D.-W., Yang, Z., Chu, J., Zhu, Y.-Q., Li, D., Yang, X., Song, S., Han, Z., Li, Z., Dong, Y., Yu, H.-F., Yan, H., Zhu, S.-L., & Yu, Y. (2019). Experimental measurement of the quantum metric tensor and related topological phase transition with

- a superconducting qubit. *Physical Review Letters*, 122(21). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.122.210401>
41. Zheng, W., Xu, J., Ma, Z., Li, Y., Dong, Y., Zhang, Y., Wang, X., Sun, G., Wu, P., Zhao, J., Li, S., Lan, D., Tan, X., & Yu, Y. (2022). Measuring quantum geometric tensor of non-Abelian system in superconducting circuits. *Chinese Physics Letters*, 39(10), 100202. <https://doi.org/10.1088/0256-307x/39/10/100202>
  42. Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to quantum mechanics: International edition* (2nd ed.). Pearson. (pp. 91).
  43. Bell, J. S. (1966). On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 38(3), 447–452. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.38.447>
  44. Gasiorowicz, S. (2003). *Quantum Physics* (3rd ed.). John Wiley & Sons. (pp. 90).
  45. Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to quantum mechanics: International edition* (2nd ed.). Pearson. (pp. 92).
  46. Jia, B., & Lee, X.-G. (2007). Quantum states and complex projective space. In *arXiv [math-ph]*. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0701011>
  47. Zettili, N. (2022). *Quantum Mechanics: Concepts and Applications* (3rd ed.). John Wiley & Sons. (pp. 80).
  48. Elkies, N. (1999). *Introduction to Hilbert Space*. Recuperado de: <https://people.math.harvard.edu/~elkies/M55b.99/hilbert1.pdf>
  49. de la Torre, A. C., & Goyeneche, D. (n.d.). *Quantum mechanics in finite dimensional Hilbert space*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0205159>
  50. Griffiths, R. (2014). Hilbert Space Quantum Mechanics. Recuperado de: <https://quantum.phys.cmu.edu/QCQI/qitd114.pdf>
  51. Vourdas, A. (2004). Quantum systems with finite Hilbert space. *Reports on Progress in Physics. Physical Society (Great Britain)*, 67(3), 267–320. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/67/3/r03>
  52. Chruściński, D. (2006). Geometric aspects of quantum mechanics and quantum entanglement. *Journal of Physics. Conference Series*, 30, 9–16. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/30/1/002>
  53. Brody, B. y. D., & Hughston, L. P. (n.d.). *Geometric Quantum Mechanics*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9906086>
  54. Austrich-Olivares, J. A., & Vergara, J. D. (2022). The quantum geometric tensor in a parameter-dependent curved space. *Entropy (Basel, Switzerland)*, 24(9), 1236. <https://doi.org/10.3390/e24091236>
  55. Santiago, J. (2014). Mathematical Methods for Physics II. Recuperado de: <https://www.ugr.es/~bjanssen/text/MetodosIIIcurso1314English.pdf>

56. Lugo, G. (2021). *Differential Geometry in Physics*. University of North Carolina Wilmington William Madison Randall Library.
57. Jia, B., & Lee, X.-G. (2007). Quantum states and complex projective space. In *arXiv [math-ph]*. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0701011>
58. Lugo, G. (2021). *Differential Geometry in Physics*. University of North Carolina Wilmington William Madison Randall Library.
59. Bengtsson, I., Brännlund, J., & Życzkowski, K. (2002).  $CP^n$ , OR, ENTANGLEMENT ILLUSTRATED. *International Journal of Modern Physics. A, Particles and Fields, Gravitation, Cosmology*, 17(31), 4675–4695. <https://doi.org/10.1142/s0217751x02010820>
60. Andersson, S., Björn, A., & Wiman, D. (2022). An Introduction to Metrics Spaces. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: [https://courses.mai.liu.se/GU/TATA34/An\\_Introduction\\_to\\_Metric\\_Spaces.pdf](https://courses.mai.liu.se/GU/TATA34/An_Introduction_to_Metric_Spaces.pdf)
61. Kay, D. (2000). *Schaums Outline of Tensor Calculus*. McGraw-Hill Professional (pp. 37,38, 54).
62. Caticha, A. (n.d.). *The basics of information geometry*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/1412.5633>
63. Lin, L.-S., Zhang, H.-L., & Yang, Z.-B. (2023). Method for the quantum metric tensor measurement in a continuous variable system. *Photonics*, 10(3), 256. <https://doi.org/10.3390/photonics10030256>
64. Refregier, A. (2014). Astrophysics I. Problem sheet 12. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: [https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/particle-physics/cosmologygroup-dam/Courses/astrophysics-1/Exercise\\_sheet12.pdf](https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/particle-physics/cosmologygroup-dam/Courses/astrophysics-1/Exercise_sheet12.pdf)
65. Mathpal, R. (s.f.). Metric tensor and Christoffel Symbols. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <https://www.uou.ac.in/lecturenotes/science/MSCPHY-17/PDF%20ppt%20MATHEMATICAL%20PHYSICS%20metric%20tensor%20unit%202008-converted.pdf>
66. Kay, D. (2000). *Schaums Outline of Tensor Calculus*. McGraw-Hill Professional.
67. Kay, D. (2000). *Schaums Outline of Tensor Calculus*. McGraw-Hill Professional.(pp. 52-53).
68. Deza, M. M., & Deza, E. (2013). *Encyclopedia of Distances*. Springer Berlin Heidelberg. (pp. 130).
69. Deza, M. M., & Deza, E. (2013). *Encyclopedia of Distances*. Springer Berlin Heidelberg. (pp. 45).
70. Kay, D. (2000). *Schaums Outline of Tensor Calculus*. McGraw-Hill Professional.(pp. 52-53).
71. Kay, D. (2000). *Schaums Outline of Tensor Calculus*. McGraw-Hill Professional. (pp. 51).

72. Refregier, A. (2014). The metric of flat 3-dimensional space in spherical coordinates. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: [https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/particle-physics/cosmologygroup-dam/Courses/astrophysics-1/Exercise\\_sheet12.pdf](https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/particle-physics/cosmologygroup-dam/Courses/astrophysics-1/Exercise_sheet12.pdf)
73. Kay, D. (2000). *Schaums Outline of Tensor Calculus*. McGraw-Hill Professional. (pp. 37,38,54)
74. Deza, M. M., & Deza, E. (2013). *Encyclopedia of Distances*. Springer Berlin Heidelberg. (pp. 149)
75. Deza, M. M., & Deza, E. (2013). *Encyclopedia of Distances*. Springer Berlin Heidelberg. (pp. 151)
76. Kuzmak, A. R. (2021). Measuring distance between quantum states on a quantum computer. *Quantum Information Processing*, 20(8). <https://doi.org/10.1007/s11128-021-03196-9>
77. Bengtsson, I., & Życzkowski, K. (2020). *Geometry of quantum states: An introduction to quantum entanglement* (2nd ed.). Cambridge University Press. (pp.131).
78. Bengtsson, I., & Życzkowski, K. (2020). *Geometry of quantum states: An introduction to quantum entanglement* (2nd ed.). Cambridge University Press. (pp.355-359).
79. Elfakir, J., Amghar, B., Slaoui, A., & Daoud, M. (2023). *Complementarity between quantum entanglement, geometrical and dynamical appearances in N spin-1/2 system under all-range Ising model*. <https://www.semanticscholar.org/paper/673e5ea7088481b0aaee42df888f5c061ebd7a15>
80. Austrich-Olivares, J. A., & Vergara, J. D. (2022). The quantum geometric tensor in a parameter-dependent curved space. *Entropy (Basel, Switzerland)*, 24(9), 1236. <https://doi.org/10.3390/e24091236>
81. Hai, V. T., Viet, N. T., & Le Bin, H. (n.d.). *Variational preparation of entangled states on quantum computers*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/2306.17422>
82. Hai, V. T., & Ho, L. B. (2023). Universal compilation for quantum state tomography. *Scientific Reports*, 13(1), 1–12. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-30983-4>
83. Qi, J., Zhang, X.-L., & Tejedor, J. (2023). Optimizing quantum federated learning based on federated quantum natural gradient descent. *ICASSP 2023 - 2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 1–5.
84. Anandan, J. (1992). The geometric phase. *Nature*, 360(6402), 307–313. <https://doi.org/10.1038/360307a0>
85. Vanderbilt, D. (2018). *Berry phases in electronic structure theory: Electric polarization, orbital magnetization and topological insulators*. Cambridge University Press. (pp. 75).
86. Everschor-Sitte, K., & Sitte, M. (2014). Real-space Berry phases: Skyrmion soccer (invited). *Journal of Applied Physics*, 115(17). <https://doi.org/10.1063/1.4870695>

87. Vanderbilt, D. (2018). *Berry phases in electronic structure theory: Electric polarization, orbital magnetization and topological insulators*. Cambridge University Press. (pp. 77).
88. *The berry phase*. (n.d.). Leeds.ac.uk. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <https://theory.leeds.ac.uk/topologicalquantumcomputation/supplementary-material/derivation-of-the-berry>
89. Vanderbilt, D. (2018). *Berry phases in electronic structure theory: Electric polarization, orbital magnetization and topological insulators*. Cambridge University Press. (pp. 81).
90. Camjayi, A. (n.d.). *Fase de Berry*. Uba.Ar. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://materias.df.uba.ar/edlm2a2021c1/files/2021/06/berry.pdf>
91. Mueller Group. (2011). Berry Phase. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de [https://muellergroup.lassp.cornell.edu/Basic\\_Training\\_Spring\\_2011/Semiclassics\\_files/semiclassical5.pdf](https://muellergroup.lassp.cornell.edu/Basic_Training_Spring_2011/Semiclassics_files/semiclassical5.pdf)
92. Burkard Group. (2015). Berry phase, chern number. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de <https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/sites/default/files/ts15/Berry-phase.pdf>
93. Sierra, M. (2022). Magneto-transporte en materiales ferromagnéticos y antiferromagnéticos. [Tesis de doctorado]. Universidad del Norte. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de <https://manglar.uninorte.edu.co/bitstream/handle/10584/11504/7184128.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
94. Xiao, D., Chang, M.-C., & Niu, Q. (2010). Berry phase effects on electronic properties. *Reviews of Modern Physics*, 82(3), 1959–2007. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.1959>
95. Shindou, R., & Imura, K.-I. (2005). Noncommutative geometry and non-Abelian Berry phase in the wave-packet dynamics of Bloch electrons. *Nuclear Physics. B*, 720(3), 399–435. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.05.019>
96. Brody, D. C., & Hughston, L. P. (2001). Geometric quantum mechanics. *Journal of Geometry and Physics*, 38(1), 19–53. [https://doi.org/10.1016/s0393-0440\(00\)00052-8](https://doi.org/10.1016/s0393-0440(00)00052-8)
97. Cheng, R. (n.d.). *Quantum geometric tensor (fubini-study metric) in simple quantum system: A pedagogical introduction*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/1012.1337>
98. Carollo, A., Valenti, D., & Spagnolo, B. (2020). Geometry of quantum phase transitions. *Physics Reports*, 838, 1–72. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.11.002>
99. Austrich-Olivares, J. A., & Vergara, J. D. (2022). The quantum geometric tensor in a parameter-dependent curved space. *Entropy (Basel, Switzerland)*, 24(9), 1236. <https://doi.org/10.3390/e24091236>

100. Kuzmak, A. R. (2021). Measuring distance between quantum states on a quantum computer. *Quantum Information Processing*, 20(8). <https://doi.org/10.1007/s11128-021-03196-9>
101. Pachos, J. K. (2012). *Introduction to Topological Quantum Computation*. Cambridge University Press.
102. Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2007). *Quantum Computation and Quantum Information*. Foundation Books. (pp. 13).
103. Benenti, G., Casati, G., Rossini, D., & Strini, G. (2019). *Principles of quantum computation and information: A comprehensive textbook: A comprehensive textbook*. World Scientific Publishing. (pp. 101)
104. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 81-83)
105. Mosseri, R., & Dandoloff, R. (2001). Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(47), 10243–10252. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/47/324>
106. Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press. (pp. 34-35)
107. Hongbao, M., Young, M., & Yan, Y. (2016). *Quantum Entanglement Introduction*. <https://doi.org/10.7537/marsaaj080716.13>
108. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 22)
109. Benenti, G., Casati, G., Rossini, D., & Strini, G. (2019). *Principles of quantum computation and information: A comprehensive textbook: A comprehensive textbook*. World Scientific Publishing. (pp. 2)
110. Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press. (pp. 39)
111. Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2007). *Quantum Computation and Quantum Information*. Foundation Books. (pp. 16).
112. Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press. (pp. 36).
113. (s.f.). Chapter 10: Entanglement of Quantum systems. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: [https://homepage.univie.ac.at/Reinhold.Bertlmann/pdfs/T2\\_Skript\\_Ch\\_10.pdf](https://homepage.univie.ac.at/Reinhold.Bertlmann/pdfs/T2_Skript_Ch_10.pdf)
114. Berrada, K., Hassouni, Y., & Eleuch, H. (2011). Degree of entanglement and violation of bell inequality by two-spin-1/2 states. *Communications in Theoretical Physics*, 56(4), 679–686. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/56/4/15>
115. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 101-102)

116. Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2007). *Quantum Computation and Quantum Information*. Foundation Books. (pp. 94).
117. Shukla, A. (2016). Ancilla Assisted Quantum Information Processing: general protocols and NMR implementations. [Tesis de doctorado]. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de <https://arxiv.org/pdf/1601.00234.pdf>
118. Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2007). *Quantum Computation and Quantum Information*. Foundation Books. (pp. 17).
119. Benenti, G., Casati, G., Rossini, D., & Strini, G. (2019). *Principles of quantum computation and information: A comprehensive textbook: A comprehensive textbook*. World Scientific Publishing. (pp. 119)
120. Allen, D. (s.f.). Chapter 4: Unitary Matrices. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 de [https://www.math.tamu.edu/~dallen/m640\\_03c/lectures/chapter4.pdf](https://www.math.tamu.edu/~dallen/m640_03c/lectures/chapter4.pdf)
121. Benenti, G., Casati, G., Rossini, D., & Strini, G. (2019). *Principles of quantum computation and information: A comprehensive textbook: A comprehensive textbook*. World Scientific Publishing. (pp. 119)
122. Pachos, J. K. (2012). *Introduction to Topological Quantum Computation*. Cambridge University Press. (pp. 19)
123. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 71-80)
124. *SdgGate - qiskit 0.44.1 documentation*. (n.d.). Qiskit.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.circuit.library.SdgGate.html>
125. Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press. (pp. 77)
126. Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2007). *Quantum Computation and Quantum Information*. Foundation Books. (pp. 191).
127. Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press. (pp. 76-78)
128. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 84)
129. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 97)
130. Hamano, K. (s.f.). Solution to problema Ch 1 #2. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 de <https://particle.phys.uvic.ca/~khamano/HQP/sol-1-2.pdf>.
131. Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press. (pp. 91)
132. Schlimgen, A. W., Head-Marsden, K., Sager-Smith, L. M., Narang, P., & Mazziotti, D. A. (2022). Quantum state preparation and nonunitary evolution with diagonal operators. *Physical Review. A*, 106(2). <https://doi.org/10.1103/physreva.106.022414>

133. Zheng, C. (2021). Universal quantum simulation of single-qubit nonunitary operators using duality quantum algorithm. *Scientific Reports*, 11(1), 1–14. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-83521-5>
134. Viyuela, O., Rivas, A., Gasparinetti, S., Wallraff, A., Filipp, S., & Martin-Delgado, M. A. (2018). Observation of topological Uhlmann phases with superconducting qubits. *Npj Quantum Information*, 4(1), 1–6. <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0056-9>
135. Kim, C. W., Nichol, J. M., Jordan, A. N., & Franco, I. (2022). Analog quantum simulation of the dynamics of open quantum systems with quantum dots and microelectronic circuits. *PRX Quantum: A Physical Review Journal*, 3(4). <https://doi.org/10.1103/prxquantum.3.040308>
136. Zakaria, M. N. (n.d.). *Binary Subdivision for Quantum Search*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/1101.4703>
137. Schuld, M., Bergholm, V., Gogolin, C., Izaac, J., & Killoran, N. (2018). Evaluating analytic gradients on quantum hardware. In *arXiv [quant-ph]*. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/1811.11184>
138. Somma, R., Ortiz, G., Gubernatis, J. E., Knill, E., & Laflamme, R. (2002). Simulating physical phenomena by quantum networks. *Physical Review A*, 65(4). <https://doi.org/10.1103/physreva.65.042323>
139. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 330-331)
140. Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2007). *Quantum Computation and Quantum Information*. Foundation Books. (pp. 185).
141. Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press. (pp. 16-17)
142. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 29)
143. Williams, C. P. (2011). *Explorations in Quantum Computing* (2nd ed.). Springer. (pp. 30-31)
144. *SdgGate - qiskit 0.44.1 documentation*. (n.d.). Qiskit.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.circuit.library.SdgGate.html>
145. Borge, J., Aseguinolaza, U., Sobrino, N., Sobrino, G., & Jornet-Somoza, J. (2023). *Error estimation in current noisy quantum computers*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4537154>
146. Shi, W., & Malaney, R. (n.d.). *Error-mitigated quantum routing on noisy devices*. Arxiv.org. Recuperado el 11 de septiembre de 2023 a través de: <http://arxiv.org/abs/2305.1357>