UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRUPOS DE DIMENSIÓN UNO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

VÍCTOR EDUARDO SAN MARTÍN MACÍAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS JORGE SÁNCHEZ SALDAÑA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.
2023

Índice general

Introducción

Las preguntas que estaremos discutiendo en esta tesis son:

¿Qué grupos actúan en ciertos espacios? Si un grupo actúa en un espacio ¿qué podemos decir acerca del grupo?

Nuestros grupos de interés son *grupos libres* y *grupos virtualmente libres*, y a su vez los espacios en los que nos enfocaremos son gráficas, más precisamente árboles. La definición de grupo libre es similar a la propiedad universal de bases para espacios vectoriales: es suficiente con definir un morfismo en un subconjunto para extenderlo de manera única a todo el espacio. En el contexto de grupos libres, a este subconjunto se le conoce como subconjunto libre generador S, y como es de esperarse estos subconjuntos son a su vez generadores del grupo, de modo que podemos expresar de manera única a sus elementos como palabras reducidas de elementos de S. A su vez, dado un conjunto S cualquiera podemos construir un grupo libre F que sea libremente generado por S. Por otro lado, un grupo virtualmente libre es un grupo que tiene un subgrupo libre de índice finito.

Una gráfica no es más que un par de conjuntos (V, E) donde V es un conjunto no vacío de vértices y E está formado por subconjuntos de exactamente dos vértices. Esta manera discreta de definir a las gráficas es equivalentes a pensarlas como espacios topológicos que se identifican con la forma en la que las representamos con diagramas, profundizamos en esta idea en el capítulo 3. Los árboles son aquellas gráficas que cumplen que para cualesquiera dos vértices existe un único *camino* que los conecta. Estos son los espacios a los que restringimos nuestra discusión.

En el primer capítulo comenzamos estudiando los grupos libres, tomando como referencia [Rot02], e introducimos el concepto de gráfica de Cayley de un grupo G respecto de un subconjunto generador S, $\mathrm{Cay}(G, S)$. En este caso nos apoyamos de [Löh17]. Estas gráficas resultan convenientes pues para ellas se puede definir una acción libre del grupo del cual fueron construidas. En este capítulo demostramos que los grupos libres cumplen que su gráfica de Cayley es un árbol. Por último damos una demostración para el recíproco lo que resulta en una caracterización para grupos libres (Teorema 1.50):

Un grupo G es libre si y sólo si admite una acción libre en un árbol.

Para el segundo capítulo nos basamos en [Ser80] y enfocamos nuestros esfuerzos en dar una caracterización para grupos virtualmente libres. Para esto necesitamos introducir el concepto de *gráfica de grupos* $\mathbf{Y}$ las cuales se definen a partir de una gráfica Y a la que se le asocian grupos Y_x a cada vértice x de Y, y también grupos Y_y a cada arista y junto con un monomorfismo de $Y_y \to Y_x$ si x es extremo de y. Al mismo tiempo definimos su *grupo fundamental* π ya que esto nos permiten construir un árbol $\widetilde{X}$, conocido como árbol de Bass-Serre, y una acción de π en este árbol. Continuamos con probar que si $\mathbf{Y}$ una gráfica de grupos tal que Y es finita y para cada vértice x el grupo Y_x es finito, entonces su grupo fundamental es virtualmente libre. El recíproco también es verdadero, aunque sólo nos limitamos a mencionarlo sin demostrarlo. Dicha demostración se puede consultar en [KPS73]. El Teorema de Estructura (Teorema 2.35) nos da una condición para que un grupo G sea el grupo fundamental de una gráfica de grupos, la cual es que G actué sin inversiones en un árbol. Todo esto queda sintetizado en el Teorema 2.43:

Un grupo G es virtualmente libre si y sólo si actúa sin inversiones en un árbol T con estabilizadores finitos y tal que G/T es finito. Más aún $T \cong \widetilde{X}$.

En el último capítulo nos basamos en el artículo [BLN01] para exponer la noción de dimensión geométrica de grupos y dimensión geométrica propia, para los cuales necesitamos de espacios clasificantes. También pensamos a las gráficas como complejos-CW para poder considerarlas como espacios clasificantes y así poder utilizar lo hecho en los capítulos anteriores. Concluimos que los grupos de dimensión geométrica 1 son exactamente los grupos libres y bajo ciertas condiciones los grupos de dimensión geométrica propia 1 son los grupos virtualmente libres.

Agradecimientos

Me gusta considerar este trabajo no solo como consecuencia de mi esfuerzo sino también como resultado del apoyo de profesores, entusiasmo de amigos durante largas tardes y motivación de mi familia que siempre me acompaño en esta travesía. Agradezco la oportunidad de haber compartido esta etapa de mi vida con ellos.

A mis padres, Irma y Víctor, gracias por hacer lo posible para permitirme enfocarme en mis estudios. A mi hermano, que es una gran inspiración para mí, más de lo que yo lo soy para él.

Al Dr. Luis Jorge, por haberme dado la oportunidad y la confianza de trabajar con él. Su guía a lo largo de este trabajo fue esencial, téngalo por seguro.

A las y los sinodales, por haberse dado el tiempo de revisar este escrito. Sus correcciones y consejos me ayudaron a mejorarlo infinitamente.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA101221 . Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Capítulo 1

Caracterización de grupos libres

En este capítulo introducimos el concepto de grupo libre y desarrollamos la construcción de un grupo libre a partir de un conjunto. Continuamos con la introducción a gráficas de Cayley de un grupo y vemos su relación con grupos libres. Finalizamos con acciones de grupos y la caracterización de grupos libres mediante acciones libres en árboles.

El contenido de este capítulo está basado en el capítulo 1 de [Löh17].

1.1. Grupos libres

Comencemos con la definición de subgrupo generado y conjunto generador.

Definición 1.1 (Subgrupo generado). *Sea G un grupo y $S \subseteq G$ un subconjunto no vacío. El **subgrupo generado** por S es*

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_G &= \bigcap \{H \mid H \text{ subgrupo de } G \text{ y } S \subseteq H\} \\ &= \{s_1 \cdots s_n \mid n \in \mathbb{N},\, s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}\}. \end{aligned}$$

*Si $\langle S \rangle_G = G$, decimos que S genera a G, y a S le llamamos **conjunto generador** de G. Por convención, el conjunto vacío genera al grupo que sólo tiene al elemento neutro (grupo trivial).*

Un conjunto generador resulta interesante, pues para que dos funciones sean iguales es suficiente que coincidan en él. Esto lo vemos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Sean G un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador de G. Si $f : G \to H$ y $g : G \to H$ son morfismos de grupos tales que $f \restriction_S = g \restriction_S$, entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $x \in G$. Como S es un conjunto generador de G, entonces el elemento x es de la forma $x = s_1 \cdots s_n$, donde $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$.

Evaluando al morfismo f en x:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(s_1 \cdots s_n) \\ &= f(s_1) \cdots f(s_n) \\ &= g(s_1) \cdots g(s_n) \\ &= g(s_1 \cdots s_n) = g(x). \end{aligned}$$

Esta igualdad se satisface para cualquier elemento de G, de manera que $f = g$. $\square$

Corolario 1.3. *Sean G un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador de G. Si $\varphi : S \to H$ es una función entre grupos tal que un morfismo $\varphi^* : G \to H$ la extiende a G, entonces φ^* es el único morfismo con esta propiedad.*

Esto último parece similar a lo que sucede en espacios vectoriales, donde para definir un morfismo basta definirlo en una base. Sin embargo, el resultado anterior sólo nos garantiza la unicidad del morfismo. Entonces nos preguntamos: ¿Para cualquier función φ, definida en un conjunto generador, es posible extenderla a todo el grupo? Los siguientes ejemplos nos ayudara a responder esta pregunta.

Ejemplo 1.4. *El grupo $(\mathbb{Z}, +)$, es generado por el conjunto $\{1\}$. Dados un grupo G y una función $\varphi : \{1\} \to G$ podemos definir al morfismo*

$$\varphi^*(n) = \begin{cases} \underbrace{\varphi(1) \cdots \varphi(1)}_{n-veces} & si \quad n > 0 \\ 0 & si \quad n = 0 \\ \underbrace{\varphi(1)^{-1} \cdots \varphi(1)^{-1}}_{(-n)-veces} & si \quad n < 0 \end{cases}$$

El cual extiende a la función φ.

Ejemplo 1.5. *El conjunto $\{0, 1\}$ genera al grupo $(\mathbb{Z}, +)$. Pero la función*

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & 0 & \longmapsto & 2 \\ & 1 & \longmapsto & 3 \end{array}$$

No se puede extender a ningún morfismo, pues la imagen del elemento neutro del dominio no es el elemento neutro del contradominio.

Como vimos, no siempre podemos extender una función definida en un conjunto generador a algún morfismo de grupos, aunque los casos en los que sí podamos nos serán de gran interés.

Definición 1.6 (Grupo libre, propiedad universal). *Sea F un grupo y $S \subseteq F$ un subconjunto no vacío. Decimos que S* ***genera libremente*** *a F, o que F es* ***libremente generado*** *por S, si F satisface la siguiente propiedad universal: Dado un grupo G y una función $\varphi : S \to G$ existe un único morfismo de grupos $\varphi^* : F \to G$ tal que $\varphi^* \circ \iota = \varphi$, donde ι es la inclusión de S en F*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & G \\ F \arrow[ur, dashed, "\varphi^*"'] & \end{tikzcd}$$

Un grupo F es ***libre*** *si contiene un conjunto S que lo genera libremente. A S le llamamos un* ***conjunto libre generador****. Por convención el conjunto vacío genera libremente al grupo trivial.*

El Ejemplo 1.5 nos brinda una condición necesaria sobre el conjunto S, la cual es que $\varepsilon \notin S$, ya que de lo contrario podemos considerar a alguna función $\varphi : S \to (\mathbb{Z}, +)$ de tal manera que $\varphi(\varepsilon) := 1$, y esta función no se puede extender a ningún morfismo.

Observación 1.7. *1. El elemento neutro no pertenece al conjunto libre generador.*

2. Si un grupo G es generado libremente por el conjunto $S \subseteq G$, entonces S no contiene elementos de orden finito. Pues de lo contrario existe $s_1 \in S$, de orden $1 < n < \infty$, lo que nos permite definir a la función $\varphi : S \to \mathbb{Z}$

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & si \quad s = s_1 \\ 0 & si \quad s \neq s_1 \end{cases}$$

Por definición de grupo libre, existe $\varphi^* : G \to \mathbb{Z}$ que extiende a φ. De manera que

$$0 = \varphi^*(\varepsilon) = \varphi^*(\underbrace{s_1 \cdot \cdots \cdot s_1}_{n-veces}) = \underbrace{\varphi^*(s_1) + \cdots + \varphi^*(s_1)}_{n-veces} = n$$

Esto último es imposible.

3. Más generalmente tenemos que si un grupo G es libremente generado por $S \subseteq G$, entonces se cumple que para cualesquiera $s, t \in S$, $s \cdot t \neq \varepsilon$. Ya que, de no suceder esto tenemos que la función $\varphi : S \to \mathbb{Z}$, dada por $\varphi(x) := 1$ se puede extender a un morfismo $\varphi^* : G \to \mathbb{Z}$. Así

$$1 = \varphi^*(\varepsilon) = \varphi^*(s \cdot t) = \varphi^*(s) + \varphi^*(t) = 2$$

Lo cual es absurdo.

Ejemplo 1.8. *Como consecuencia de la Observación 1.7, tenemos que los grupos finitos no son libres. En particular los grupos $(\mathbb{Z}_n, +)$, con $n \geqslant 2$, no son libres.*

En el siguiente ejemplo (y otros más adelante) utilizaremos al grupo simétrico de un conjunto X, que es definido como $\mathrm{Sim}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ es una biyección}\}$ cuya operación binaria es la composición de funciones.

Ejemplo 1.9. *Un grupo abeliano G no puede ser generado libremente por un conjunto S cuya cardinalidad sea mayor o igual que 2. Supongamos que G es generado libremente por S. Consideremos a dos elementos $a, b \in S$ distintos. Entonces la función $\varphi : S \to \mathrm{Sim}(\{1,2,3\})$ definida como*

$$\varphi(s) = \begin{cases} (1\ 2) & si \quad s = a \\ (2\ 3) & si \quad s = b \\ \mathrm{id} & si \quad s \notin \{a,b\} \end{cases}$$

se puede extender a un morfismo $\varphi^* : G \to \mathrm{Sim}(\{1,2,3\})$. De esto tenemos que

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) = \varphi^*(a)\varphi^*(b) = \varphi^*(ab) \\ = \varphi^*(ba) = \varphi^*(b)\varphi^*(a) \ = (2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)\end{aligned}$$

Lo cual no es posible.

Una propiedad importante de las bases en espacios vectoriales, es que si dos espacios vectoriales sobre el mismo campo tienen bases de cardinalidad igual, entonces los espacios son isomorfos. Algo similar sucede en grupos libres.

Proposición 1.10. *Sean S y T conjuntos tales que existe una biyección $h : S \to T$. Si S y T generan libremente a F y G, respectivamente, entonces existe un isomorfismo $f : F \to G$ que extiende a h (en particular $f[S] = T$).*

Demostración. Consideremos a las inclusiones $\iota : S \to F$ y $\kappa : T \to G$. Por la definición de grupo libre tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & T \arrow[r, hook, "\kappa"] & G \\ F \arrow[urr, dashed, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

es decir, $f \circ \iota = \kappa \circ h$ (de esto se sigue que $f[S] = T$). A su vez tenemos que

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, hook, "\kappa"'] & S \arrow[r, hook, "\iota"] & F \\ G \arrow[urr, dashed, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

es decir, $g \circ \kappa = \iota \circ h^{-1}$.

Con esto obtenemos $(f \circ g) \circ \kappa = f \circ (\iota \circ h^{-1}) = (\kappa \circ h) \circ h^{-1} = \kappa$, lo que se traduce en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, hook, "\kappa"'] & G \\ G \arrow[ur, dashed, "f\circ g"'] & \end{tikzcd}$$

Pero otra función que hace del diagrama anterior conmutativo es la función id_G. Entonces, por unicidad dada en la definición de grupo libre, se sigue que $f \circ g = \mathrm{id}_G$. De manera análoga obtenemos que $g \circ f = \mathrm{id}_F$. Por lo tanto $F \cong G$. □

Esta proposición nos ayuda a demostrar la unicidad de grupos libres.

Corolario 1.11 (Unicidad de grupos libres)**.** *Sea S un conjunto. Si S genera libremente a los grupos F y G, entonces $F \cong G$.*

Ejemplo 1.12. *Veamos que el grupo $(\mathbb{Z}^2, +)$ no es libre. Si $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ es un conjunto libre generador, entonces por el Ejemplo 1.9 el conjunto S cumple que $|S| = 1$. De manera que el conjunto $\{1\} \subseteq \mathbb{Z}$ (Ejemplo 1.4) está en biyección con el conjunto S. Por la Proposición 1.10, se sigue que $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$. Esto implica que $\mathbb{Z}^2$ es cíclico, lo cual no es cierto.*

Una pregunta que nos surge es ¿para cualquier conjunto S existe un grupo F que es generado libremente por S? La respuesta es sí, de modo que lo siguiente es demostrar la existencia de dicho grupo para cualquier conjunto S. La idea es construirlo basándonos en la Sección 5.5 de [Rot02].

Sea S un conjunto no vacío, y sea S^{-1} una copia ajena del conjunto S, es decir $S \cap S^{-1} = \varnothing$ y tal que existe una biyección $S \to S^{-1}$ la cual denotamos por $s \mapsto s^{-1}$. Definimos el ***alfabeto*** de S como

$$S \cup S^{-1}.$$

Si n es un entero positivo, definimos una ***palabra*** de S de ***longitud*** $n \geqslant 1$ como una función

$$w : \{1, \dots, n\} \to S \cup S^{-1}$$

aunque en la práctica, una palabra w de S la escribiremos como sigue: si $w(i) = s_i^{e_i}$, donde $s_i \in S$ y $e_i \in \{-1, +1\}$,

$$w = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n},$$

A n se le conoce como la longitud de la palabra w y la denotaremos por $l(w)$. La ***palabra vacía***, denotada por ε, es la única función $\varepsilon : \varnothing \to S \cup S^{-1}$ y cuya longitud es 0. Definimos al conjunto

$$\mathcal{W}(S) := \{w \mid w \text{ es una palabra de } S\} \cup \{\varepsilon\}.$$

Algo que cabe mencionar es que, como consecuencia de que dos funciones sean iguales, dos palabras $w = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$ y $u = r_1^{d_1} \cdots r_m^{d_m}$ son iguales si y sólo si $l(w) = l(u)$ y para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, $s_i = r_i$ y $e_i = d_i$.
En caso de que $S = \varnothing$, entonces $\mathcal{W}(S) := \{\varepsilon\}$.

Definición 1.13 (Subpalabra)**.** *Una* ***subpalabra*** *de una palabra* $w = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$ *es o bien la palabra vacía o una palabra de la forma* $u = s_i^{e_i} s_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots s_{j-1}^{e_{j-1}} s_j^{e_j}$ *con* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$*.*

Definición 1.14 (Palabra inversa)**.** *La* ***palabra inversa*** *de una palabra* $w = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$ *es la palabra de la forma* $w^{-1} := s_n^{-e_n} \cdots s_1^{-e_1}$

De la definición anterior se sigue que $(w^{-1})^{-1} = w$.

Definición 1.15 (Palabra reducida)**.** *Una palabra* w *es* ***reducida*** *si* $w = \varepsilon$*, o si* w *no tiene subpalabras de la forma* ss^{-1} *o* $s^{-1}s$ *para alguna* $s \in S$*.*

Definición 1.16 (Concatenación)**.** *Dadas dos palabras* $w = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$ *y* $u = r_1^{d_1} \cdots r_m^{d_m}$ *de* S*, su* ***concatenación*** *es la palabra*

$$wu := s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} r_1^{d_1} \cdots r_m^{d_m}$$

Para la palabra vacía se define como $\varepsilon w = w\varepsilon := w$*.*

Definición 1.17 (Operaciones elementales, inserción, eliminación)**.** *Sean* X *y* Y *dos palabra de* S*, posiblemente vacías. Sea* $w = XY$*. Una* ***operación elemental*** *es o bien una* ***inserción****, que es cambiar a la palabra* $w = XY$ *por* $Xss^{-1}Y$ *para algún* $s \in S \cup S^{-1}$*, o una* ***eliminación*** *de una subpalabra de* w *de la forma* ss^{-1}*, es decir cambiamos a* $Xss^{-1}Y$ *por* XY*.*

Escribimos

$$w \to u$$

para denotar que la palabra u es resultado de aplicarle una operación elemental a la palabra w. Definimos a la relación $\sim$ en $\mathcal{W}(S)$ como: $u \sim v$ si y sólo si existen $u = w_1, w_2, \ldots, w_n = v$ palabras y operaciones elementales tales que

$$u = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n = v.$$

Esta relación es de equivalencia. Así denotamos la clase de equivalencia de una palabra w por $[w]$.

Observación 1.18. *Notemos que* $ss^{-1} \sim \varepsilon$ *y* $s^{-1}s \sim \varepsilon$*, es decir* $[ss^{-1}] = [\varepsilon] = [s^{-1}s]$*. Más aún para una palabra* $w = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}
[ww^{-1}] &= [s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} s_n^{-e_n} \cdots s_1^{-e_1}] \\
&= [s_1^{e_1} \cdots s_{n-1}^{e_{n-1}} s_{n-1}^{-e_{n-1}} \cdots s_1^{-e_1}] \\
&\vdots \\
&= [s_1^{e_1} s_1^{-e_1}] \\
&= [\varepsilon].
\end{aligned}$$

De igual manera se puede ver que $[w^{-1}w] = [\varepsilon]$*.*

Motivados por la Observación 1.18, podemos dotar al conjunto $\mathcal{W}(S)$ de una operación binaria, a saber la concatenación de palabras, y esperar que esta operación binaria se comporte bien con la relación definida a partir de operaciones elementales, ya que esta observación nos está proporcionando, de alguna manera, los inversos. Esto lo formalizamos en el siguiente lema.

Lema 1.19. *Sea* S *un conjunto.*

1. *La concatenación en* $\mathcal{W}(S)$ *es asociativa.*

2. *Para* $u, u', v, v' \in \mathcal{W}(S)$ *tales que* $u \sim u'$ *y* $v \sim v'$*, entonces* $uv \sim u'v'$*.*

3. $\widehat{\mathcal{W}}(S) := \mathcal{W}(S)/\sim$ *con la operación de concatenación, es decir* $[u][v] = [uv]$*, y el elemento* $[\varepsilon]$ *forman un grupo.*

4. *Si* G *es un grupo y* $\varphi : S \to G$ *una función, entonces existe un morfismo de grupos* $\varphi^* : \widehat{\mathcal{W}}(S) \to G$ *tal que* $\varphi^* \circ \iota = \varphi$*, donde* $\iota : S \to \widehat{\mathcal{W}}(S)$ *y está dada por* $\iota(s) = [s]$*.*

Demostración.

1. La asociatividad de la concatenación es clara de la definición.

2. A la palabra uv le aplicamos las operaciones elementales que nos llevan de u a u', así obtenemos $u'v$. Ahora a la palabra $u'v$ le aplicamos las operaciones elementales que nos llevan de v a v', con esto obtenemos $u'v'$.

3. Por el inciso 2 podemos asegurar que la concatenación en $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ está bien definida. Como consecuencia del inciso 1, la concatenación en $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ es asociativa. De la definición de la concatenación para ε se sigue que $[\varepsilon]$ es el elemento neutro. De la Observación 1.18 se tiene que todo elemento $[w]$ en $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ tiene inverso, más aún $[w]^{-1} = [w^{-1}]$. Por tanto ($\widehat{\mathcal{W}}(S)$, concatenación, ε) es un grupo.

4. Definimos a la función

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi}: & \mathcal{W}(S) & \longrightarrow & G \\ & s_1^{e_1}\cdots s_n^{e_n} & \longmapsto & \varphi(s_1)^{e_1}\cdots\varphi(s_n)^{e_n} \end{array}$$

Como la representación de cada palabra de S es única, tenemos que $\overline{\varphi}$ está bien definida. Además $\overline{\varphi}(uv) = \overline{\varphi}(u)\overline{\varphi}(v)$.
Sea $w \in \mathcal{W}(S)$. Supongamos que $w = Xss^{-1}Y$, donde X y Y son subpalabras de w. Entonces considerando la eliminación $w = Xss^{-1}Y \to XY$ tenemos que

$$\overline{\varphi}(Xss^{-1}Y) = \overline{\varphi}(X)\overline{\varphi}(s)\overline{\varphi}(s)^{-1}\overline{\varphi}(Y) = \overline{\varphi}(X)\overline{\varphi}(Y)$$

De modo que $\overline{\varphi}(Xss^{-1}Y) = \overline{\varphi}(XY)$, y por un argumento similar se obtiene lo mismo para la inserción. Mediante un argumento inductivo tenemos que si $w \sim w'$, entonces $\overline{\varphi}(w) = \overline{\varphi}(w')$.
Con esto podemos definir a la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi^*: & \widehat{\mathcal{W}}(S) & \longrightarrow & G \\ & [w] & \longmapsto & \overline{\varphi}(w) \end{array}$$

la cual, por construcción de $\overline{\varphi}$, está bien definida y es un morfismo de grupos. A su vez, φ^* cumple que $\varphi^* \circ \iota = \varphi$, pues

$$\varphi^* \circ \iota(s) = \varphi^*([s]) = \overline{\varphi}(s) = \varphi(s).$$

□

Un hecho que nos será de utilidad es que la función ι, dada en el Lema 1.19, es inyectiva, pues esto nos dice que en $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ hay un subconjunto que está en biyección con el conjunto S. Veamos esto con detalle en la siguiente observación.

Observación 1.20. *Veamos que ι es la inclusión de S en $\widehat{\mathcal{W}}(S)$, y para ello sólo resta verificar que ι es inyectiva. Sean $s_1, s_2 \in S$ distintos. Si consideramos a la función $f : S \to \mathbb{Z}$ dada por*

$$f(s) = \begin{cases} 1 & si \quad s = s_1 \\ -1 & si \quad s = s_2 \\ 0 & si \quad s \notin \{s_1, s_2\} \end{cases}$$

Por el Lema 1.19(4), existe $f^* : \widehat{\mathcal{W}}(S) \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f^*(\iota(s_1)) = f(s_1) = 1 \neq -1 = f(s_2) = f^*(\iota(s_2))$$

De modo que $\iota(s_1)\iota(s_2)^{-1} \notin \mathrm{Núc}(f^*)$, y en particular $\iota(s_1)\iota(s_2)^{-1} \neq [\varepsilon]$, lo que implica que $\iota(s_1) \neq \iota(s_2)$.

Dicho esto, vamos a identificar al conjunto $\iota[S]$ con el conjunto S.

Observación 1.21. *El conjunto S es un conjunto generador de $\widehat{\mathcal{W}}(S)$.*

Ya estamos en condiciones de probar la existencia de grupos libres, a partir de un conjunto S, no vacío.

Teorema 1.22 (Existencia de grupos libres)**.** *Sea S un conjunto. Entonces el grupo $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ es libremente generado por S. En particular existe un grupo F libremente generado por S.*

Demostración. Lo que se hará es probar que S genera libremente al grupo $\widehat{\mathcal{W}}(S)$. Sea G un grupo y $\varphi : S \to G$ una función. Por el Lema 1.19(4) existe $\varphi^* : \widehat{\mathcal{W}}(S) \to G$ morfismo de grupos tal que $\varphi^* \circ \iota = \varphi$, donde ι es la inclusión de S en $\widehat{\mathcal{W}}(S)$, esto último gracias a la Observación 1.20. Entonces tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & G \\ \widehat{\mathcal{W}}(S) \arrow[ur, dashed, "\varphi^*"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ya sólo nos resta verificar la unicidad de φ^*. Supongamos que f es otro morfismo de grupos que cumple $f \circ \iota = \varphi$. En consecuencia

$$\varphi^*(s) = f(s)$$

esto para cualquier $s \in S$. Como S es un conjunto generador en $\widehat{\mathcal{W}}(S)$, por la Observación 1.21, entonces, por la Proposición 1.2, se sigue que $\varphi^* = f$.

□

Corolario 1.23. *Sea S un conjunto. Entonces existe un único grupo F libremente generado por S, salvo isomorfismo.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 1.22 y de el Corolario 1.11. □

Al grupo libremente generado por un conjunto S lo denotaremos por $F(S)$.

Corolario 1.24. *Si F es un grupo libremente generado por $S \subseteq F$, entonces S es un conjunto generador de F.*

Demostración. Sea T un conjunto tal que $S \cap T = \varnothing$ y que existe una biyección $h : S \to T$. Por la Proposición 1.10, existe un isomorfismo $f : F(T) \to F$ tal que $f[T] = S$. Por Observación 1.21, tenemos que T es un conjunto generador de $F(T)$, de modo que $f[T] = S$ es un conjunto generador de F. □

Por último, daremos una descripción más precisa de los elementos del grupo $\widehat{\mathcal{W}}(S)$

Proposición 1.25. *Cada clase de equivalencia de $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ contiene exactamente una palabra reducida.*

La demostración que haremos está basada en la hecha en [Rot02, Proposición 5.71, p. 301] y [Rob95, Proposición 2.1.2, p. 46].

Demostración. Primero veamos que en cualquier clase de equivalencia de $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ existe una palabra reducida, es decir que cualquier palabra en S está relacionada con alguna palabra reducida, y para esto procederemos por inducción sobre la longitud de la palabra. Sea w una palabra en S. Si $l(w) = 0$, entonces $w = \varepsilon$ por lo que w es una palabra reducida. Ahora bien, si $l(w) = n \geqslant 1$ tenemos dos casos, el primero que w sea una palabra reducida con lo cual habríamos acabado, y el segundo que w no sea una palabra reducida, de esto tenemos que $w = Xss^{-1}Y$, y en consecuencia la palabra $w' = XY$ está relacionada con w pero $l(w') \leqslant n$, así por hipótesis de inducción $w' \sim w''$ con w'' palabra reducida, y en conclusión w está relacionada con una palabra reducida w''. De esto se sigue que en cada clase de equivalencia de $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ existe una palabra reducida.

Ahora veamos que tal palabra reducida es única. Sea $R := \{w \in \mathcal{W}(S) \mid w \ \textit{es reducida}\ \}$. Para cada $s \in S$ definamos a las funciones $|s| : R \to R$ y $|s^{-1}| : R \to R$ como

$$|s^e|(s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}) = \begin{cases} s^e s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} & si \quad s^e \neq s_1^{-e_1} \\ s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n} & si \quad s^e = s_1^{-e_1} \end{cases}$$

Como $|s^e| \circ |s^{-e}| = \mathrm{id}_F = |s^{-e}| \circ |s^e|$, entonces se sigue que $|s^e|$ es una permutación de R con inversa $|s^{-e}|$. Consideremos a la siguiente función del conjunto S al grupo simétrico de R

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S & \longrightarrow & \mathrm{Sim}(R) \\ & s & \longmapsto & |s| \end{array}$$

Como S genera libremente al grupo $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ existe un morfismo $\varphi^* : \widehat{\mathcal{W}}(S) \to \mathrm{Sim}(R)$ tal que $\varphi^*(s) = |s|$, para cualquier $s \in S$. Ahora, sean u y v dos palabras reducidas de S que pertenezcan a la misma clase de equivalencia, es decir $[u] = [v]$, como φ^* es función, entonces $\varphi^*([u]) = \varphi^*([v])$. Si $u = s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n}$, tenemos que

$$[u] = [s_1^{e_1}] \cdots [s_n^{e_n}],$$

y por tanto

$$\varphi^*([u]) = |s_1^{e_1}| \circ \cdots \circ |s_n^{e_n}|,$$

de modo que $\varphi^*([u])(\varepsilon) = u$. De manera análoga tenemos que $\varphi^*([v])(\varepsilon) = v$. En conclusión $u = v$. $\square$

El resultado anterior nos permite identificar, abusando de la notación, a cada clase de equivalencia del conjunto $F(S) = \widehat{\mathcal{W}}(S)$ con la palabra reducida que contiene. De esta manera, a los elementos de $\widehat{\mathcal{W}}(S)$ los expresaremos como palabras reducidas.

1.2. Gráficas de Cayley

En esta sección comenzamos con la definición de *gráfica simple* para después relacionar este concepto con el de grupo libre.

Definición 1.26 (Gráfica Simple). *Una* ***gráfica simple*** Γ *es un par ordenado* (V, E) *de conjuntos, con* V *no vacío, donde los elementos de* E *son subconjuntos de* V *de cardinalidad 2, es decir* $E \subseteq \{A \subseteq V \mid |A| = 2\}$. *A los elementos de* V *les llamaremos* ***vértices*** *y a los elementos de* E ***aristas***.

A largo de este capítulo a las gráficas simples, para efectos prácticos, las llamaremos simplemente *gráficas*. Diremos que dos vértices $u, v \in V$ son ***vecinos*** o que son ***adyacentes*** si están unidos por una arista, es decir $\{u, v\} \in E$. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un ***camino*** de longitud n en Γ es una sucesión de vértices distintos $\{v_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ con la propiedad $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para toda $i \leqslant n$. En el caso de que $n < \infty$, se denota por $v_0, \ldots, v_n$ y decimos que este camino ***conecta*** a los vértices v_0 y v_n. Una gráfica es ***conexa*** si todos sus vértices están conectados por algún camino. Un ***ciclo*** es un camino de vértices $v_0, \ldots, v_n$ de longitud al menos tres y finita, con la propiedad de que los únicos vértices iguales son v_0 y v_n. Una gráfica (V', E') es una ***subgráfica*** de (V, E) si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Por último un ***isomorfismo entre dos gráficas*** $\Gamma = (V, E)$ y $\Gamma' = (V', E')$ es una función biyectiva $f : V \to V'$ tal que $\{u, v\} \in E$ si y sólo si $\{f(u), f(v)\} \in E'$ para cualesquiera $u, v \in V$.

En ocasiones, en lugar de trabajar una gráfica Γ como par ordenado de conjuntos, lo que se hará es trabajar con un diagrama que represente a Γ. El cual se construye como sigue: Por cada elemento de V se coloca un punto distinto en el diagrama. Luego, cada elemento a de E se representa como un segmento cuyos extremos son los puntos identificados con los elementos de a.

Ejemplo 1.27. *Sean* $V := \{a, b, c, d\}$ *y* $E := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$. *El diagrama de la Figura 1.1a representa a la gráfica* $\Gamma := (V, E)$.

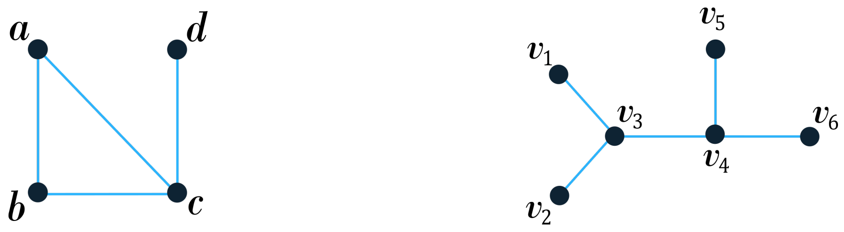
Definición 1.28 (Árbol). *Una gráfica* Λ *conexa y que no tiene ciclos la llamaremos* ***árbol***.

A una subgráfica que además es un árbol le llamaremos ***subárbol***.

A las gráficas que son árboles se pueden caracterizar a partir de los caminos que existen entre dos vértices cualesquiera.

Proposición 1.29 (Caracterización de árboles). *Una gráfica* Γ *es un árbol si y sólo si para cualesquiera dos vértices distintos existe un único camino que los conecta.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que Γ es un árbol. Por definición cualesquiera dos vértices distintos $x, y \in V$ están conectados por un camino, digamos C dado por la



(a) Representación de un gráfica

(b) Ejemplo de árbol

Figura 1.1: Ejemplos de gráficas

sucesión $x = v_0, v_1, \ldots, v_n = y$. Ahora supongamos que existe otro camino C' distinto, descrito por $\{x = u_0, u_1, \ldots, u_m = y\}$ que conecta a los vértices x y y. Notemos que C y C' comparten al menos dos vértices distintos, a saber x y y. Consideremos al siguiente índice

$$r := min\,\{k \in \mathbb{N} \mid v_k \neq u_k\}\,,$$

el cual existe ya que dicho conjunto no es vacío debido a que los caminos son distintos. Ahora consideremos al índice

$$t := min\,\{k \in \mathbb{N} \mid k > r \text{ y existe } l \geqslant k, v_t = u_l\}\,,$$

el cual también existe ya que n pertenece al conjunto descrito.

Hecho esto, podemos construir los siguientes caminos

$$C := v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{t-1}, v_t$$

$$D := u_{t-1}, \ldots, u_r, u_{r-1},$$

de modo que $C \cup D$ es un camino, ya que $v_t = u_t$ y este último es adyacente a u_{t-1}. Y además es un ciclo ya que de lo contrario tendríamos que existen v_i y u_j vértices tales que $v_i = u_j$ y con $r < i < t$ y $r < j < t$, esto contradice la elección de t.

Por lo tanto $C \cup D$ es un ciclo, y esto contradice el hecho de que Γ es un árbol.

$\Longleftarrow$) Supongamos que Γ cumple que para cualesquiera dos vértices distintos existe un único camino que los conecta. De esto se sigue que Γ es conexa. Ahora supongamos que Γ tiene un ciclo $C := \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, entonces los vértices v_0 y v_1 estarían conectados por los caminos v_0, v_1 y $v_0, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1$, los cuales son distintos. Esto contradice nuestra suposición inicial, así que Γ no tiene ciclos. En conclusión Γ es un árbol.

$\square$

Lo que queremos hacer es relacionar los conceptos de *gráficas* y *grupos libre*. Comenzaremos con definiciones más generales.

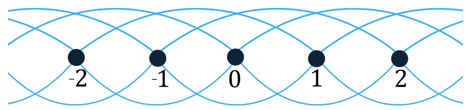
Definición 1.30 (Gráfica de Cayley)**.** *Sean G un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador de G. La **gráfica de Cayley** de G con respecto al conjunto generador S es la gráfica que denotaremos por* $\operatorname{Cay}(G,S)$ *y está dada por*

$$V := G, \ y$$
$$E := \left\{ \{g, g \cdot s\} \ \mid g \in G, \ s \in (S \cup S^{-1}) \backslash \{\varepsilon\} \right\}.$$

Veamos algunos ejemplos de gráficas de Cayley.

Ejemplo 1.31. *La gráfica de Cayley del grupo* $(\mathbb{Z},+)$ *con respecto al conjunto generador* $\{1\}$ *es la Figura 1.2a y con respecto al conjunto generador* $\{2,3\}$ *es la Figura 1.2b.*

(a) $\operatorname{Cay}(\mathbb{Z},\{1\})$



(b) $\operatorname{Cay}(\mathbb{Z},\{2,3\})$

Figura 1.2: Ejemplos de gráficas de Cayley

Ejemplo 1.32. *La gráfica de Cayley del grupo* $(\mathbb{Z}^2,+)$ *con respecto al conjunto generador* $\{(1,0),(0,1)\}$ *es la Figura 1.3.*

Observación 1.33. 1. *Toda gráfica de Cayley* $\operatorname{Cay}(G,S)$ *es conexa, pues como S es un conjunto generador de G, entonces $g = s_1 \cdots s_n$. Definimos a los elementos $g_0 := g$ y $g_i = s_i^{-1} g_{i-1}$ con $i \in \{1, \cdots, n\}$. Así $g_0, g_1, \ldots, g_n$ es un camino que conecta a los vértices g y ε. Con esto cualesquiera dos vértices en* $\operatorname{Cay}(G,S)$ *se pueden conectar.*

2. *Toda gráfica de Cayley* $\operatorname{Cay}(G,S)$ *es regular, esto es que cualquier vértice tiene el mismo número de vecinos, más específicamente* $|(S \cup S^{-1}) \backslash \{\varepsilon\}|$.

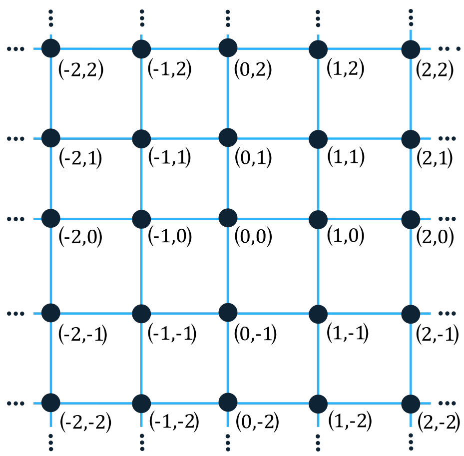


Figura 1.3: $\operatorname{Cay}(\mathbb{Z}^2,\{(1,0),(0,1)\})$

Gracias al Corolario 1.24, para un grupo F libremente generado por $S \subseteq F$ podemos considerar a la gráfica $\mathrm{Cay}(F, S)$. Además, como cada elemento de F es una palabra reducida única (Proposición 1.25) nos hace pensar que esto en $\mathrm{Cay}(F, S)$ se traduce en que para cualesquiera dos vértices existe un único camino, lo que implicaría que $\mathrm{Cay}(F, S)$ es un árbol (Proposición 1.29).

Teorema 1.34 (Gráficas de Cayley de grupos libres)**.** *Sea F un grupo libremente generado por $S \subseteq F$. Entonces la gráfica $\mathrm{Cay}(F, S)$ es un árbol.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $F = F(S)$. Ya vimos que $\mathrm{Cay}(F, S)$ es conexa, sólo resta verificar que no tiene ciclos, y para esto procederemos por contradicción. Supongamos que $g_0, \ldots, g_{n-1}$ es un ciclo en $\mathrm{Cay}(F, S)$. Por definición, existen $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$ tales que $g_{i+1} = g_i \cdot s_i$ para $i \in \{0, \ldots n-2\}$, y $g_0 = g_{n-1} \cdot s_n$. Con esto tenemos que $s_i = g_i^{-1} \cdot g_{i+1}$ para $i \in \{0, \ldots n-2\}$ y $s_n = g_{n-1}^{-1} \cdot g_0$. De manera que

$$s_0 \cdots s_n = g_0^{-1} \cdot g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_{n-2}^{-1} \cdot g_{n-1} \cdot g_{n-1}^{-1} \cdot g_0 = \varepsilon.$$

Pero la palabra $s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_n$ es reducida, pues cada g_i es distinto. Esto es imposible ya que la longitud de la palabra $s_0 \cdots s_n$ no es cero. Por lo tanto $\mathrm{Cay}(F, S)$ no tiene ciclos, y en consecuencia es un árbol. □

No estaríamos haciendo bien nuestro trabajo si al tener esta implicación no nos preguntáramos sobre el recíproco. Es decir que, si $\mathrm{Cay}(F, S)$ es un árbol, entonces F es libremente generado por S. Desafortunadamente el siguiente ejemplo nos arroja que esto es falso.

Ejemplo 1.35. *La gráfica de Cayley $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_2, \{1\})$ consiste en solamente dos vértices unidos por una sola arista, y esto claramente es un árbol, aunque el grupo $(\mathbb{Z}_2, +)$ no es libre.*

Ahora nos preguntamos sobre ¿qué condiciones hay que agregar para que el reciproco del Teorema 1.34 sea cierto? Si ponemos atención al Ejemplo 1.35 es fácil darnos cuenta que lo que hace que $(\mathbb{Z}_2, +)$ no sea libremente generado por $\{1\}$ es justamente el hecho de que $1 + 1 = 0$, es decir que al combinar los elementos de $\{1\}$ llegamos al elemento neutro. Esto nos hace intuir que si F es un grupo libremente generado por S, y S es tal que $s \cdot t \neq \varepsilon$ para todo $s, t \in S$, entonces en la gráfica $\mathrm{Cay}(F, S)$ al considerar caminos formados solamente de elemento de S vamos obtenido caminos cada vez más largos, de esta manera no sería posible regresar a algún vértice por el que ya habíamos pasado, es decir, no es posible formar ciclos en $\mathrm{Cay}(F, S)$.

Teorema 1.36. *Sea G un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador que satisface que $s \cdot t \neq \varepsilon$ para todo $s, t \in S$. Si la gráfica de Cayley $\mathrm{Cay}(G, S)$ es un árbol, entonces S genera libremente a G.*

Demostración. Para probar que S genera libremente al grupo G, mostraremos que existe un isomorfismo $f : F(S) \to G$ cuya restricción a S es la identidad en S. De esto se sigue que S genera libremente a G.
Ahora bien, como S genera libremente a $F(S)$, la inclusión de S en G se puede extender a un morfismo $\varphi : F(S) \to G$. De esto tenemos que $\varphi(s) = s$ para cualquier $s \in S$, lo que implica que $\varphi[S] = S$, y como S genera a G se sigue que φ es sobreyectiva. sólo resta verificar que φ es inyectiva, y para esto procederemos por contradicción. Supongamos que φ no es inyectiva. Entonces el conjunto

$$\{l(w) \in \mathbb{N} \mid w \in \text{Núc}(\varphi) \setminus \{\varepsilon\}\} \neq \varnothing.$$

Sea $s_1 \dots s_n \in \text{Núc}(\varphi) \setminus \{\varepsilon\}$ la palabra de longitud mínima. Analicemos los siguiente casos

- Supongamos $n = 1$. Como $\varphi \restriction_S = \text{id}_S$, entonces $s_1 = \varphi(s_1) = \varepsilon_G$, lo que implica que $s_1 \cdot s_1 = \varepsilon_{F(S)}$, y esto contradice la hipótesis del conjunto S.

- Supongamos $n = 2$. De esto tenemos que

$$\varepsilon_G = \varphi(s_1 \cdot s_2) = s_1 \cdot s_2$$

  y esto contradice la hipótesis del conjunto S.

- Supongamos $n \geqslant 3$. Consideremos a los elementos $g_0, \dots, g_{n-1} \in G$ definidos como $g_0 := \varepsilon_{F(S)}$

$$g_{i+1} := g_i \cdot \varphi(s_{i+1})$$

  para $i \in \{1, \dots, n-2\}$.

  Notemos que estos elementos son distintos pues si sucede que $g_i = g_j$ con $i < j$, tenemos que

$$g_i = g_i \cdot \varphi(s_{i+1}) \cdots \varphi(s_{j-1}) \cdot \varphi(s_j),$$

  esto implica que $s_{i+1} \dots s_j \in \text{Núc}(\varphi)$. Si $s_{i+1} \dots s_j \neq \varepsilon$, entonces se contradice la minimalidad de $s_1 \dots s_n$; y por otro lado, si $s_{i+1} \dots s_j = \varepsilon$, la palabra $s_1 \dots s_i s_{j+1} \dots s_n$ es una palabra más pequeña que $s_1 \dots s_n$ y que pertenece a $\text{Núc}(\varphi) \setminus \{\varepsilon\}$, esto igual contradice la minimalidad de $s_1 \dots s_n$.

  Ahora bien, también notemos que $\text{Cay}(G, S)$ contiene a las aristas

$$\{g_0, g_1\}, \dots, \{g_{n-2}, g_{n-1}\}$$

y

$$\begin{aligned}\{g_{n-1}, g_0\} &= \{\varphi(s_1)\cdots\varphi(s_{n-1}),\ 1\} \\ &= \{s_1 \ldots s_{n-1},\ \varphi(s_1 \ldots s_n)\} \\ &= \{s_1 \ldots s_{n-1},\ s_1 \ldots s_n\}.\end{aligned}$$

De modo que la sucesión de vértices $g_0, \ldots g_{n-1}$ es un ciclo en $\mathrm{Cay}(G, S)$. Esto contradice el hecho de que $\mathrm{Cay}(G, S)$ es un árbol.

Por lo tanto φ es inyectiva, que es lo que buscábamos. $\square$

1.3. Acciones de grupos en gráficas

Antes de continuar recordaremos las *acciones de grupos* en conjuntos las cuales nos serán de interés cuando dicho conjunto se trate de una gráfica.

Definición 1.37 (Acción izquierda de grupo)**.** *Sea G un grupo y S un conjunto no vacío. Una G-**acción izquierda**, o simplemente **acción**, de G en S es una función $\rho : G\times S \to S$, definida como $\rho(g, s) := g \cdot s$, tal que*

1. $\forall g_1, g_2 \in G \quad \forall s \in S \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$
2. $\forall s \in S \quad \varepsilon \cdot s = s$

En este caso diremos que G actúa en S.

Y si además se cumple que

3. $\forall g \in G\backslash \{\varepsilon\} \quad \forall s \in S \quad g \cdot s \neq s$

*a tal acción le llamaremos **acción libre**. En este caso diremos que G actúa libremente en S.*

Definición 1.38 (Órbita y Estabilizadores)**.** *Sea G un grupo que actúa en un conjunto S.*

- *Para $s \in S$ definimos a su **órbita** como*

$$G \cdot s := \{g \cdot s \mid g \in G\}$$

- *Para $s \in S$ definimos a su **grupo estabilizador** como*

$$G_s := \{g \in G \mid g \cdot s = s\}$$

Consideremos una acción $(g, s) \mapsto g \cdot s$ de G en S. Sea $g \in G$ un elemento fijo. Entonces la aplicación $s \mapsto g \cdot s$ es una permutación del conjunto S, pues tiene como inversa a la función $s \mapsto g^{-1} \cdot s$, esto es consecuencia de la definición de acción. Denotemos por g^γ a dicha permutación. Adicionalmente, por el inciso 1 de la definición de acción, se cumple que $(g_1 g_2)^\gamma = g_1^\gamma \circ g_2^\gamma$. Esto determina un morfismo de G en $\mathrm{Sim}(S)$.

Recíprocamente, sea $\gamma : G \to \mathrm{Sim}(S)$ un morfismo, dado por $\gamma(g) := g^\gamma$. Entonces la función definida como $g \cdot s := g^\gamma(s)$ es una acción de G en S, ya que para $g_1, g_2 \in G$ y $s \in S$

1. $g_1 \cdot (g_2 \cdot s) = g_1^\gamma(g_2^\gamma(s)) = (g_1^\gamma \circ g_2^\gamma)(s) = (g_1 g_2)^\gamma(s) = (g_1 \cdot g_2) \cdot s$
2. $\varepsilon \cdot s = \varepsilon^\gamma(s) = \mathrm{id}_S(s) = s$

Con esto podemos determinar acciones de grupos a partir de ciertos morfismos. Si la acción es libre, entonces el morfismo que se determina es inyectivo.

Ejemplo 1.39 (Traslación a la izquierda)**.** *Sea G un grupo. La* ***traslación a la izquierda*** *de G es la acción determinada por el morfismo*

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Sim}(G) \\ g & \longmapsto & (h \mapsto g \cdot h) \end{array}$$

Y notemos que esta acción es libre.

Definición 1.40 (Acción libre en gráficas)**.** *Sean G un grupo y (V, E) una gráfica. Decimos que G actúa en la gráfica (V, E) si existe una $G-$acción en V de tal forma que para cualquier $g \in G$, se cumple que $\{g \cdot u, g \cdot v\} \in E$ si y sólo si $\{u, v\} \in E$.*
Si además se satisface que para $g \in G \setminus \{1\}$

1. $\forall u \in V \quad g \cdot u \neq u$

2. $\forall u, v \in V \quad \{g \cdot u, g \cdot v\} \neq \{u, v\}$

decimos que dicha acción es libre

Una observación importante es que si un grupo G actúa en una gráfica (V, E), entonces G actúa tanto en V como en E.

Ejemplo 1.41. *El grupo trivial actúa libremente en cualquier gráfica.*

Ejemplo 1.42. *Consideremos a la gráfica (V, E) dada por la Figura 1.4. Entonces la función $\cdot : \mathbb{Z} \times G \to G$ definida como $n \cdot x_i := x_{n+i}$ es una acción libre de $\mathbb{Z}$ en G.*

Ejemplo 1.43 (Traslación a la izquierda en gráficas de Cayley)**.** *Sea G un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador. La acción por traslación a la izquierda en $\mathrm{Cay}(G, S)$ es la acción determinada por la acción de G en los vértices de $\mathrm{Cay}(G, S)$*

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Sim}(G) \\ g & \longmapsto & (h \mapsto g \cdot h) \end{array}$$

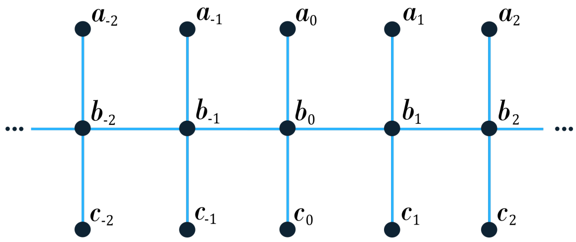


Figura 1.4: Gráfica en la que actúa $\mathbb{Z}$

La cual sí cumple la definición de acción en gráficas, pues para $g \in G$

$$\begin{aligned} \{u, v\} \text{ es arista de } \operatorname{Cay}(G, S) &\iff v = u \cdot s \text{ para alguna } s \in S \cup S^{-1} \backslash \{\varepsilon\} \\ &\iff g \cdot v = g \cdot u \cdot s \\ &\iff \{g \cdot u, g \cdot v\} \text{ es arista de } \operatorname{Cay}(G, S) \end{aligned}$$

Además, esta acción siempre cumple el inciso 1 de la Definición 1.40, ya que el grupo G actúa en los vértices de $\operatorname{Cay}(G, S)$ *mediante la acción por traslación a la izquierda (Ejemplo 1.39).*

El Ejemplo 1.43 satisface casi todas las condiciones de acción libre en gráficas, sólo resta verificar que: $\forall u, v \in V \quad \{g \cdot u, g \cdot v\} \neq \{u, v\}$. Pero si dicha acción satisface esto, entonces lo que podemos hacer es considerar $s \in S$ y una arista $\{u, v\}$, y con esto tendríamos que

$$\{s \cdot u, s \cdot v\} \neq \{u, v\}, \text{ y a su vez}$$
$$\{s \cdot (s \cdot u), s \cdot (s \cdot v)\} \neq \{s \cdot u, s \cdot v\}$$

esto último es $\{s^2 \cdot u, s^2 \cdot v\} \neq \{s \cdot u, s \cdot v\}$. Lo que nos dice esta última diferencia es que el conjunto S no puede tener elementos de orden 2. Ahora, teniendo esta condición necesaria nos preguntamos si ¿será también una condición suficiente? La siguiente proposición nos muestra que en efecto esto ocurre.

Proposición 1.44 (Acción libre en gráficas de Cayley)**.** *Sea G un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador (no vacío). Entonces la acción de traslación a la izquierda en la gráfica* $\operatorname{Cay}(G, S)$ *es libre si y sólo si S no contiene elementos de orden 2.*

Demostración. $\Longrightarrow$) (Contrapuesta) Supongamos que S tiene un elemento s de orden 2. Con esto

$$s \cdot \{\varepsilon, s\} = \left\{s, s^2\right\} = \{s, 1\}$$

Por tanto dicha acción no es libre.

$\Longleftarrow$) (Contrapuesta) Supongamos que la acción enunciada no es libre. Entonces por lo visto en el Ejemplo 1.43 tenemos que existen $g \in G \backslash \{1\}$ y una arista $\{v, v'\}$ de $\operatorname{Cay}(G, S)$ tales que

$$\left\{v, v'\right\} = g \cdot \left\{v, v'\right\} = \left\{g \cdot v, g \cdot v'\right\}$$

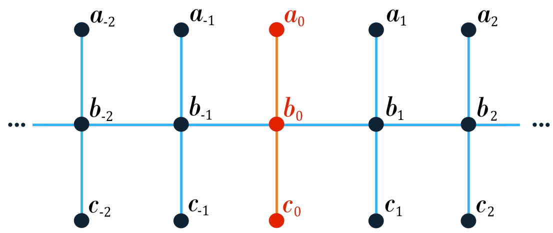


Figura 1.5: Ejemplo de árbol generador

Por definición $v' = v \cdot s$ para alguna $s \in S \cup S^{-1} \setminus \{\varepsilon\}$. Por la igualdad de los conjuntos anteriores tenemos los siguiente casos

a) $g \cdot v = v$ y $g \cdot v' = v'$. Como la acción de G en los vértices es libre, se sigue que $g = \varepsilon$, esto contradice la elección de g.

b) $g \cdot v \neq v$ y $g \cdot v' \neq v'$. Entonces en G tenemos

$$v = g \cdot v' = g \cdot (v \cdot s) = (g \cdot v) \cdot s = v' \cdot s = (v \cdot s) \cdot s = v \cdot s^2$$

De esto obtenemos que $s^2 = \varepsilon$. Dado que $s \neq \varepsilon$, concluimos que $s \in S$ es de orden 2.

□

Tenemos ya una condición necesaria y suficiente para que la traslación por la izquierda en gráficas de Cayley sea una acción libre. Recordemos el Teorema 1.34, la cual nos dice que si tenemos un grupo libre F, entonces su gráfica de Cayley $\mathrm{Cay}(F, S)$ es un árbol, y por lo que acabamos de ver, esto se traduce en que F actúa libremente en un árbol, a saber $\mathrm{Cay}(F, S)$. Obtenido esto, lo que sigue es ver si el recíproco es verdadero, es decir que si un grupo G actúa libremente en un árbol, entonces G es libre. Adelantando la respuesta, en efecto esto sucede. Para lograrlo lo que tendremos que hacer es obtener un subconjunto libre generador S de G a partir de de la acción de G en un árbol T, por lo que necesitamos una manera de obtener información del grupo G a partir de la acción. De esto surge la siguiente definición.

Definición 1.45 (Árbol generador)**.** *Sea G un grupo que actúa en una gráfica (V, E) conexa. Un* ***árbol generador*** *de esta acción es un subárbol (T, R) de (V, E) tal que $\forall v \in V \quad |T \cap (G \cdot v)| = 1$.*

Ejemplo 1.46. *Consideremos a la acción de $\mathbb{Z}$ del Ejemplo 1.42. Las órbitas determinadas por esta acción son: $\{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}, \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ y $\{c_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Con esto un árbol generador de está acción es la gráfica con vértices $\{a_0, b_0, c_0\}$ y aristas $\{\{a_0, b_0\}, \{b_0, c_0\}\}$. (Figura 1.5)*

Lo siguiente es probar, apoyándonos en el *Lema de Zorn*, la existencia de árboles generadores para cualquier acción en gráficas conexas.

Teorema 1.47 (Lema de Zorn)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{F}$ (no vacío) en el que toda cadena tiene una cota superior en $\mathcal{F}$, contiene al menos un elemento maximal.*

Lema 1.48 (Existencia de árboles generadores)**.** *Cualquier acción de un grupo en una gráfica conexa admite un árbol generador.*

Demostración. Sea G un grupo que actúa en una gráfica (V, E). Definamos a la familia de conjuntos

$$T_G := \{ \text{ subárboles de } (V, E) \text{ que contienen a lo más un elemento de cada órbita } \}$$

Como $V \neq \varnothing$, entonces para $v \in V$ tenemos que $\{v\} \in T_G$. Claramente T_G es un conjunto parcialmente ordenado con la relación *subgráfica*. Además, cualquier cadena ascendente tiene una cota superior en T_G, a saber la unión de sus elementos. Por el *Lema de Zorn*, T_G tiene un elemento maximal (T, R).

Veamos que (T, R) es un árbol generador para la G-acción en (V, E). Para esto procederemos por contradicción.
Supongamos que (T, R) no es un árbol generador de dicha acción. Esto implica que existe $v \in V$ tal que $|T \cap (G \cdot v)| \neq 1$. Como $(T, R) \in T_G$, entonces $|T \cap (G \cdot v)| = 0$, es decir $T \cap (G \cdot v) = \varnothing$. Con esto probaremos que existe un vértice $r \in V$ tal que uno de sus vecinos pertenece a T y que $T \cap (G \cdot r) = \varnothing$.

Sea $u \in T$. Como la gráfica (V, E) es conexa existe un camino $\mathcal{C}$ descrito por la sucesión $u = v_0, \ldots, v_{n-1} = v$. Para obtener al vértice que buscamos aplicaremos inducción sobre la longitud del camino $\mathcal{C}$, la cual es n. Si $n = 1$, entonces el vértice que buscamos es v. Ahora bien, para $n \geqslant 2$, consideremos a v_k el primer vértice de $\mathcal{C}$ que no pertenece a T. Analicemos los siguientes casos

- Si $T \cap (G \cdot v_k) = \varnothing$, entonces v_k es el vértice que buscamos.
- Si $T \cap (G \cdot v_k) \neq \varnothing$, entonces existe $g \in G$ tal que $g \cdot v_k \in T$. Consideremos al camino $\mathcal{C}'$ dado por $v_k, \ldots, v_{n-1}$. Así el camino $g \cdot \mathcal{C}'$, descrito por $g \cdot v_k, \ldots, g \cdot v_{n-1}$, conecta a los vértices $g \cdot v_k$ y $g \cdot v$. Pero la órbita de $g \cdot v$ no intersecta a T, pues $G \cdot g \cdot v = G \cdot v$. Como la longitud del camino $g \cdot \mathcal{C}'$ es menor o igual que $n - k$, entonces por hipótesis de inducción este camino contiene un vértice con la propiedades deseadas.

Ahora, con este vértice $r \in V$, cuya órbita no intersecta a T, y uno de sus vecinos t pertenece a T, podemos definir a la gráfica $(T \cup \{r\}, R \cup \{r, t\})$. Por construcción esta gráfica es un árbol que pertenece al conjunto T_G y contiene propiamente al árbol (T, R). Esto contradice la condición de ser maximal de (T, R).
Por lo tanto (T, R) es un árbol generador de la $G-$acción en (V, E).

$\square$

Antes de enunciar el teorema que nos interesa, necesitamos hablar brevemente de la *excentricidad* y del *centro* de una gráfica, ya que será necesario probar un lema que involucra estos conceptos.

En una gráfica finita (V, E) (es decir, con V finito) la ***excentricidad*** de un vértice $v \in V$ es la longitud máxima que puede alcanzar un camino que inicia en v. Y el ***centro*** de la gráfica es el conjunto de vértices de excentricidad mínima. Para lo siguiente tengamos presente que el centro de un árbol es, o bien un vértice, o bien dos vértices adyacentes. Además el centro de un árbol es invariante bajo automorfismos.

Lema 1.49.

1. *Cualquier acción de un grupo finito en un árbol tiene un punto fijo global (esto es que existe un vértice o una arista que es fijado por la acción bajo cualquier elemento del grupo).*

2. *Si un grupo G actúa libremente en un árbol, entonces G no tiene elementos de orden finito.*

Demostración.

1. Sea $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ un grupo que actúa en un árbol T. Sea v un vértice de T. Notemos que $|G \cdot v| \leqslant n$. Sea T' el subárbol que tiene como vértices al conjunto $G \cdot v$ y sus aristas son todas las aristas de caminos (de longitud mínima) de T que conectan elementos de $G \cdot v$. Así T' es un árbol finito, de manera que su centro es, o bien un vértice, o bien dos vértices adyacentes. Como el centro de un árbol es invariante bajo automorfismos, en el primer caso obtenemos un vértice que es fijado por la acción bajo todos los elementos de G, y en el segundo caso obtenemos una arista que es fijada por la acción bajo todos los elementos de G. De modo que la acción no es libre.

2. Si G actúa libremente en un árbol T y tiene un elemento $a \neq \varepsilon$ de orden finito, entonces el subgrupo H generado por a es finito, el cual actúa sobre T. Por el inciso anterior, existe un vértice o una arista que es fijado por todos los elementos de H. En particular por a. Esto contradice el hecho de que G actúa libremente en T.
   Por lo tanto G no tiene elementos de orden finito.

□

Teorema 1.50 (Caracterización de grupos libres)**.** *Un grupo es libre si y sólo si admite una acción libre en un árbol.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sean G un grupo libre, y $S \subseteq G$ un conjunto libre generador. Por el Teorema 1.34, la gráfica $\mathrm{Cay}(G, S)$ es un árbol (no vacío). Por la Observación 1.7, conjunto S no tiene elementos de orden finito, así por la Proposición 1.44, la acción por traslación a la izquierda de G en $\mathrm{Cay}(G, S)$ es libre.

$\Longleftarrow$) Sea G un grupo que actúa libremente en un árbol T. Si G es el grupo trivial, entonces por convención tenemos que él es libre. Así que supongamos que G es no trivial. Por el Lema 1.48 existe un árbol generador T'.

Paso 1. *Construir un conjunto S que sea candidato para generar libremente a G.*

Diremos que una arista $a = \{u, v\}$ de T es *esencial* si u es vértice de T' y v no lo es. Notemos que T tiene al menos una arista esencial, ya que de no ser así, entonces todos los vértices de T pertenecen a T', de modo que la órbita de cualquier vértice v es justamente $\{v\}$, lo que implica que G no actúa libremente en T, ya que G es no trivial. Dicho esto, sea $a = \{u, v\}$ una arista esencial, con u vértice de T', como T' es un árbol generador, existe $g_a \in G$ de tal manera $g_a^{-1} \cdot v$ es vértice de T', o lo que es lo mismo v es vértice de $g_a \cdot T'$. Si $h \in G$ es tal que $h^{-1} \cdot v$ es vértice de T', entonces, como T' es un árbol generador $h^{-1} \cdot v = g_a^{-1} \cdot v$. Dado que G actúa libremente en T, $h = g_a$. De esta manera g_a es el único elemento determinado por la arista a. Definamos

$$\widehat{S} := \{g_a \in G \mid a \textit{ es esencial } \}.$$

Veamos que $\widehat{S}$ cumple:

a) $\varepsilon \notin \widehat{S}$. Pues de lo contrario existe una arista $a = \{u, v\}$, con v que no es vértice de T' y tal que $1 \cdot v = v$ es vértice de T'. (absurdo)

b) $\widehat{S}$ no tiene elementos de orden 2, pues como G actúa libremente en T, el Lema 1.49 nos garantiza que G no tiene elementos de orden finito.

c) Si a y a' son aristas esenciales, con $g_a = g_{a'}$, entonces $a = a'$ ya que T es un árbol y no puede haber dos aristas conectando a las subgráficas conexas T' y $g_a \cdot T' = g_{a'} \cdot T'$.

d) Si $g_a \in \widehat{S}$ con $\{u, v\}$ arista esencial, y u vértice de T', entonces la arista $\{g_a^{-1} \cdot u, g_a^{-1} \cdot v\}$ es esencial ya que por construcción $g_a^{-1} \cdot u$ no es vértice de T' y $g_a^{-1} \cdot v$ sí lo es. Con esto $g_a^{-1} = g_{g_a^{-1} \cdot a} \in \widehat{S}$.

Ahora bien, consideremos a la siguiente familia de conjuntos

$$\mathcal{F} := \left\{ S \subseteq \widehat{S} \mid \forall a, b \in S,\ a \cdot b \neq \varepsilon \right\}.$$

Esta familia de conjuntos es no vacía pues, por los incisos a y b, cualquier elemento $g \in \widehat{S}$ cumple que $\{g\} \in \mathcal{F}$. Entonces el podemos aplicar el *Lema de Zorn* a $\mathcal{F}$ con la relación de *subconjunto*. Así $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal S. Este conjunto cumple que $S \cap S^{-1} = \varnothing$ y por tanto $S^{-1} \subseteq S^c$. Sea $b \in S^c$, si $b \notin S^{-1}$, entonces $a \cdot b \neq \varepsilon$, de manera que $S \subsetneq S \cup \{b\} \in \mathcal{F}$, esto contradice la maximalidad de S, por tanto

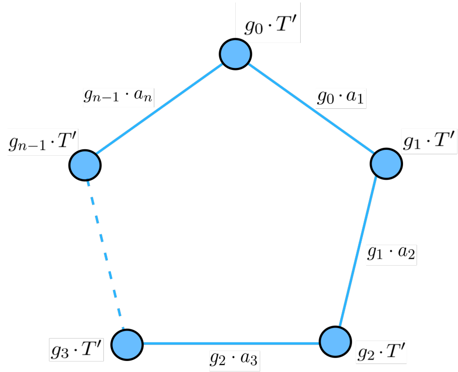


Figura 1.6: Ciclo en T

$S^c = S^{-1}$. Del inciso d tenemos que $S^{-1} \neq \varnothing$. Por lo tanto S y S^{-1} forman una partición de $\widehat{S}$.

Paso 2. *Verificar que $\widehat{S}$ genera a G, y por tanto S también lo genera.*

Primero veamos que la familia

$$\{g \cdot T' \mid g \in G\}$$

forma una partición de T. Como T' es no vacío, entonces cada $g \cdot T'$ es no vacío. Si tenemos que v es vértice de $g \cdot T'$ y $h \cdot T'$, entonces $g^{-1} \cdot v$ y $h^{-1} \cdot v$ son vértices de T'. Dado que T' es un árbol generador $g^{-1} \cdot v = h^{-1} \cdot v$, y como G actúa libremente en T se sigue que $g = h$. Y si comparten una arista, se puede reducir al caso anterior. Para cualquier v vértice de T se tiene que existe un único $g \in G$ tal que $g \cdot v$ es vértice de T', o lo que es lo mismo v es vértice de $g^{-1} \cdot T'$.
Sea $g \in G$. Sea v un vértice de T'. Como T es conexo, entonces existe un camino $\mathcal{C}$ que conecta a los vértices v y $g \cdot v$. Por lo visto antes, podemos suponer que $\mathcal{C}$ intersecta a los árboles $g_0 \cdot T', \ldots, g_n \cdot T'$, en este orden, con $g_i \neq g_{i+1}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $g_0 = 1$ y $g_n = g$.
Sea $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Como T' es un árbol generador y $g_i \neq g_{i+1}$ los árboles $g_i \cdot T'$ y $g_{i+1} \cdot T'$ están unidos por una arista a_i. Por definición $g_i^{-1} \cdot a_i$ es una arista esencial, y el elemento que determina en $\widehat{S}$ es $s_i := g_i^{-1} \cdot g_{i+1}$. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} g = g_n &= g_0^{-1} \cdot g_n \\ &= g_0^{-1} \cdot g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot \dots \cdot g_{n-1} \cdot g_{n-1}^{-1} \cdot g_n \\ &= s_0 \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_n \end{aligned}$$

Por tanto $\widehat{S}$ genera al grupo G. Por construcción de S se sigue que S genera a G.

Paso 3. *Probar que S genera libremente a G.*

Por el Teorema 1.36, para ver que S genera libremente a G es suficiente con probar que $\mathrm{Cay}(G, S) = \mathrm{Cay}(G, \widehat{S})$ no tiene ciclos. Supongamos que existe un ciclo $g_0, \ldots, g_{n-1}$. Por definición tenemos que cada $g_i = g_{i-1} \cdot s_i$ (i.e. $s_i = g_{i-1}^{-1} \cdot g_i$) para alguna $s_i \in \widehat{S}$, con $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, y a su vez $g_0 = g_{n-1} \cdot s_n$ (i.e. $s_n = g_{n-1}^{-1} \cdot g_0$) con $s_n \in \widehat{S}$. Sea a_i la arista esencial que determina al elemento s_i. Con esto, la arista a_i conecta al árbol T' con el árbol $s_i \cdot T'$, de modo que $g_{i-1} \cdot a_i$ conecta a los árboles $g_{i-1} \cdot T'$ y $g_i \cdot T'$. Como T' es conexo, entonces cada $g_i \cdot T'$ es conexo. De modo que, existe un ciclo en T (ver Figura 1.6). Esto contradice el hecho de que T es un árbol. Por lo tanto $\mathrm{Cay}(G, S)$ no tiene ciclos, y en consecuencia S genera libremente al grupo G.

$\square$

Capítulo 2

Grupos virtualmente libres

El objetivo de este capítulo es dar un resultado más general al Teorema 1.50. Iniciamos con la definición de presentaciones de grupos, y seguimos con introducir gráficas de grupos. Posteriormente construiremos el grupo fundamental y el árbol de Bass-Serre para cualquier gráfica de grupos. Finalizamos con la demostración del Teorema 2.38 que nos da propiedades sobre el grupo fundamental de gráficas de grupos finitas.

2.1. Presentaciones de grupos

Definición 2.1 (Subgrupo normal generado). *Sea G un grupo y $S \subseteq G$ un subconjunto. El* ***subgrupo normal generado*** *por S es*

$$\begin{aligned}\langle S\rangle_G^{\triangleleft} &= \bigcap\{H \mid H \text{ es un subgrupo normal de } G \text{ y } S \subseteq H\}\\ &= \left\{g_1 \cdot s_1 \cdot g_1^{-1} \cdot \dots \cdot g_n \cdot s_n \cdot g_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N},\, s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}, g_1, \dots, g_n \in G\right\}\end{aligned}$$

Definición 2.2 (Generadores y relaciones). *Sea S un conjunto, y $R \subseteq \mathcal{W}(S)$ un subconjunto de palabras de S . Sea $F(S)$ el grupo libre generado por S. Al grupo*

$$\langle S \mid R\rangle := F(S)/\langle R\rangle_{F(S)}^{\triangleleft}$$

lo llamamos el grupo ***generado por S con las relaciones*** *R.*

Si G es un grupo tal que $G \cong \langle S \mid R\rangle$, entonces $\langle S \mid R\rangle$ es una ***presentación*** *de G.*

Definición 2.3 (Grupo finitamente presentado). *Un grupo G es* ***finitamente presentado*** *si tiene una presentación $\langle S \mid R\rangle$ con S y R finitos.*

Es claro que un grupo finitamente presentado es finitamente generado.

Teorema 2.4 (Primer teorema de isomorfismo). *Sean $f : G \to H$ un morfismo de grupos y $N \triangleleft G$ tal que $N \subseteq \mathrm{Núc}(f)$. Entonces existe un único morfismo de grupos $\overline{f} : G/N \to H$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$, donde $\pi : G \to G/N$ es la proyección canónica.*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\
G/N \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

En particular, si f es sobreyectiva, entonces $H \cong G/\operatorname{Núc}(f)$.

Proposición 2.5 (Propiedad universal de grupos dados por generadores y relaciones)**.** *Sea S un conjunto y sea $R \subseteq \mathcal{W}(S)$. El grupo $\langle S \mid R\rangle$ generado por S con las relaciones R junto con la proyección canónica $\pi : S \to F(S)/\langle R\rangle^{\lhd}_{F(S)} = \langle S \mid R\rangle$ satisface la siguiente propiedad universal: Para cualquier grupo G y cualquier función $\varphi : S \to G$ que cumpla que para toda palabra $r \in R$*

$$\varphi^*(r) = \varepsilon_G$$

donde φ^* es la función dada por el inciso 4 del Lema 1.19, existe un único morfismo $\overline{\varphi} : \langle S \mid R\rangle \to G$ tal que $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Demostración. Como vimos φ^* es el único morfismo tal que $\varphi^* \circ \iota = \varphi$ (Teorema 1.22). Ahora bien, como $\varphi^*(r) = 1_G$ para todo $r \in R$, entonces $\langle R\rangle^{\lhd}_{F(S)} \subseteq \operatorname{Núc}(\varphi^*)$. Por *El Primer Teorema de Isomorfismo*, existe un único morfismo $\overline{\varphi} : \langle S \mid R\rangle \to G$ tal que $\overline{\varphi} \circ \rho = \varphi^*$, donde $\rho : F(S) \to \langle S \mid R\rangle$ es la proyección canónica de $F(S)$ a $\langle S \mid R\rangle$. Y componiendo esta igualdad con ι, por la derecha obtenemos que $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Y cualquier otro morfismo $\psi : \langle S \mid R\rangle \to G$ que cumpla $\psi \circ \pi = \varphi$ cumple a su vez que $\overline{\varphi} \downharpoonright_{\pi[S]} = \psi \downharpoonright_{\pi[S]}$, y como S es un conjunto generador de $F(S)$, se asegura que $\psi = \overline{\varphi}$. Así $\overline{\varphi}$ es el úncio morfismo con esta propiedad.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi"'] & \\
F(S) \arrow[r, dashed, "\varphi^*"] \arrow[d, "\rho"'] & G \\
\langle S|R\rangle \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Ejemplo 2.6. *Todo grupo G tiene una presentación. Sea G un grupo. Consideremos a la función $\mathrm{id}_G : G \to G$, gracias al Teorema 1.22 y a la definición grupo libre se sigue que existe un único morfismo $f : F(G) \to G$ tal que restringido a G es id_G. Sea $R := \operatorname{Núc}(f)$, dado que R es normal en $F(G)$, es igual a su subgrupo normal generado, de modo que $\langle G \mid R\rangle = F(G)/R$. Dado que f es sobreyectiva, el Primer Teorema de Isomorfismo nos garantiza que $F(G)/R \cong Im(f) = G$. En consecuencia $G \cong \langle G \mid R\rangle$*

Ejemplo 2.7. *Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\langle x \mid x^n\rangle \cong \mathbb{Z}_n$. Primero notemos que $F(\{x\}) = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Definamos la función $f : \{x\} \to \mathbb{Z}_n$ como $f(x) := 1$. Esta función cumple que*

$f^*(x^n) = n \cdot f^*(x) = n \cdot 1 = 0$. Por la Proposición 2.5 existe un morfismo $\overline{f} : \langle x \mid x^n \rangle \to \mathbb{Z}_n$ que extiende a f. Como $1 \in Im(\overline{f})$, entonces $\overline{f}$ es sobreyectiva. Ahora, si $x^m \in \langle x \mid x^n \rangle$, cumple que $\overline{f}(x^m) = 0$, entonces $0 = m \cdot \overline{f}(x) = m \cdot 1 = m$, y como el orden de 1 en $\mathbb{Z}_n$ es n, entonces $n|m$, de manera que $x^m \in \langle x^n \rangle^{\triangleleft}_{F(S)} = \{x^{kn} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto x^m es el elemento neutro en $\langle x \mid x^n \rangle$. En conclusión $\overline{f}$ es un isomorfismo.

Ejemplo 2.8. *Veamos que $\langle xy \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Definamos a la función $f : \{x, y\} \to \mathbb{Z}^2$ como $f(x) := (1, 0)$ y $f(y) := (0, 1)$. Así $f^*(xyx^{-1}y^{-1}) = f^*(x) + f^*(y) - f^*(x) - f^*(y) = 0$. Por la Proposición 2.5 existe un morfismo $\overline{f} : \langle xy \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle \to \mathbb{Z}^2$ que extiende a f. Como $(1, 0), (0, 1) \in Im(\overline{f})$, entonces $\overline{f}$ es sobreyectiva. Notemos que la relación $xyx^{-1}y{-}1$ nos permite conmutar a los elementos x y y, de manera que las palabras en $\langle xy \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ son de la forma $x^n y^m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$. Ahora, sea $x^n y^m \in \langle xy \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ tal que $\overline{f}(x^n y^m) = (0, 0)$, así*

$$(0, 0) = n \cdot \overline{f}(x) + m \cdot \overline{f}(y) = (n, m)$$

De modo que $n = m = 0$. Por tanto $\overline{f}$ es inyectiva, y en conclusión es un isomorfismo.

Ejemplo 2.9. *Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$ definimos al grupo diédrico como*

$$D_n := \langle s, t \mid s^n,\, t^2,\, tst^{-1} = s^{-1} \rangle$$

Ahora, consideremos a los grupos G y H, y a sus presentaciones $\langle S_G \mid R_G \rangle$ y $\langle S_H \mid R_H \rangle$, respectivamente (gracias al Ejemplo 2.6 las presentaciones de grupos siempre existen). Con esto definamos al grupo $P := \langle S_G \sqcup S_H \mid R_G \sqcup R_H \rangle$. Observemos que existe una inclusión canónica de G en P y también de H en P, de manera que podemos decir que en P hay subgrupos isomorfos a G y H. Más aún, de la definición de presentación de grupo y de la Proposición 1.25, podemos asegurar que los elementos de P son palabras reducidas del conjunto $S_G \sqcup S_H$, es decir palabras de la forma $p_1 p_2 \ldots p_k$ donde cada $p_i \neq 1$, y además p_i y p_{i+1} pertenecen a conjuntos distintos. Al grupo P se le conoce como el ***producto libre de** G **y** H*. Lo siguiente es dar una generalización de esta idea.

2.2. Producto libre

Definición 2.10 (Producto libre amalgamado, propiedad universal)**.** *Sea A un grupo, y sean $\alpha_1 : A \to G_1$ y $\alpha_2 : A \to G_2$ morfismos de grupos. Un grupo G junto con morfismos $\beta_1 : G_1 \to G$ y $\beta_2 : G_2 \to G$ tales que $\beta_1 \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \alpha_2$, es llamado un **producto libre amalgamado de** G_1 **y** G_2 **sobre** A **(con respecto a** α_1 **y** α_2**)** si se satisface la siguiente propiedad universal: Para cualquier grupo H y morfismos $\varphi_1 : G_1 \to H$ y $\varphi_2 : G_2 \to H$ tales que $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$ existe un único morfismo $\varphi : G \to H$ con $\varphi \circ \beta_1 = \varphi_1$ y $\varphi \circ \beta_2 = \varphi_2$*

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dr, "\beta_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\ A \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & G \arrow[r, dashed, "\varphi"] & H \\ & G_2 \arrow[ur, "\beta_2"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & & \end{tikzcd}$$

El producto libre amalgamado es denotado por $G_1 *_A G_2$ *o simplemente como* $G_1 * G_2$*, cuando* A *es el grupo trivial, y en este caso le llamaremos* ***producto libre****.*

Teorema 2.11 (Existencia y unicidad de producto libre con amalgamado)**.** *Sea* A *un grupo, y sean* $\alpha_1 : A \to G_1$ *y* $\alpha_2 : A \to G_2$ *morfismos de grupos. Entonces existe* $G := G_1 *_A G_2$ *(junto con los morfismos* $\beta_1 : G_1 \to G$ *y* $\beta_2 : G_2 \to G$*) el cual es único salvo isomorfismo. Más aún* G *tiene la presentación*

$$\left\langle \{x_g \mid g \in G_1\} \sqcup \{x_g \mid g \in G_2\} \;\middle|\; \left\{x_{\alpha_1(a)} x_{\alpha_2(a)}^{-1} \mid a \in A\right\} \cup R_{G_1} \cup R_{G_2} \right\rangle$$

donde

$$R_{G_i} := \left\{x_g x_h x_k^{-1} \mid g, h, k \in G_i \text{ con } g \cdot h = k \text{ en } G_i\right\}$$

Demostración. **Unicidad:** Supongamos que existe L un grupo junto con $\gamma_1 : G_1 \to L$ y $\gamma_2 : G_2 \to L$ morfismos que igual cumplen dicha propiedad universal. Entonces tenemos que existen únicos morfismos $\beta : G \to L$ y $\gamma : L \to G$ tales que $\beta \circ \beta_1 = \beta \circ \beta_2$ y $\gamma \circ \gamma_1 = \gamma \circ \gamma_2$. Con esto obtenemos que el morfismo $\gamma \circ \beta : G \to G$ cumple que $\gamma \circ \beta \circ \beta_1 = \gamma \circ \beta \circ \beta_2$, es decir

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dr, "\beta_1"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] & & \\ A \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & G \arrow[r, dashed, "\gamma\circ\beta"] & G \\ & G_2 \arrow[ur, "\beta_2"'] \arrow[urr, bend right, "\beta_2"'] & & \end{tikzcd}$$

pero otro morfismo que satisface esto es justamente id_G. Por la unicidad que nos brinda la Definición 2.10 obtenemos que $\gamma \circ \beta = \mathrm{id}_G$. De manera análoga tenemos que $\beta \circ \gamma = \mathrm{id}_L$. Por lo tanto $G \cong L$.

Existencia: Veamos que el grupo H descrito por la presentación dada en el enunciado cumple con la Definición 2.10. Por lo anterior obtenemos que $G \cong H$.
Definamos a las funciones

$$\begin{array}{rccc} \gamma_i : & G_i & \longrightarrow & H \\ & g & \longmapsto & x_g \end{array}$$

con $i \in \{1, 2\}$. Las relaciones R_{G_i} nos aseguran que estas funciones son morfismos, pues

$$\gamma_i(g \cdot h) = x_{gh} = x_g \cdot x_h = \gamma_i(g) \cdot \gamma_i(h)$$

Por las relaciones $\left\{x_{\alpha_1(a)}x^{-1}_{\alpha_2(a)} \mid a \in A\right\}$ obtenemos que

$$\gamma_i \circ \alpha_1(g) = \gamma(\alpha_1(g)) = x_{\alpha_1(a)} = x_{\alpha_2(a)} = \gamma(\alpha_2(g)) = \gamma_i \circ \alpha_2(g)$$

Ahora veamos que H cumple la propiedad universal. Sea L un grupo y $\varphi_1 : G_1 \to L$ y $\varphi_2 : G_2 \to L$ morfismos tales que $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$. Lo que buscamos es probar la existencia de un único morfismo $\varphi : H \to L$ tal que $\varphi \circ \alpha_1 = \varphi \circ \alpha_2$. Consideremos a la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{x_g \mid g \in G_1\} \sqcup \{x_g \mid g \in G_2\} & \longrightarrow & L \\ & x_g & \longmapsto & \begin{cases} \varphi_1(g) & si \quad g \in G_1 \\ \varphi_2(g) & si \quad g \in G_2 \end{cases} \end{array}$$

Está función cumple que

$$\varphi^*(x_{\alpha_1(a)}x^{-1}_{\alpha_2(a)}) = \varphi^*(x_{\alpha_1(a)})\varphi^*(x^{-1}_{\alpha_2(a)}) = \varphi_1(\alpha_1(a))(\varphi_2(\alpha_2(a)))^{-1} = e_L$$

pues $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$. A su vez, para $x_g x_h x_z^{-1}$, con $g, h, z \in G_i$ y $g \cdot h = z$, tenemos que

$$\varphi^*(x_g x_h x_z^{-1}) = \varphi^*(x_g)\varphi^*(x_h)\varphi^*(x_z)^{-1} = \varphi_i(g)\varphi_i(h)\varphi_i(z)^{-1} = e_L$$

Por la Proposición 2.5 existe un morfismo $\overline{\varphi} : H \to L$, el cual por construcción cumple que $\overline{\varphi} \circ \gamma_1 = \varphi_1$ y $\overline{\varphi} \circ \gamma_2 = \varphi_2$.
Consideremos a $S := \{x_g \mid g \in G_1\} \sqcup \{x_g \mid g \in G_2\}$, el cual es un conjunto generador de H. Si $\psi : H \to L$ es un morfismo que satisface $\psi \circ \gamma_1 = \varphi_1$ y $\psi \circ \gamma_2 = \varphi_2$, entonces ψ satisface que $\psi \restriction_S = \overline{\varphi} \restriction_S$, entonces $\psi = \overline{\varphi}$ (Proposición 1.2). De manera que $\overline{\varphi}$ es el único morfismo que cumple la propiedad deseada. □

Ejemplo 2.12. *Un ejemplo interesante de producto libre es $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ pues resulta tener la siguiente presentación $\langle s, t \mid t^2,\, tst^{-1} = s^{-1}\rangle$, este grupo es mejor conocido como diédrico infinito D_∞.*

Como vimos en la prueba de existencia del producto libre, $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ tiene la presentación $\langle a, b \mid a^2,\, b^2\rangle$ en donde $\mathbb{Z}_2 = \langle a \mid a^2\rangle$ y $\mathbb{Z}_2 = \langle b \mid b^2\rangle$. Definimos a la función

$$\begin{array}{rccc} f : & \{a, b\} & \longrightarrow & \langle s, t \mid t^2,\, tst^{-1} = s^{-1}\rangle \\ & a & \longmapsto & st \\ & b & \longmapsto & t \end{array}$$

con la cual se cumple que $f^*(a^2) = stst = s(tst^{-1}) = ss^{-1} = 1$, y $f^*(b^2) = t^2 = 1$. Gracias a la Proposición 2.5, existe un morfismo $\overline{f} : \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \to D_\infty$ que extiende a f. De la misma manera podemos obtener un morfismo $\overline{g} : D_\infty \to \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ que extiende a la función

$$\begin{array}{rccc} g : & \{s, t\} & \longrightarrow & \langle a, b \mid a^2,\, b^2\rangle \\ & s & \longmapsto & ab \\ & t & \longmapsto & b \end{array}$$

ya que de esto tenemos $g^*(t^2) = 1$ *y* $g^*(tst^{-1}) = b(ab)b = ba = (ab)^{-1} = g^*(s)^{-1}$.

Es fácil ver que $\overline{f} \circ \overline{g} = \mathrm{id}_{D_\infty}$ *ya que tanto* $\overline{f} \circ \overline{g}$ *como* id_{D_∞} *coinciden en un conjunto generador del dominio, y por la Proposición 1.2 se sigue. Análogamente* $\overline{g} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2}$. *Por lo tanto obtenemos el isomorfismo deseado.*

Notemos que la propiedad universal del producto libre sería la siguiente

Definición 2.13 (Producto libre, propiedad universal)**.** *Sean* G_1 *y* G_2 *grupos. Un grupo* G *es el producto libre de* G_1 *y* G_2 *si satisface que: Para cualquier grupo* H *y morfismos* $\varphi_1 : G_1 \to H$ *y* $\varphi_2 : G_2 \to H$ *existe un único morfismo* $\varphi : G \to H$ *tal que* $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & H \\ G \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

donde ι_i *es la inclusión de* G_i *en* G, *con* $i \in \{1, 2\}$.

Esto nos motiva a dar una definición para el producto libre de varios grupos. Consideremos a una familia de grupos $\{G_i\}_{i \in I}$, con I un conjunto de índices no vacío. Y para cada $i \in I$, sea $\langle S_i \mid R_i \rangle$ una presentación del grupo G_i. Con esto podemos definir a los conjuntos

$$S := \textstyle\bigsqcup_{i \in I} S_i, \text{ y } R := \bigsqcup_{i \in I} R_i.$$

Con estos definimos al grupo $P := \langle S \mid R \rangle$, el cual es una generalización del producto libre para dos grupos. Este grupo lo denotamos por $*_{i \in I} G_i$. Además podemos dar una descripción de este grupo. Como los elementos del grupo libre $F(S)$ son palabra reducidas del conjunto S, y dado que S es la unión de los conjuntos $G_i's$ podemos decir que un elemento en $F(S)$ es de la forma

$$s_1 s_2 \cdots s_n \text{ con cada } s_j \in G_i \text{ para algún } i \in I.$$

Y más aún, si tenemos que s_j y s_{j+1} pertenecen al mismo G_i podemos considerar al elemento $s'_j := s_j s_{j+1} \in G_i$ (operarlos con la operación de G_i), y así tenemos solamente palabras que

$$s_1 s_2 \cdots s_n \text{ con cada } s_j \in G_i \text{ y } s_{j+1} \in G_k, \text{ con } i \neq k.$$

Ahora notemos que estas palabras son reducidas en un sentido más estricto, ya que no estamos pidiendo que términos consecutivos pertenezcan a diferentes $G_i's$, a diferencia del capitulo 1 donde sólo pedíamos que términos consecutivos no sean inversos.

Los elementos que causan ambigüedad son justamente cada palabra ε_{G_i}, ya que su propiedad de ser neutro en su respectivo G_i puede confundirse con propiedad de ser neutro en $F(S)$ de la palabra vacía ε. Para evitar esto consideramos a las palabras que no tengan como término a ningún neutro de algún G_i.

Con todo esto estamos considerando solamente a las palabras

$s_1 \cdots s_n$ con cada $s_j \neq \varepsilon_{G_i}$ para todo $i \in I$, y además si $s_j \in G_i$, entonces $s_{j+1} \notin G_i$.

Así cada elemento de $*_{i\in I}G_i = \langle S \mid R\rangle = F(S)/\langle R\rangle^{\lhd}_{F(S)}$ es una clase lateral cuyo representantes son palabras de la forma antes descrita. Abusando de la notación, escribiremos a los elementos de $*_{i\in I}G_i$ como los representantes de cada clase lateral.

El producto libre generalizado pude definirse también a partir de una propiedad universal.

Definición 2.14 (Producto libre generalizado, propiedad universal)**.** *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos, con I un conjunto de índices no vacío. Un grupo G es el producto libre de $\{G_i\}_{i\in I}$ si satisface que: Para cualquier grupo H y morfismos $\{\varphi_i : G_i \to H\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$.*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, hook, "\iota_i"'] & H \\ G \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

donde ι_i es la inclusión de G_i en G, para toda $i \in I$.

Veamos que el grupo $*_{i\in I}G_i$ cumple con la anterior propiedad universal.

Proposición 2.15. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos, con I un conjunto de índices no vacío. Y para cada $i \in I$, sea $\langle S_i \mid R_i\rangle$ una presentación del grupo G_i. El grupo $*_{i\in I}G_i = \langle\bigsqcup_{i\in I} S_i \mid \bigsqcup_{i\in I} R_i\rangle$ cumple la propiedad universal del producto libre generalizado.*

Demostración. Sean H un grupo y $\{\varphi_i : G_i \to H\}_{i\in I}$ morfismos. Definamos a la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \bigsqcup_{i\in I} S_i & \longrightarrow & H \\ & s \in S_k & \longmapsto & \varphi_k(g) \end{array}$$

Dado que cada φ_i es un morfismo, entonces debe de satisface que para $r \in R_i$, $\varphi_i(r) = 1_H$, por lo que para todo $r \in \bigsqcup_{i\in I} R_i$ se tiene que $\varphi^*(r) = 1_H$. Entonces por la Proposición 2.5 se sigue que existe un morfismo $\overline{\varphi} : *_{i\in I}G_i \to H$ tal que para toda $s \in \bigsqcup_{i\in I} S_i$, $\overline{\varphi}(s) = \varphi(s)$. Como cada $g \in G_i$ se expresa de manera única como palabras de S_i, entonces se sigue que para todo $g \in G_k$, $\overline{\varphi}(g) = \varphi(g) = \varphi_k(g)$. Considerando las inclusiones $\{\iota_i : G_i \to *_{i\in I}G_i\}_{i\in I}$ como las que a cada $g \in G_i$ lo asocia con la palabra reducida $g \in *_{i\in I}G_i$, podemos asegurar que $*_{i\in I}G_i$ satisface la propiedad universal deseada.

□

2.3. Grupo fundamental de gráficas

Antes de comenzar es conveniente mencionar lo qué es una *digráfica* y la relación que tiene con las gráficas simples. Nos basaremos en [CZ09].

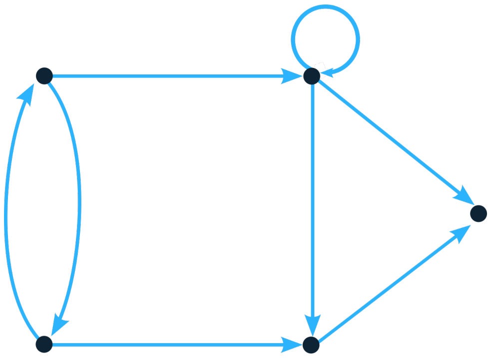


Figura 2.1: Ejemplo de digráfica.

Una ***digráfica*** D es un par ordenado (V, F) de conjuntos, con V no vacío, donde F es un subconjunto de $V \times V$. A los elementos de V los llamamos ***vértices*** y a los de F ***flechas***.

Una flecha (u, v) de D, decimos que es ***simétrica*** si (v, u) también es una flecha de D, y llamaremos a la digráfica D simétrica si todas sus flechas son de este tipo. Una flecha (u, v) de D es un ***lazo*** si $u = v$.

Si tenemos una gráfica simple $\Gamma = (V, E)$, podemos construir a la digráfica $D := (V, F)$, donde $F := \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E\}$. Claramente D es una digráfica simétrica y sin lazos.

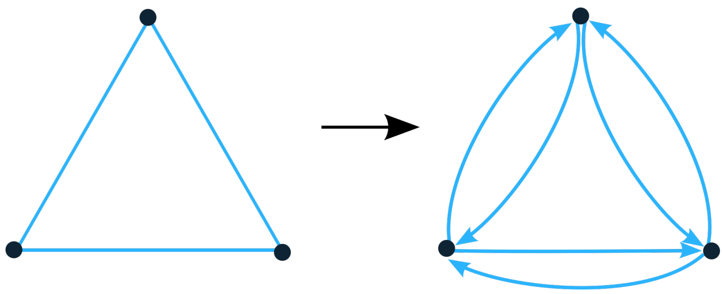


Figura 2.2: Construcción de una digráfica a partir de una gráfica simple.

Ahora bien, si tenemos una digráfica simétrica sin lazos $D = (V, F)$, entonces podemos definir la siguiente gráfica simple $\Gamma = (V, E)$, donde $E := \{\{u, v\} \mid (u, v) \in F \text{ con } u \text{ y } v \text{ distintos}\}$.

Esto nos da una manera de hacer una correspondencia uno-a-uno entre las gráficas simples y las digráficas simétricas sin lazos. A su vez nos permite traducir los conceptos y

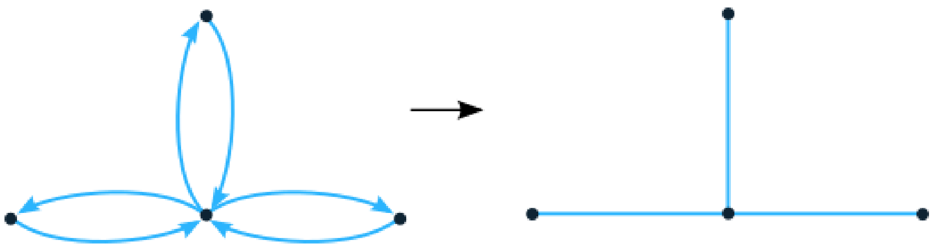


Figura 2.3: Construcción de una gráfica simple a partir de una digráfica.

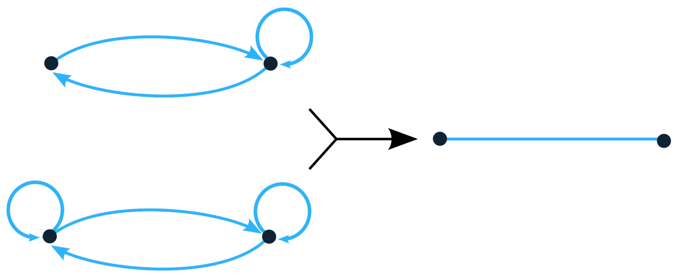


Figura 2.4: Construcción de una gráfica a partir de digráficas con lazos.

teoremas vistos en el capítulo anterior para digráficas simétricas sin lazos.

Considerando digráficas simétricas que tengan lazos la correspondendia anterior ya no es uno-a-uno.

Sin embargo, teniendo los conceptos para digráficas simétricas que no tienen lazos es fácil llevar estos a las digráficas simétricas en general.

Un hecho importante es que para árboles la correspondencia anterior siempre es uno-a-uno pues estos por definición no admiten lazos. A lo largo del capítulo enfocaremos nuestro estudio en este tipo de gráficas, de manera que podemos aplicar los conceptos y teoremas del capítulo anterior, y en particular acciones de grupos en gráficas.

Habiendo comentando todo esto pasemos a dar la siguiente definición, la cual es una manera de formalizar esta idea de digráficas simétricas y además nos proporciona una notación que nos facilita distinguir entre el sentido de las flechas.

Definición 2.16 (Gráfica de Serre)**.** *Una **gráfica de Serre** Γ consiste en un conjunto $X = \operatorname{vert}(\Gamma)$, un conjunto $Y = \operatorname{arist}(\Gamma)$ y dos funciones*

$$Y \to X \times X, \quad y \mapsto (o(y), t(y))$$

donde $o(y)$ y $t(y)$ los llamaremos el origen y el termino de y, respectivamente. Y

$$Y \to Y, \quad y \mapsto \overline{y}$$

las cuales satisfacen que para cualquier $y \in Y$

$$\overline{\overline{y}} = y, \qquad y \neq \overline{y}, \qquad o(y) = t(\overline{y}).$$

Para fines prácticos, a lo largo de este capítulo a una gráfica de Serre la llamaremos simplemente *gráfica*, si es que no hay ambigüedad.

Para simplificar los diagramas de este tipo de gráficas, solamente colocaremos una arista entre vértices adyacentes.

Ejemplo 2.17. *Consideremos a la gráfica Γ dada por* $\operatorname{vert}(\Gamma) := \{x_1, x_2\}$ *y* $\operatorname{arist}(\Gamma) :=$

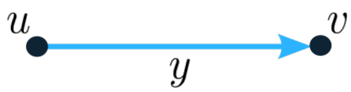
$\{y, \overline{y}\}$ donde $(o(y), t(y)) = (x_1, x_2)$. Esta gráfica la podemos representar mediante los diagramas de la Figura 2.5.

Figura 2.5: Diagramas de la gráfica Γ

Dada una gráfica Y, una ***orientación*** de Y es un subconjunto $A \subseteq \text{arist}(Y)$ tal que $\text{arist}(Y)$ es unión disjunta de A y $\overline{A} := \{\overline{y} \mid y \in A\}$.

Definición 2.18 (Gráficas de grupos)**.** *Una **gráfica de grupos** $\mathbf{Y}$ consiste en una gráfica Y, un grupo Y_x para cada vértice x de Y, y un grupo Y_y para cada arista de y de Y, junto con un monomorfismo $Y_y \to Y_{t(y)}$, que denotamos por $a \mapsto a^y$. Además de que $Y_y = Y_{\overline{y}}$*

Ejemplo 2.19. *Consideremos la siguiente gráfica Y*



y a los grupos $Y_u := \mathbb{Q}$, $Y_v := \mathbb{R}$ y $Y_y = Y_{\overline{y}} := \mathbb{Z}$, junto con los morfimos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & n \end{array}$$

Sea $\mathbf{Y}$ una gráfica de grupos con Y una gráfica conexa. Definamos al grupo $F(\mathbf{Y})$ como el grupo dado por la presentación

$$\langle \bigcup_{x \in \text{vert}(Y)} Y_x \cup \text{arist}(Y) \mid \bigcup_{x \in \text{vert}(Y)} R_x \cup R \rangle \tag{2.1}$$

donde las relaciones R_x cumplen que $Y_x = \langle Y_x \mid R_x \rangle$, y R son las relaciones

$$\overline{y} = y^{-1}, \qquad y a^y y^{-1} = a^{\overline{y}} \quad \text{para todo } y \in \text{arist}(Y), \quad a \in Y_y.$$

Más precisamente $F(\mathbf{Y})$ es el cociente del grupo

$$*_{x \in \text{vert}(Y)} Y_x * F(\text{arist}(Y))$$

entre el subgrupo normal generado por los elementos

$$y\overline{y}, \qquad ya^y y^{-1}(a^{\overline{y}})^{-1} \quad \text{con } y \in \text{arist}(Y), \quad a \in Y_y.$$

Ahora bien, sea c un camino de longitud n de Y que comience en un vértice x_0. Consideremos a $y_1, \dots, y_n$ las aristas en c, y así tomemos $x_i = o(y_{i+1}) = t(y_i)$. Una ***palabra de tipo c*** en $F(\mathbf{Y})$ es un par (c, μ) donde $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ es una sucesión de elementos $r_i \in Y_{x_i}$. El elemento

$$|c, \mu| := r_0 y_1 r_1 y_2 \cdots y_n r_n \in F(\mathbf{Y})$$

diremos que es el elemento asociado con el par (c, μ).

Considerando al conjunto $Y_y^y := \{a^y \mid a \in Y_y\}$, podemos definir lo siguiente.

Definición 2.20 (Palabra reducida)**.** *Diremos que (c, μ) es* ***reducida*** *si satisface lo siguiente: si $n = 0$ y $r_0 \neq \varepsilon$; si $n \geqslant 1$, y $r_i \notin Y_{y_i}^{y_i}$ para cada índice i tal que $y_{i+1} = \overline{y_i}$.*

El siguiente teorema lo enunciamos sin demostración pero se puede consultar en [Ser80, Teorema 11].

Teorema 2.21. *Si (c, μ) es un palabra reducida, el elemento asociado $|c, \mu|$ en $F(\mathbf{Y})$ es distinto de ε.*

Corolario 2.22. *La proyección canónica $Y_x \to F(\mathbf{Y})$ es inyectiva para cualquier $x \in \text{vert}(Y)$.*

De manera que, abusando de la notación, no distinguiremos a los elementos del grupo Y_x y sus imágenes bajo la proyección canónica $Y_x \to F(\mathbf{Y})$.

Definición 2.23 (Grupo fundamental de $\mathbf{Y}$)**.** *Sean $\mathbf{Y}$ una gráfica de grupos y x_0 un vértice de Y. El* ***grupo fundamental*** *de $\mathbf{Y}$ en x_0 se define como*

$$\pi_1(\mathbf{Y}, x_0) := \{|c, \mu| \in F(\mathbf{Y}) \mid c \textit{ tiene como primer y último vértice a } x_0\}.$$

Lema 2.24. *Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos, con $I \neq \varnothing$. Para cada G_j existe un subgrupo normal $H \trianglelefteq \ast_{i\in I} G_i$ tal que $G_j \subseteq H$ y $H \cap G_i = \varnothing$ para todo $i \neq j$.*

Demostración. Sea G_j un grupo de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$. Consideremos a la función $f : \bigsqcup_{i\in I} G_i \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida como 0 para los elementos de G_j y 1 para los demás G_i's. Con esto obtenemos un morfismo $\overline{f} : F(\bigsqcup_{i\in I} G_i) \longrightarrow \mathbb{Z}$ que extiende a f.

Nombremos K a Núc$(\overline{f})$. En particular $K \trianglelefteq F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$, $G_j \subseteq K$ y además $K \cap G_i = \varnothing$.

Considerando la familia de inclusiones $\{\iota_i : G_i \to F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)\}_{i\in I}$, la propiedad universal de producto libre generalizado nos da un morfismo $\varphi : \ast_{i\in I} G_i \longrightarrow F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$. Dado que la normalidad se preserva bajo imagen inversa $\varphi^{-1}[K] \trianglelefteq \ast_{i\in I} G_i$. También del hecho de ser función $\varphi^{-1}[G_j] \subseteq \varphi^{-1}[K]$. Y por último, para $i \neq j$, $\varphi^{-1}[K] \cap \varphi^{-1}[G_i] = \varphi^{-1}[K \cap G_i] = \varphi^{-1}[\varnothing] = \varnothing$.

Gracias a la propiedad universal podemos identificar a cada $\varphi^{-1}[G_i]$ con G_i.

Por lo tanto $\varphi^{-1}[K]$ es el subgrupo H que deseábamos. $\square$

Proposición 2.25. *Sean* $\mathbf{Y}$ *una gráfica de grupos y* T *un árbol maximal de* Y*. Definamos al grupo* $G := F(\mathbf{Y}) \,/\, \langle \operatorname{arist}(T) \rangle^{\triangleleft}_{F(\mathbf{Y})}$*. Consideremos a* $p : F(\mathbf{Y}) \to G$ *la proyección canónica y* g_y *a la imagen de* $y \in \operatorname{arist}(Y)$ *bajo la proyección* p*. Entonces:*

1. *El grupo* G *se puede describir como el cociente de* $\ast_{x \in \operatorname{vert}(Y)} Y_x * F(\operatorname{arist}(Y))$ *con el subgrupo normal generado por*

$$g_{\overline{y}} = g_y^{-1}, \quad g_y a^y g_y^{-1} = a^{\overline{y}} \qquad \textit{para todo } y \in \operatorname{arist}(Y), \quad a \in Y_y$$

$$g_y = \varepsilon \qquad \textit{para todo } y \in \operatorname{arist}(T).$$

2. *Para cualquier* $x_0 \in \operatorname{vert}(Y)$*, la proyección* p *induce un isomorfismo entre los grupos* $\pi_1(\mathbf{Y}, x_0)$ *y* G*.*

Demostración. 1. De la definición de $F(\mathbf{Y})$ tenemos que sus elementos pertenecen a

$$\ast_{x \in \operatorname{vert}(Y)} Y_x * F(\operatorname{arist}(Y))$$

sujetos a las relaciones

$$y\overline{y}, \qquad y a^y y^{-1} (a^{\overline{y}})^{-1} \quad \text{con } y \in \operatorname{arist}(Y), \quad a \in Y_y.$$

Ahora bien, como consecuencia del Lema 2.24 notemos que el subgrupo $\langle \operatorname{arist}(T) \rangle^{\triangleleft}_{F(\mathbf{Y})}$ es ajeno a cada grupo vértice Y_x. De manera que podemos identificar a cada Y_x con su imagen bajo p. Por otro lado $F(\operatorname{arist}(Y))$ bajo p resulta ser $\{g_y \mid y \in \operatorname{arist}(Y)\}$.

Y las relaciones descritas arriba bajo p resultan ser

$$g_y g_{\overline{y}}, \qquad y a^y g_y^{-1} (a^{\overline{y}})^{-1} \quad \text{con } y \in \operatorname{arist}(Y), \quad a \in Y_y.$$

Y por último

$$g_y = \varepsilon \quad \text{para todo } y \in \operatorname{arist}(T).$$

2. Para $x \in \operatorname{vert}(Y)$, sea c_x el camino en T que conecta a los vértices x_0 y x (por la Proposición 1.29 este camino existe y es único). Consideremos a $y_1, \ldots, y_n$ las aristas del camino c_x, y tomemos

$$\gamma_x := y_1 \ldots y_n \in F(\mathbf{Y})$$

Con esto, para cada Y_x ($x \in \operatorname{vert}(Y)$) definamos la función

$$\begin{array}{rccc} f_x : & Y_x & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Y}, x_0) \\ & a & \longmapsto & \gamma_x \cdot a \cdot \gamma_x^{-1} \end{array}$$

La cual está bien definida, pues los elementos de su imagen en efecto pertenecen al grupo $\pi_1(\mathbf{Y}, x_0)$, y además cada f_x es un morfismo de grupos.

Ahora, definamos a la función

$$\begin{array}{rccc} g: & \operatorname{arist}(Y) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Y}, x_0) \\ & y & \longmapsto & \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1} \end{array}$$

que, al igual que las funciones anteriores, está bien definida. De esto obtenemos un morfismo $g^* : F(\operatorname{arist}(Y)) \to \pi_1(\mathbf{Y}, x_0)$ que extiende a g.

Por la propiedad universal de producto libre, existe un morfismo

$$\varphi : \quad \ast_{x \in \operatorname{vert}(Y)} Y_x * F(\operatorname{arist}(Y)) \quad \longrightarrow \quad \pi_1(\mathbf{Y}, x_0)$$

tal que $\varphi(a) = \gamma_x \cdot a \cdot \gamma_x^{-1}$ y $\varphi(y) = \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1}$ para $a \in Y_x$, $y \in \operatorname{arist}(Y)$.

Veamos que $R \cup \operatorname{arist}(T) \subseteq \text{Núc}(\varphi)$, donde R es el conjunto de relaciones definido en el inciso anterior.

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{y}y) = \varphi(\overline{y})\varphi(y) &= \gamma_{o(\overline{y})} \cdot \overline{y} \cdot \gamma_{t(\overline{y})}^{-1} \cdot \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1} \\ &= \gamma_{t(y)} \cdot \overline{y} \cdot \gamma_{o(y)}^{-1} \cdot \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

así como también que

$$\begin{aligned} \varphi(y a^y y^{-1}) &= \varphi(y)\varphi(a^y)\varphi(y)^{-1} \\ &= (\gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1}) \cdot (\gamma_{t(y)} \cdot a^y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1}) \cdot (\gamma_{t(y)} \cdot y^{-1} \cdot \gamma_{o(y)}^{-1}) \\ &= \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot a^y \cdot y^{-1} \cdot \gamma_{o(y)}^{-1} \\ &= \gamma_{o(y)} \cdot a^{\overline{y}} \cdot \gamma_{o(y)}^{-1} \\ &= \gamma_{t(\overline{y})} \cdot a^{\overline{y}} \cdot \gamma_{t(\overline{y})}^{-1} \\ &= \varphi(a^{\overline{y}}) \end{aligned}$$

y si $y \in \operatorname{arist}(T)$, entonces sucede que $c_{t(y)} = c_{o(y)}y$ o bien $c_{o(t)} = c_{t(y)}\overline{y}$. En el primer caso

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1} \\ &= \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot (\gamma_{o(y)} \cdot y)^{-1} \\ &= \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot y^{-1}\gamma_{o(y)}^{-1} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Para el segundo caso es análogo.

Por tanto $\langle R \cup \text{arist}(T)\rangle^{\lhd} \subseteq \text{Núc}(\varphi)$. Gracias al *Primer Teorema de Isomorfismo* y al inciso anterior, existe un morfismo $\psi : G \to \pi_1(\mathbf{Y}, x_0)$ tal que $\psi \circ p = \varphi$, más precisamente

$$\psi(a) = \gamma_x \cdot a \cdot \gamma_x^{-1}$$
$$\psi(g_y) = \gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1}$$

Notemos que $p(\gamma_x) = 1$, así para $a \in Y_x$

$$\begin{aligned} p(\psi(a)) &= p(\gamma_x \cdot a \cdot \gamma_x^{-1}) \\ &= p(\gamma_x) \cdot p(a) \cdot p(\gamma_x^{-1}) \\ &= p(a) \\ &= a \end{aligned}$$

y para $y \in \text{arist}(Y)$

$$\begin{aligned} p(\psi(g_y)) &= p(\gamma_{o(y)} \cdot y \cdot \gamma_{t(y)}^{-1}) \\ &= p(\gamma_{o(y)}) \cdot g_y \cdot p(\gamma_{t(y)}^{-1}) \\ &= g_y \end{aligned}$$

Con esto $p \circ \psi = \text{id}$ en un conjunto generador de G, de modo que $p \circ \psi = \text{id}_G$. Por otro lado, sea $|c, \mu| \in \pi_1(\mathbf{Y}, x_0)$ considerando $|c, \mu| = r_0 y_1 r_1 y_2 \cdots y_n r_n$ y $x_i := o(y_{i+1}) = t(y_i)$ tenemos

$$\psi(p(r_i)) = \psi(r_i) = \gamma_{x_i} \cdot r_i \cdot \gamma_{x_i}^{-1} \quad \text{y} \quad \psi(p(y_i)) = \gamma_{x_{i-1}} \cdot y_i \cdot \gamma_{x_i}^{-1}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \psi(p(|c, \mu|)) &= (\gamma_{x_0} \cdot r_0 \cdot \gamma_{x_0}^{-1})(\gamma_{x_0} \cdot y_1 \cdot \gamma_{x_1}^{-1}) \cdots (\gamma_{x_{n-1}} \cdot y_n \cdot \gamma_{x_n}^{-1})(\gamma_{x_n} \cdot r_n \cdot \gamma_{x_0}^{-1}) \\ &= \gamma_{x_0} \cdot (r_0 y_1 \cdots y_n r_n) \cdot \gamma_{x_0}^{-1} \\ &= r_0 y_1 \cdots y_n r_n \\ &= |c, \mu| \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se da pues $\gamma_{x_0} = \varepsilon$. En conclusión $\psi \circ p = \text{id}_{\pi_1(\mathbf{Y}, x_0)}$.

□

Este resultado nos permite definir de otra manera al grupo fundamental de una gráfica de grupos

Definición 2.26 (Grupo fundamental de $\mathbf{Y}$)**.** *Sean* $\mathbf{Y}$ *una gráfica de grupos y* T *un árbol* *maximal de Y. El **grupo fundamental** de Y en T es*

$$\pi_1(\mathbf{Y}, T) := F(\mathbf{Y}) \;/\; \langle \mathrm{arist}(T)\rangle^{\triangleleft}_{F(\mathbf{Y})}$$

Más aún, podemos asegurar lo siguiente.

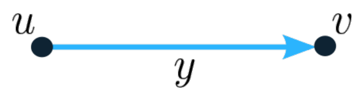
Corolario 2.27. *El grupo fundamental de una gráfica de grupos es independiente del árbol maximal o vértice que se tome.*

Y de esto:

Corolario 2.28. *Sean $\mathbf{Y}$ una gráfica de grupos, T un árbol maximal de Y y (c, μ) una palabra reducida cuyo tipo c es un camino cerrado. Entonces la imagen de $|c, \mu|$ en $\pi_1(\mathbf{Y}, T)$, bajo la proyección canónica, es distinta de 1.*

Esta última manera de definir el grupo fundamental de una gráfica de grupos nos permite obtener un ejemplo sencillo.

Ejemplo 2.29. *Considerando a la gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ como*



Calculemos por definición a $F(\mathbf{Y})$,

$$F(\mathbf{Y}) = \langle Y_u \sqcup Y_v \sqcup \{y, \overline{y}\} \mid R_{Y_u} \sqcup R_{Y_v} \sqcup \{y^{-1} = \overline{y}\,,\, y a^y y^{-1} = a^{\overline{y}}\}\rangle$$

Notemos que su único árbol maximal es justamente Y, de manera que $\pi_1(\mathbf{Y}, Y)$ está dado por

$$F(\mathbf{Y}) \;/\; \langle \mathrm{arist}(Y)\rangle^{\triangleleft}_{F(\mathbf{Y})} = \langle Y_u \sqcup Y_v \mid R_{Y_u} \sqcup R_{Y_v} \sqcup \{a^y = a^{\overline{y}}\}\rangle = Y_u * Y_v$$

Un hecho importante que veremos más adelante es que un grupo G que actúa en un árbol libremente es el grupo fundamental de cierta gráfica de grupos. Lo siguiente es construir una gráfica cuyo rol en nuestra búsqueda de caracterizar a los grupos virtualmente libres es vital. Tal gráfica resultará ser un árbol y es conocido como ***árbol de Bass-Serre***.

2.4. Árbol de Bass-Serre

Brevemente recordemos lo que es una *gráfica cociente*. Sea G un grupo que actúa libremente en una gráfica conexa X. La ***gráfica cociente*** G/X está dada por: $\mathrm{vert}(G/X) = \bigcup_{v \in \mathrm{vert}(X)} G \cdot v$, y dos vértices son adyacentes en G/X si y sólo si algunos de sus elementos lo son en X.

Para lo siguiente, consideremos:

- $\mathbf{Y}$ una gráfica de grupos con Y una gráfica conexa y no vacía.
- T un árbol maximal de Y.
- A una orientación de Y.

Si $y \in \operatorname{arist}(Y)$, definimos

$$e(y) := \begin{cases} 0 & si \quad y \in A \\ 1 & si \quad y \notin A \end{cases}$$

y $|y|$ denotará a una de las dos aristas y o $\overline{y}$ que pertenece a A.

El propósito de esta sección es construir una gráfica $\widetilde{X} = \widetilde{X}(\mathbf{Y}, T)$ a partir de la gráfica de grupos $\boldsymbol{Y}$ que cumpla lo siguiente:

- Una acción del grupo $\pi = \pi_1(\mathbf{Y}, T)$ en $\widetilde{X}$.
- Un morfismo $p : \widetilde{X} \to Y$ que induzca un isomorfismo $\pi/\widetilde{X} \cong Y$.
- secciones $\operatorname{vert}(Y) \to \operatorname{vert}(\widetilde{X})$ y $\operatorname{arist}(Y) \to \operatorname{arist}(\widetilde{X})$ de p (estas secciones serán denotadas como $x \mapsto \widetilde{x}$ y $y \mapsto \widetilde{y}$)

Con esto obtendremos una acción del grupo π en la gráfica $\widetilde{X}$ donde conocemos la gráfica cociente y los estabilizadores de los vértices y las aristas, a saber los grupos vértice Y_x y los grupos arista Y_y, respectivamente. Más aún, dicha gráfica $\widetilde{X}$ resultará ser un árbol.

En lo que sigue, el conjunto de clases laterales izquierdas de un subgrupo H en un grupo G será denotado por G/H.

Definamos a los vértices y aristas de la gráfica $\widetilde{X}$ como

$$\operatorname{vert}(\widetilde{X}) := \bigsqcup_{x \in \operatorname{vert}(Y)} \pi/\pi_x, \qquad \operatorname{arist}(\widetilde{X}) := \bigsqcup_{y \in \operatorname{arist}(Y)} \pi/\pi_y$$

donde

$$\pi_x = Y_x, \qquad \pi_y = Y_w^w \quad (w = \overline{|y|})$$

Denotaremos por $\widetilde{x}$ a la clase lateral π_x, y por $\widetilde{y}$ a la clase π_y. Ahora bien, sólo resta definir a las funciones

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arist}(\widetilde{X}) & \longrightarrow & \operatorname{arist}(\widetilde{X}) \\ g\widetilde{y} & \longmapsto & \overline{g\widetilde{y}} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arist}(\widetilde{X}) & \longrightarrow & \operatorname{vert}(\widetilde{X}) \times \operatorname{vert}(\widetilde{X}) \\ g\widetilde{y} & \longmapsto & (o(g\widetilde{y}), t(g\widetilde{y})) \end{array}$$

y lo haremos como sigue

$$\overline{g\widetilde{y}} := g\widetilde{\overline{y}}$$

$$o(g\widetilde{y}) := gg_y^{-e(y)}\widetilde{o(y)}$$

$$t(g\widetilde{y}) := gg_y^{1-e(y)}\widetilde{t(y)}$$

donde g_y denota la imagen de y en π. Ahora hay que verificar que estas funciones están bien definidas. La primera se sigue del hecho $\pi_y = Y_w^w = \pi_{\overline{y}}$. Para la segunda primero hay que verificar que para $z \in \pi_y$ se tiene

$$zg_y^{-e(y)}\widetilde{o(y)} = g_y^{-e(y)}\widetilde{o(y)}$$

lo que es equivalente a

$$g_y^{e(y)}\pi_y g_y^{-e(y)} \subseteq \pi_{o(y)} = Y_{o(y)}$$

Entonces, si $g, h \in \pi$ son tales que $g\widetilde{y} = h\widetilde{y}$, implica que $h^{-1}g \in \pi_y$ y por lo visto

$$(h^{-1}g)g_y^{-e(y)}\widetilde{o(y)} = g_y^{-e(y)}\widetilde{o(y)}$$

de lo que obtenemos que $o(g\widetilde{y}) = o(h\widetilde{y})$.

Para la tercera hay que verificar

$$g_y^{e(y)-1}\widetilde{y}g_y^{1-e(y)} \subseteq \pi_{t(y)} = Y_{t(y)}$$

lo cual se sigue de un argumento similar al hecho antes.

Con esto tenemos que la gráfica $\widetilde{X}$ está bien definida. Además tenemos la función dada por

$$\begin{array}{ccc} \pi \times \mathrm{vert}(\widetilde{X}) & \longrightarrow & \mathrm{vert}(\widetilde{X}) \\ (g, h\widetilde{x}) & \longmapsto & (gh)\widetilde{x} \end{array}$$

está bien definida pues

$$h_1\widetilde{x} = h_2\widetilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad h_2^{-1}h_1 \in \pi_x \quad \Leftrightarrow \quad h_2^{-1}g^{-1}gh_1 \in \pi_x \quad \Leftrightarrow \quad gh_1\widetilde{x} = gh_2\widetilde{x}$$

y, por construcción de $\widetilde{X}$, es una acción de π en $\widetilde{X}$. Al morfismo p lo definimos como $p(g\widetilde{x}) := x$.

Para $y \in \mathrm{arist}(T)$, se cumple que $g_y = 1$, por lo que $o(\widetilde{y}) = \widetilde{o(y)}$ y $t(\widetilde{y}) = \widetilde{t(y)}$. Con esto, las secciones $x \mapsto \widetilde{x}$ y $y \mapsto \widetilde{y}$ inducen un isomorfismo $T \cong \widetilde{T} \subseteq \widetilde{X}$.

Teorema 2.30 (Árbol de Bass-Serre). *Sean $\boldsymbol{Y}$ una gráfica de grupos conexa no vacía, T un árbol maximal de Y y A una orientación de Y. Entonces la gráfica $\widetilde{X} = \widetilde{X}(\boldsymbol{Y}, T)$ es un árbol.*

Demostración. Primero veamos que $\widetilde{X}$ es conexa. Sea $y \in \operatorname{arist}(Y)$, entonces si $e(y) = 0$ tenemos que $o(\widetilde{y}) = \widetilde{o(y)}$, y si $e(y) = 1$ tenemos $t(\widetilde{y}) = \widetilde{t(y)}$, de modo que alguno de los extremos de la arista $\widetilde{y}$ pertenece al árbol $\widetilde{T}$. Entonces la subgráfica más pequeña por contención W de $\widetilde{X}$ que contiene a todas las aristas $\widetilde{y}$ ($y \in \operatorname{arist}(Y)$) es conexa. Más aún, para $g\widetilde{x} \in \operatorname{vert}(\widetilde{X})$ se cumple que $g\widetilde{x} \in \pi \cdot \widetilde{T} \subseteq \pi \cdot W$, de manera que $\pi \cdot W = \widetilde{X}$.

Ahora lo que haremos es probar que existe un $S \subseteq \pi$ subconjunto generador tal que para todo $s \in S$, $W \cup sW$ es conexa, y para probar esto basta con ver que W y sW tienen un vértice en común ya que tanto W como sW es conexa. Sea S la unión de los conjuntos Y_x ($x \in \operatorname{vert}(Y)$) y $\{g_y\}$ ($y \in \operatorname{arist}(Y)$). Sea $s \in Y_x$, para algún $x \in \operatorname{vert}(Y)$, entonces las gráficas W y sW comparten el vértice $\widetilde{x} = s\widetilde{x}$. Sea g_y, para algún $y \in \operatorname{arist}(Y)$, entonces las gráficas W y g_yW comparten el vértice:

$$o(g_y\widetilde{y}) = g_y g_y^{-1}\widetilde{o(y)} = \widetilde{o(y)}, \text{ si } e(y) = 1;$$

$$g_y\widetilde{t(y)} = t(\widetilde{y}), \text{ si } e(y) = 0.$$

Mediante un argumento inductivo obtenemos que para cualesquiera $s_1, \ldots, s_n \in S$

$$W \cup s_1W \cup s_1s_2W \cup \cdots \cup s_1 \cdots s_nW$$

es conexa.

Con esto podemos probar que $\widetilde{X}$ es conexa. Consideremos $\widetilde{x}_0 \in \operatorname{vert}(W)$ un vértice fijo, y sea $g\widetilde{x} \in \operatorname{vert}(\widetilde{X})$ un vértice cualquiera. Como S genera a π, existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ tales que $g = s_1 \cdots s_n$. Por lo visto arriba los vértices $\widetilde{x}_0$ y $g\widetilde{x}$ están conectados.

Para probar que $\widetilde{X}$ no tiene ciclos, lo que se hará es ver que todos los caminos cerrados de $\widetilde{X}$ tienen un *retroceso* (i.e. $\widetilde{y}_{i+1} = \overline{\widetilde{y}}_i$, para algún i). Para esto procederemos por contradicción. Sean $\widetilde{c}$ un camino cerrado sin retrocesos, $(s_1\widetilde{y}_1, \ldots, s_n\widetilde{y}_n)$ la sucesión de sus aristas, y $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la sucesión de vértices bajo la proyección c de $\widetilde{c}$ en Y. En particular $x_0 = x_n$. Consideremos $e_i := e(y_i)$ y $g_i := g_{y_i}$, así

$$t(s_n\widetilde{y}_n) = s_n g_n^{1-e_n}\widetilde{x}_0 = s_1 g_1^{-e_1}\widetilde{x}_0 = o(s_1\widetilde{y}_1)$$

$$t(s_1\widetilde{y}_1) = s_1 g_1^{1-e_1}\widetilde{x}_1 = s_2 g_2^{-e_2}\widetilde{x}_1 = o(s_2\widetilde{y}_2)$$

$$\vdots$$

$$t(s_{n-1}\widetilde{y}_{n-1}) = s_{n-1} g_{n-1}^{1-e_{n-1}}\widetilde{x}_{n-1} = s_n g_n^{-e_n}\widetilde{x}_{n-1} = o(s_n\widetilde{y}_n)$$

Definimos $q_i := s_i g_i^{-e_i}$, con lo que tenemos

$$\begin{aligned} q_n g_n r_n &= q_1 \\ q_1 g_1 r_1 &= q_2 \\ &\vdots \\ g_{n-1} g_{n-1} r_{n-1} &= q_n \end{aligned}$$

con $r_i \in \widetilde{x}_i = \pi_{x_i}$. De esto

$$\begin{aligned} g_n r_n &= q_n^{-1} q_1 \\ g_1 r_1 &= q_1^{-1} q_2 \\ &\vdots \\ g_{n-1} r_{n-1} &= g_{n-1}^{-1} q_n \end{aligned}$$

de manera que

$$g_1 r_1 g_2 r_2 \cdots g_n r_n = 1. \tag{2.2}$$

Sea (c, μ) la palabra de tipo c definida por $\mu = (1, r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Veamos que (c, μ) es reducida. Supongamos que c tiene aristas tales que $y_{i+1} = \overline{y_i}$. Entonces $g_{y_{i+1}} = g_i^{-1}$ y $e_{i+1} = 1 - e_i$. De la igualdad $q_i g_i r_i = q_{i+1}$ obtenemos

$$(s_i g_i^{-e_i}) g_i r_i = s_{i+1} g_{i+1}^{e_{i+1}}$$

y de esto $r_i = g_i^{e_i - 1}(s_i^{-1} s_{i+1}) g_i^{1-e_i}$. Tenemos que probar que $r_i \notin Y_{y_i}^{y_i}$, lo que es equivalente a que

$$s_i^{-1} s_{i+1} \notin g_i^{1-e_i} Y_{y_i}^{y_i} g_i^{e_i - 1}$$

Pero esto último es igual al estabilizador $\pi_{\widetilde{y}_i}$, así que hay que ver que $s_i^{-1} s_{i+1} \widetilde{y}_i \neq \widetilde{y}_i$, pero esto se cumple pues como $\widetilde{c}$ no tiene retrocesos, entonces $s_i \widetilde{y}_i \neq \overline{s_{i+1} \widetilde{y}_{i+1}} = s_{i+1} \widetilde{\overline{y}}_{i+1} = s_{i+1} \widetilde{y}_i$, así $s_i \widetilde{y}_i \neq s_{i+1} \widetilde{y}_i$. Dado que c es un camino cerrado y (c, μ) es reducida, por el Corolario 2.28 obtenemos que la imagen de $|c, \mu|$ en $\pi_1(\mathbf{Y}, T)$ es distinta de 1. Sin embargo, su imagen es $g_1 r_1 \cdots g_n r_n$ dada por la Ecuación 2.2.

Por lo tanto $\widetilde{X}$ no tiene ciclos, y en consecuencia es un árbol.

□

2.5. Teorema de estructura

Teniendo en cuenta el árbol de Bass-Serre, lo que nos interesa ahora es obtener condiciones para que un grupo G sea el grupo fundamental de una gráfica de grupos $\mathbf{Y}$, ya que de está manera G actuará naturalmente en el árbol de $\widetilde{X}$ de $\mathbf{Y}$.

Definición 2.31. *Sea G/X una gráfica cociente y T' un subárbol de G/X. Considerando la proyección $p : X \to G/X$. Un **levantamiento** de T' es un subárbol T de X tal que $T \subseteq p^{-1}[T']$ y $T \cong T'$. En este caso diremos que T' se **levanta** a T.*

Definición 2.32. *Sea G un grupo que actúa en una gráfica X. Decimos que G actúa* ***sin inversiones*** *si para cualesquiera $y \in \text{arist}(X)$ y $g \in G$ se cumple $gy \neq \overline{y}$.*

Lema 2.33. *Sea X una gráfica conexa y G un grupo que actúa sin inversiones en ella. Todo subárbol T' de G/X se levanta a un subárbol de X.*

Demostración. Sea Ω el conjunto de subárboles de X que se proyectan inyectivamente en T'. Notemos que $\Omega \neq \varnothing$ ya que $\text{vert}(X) \neq \varnothing$. Considerando el orden parcial inducido por la contención podemos aplicar *Lema de Zorn* y con esto obtenemos un elemento maximal T_0 de Ω. Sea T_0' la imagen de T_0 en T'.

Lo que afirmamos es que $T_0' = T'$, y para ver esto procederemos por contradicción. Supongamos que $T_0' \subsetneq T'$. Esto implica que $\text{vert}(T_0') \subsetneq \text{vert}(T')$, y dado que T' es conexa sea $y' \in \text{arist}(T')$ tal que $o(y') \in \text{vert}(T_0')$ y $t(y') \notin \text{vert}(T_0')$. Sea y un levantamiento de y', y ya que podemos intercambiar a y por cualquier gy con $g \in G$, supongamos que $o(y) \in \text{vert}(T_0)$, esto nos es posible gracias a que T_0 se proyecta inyectivamente en T_0' y $o(y') \in \text{vert}(T_0')$ lo que implica que un levantamiento de $o(y')$ pertenece a $\text{vert}(T_0)$.

Sea T_1 la gráfica que resulta de agregar $t(y)$ y $y, \overline{y}$ a T_0. Notemos que T_1 es un árbol. Y además que T_1 se proyecta inyectivamente en T' pues la proyección de $t(y)$ en T' no pertenece a T_0'. Esto contradice la maximalidad de T_0.

Por lo tanto $T_0' = T'$, y así T_0 es un levantamiento de T'. □

Lema 2.34. *Sea G un grupo que actúa sin inversiones en una gráfica conexa X y T un subárbol generador. Sea Y una subgráfica de X que contenga a T y que cada una de sus aristas tenga un extremo en T y además $G \cdot Y = X$. Para cada arista $y \in \text{arist}(Y)$ con origen en T, sea g_y un elemento de G tal que $g_y t(y) \in \text{vert}(T)$.*

El grupo H generado por los elementos g_y y los estabilizadores G_x (con $x \in \text{vert}(T)$) es igual a G.

Los elementos g_y en efecto existen ya que T intersecta a todas las orbitas de los vértices en exactamente un elemento.

Demostración. Sea $g \in G$, y $x \in \text{vert}(T)$. Lo que haremos será analizar al vértice gx poniendo atención en su distancia al árbol T, a la cual llamaremos n.

Si $n = 0$, entonces $gx \in \text{vert}(T)$, de esto se sigue que $g \in G_x$ y por tanto $g \in H$.

Si $n = 1$, entonces gx es adyacente a algún vértice de T, digamos x_0 y llamemos y_0 a la arista con origen en x_0 y término en gx. Dado que $G \cdot Y = X$, existe $r \in G$ tal que $ry_0 \in \text{arist}(Y)$, y más aún $r \in G_{x_0}$ ya que $x_0 \in \text{vert}(T)$ y T es un subárbol generador. Con esto tenemos que rgx es un vértice de Y que es adyacente a un vértice x_0 de T, el cual podemos suponer que es el origen de la arista que lo conecta a rgx, de modo que existe algún g_y tal que $g_y rgx \in \text{vert}(T)$. Y dado que $x \in \text{vert}(T)$ y T es subárbol generador, se sigue que $g_y rg \in G_x$, es decir $g_y rg = g_x$ para algún $g_x \in G_x$, de lo que obtenemos que $g = r^{-1}g_y^{-1}g_x \in H$.

Ahora supongamos que si gx está a distancia n se cumple que $g \in H$. Supongamos que gx está a distancia $n+1$ de un vértice de T, digamos que

$$x_0,\, g_1x_1,\, g_2x_2,\, \ldots,\, g_nx_n,\, gx$$

es la trayectoria de longitud mínima entre T y gx, donde cada $x_i \in \mathrm{vert}(T)$. Por hipótesis de inducción tenemos que $g_n \in H$. Luego trasladamos la trayectoria con g_n^{-1} y obtenemos que en particular que $x_n \in \mathrm{vert}(T)$ y $g_n^{-1}gx$ es adyacente a este, de esta manera podemos proceder como en el caso $n = 1$, así $g_n^{-1}g \in H$ y como $g_n^{-1} \in H$ concluimos que $g \in H$.

□

Teorema 2.35. *Si un grupo G actúa sin inversiones en un árbol X, entonces G es el grupo fundamental de una cierta gráfica de grupos $\mathbf{Y}$, donde $Y = G/X$.*

Antes de demostrar este Teorema lo que haremos será construir la gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ tal que el grupo G sea su grupo fundamental.

Para definir una gráfica de grupos necesitamos una gráfica, los grupos asociados a cada vértice y arista, y los morfismos de cada arista a su término. La gráfica que nos servirá es justamente G/X. Lo siguiente a hacer es determinar los grupos para los vértices y las aristas.

Sea T un árbol maximal de G/X. Como consecuencia del Lema 2.33 podemos considerar a $j : T \to X$ un levantamiento, y A una orientación de G/X donde

$$e(y) := \begin{cases} 0 & si \quad y \in A \\ 1 & si \quad y \notin A \end{cases}$$

El levantamiento j implicitamente define las secciones $\mathrm{vert}(G/X) = \mathrm{vert}(T) \to \mathrm{vert}(X)$ y $\mathrm{arist}(T) \to \mathrm{arist}(X)$. Gracias a la maximalidad de T tenemos implícitamente una sección $\mathrm{arist}(G/X) \to \mathrm{arist}(X)$ aunque lo que buscamos es que dicha sección preserva la orientación de la aristas, es decir buscamos extender a j a un sección $j^* : \mathrm{arist}(G/X) \to \mathrm{arist}(X)$ tal que $j^*(\overline{y}) = \overline{j^*(y)}$, y para esto sólo basta con definirlo en $\mathrm{arist}(G/X)$. Más aún, dado que T es maximal sólo basta con definir los valores de $A - \mathrm{arist}(T)$.

Sea $y \in \mathrm{arist}(G/X)$ tal que $o(y) \in \mathrm{vert}(T)$, y como j es inyectiva lo conveniente es definir $o(j^*(y)) := j(o(y))$. Dado que $t(j(y))$ y $j(t(y))$ tienen la misma proyección en G/X, existe $\gamma_y \in G$ tal que $t(j(y)) = \gamma_y j(t(y))$. Entonces extendemos $y \hookrightarrow \gamma_y$ a todo $\mathrm{arist}(G/X)$ mediante $\gamma_{\overline{y}} = \gamma_y^{-1}$ y $\gamma_y = 1$ para $y \in \mathrm{arist}(T)$. Esto nos permite definir a j^* para cada $y \in \mathrm{arist}(G/X)$ como sigue

$$\begin{aligned} o(j^*(y)) &:= \gamma_y^{-e(y)} j(o(y)) \\ t(j^*(y)) &:= \gamma_y^{1-e(y)} j(t(y)). \end{aligned}$$

Recordemos que el estabilizador para un elemento x se denota como G_x. Con esto definimos los grupos para vértices y aristas como sigue

$$Y_v := G_{j(v)} \text{ para } v \in \mathrm{vert}(Y)$$
$$Y_z := G_{j*(y)} \text{ para } y \in \mathrm{arist}(Y).$$

Y el morfismo $Y_y \to Y_{t(y)}$ lo definimos como $a \mapsto a^y := \gamma_y^{e(y)-1} a \gamma_y^{1-e(y)}$. Notemos que está definición es posible ya que $\gamma_y^{e(y)-1} G_{j*(y)} \gamma_y^{1-e(y)} \subseteq G_{j(t(y))}$.

Sea $\phi : \pi(\mathbf{Y}, T) \to G$ el morfismo definido por las inclusiones $Y_v \hookrightarrow G$ y por $\phi(g_y) := \gamma_y$. Y sea $\psi : \widetilde{X}(\mathbf{Y}, T) \to X$ definida como

$$\psi(g\widetilde{x}) := \phi(g) j(x), \text{ y}$$
$$\psi(g\widetilde{y}) := \phi(g) j^*(y).$$

Sea W la subgráfica más pequeña de X que contiene a las aristas $j^*(y)$, con $y \in \mathrm{arist}(Y)$. Cada arista de W tiene un extremo en $j[T]$ ya que $j[T] \subseteq W$ y T es generador, y a su vez $G \cdot W = X$. Más aún, de la definición de ψ tenemos que $W \subseteq \psi[\widetilde{X}]$, y de la definición de ϕ se sigue que este induce isomorfismos entre los estabilizadores de los vértices y aristas de $\widetilde{X}$ y X. Gracias al Lema 2.34 aseguramos que ϕ es sobreyectiva, y por tanto también ψ. Dado que ϕ induce isomorfismos entre los estabilizadores de vértices y aristas de $\widetilde{X}$ y X se tiene que ψ es localmente inyectiva (i.e. inyectiva en aristas con un origen dado).

Lema 2.36. *Sea $f : X \to T$ un morfismo de gráficas localmente inyectivo con X conexa y T un árbol. Entonces f es inyectiva.*

Demostración. Sean $v, u \in \mathrm{vert}(X)$ tales que $f(v) = f(u)$.

Supongamos que $v \neq u$. Dado que X es conexa, existe un camino no trivial que conecta a v y u, llamémoslo

$$v = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = u.$$

Dado que $f(v) = f(u)$ y T es un árbol, existe un $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que $f(u_{m-1}) = f(u_m)$. Como u_{m-1} y u_m son adyacente, y f es localmente inyectiva se sigue que $f(u_{m-1}) \neq f(u_m)$, lo cual contradice lo dicho arriba.

Por lo tanto $v = u$. □

Teorema 2.37. *Con las hipótesis y notación utilizadas arriba, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *X es un árbol.*

2. *$\psi : \widetilde{X} \to X$ es un isomorfismo de gráficas.*

3. *$\phi : \pi(\mathbf{Y}, T) \to G$ es un isomorfismo de grupos.*

El Teorema 2.35 se sigue de la implicación (1) ⇒ (3).

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) se sigue del Lema 2.36 ya que ψ es sobreyectivo y localmente inyectivo.

La implicación (2) $\Rightarrow$ (1) se obtiene como consecuencia del Teorema 2.30.

Ahora veamos la implicación (2) $\Rightarrow$ (3). Sea $n \in$ Núc(ϕ). Sea $\widetilde{x} \in \mathrm{vert}(\widetilde{X})$, así pues $\psi(n\widetilde{x}) = \phi(n)j(x) = j(x)$, y por otro lado $\psi(\widetilde{x}) = j(x)$. Como ψ es isomorfismo se sigue que $n\widetilde{x} = \widetilde{x}$, por lo que $n \in G_{\widetilde{x}}$. Dado que ϕ restringido a $G_{\widetilde{x}}$ es un isomorfismo obtenemos que Núc$(\phi) \cap G_{\widetilde{x}} = \{1\}$. Por lo tanto $n = 1$, y así ϕ es isomorfismo.

La implicación (3) $\Rightarrow$ (2) se sigue de la definición de ψ. □

2.6. Resultado principal

Antes de iniciar cabe hacer mención de que la ***torsión*** de un grupo es el conjunto de los elementos de orden finito. Habiendo dicho esto, el objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.38. *Sea* $\mathbf{Y}$ *una gráfica de grupos con las siguientes propiedades:*

1. *La gráfica Y es finita.*

2. *Para cada $x \in \mathrm{vert}(Y)$ el grupo Y_x asociado con x es finito.*

Sean T un árbol maximal de Y y $G := \pi_1(\mathbf{Y}, T)$ el grupo fundamental de Y en T. Entonces:

a. *G es finitamente generado.*

b. *Todo subgrupo libre de torsión de G es libre.*

c. *G tiene un subgrupo libre de torsión de índice finito.*

A continuación seguiremos trabajando con las hipótesis y notación del Teorema anterior.

Lema 2.39. *Sea H un subgrupo de G. Supongamos que $H \cap gY_xg^{-1} = \{\varepsilon\}$ para todo $x \in \mathrm{vert}(Y)$ y para todo $g \in G$. Entonces H es un grupo libre.*

Demostración. Consideremos el árbol $\widetilde{X}(\mathbf{Y}, T)$, con T un árbol maximal de Y. Entonces G actúa en $\widetilde{X}$, de modo que H actúa en $\widetilde{X}$. Si $h \in H$ es tal que para una arista $g\pi_{\widetilde{y}} \in \mathrm{arist}(\widetilde{X})$ se tiene que $hg\pi_{\widetilde{y}} = g\pi_{\widetilde{y}}$, entonces $g^{-1}hg \in \pi_{\widetilde{y}} = Y_w^w \subseteq Y_{t(w)}$, donde $w = \overline{|y|}$. Digamos que $g^{-1}hg = a \in Y_{t(w)}$, de esto tenemos que $h = gag^{-1}$, por hipótesis se sigue que $h = \varepsilon$. En conclusión H actúa libremente en el árbol $\widetilde{X}$.

Ahora lo que haremos será construir una gráfica simple A a partir de la gráfica de Serre $\widetilde{X}$, en la que actúe libremente el grupo H, pues por el Teorema 1.50 esto implica que H es un grupo libre. Definamos a la gráfica simple A como

$$\operatorname{vert}(A) := \operatorname{vert}(\widetilde{X}),$$
$$\operatorname{arist}(A) := \{\ \{o(y), t(y)\} \mid y \in \operatorname{arist}(\widetilde{X})\}.$$

Notemos que las aristas de A en efecto son conjuntos de cardinalidad 2, ya que $\widetilde{X}$ no tiene ciclos (Teorema 2.30). Como todo camino en A está inducido por un camino en $\widetilde{X}$, y $\widetilde{X}$ es un árbol, por la Proposición 1.29 se sigue que A es un árbol. Es claro que H actúa libremente en A. □

Como Y es una gráfica finita, y cada Y_x es finito, con $x \in \operatorname{vert}(Y)$, entonces podemos elegir a un $n \in \mathbb{N}$ que sea múltiplo de los ordenes de los Y_x's. Sea E un conjunto finito de n elementos. Si F es un grupo finito, diremos que un morfismo $f : F \to \operatorname{Sim}(E)$ es *regular* si la $F-$acción en E que determina es una acción libre. Continuaremos suponiendo que E es finito.

Lema 2.40. *Supongamos que el orden de F divide a n. Entonces:*

1. *Existe un morfismo regular $f : F \to \operatorname{Sim}(E)$, el cual es único salvo conjugación por un elemento de $\operatorname{Sim}(E)$.*

2. *Si F' es un subgrupo de F, cada morfismo regular de F' en $\operatorname{Sim}(E)$ se extiende a un morfismo regular de F en $\operatorname{Sim}(E)$.*

3. *Si F' y F'' son dos subgrupos de F, y ϕ es un isomorfismo de F' en F'', entonces para cualquier morfismo regular $f : F \to \operatorname{Sim}(E)$ existe un $s \in \operatorname{Sim}(E)$ tal que $f(\phi(x)) = s \cdot f(x) \cdot s^{-1}$, para cada $x \in F'$.*

Demostración. 1. Sea $m := \frac{n}{|F|}$. Consideremos al conjunto $C := \bigsqcup_{i=1}^{m} F_i$ donde cada F_i es una copia de F. Entonces F actúa libremente en C mediante

$$\begin{array}{ccc} F \times C & \longrightarrow & C \\ (x, c) & \longmapsto & xc \end{array}$$

De manera que el morfismo inducido es regular. Y como C está es correspondencia uno a uno con E, existe un morfismo $f : F \to \operatorname{Sim}(E)$ regular.

Ahora veamos que este morfismo es único salvo conjugación de un elemento de $\operatorname{Sim}(E)$. Sea $g : F \to \operatorname{Sim}(E)$ un morfismo regular. Denotaremos por $\cdot_f$ y $\cdot_g$ a la acción de F en E inducida por f y g, respectivamente. Sean

$$F \cdot_f a_1, \quad F \cdot_f a_2, \quad \ldots, \quad F \cdot_f a_k$$

las órbitas de la acción f. Como la acción es libre, entonces $|F \cdot_f a_i| = |F|$, de modo que

$$n = |E| = \sum_{i=1}^{k} |F \cdot_f a_i| = k|F|$$

lo que implica que $k = m$. En conclusión, la acción f induce m órbitas en E. De la misma manera podemos ver que g induce m órbitas en E, digamos

$$F \cdot_g b_1, \quad F \cdot_g b_2, \quad \ldots, \quad F \cdot_g b_m$$

Como la órbitas de la acción f forman una partición del conjunto E y la acción $\cdot_f$ es libre podemos definir la función

$$\begin{array}{rccc} s: & E & \longrightarrow & E \\ & x \cdot_f a_i & \longmapsto & x \cdot_g b_i \end{array}$$

con $x \in F$. Esta función es biyectiva pues su función inversa es justamente

$$\begin{array}{rccc} t: & E & \longrightarrow & E \\ & x \cdot_g b_i & \longmapsto & x \cdot_f a_i \end{array}$$

que de igual manera, se puede definir así pues las órbitas de la acción g en E forman una partición y la acción $\cdot_g$ es libre. Así $s \in \mathrm{Sim}(E)$.
Sea $z \in F$. Entonces

$$\begin{aligned} (s^{-1} \circ g(z) \circ s)(x \cdot_f a_i) &= (s^{-1} \circ g(z))(x \cdot_g b_i) \\ &= s^{-1}(z \cdot_g (x \cdot_g b_i)) \\ &= s^{-1}(zx \cdot_g b_i) \\ &= zx \cdot_f a_i \\ &= f(z)(x \cdot_f a_i) \end{aligned}$$

de modo que $f(z) = s^{-1} \circ g(z) \circ s$ para cualquier $z \in F$.

2. Sea $f_0 : F' \to \mathrm{Sim}(E)$ un morfismo regular. El morfismo regular $f : F \to \mathrm{Sim}(E)$, dado por el inciso anterior, cumple que $f \downharpoonleft_{F'}$ es un morfismo regular de F' en $\mathrm{Sim}(E)$. Nuevamente por el inciso anterior, tenemos que existe $s \in \mathrm{Sim}(E)$ tal que para todo $z \in F'$, $f_0(z) = s \circ f \downharpoonleft_{F'} (z) \circ s^{-1}$. Con esto podemos considerar al morfismo regular $f_0^*(z) := s \circ f(z) \circ s^{-1}$ de F en $\mathrm{Sim}(E)$, el cual extiende a f_0.

3. Notemos que $f \circ \phi : F' \to \mathrm{Sim}(E)$ es un morfismo regular. También $f \downharpoonleft_{F'}: F' \to \mathrm{Sim}(E)$ es un morfismo regular. Por el inciso 1, tenemos que existe $s \in \mathrm{Sim}(E)$ tal que $f \circ \phi(x) = s \circ f \downharpoonleft_{F'} (x) \circ s^{-1} = s \circ f(x) \circ s^{-1}$ para toda $x \in F'$.

$\square$

Lema 2.41. *Existe un morfismo $\overline{\varphi} : G \to \mathrm{Sim}(E)$ tal que la restricción a cada Y_x, con $x \in \mathrm{vert}(Y)$, es un morfismo regular.*

Demostración. Para definir al morfismo $\overline{\varphi}$ utilizaremos el hecho de que el grupo G tiene una presentación dada por la Proposición 2.25, y gracias a la Proposición 2.5 basta con definir una función φ en cada Y_x ($x \in \operatorname{vert}(Y)$) y en cada $y \in \operatorname{arist}(Y)$ tal que

$$\varphi^*(yay^{-1}) = \varphi^*(a^{\overline{y}}) \text{ con } y \in \operatorname{arist}(y),\ a \in Y_y$$

$$\varphi^*(y) = id_E \text{ con } y \in \operatorname{arist}(T)$$

Primero definiremos a la función φ en Y_x con $x \in \operatorname{vert}(T)$ y las aristas de T. Para esto, sea $x_0 \in \operatorname{vert}(T)$ fijo. Como el orden de E es múltiplo del orden del grupo Y_x, entonces por el Lema 2.40(1) existe $f_{x_0} : Y_{x_0} \to \operatorname{Sim}(E)$ morfismo regular.

Ahora bien, sea $x_1 \in \operatorname{vert}(T)$ otro vértice distinto a x_0 y adyacente a este en el árbol T. Supongamos (sin perdida de generalidad) que la arista $y \in \operatorname{arist}(T)$ tiene como origen y termino a los vértices x_0 y x_1, respectivamente. Con esto tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
& Y_y^y \arrow[r, hook] & Y_{t(y)} & \\
Y_y \arrow[ur, tail, two heads] \arrow[dr, tail, two heads] & & & \operatorname{Sim}(E) \\
& Y_y^{\overline{y}} \arrow[r, hook] & Y_{o(y)} \arrow[ur, tail, "f_{x_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $Y_y^y \cong Y_y^{\overline{y}}$ vía el isomorfismo Φ dado por $a^y \mapsto a^{\overline{y}}$, tenemos

$$\begin{tikzcd}
& Y_y^y \arrow[r, hook] \arrow[dd, tail, two heads, "\Phi"] & Y_{t(y)} & \\
Y_y \arrow[ur, tail, two heads] \arrow[dr, tail, two heads] & & & \operatorname{Sim}(E) \\
& Y_y^{\overline{y}} \arrow[r, hook] & Y_{o(y)} \arrow[ur, tail, "f_{x_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

de manera que podemos definir la función $f : Y_y^y \to \operatorname{Sim}(E)$ como $f := f_{x_0} \circ \Phi$, la cual es un morfismo regular. Por el Lema 2.40(2) podemos extenderlo a un morfismo regular $f_{x_1} : Y_{x_1} \to \operatorname{Sim}(E)$, que por construcción cumple que

$$f_{x_1}(a^y) = f_{x_0}(a^{\overline{y}}) \text{ para } a \in Y_y$$

Hecho esto continuamos con otro vértice $x_2 \in \operatorname{vert}(T)$ distinto a x_0 y x_1, y adyacente a alguno de esto. Supongamos (sin perdida de generalidad) que x_2 es adyacente a x_1 y que la arista $y \in \operatorname{arist}(T)$ tiene como origen y termino a x_1 y x_2, respectivamente. Haciendo un proceso similar al hecho arriba tenemos que existe $f_{x_2} : Y_{x_2} \to \operatorname{Sim}(E)$ morfismo regular tal que

$$f_{x_2}(a^y) = f_{x_1}(a^{\overline{y}}) \text{ para } a \in Y_y$$

Dado que $\mathrm{vert}(T) = \mathrm{vert}(Y)$ y Y es una gráfica finita, mediante un argumento inductivo construimos morfismos regulares para cada Y_x ($x \in \mathrm{vert}(Y)$), que cumplen

$$f_{t(y)}(a^y) = f_{o(y)}(a^{\overline{y}}) \text{ para } a \in Y_y$$

Entonces la función φ la definimos en cada Y_x como el respectivo morfismo regular f_x (i.e. $\varphi(a) := f_x(a)$, $a \in Y_x$). Y en cada $y \in \mathrm{arist}(T)$ como $\varphi(y) := id_E$.
Resta definir a la función φ en las aristas $y \notin \mathrm{arist}(T)$. Sea $y \in \mathrm{arist}(Y)$ una arista que no pertenezca a T. Tenemos que

$$\begin{tikzcd}
 & Y_y^y \arrow[r, hook] \arrow[dd, tail, two heads, "\Phi"] & Y_{t(y)} \arrow[dr, tail, "f_{t(y)}"] & \\
Y_y \arrow[ur, tail] \arrow[dr, tail] & & & \mathrm{Sim}(E) \\
 & Y_y^{\overline{y}} \arrow[r, hook] & Y_{o(y)} \arrow[ur, tail, "f_{o(y)}"'] &
\end{tikzcd}$$

en particular $f_{t(y)} \restriction_{Y_y^y}$ y $f_{o(y)} \restriction_{Y_y^{\overline{y}}} \circ \Phi$ son morfismo regulares de Y_y^y en $\mathrm{Sim}(E)$. Por la unicidad dada por el Lema 2.40(1), existe $s_y \in \mathrm{Sim}(E)$ tal que

$$s_y \circ f_{t(y)}(a^y) \circ s_y^{-1} = f_{o(y)}(a^{\overline{y}}) \text{ para } a \in Y_y$$

Con esto definimos a $\varphi(y) := s_y$.
Por tanto, si $y \in \mathrm{arist}(Y)$ y $a \in Y_y$

$$\begin{aligned}
\varphi^*(ya^yy^{-1}) &= \varphi^*(y) \circ \varphi^*(a^y) \circ \varphi^*(y)^{-1} \\
&= s_y \circ f_{t(y)}(a^y) \circ s_y^{-1} \\
&= f_{o(y)}(a^{\overline{y}}) \\
&= \varphi^*(a^{\overline{y}})
\end{aligned}$$

y si $y \in \mathrm{arist}(T)$, entonces $\varphi^*(y) = id_E$.
Por lo tanto existe el morfismo $\overline{\varphi} : G \to \mathrm{Sim}(E)$ deseado.

□

Demostración del Teorema 2.38. *a.* Por como se eligió a la gráfica de grupos $\mathbf{Y}$, el grupo G es finitamente presentado y por tanto es finitamente generado.

b. Sean H un subgrupo libre de torsión, y $gag^{-1} \in H \cap gY_xg^{-1}$, con $x \in \mathrm{vert}(Y)$. Como $a \in Y_x$ y Y_x es finito, entonces a es de orden finito, digamos k. De manera que $(gag^{-1})^k = ga^kg^{-1} = \varepsilon$, y como H es libre de torsión $gag^{-1} = \varepsilon$, de modo que $a = \varepsilon$. Por el Lema 2.39, H es libre.

c. Consideremos a H como el núcleo del morfismo $\overline{\varphi}$ dado por el Lema 2.41. Como el orden de E es finito, entonces el orden del conjunto $\mathrm{Sim}(E)$ es finito, a saber $n!$, y por el *Primer Teorema de Isomorfismo* tenemos que $G/H \cong Im(\overline{\varphi}) \subseteq \mathrm{Sim}(E)$, lo que implica que G/H es finito y en particular H es de índice finito en G. Como la restricción de $\overline{\varphi}$ a cada Y_x ($x \in \mathrm{vert}(Y)$) es regular, implica que es inyectiva, de manera que $H \cap Y_x = \{1\}$. Ahora si H contiene a un elemento conjugado de algún grupo Y_x, digamos gag^{-1} con $a \in Y_x$, entonces

$$\begin{aligned} gag^{-1} = h \in H &\Rightarrow a = g^{-1}hg \in g^{-1}Hg \subseteq H \\ &\Rightarrow a \in Y_x \cap H = \{1\} \\ &\Rightarrow a = \varepsilon \end{aligned}$$

Así $h = \varepsilon$. De modo que $H \cap gY_xg^{-1} = \{\varepsilon\}$ para todo $x \in \mathrm{vert}(Y)$ y para todo $g \in G$. Por el Lema 2.39, H es libre y en particular libre de torsión.

□

Corolario 2.42. *El grupo G es virtualmente libre.*

A. Karras, A. Pietrowsky y D. Solitar (*J. Australian Math. Soc., 1973*, [KPS73]) probaron el reciproco de este corolario, es decir un grupo G virtualmente libre es el grupo fundamental de una gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ tal que Y es finita y cada grupo vértice también. Sin embargo, la prueba de esto se sale de los propósitos de este escrito, así que sólo lo mencionamos y lo ocuparemos en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.43. *Un grupo G es virtualmente libre si y sólo si actúa sin inversiones en un árbol T con estabilizadores finitos y tal que G/T es finito. Más aún $T \cong \widetilde{X}$.*

Demostración. $\Longleftarrow$) Como G actúa sin inversiones en un árbol T por el Teorema 2.35 se sigue que G es el grupo fundamental de una gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ donde $Y = G/T$, el cual estamos suponiendo que es finito, y cada grupo vértice $Y_x := G_{j(x)}$, con $x \in \mathrm{vert}(Y)$, es finito ya que por hipótesis los estabilizadores son finitos. Ahora, por el Teorema 2.38 el grupo fundamental de la gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ es virtualmente libre, es decir G lo es. Gracias al Teorema 2.37 tenemos que $T \cong \widetilde{X}(\mathbf{Y}, T_0)$, donde T_0 es un árbol maximal de G/T.

$\Longrightarrow$) Como G es virtualmente libre, este es el grupo fundamental de una gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ tal que Y es finita y cada grupo vértice también es finito. Con esto G actúa sin inversiones en el árbol de bass-serre $\widetilde{X}(\mathbf{Y}, T_0)$, donde T_0 es un árbol maximal de Y. Cuyos estabilizadores son precisamente Y_x, los cuales son finitos, y además $G/\widetilde{X} \cong Y$ que igual es finito.

□

2.7. Un par de ejemplos

Ejemplo 2.44. *Consideremos la gráfica de grupos* $\mathbf{Y}$ *dada por*

$$\overset{u}{\bullet} \xrightarrow[y]{} \overset{v}{\bullet}$$

donde $Y_u := \mathbb{Z}_2 = \langle a \mid a^2 \rangle$ *y* $Y_v := \mathbb{Z}_2 = \langle b \mid b^2 \rangle$, *y* $Y_y = Y_{\overline{y}} := \{1\}$. *Por el Ejemplo 2.29 obtenemos que* $\pi_1(\mathbf{Y}, Y) =: \pi$ *es justamente*

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle.$$

Notemos que en la presentación anterior se cumple que $a = a^{-1}$ *y* $b = b^{-1}$. *De esta manera, un elemento de* $\pi_1(\mathbf{Y}, Y) =: \pi$ *es una palabra que puede ser de la forma*

1. $\varepsilon :=$ *palabra vacía.*
2. $abab \dots ba$ *(comienza en* a *y termina en* a*)*
3. $abab \dots ab$ *(comienza en* a *y termina en* b*)*
4. $baba \dots ab$ *(comienza en* b *y termina en* b*)*
5. $baba \dots ba$ *(comienza en* b *y termina en* a*)*

Primero calculemos su Árbol de Serre $\widetilde{X}$. *Por construcción tenemos que*

$$\mathrm{vert}(\widetilde{X}) = \pi/Y_u \bigsqcup \pi/Y_v$$

Las clases laterales izquierdas en π/Y_u *admiten un único representante cuyo último término es* b *(es decir palabras del tipo 3 y 4). Dado* $gY_u \in \pi/Y_u$, *tenemos que* $gY_u = \{g\varepsilon, ga\} = \{g, ga\}$, *de esto último es fácil ver que solamente uno y sólo uno de los elementos* g *y* ga *tiene como último término* b.

Con esto tenemos que las clases laterales izquierdas π/Y_u *son de la siguiente manera*

$$\pi/Y_u = \{Y_u\,, bY_u\,, abY_u\,, babY_u\,, ababY_u\,, \dots\}$$

De manera similar podemos ver que los elementos de π/Y_v *tienen un único representante a palabras cuyo último término es* a.

$$\pi/Y_v = \{Y_v\,, aY_v\,, baY_v\,, abaY_v\,, babaY_v\,, \dots\}$$

Y finalmente $\mathrm{arist}(\widetilde{X}) = \pi/Y_y = \pi/\{1\} \cong \pi$. *Y dado que* Y *es el único árbol maximal tenemos que* $g_y = 1$ *para* $y \in \mathrm{arist}(Y)$. *De modo que las aristas en* $\widetilde{X}$ *son justamente los elementos de* π.

Con todo esto obtenemos que, dada una arista p *en* $\widetilde{X}$, *su* $o(p)$ *es* qY_u *donde* q *resulta ser*

- *si* $p = \varepsilon$, $q = \varepsilon$.
- *si* p *no termina en* a, $q = p$.
- *si* p *términa en* a, q *es* p *sin su último termino.*

y su $t(p)$ *es* rY_v *donde* r *resulta ser*

- *si* $p = \varepsilon$, $r = \varepsilon$.
- *si* p *no termina en* b, $q = p$.
- *si* p *termina en* b, r *es* p *sin su último término.*

Por lo tanto $\widetilde{X}$ *se puede ver como*

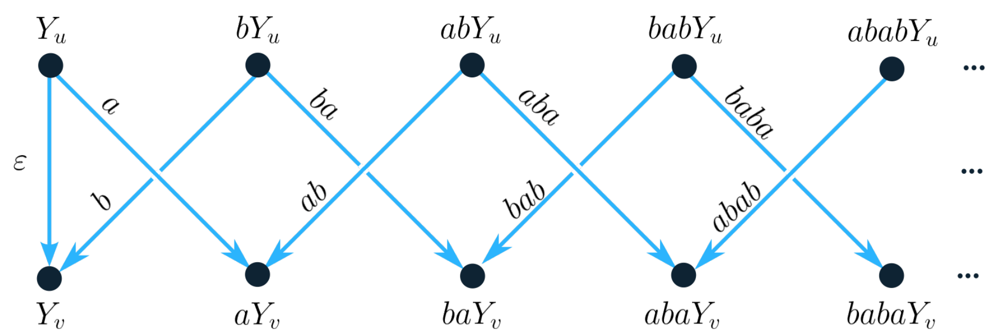


Figura 2.6: Diagrama de $\widetilde{X}$

Ahora bien, por el Teorema 2.38, π *tiene un subgrupo libre de torsión de índice finito. En este caso podemos decir explícitamente qué subgrupo es. Consideremos al subgrupo* $H := \langle ab \rangle$ *en* π. *Veamos que en efecto este subgrupo cumple todo lo establecido.*

Primeramente notemos que H *es un grupo cíclico infinito, de manera que* $H \cong \mathbb{Z}$, *así* H *es libre de torsión.*

Por otro lado, las clases laterales izquierdas de palabras del tipo 1, 3 y 5 son representantes de la misma clase, a saber H, *ya que*

- $\varepsilon \in H$.
- $ab \dots ab = (ab)^k \in H$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$.
- $ba \dots ba = (ab)^{-k} \in H$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$.

Y por otro lado las palabras del tipo 2 y 4 pertenecen a la clase de a *ya que*

- $ab \dots baH = aH \iff (a)^{-1}ab \dots ba \in H \iff b \dots ba \in H$.

- $ba \dots abH = aH \iff (a)^{-1}ba \dots ab \in H \iff aba \dots ab \in H$.

Por tanto el índice de H *en* π *es* 2.

Una manera de describir la acción de π *en este árbol es la siguiente: primero analizamos como actúan los elementos* a *y* b *de* π *en el árbol, y luego cada elemento de* π*, que es una palabra formada por* a *y* b.

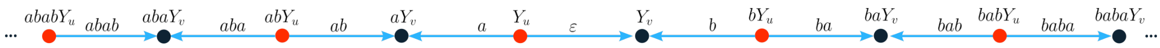


Figura 2.7: Árbol $\widetilde{X}$

Comencemos con ver como actúa a *en el árbol. Recordemos que* a *tiene orden 2.*

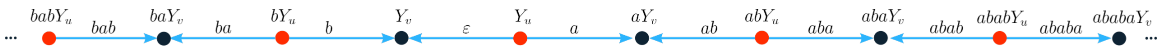


Figura 2.8: Acción de a en $\widetilde{X}$

Esto lo podemos interpretar como que el elemento a *refleja el árbol con respecto al vértice* Y_u.

Ahora pasemos a ver como actúa el elemento b.

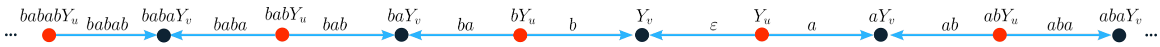
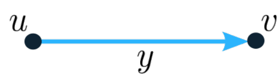


Figura 2.9: Acción de b en $\widetilde{X}$

De igual manera, podemos interpretar esto como que el elemento b *refleja el árbol con respecto al vértice* Y_v.

Y entonces, cualquier elemento de π*, que es una palabra de* a *y* b*, actúa como una sucesión alternada de las dos acciones anteriores. Por ejemplo, el elemento* $baba \in \pi$ *primero refleja al árbol con respecto al vértice* Y_u*, pues así actúa* a*, después lo hace con respecto al vértice* Y_v*, continua con hacerlo con respecto* Y_u *y finaliza con reflejar el árbol respecto a* Y_v.

Ejemplo 2.45. *Sea* $\mathbf{Y}$ *la siguiente gráfica de grupos*



donde $Y_u = \mathbb{Z}_2 = \langle a \mid a^2 \rangle$, $Y_v = \mathbb{Z}_3 = \langle b \mid b^3 \rangle$*, y* $Y_y = \{1\}$*. Por el Ejemplo 2.29 se sigue que* $\pi := \pi(\mathbf{Y}, Y) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$*. De esto obtenemos que* $\widetilde{X}$ *tiene como vértices y aristas a los conjuntos* $\pi/\mathbb{Z}_2 \sqcup \pi/\mathbb{Z}_3$ *y* π*, respectivamente.*

Comencemos por analizar al vértice $\mathbb{Z}_2 \in \mathrm{vert}(\widetilde{X})$.

Para que una arista $g \in \operatorname{arist}(\widetilde{X})$ *tenga como extremo al vértice* $\mathbb{Z}_2$ *debe de suceder que* $g\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$. *Esto sólo se cumple cuando* $g = \varepsilon$ *ó* $g = a$.

En el caso $g = \varepsilon$ *sus extremos son* $o(\varepsilon) = \mathbb{Z}_2$ *y* $t(\varepsilon) = \mathbb{Z}_3$.

Figura 2.10: Caso $g = \varepsilon$ para vértice $\mathbb{Z}_2$

Y en el caso $g = a$ *sus extremos son* $o(a) = a\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$ *y* $t(a) = a\mathbb{Z}_3$.

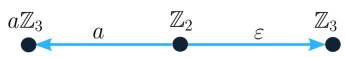


Figura 2.11: Caso $g = a$ para vértice $\mathbb{Z}_2$

Con esto aseguramos que el vértice $\mathbb{Z}_2$ *tiene únicamente dos vecinos de la forma* $h_1\mathbb{Z}_3$ *y* $h_2\mathbb{Z}_3$, *para algunos* $h_1, h_2 \in \pi$.

Ahora analicemos al vértice $\mathbb{Z}_3 \in \operatorname{vert}(\widetilde{X})$. *Para que una arista* $g \in \operatorname{arist}(\widetilde{X})$ *tenga como extremo a* $\mathbb{Z}_3$ *debe de cumplir que* $g\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3$, *así* $g = \varepsilon, g = b$ *ó* $g = b^2$.

El caso $g = \varepsilon$ *ya lo revisamos. El caso* $g = b$ *sus extremos son* $o(b) = b\mathbb{Z}_2$ *y* $t(b) = b\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3$.

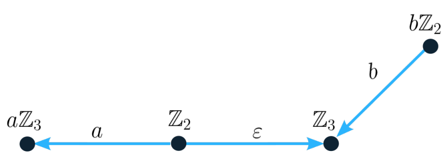


Figura 2.12: Caso $g = b$ para vértice $\mathbb{Z}_3$

Por último, el caso $g = b^2$ *sus extremos son* $o(b) = b^2\mathbb{Z}_2$ *y* $t(b) = b^2\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3$.

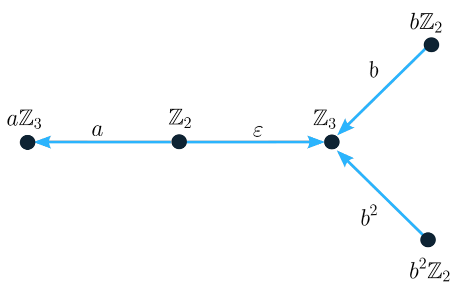


Figura 2.13: Caso $g = b^2$ para vértice $\mathbb{Z}_3$

Con esto aseguramos que el vértice $\mathbb{Z}_3$ *tiene únicamente tres vecinos de la forma* $h_1\mathbb{Z}_2$, $h_2\mathbb{Z}_2$, *y* $h_3\mathbb{Z}_2$, *para algunos* $h_1, h_2, h_3 \in \pi$.

Recordemos que el grupo π actúa en la gráfica $\widetilde{X}$, digamos mediante $\bullet$. Entonces para cualquier vértice $g\mathbb{Z}_2 \in \mathrm{vert}(\widetilde{X})$ se tiene que $g^{-1} \bullet g\mathbb{Z}_2 = (g^{-1}g)\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$, es decir cualquier vértice de la forma $g\mathbb{Z}_2 \in \mathrm{vert}(\widetilde{X})$ se puede ver como como el vértice $\mathbb{Z}_2$, con lo que $g\mathbb{Z}_2$ sólo tiene dos vecinos de la forma $h_1\mathbb{Z}_3$ y $h_2\mathbb{Z}_3$. Mediante un argumento similar, tenemos que cualquier vértice $g\mathbb{Z}_3 \in \mathrm{vert}(\widetilde{X})$ sólo tiene vecinos de la forma $h_1\mathbb{Z}_2$, $h_2\mathbb{Z}_2$, y $h_3\mathbb{Z}_2$.

En conclusión podemos visualizar a la gráfica $\widetilde{X}$ como

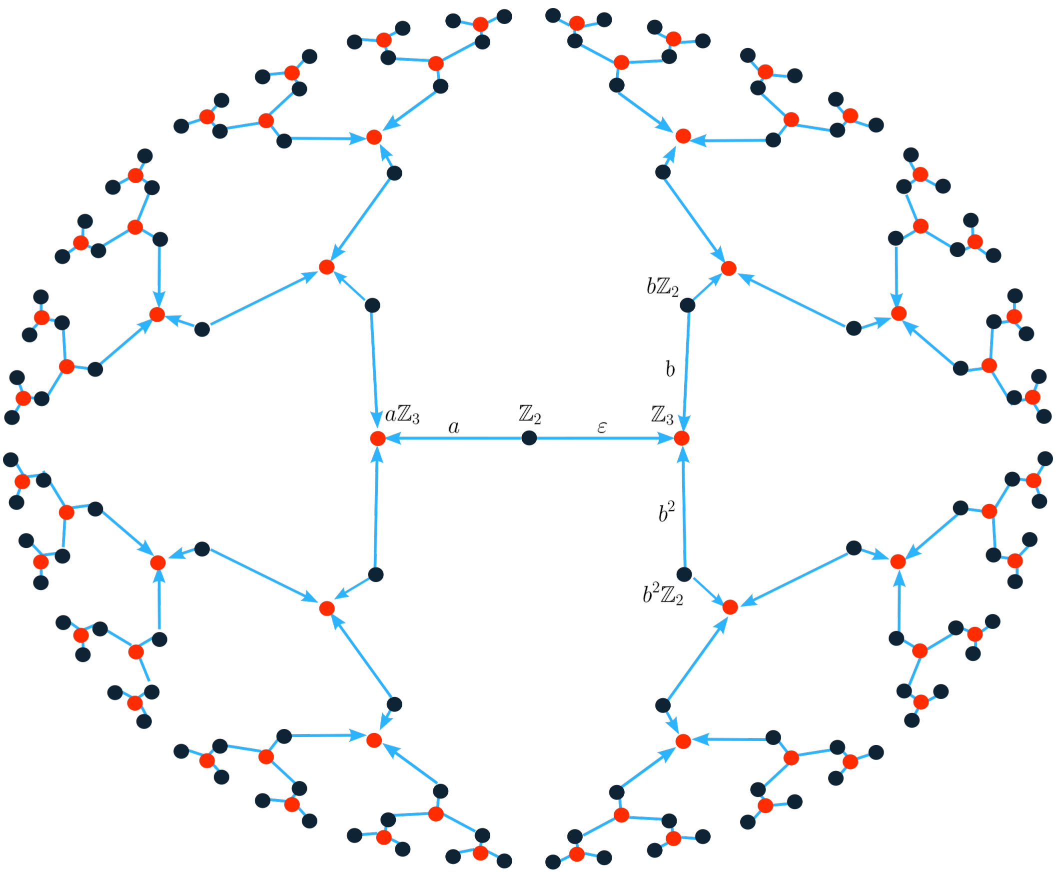


Figura 2.14: Árbol $\widetilde{X}$

donde los vértices rojos corresponden a los vértices que están en la órbita de $\mathbb{Z}_3$ y los oscuros son los vértices que perteneces a la órbita del vértice $\mathbb{Z}_2$.

Por último describamos la acción de π en la gráfica $\widetilde{X}$, para esto procederemos de manera análoga a como lo hicimos en el ejemplo anterior, primero analizaremos como actúan los elementos a, b y b^2, para luego analizar como actúa cualquier elemento de π. Esto lo haremos tomando en cuenta sólo la siguiente parte de la gráfica $\widetilde{X}$.

El elemento a actúa cómo se ve en la figura 2.16. Con esto tenemos que los que hace este elemento al actuar es reflejar la gráfica $\widetilde{X}$ con respecto al vértice $\mathbb{Z}_2$.

El elemento b actúa cómo se ve en la figura 2.17. Esto lo podemos interpretar como que b rota en sentido antihorario a la gráfica $\widetilde{X}$ con respecto al vértice $\mathbb{Z}_3$.

El elemento b^2 actúa cómo se ve en la figura 2.18. Esto lo podemos interpretar como

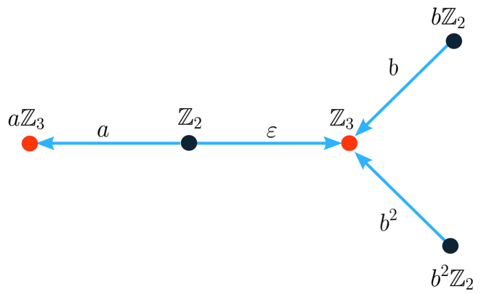


Figura 2.15: Parte del árbol $\widetilde{X}$

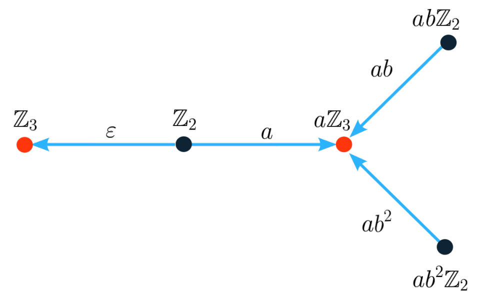


Figura 2.16: Árbol bajo la acción del elemento a

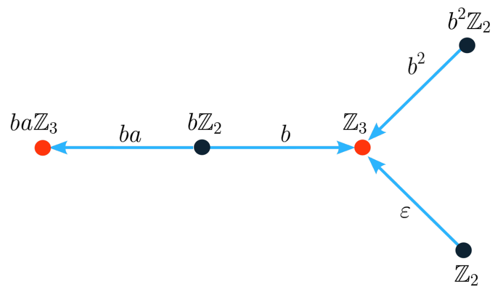


Figura 2.17: Árbol bajo la acción del elemento b

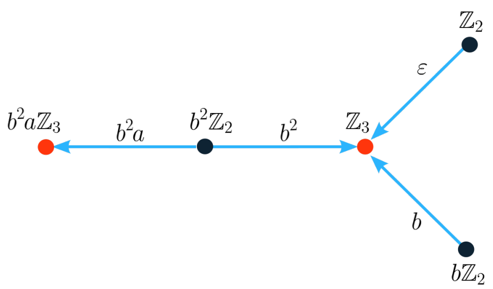


Figura 2.18: Árbol bajo la acción del elemento b^2

que b^2 rota en sentido horario a la gráfica $\widetilde{X}$ con respecto al vértice $\widetilde{X}$.

Un elemento arbitrario de π, que es una palabra formada por a, b y b^2, actúa como una sucesión alternada de las acciones anteriores tomando en cuenta su último término. Por ejemplo, el elemento $b^2ab \in \pi$ actúa primero aplicando la acción de b en $\widetilde{X}$ que es rotar sentido antihorario con respecto al vértice $\mathbb{Z}_3$, depués la acción de a en $\widetilde{X}$ que es reflejar con respecto el vértice $\mathbb{Z}_2$ y finaliza con la acción de b^2 en $\widetilde{X}$ que es rotar en sentido horario *con respecto el vértice* $\mathbb{Z}_3$.

Capítulo 3

Noción de dimensión en grupos

Para este último capítulo introducimos un par de nociones de dimensión para grupos. Para ello nos apoyamos de [BLN01] y también mencionamos algunas definiciones de topología para poder definir espacio clasificante.

3.1. Complejos-CW

Definición 3.1 (Suma de espacios topológicos)**.** *Sea $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de espacios no vacíos y ajenos dos a dos. La* ***topología suma*** *de los X_i es el espacio $(\amalg X_i, \mathcal{O})$, donde*

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq \amalg X_i \mid U \cap X_i \text{ es abierto en } X_i \text{ para toda } i \in I\}$$

Definición 3.2 (Adjunción de espacios topológicos)**.** *Sean X y Y dos espacios topológicos, y sean A un subespacio de X y $f : A \to Y$ una función continua. Entonces* ***el espacio adjunto*** *es*

$$X \amalg_f Y := X \amalg Y/\sim$$

donde $X \amalg Y$ le asociamos la topología suma, y $\sim$ es la relación generada por: $a \sim f(a)$. Es decir las clases de equivalencia descritas por la relación $\sim$ son: $\{x\}$ para $x \in X\backslash A$ y $x \in Y\backslash f[A]$, y los subconjuntos $\{y\} \cup f^{-1}(y)$ para $y \in f[A]$.

Observación 3.3. *Es posible adjuntar varios subespacios de un espacio X, esto se hace como sigue: Sean X y Y dos espacios topológicos, y sean A_α una familia de subespacios de X y $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ una familia funciones continuas. Consideramos a la función*

$$\begin{array}{rccc} f: & \amalg_\alpha A_\alpha & \longrightarrow & Y \\ & x \in A_\alpha & \longmapsto & f_\alpha(x) \end{array}$$

Y aplicamos la definición anterior

Para la siguiente definición tengamos presente que el ***n-disco*** es $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ y que la ***n-esfera*** es $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, cumplen que $S^{n-1} = \partial D^n \subseteq D^n$. Por definición, la ***n-célula*** es $e^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.

Definición 3.4 (Complejo CW)**.** *Un espacio X es un* ***complejo-CW*** *si se puede construir mediante el siguiente procedimiento:*

1. *Comenzamos con un espacio discreto X^0.*

2. *El* ***n-esqueleto*** *X^n lo obtenemos a partir del* ***(n-1)-esqueleto*** *X^{n-1} adjuntando $n-$células e^n_α vía funciones $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. Es decir*

$$X^n = X^{n-1} \amalg_\varphi (\amalg_\alpha D^n_\alpha)$$

   donde cada D^n_α es una copia ajena del $n-$disco, y φ se obtiene como en la observación 3.3.

3. *Si este proceso lo terminamos en un número finito de pasos, digamos m, entonces obtenemos $X = X^m$, y decimos que X es un complejo CW m-dimensional. De lo contrario obtenemos que $X = \bigcup_n X^n$. En este último caso a X lo dotamos de la topología coherente: Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto (cerrado) si y sólo si $A \cap X^n$ es abierto (cerrado) para cualquier n.*

Ejemplo 3.5. *Un ejemplo sencillo para complejo-CW es S^n. Veamos como es su construcción para el caso S^2.*

El 0-esqueleto está conformado solo por un punto. Luego pegamos los extremos D^1 a dicho punto. Por último agregamos dos D^2 pegando su frontera de ambos a X^1. Ver figura 3.1.

Otra manera de dotar a S^2 con estructura de complejo-CW es como sigue: el 0-esqueleto es un solo punto; Agregamos D^2 pegando su toda su frontera a X^0.

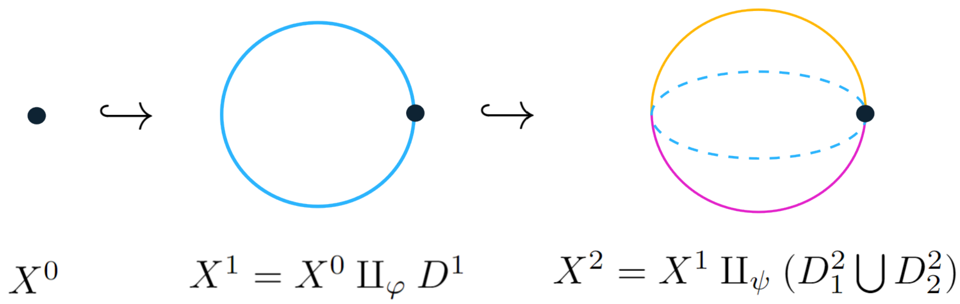


Figura 3.1: S^2 como ejemplo de complejo-CW

Continuemos con dar la idea de *homotopía*. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas entre espacios topológicos. Una ***homotopía*** entre las funciones f y g es una función continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que para cualquier $x \in X$, se cumple que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$. A su vez decimos que f es ***homotópica*** a g. La idea detrás de una homotopía es deformar continuamente un subespacio en otro. Lo que sigue es dar la misma idea pero fijando un subespacio.

Sea $F : X \times [0,1] \to Y$ una homotopía entre las funciones f y g, y sea $K \subseteq X$ un subespacio. Decimos que $F : X \times [0,1] \to Y$ es una ***homotopía relativa a K*** entre las funciones f y g, si para cualesquiera $x \in K$ y $t \in [0,1]$, se cumple que

$$F(x,t) = f(x) = g(x).$$

Esto nos ayuda a formalizar la idea de deformar continuamente un espacio en otro. El caso que nos interesa es cuando un espacio se puede *contraer* a un punto, ya que en particular los árboles son de este tipo es espacios.

Definición 3.6 (Contracción). *Sea X un espacio topológico. Una **contracción** de X es una homotopía F entre la función id_X y alguna función constante $g : X \to X$. A su vez decimos que X es **contraíble**.*

Definición 3.7 (Retracción). *Sea X un espacio topológico y $K \subseteq X$ un subespacio. Decimos que K es una **retracción** de X si existe una función continua $r : X \to K$ tal que $r \circ \iota = \mathrm{id}_K$, donde ι es la inclusión de K en X. A la función r le llamamos **retracción** de X a K.*

Retomando la idea de homotopía relativa, lo que nos interesa ahora es estabilizar al subespacio K a lo largo de la homotopía, es decir, que los puntos del subespacio K queden fijos a lo largo de la homotopía. Para ello nos servirá la definición de retracción.

Definición 3.8 (Retracto fuerte por deformación). *Sea X un espacio topológico y $K \subseteq X$ un subespacio. Decimos que K es una **retracto fuerte por deformación** de X si existe una retracción $r : X \to K$ y una homotopía $F : X \times [0,1] \to X$ relativa a K entre las funciones $\mathrm{id}_X : X \to X$ e $\iota \circ r : X \to X$, donde ι es la inclusión de K en X.*

Ahora, veremos un lema que nos ayudará a determinar cuando una función es continua en un espacio X a partir de verificar que sea continua en una familia de cerrados que cubran al espacio X.

Lema 3.9. *Sean X y Y espacios topológicos, $\{A_i\}_{i=1}^n$ una colección finita de cerrados de X, y $f : X \to Y$ una función. Si $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ y para cada A_i se cumple que $f \restriction_{A_i}$ es continua, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $C \subseteq Y$ cerrado. Como $f \restriction_{A_i}$ es continua, entonces $(f \restriction_{A_i})^{-1}[C]$ es cerrado en X. También es claro que $(f \restriction_{A_i})^{-1}[C] = f^{-1}[C] \cap A_i$, así $f^{-1}[C] \cap A_i$ es cerrado en X.

Ahora bien,

$$f^{-1}[C] = f^{-1}[C] \cap X = f^{-1}[C] \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}[C] \cap A_i)$$

Por tanto la imagen inversa de C bajo f es la unión finita de cerrados, lo que resulta ser un conjunto cerrado en X. $\square$

Lo que sigue es probar que si un complejo-CW Z es la unión numerable de complejos-CW $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que Z_{n-1} es un retracto fuerte por deformación, entonces se puede garantizar que Z_1 es un retracto fuerte por deformación de Z, es decir, se pueden concatenar las homotopías entre cada uno de los complejos-CW Z_n y Z_{n-1}.

Proposición 3.10. *Sea $Z = \bigcup_{n\geqslant 1} Z_n$ un complejo CW, donde cada Z_n es un subcomplejo de Z. Para cada $n > 1$, supongamos que Z_{n-1} es un retracto fuerte por deformación de Z_n, en particular $Z_{n-1} \subseteq Z_n$. Entonces Z_1 es un retracto fuerte por deformación de Z.*

Demostración. Sea $n \geqslant 2$. Por hipótesis tenemos que Z_{n-1} es un retracto fuerte por deformación de Z_n, es decir, existe un retracción $r^{(n)} : Z_n \to Z_{n-1}$ y una homotopía $\overline{F}^{(n)} : Z_n \times [0,1] \to Z_n$ entre las funciones id_{Z_n} y $i^{(n)} \circ r^{(n)}$. Componiendo $\overline{F}^{(n)}$ con la función $(id \times [n(n-1)t - n + 1]) : Z_n \times [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] \to Z_n \times [0,1]$, obtenemos a la función $F^{(n)} : Z_n \times [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] \to Z_n$ que cumple $F^{(n)}(x, \frac{1}{n}) = x$ y $F^{(n)}(x, \frac{1}{n-1}) = i^{(n)} \circ r^{(n)}(x) = r^{(n)}(x)$.
Definamos a la función $G^{(n)} : Z_n \times [0,1] \to Z_n$ como sigue

$$G^{(n)}(x,t) = \begin{cases} x & si \quad t \in [0, \frac{1}{n}] \\ F^{(n)}(x,t) & si \quad t \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] \\ F^{(n-1)} \circ (r^{(n)} \times id)(x,t) & si \quad t \in [\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}] \\ F^{(n-2)} \circ (r^{(n-1)} \times id) \circ (r^{(n)} \times id)(x,t) & si \quad t \in [\frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-3}] \\ \vdots & \\ F^{(2)} \circ (r^{(3)} \times id) \circ \cdots \circ (r^{(n)} \times id)(x,t) & si \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dado que $Z_n \times [0, \frac{1}{n}]$ cada $Z_n \times [\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]$ son un cerrado en $Z_n \times [0,1]$, y a su vez $G^{(n)}$ es continua en cada uno de esto, por el Lema 3.9 podemos asegurar que es continua en $Z_n \times [0,1]$. También es claro que $G^{(n)}$ es un retracto fuerte por deformación de Z_n en Z_1.

Por construcción, $G^{(n)}$ coincide con $G^{(n-1)}$ en $Z_{n-1} \times [0,1]$.

Con esto podemos definir a $G : Z \times [0,1] \to Z$ como $G^{(n)}$ en cada $Z_n \times [0,1]$. Además G es continua ya que dado un abierto $U \subseteq Z$, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $U \cap Z_n$ es abierto, de manera que $(G^{(n)})^{-1}[U \cap Z_n]$ es abierto, y como $G^{-1}[U] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G^{(n)})^{-1}[U \cap Z_n]$ se sigue que $G^{-1}[U]$ es abierto. Y es claro que G es una retracción por deformación fuerte de Z en Z_1.

$\square$

Para esta parte cabe mencionar que una gráfica simple puede pensarse como un complejo-CW de dimensión 1, y esto se hace como sigue: Dada una gráfica simple $\Gamma = (V, E)$, definimos a $X^0 := V$. Para cada arista $uv \in E$ consideramos una $1-$célula e^1_{uv} (segmentos de recta), y a X^1 lo definimos a partir de pegar cada e^1_{uv} mediante una función que identifique a sus extremos con los vértices u y v.

Lo que acabamos de hacer es una formalización que nos permite pensar a las gráficas simples como un *diagrama continuo*, justo como las habíamos representado anteriormente.

A su vez, de manera muy similar, podemos pensar a las gráficas de Serre como un complejo-CW.

Proposición 3.11. *Todo árbol es contraible.*

Demostración. Sea T un árbol.

Primero analizaremos el caso en el que T es finito, y procederemos por inducción sobre n, la cantidad de aristas de T. Si $n = 1$ ó $n = 2$, entonces T es homeomorfo al intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, y por tanto es contraible. Supongamos que todo árbol con n aristas es contraible y que T tiene $n + 1$ aristas. Sea e una arista de tal manera que uno de sus extremos tenga exactamente un vecino, digamos que los extremos de e son u y v, y que v es dicha hoja. A e junto con sus extremos lo podemos contraer al vértice u y el resto T queda intacto, esto es que $T - \{e, v\}$ es un retracto fuerte por deformación de T. Por hipótesis de inducción se sigue que $T - \{e, v\}$ es contraible y por tanto T.

Ahora veamos el caso en el que T es infinito. Sea $v \in \mathrm{vert}(T)$ un vértice fijo. Si consideramos a $u \in \mathrm{vert}(T)$ otro vértice, entonces el camino $\mathcal{C}_{vu}$ entre v y u es un árbol finito. Por lo visto arriba este es contraible. Y dado que T se puede ver como unión de caminos $\mathcal{C}_{vu}$ con $u \in \mathrm{vert}(T)$. Por la Proposición 3.10 se sigue que T es contraible.

□

3.2. Espacios clasificantes

En esta última sección introducimos la idea de espacio clasificante para subgrupos, ya que esto es una generalización de lo que hicimos en los capítulos anteriores. Lo expuesto aquí está basado en [BLN01] y [Lüc00].

Comenzamos con definir cómo un grupo *actúa* es un complejo-CW.

Definición 3.12 (Acción celular)**.** *Sea G un grupo y X un complejo-CW. Decimos que G* ***actúa celularmente*** *en el complejo-CW X si G actúa continuamente en X, y toda célula de X se proyecta de manera homeomorfa a su imagen bajo la acción de cada $g \in G$.*

Ejemplo 3.13. *Sea G un grupo, $S \subseteq G$ un conjunto generador, y $\mathrm{Cay}(G, S)$ su gráfica de Cayley. Por lo que vimos en el capítulo 1 sabemos que G actúa en $\mathrm{Cay}(G, S)$ de manera que cada vértice bajo la acción es un vértice y lo mismo sucede con las aristas. Por tanto G actúa en este complejo-CW de tal manera que toda célula es homeomorfa a su imagen bajo G.*

Lo que sigue es darle un nombre a los complejos-CW para los cuales se puede definir un G-acción en ellos.

Definición 3.14 (G-CW-complejo). *Sea G un grupo y X un complejo-CW. Decimos que X es un **G-CW-complejo** si admite una G-acción celular, y además si un elemento $g \in G$ deja una célula fija como conjunto, entonces la deja fija puntualmente.*

*Diremos que X es un G-CW-complejo **propio** si el estabilizador de cualquier célula es finito. Y si el estabilizador de cada célula es solamente el elemento neutro de G a X lo llamaremos G-CW-complejo **libre**.*

Más información sobre G-CW-complejos se puede encontrar en [Die87, II.1 y II.2] y [Lüc89, Sección 2].

A lo largo del capitulo 1 nuestros objetos de interés fueron las acciones libres en árboles. Otra manera de verlas es como acciones en árboles cuyos estabilizadores son el subgrupo trivial $\{\varepsilon\}$. En el capitulo 2 obtuvimos acciones en un árbol donde los estabilizadores eran finitos. Podemos generalizar esta idea para familias de subgrupos $\mathcal{F}$ que cumpla que los estabilizadores de la acción pertenezcan a ella.

Una ***familia $\mathcal{F}$ de subgrupos*** de un grupo G es una colección de subgrupos que es cerrada bajo conjugación y al tomar subgrupos. Los casos que nos conciernen son precisamente: la familia $\mathcal{TR}$ que solo contiene al subgrupo trivial, y la familia $\mathcal{FIN}$ formada por los subgrupos finitos.

Definición 3.15 (Espacio clasificante para familia de subgrupos). *Un espacio clasificante $E_{\mathcal{F}}G$ para $\mathcal{F}$ es un G-CW-complejo tal que los estabilizadores pertenece a $\mathcal{F}$ y para todo $H \in \mathcal{F}$ el conjunto de puntos fijos $E_{\mathcal{F}}G^H$ es contraible o vacío.*

Esta definición nos ofrece un panorama muy amplio para clasificar familias de subgrupos. Sin embargo, nuestro propósito no es tan ambicioso y solo queremos enfocarnos en las familias $\mathcal{TR}$ y $\mathcal{FIN}$ pues estas nociones han estado involucradas en lo hecho en los capítulos anteriores.

Para el caso $\mathcal{F} = \mathcal{TR}$, al ser el neutro el único estabilizador se sigue que $E_{\mathcal{TR}}G$ es un G-CW-complejo *libre*, y además el conjunto de puntos fijos del único elemento de la familia es el espacio completo. De modo que el espacio clasificante para la familia del trivial queda como:

Definición 3.16 (Espacio clasificante $E_{\mathcal{TR}}G$). *Es G-CW-complejo libre X contraible.*

Cabe mencionar que $E_{\mathcal{TR}}G$ coincide con ser el espacio total EG del haz universal G-principal $EG \to BG$. Para más detalles ver [KL05]. Aprovecharemos este hecho para denotar al espacio $E_{\mathcal{TR}}G$ como EG.

Ejemplo 3.17. *Sea G un grupo libre. Por el Teorema 1.50 sabemos que G actúa en un árbol, el cual es un complejo-CW contraible. De manera que este árbol es un espacio clasificante EG.*

Ejemplo 3.18. *Consideremos a G como el grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la suma usual y $\mathbb{R}^2$ visto como complejo-CW de la siguiente manera: el conjunto de las 0-células está descrito por $\{a_{ij}\}$, donde $i, j \in \mathbb{Z}$. Las 1-células tienen como extremos a puntos a_{ij} y a_{kl} tales que $\sqrt{(i-k)^2 + (j-l)^2} = 1$. Y las 2-células tienen como frontera a cuatro aristas cuyos extremos son de la forma $\{a_{ij}, a_{(i+1)j}, a_{i(j+1)}, a_{(i+1)(j+1)}\}$.*

La acción del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en este complejo-CW dada por $(n, m) \cdot (x, y) := (x+n, y+m)$ cumple con ser una acción celular. Así $\mathbb{R}^2$ es un G-CW-complejo, más aún es libre ya que dicha acción es libre, y además es contraible, de modo que $\mathbb{R}^2$ es un modelo para el espacio clasificante EG.

En los artículos [Mil56] y [Seg68] se da una construcción de un espacio clasificante EG para cualquier grupo G, esto nos garantiza que lo siguiente está bien definido.

Definición 3.19 (Dimensión geométrica $\mathrm{dg}(G)$)**.** *Sea G un grupo. Definimos la **dimensión geométrica de G** como la dimensión mínima para un espacio clasificante EG.*

A este número lo denotaremos por $\mathrm{dg}(G)$.

Para el caso $\mathcal{F} = \mathcal{FIN}$, el espacio clasificante $E_{\mathcal{FIN}}G$ se suele denotar por $\underline{E}G$. Y dado que los estabilizadores son finito, este G-CW-complejo es *propio*. Un estudio de grupos para los cuales existen buenos modelos geométricos de $\underline{E}G$ se puede encontrar en [BCH94, Sección 2].

Definición 3.20 (Espacio clasificante $\underline{E}G$)**.** *Es G-CW-complejo propio X tal que para cualquier subgrupo finito $H \leqslant G$ se cumple que el conjunto de puntos fijos X^H en X es contraible.*

Una generalización de la construcción para un espacio clasificante EG, dada en [Mil56] y [Seg68], nos garantiza la existencia del espacio clasificante $\underline{E}G$.

Definición 3.21 (Dimensión geométrica propia $\underline{\mathrm{dg}}(G)$)**.** *Sea G un grupo. Definimos la **dimensión geométrica propia de G** como la dimensión mínima para un espacio clasificante $\underline{E}G$.*

A este número lo denotaremos por $\underline{\mathrm{dg}}(G)$.

Es fácil determinar a los grupos de dimensión geométrica propia igual a 0. Son justamente los grupos finitos. A continuación vemos esto a detalle.

Proposición 3.22. *Un grupo G es finito si y sólo si $\underline{\mathrm{dg}}(G) = 0$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos a G finito. Dado que para el complejo-CW conformado por un sólo punto x junto con la G-acción dada por $g \cdot x := x$ satisface que el estabilizador de la única 0-célula es exactamente G, el cual es finito, y a su vez este complejo-CW es contraible lo que implica que los puntos fijos de todo subgrupo de G es también contraible. Por lo tanto este complejo-CW es un espacio clasificante $\underline{E}G$, en consecuencia $\underline{\mathrm{dg}}(G) = 0$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\underline{\mathrm{dg}}(G) = 0$. Entonces un espacio clasificante $\underline{E}G$ está conformado sólo por 0-células. Veamos que hay exactamente una 0-célula. Supongamos que x_1 y x_2 son dos 0-células distintas. Por definición los estabilizadores G_{x_1} y G_{x_2} son finitos. De modo que $G_{x_1} \cap G_{x_2}$ es un subgrupo finito de G por que su conjunto de puntos fijos es contraible. Sea $g \in G_{x_1} \cap G_{x_2}$, con esto $\{g \cdot x_1, g \cdot x_2\} = \{x_1, x_2\}$ es contraible lo cual es imposible ya que x_1 y x_2 son puntos distintos. Por lo tanto el espacio clasificante $\underline{E}G$ está conformado solamente por una 0-célula x y en consecuencia $G = G_x$ que es finito.

□

El siguiente teorema nos da una estrecha relación que hay entre el grupo fundamental G de gráficas de grupos, pues la acción de G es su árbol de Bass-Serre $\widetilde{X}$ lo dota de una estructura de espacio clasificante $\underline{E}G$. Lo que nos índica que esta noción de dimensión nos acompaño desde el capítulo 2.

Teorema 3.23. *Si G es el grupo fundamental de una gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ tal que el grupo asociado a cada vértice es finito, entonces la acción de G en su árbol de Bass-Serre $\widetilde{X}$, le da a $\widetilde{X}$ una estructura de espacio clasificante $\underline{E}G$*

Demostración. Por el Teorema 2.30 sabemos que G actúa en el árbol $\widetilde{X}$ donde los estabilizadores son justamente los grupos asociados a cada vértice, de modo que está acción cumple con tener estabilizadores finitos.

Sea H un subgrupo finito de G. Es claro que $\widetilde{X}^H$ no tiene ciclos, pues $\widetilde{X}^H \subseteq \widetilde{X}$. Veamos que es conexa. Sean $u, v \in \mathrm{vert}(\widetilde{X}^H)$. Entonces existe una sucesión de vértices adyacentes en $\widetilde{X}$ de u a v, digamos

$$u, x_1, x_2, \ldots, x_n, v$$

Sea $h \in H$. Aplicando h a este camino tenemos

$$hu = u, hx_1, hx_2, \ldots, hx_n, hv = v$$

el cual es un camino entre u y v en $\widetilde{X}$, pero en un árbol el camino entre cualesquiera dos vértices es único, de modo que $hx_i = x_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por tanto cada $x_i \in \mathrm{vert}(\widetilde{X}^H)$, en consecuencia $\widetilde{X}^H$ es conexa.

Con lo anterior tenemos que $\widetilde{X}^H$ es un árbol, y por tanto es contraible. $\square$

Habiendo hecho todo este fantástico recorrido no queda más que traducir lo hecho en el capítulo 1 y 2 en términos de dimensión geométrica.

Comencemos con los grupos libres, los cuales por el Teorema 1.50 sabemos que son aquellos que actúan libremente en un árbol, es decir en un complejo-CW de dimensión 1, y por tanto los grupos libres no triviales son exactamente aquellos de dimensión geométrica 1.

Teorema 3.24. *Un grupo G no trivial es libre si y sólo si* $\mathrm{dg}(G) = 1$.

Ahora los grupos virtualmente libres cumplen con ser aquellos que actúan en un árbol con estabilizadores finitos.

Como vimos en el capítulo 2 (Teorema 2.43), los grupos virtualmente libres son los grupos que actúan en un árbol con estabilizadores finitos, incluso tenemos la descripción de dicho árbol $\widetilde{X}(\mathbf{Y}, T_0)$ donde G es el grupo fundamental de la gráfica de grupos $\mathbf{Y}$ tal que cada grupo vértice es finito, así por el Teorema 3.23 tenemos que $\underline{\mathrm{dg}}(G) \leqslant 1$. Por otro lado, si $\underline{\mathrm{dg}}(G) = 0$, entonces por la Proposición 3.22 tenemos que G es finito, de modo que todo subgrupo de G es finito y por tanto no pueden ser libres, lo que contradice el hecho de que G sea virtualmente libre. Por consiguiente $\underline{\mathrm{dg}}(G) = 1$.

Ahora bien, si un grupo G cumple con $\underline{\mathrm{dg}}(G) = 1$, actúa en un árbol con estabilizadores finitos. Aunque para poder aplicar el Teorema 2.43 necesitamos que G actúe sin inversiones, es decir que la acción sea libre en las 1-células, además de que G/T sea un espacio compacto, lo que significa que G/T es un gráfica finita. Agregando esta condición obtenemos que G es virtualmente libre, gracias al Teorema 2.43.

Teorema 3.25. *Un grupo G es virtualmente libre si y sólo si* $\underline{\mathrm{dg}}(G) = 1$ *donde G actúa libremente en las aristas de su espacio clasificante y cuyo cociente es compacto.*

Bibliografía

[BCH94] Paul Baum, Alain Connes, and Nigel Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C*-algebras, 1994.

[BLN01] Noel Brady, Ian J Leary, and Brita EA Nucinkis. On algebraic and geometric dimensions for groups with torsion. *Journal of the London Mathematical Society*, 64(2):489–500, 2001.

[CZ09] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic graph theory.* Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2009.

[Die87] Tammo Tom Dieck. *Transformation Groups.* DE GRUYTER, dec 1987.

[KL05] Matthias Kreck and Wolfgang Lück. *The Novikov conjecture*, 2005.

[KPS73] A. Karrass, A. Pietrowski, and D. Solitar. Finite and infinite cyclic extensions of free groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 16(4):458–466, 1973.

[Löh17] Clara Löh. *Geometric group theory. An introduction.* Cham: Springer, 2017.

[Lüc89] Wolfgang Lück. *Transformation groups and algebraic K-theory.* Springer, 1989.

[Lüc00] Wolfgang Lück. The type of the classifying space for a family of subgroups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 149(2):177–203, may 2000.

[Mil56] John W. Milnor. Construction of universal bundles. I. *Ann. Math. (2)*, 63:272–284, 1956.

[Rob95] Derek J. S. Robinson. *A course in the theory of groups.*, volume 80. New York, NY: Springer-Verlag, 1995.

[Rot02] Joseph J. Rotman. *Advanced modern algebra.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall/Pearson Education, 2002.

[Seg68] Graeme Segal. Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 34:105–112, 1968.

[Ser80] Jean-Pierre Serre. Trees. Transl. from the French by John Stillwell. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. IX, 142 p. (1980), 1980.