



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA) 4204**

**ESTUDIO DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE ESTADOS GHZ**

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**

**ROGELIO TOBAR DE LA CRUZ**

**TUTOR:**

**CHRYSSOMALIS CHRYSSOMALAKOS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**COMITÉ TUTOR:**

**YURI BONDER GRIMBERG  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**ELÍAS OKÓN GURVICH  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX, NOVIEMBRE, 2023.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicatoria ... A mis padres*

# Agradecimientos

Este trabajo representa la culminación de un largo trayecto y esfuerzo, no sólo en el ámbito académico sino también en el personal, es por eso que aquí se refleja el esfuerzo de muchas otras personas.

Primeramente quiero agradecer a mis padres Erasto Tobar Ramírez e Hilaria de la Cruz Hernández por todo su apoyo y sustento. Pese a que ellos no tuvieron educación, siempre la han visto como una herramienta indispensable para el progreso y la realización personal. También quiero agradecer especialmente a mi profesora de secundaria Lilia Silva Trejo por hacerme mirar en la dirección correcta, por su fe en mí y su apoyo. Fue en su clase y gracias a su empeño en hacer más que el resto de los profesores, que descubrí la astronomía y eventualmente la física. Considero su contribución una de las más importantes en mi vida y sin la que este, y todo mi trabajo hasta ahora, no serían posibles.

Agradezco al Dr. Hector Hernández Coronado pues fue por él que me adentré en el mundo de la física matemática en su clase de geometría diferencial, misma que ha definido mis intereses académicos. De igual forma, agradezco la oportunidad de realizar mi servicio social bajo su supervisión y todo el apoyo económico y personal que recibí de su parte.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico durante la realización de mi maestría.

Agradezco al Dr. Chryssomalis Chryssomalakos por dirigirme en este trabajo, por su paciencia y apoyo.

Agradezco a los miembros del jurado y a mi comité tutor por sus observaciones y revisión de esta tesis, que sin duda la han enriquecido.

Finalmente, agradezco a mis amigos de la carrera por compartir conmigo el sufrimiento y la alegría propios de nuestra formación y por enseñarme que hay más cosas allá afuera.

# Introducción

Históricamente el estudio del espín comenzó con el experimento de Stern-Gerlach en 1921. Este inicialmente no poseía una explicación teórica hasta que en 1926 S.Goudsmit y G.Uhlenbeck propusieron la idea del *Momento angular intrínseco*. Fue W.Pauli quien postuló la existencia de una propiedad cuántica bivaluada, sin análogo clásico y realizó el primer tratamiento matemático del espín, mostrando así la importancia de tratar de esta manera a esta nueva cantidad. Otra contribución importante vino de la mano de Ettore Majorana en 1932 [1], quien ideó una representación geométrica del espín a través de puntos distribuidos en la esfera unitaria, dicha representación es de gran utilidad para identificar simetrías.

A lo largo de los años el estudio de los estados de espín ha sido de gran interés, por un lado por ser una cantidad sin análogo clásico y también debido a la existencia de aplicaciones, siendo una de las más destacables la *computación cuántica*. En este contexto los llamados *estados coherentes* han recibido particular atención, por ser considerados los estados más parecidos a un estado clásico, en cuanto al valor esperado.

En contraparte a los estados coherentes existen los *estados anticoherentes* caracterizados por tener mayor información direccional, siendo así los estados “menos clásicos”. Esta característica los vuelve interesantes pues maximizan los efectos cuánticos.

En el contexto de la *información cuántica* cobran relevancia los estados conocidos como GHZ, propuestos en 1989 por Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne y Anton Zeilinger. Dichos estados representan un conjunto de varias partículas entrelazadas y se utilizan para versiones cuánticas de algoritmos computacionales con el AND. El desarrollo de estas nuevas tecnologías depende sustancialmente del tratamiento geométrico de los objetos cuánticos, mismo que comenzó con la idea desarrollada por A. Ashtekar y T. Schilling en

su *formulación geométrica de la mecánica cuántica* [2] dónde ahora el espacio de estados cuánticos está modelado por variedades de Kähler. El hecho de dotar de tales objetos geométricos a los sistemas cuánticos nos permite estudiar sus propiedades desde otro punto de vista, así como atribuir nuevas propiedades puramente geométricas. Es precisamente en esta última idea en la que se centra este trabajo, pues en el primer capítulo se explora la métrica de Fubini-Study[3][4], para estados de espín[5] en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ [6], así como los vectores tangentes inducidos al rotar los estados respecto a cada uno de los ejes coordenados en  $\mathbb{R}^3$  (vectores verticales) [7][8]. Con lo anterior como punto de partida, se plantea el problema de encontrar vectores ortogonales a los verticales en el espacio tangente al espacio proyectivo [9], dicha tarea es sencilla para espines pequeños pero al llevar el problema a un espín general aumenta su complejidad, pues el número de dichos vectores linealmente independientes, crece notablemente al aumentar el espín, a saber; hay  $4s - 3$  vectores ortogonales a los verticales que son linealmente independientes, para un espín arbitrario  $s$  [10][11].

Este aumento en la complejidad ha llevado a restringir gran parte del estudio del capítulo 2 a los estados GHZ, dichos estados aparecen por primera vez en el artículo de 1989 de Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne y Anton Zeilinger *Going beyond Bell's Theorem* [12] dónde los autores describen un tipo de estado particular, para el cual se pueden hacer predicciones definitivas, dentro del contexto del artículo EPR [13] [14] y, aún así, no es posible introducir modelos de variables locales deterministas[15][16].

Usualmente se distingue a los estados GHZ porque son tales que al trazar sobre alguno de los subsistemas que los conforman, vistos como sistemas compuestos de  $2s$  espines  $1/2$  simetrizados, se obtiene un estado maximamente mezclado, pero la propiedad más relevante en este trabajo es que las constelaciones de Majorana[17][18] asociadas a ellos, constan de  $n$ -ágonos regulares sobre el ecuador de la esfera de Riemann. Con esto en mente, se realizó una descripción del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  en varios sistemas coordenados, dados por los diferentes mapeos que llevan de una constelación de Majorana a un elemento del espacio proyectivo[19], siguiendo las convenciones de transformación de Frankel [20] para vectores  $\vec{v} = e_\alpha v^\alpha$  y 1-formas  $f = \gamma_\alpha \sigma^\alpha$  dadas por  $v' = M^{-1}v$ ,  $e' = eM$ ,  $\sigma' = M^{-1}\sigma$  y  $\gamma' = \gamma M$ , se usó la siguiente expresión para transformar la métrica de Fubini-Study entre diferentes

sistemas coordenados:  $g' = M^T g M$  [20].

Empleando estas transformaciones fue posible describir a los vectores ortogonales a los verticales en coordenadas reales en el espacio proyectivo, dadas por la parte real e imaginaria de los complejos obtenidos al mapear un estado de espín al espacio proyectivo  $\{x_i = \text{Re}(z_i), y_i = \text{Im}(z_i)\}$ , en dicha base la métrica de Fubini-Study es diagonal, así que encontrar vectores ortogonales es trivial. Los vectores obtenidos en estas coordenadas fueron mapeados a vectores sobre la esfera, en coordenadas dadas por los ángulos de las estrellas de Majorana, en estas coordenadas dichos vectores se asocian a velocidades para cada una de las estrellas, lo que ha permitido visualizar a que deformación de la constelación corresponden. Este proceso, en sí, brinda la solución al problema, pues se está en condiciones de construir los vectores ortogonales a los inducidos por rotaciones para cualquier espín, pero no brinda un criterio general para clasificarlos.

Por ello se ha supuesto un sistema de masas asociado a las constelaciones de Majorana de los estados GHZ, que consiste en colocar una masa  $m = 1$  en la posición de cada estrella, encontrando que los vectores ortogonales a los verticales son tales que deforman la constelación de tal manera que el momento angular del sistema de masas es cero. Así, los vectores que cumplen este criterio y son ortogonales entre sí, forman una base del espacio tangente al llamado *espacio de formas* y que es ortogonal al subespacio generado por vectores verticales o de rotación de las constelaciones.

Con base en los resultados obtenidos para GHZ ha sido posible caracterizar analíticamente a otro tipo de estados, los correspondientes a constelaciones obtenidas al trasladar cada una de las estrellas de una constelación GHZ por  $\delta$  en dirección  $\partial_\theta$  o  $-\partial_\theta$  sobre la esfera de Riemann, con lo que se obtiene un  $2s$ -ágono regular, cuyas estrellas ya no se encuentran sobre el ecuador sino a un ángulo  $\theta = \pi/2 \pm \delta$ , que identificamos como constelaciones  $\theta$ .

Finalmente, en el capítulo 3 se está en condiciones de dividir al espacio tangente al espacio proyectivo de estados GHZ en dos subespacios; el horizontal y vertical, caracterizados por contener vectores que inducen deformaciones y rotaciones en las constelaciones de los estados, respectivamente. El trabajar con los subespacios horizontal (formas) y vertical (rotaciones) ha permitido comparar el comportamiento de los estados GHZ con el de otras familias de constelaciones de Majorana, para ello se hizo necesario trabajar con conceptos

como: el Grassmanniano[21], el encajamiento y producto de Plucker[22] [23] [24] y una noción de producto entre planos a través de proyectores en los subespacios correspondientes [25][26].

El espacio conformado por vectores que inducen deformaciones en la constelación, tales que su momento angular es cero, pudo calcularse numericamente para cualquier familia de constelaciones y luego compararse con el espacio horizontal obtenido de la ortogonalidad con los vectores verticales. Así, por un lado se tiene un espacio de momento angular cero y por otro al espacio horizontal de las constelaciones. Tomando constelaciones que coincidan en algún punto con GHZ, se tuvo un punto de referencia, pues en GHZ el espacio horizontal y el de momento angular cero coinciden, por lo que fue posible medir el comportamiento del "ángulo" entre estos dos subespacios al testear varias configuraciones de un par de familias de constelaciones de Majorana de espín  $3/2$  y compararlas con la constelación GHZ correspondiente.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1 Conceptos fundamentales</b>	<b>1</b>
§1.1 Sistemas de espín 1/2 . . . . .	1
§1.2 Métrica de Fubini-Study . . . . .	2
§1.3 Métrica en $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	3
§1.4 Constelaciones de Majorana . . . . .	5
§1.4.1 Proyección estereográfica desde el polo sur . . . . .	6
§1.4.2 Rotación de estados de espín arbitrario . . . . .	7
§1.5 Vectores en $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	8
<b>2 Estados GHZ</b>	<b>25</b>
§2.1 Estado GHZ a partir de la constelación de Majorana descrita por espinores de $s=1/2$ . . . . .	26
§2.2 Tratamiento general de los estados GHZ . . . . .	28
§2.3 Diferentes sistemas coordinados para el espacio proyectivo . . . . .	33
§2.4 Visualización de deformaciones en estados GHZ . . . . .	42
§2.5 Momento angular de las constelaciones GHZ y generalización de las deformaciones . . . . .	51
§2.6 De GHZ a constelaciones $\theta$ . . . . .	59
<b>3 Espacio horizontal y espacio de momento angular cero</b>	<b>64</b>
§3.1 Grassmanniano . . . . .	64

§3.1.1 Encajamiento de Plucker del Grassmanniano . . . . .	65
§3.1.2 Producto interno . . . . .	66
§3.1.3 Producto interno mediante la representación matricial . . . . .	67
<b>4 Conclusiones</b>	<b>78</b>

# Capítulo 1

## Conceptos fundamentales

### 1.1. Sistemas de espín 1/2

Un estado arbitrario de un sistema de espín 1/2 puede expresarse de la siguiente forma

$$|\alpha\rangle = C_+|+\rangle + C_-|-\rangle, \quad (1.1)$$

tomando como base los eigenvectores del operador de espín  $S_z$ , con  $S_z|\pm\rangle = \pm 1/2|\pm\rangle$  y  $\hbar = 1$ . Los coeficientes  $C_{\pm}$  en general son complejos y su módulo al cuadrado es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $|\pm\rangle$  después de aplicar el operador  $S_z$ .

Los eigenvectores del operador  $S_z$  pueden representarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

en este caso los operadores de espín son

$$\begin{aligned}
 S_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_x, & S_y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_y, \\
 & & S_z &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_z,
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

con  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  las matrices de Pauli.

Como se sabe, se puede calcular el valor esperado de cualquiera de los tres operadores de espín  $S_x, S_y, S_z$  realizando la siguiente operación  $\langle \alpha | S_x | \alpha \rangle, \langle \alpha | S_y | \alpha \rangle, \langle \alpha | S_z | \alpha \rangle$ . Si se realizan muchos experimentos determinando en cada caso el valor de los operadores de espín aplicados a  $|\alpha\rangle$  se puede caracterizar al estado asignándole una dirección, en la que al realizar la medición del espín el resultado sea siempre  $1/2$  [5].

Por otro lado, considerando a los coeficientes  $C_+ = x + iy$  y  $C_- = w + iz$  la restricción  $|C_+|^2 + |C_-|^2 = 1$  se traduce en la relación  $x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = 1$  lo que indica que los puntos  $(x, y, w, z)$  se encuentran sobre la superficie de una 3-esfera encajada en  $\mathbb{R}^4$ .

## 1.2. Métrica de Fubini-Study

Para hablar de geometría debemos introducir una noción de distancia en el espacio de estados cuánticos, esto lo haremos mediante una métrica conocida como la métrica de Fubini-Study, para construirla consideremos un estado arbitrario  $|\psi\rangle$  y hagamos una perturbación en este, dada por  $|\phi\rangle = |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle$ . Con estos dos estados podemos construir un tercer estado que sea ortogonal al estado original, mediante

$$|\phi\rangle^\perp = |\phi\rangle - \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} |\psi\rangle. \tag{1.4}$$

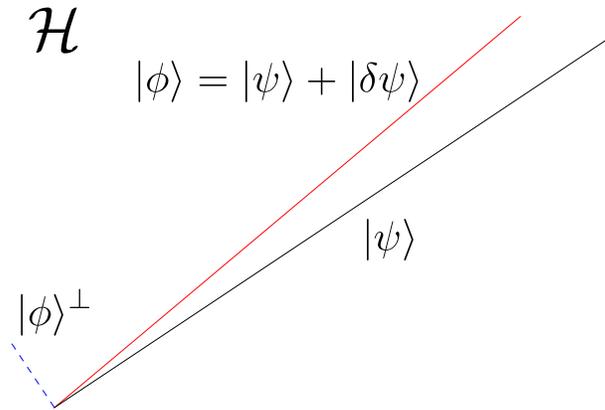


Figura 1.1: Esquema que ejemplifica geoméricamente los elementos empleados en la deducción de la métrica de Fubini-Study.

El estado  $|\phi\rangle^\perp$  corresponde a la componente de  $|\phi\rangle$  perpendicular a  $|\psi\rangle$  con lo cual, el elemento de línea en el espacio de estados cuánticos se calcula como

$$ds^2 = \frac{\langle\phi|\phi\rangle^\perp}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\delta\psi|\delta\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} - \frac{\langle\psi|\delta\psi\rangle\langle\delta\psi|\psi\rangle}{|\langle\psi|\psi\rangle|^2}. \quad (1.5)$$

Aquí la noción de distancia es referida al "ángulo" entre los rayos que representan a los estados. La expresión de la ecuación (1.5) es conocida como la métrica de Fubini-Study y está definida en el espacio proyectivo [2][3].

### 1.3. Métrica en $\mathbb{C}P^n$

Con el fin de evitar trabajar con rayos en el espacio de Hilbert, traslademos nuestro estudio al espacio proyectivo. Aquí un rayo del espacio de Hilbert, correspondiente a un estado cuántico, es representado por un punto [6].

Veámos en que consiste esta asignación en el caso de estados de espín:

Primero, escribamos el estado de espín como un vector en la base de eigenestados del

operador  $S_z$  [5]

$$|\psi_s\rangle = \sum \psi_m |s, m\rangle = \begin{pmatrix} \psi_s \\ \psi_{s-1} \\ \vdots \\ \psi_{-s+1} \\ \psi_{-s} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Luego, dividamos todas las entradas del vector por  $\psi_s$  y descartemos el 1 resultante en la primera entrada

$$[\psi_s] = (\psi_{s-1}/\psi_s, \dots, \psi_{-s+1}/\psi_s, \psi_{-s}/\psi_s) = (z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}) \quad (1.7)$$

de esta manera obtenemos  $2s$  complejos que representan de manera única al estado de espín. La métrica de Fubini-Study en el espacio proyectivo se reexpresa como [4]:

$$ds^2 = \frac{dz_i d\bar{z}^i}{1 + z^i \bar{z}_i} - \frac{\bar{z}^i z_j dz_i d\bar{z}^j}{(1 + z^i \bar{z}_i)^2}. \quad (1.8)$$

Revisemos la forma que adopta esta métrica analizando un par de casos con espines bajos.

### Espín 1/2

Para este caso se trabaja en  $\mathbb{C}P^1$  por lo que se necesita un complejo y su conjugado para representar al estado, la métrica se calcula como sigue

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dzd\bar{z}}{1 + z\bar{z}} - \frac{\bar{z}zdzd\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \\ &= \frac{1}{1 + z\bar{z}} \left( dzd\bar{z} - \frac{\bar{z}zdzd\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \\ &= \frac{dzd\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

De acuerdo a la expresión anterior y por la simetría de la métrica, esta se escribe como

$$g = \frac{1}{2(1 + z\bar{z})^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

**Espín 1**

Aquí estamos en  $\mathbb{C}P^2$  por lo que trabajaremos con  $z_1, z_2$  y sus conjugados, desarrollando la expresión 1.8 tenemos

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} - \frac{z_1 dz_1 (\bar{z}_1 d\bar{z}_1 + \bar{z}_2 d\bar{z}_2) + z_2 dz_2 (\bar{z}_1 d\bar{z}_1 + \bar{z}_2 d\bar{z}_2)}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2} \\
&= \frac{1}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \left( dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2 - \frac{(z_1 dz_1 + z_2 dz_2)(\bar{z}_1 d\bar{z}_1 + \bar{z}_2 d\bar{z}_2)}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \right) \\
ds^2 &= \frac{(1 + z_2 \bar{z}_2) dz_1 d\bar{z}_1 + (1 + z_1 \bar{z}_1) dz_2 d\bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_2 dz_1 d\bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2}. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Nuevamente, por la simetría de la métrica, se expresa

$$g = \frac{1}{2(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 + z_2 \bar{z}_2 & -z_1 \bar{z}_2 \\ 0 & 0 & -z_2 \bar{z}_1 & 1 + z_1 \bar{z}_1 \\ 1 + z_2 \bar{z}_2 & -z_2 \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ -z_1 \bar{z}_2 & 1 + z_1 \bar{z}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Se ha podido apreciar en el par de ejemplos anteriores que, en el espacio proyectivo, la métrica adopta una estructura por bloques, dicha estructura se conserva para cualquier espín.

**1.4. Constelaciones de Majorana**

Partiendo del hecho de que un estado  $|\psi\rangle$  de espín  $s$ , puede ser escrito como una combinación lineal de los eigenestados  $|s, m\rangle$  del operador  $S_z$ , es decir

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^s \psi_m |s, m\rangle, \tag{1.13}$$

se puede construir con los coeficientes el siguiente polinomio

$$P_{|\psi\rangle}(\zeta) = \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} \psi_m \zeta^{s+m}. \tag{1.14}$$

Las raíces de este polinomio corresponden a puntos en el plano complejo que, al ser mapeados mediante proyección estereográfica a  $S^2$ , generan una distribución bien definida de puntos conocida como constelación de Majorana. Esta representación de estados de espín por constelaciones en  $S^2$  cumple que una rotación del estado se convierte en la misma rotación de la constelación en la esfera, por lo que es útil para identificar simetrías. Esta idea fue expuesta por Ettore Majorana en 1932 [1].

### 1.4.1. Proyección estereográfica desde el polo sur

Dado un punto sobre la esfera  $\vec{r} = (x, y, z)$  su proyección estereográfica desde el polo sur corresponde al punto

$$(\gamma, \xi) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right), \quad (1.15)$$

por lo que se pueden mapear puntos en  $\mathbb{C}$  a  $S^2$ , simplemente invirtiendo la relación (1.15), mediante [17]

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2 + \xi^2}, \\ y &= \frac{2\xi}{1 + \gamma^2 + \xi^2}, \\ z &= \frac{1 - \gamma^2 - \xi^2}{1 + \gamma^2 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

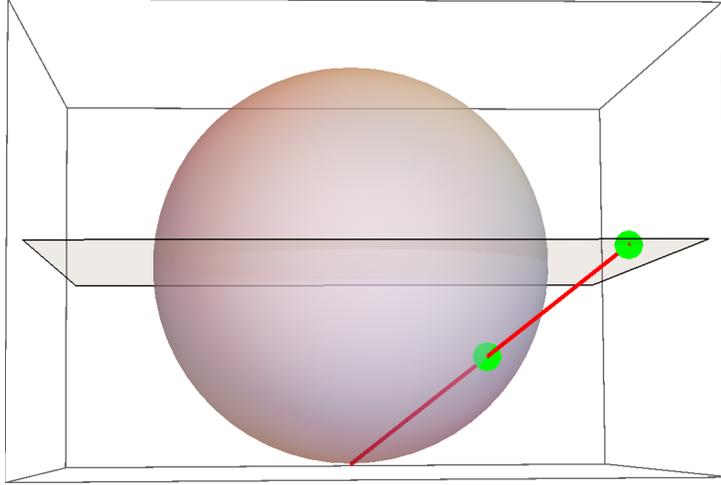


Figura 1.2: Proyección estereográfica desde el polo sur.

### 1.4.2. Rotación de estados de espín arbitrario

Para encontrar la forma de rotar un estado de espín  $s$ , se considera a  $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$  y su acción sobre la base  $|s, m\rangle$  [10]

$$\begin{aligned} S_+|s, m\rangle &= \sqrt{(s-m)(s+m+1)}|s, m+1\rangle, \\ S_-|s, m\rangle &= \sqrt{(s+m)(s-m+1)}|s, m-1\rangle, \end{aligned} \quad (1.17)$$

empleando como base los eigenestados de  $S_z$  representados por [20]

$$|s, s\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s, s-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots \quad |s, -s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

se puede representar a  $S_{\pm}$  y  $S_z$  mediante las matrices

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2s} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \sqrt{2(2s-1)} & \cdots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \sqrt{2s} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = S_+^\dagger, \quad S_z = \begin{pmatrix} s & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & s-1 & \cdots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -s \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Además, mediante las relaciones  $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$  y  $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$  es posible calcular la matriz de espín  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ .

Finalmente la matriz de rotación buscada es [17][8]:

$$R(\alpha, \hat{n}, s) = e^{-i\alpha\hat{n}\cdot\vec{S}}, \quad (1.20)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo por el cual se realiza la rotación y  $\vec{n}$  el vector unitario normal al plano de rotación.

## 1.5. Vectores en $\mathbb{C}P^n$

Como sabemos al variar el estado también variamos el punto que lo representa en el espacio proyectivo, esto nos permite obtener curvas y, a partir de ellas, vectores. Analicemos los vectores obtenidos al rotar el estado respecto a los ejes coordenados [7].

Comencemos trabajando con el estado de espín 1 en la base de los eigenestados de  $S_z$ , descrito por

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

proyectemos de acuerdo a la ecuación (1.7)

$$z_1 = \psi_0/\psi_1, \quad z_2 = \psi_{-1}/\psi_1. \quad (1.22)$$

Para realizar la rotación necesitamos las matrices de espín 1

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Con el vector rotado, dado por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\hat{n}\cdot\vec{S}}|\psi_0\rangle. \quad (1.24)$$

Consideremos un estado en particular, obtenido a partir de la constelación de Majorana que consta de dos puntos en el plano xz que forman un ángulo  $\alpha$  con el eje z.

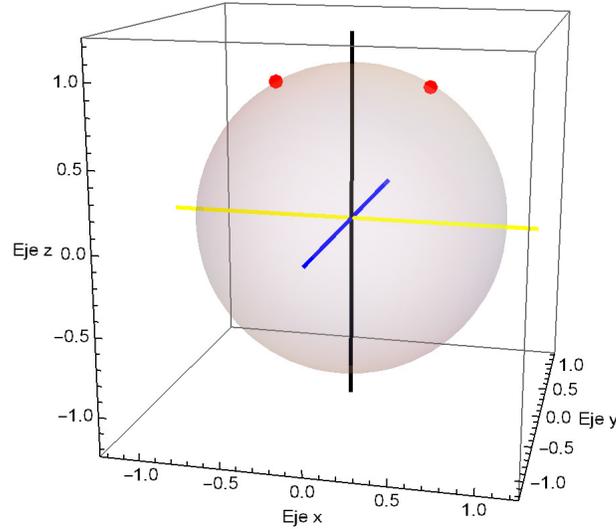


Figura 1.3: Constelación de espín 1.

Se puede considerar a esta constelación conformada por dos estrellas de estados de espín 1/2 caracterizados por sus ángulos en coordenadas esféricas como [27]

$$|s_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad |s_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ -\sin(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

proyectando estereográficamente desde el polo sur y basándonos en la forma del polinomio de Majorana podemos identificar el estado de espín 1

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^4(\alpha/2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan^2(\alpha/2) \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Para este estado la métrica de Fubini-Study es

$$Fs(|\psi_1\rangle) = \frac{1}{2(1 + \tan^4(\alpha/2))} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\tan^4(\alpha/2)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\tan^4(\alpha/2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

y los vectores inducidos en el espacio proyectivo por rotaciones del estado respecto a cada eje se calculan como sigue:

Primero se calcula el estado rotado respecto a cada eje en el espacio de Hilbert

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)\rangle_x &= e^{-its_x} |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\alpha) + \cos(t)}{(\cos(\alpha) + 1)\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \\ -\frac{i\sqrt{2}\sin(t)}{(\cos(\alpha) + 1)\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \\ \frac{\cos(t) - \cos(\alpha)}{(\cos(\alpha) + 1)\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \end{pmatrix}, \\ |\psi_1(t)\rangle_y &= e^{-its_y} |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\sec^2(\frac{\alpha}{2})(\cos(\alpha)\cos(t) + 1)}{2\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \\ \frac{\cos(\alpha)\sec^2(\frac{\alpha}{2})\sin(t)}{\sqrt{2}\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \\ \frac{1 - \cos(\alpha)\cos(t)}{(\cos(\alpha) + 1)\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \end{pmatrix}, \\ |\psi_1(t)\rangle_z &= e^{-its_z} |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{e^{-it}}{\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \\ 0 \\ \frac{e^{it}\tan^2(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\tan^4(\frac{\alpha}{2}) + 1}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

luego se llevan al espacio proyectivo dividiendo por la primera componente de cada vector

y descartando la primera entrada que es un 1

$$\begin{aligned}
[\psi_{1x}(t)] &= \left( -\frac{i\sqrt{2}\sin(t)}{\cos(\alpha) + \cos(t)}, \frac{2\cos(t)}{\cos(\alpha) + \cos(t)} - 1 \right), \\
[\psi_{1y}(t)] &= \left( \frac{\sqrt{2}\cos(\alpha)\sin(t)}{\cos(\alpha)\cos(t) + 1}, \frac{2}{\cos(\alpha)\cos(t) + 1} - 1 \right), \\
[\psi_{1z}(t)] &= \left( 0, e^{2it} \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right),
\end{aligned} \tag{1.29}$$

en cada caso se obtiene una curva en el espacio proyectivo correspondiente a la rotación respecto a cada eje del estado original en el espacio de Hilbert, la cual se deriva respecto a  $t$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}[\psi_{1x}(t)] &= \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{2}(\cos(\alpha)\cos(t)+1)}{(\cos(\alpha)+\cos(t))^2} \\ -\frac{2\cos(\alpha)\sin(t)}{(\cos(\alpha)+\cos(t))^2} \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial t}[\psi_{1y}(t)] &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\cos(\alpha)(\cos(\alpha)+\cos(t))}{(\cos(\alpha)\cos(t)+1)^2} \\ \frac{2\cos(\alpha)\sin(t)}{(\cos(\alpha)\cos(t)+1)^2} \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial t}[\psi_{1z}(t)] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2ie^{2it} \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{1.30}$$

y finalmente, se evalúa en  $t = 0$  para obtener los vectores inducidos por rotaciones en el

espacio proyectivo

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{\partial}{\partial t} [\psi_{1x}(t)]_{t=0} = \frac{i\sqrt{2}}{1 + \cos(a)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 v_y &= \frac{\partial}{\partial t} [\psi_{1y}(t)]_{t=0} = \frac{\sqrt{2} \cos(a)}{1 + \cos(a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 v_z &= \frac{\partial}{\partial t} [\psi_{1z}(t)]_{t=0} = 2i \tan^2(a/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Un hecho a resaltar es que durante todo el proceso de obtención de los vectores inducidos por rotaciones hemos considerado unicamente  $\{z_1, z_2\}$  en el espacio proyectivo, mientras que en el resultado final tenemos 4 componentes, esto es debido a que necesitamos  $\{z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2\}$  pues los vectores tangentes resultan ser vectores reales, es decir: que poseen entradas reales en una base real. Lo que nos lleva a considerar la base  $\{\partial_{z_1}, \partial_{z_2}, \partial_{\bar{z}_1}, \partial_{\bar{z}_2}\}$  para que el cambio de base a coordenadas reales esté bien definido.

Planteamos ahora un vector arbitrario de la forma

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

y usando la métrica de Fubini-Study de la ecuación (1.27) busquemos que sea ortogonal a

los vectores  $\{v_x, v_y, v_z\}$  Es decir

$$W \cdot F_S \cdot v_x = 0, \quad W \cdot F_S \cdot v_y = 0, \quad W \cdot F_S \cdot v_z = 0. \quad (1.33)$$

Por lo que el vector ortogonal a los generados por las rotaciones respecto a cada eje en el espacio proyectivo debe cumplir

$$w_1 = \bar{w}_1 = 0, \quad w_2 = \bar{w}_2. \quad (1.34)$$

Así, es posible llegar a la conclusión de que el cambio de forma o separación de las estrellas (cambio en  $\alpha$ ) induce un vector que es ortogonal a las rotaciones

$$W = cte \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

En este ejemplo hemos podido notar que es posible dividir al espacio tangente en dos subespacios, uno generado por rotaciones del estado (constelación) y otro que es ortogonal a este, y podemos interpretar como el cambio de forma de la constelación. Aquí, la dimensión del subespacio de rotaciones es 3, mientras que la dimensión del espacio de formas es 1. Lo que se corresponde con la dimensión real del espacio proyectivo, que en este caso es 4. Como es de esperar, para espín mayor, la dimensión del espacio de formas aumentará, mientras que el espacio de rotaciones seguirá siendo 3. Exploremos estos subespacios con un par de espines más.

### **Espín 3/2**

Se trabaja en  $\mathbb{C}P^3$ , por lo que la dimensión real es 6. Para este espín consideremos la constelación de un triángulo equilátero para el que las coordenadas esféricas de cada uno de sus vértices son  $(\theta, \phi) \in \{(\theta, 0), (\theta, 2\pi/3), (\theta, 4\pi/3)\}$

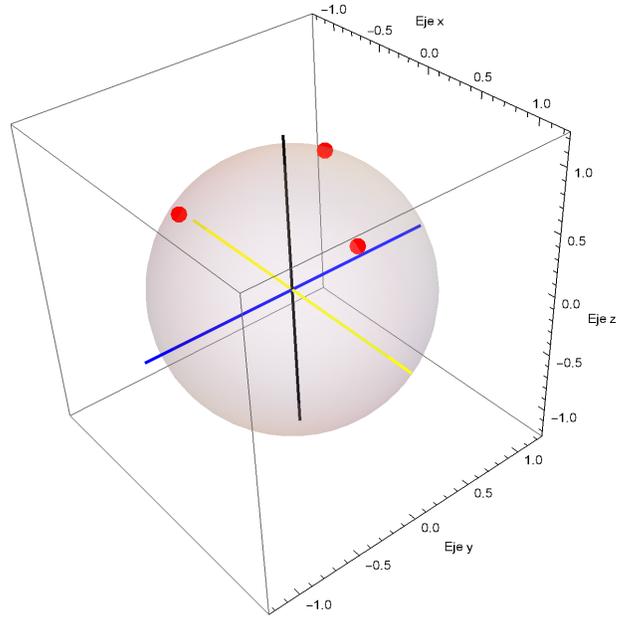


Figura 1.4: Constelación de espín 3/2.

Esta constelación tiene asociado el estado

$$|\psi_{3/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^6(\theta/2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \tan^3(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Si realizamos el mismo proceso que en el caso de espín 1, obtenemos las siguientes condiciones para las componentes del vector ortogonal a las rotaciones:

$$\bar{w}_1 = w_2 \tan^3(\theta/2), \quad \bar{w}_2 = w_1 \cot^3(\theta/2), \quad \bar{w}_3 = w_3. \quad (1.37)$$

Aquí es fácil ver que cualquier variación en  $\theta$  induce un vector de la forma

$$W_1 = cte \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

por lo que el cambio en  $\theta$  induce un vector ortogonal.

Si colocamos las estrellas en el ecuador ( $\theta = \pi/2$ ) obtenemos un estado especial, denominado como GHZ, con esto las condiciones anteriores se reducen a

$$\bar{w}_1 = w_2, \quad \bar{w}_2 = w_1, \quad \bar{w}_3 = w_3, \quad (1.39)$$

la métrica de Fubini-Study a

$$Fs(|\psi_{3/2}\rangle_{\text{GHZ}}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

y los vectores inducidos en el espacio proyectivo al rotar sobre cada eje el estado  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  son

$$v_x = -\frac{i\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_z = 3i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Con las condiciones anteriores si desplazamos solamente las estrellas en  $\phi \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}$  en la dirección de  $\partial_\phi$  en sentidos opuestos (ver fig.1.5)

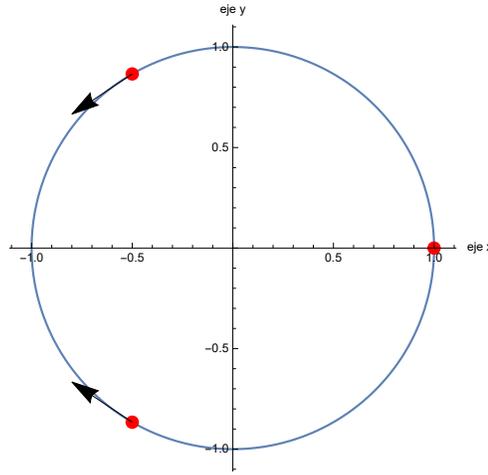


Figura 1.5: Deformación del triángulo formado por las estrellas (puntos rojos) del estado GHZ de  $s=3/2$ . Las flechas indican la dirección de desplazamiento de las estrellas en dirección  $\partial_\phi$

el vector inducido en el espacio proyectivo es

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

que cumple las condiciones de la ecuación (1.39) por lo que es ortogonal a los inducidos por rotaciones y también al inducido por el cambio de  $\theta$ .

Si ahora desplazamos únicamente la estrella que no fue movida en la deformación anterior  $\phi = 0$  (ver fig.1.6)

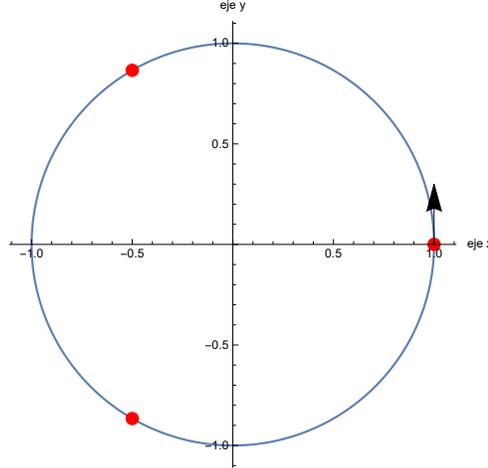


Figura 1.6: Deformación del triángulo formado por las estrellas (puntos rojos) del estado GHZ de  $s=3/2$ . La flecha indica la dirección de desplazamiento de la estrella en dirección  $\partial_\phi$

el vector inducido en el espacio proyectivo es

$$W_3 = \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Dicho vector también cumple con las condiciones de ortogonalidad y es ortogonal al resto de vectores producidos por las deformaciones anteriores. Con esto se tienen 3 vectores inducidos en el espacio proyectivo por rotaciones del estado  $|\psi_{3/2}\rangle_{\text{GHZ}}$  respecto a los ejes, que a partir de ahora denominaremos como *vectores verticales*, y 3 que son inducidos por deformaciones de la constelación (correspondiente al estado  $|\psi_{3/2}\rangle_{\text{GHZ}}$ ) que son ortogonales a los de rotaciones y ortogonales entre sí, denominados *vectores horizontales*. Además, para este estado particular, los vectores verticales también son ortogonales entre sí.

## Espín 2

Se trabaja en  $\mathbb{C}P^4$  por lo que la dimensión real es 8. Usemos la constelación de un cuadrado

para el cual las coordenadas esféricas de sus vértices son  $(\theta, \phi) \in \{(\theta, 0), (\theta, \pi/2), (\theta, \pi), (\theta, 3\pi/2)\}$

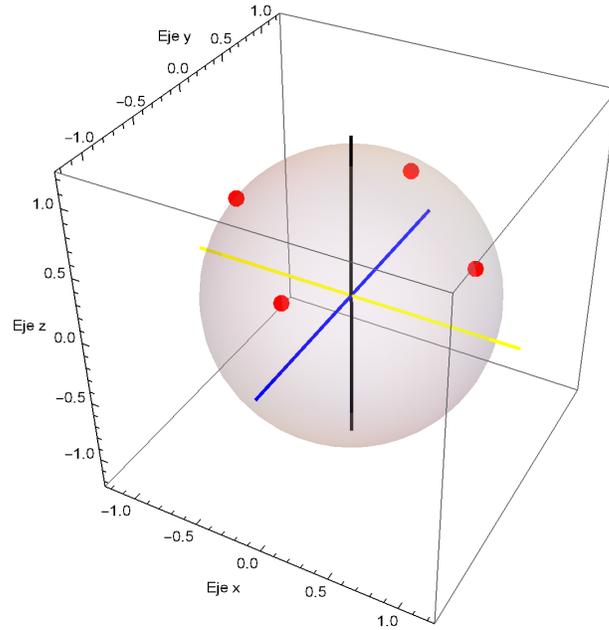


Figura 1.7: Constelación de espín 2.

El estado correspondiente en este caso es

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^8(\theta/2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\tan^4(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

a partir del cual obtenemos las siguientes condiciones para los vectores horizontales

$$\bar{w}_1 = -w_3 \tan^4(a/2), \quad \bar{w}_3 = -w_1 \cot^4(a/2), \quad \bar{w}_4 = w_4. \quad (1.45)$$

Antes de simplificar estas condiciones se puede notar que nuevamente un cambio del ta-

maño de la constelación (variación en  $\theta$ ) induce un vector horizontal

$$W_1 = cte \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Nuevamente, restringiéndonos al ecuador las condiciones de ortogonalidad se reducen a

$$\bar{w}_1 = -w_3, \quad \bar{w}_3 = -w_1, \quad \bar{w}_4 = w_4, \quad (1.47)$$

la métrica de Fubini-Study

$$Fs(|\psi_2\rangle_{\text{GHZ}}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

y los vectores verticales del estado  $|\psi_2\rangle_{GHZ}$  son

$$v_x = i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_z = 4i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Si desplazamos las estrellas en  $\phi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$  en dirección de  $\partial_\phi$  en sentidos contrarios (ver fig 1.8)

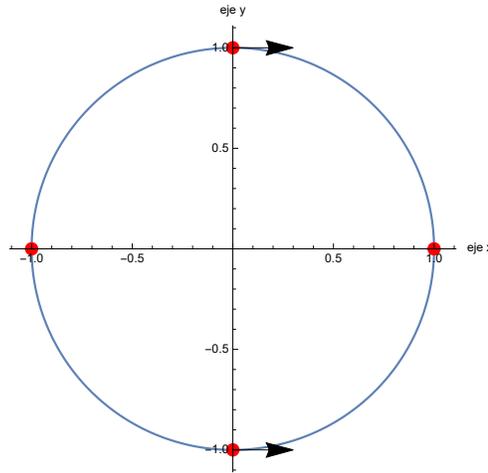


Figura 1.8: Deformación del cuadrado formado por las estrellas (puntos rojos) del estado GHZ de  $s=2$ . Las flechas indican la dirección de desplazamiento de las estrellas en dirección  $\partial_\phi$

el vector inducido en el espacio proyectivo será

$$W_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

que satisface las condiciones de la ecuación (1.47).

Desplazando las estrellas en  $\phi \in \{0, \pi\}$  en dirección de  $\partial_\phi$  en sentidos contrarios (ver fig 1.9)

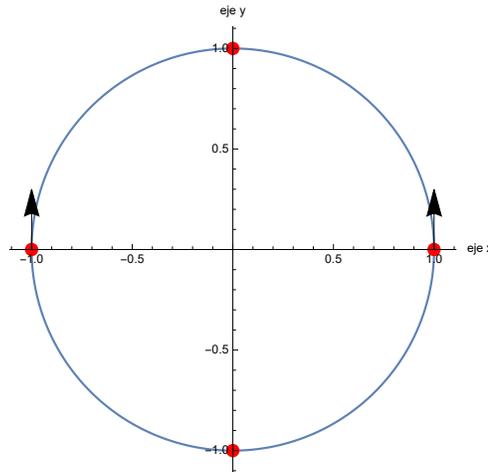


Figura 1.9: Deformación del cuadrado formado por las estrellas (puntos rojos) del estado GHZ de  $s=2$ . Las flechas indican la dirección de desplazamiento de las estrellas en dirección  $\partial_\phi$

el vector inducido en el espacio proyectivo será

$$W_3 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \\ 0 \\ -i \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

que satisface las condiciones de la ecuación (1.47).

Realicemos ahora una deformación desplazando las estrellas en la dirección de  $\partial_\phi$  por pares antipodales, de tal manera que cada par va en el mismo sentido de  $\partial_\phi$  pero con sentido opuesto al otro par (ver fig.1.10)

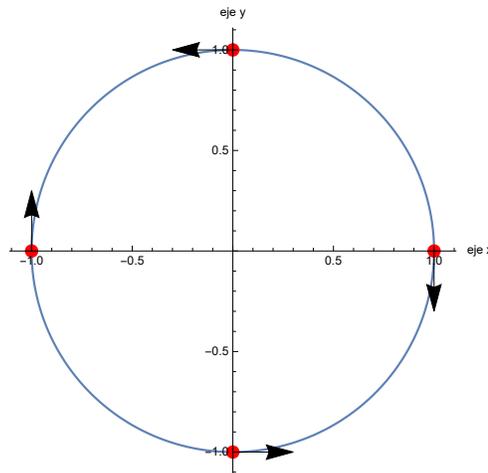


Figura 1.10: Deformación del cuadrado formado por las estrellas (puntos rojos) del estado GHZ de  $s=2$ . Las flechas indican la dirección de desplazamiento de las estrellas en dirección  $\partial_\phi$

de donde se obtiene el vector

$$W_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i\sqrt{2/3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2i\sqrt{2/3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

que satisface las condiciones de la ecuación (1.47)

Otra deformación posible consiste en desplazar las estrellas en  $\phi \in \{0, \pi\}$  en dirección de  $\partial_\theta$  en sentidos opuestos y el otro par ( $\phi \in \{0, \pi\}$ ) también en dirección de  $\partial_\theta$  y en sentidos opuestos (ver fig 1.11)

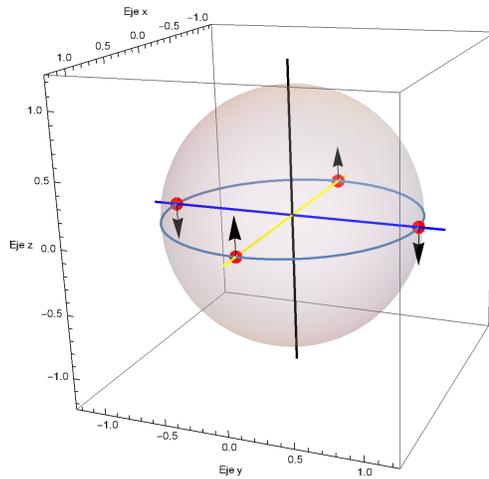


Figura 1.11: Deformación del cuadrado formado por las estrellas (puntos rojos) del estado GHZ de  $s=2$ . Las flechas indican la dirección de desplazamiento de las estrellas en dirección  $\partial_\phi$

obteniendo el vector

$$W_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2/3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2/3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

que también satisface las condiciones de la ecuación (1.47)

Con esto tenemos 3 vectores verticales del estado  $|\psi_2\rangle_{\text{GHZ}}$  y 5 vectores inducidos por las deformaciones anteriores que además son ortogonales entre sí. Por otro lado, para el estado  $|\psi_2\rangle_{\text{GHZ}}$  los vectores verticales también son ortogonales entre sí.

En los casos anteriores con espín  $3/2$  y espín  $2$  resalta el hecho de que al restringir la constelación al ecuador los calculos se vuelven mucho más manejables y dan pie a un tratamiento completo de los subespacios horizontales. Los estados correspondientes a dichas constelaciones son conocidos en la literatura como *Estados GHZ* y serán la base del estudio del próximo capítulo.

# Capítulo 2

## Estados GHZ

Los estados GHZ reciben su nombre debido al artículo de 1989 de Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne y Anton Zeilinger *Going beyond Bell's Theorem* [12]. En el que los autores describen un tipo particular de estado entrelazado, como una respuesta al enigma de la no localidad cuántica y para explorar la naturaleza de la correlación entre múltiples partículas.

El desarrollo histórico que condujo a la formulación de los estados GHZ tiene sus raíces en la paradoja EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) de 1935 [13]. Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen argumentaron que la mecánica cuántica parecía permitir la existencia de lo que ellos llamaron “elementos de realidad ocultos”, lo que contradecía la idea de la teoría cuántica como una descripción completa de la realidad física. Sin embargo, los trabajos de Bohm [14] y en 1964 el de John Bell [28] demostraron que estas supuestas “variables ocultas” no podían explicar completamente los resultados de ciertos experimentos de entrelazamiento cuántico, dando lugar a las desigualdades de Bell.

Los estados GHZ surgieron como una forma de explorar las implicaciones de las desigualdades de Bell y la no localidad cuántica. En un sistema GHZ, varias partículas están entrelazadas de tal manera que las mediciones de sus propiedades están correlacionadas de una manera que desafía cualquier explicación clásica. Un ejemplo notable es el estado GHZ de tres qubits, donde la suma de sus tres espines es siempre cero, creando una correlación cuántica imposible de reproducir en términos de estados clásicos. Matemáticamente, este

estado puede expresarse como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle). \quad (2.1)$$

Estos estados entrelazados se han convertido en una base fundamental para la computación cuántica y la comunicación cuántica segura. La propiedad de entrelazamiento de estos estados puede ser aprovechada para realizar operaciones en paralelo y resolver problemas de manera más eficiente que las computadoras clásicas. En el contexto de la computación cuántica, los estados GHZ se consideran como recursos para realizar cálculos con una ventaja significativa.

Por ejemplo, en tareas de procesamiento cuántico que involucran teleportación, como exponen Anu Kumari y Satyabrata Adhikari en su artículo *Classification witness operator for classification of different subclasses of three-qubit GHZ class* [29] y en el algoritmo desarrollado por G. García-Alcaine y J. Calsamiglia en 2000 que aprovecha estados GHZ para realizar una versión cuántica del algoritmo AND y exhibe una mejora exponencial en la eficiencia en comparación con su contraparte clásica [30].

## 2.1. Estado GHZ a partir de la constelación de Majorana descrita por espinores de $s=1/2$

Partamos de la forma general de representar a un espinor  $1/2$

$$|\alpha\rangle_{1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

para los estados GHZ  $\theta = \pi/2$

$$|\alpha\rangle_{1/2\text{GHZ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix} \rightarrow z = e^{i\phi}. \quad (2.3)$$

Por lo que un espinor de espín  $1/2$  GHZ es representado por una estrella en el ecuador y asociado a un  $z$  complejo en el espacio proyectivo. Como sabemos, es posible describir cualquier estado  $|\psi\rangle$  de espín arbitrario  $s$  como el subespacio simétrico ante intercambio de partículas del producto tensorial de  $2s$  sistemas de espín  $1/2$ , es decir:

$$|\psi\rangle_s = N \sum_{\sigma(n_1, n_2 \dots n_{2s})} |\alpha_{\sigma(n_1)}\rangle_{1/2} \otimes |\alpha_{\sigma(n_2)}\rangle_{1/2} \otimes \dots \otimes |\alpha_{\sigma(n_{2s})}\rangle_{1/2}, \quad (2.4)$$

en el caso de los estados GHZ, las estrellas que corresponden a cada subsistema de espín  $1/2$  se encuentran sobre el ecuador y la simetría ante rotaciones por  $n(\pi/s)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , respecto al eje  $z$  nos lleva a deducir que cada estrella se encuentra en el vértice de un  $2s$ -ágono regular. Dónde las coordenadas esféricas de las estrellas corresponde a  $\theta_k = \pi/2$  y  $\phi_k \in \{0, (\pi/s), 2(\pi/s), \dots, (2s-1)(\pi/s)\}$ , por lo que las estrellas coinciden con las raíces del polinomio de Majorana (geoméricamente, en la proyección estereográfica) y están dadas por:

$$z_k \in \{1, e^{(\pi/s)i}, e^{2(\pi/s)i}, \dots, e^{(2s-1)(\pi/s)i}\}. \quad (2.5)$$

Para encontrar el estado asociado en la base  $|s, m\rangle$  generamos un polinomio que tenga como raíces a  $z_k =$  y lo identificamos con el polinomio de Majorana para leer de ahí las componentes del estado. Primero recordemos el polinomio de Majorana [17] [18]

$$P_{|\psi\rangle}(z) = \sum_{m=-s}^s (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} \psi_m z^{m+s}, \quad (2.6)$$

ahora veamos como luce el polinomio para los estados GHZ

$$P(z) = \prod_{k=0}^{2s-1} [z - e^{k(\pi/s)i}], \quad (2.7)$$

desarrollando se llega a

$$P(z) = z^{2s} + \sum_{k=1}^{2s-1} \left( \sum_{\sigma=0}^{2s-1} e^{\sigma(\pi/s)i} \right) z^k - 1, \quad (2.8)$$

pero

$$\sum_{\sigma=0}^{2s-1} e^{\sigma(\pi/s)i} = 0, \quad (2.9)$$

por lo tanto

$$P(z) = z^{2s} - 1, \quad (2.10)$$

con lo que obtenemos la expresión general para los estados GHZ

$$|\psi\rangle_{\text{GHZ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{2s+1} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

## 2.2. Tratamiento general de los estados GHZ

De acuerdo a la forma de los estados GHZ descrita en la ecuación (2.11) dichos estados mapeados al espacio proyectivo corresponden a un punto con coordenadas

$$[\psi] = (0, \dots, 0, (-1)^{2s+1}) = (z_1, \dots, z_n) = z, \quad (2.12)$$

usando lo anterior es posible calcular el bloque superior de la métrica de Fubini-Study

$$g_{\text{FS}} = \frac{1}{2(1 + z \cdot \bar{z})^2} [(1 + z \cdot \bar{z})\mathbb{1}_{n \times n} - z^\dagger \otimes z], \quad (2.13)$$

que en este caso se reduce a

$$g_{\text{FS}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Con lo anterior en mente analicemos los vectores verticales del estado GHZ de espín arbitrario [9].

Comencemos con una rotación en torno al eje  $z$ ; aquí tenemos la matriz de espín

$$S_z = \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -s \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

con lo que la matriz de rotación es

$$e^{-itS_z} = \begin{pmatrix} e^{-ist} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{ist} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

ahora, rotemos al estado GHZ con esta matriz

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itS_z} |\psi\rangle_{\text{GHZ}} = \begin{pmatrix} e^{-ist} \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} e^{ist} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

y llevemoslo al espacio proyectivo

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} e^{2ist} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Por último calculemos el vector inducido

$$V_z = \partial_t z(t)|_{t=0} = 2is \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

para esta rotación ha sido posible seguir el cálculo en el caso general sin problemas debido a la simpleza de la matriz  $S_z$ , como veremos en breve, esto no es igual de sencillo en los casos de  $S_x, S_y$  pero será igualmente posible encontrar expresiones generales para los vectores verticales restantes.

Comencemos por visualizar la estructura de las matrices  $S_x, S_y$ :

Para ello partamos de  $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$  y su acción sobre la base  $|s, m\rangle$  [10] [11]

$$\begin{aligned} S_+|s, m\rangle &= \sqrt{(s-m)(s+m+1)}|s, m+1\rangle, \\ S_-|s, m\rangle &= \sqrt{(s+m)(s-m+1)}|s, m-1\rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

por lo que se puede representar a  $S_{\pm}$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2s} & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \sqrt{2(2s-1)} & \cdots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \sqrt{2s} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = S_+^\dagger, \quad (2.21)$$

mediante las relaciones  $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$  y  $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2s} & \cdots & & 0 \\ \sqrt{2s} & 0 & \sqrt{2(2s-1)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \sqrt{2(2s-1)} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \sqrt{2s} \\ 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{2s} & 0 \end{pmatrix}, \\ S_y &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2s} & \cdots & & 0 \\ -\sqrt{2s} & 0 & \sqrt{2(2s-1)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & -\sqrt{2(2s-1)} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \sqrt{2s} \\ 0 & \cdots & \cdots & -\sqrt{2s} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

puesto que la estructura de las matrices es similar, analicemos únicamente el caso de  $S_x$ , cuyos resultados serán análogos para  $S_y$ .

Trataremos el caso general encontrando directamente la rotación del estado GHZ en torno al eje x, es decir

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itS_x}|\psi\rangle = |\psi\rangle - itS_x|\psi\rangle + \theta(t^2), \quad (2.23)$$

lo anterior puede ser escrito como

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{2s+1} \end{pmatrix} - \frac{it}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2s} \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1}\sqrt{2s} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1(t^2) \\ \theta_2(t^2) \\ \vdots \\ \theta_{2s+1}(t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \theta_1(t^2) \\ -it\sqrt{s/2} + \theta_2(t^2) \\ \theta_3(t^2) \\ \vdots \\ \theta_{2s-1}(t^2) \\ (-1)^{2s}it\sqrt{s/2} + \theta_{2s}(t^2) \\ (-1)^{2s+1} + \theta_{2s+1}(t^2) \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

que llevado al espacio proyectivo resulta

$$z(t) = \begin{pmatrix} (-it\sqrt{s/2} + \theta_2(t^2))/(1 + \theta_1(t^2)) \\ \theta_3(t^2)/(1 + \theta_1(t^2)) \\ \vdots \\ \theta_{2s-1}(t^2)/(1 + \theta_1(t^2)) \\ ((-1)^{2s}it\sqrt{s/2} + \theta_{2s}(t^2))/(1 + \theta_1(t^2)) \\ ((-1)^{2s+1} + \theta_{2s+1}(t^2))/(1 + \theta_1(t^2)) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Sólo resta derivar respecto a  $t$  y evaluar  $t = 0$  en la expresión anterior para encontrar la forma general del vector  $V_x$ , antes de hacerlo denotemos  $\dot{\theta}_i(t^2) := \gamma_i(t)$  con  $\gamma_i(0) = 0$ .

Veámos que pasa con los elementos de la forma  $\theta_k(t^2)/(1 + \theta_1(t^2))$ :

$$\partial_t (\theta_k(t^2)/(1 + \theta_1(t^2)))|_{t=0} = ([\gamma_k(t)(1 + \theta_1(t^2)) - \theta_k(t^2)\gamma_1(t)]/(1 + \theta_1(t^2))^2)|_{t=0} = 0, \quad (2.26)$$

ahora analicemos el elemento  $(-it\sqrt{s/2} + \theta_2(t^2))/(1 + \theta_1(t^2))$

$$\begin{aligned} & \partial_t \left[ (-it\sqrt{s/2} + \theta_2(t^2))/(1 + \theta_1(t^2)) \right] \Big|_{t=0} = \\ & \left( \left[ (-i\sqrt{s/2} + \gamma_2(t))(1 + \theta_1(t^2)) - \gamma_1(t)(-it\sqrt{s/2} + \theta_2(t^2)) \right] / (1 + \theta_1(t^2))^2 \right) \Big|_{t=0} = \\ & -i\sqrt{s/2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

En este punto es fácil ver que el vector general inducido por una rotación en torno al eje  $x$  es

$$V_x = i\sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

como se mencionó anteriormente, para la rotación respecto al eje  $y$  es el mismo desarrollo salvo por un cambio en  $itS_y|\psi\rangle$ , que nos conduce al siguiente vector

$$V_y = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Cabe aclarar que los vectores de las ecuaciones (2.28, 2.29) son sólo la mitad de las componentes en el espacio proyectivo, pues es necesario añadir el conjugado.

Visto lo anterior es fácil probar que los vectores  $\{V_x, V_y, V_z\}$  son ortogonales entre sí, de acuerdo a la métrica de Fubini-Study de la ecuación (2.14). El problema que nos ocupa ahora es encontrar un conjunto de vectores ortogonales a los 3 inducidos por rotaciones (horizontales), para espín arbitrario. Cabe mencionar que el conjunto de vectores buscados, induce una deformación en la constelación de tal manera que no involucra rotaciones y que el número de estos vectores depende del espín  $s$ . Puesto que la dimensión real de  $\mathbb{C}P^{2s}$  es  $4s$ , deben existir  $4s - 3$  vectores ortogonales a los verticales y ortogonales entre

sí, cada uno de ellos estará asociado a una deformación particular de la constelación.

### 2.3. Diferentes sistemas coordenados para el espacio proyectivo

Con el fin de resolver el problema de encontrar todos los vectores horizontales a estados GHZ, es conveniente introducir distintos sistemas de coordenadas para describir al espacio proyectivo, estos nos permitirán interpretar las deformaciones de la constelación y encontrar de manera eficiente los  $4s - 3$  vectores horizontales para cualquier espín  $s$ .

Para identificar los sistemas coordenados que necesitamos emplear, revisemos las transformaciones que hacemos al ir de una constelación hasta un punto en el espacio proyectivo [31]. Primero, empleamos estados descritos por ángulos en *coordenadas esféricas*, donde cada par de coordenadas corresponde a la posición de una estrella de la constelación de Majorana, luego llevamos las estrellas al plano complejo donde adquieren *coordenadas complejas* que cooresponden a raíces del polinomio de Majorana, posteriormente se genera el polinomio y se extraén los coeficientes que, en general son números complejos. Estos últimos resultan ser las *coordenadas complejas* en el espacio proyectivo pues, para los estados GHZ, el procedimiento descrito anteriormente resulta en un estado con 2 coeficientes distintos de cero, uno de los cuales es 1, siendo este el mismo que divide al resto para mapear al estado en el espacio proyectivo. Con esto en mente, nos será posible mapear vectores en el espacio tangente de estados GHZ a diferentes sistemas coordenados. Únicamente nos resta contemplar otro sistema coordenado, y es el sistema de *coordenadas reales* que corresponde a  $\{x, y\}$  obtenidos de los zetas ( $z = x + iy$ ) complejos que caracterizan al estado en el espacio proyectivo.

$$\mathbb{C}P^{2s}$$

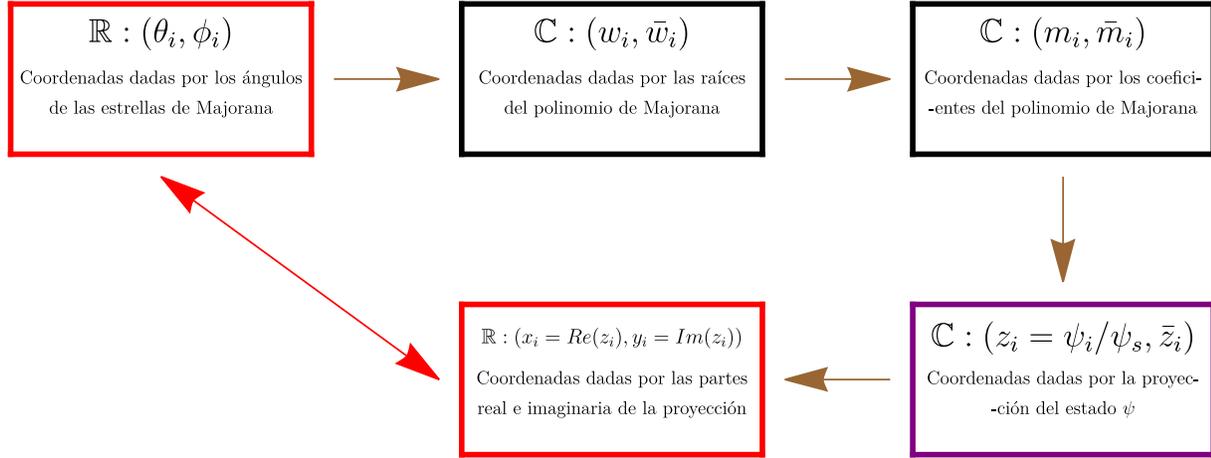


Figura 2.1: Esquema que nos permite visualizar el camino recorrido por un vector real en el espacio proyectivo, a través de distintos sistemas coordenados, dados por los distintos mapeos involucrados.

Para entender como llevaremos vectores entre las distintas coordenadas, es conveniente establecer ciertas convenciones. Siguiendo a Frankel [20], denotaremos a los vectores como  $\vec{v} = e_\alpha v^\alpha$ , con

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_n), \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T, \quad (2.30)$$

por lo que podemos escribir  $\vec{v} = ev$ , siendo  $e$  un vector cuyas entradas son los vectores de base unitarios y  $v$  las componentes del vector. Ahora, veámos como transforman ante un cambio de base dado por la matriz  $M$

$$\begin{aligned} v^{\alpha'} &= (M^{-1})^\alpha_\beta v^\beta \quad \rightarrow \quad v' = M^{-1}v, \\ e_{\alpha'} &= e_\beta M^\beta_\alpha \quad \rightarrow \quad e' = eM. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Análogamente, podemos describir a las 1-formas en esta notación como  $f = \gamma_\alpha \sigma^\alpha$  donde

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^T, \quad (2.32)$$

con  $\sigma$  un vector cuyas entradas son la base del espacio de 1-formas y  $\gamma$  son las componentes. Aquí, la transformación ante un cambio de base  $M$  está dada por

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha'} &= (M^{-1})^\alpha_\beta \sigma^\beta & \rightarrow & \quad \sigma' = M^{-1} \sigma, \\ \gamma_{\alpha'} &= \gamma_\beta M^\beta_\alpha & \rightarrow & \quad \gamma' = \gamma M \end{aligned} \quad (2.33)$$

Una vez que conocemos estas reglas de transformación, nos va a interesar transformar la métrica de Fubini-Study entre los distintos sistemas de coordenadas, así que veámos como realizar dicha transformación. Partimos de la expresión  $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$  y aplicamos las fórmulas de la ecuación (2.31)

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= \langle e_{\alpha'}(M^{-1})T_i^\alpha, e_{\beta'}(M^{-1})T_j^\beta \rangle \\ (M^{-1})^\alpha_i \langle e_{\alpha'}, e_{\beta'} \rangle (M^{-1})^\beta_j & \rightarrow \quad g = (M^{-1})^T g' (M^{-1}) \\ & \rightarrow \quad g' = M^T g M. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ahora nos encontramos en condiciones de calcular las matrices que llevan vectores entre los distintos sistemas coordenados, comencemos siguiendo el orden en que se mapea un estado, desde su constelación hasta el punto en coordenadas reales en el espacio proyectivo.

### Coordenadas esféricas a coordenadas complejas

Esta transformación es de nuestro interés, pues los estados originalmente son representados por *ángulos sobre la esfera* de las estrellas de Majorana y luego son llevados a coordenadas complejas que representan las *raíces del polinomio de Majorana*.

Contamos con las relaciones dadas por la proyección estereográfica [19]

$$z_i = \tan(\theta_i/2)e^{i\phi_i}, \quad \bar{z}_i = \tan(\theta_i/2)e^{-i\phi_i}, \quad (2.35)$$



esta nos interesa pues con ella transforman las componentes del vector, y en última instancia será lo que transformemos.

### Coordenadas dadas por las raíces a coordenadas dadas por los coeficientes del polinomio de Majorana

Comencemos aclarando que el polinomio contiene  $2s + 1$  coeficientes y  $2s$  raíces, y lo que nos permite realizar esta transformación es el hecho de que el coeficiente  $a_0 = 1$  para cualquier estado GHZ.

Para esta transformación, ambos sistemas de coordenadas son complejos, lo que cambia es la interpretación que tiene cada sistema en el contexto del camino que sigue el estado al ser mapeado al espacio proyectivo. Para deducir la forma general de la matriz de cambio de base, analicemos primero un par de casos sencillos [32]:

Abordemos el caso de  $s = 3/2$ , aquí tenemos 3 raíces  $\{x_1, x_2, x_3\}$  y 3 coeficientes  $\{w_1, w_2, w_3\}$  relacionados por

$$\begin{aligned} w_1 &= -x_1 - x_2 - x_3, \\ w_2 &= x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 \\ w_3 &= -x_1x_2x_3, \end{aligned} \tag{2.40}$$

lo que nos conduce a

$$(\partial_{w_1}, \partial_{w_2}, \partial_{w_3}) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \begin{pmatrix} -1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ -1 & x_1 + x_3 & -x_1x_3 \\ -1 & x_2 + x_1 & -x_1x_2 \end{pmatrix} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) r2co. \tag{2.41}$$

Analizamos ahora  $s = 2$ , tenemos 4 raíces  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y 4 coeficientes  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

relacionados por

$$\begin{aligned}
 w_1 &= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \\
 w_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4, \\
 w_3 &= -x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4, \\
 w_4 &= x_1x_2x_3x_4,
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

de donde tenemos

$$c_{2r}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & x_2 + x_3 + x_4 & -x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 & x_2x_3x_4 \\ -1 & x_1 + x_3 + x_4 & -x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 & x_1x_3x_4 \\ -1 & x_2 + x_1 + x_4 & -x_2x_1 + x_1x_4 + x_2x_4 & x_1x_2x_4 \\ -1 & x_2 + x_3 + x_1 & -x_2x_1 + x_1x_3 + x_3x_2 & x_2x_3x_1 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Si nos restringimos a los estados GHZ, donde  $x_k = e^{i(k-1)(\pi/s)}$ , estamos en condiciones de escribir la forma general de esta matriz de transformación, comencemos definiendo los coeficientes

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \prod_{k \neq n}^{2s-1} e^{ik(\pi/s)}, \\
 c_{n,r} &= \sum_{k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n \neq r} e^{i(\sum_h k_h)(\pi/s)}.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Con ellos podemos escribir la matriz de transformación como:

$$\text{co2r}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & c_{1,0} & c_{2,0} & \cdots & \beta_0 \\ -1 & c_{1,1} & c_{2,1} & \cdots & \beta_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & c_{1,2s-1} & c_{2,2s-1} & \cdots & \beta_{2s-1} \\ & & & & -1 & \bar{c}_{1,0} & \bar{c}_{2,0} & \cdots & \bar{\beta}_0 \\ & & & & -1 & \bar{c}_{1,1} & \bar{c}_{2,1} & \cdots & \bar{\beta}_1 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & -1 & \bar{c}_{1,2s-1} & \bar{c}_{2,2s-1} & \cdots & \bar{\beta}_{2s-1} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Notese que la matriz consta de dos bloques, para transformar tanto al número complejo como a su conjugado. Esto es debido a la dimensión del espacio proyectivo y a que necesitamos al número complejo y su conjugado para describir vectores en este.

### De coordenadas dadas por los coeficientes del polinomio de Majorana a coordenadas complejas en el espacio proyectivo

En esta parte del proceso, nos movemos de los coeficientes del polinomio de Majorana a identificar al estado de espín en la base de los eigenestados de  $s_z$ , lo que hacemos multiplicando por determinados coeficientes y luego llevamos este estado al espacio proyectivo, dividiendo por la primera componente.

Comencemos con los coeficientes del polinomio de Majorana  $m_k$  y las componentes del estado  $\psi_k$  [33]

$$\psi_{s-n} = \frac{m_n}{(-1)^{2s-n} \binom{2s}{2s-n}^{1/2}}, \quad (2.46)$$

puesto que en los estados GHZ  $m_0 = 1$  tenemos la siguiente transformación

$$(\partial_{m_1}, \cdots, \partial_{m_{2s}}, \partial_{\bar{m}_1}, \cdots, \partial_{\bar{m}_{2s}}) = (\partial_{\psi_{s-1}}, \cdots, \partial_{\psi_{-s}}, \partial_{\bar{\psi}_{s-1}}, \cdots, \partial_{\bar{\psi}_{-s}}) \text{vc2co}. \quad (2.47)$$



Ahora transformemos la métrica de la ecuación (2.14)

$$g = vc2vr^T g_{\text{FS}} vc2vr = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Transformemos también los vectores

$$V_x = i\sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_y = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_z = 2is \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

De dichas transformaciones se obtiene

$$\begin{aligned} V'_x = vc2vr^{-1}V_x &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2s \times 2s} & \mathbb{1}_{2s \times 2s} \\ -i\mathbb{1}_{2s \times 2s} & i\mathbb{1}_{2s \times 2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ \vdots \\ i(-1)^{2s} \\ 0 \\ i \\ \vdots \\ -i(-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ V'_y = vc2vr^{-1}V_y &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2s \times 2s} & \mathbb{1}_{2s \times 2s} \\ -i\mathbb{1}_{2s \times 2s} & i\mathbb{1}_{2s \times 2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ V'_z = vc2vr^{-1}V_z &= s \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2s \times 2s} & \mathbb{1}_{2s \times 2s} \\ -i\mathbb{1}_{2s \times 2s} & i\mathbb{1}_{2s \times 2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i(-1)^{2s+1} \\ \vdots \\ -i(-1)^{2s+1} \end{pmatrix} = 2s \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Como podemos ver, los vectores inducidos por rotaciones en coordenadas reales tienen componentes reales, como era de esperarse y además una estructura muy simple. Concretamente, si escribimos  $V'_x = e_\alpha v_x^\alpha$ ,  $V'_y = e_\alpha v_y^\alpha$ ,  $V'_z = e_\alpha v_z^\alpha$ , las únicas componentes distintas de cero son;  $v_x^{s+1}, v_x^{2s-1}$  para  $V'_x$ ,  $v_y^1, v_x^{s-1}$  para  $V'_y$  y  $v_z^{2s}$  para  $V'_z$ .

Este caso es de interés pues la métrica en estas coordenadas es diagonal por lo que encontrar vectores ortogonales a los inducidos por rotaciones se reduce a tomar los vectores de base que no han sido usados en las expresiones de  $V'_x, V'_y$  y  $V'_z$  y un par de casos especiales que son los vectores ortogonales a  $V'_x$  y  $V'_y$ .

## 2.4. Visualización de deformaciones en estados GHZ

Con las herramientas desarrolladas en la sección anterior, nos encontramos en condiciones de calcular y visualizar las deformaciones de constelaciones correspondientes a estados GHZ, para espín arbitrario. En esta sección, expondré algunos ejemplos y se dará paso a una generalización analítica. Comencemos probando las ideas de nuestra generalización con un par de ejemplos en donde sabemos como funcionan las cosas:

### Espín 3/2

Usaremos la constelación de un estado GHZ, dada por los puntos  $\{w_1 = 1, w_2 = e^{i\pi/3}, w_3 = e^{i2\pi/3}\}$  en el plano complejo, que forman un triángulo equilátero en el ecuador de la esfera de Riemann. A partir de esto, calculemos la matriz que lleva vectores en el espacio proyectivo de coordenadas reales a coordenadas dadas por los ángulos de las estrellas de Majorana.

$$vr2a^{-1} = r2a^{-1} \cdot co2r^{-1} \cdot vc2co^{-1} \cdot vr2vc^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Partamos entonces de los vectores verticales en coordenadas reales, dadas por la parte real e imaginaria de los complejos obtenidos al llevar el estado al espacio proyectivo, calculados a partir de la ecuación (2.55)

$$V_x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_z = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

Ahora tomemos vectores ortogonales a estos y procedamos a mapearlos a coordenadas  $(\theta, \phi)$  de las estrellas de Majorana

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_{A1} = vr2a^{-1} \cdot V_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_{A2} = vr2a^{-1} \cdot V_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_{A3} = vr2a^{-1} \cdot V_3 = \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Recordemos que las primeras  $2s$  entradas de los vectores  $V_{Ai}$  corresponden a las componentes del vector a lo largo de  $\partial_{\theta_i}$ , mientras que las últimas  $2s$  entradas son las componentes de  $\partial_{\phi_i}$ . Por lo que podemos identificar claramente el significado geométrico de los vectores horizontales, como se muestra a continuación

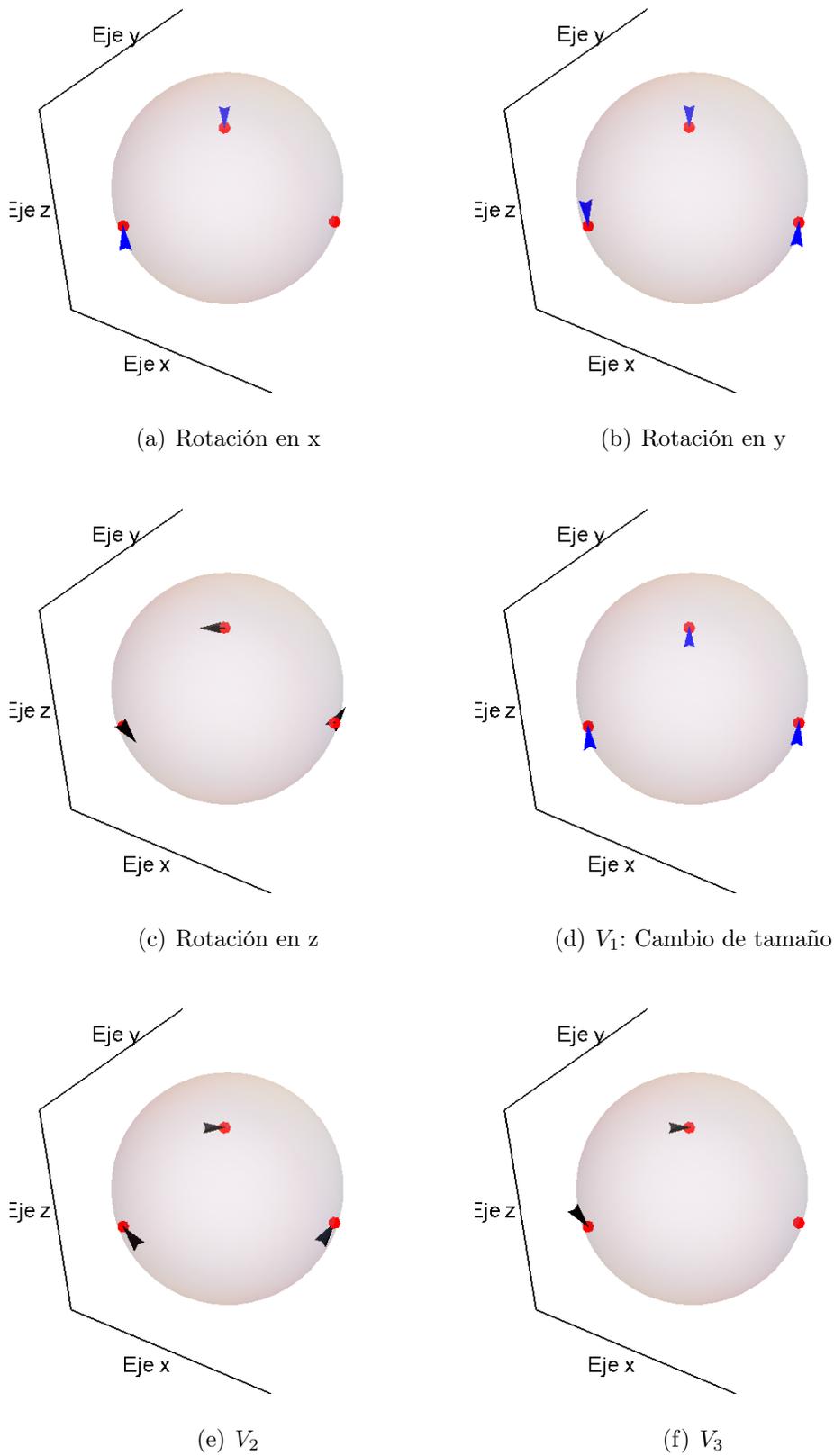


Figura 2.2: Deformaciones de las constelaciones de estados GHZ ante rotaciones y ante los vectores ortogonales a estas, para  $s=3/2$  (azul  $\rightarrow \partial_\theta$ , negro  $\rightarrow \partial_\phi$ ).

**Espín 2**

Aquí, la constelación está dada por los siguientes complejos  $\{x_1 = 1, x_2 = i, x_3 = -1, x_4 = -i\}$  que forman un cuadrado en el ecuador de la esfera de Riemann, a partir de esta constelación obtenemos la siguiente matriz

$$vr2a^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Nuevamente partamos de los vectores verticales en coordenadas reales, calculados con la ecuación (2.55)

$$V_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_z = -4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Procedamos a probar con vectores horizontales en coordenadas reales y veamos su inter-

pretación geométrica

$$\begin{aligned}
 V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow V_{A1} = vr2a^{-1} \cdot V_1 = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow V_{A2} = vr2a^{-1} \cdot V_2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow V_{A3} = vr2a^{-1} \cdot V_3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow V_{A4} = vr2a^{-1} \cdot V_4 = \frac{1}{8\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 & & V_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow V_{A5} = vr2a^{-1} \cdot V_5 = \frac{1}{8\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, es posible interpretar fácilmente el significado geométrico de estos vectores y visualizar su acción sobre las constelaciones:

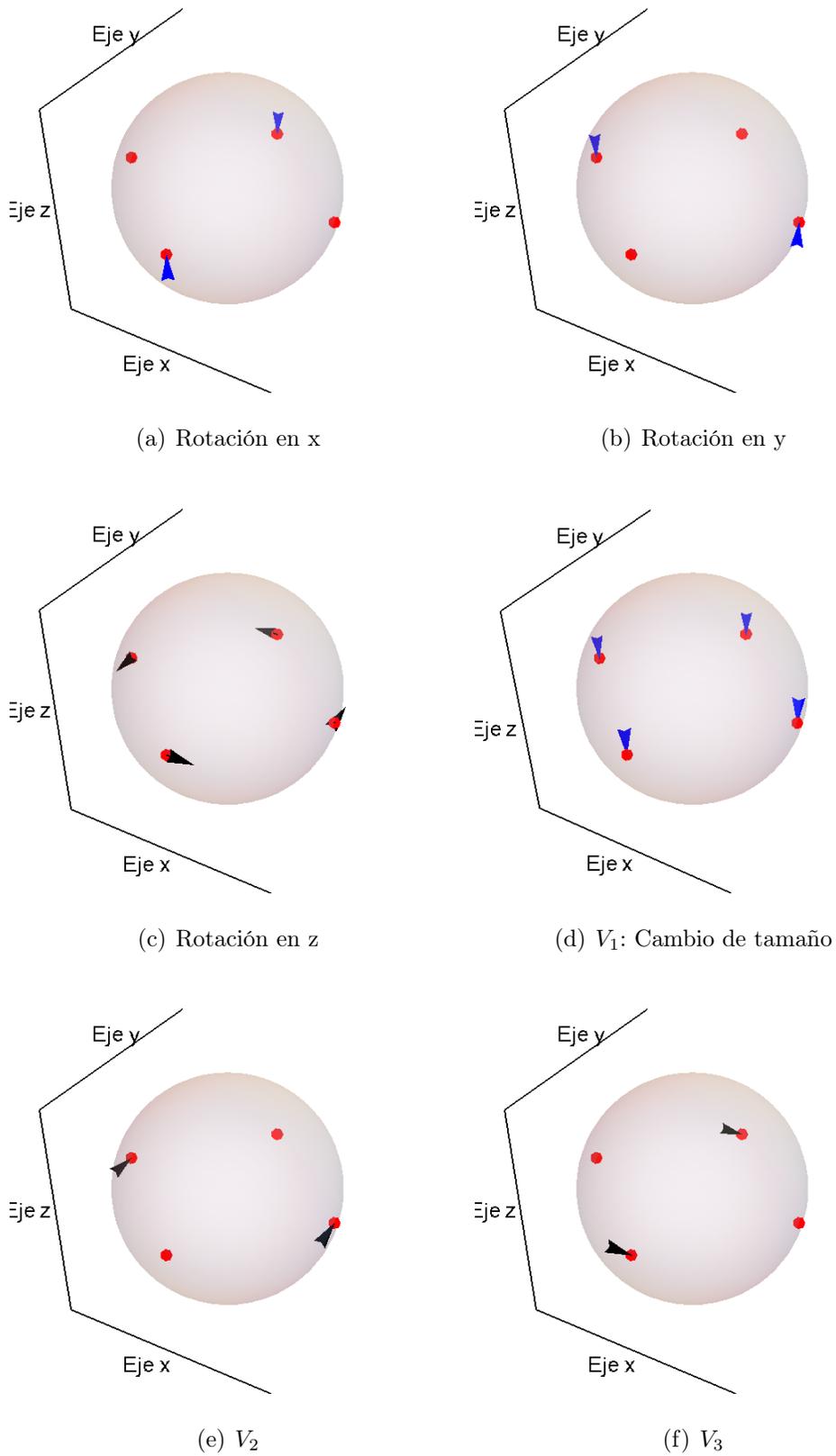


Figura 2.3: Deformaciones de las constelaciones de estados GHZ ante rotaciones y ante los vectores ortogonales a estas, para  $s=2$  (azul  $\rightarrow \partial_\theta$ , negro  $\rightarrow \partial_\phi$ ).

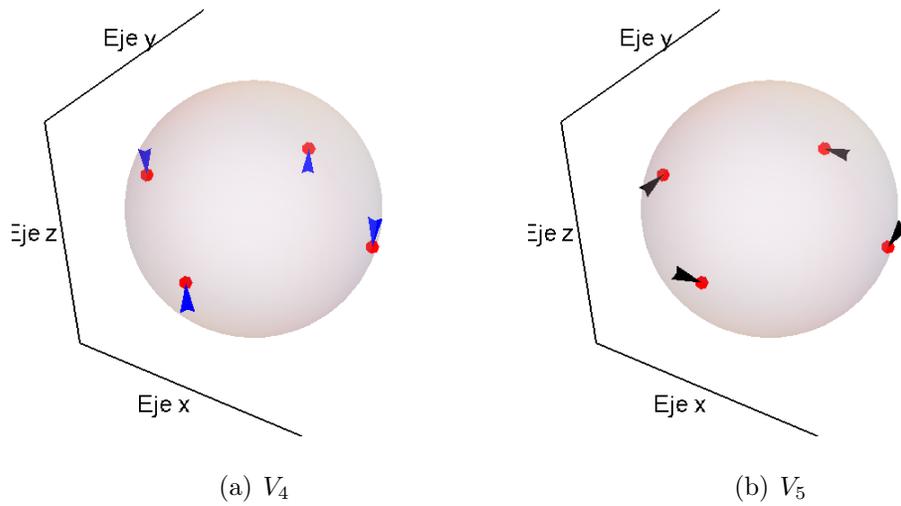


Figura 2.4: Deformaciones de las constelaciones ante vectores ortogonales a los inducidos por rotaciones de estados GHZ, para  $s=2$  (azul  $\rightarrow \partial_\theta$ , negro  $\rightarrow \partial_\phi$ ).

Hasta este punto ha sido posible apreciar que nuestra idea de generalización a partir de identificar vectores ortogonales a los verticales en el espacio proyectivo en coordenadas reales, coincide con las deformaciones encontradas numericamente al principio de este trabajo. Algo que podría resaltarse es que las deformaciones ortogonales parecieran consistir únicamente de desplazamientos de las estrellas, ya sea en la dirección de  $\partial_\theta$  o de  $\partial_\phi$ . En general, este no es el caso, y pueden existir deformaciones que consistan de desplazamientos de las estrellas compuestos en ambas direcciones. Véamos un ejemplo de esto:

### Espín 3

En este caso sólo expondré las gráficas con sus deformaciones correspondientes, ya que la idea para obtenerlas y los cálculos, son similares a los casos anteriores.

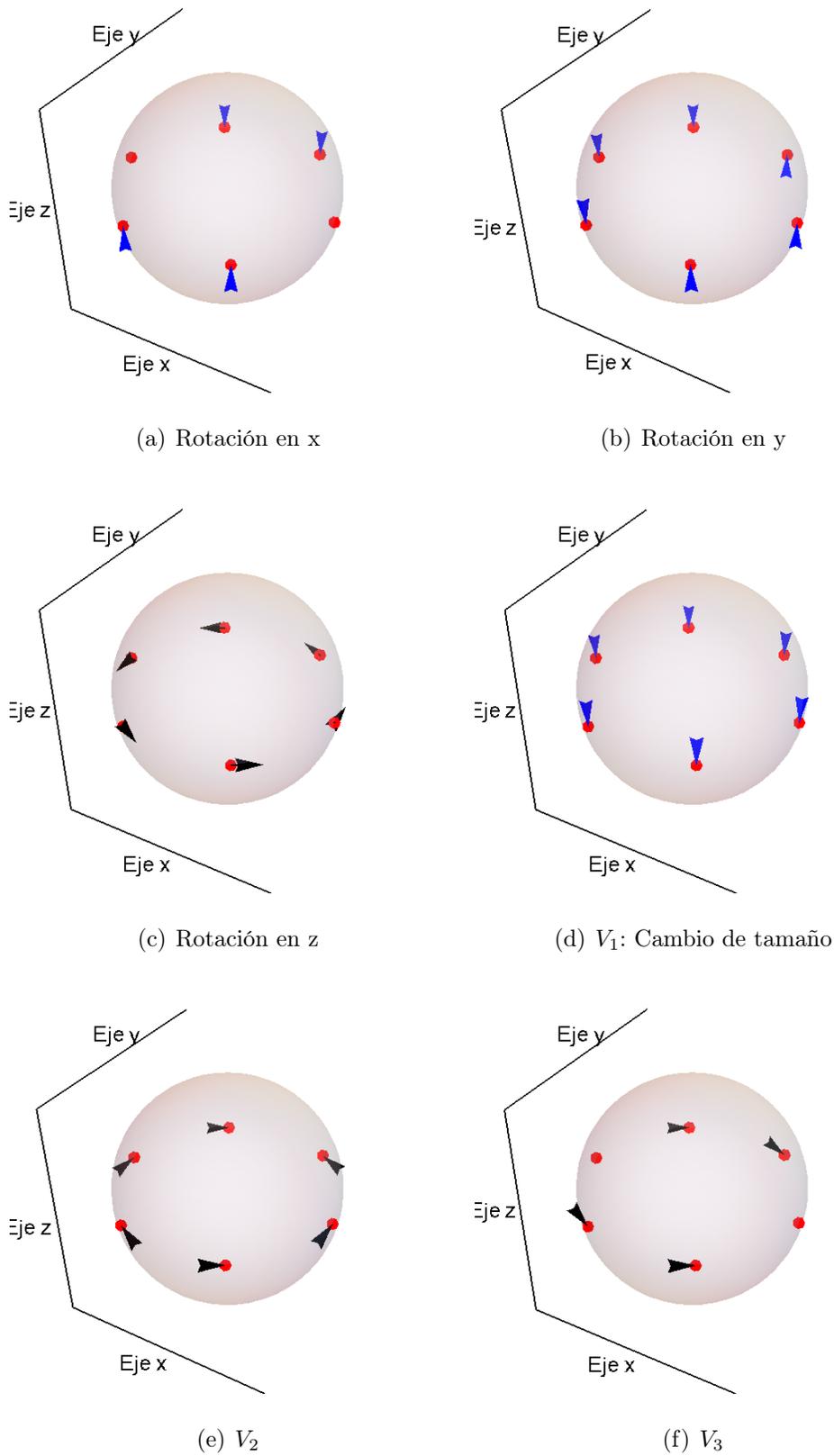


Figura 2.5: Deformaciones de las constelaciones de estados GHZ ante rotaciones y ante los vectores ortogonales a estas, para  $s=3$  (azul  $\rightarrow \partial_\theta$ , negro  $\rightarrow \partial_\phi$ ).

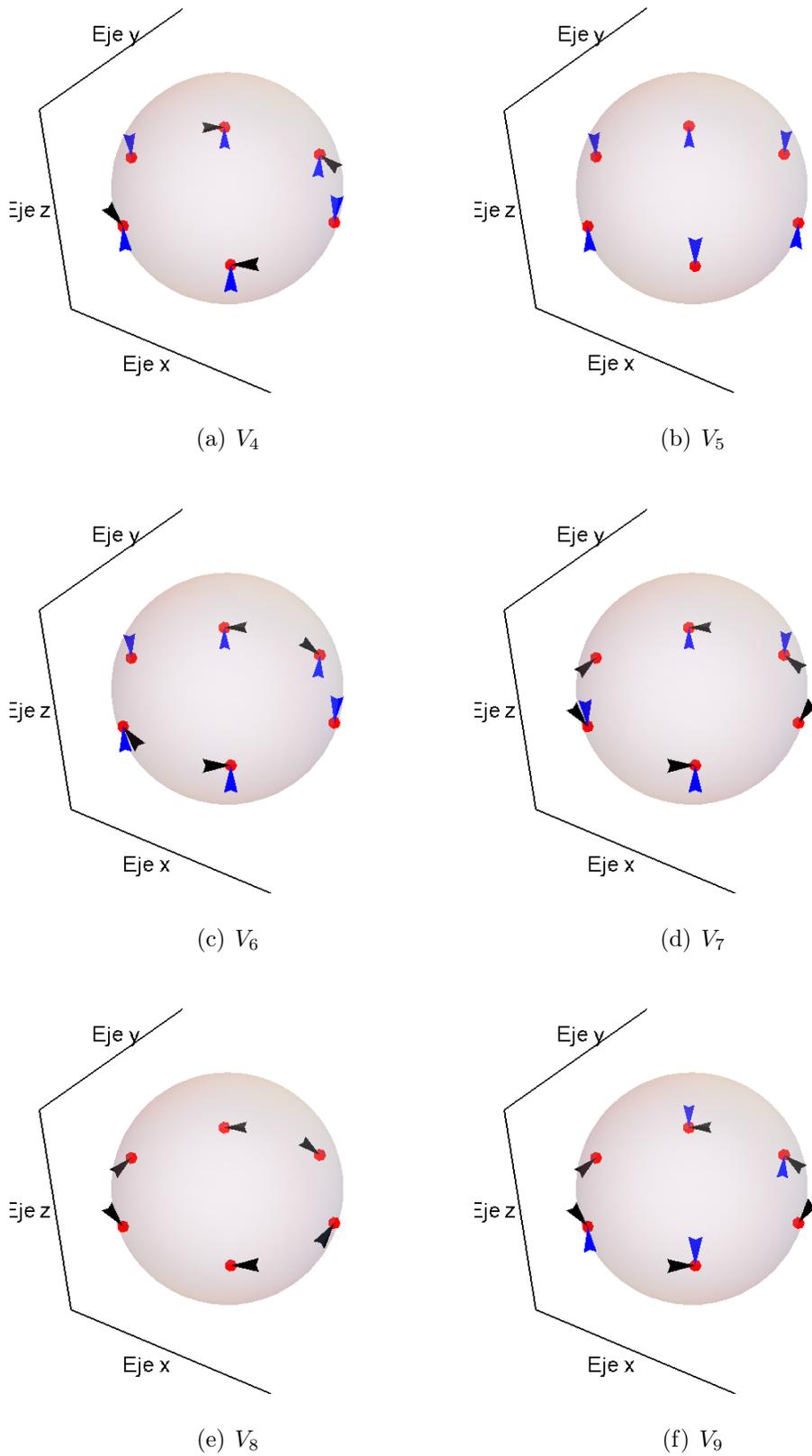


Figura 2.6: Deformaciones de las constelaciones ante vectores ortogonales a los inducidos por rotaciones de estados GHZ, para  $s=3$  (azul  $\rightarrow \partial_\theta$ , negro  $\rightarrow \partial_\phi$ ).

Como puede observarse, los vectores  $V_4, V_6, V_7$  y  $V_9$  inducen deformaciones donde las estrellas de la constelación se desplazan en una dirección compuesta.

Con lo expuesto anteriormente, es posible hallar e interpretar geoméricamente las deformaciones de las constelaciones inducidas por vectores horizontales en el espacio proyectivo de estados GHZ para cualquier espín. De dichas deformaciones puede decirse que no tienen componentes rotacionales, es decir; que son cambios de forma puros de la constelación. El problema con el procedimiento descrito anteriormente es que no establece un criterio general para clasificar a dichos vectores, sino que los construye para cada caso particular. Con el fin de establecer este criterio, estudiaremos desde otra perspectiva a las constelaciones de estados GHZ.

## 2.5. Momento angular de las constelaciones GHZ y generalización de las deformaciones

Pensemos a las constelaciones de los estados GHZ como sistemas mecánicos, conformados por masas de  $m = 1$  colocadas en el sitio de cada estrella de la constelación. A este nuevo sistema le podemos calcular cantidades físicas, de las cuales va a interesarnos el momento angular. Es intuitivo afirmar que, al rotar la constelación el momento angular de esta será distinto de cero, pero la experiencia numerica con las deformaciones inducidas por vectores horizontales, ha expuesto que, dentro de los parametros del modelo de masas, los vectores horizontales deforman a la constelación de tal manera que el momento angular es cero.

Lo anterior nos lleva a considerar el siguiente:

### **Teorema**

*Considerando a los estados GHZ como sistemas mecánicos, conformados por masas de  $m=1$  colocadas en el sitio de cada estrella de la constelación. Los vectores horizontales son aquellos que deforman a la constelación de tal manera que el momento angular es cero.*

### **Prueba**

Comencemos el tratamiento encontrando la forma general de la matriz de transforma-





La matriz que buscamos se obtiene de la multiplicación de  $r2a^{-1} \cdot co2r^{-1} \cdot rc2co^{-1} \cdot vr2vc^{-1}$ . Véamos su estructura, pero antes será útil definir un par de matrices:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2s}} & (-1)^2 \binom{2s}{2}^{-1/2} \operatorname{Re}[c_{1,0}] & (-1)^3 \binom{2s}{3}^{-1/2} \operatorname{Re}[c_{2,0}] & \cdots & \operatorname{Re}[\beta_0] \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \cos(\pi/s) & (-1)^2 \binom{2s}{2}^{-1/2} \operatorname{Re}[e^{i(\pi/s)} c_{1,1}] & (-1)^3 \binom{2s}{3}^{-1/2} \operatorname{Re}[e^{i(\pi/s)} c_{2,1}] & \cdots & \operatorname{Re}[\beta_0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \cos[(2s-1)(\pi/s)] & (-1)^2 \binom{2s}{2}^{-1/2} \operatorname{Re}[e^{i(2s-1)(\pi/s)} c_{1,2s-1}] & (-1)^3 \binom{2s}{3}^{-1/2} \operatorname{Re}[e^{i(2s-1)(\pi/s)} c_{2,2s-1}] & \cdots & \operatorname{Re}[\beta_0] \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^2 \binom{2s}{2}^{-1/2} \operatorname{Im}[c_{1,0}] & (-1)^3 \binom{2s}{3}^{-1/2} \operatorname{Im}[c_{2,0}] & \cdots & \operatorname{Im}[\beta_0] \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \sin(\pi/s) & (-1)^2 \binom{2s}{2}^{-1/2} \operatorname{Im}[e^{i(\pi/s)} c_{1,1}] & (-1)^3 \binom{2s}{3}^{-1/2} \operatorname{Im}[e^{i(\pi/s)} c_{2,1}] & \cdots & \operatorname{Im}[\beta_0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \sin[(2s-1)(\pi/s)] & (-1)^2 \binom{2s}{2}^{-1/2} \operatorname{Im}[e^{i(2s-1)(\pi/s)} c_{1,2s-1}] & (-1)^3 \binom{2s}{3}^{-1/2} \operatorname{Im}[e^{i(2s-1)(\pi/s)} c_{2,2s-1}] & \cdots & \operatorname{Re}[\beta_0] \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Notemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[e^{in(\pi/s)} c_{1,n}] &= -\cos[2\pi(n/s)], & \operatorname{Im}[e^{in(\pi/s)} c_{1,n}] &= -\sin[2\pi(n/s)], \\ \operatorname{Re}[e^{in(\pi/s)} c_{2,n}] &= -\cos[3\pi(n/s)], & \operatorname{Im}[e^{in(\pi/s)} c_{2,n}] &= -\sin[3\pi(n/s)], \\ \operatorname{Re}[e^{in(\pi/s)} c_{3,n}] &= -\cos[4\pi(n/s)], & \operatorname{Im}[e^{in(\pi/s)} c_{3,n}] &= -\sin[4\pi(n/s)], \\ & & & \vdots \\ & & & \beta_0 = (-1)^{2s-1}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

con lo que las matrices anteriores se reducen a:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2s}} & (-1)^1 \binom{2s}{2}^{-1/2} & (-1)^2 \binom{2s}{3}^{-1/2} & \cdots & (-1)^{2s-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \cos(\pi/s) & (-1)^1 \binom{2s}{2}^{-1/2} \cos(2\pi/s) & (-1)^2 \binom{2s}{3}^{-1/2} \cos(3\pi/s) & \cdots & (-1)^{2s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \cos[(2s-1)(\pi/s)] & (-1)^1 \binom{2s}{2}^{-1/2} \cos[(2s-1)(2\pi/s)] & (-1)^2 \binom{2s}{3}^{-1/2} \cos[(2s-1)(3\pi/s)] & \cdots & (-1)^{2s-1} \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \sin(\pi/s) & (-1)^1 \binom{2s}{2}^{-1/2} \sin(2\pi/s) & (-1)^2 \binom{2s}{3}^{-1/2} \sin(3\pi/s) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} \sin[(2s-1)(\pi/s)] & (-1)^1 \binom{2s}{2}^{-1/2} \sin[(2s-1)(2\pi/s)] & (-1)^2 \binom{2s}{3}^{-1/2} \sin[(2s-1)(3\pi/s)] & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Finalmente la matriz buscada es:

$$vr2a^{-1} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} \gamma & \zeta \\ -\zeta & \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Vale la pena notar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2s-1} \zeta_{kl} &= (-1)^{l-1} \binom{2s}{l-1}^{-1/2} \sum_{n=0}^{2s-1} \sin[l(n\pi/s)] = 0 & \forall l \neq 2s \\ \sum_{k=0}^{2s-1} \gamma_{kl} &= (-1)^{l-1} \binom{2s}{l-1}^{-1/2} \sum_{n=0}^{2s-1} \cos[l(n\pi/s)] = 0 & \forall l \neq 2s. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Con todo lo expuesto hasta ahora podemos abordar el problema del momento angular de la constelación para estados GHZ en general. Primero, recordemos la forma general de los vectores verticales en coordenadas reales en el espacio proyectivo:

$$V_x = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_y = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_z = 2s \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Para hallar los vectores ortogonales a los 3 anteriores, en coordenadas reales basta con tomar alguno que tenga entrada en donde estos no tienen y añadir los vectores ortogonales

a  $\{V_x, V_y\}$ :

$$V_x^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_y^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

De ello se obtienen  $4s - 3$  vectores horizontales entre sí y también a  $V_x, V_y, V_z$ .

Nuestra hipótesis será que los vectores ortogonales descritos anteriormente son tales que el momento angular de la constelación, al deformarse de acuerdo al campo de velocidades inducido por estos en la esfera, es cero.

Para demostrarlo, consideremos primero vectores de la forma

$$V_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

donde el 1 se ha colocado en la posición  $i$  donde los vectores  $\{V_x, V_y, V_z\}$  no tienen entradas.

Véamos como es el campo de velocidades inducido por este vector sobre la esfera

$$V_i^{S^2} = vr2a^{-1} \cdot V_i = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} V_0^\theta \\ \vdots \\ V_{2s-1}^\theta \\ V_0^\phi \\ \vdots \\ V_{2s-1}^\phi \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

dicho vector tendrá dos posibles formas:

1.- Si  $i < 2s - 1$

$$V_i^{S^2} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} \gamma_{1,i} \\ \vdots \\ \gamma_{2s,i} \\ -\zeta_{1,i} \\ \vdots \\ -\zeta_{2s,i} \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

2.- Si  $i > 2s - 1$

$$V_i^{S^2} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} \zeta_{1,i} \\ \vdots \\ \zeta_{2s,i} \\ \gamma_{1,i} \\ \vdots \\ \gamma_{2s,i} \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Ahora que conocemos los campos de velocidades inducidos en la esfera, analicemos que deben cumplir para que el momento angular de la constelación sea cero al deformarse debido a ellos.

Pensemos que cada estrella tiene masa  $m = 1$  y calculemos su vector de posición y de velocidad para estados GHZ:

$$\begin{aligned} \vec{r}_n &= \cos[n(\pi/s)]\hat{i} + \sin[n(\pi/s)]\hat{j} \\ \vec{p}_n &= -V_n^\phi \sin[n(\pi/s)]\hat{i} + V_n^\phi \cos[n(\pi/s)]\hat{j} + V_n^\theta \hat{k} \end{aligned} \quad (2.79)$$

por lo que el momento angular es

$$\vec{L}_n = \vec{r}_n \times \vec{p}_n = V_n^\theta \sin[n(\pi/s)]\hat{i} - V_n^\theta \cos[n(\pi/s)]\hat{j} + V_n^\phi \hat{k}. \quad (2.80)$$

De esto se concluye que las condiciones que debe cumplir el campo de velocidades son:

$$\sum_{k=0}^{2s-1} V_k^\theta e^{ik(\pi/s)} = 0, \quad \sum_{k=0}^{2s-1} V_k^\phi = 0. \quad (2.81)$$

en el caso que trabajamos las dos posibles formas expuestas en las ecuaciones (2.77) y (2.78) satisfacen las condiciones de la ecuación (2.81) gracias a las identidades de la ecuación (2.72). Por lo que podemos asegurar que este tipo de vectores ortogonales induce un campo de velocidades que deforma a las contelaciones de los estados GHZ de tal forma que el momento angular total es cero.

Nos resta ver que ocurre con  $\{V_x^\perp, V_y^\perp\}$  calculemos sus campos de velocidades

$$\begin{aligned}
 V_x^{\perp S^2} = vr2a^{-1} \cdot V_x^\perp = \frac{1}{4s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(\pi/s)] \\ \vdots \\ -\sin((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)] \\ -1 + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \\ -\cos(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(\pi/s)] \\ \vdots \\ -\cos((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)] \end{pmatrix}, \\
 V_y^{\perp S^2} = vr2a^{-1} \cdot V_y^\perp = \frac{1}{4s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} 1 + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \\ \cos(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(\pi/s)] \\ \vdots \\ \cos((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)] \\ 0 \\ -(\sin(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(\pi/s)]) \\ \vdots \\ -(\sin((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)]) \end{pmatrix}, \quad (2.82)
 \end{aligned}$$

que se reducen a

$$\begin{aligned}
 V_x^{\perp S^2} = -\frac{1}{2s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \cos(\pi/s) \\ \cos(2\pi/s) \\ \vdots \\ \cos((2s-2)\pi/s) \\ \cos((2s-1)\pi/s) \end{pmatrix}, \quad V_y^{\perp S^2} = -\frac{1}{2s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\pi/s) \\ \sin(2\pi/s) \\ \vdots \\ \sin((2s-2)\pi/s) \\ \sin((2s-1)\pi/s) \end{pmatrix}. \quad (2.83)
 \end{aligned}$$

Podemos ver facilmente que las expresiones anteriores satisfacen las condiciones de la ecuación (2.81) pues las primeras  $2s$  entradas en ambos, correspondientes a  $V_{xk}^{\perp\theta}$  y  $V_{yk}^{\perp\theta}$ , son cero, lo que satisface trivialmente la primera condición. Para la segunda, las sumas de

las componentes en  $\phi$  son:

$$\begin{aligned} \sum_{k=k}^{2s-1} V_{xk}^{\perp\phi} &= \sum_{k=0}^{2s-1} \cos(k(\pi/s)) = 0, \\ \sum_{k=k}^{2s-1} V_{xk}^{\perp\theta} &= \sum_{k=0}^{2s-1} \sin(k(\pi/s)) = 0, \end{aligned} \quad (2.84)$$

por lo que este par de vectores también induce un campo de velocidades que deforma la constelación de tal manera que el momento angular de esta es cero.

Una vez que hemos probado que en general, para los estados GHZ, las deformaciones de la constelación tales que el momento angular es cero corresponden a vectores horizontales, contamos con un criterio para caracterizar a dichos vectores para cualquier espín.

## 2.6. De GHZ a constelaciones $\theta$

Ahora que contamos con un tratamiento general de los estados GHZ, nos interesa ir más lejos y buscar caracterizar los espacios tangentes a estados más generales. Partamos de una familia de estados que apareció al inicio del trabajo, la que denominaremos *familia  $\theta$*  proveniente de una *constelación  $\theta$* ; que definiremos como aquella constituida por un  $2s$ -ágono regular cuyas estrellas forman un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$ .

Este tipo de constelación será de nuestro interés, pues los estados y demás objetos matemáticos asociados a ella presentan una estructura similar a GHZ, lo que nos permite un tratamiento sencillo y apoyado en los desarrollos previos.

Como punto de partida, la expresión general de los estados  $\theta$  es

$$|\psi\rangle_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{2s+1} \tan^{2s}(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

que claramente se reduce a  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  cuando  $\theta = \pi/2$ . Así mismo, la métrica para estos estados en coordenadas reales es diagonal

$$g_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\tan^{4s}(\frac{\theta}{2})} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{1}{[1+\tan^{4s}(\frac{\theta}{2})]^2} & & \\ & & & \frac{1}{1+\tan^{4s}(\frac{\theta}{2})} & \\ 0 & \cdots & & & \ddots \\ & & & & & \frac{1}{[1+\tan^{4s}(\frac{\theta}{2})]^2} \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

y podemos calcular facilmente los vectores reales inducidos por rotaciones respecto a los ejes coordenados

$$V_{x\theta} = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \tan^{2s}(\frac{\theta}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{y\theta} = \sqrt{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s} \tan^{2s}(\frac{\theta}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{z\theta} = 2s \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \tan^{2s}(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Lo que, al igual que en el caso de GHZ, nos permite caracterizar facilmente a los vectores del espacio tangente horizontal, el par de vectores ortogonal a los inducidos por rotación

en los ejes  $\{x, y\}$  se ve como:

$$V_{x\theta}^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{y\theta}^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ (-1)^{2s+1} \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

mientras que los  $4s - 5$  vectores restantes tienen la forma

$$V_{i\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

con 1 como entrada en donde los 2 anteriores tienen ceros. Al igual que en el caso GHZ, todos los vectores descritos anteriormente son ortogonales entre sí, lo que nos permite describir en su totalidad a los subespacios vertical y horizontal, generados por los vectores inducidos por rotaciones y los ortogonales a estos, respectivamente.

Veamos si podemos obtener el significado geométrico de los vectores horizontales, primero calculemos la matriz que lleva vectores reales  $\{x_i = \text{Re}(z_i), y_i = \text{Im}(z_i)\}$  a coordenadas dadas por los ángulos de las estrellas de Majorana  $(\theta, \phi)$ . Para ello, recordemos las definiciones de las ecuaciones (2.69, 2.70), con las cuales, expresamos

$$vr2a\theta^{-1} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} \gamma(1 + \cos \theta) & \zeta(1 + \cos \theta) \\ -\zeta \cot(\frac{\theta}{2}) & \gamma \cot(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Así, los vectores  $\{V_{x\theta}^\perp, V_{y\theta}^\perp\}$  en coordenadas esféricas lucen como

$$\begin{aligned}
 V_{x\theta}^{\perp S^2} = vr2a\theta^{-1} \cdot V_{x\theta}^\perp = \frac{1}{4s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + \cos \theta) \left[ -\sin(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ \vdots \\ (1 + \cos \theta) \left[ -\sin((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ \cot(\frac{\theta}{2}) \left[ -1 + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ \cot(\frac{\theta}{2}) \left[ -\cos(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ \vdots \\ \cot(\frac{\theta}{2}) \left[ -\cos((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \end{pmatrix}, \\
 V_{y\theta}^{\perp S^2} = vr2a\theta^{-1} \cdot V_{y\theta}^\perp = \frac{1}{4s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta) \left[ 1 + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ (1 + \cos \theta) \left[ \cos(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ \vdots \\ (1 + \cos \theta) \left[ \cos((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \cos[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ 0 \\ \cot(\frac{\theta}{2}) \left[ -\sin(\pi/s) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \\ \vdots \\ \cot(\frac{\theta}{2}) \left[ -\sin((2s-1)(\pi/s)) + (-1)^{2(s-1)}(-1)^{2s+1} \sin[(2s-1)(2s-1)(\pi/s)] \cot^{2s}(\frac{\theta}{2}) \right] \end{pmatrix} \quad (2.91)
 \end{aligned}$$

que se reducen a

$$\begin{aligned}
 V_{x\theta}^{\perp S^2} = \frac{1}{4s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + \cos \theta) \sin(\pi/s) [\cot^{2s}(\theta/2) - 1] \\ (1 + \cos \theta) \sin(2\pi/s) [\cot^{2s}(\theta/2) - 1] \\ \vdots \\ -(1 + \cos \theta) \sin(2\pi/s) [\cot^{2s}(\theta/2) - 1] \\ -(1 + \cos \theta) \sin(\pi/s) [\cot^{2s}(\theta/2) - 1] \\ -\cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \\ -\cos(\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \\ -\cos(2\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \\ \vdots \\ -\cos(2\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \\ -\cos(\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \end{pmatrix}, \quad V_{y\theta}^{\perp S^2} = \frac{1}{4s\sqrt{2s}} & \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta) [1 - \cot^{2s}(\theta/2)] \\ \cos(\pi/s)(1 + \cos \theta) [1 - \cot^{2s}(\theta/2)] \\ \cos(2\pi/s)(1 + \cos \theta) [1 - \cot^{2s}(\theta/2)] \\ \vdots \\ \cos(2\pi/s)(1 + \cos \theta) [1 - \cot^{2s}(\theta/2)] \\ \cos(\pi/s)(1 + \cos \theta) [1 - \cot^{2s}(\theta/2)] \\ 0 \\ -\sin(\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \\ -\sin(2\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \\ \vdots \\ \sin(2\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \\ \sin(\pi/s) \cot(\theta/2) [1 + \cot^{2s}(\theta/2)] \end{pmatrix}. \quad (2.92)
 \end{aligned}$$

Mientras que el vector  $v_{i\theta}$  se mapea a

$$V_{i\theta}^{S^2} = vr2a\theta^{-1} \cdot V_{i\theta} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} V_0^\theta \\ \vdots \\ V_{2s-1}^\theta \\ V_0^\phi \\ \vdots \\ V_{2s-1}^\phi \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

dicho vector tendrá dos posibles formas:

1.- Si  $i < 2s - 1$

$$V_{i\theta}^{S^2} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} \gamma_{1,i}(1 + \cos \theta) \\ \vdots \\ \gamma_{2s,i}(1 + \cos \theta) \\ -\zeta_{1,i} \cot(\theta/2) \\ \vdots \\ -\zeta_{2s,i} \cot(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

2.- Si  $i > 2s - 1$

$$V_{i\theta}^{S^2} = \frac{1}{4s} \begin{pmatrix} \zeta_{1,i}(1 + \cos \theta) \\ \vdots \\ \zeta_{2s,i}(1 + \cos \theta) \\ \gamma_{1,i} \cot(\theta/2) \\ \vdots \\ \gamma_{2s,i} \cot(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Con ello, hemos caracterizado a los espacios tangentes a los estados correspondientes a constelaciones  $\theta$ .

# Capítulo 3

## Espacio horizontal y espacio de momento angular cero

Con base en las ideas trabajadas en el capítulo anterior, ahora conocemos en general, tanto a los generadores del espacio vertical, como a los del espacio horizontal. Pero, en el caso de los estados  $\theta$  no conocemos un criterio general para establecer esta separación y clasificar a los generadores, puesto que numericamente se sabe que, en general, no podemos clasificarlos mediante el criterio del momento angular cero. Pero podemos buscar alguna manera de comparar sus espacios tangentes, para ello necesitamos desarrollar una forma de comparar planos  $k$  dimensionales; tarea que nos ocupará a continuación.

### 3.1. Grassmanniano

Denotaremos por  $\mathbb{G}_{k,n}^{\mathbb{C}}$  al grassmanniano, que es un espacio en el que cada punto representa un  $k$ -plano que vive en  $\mathbb{C}^n$  y pasa por el origen[21].

Para encontrar las coordenadas de un plano en el grassmanniano, pensemos en lo siguiente: tomemos  $k$  vectores que generan el plano  $\Pi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$  y construyamos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \cdots & \psi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_k^1 & \cdots & \psi_k^n \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

ahora, extraemos de ella las primeras  $k$  columnas y generamos la matriz  $\Lambda \in \mathbb{M}_{k \times k}$  de tal forma que  $\Lambda$  sea invertible y calculamos:

$$M' = \Lambda^{-1}M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & z_{1,1} & \cdots & z_{1,n-k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & z_{k,1} & \cdots & z_{k,n-k} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Las coordenadas en el grassmanniano son las  $z$ 's, por lo que hay  $k(n-k)$  componentes, que pueden ser escritas, redefiniendo los índices, de la siguiente forma:  $(g_1, g_2, \dots, g_{k(n-k)})$ .

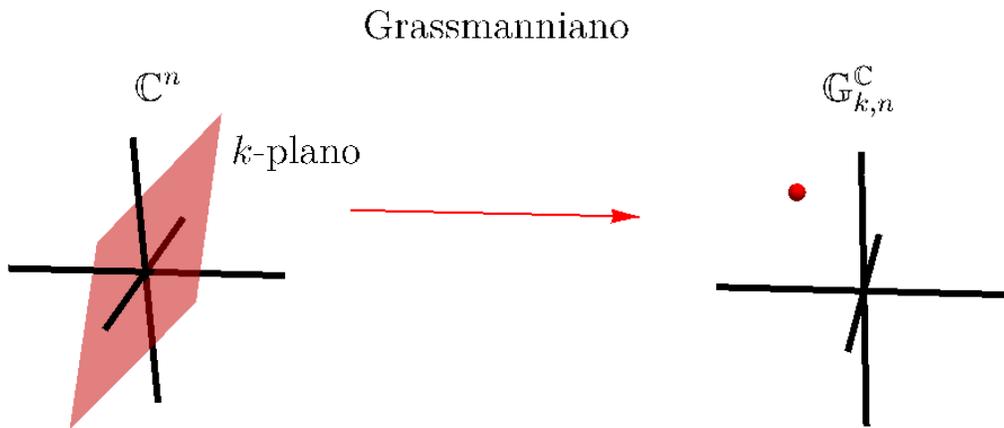


Figura 3.1: Esquema que muestra el mapeo de un  $k$ -plano en  $\mathbb{C}^n$  a un punto en el grassmanniano  $\mathbb{G}_{k,n}^{\mathbb{C}}$ .

### 3.1.1. Encajamiento de Plucker del Grassmanniano

Consideremos el producto wedge de los vectores que caracterizan a un plano  $\Pi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k, \quad (3.3)$$

al hacer una transformación de coordenadas de la forma  $\psi_{i'} = \Lambda_{i'}^j \psi_j$  el producto cambia por

$$\psi_{1'} \wedge \psi_{2'} \wedge \cdots \wedge \psi_{k'} = \det(\Lambda) \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k. \quad (3.4)$$

Además, si consideramos a cada vector en una base de la forma  $\psi_i = \psi_i^\mu e_\mu$  podemos expresar el producto wedge como

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k = \Pi^{i_1, i_2, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \quad (3.5)$$

donde cada  $\Pi^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  se calcula como el determinante de la matriz formada al extraer las columnas  $i_1, i_2, \dots, i_k$  de la matriz de la ecuación (3.1) [22] [23] [24]

### 3.1.2. Producto interno

Tomemos dos vectores  $|a\rangle, |b\rangle \in \Lambda^k \mathbb{H}$  en el espacio de productos wedge de orden k, de la forma  $|a\rangle = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k, |b\rangle = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k$ . Y calculemos  $\langle a|b\rangle$  mediante

$$\langle a|b\rangle = \det \begin{pmatrix} \langle \psi_1 | \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_1 | \phi_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_k | \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_k | \phi_k \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Por otro lado, podemos calcular el producto interno con los vectores en el espacio de Plucker como un producto hermitiano estandar. Es decir:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \Pi^1 \\ \vdots \\ \Pi^{\binom{n}{k}} \end{pmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^{\binom{n}{k}} \end{pmatrix} \rightarrow \langle a|b\rangle_P = \sum_i^{\binom{n}{k}} \Pi^{i*} \xi^i. \quad (3.7)$$

Estos productos generan el mismo resultado  $\langle a|b\rangle_P = \langle a|b\rangle$ .

Trabajar con el Grassmanniano nos permite comparar el espacio horizontal con el de momento angular cero mediante los productos definidos anteriormente. Pero ocurre que ambos productos se anulan si alguno de los vectores en un espacio es ortogonal a uno o varios en el otro, mientras que en este caso nos interesa una separación total de los espacios, es decir; que todos los vectores de un espacio sean ortogonales a todos los del otro[25].

### 3.1.3. Producto interno mediante la representación matricial

Anteriormente hemos trabajado al espacio proyectivo mapeando un estado en el espacio de Hilbert al dividir por su primera entrada en la base  $|s, m\rangle$  de eigenestados de  $s_z$ , pero esta no es la única manera de ir al espacio proyectivo. Es posible trabajar con la matriz de densidad y realizar el análisis de los vectores inducidos por rotaciones mediante matrices, para ello partamos del estado  $|\psi\rangle$  y construyamos su matriz de densidad

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (3.8)$$

Anteriormente, para encontrar la rotación del estado, actuabamos por izquierda con un elemento de  $SU(2)$  de la forma  $g = e^{-it\vec{S}\cdot\hat{n}}$  es decir:  $|\psi(t)\rangle = g|\psi\rangle$ . Esta acción para la matriz de densidad se traduce en

$$\rho(t) = g\rho g^{-1}, \quad (3.9)$$

por lo que para calcular un vector debemos derivar esta matriz:  $v_n = \partial_t(\rho(t))|_{t=0}$ . La expresión anterior se simplifica al siguiente conmutador:

$$v_n = -i[S_n, \rho]. \quad (3.10)$$

Con el fin de construir un producto interno entre espacios (planos) calculemos la base dual definiendo  $g_{ij} = \frac{1}{2}Tr(v_i \cdot v_j)$ , con lo que

$$w^i = g^{ij}v_j, \quad (3.11)$$

dichas bases caracterizan al espacio horizontal ( $E_h$ ) y satisfacen

$$\delta_i^j = \frac{1}{2}Tr(v_i \cdot w^j). \quad (3.12)$$

Supongamos ahora que contamos con otro conjunto de vectores  $\{u_i\}$  y sus duales  $\{z_i\}$  que caracterizan al espacio ( $E_x$ ), en este caso la dimensión del espacio que representan debe ser  $\dim=3$ , para poder operarlos con los del espacio horizontal. Con esto podemos definir

el producto interno como:

$$\langle E_h, E_x \rangle = \frac{1}{12} \sum_{ij} Tr(v_i \cdot z^j) \cdot Tr(u_i \cdot w^j), \quad (3.13)$$

el factor  $\frac{1}{12}$  proviene de los dos  $1/2$  correspondientes a las bases y  $1/3$  por la dimensión del espacio que describen. Este producto tiene la particularidad de que nos permite saber cuando los espacios están separados y que tanto lo están, pues para que se anule todos los vectores de un espacio deben ser ortogonales a todos los del otro.

**Familia uniparamétrica  $\theta$  (s=3/2)**

Analicemos lo que ocurre en el caso de una constelación  $\theta$  de espín  $3/2$ , nos interesa este espín pues las dimensiones del espacio vertical y horizontal coinciden (dim= 3) por lo que la dimensión del espacio de momento angular cero será igualmente 3 y será posible emplear el producto interno por matrices definido anteriormente para comparar los espacios.

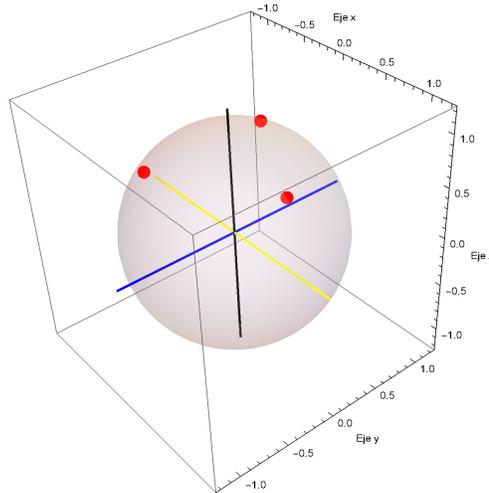


Figura 3.2: Constelación que ejemplifica a un elemento de la familia uniparamétrica  $\theta$ , de s=3/2

Los estados que representan a estas constelaciones tienen la forma

$$|\psi_\theta\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

con  $a = \tan^3(\theta/2)$ , a partir de  $\rho = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|$  se obtiene que los vectores verticales para esta familia son los siguientes

$$v_{x\theta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2(a^2+1)} & \frac{i\sqrt{3}a}{2(a^2+1)} & 0 \\ -\frac{i\sqrt{3}}{2(a^2+1)} & 0 & 0 & -\frac{i\sqrt{3}a}{2(a^2+1)} \\ -\frac{i\sqrt{3}a}{2(a^2+1)} & 0 & 0 & -\frac{i\sqrt{3}a^2}{2(a^2+1)} \\ 0 & \frac{i\sqrt{3}a}{2(a^2+1)} & \frac{i\sqrt{3}a^2}{2(a^2+1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{y\theta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2a^2+2} & -\frac{\sqrt{3}a}{2(a^2+1)} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2a^2+2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}a}{2a^2+2} \\ -\frac{\sqrt{3}a}{2(a^2+1)} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}a^2}{2(a^2+1)} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}a}{2a^2+2} & -\frac{\sqrt{3}a^2}{2(a^2+1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$v_{z\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{3ia}{a^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3ia}{a^2+1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

mientras que los duales a los vectores verticales son

$$w_{x\theta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2i}{\sqrt{3}(a^2+1)} & \frac{2ia}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 \\ -\frac{2i}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 & 0 & -\frac{2ia}{\sqrt{3}(a^2+1)} \\ -\frac{2ia}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 & 0 & -\frac{2ia^2}{\sqrt{3}(a^2+1)} \\ 0 & \frac{2ia}{\sqrt{3}(a^2+1)} & \frac{2ia^2}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{y\theta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}(a^2+1)} & -\frac{2a}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 & 0 & \frac{2a}{\sqrt{3}(a^2+1)} \\ -\frac{2a}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 & 0 & -\frac{2a^2}{\sqrt{3}(a^2+1)} \\ 0 & \frac{2a}{\sqrt{3}(a^2+1)} & -\frac{2a^2}{\sqrt{3}(a^2+1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{z\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{i(a^2+1)}{3a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i(a^2+1)}{3a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Por otro lado, los vectores que generan el espacio de momento angular cero son los siguientes

tes

$$\begin{aligned}
 u_{1\theta p0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \sin^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^4(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 \sin^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^4(\theta) & 0 & 0 & 384 \sin^{12}\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^7(\theta) \end{pmatrix}, \\
 u_{2\theta p0} &= \begin{pmatrix} 0 & (-2 - 2i\sqrt{3}) \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc(\theta) & i(\sqrt{3} + i) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & 2\sqrt{3} \cos(\theta) \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 2i(\sqrt{3} + i) \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc(\theta) & 0 & 0 & 16i(\sqrt{3} + i) \sin^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^4(\theta) \\ \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(\cos(\theta) - 1) & 0 & 0 & (-8 - 8i\sqrt{3}) \sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^3(\theta) \\ 2\sqrt{3} \cos(\theta) \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) & -16i(\sqrt{3} - i) \sin^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^4(\theta) & 8i(\sqrt{3} + i) \sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^3(\theta) & 4\sqrt{3} \cos(\theta) \tan^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \\
 u_{3\theta p0} &= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) - 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos(\theta) - 1 & \sqrt{3} \cos(\theta) \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin(\theta) - 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 & 0 & -32 \sin^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^4(\theta) \\ \cos(\theta) - 1 & 0 & 0 & -16 \sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^3(\theta) \\ \sqrt{3} \cos(\theta) \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) & -32 \sin^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^4(\theta) & -16 \sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^3(\theta) & 2\sqrt{3} \cos(\theta) \tan^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

con sus respectivos vectores duales dados por

$$\begin{aligned}
 z_{1\theta p0} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{8(\sqrt{3}+3i) \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{9 \cos(2\theta)+15} & \frac{8(\sqrt{3}-3i) \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} & -\frac{64 \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3(15 \cos(\theta)-18 \cos(2\theta)+\cos(3\theta)-30)} \\ \frac{8(\sqrt{3}-3i) \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{9 \cos(2\theta)+15} & 0 & 0 & \frac{8(\sqrt{3}+3i) \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{9 \cos(2\theta)+15} \\ \frac{8(\sqrt{3}+3i) \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} & 0 & 0 & \frac{8(\sqrt{3}-3i) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{9 \cos(2\theta)+15} \\ -\frac{64 \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3(15 \cos(\theta)-18 \cos(2\theta)+\cos(3\theta)-30)} & \frac{8(\sqrt{3}+3i) \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{9 \cos(2\theta)+15} & \frac{8(\sqrt{3}-3i) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{9 \cos(2\theta)+15} & -\frac{8(\sqrt{3}+3i) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{3(15 \cos(\theta)-18 \cos(2\theta)+\cos(3\theta)-30)} \end{pmatrix}, \\
 z_{2\theta p0} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8i \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(3 \cos(2\theta)+5)} & \frac{8i \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(3 \cos(2\theta)+5)} & 0 \\ \frac{8i \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(3 \cos(2\theta)+5)} & 0 & 0 & \frac{i \sin^4(\theta) \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(6 \cos(2\theta)+10)} \\ -\frac{8i \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(3 \cos(2\theta)+5)} & 0 & 0 & -\frac{8i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(3 \cos(2\theta)+5)} \\ 0 & -\frac{i \sin^4(\theta) \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(6 \cos(2\theta)+10)} & \frac{8i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3}(3 \cos(2\theta)+5)} & 0 \end{pmatrix}, \\
 z_{3\theta p0} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{4i(\sqrt{3}+3i) \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} & -\frac{4i(\sqrt{3}-3i) \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} & 0 \\ -\frac{4i(\sqrt{3}-3i) \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} & 0 & 0 & \frac{(-3-i\sqrt{3}) \sin^4(\theta) \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{36 \cos(2\theta)+60} \\ \frac{4i(\sqrt{3}+3i) \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} & 0 & 0 & \frac{4i(\sqrt{3}+3i) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} \\ 0 & \frac{i(\sqrt{3}+3i) \sin^4(\theta) \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{36 \cos(2\theta)+60} & -\frac{4i(\sqrt{3}-3i) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^5\left(\frac{\theta}{2}\right)}{9 \cos(2\theta)+15} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Usando los vectores anteriores y el producto descrito en la ecuación (3.13), obtenemos la expresión que nos permite comparar el espacio vertical y el espacio de momento angular cero de la familia de estados  $\theta$ :

$$\langle E_{\theta h}, E_{\theta p0} \rangle = \frac{1}{12} \sum_{ij} Tr(v_{i\theta} \cdot z^{j\theta p0}) \cdot Tr(u_{i\theta p0} \cdot w^{j\theta}) = \frac{\sin^2(2\theta)}{9 \cos(2\theta) + 15}. \quad (3.19)$$

Lo que buscamos a continuación es comparar el espacio horizontal con el de momento angular cero, puesto que el espacio horizontal y vertical son complementarios, podemos

definir el ángulo entre el espacio horizontal y el de momento angular cero como:

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\langle E_{\theta h}, E_{\theta p0} \rangle) \right) \quad (3.20)$$

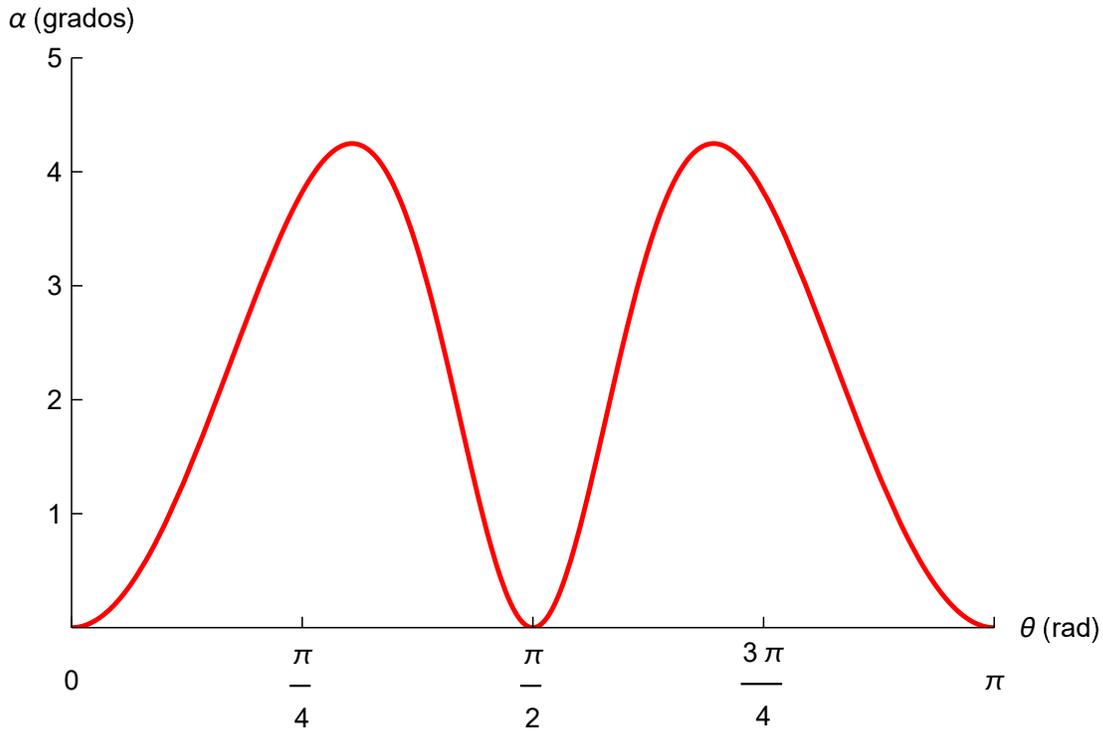


Figura 3.3: Curva que muestra el comportamiento del ángulo  $\alpha$  entre el espacio horizontal y el de momento angular cero, para la familia uniparamétrica  $\theta$ .

Como puede observarse, la gráfica es simétrica respecto a  $\theta = \pi/2$ , lo que es de esperarse, puesto que geoméricamente la familia de constelaciones tiene esa simetría. Además, en  $\theta = \pi/2$  el ángulo  $\alpha$  es cero, y es precisamente este punto dónde la constelación es GHZ, por ende el espacio horizontal coincide con el de momento angular cero. Otra cosa a resaltar es que la variación en el ángulo entre planos es muy pequeña, con un máximo menor a cinco grados, lo que nos indica que los espacios se mantienen muy cercanos al variar  $\theta$ , mientras que al acercarnos a los extremos  $\theta \in \{0, \pi\}$  los espacios vuelven a coincidir.

**Familia uniparamétrica  $\phi$  ( $s=3/2$ )**

Consideremos ahora a la familia de constelaciones que constan de estrellas en el ecuador de la esfera de Riemann, tales que una se encuentra sobre el eje  $x$  y las otras dos se separan de la primera por un ángulo  $\phi$  en direcciones opuestas.

Los estados para esta familia de constelaciones tienen la forma:

$$|\psi_\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

con  $a = \frac{1+2\cos\phi}{\sqrt{3}}$ , nuevamente a partir de  $\rho_\phi = |\psi_\phi\rangle\langle\psi_\phi|$  se obtienen los vectores verticales:

$$\begin{aligned} v_{x\phi} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} & -\frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} & 0 \\ \frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} & 0 & 0 & \frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} \\ \frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} & 0 & 0 & \frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} \\ 0 & -\frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} & -\frac{i(\sqrt{3}a^2-2a-\sqrt{3})}{4(a^2+1)} & 0 \end{pmatrix}, \\ v_{y\phi} &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}a}{2(a^2+1)} & -\frac{\sqrt{3}a^2-2a+\sqrt{3}}{4a^2+4} & -\frac{\sqrt{3}a^2-2a+\sqrt{3}}{4a^2+4} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}a^2-2a+\sqrt{3}}{4a^2+4} & \frac{(\sqrt{3}-2a)a}{2(a^2+1)} & 0 & \frac{\sqrt{3}a^2-2a+\sqrt{3}}{4a^2+4} \\ -\frac{\sqrt{3}a^2-2a+\sqrt{3}}{4a^2+4} & 0 & \frac{a(2a-\sqrt{3})}{2(a^2+1)} & \frac{\sqrt{3}a^2+2a-\sqrt{3}}{4(a^2+1)} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}a^2-2a+\sqrt{3}}{4a^2+4} & \frac{\sqrt{3}a^2+2a-\sqrt{3}}{4(a^2+1)} & \frac{\sqrt{3}a}{2a^2+2} \end{pmatrix}, \\ v_{z\phi} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ia}{2a^2+2} & -\frac{ia}{a^2+1} & -\frac{3i}{2a^2+2} \\ \frac{ia}{2a^2+2} & 0 & -\frac{ia^2}{2a^2+2} & -\frac{ia}{a^2+1} \\ \frac{ia}{a^2+1} & \frac{ia^2}{2a^2+2} & 0 & -\frac{ia}{2a^2+2} \\ \frac{3i}{2a^2+2} & \frac{ia}{a^2+1} & \frac{ia}{2a^2+2} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

los duales a los vectores anteriores son

$$\begin{aligned}
 w_{x\phi} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{3}-\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2+1}} & -\frac{i}{\sqrt{3}-\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2+1}} & 0 \\ \frac{i(a^2+1)}{a(\sqrt{3a-2})-\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{i(a^2+1)}{a(\sqrt{3a-2})-\sqrt{3}} \\ \frac{i(a^2+1)}{a(\sqrt{3a-2})-\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{i(a^2+1)}{a(\sqrt{3a-2})-\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{3}-\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2+1}} & -\frac{i}{\sqrt{3}-\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2+1}} & 0 \end{pmatrix}, \\
 w_{y\phi} &= \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}a}{7a^2-4\sqrt{3}a+3} & \frac{\sqrt{3}-a(\sqrt{3a+2})}{7a^2-4\sqrt{3}a+3} & \frac{a(\sqrt{3a-2})+\sqrt{3}}{-7a^2+4\sqrt{3}a-3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-a(\sqrt{3a+2})}{7a^2-4\sqrt{3}a+3} & \frac{2(\sqrt{3}-2a)a}{7a^2-4\sqrt{3}a+3} & 0 & \frac{a(\sqrt{3a-2})+\sqrt{3}}{7a^2-4\sqrt{3}a+3} \\ \frac{7a^2-4\sqrt{3}a+3}{a(\sqrt{3a-2})+\sqrt{3}} & 0 & \frac{2(\sqrt{3}-2a)a}{-7a^2+4\sqrt{3}a-3} & \frac{\sqrt{3}-a(\sqrt{3a+2})}{-7a^2+4\sqrt{3}a-3} \\ -\frac{7a^2+4\sqrt{3}a-3}{0} & \frac{a(\sqrt{3a-2})+\sqrt{3}}{7a^2-4\sqrt{3}a+3} & \frac{\sqrt{3}-a(\sqrt{3a+2})}{-7a^2+4\sqrt{3}a-3} & \frac{2\sqrt{3}a}{7a^2-4\sqrt{3}a+3} \end{pmatrix}, \\
 w_{z\phi} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2ia}{a^2+9} & -\frac{4ia}{a^2+9} & -\frac{6i}{a^2+9} \\ \frac{2ia}{a^2+9} & 0 & -\frac{2ia^2}{a^2+9} & -\frac{4ia}{a^2+9} \\ \frac{4ia}{a^2+9} & \frac{2ia^2}{a^2+9} & 0 & -\frac{2ia}{a^2+9} \\ \frac{6i}{a^2+9} & \frac{4ia}{a^2+9} & \frac{2ia}{a^2+9} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Mientras que los generadores del espacio de momento angular cero para estos estados son:

$$\begin{aligned}
 u_{1\phi p0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2(\cos(\phi)-\cos(2\phi))}{\sqrt{3}} & 2-2\cos(\phi) \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{3\phi}{2}\right) & \frac{2(\cos(\phi)-\cos(2\phi))}{\sqrt{3}} \\ \frac{2(\cos(\phi)-\cos(2\phi))}{\sqrt{3}} & \frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{3\phi}{2}\right) & \frac{8}{3}\sin^2\left(\frac{3\phi}{2}\right) & \frac{4(\cos(\phi)-\cos(2\phi))}{\sqrt{3}} \\ 2-2\cos(\phi) & \frac{2(\cos(\phi)-\cos(2\phi))}{\sqrt{3}} & \frac{4(\cos(\phi)-\cos(2\phi))}{\sqrt{3}} & 4-4\cos(\phi) \end{pmatrix}, \\
 u_{2\phi p0} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{i(-1+e^{i\phi})}{\sqrt{3}} & -\frac{i(-1+e^{-i\phi})}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{i(-1+e^{-i\phi})}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}(-2)(\sin(\phi)+\sin(2\phi)) & \frac{2}{3}ie^{-2i\phi}(-1+e^{3i\phi}) & -\frac{i(-1+e^{-i\phi})}{\sqrt{3}} \\ \frac{i(-1+e^{i\phi})}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3}ie^{-i\phi}(-1+e^{3i\phi}) & \frac{1}{3}(-2)(\sin(\phi)+\sin(2\phi)) & \frac{i(-1+e^{i\phi})}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{i(-1+e^{i\phi})}{\sqrt{3}} & -\frac{i(-1+e^{-i\phi})}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$u_{3\phi p0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}(-4)(\sin(\phi) + \sin(2\phi)) & \frac{1}{3}(-4)(\sin(\phi) + \sin(2\phi)) & -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}(-4)(\sin(\phi) + \sin(2\phi)) & \frac{1}{3}(-4)(\sin(\phi) + \sin(2\phi)) & -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sin(\phi)}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Para esta familia de constelaciones los vectores duales a aquellos que generan el espacio de momento angular cero contienen expresiones muy extensas por lo que no se incluyen aquí. Nuevamente calculamos el producto interno entre el espacio vertical y el de momento angular cero, obteniendo:

$$\begin{aligned} \langle E_{\phi h}, E_{\phi p0} \rangle &= \frac{1}{12} \sum_{ij} Tr(v_{i\phi} \cdot z^{j\phi p0}) \cdot Tr(u_{i\phi p0} \cdot w^{j\phi}) \\ &= \frac{-\frac{399\cos(\phi)}{2\cos(\phi)+\cos(2\phi)+3} - \frac{7182}{2\cos(\phi)+\cos(2\phi)+15} + \frac{224(16\cos(\phi)-7)}{8\cos(\phi)+4\cos(2\phi)+15} + \frac{169\cos(\phi)-202}{2\cos(\phi)+7\cos(2\phi)+9} + 836}{1596}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Al igual que con las constelaciones  $\theta$ , nos interesa el ángulo entre el espacio horizontal y el de momento angular cero, así que la expresión a graficar es la siguiente:

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\langle E_{\phi h}, E_{\phi p0} \rangle) \right) \quad (3.26)$$

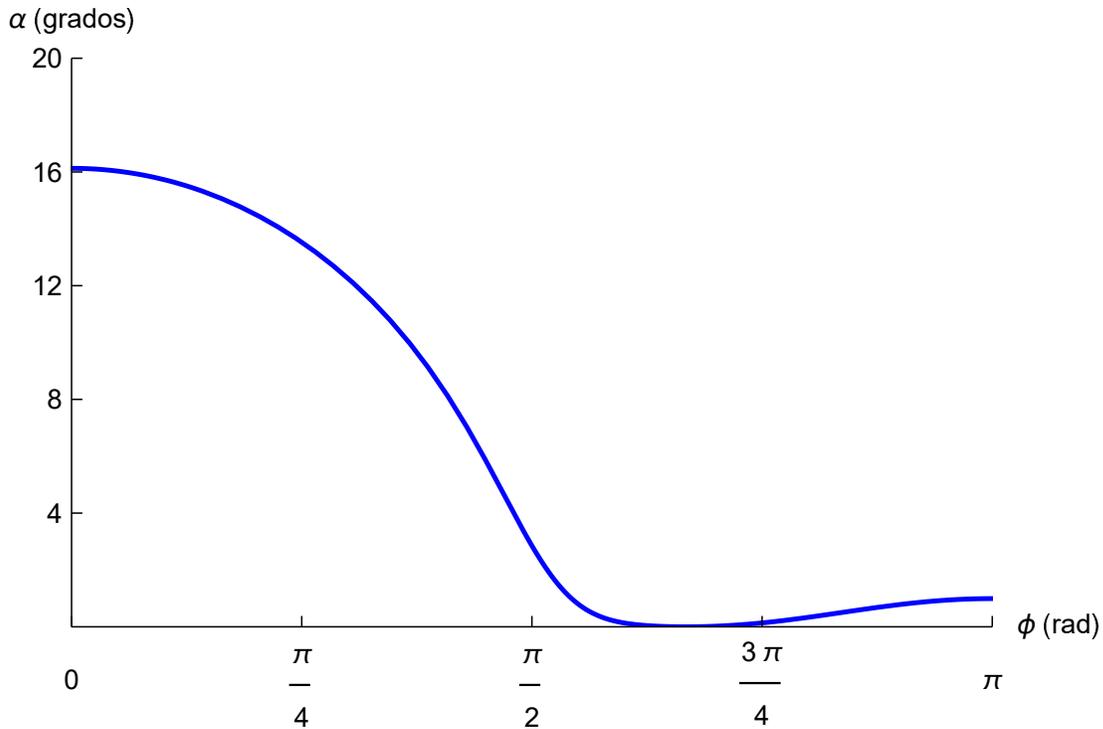


Figura 3.4: Curva que muestra el comportamiento del ángulo  $\alpha$  entre el espacio horizontal y el de momento angular cero, para la familia uniparamétrica  $\phi$ .

En este caso el punto de referencia se encuentra en  $\phi = 2\pi/3$ , pues aquí nos encontramos en el estado GHZ. Claramente en este punto  $\alpha$  se anula, indicando la coincidencia de los espacios. A diferencia de la familia  $\theta$ , aquí la variación es considerable, así que los espacios se separan mucho más al variar  $\phi$ .

### Familia biparamétrica $\theta\phi$ ( $s=3/2$ )

La última familia que se analizará consta de una combinación de las dos anteriores, permitiendo la libertad de variar  $\theta$  y  $\phi$ , con las restricciones de que las tres estrellas se encuentren siempre al mismo ángulo  $\theta$  y además una de ellas siempre posea  $\phi = 0$ , mientras que las otras dos pueden variar por el mismo  $\phi$  en direcciones opuestas, al igual que en la segunda familia.

Los estados correspondientes a esta familia de constelaciones corresponden a:

$$|\psi_{\theta\phi}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tan(\frac{\theta}{2})(2\cos(\phi)+1)}{\sqrt{3}} \\ \frac{\tan^2(\frac{\theta}{2})(2\cos(\phi)+1)}{\sqrt{3}} \\ \tan^3(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Al igual que en los casos anteriores, los vectores verticales y sus duales serán obtenidos de  $\rho_{\theta\phi} = |\psi_{\theta\phi}\rangle\langle\psi_{\theta\phi}|$ . Para este caso los vectores anteriores, así como los generadores del espacio de momento angular cero y sus duales, son muy extensos, por lo que no serán presentados, pero aún así es posible calcular el ángulo entre el espacio horizontal y el de momento angular cero empleando la expresión:

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\langle E_{\theta\phi h}, E_{\theta\phi p0} \rangle) \right) \quad (3.28)$$

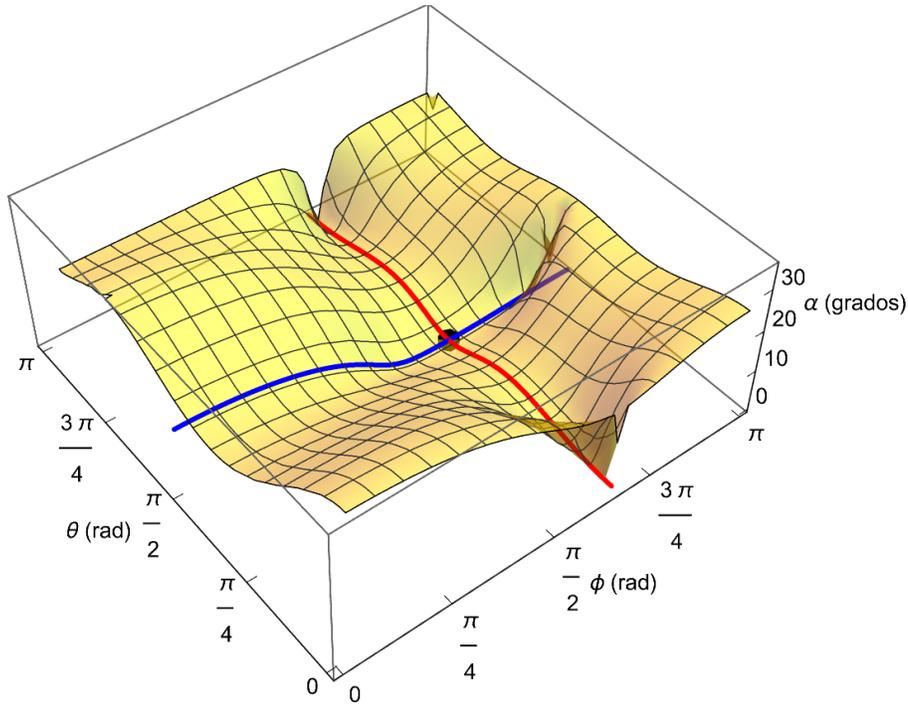


Figura 3.5: Superficie que muestra el comportamiento del ángulo  $\alpha$  entre el espacio horizontal y el de momento angular cero, para la familia biparamétrica  $\theta\phi$ .

Puede apreciarse que aún en una familia de constelaciones más general, de espín  $3/2$ , la variación del ángulo de separación entre los espacios horizontal y de momento angular es pequeña. En la gráfica anterior se han incluido las curvas correspondientes a las familias anteriores: a saber, la familia  $\theta$  en rojo y la familia  $\phi$  en azul. Así como un punto de intersección de ambas, marcado en negro, que representa la ubicación del estado GHZ  $((\theta, \phi) = (\pi/2, 2\pi/3))$ , correspondiente a espín  $3/2$ , que es precisamente el punto donde la superficie toca el cero, representando la superposición de los espacios horizontal y de momento angular cero, como era de esperarse.

Además de esto, la superficie se pliega en determinados puntos, correspondientes a valores extremos donde la constelación se reduce a uno o dos puntos, como en  $\theta = \{0, \pi\}$  o  $\phi = \{0, \pi\}$ .

# Capítulo 4

## Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se han expuesto varios objetos geométricos, asociados a los estados cuánticos, en particular, se ha trabajado con estados de espín. Para los cuales se han construido métricas y vectores en el espacio proyectivo. La inclusión de estos elementos geométricos, nos ha permitido trabajar con los conceptos de espacio de rotaciones y formas, correspondientes a las constelaciones de Majorana asociadas a los estados. Este tratamiento ha sido particularmente rico, por la posibilidad de visualización e interpretación de los resultados en el espacio proyectivo.

La investigación de esta tesis se centró en caracterizar a los vectores ortogonales a los obtenidos, en el espacio proyectivo, al rotar estados de espín respecto a cada eje coordenado (vectores verticales), esta simple idea ha llevado a describir al espacio tangente en el espacio proyectivo a estados de espín, como un par de subespacios; el vertical y horizontal, siendo este último asociado a distribuciones particulares de las estrellas de Majorana en la esfera de Riemann. Para hacer más manejables las expresiones, fue necesario restringir, en primera instancia, nuestro estudio a los estados GHZ, mismos que nos permitieron generalizar esta separación del espacio tangente mediante el modelo de masas, donde cada estrella de Majorana posee una masa ( $m = 1$ ). Así, los vectores horizontales resultaron ser tales que al deformar la constelación, dentro del marco del modelo de masas, el momento angular inducido en la constelación es cero.

Este último es un resultado importante, pues ofrece un criterio para clasificar a los vectores en: vectores que inducen rotaciones y vectores de cambio de forma "puros". Además, el

estudio de los estados GHZ abrió paso a tratar a las familias  $\theta$ , para las cuales también fue posible caracterizar de manera analítica, los generadores de cada espacio en general. Finalmente, se desarrollaron las herramientas para comparar subespacios mediante la definición de un producto interno entre planos, lo que permitió equiparar algunos espacios horizontales para espín  $3/2$  con los espacios de momento angular cero, correspondientes a cada estado. Esto con la finalidad de visualizar su proximidad o separación al variar los parámetros de las constelaciones. Arrojando que; en el caso de la familia  $\theta$  el espacio horizontal se mantiene cercano al de momento angular cero, variando solamente en poco más de 4 grados; mientras que, para la familia  $\phi$  el espacio horizontal se separó un máximo de 16 grados del espacio de momento angular cero. Para ambos casos fue posible identificar su relación con el estado GHZ, así como combinar ambas familias en una más general, denominada  $\theta\phi$  para la cual fue igualmente posible identificar la variación del ángulo entre su espacio horizontal y de momento angular cero al variar sus parámetros.

Los resultados de este trabajo abren la posibilidad de ampliar el concepto de espacio horizontal a estados de espín  $s$  arbitrario, encontrando los  $4s - 3$  vectores ortogonales a los inducidos por rotaciones respecto a los ejes coordenados a partir de los encontrados para los estados GHZ, pues es posible transformar de GHZ a constelaciones arbitrarias y luego encontrar la acción de dicha transformación sobre el espacio tangente en el espacio proyectivo. Además dichos vectores estarían provistos de significado geométrico, siendo deformaciones de las constelaciones de Majorana asociadas a los estados, el desarrollo de las ideas propuestas llevaría a un tratamiento geométrico completo de los estados de espín.

# Bibliografía

- [1] E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Nuovo Cimento*, 9:43–50, 1932.
- [2] A. Ashtekar and T. Schilling. Geometrical Formulation of Quantum Mechanics. In A. Harvey, editor, *On Einstein's Path*, pages 23–65. Springer, 1999.
- [3] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of Quantum States (2nd Ed.)*. Cambridge University Press, 2017.
- [4] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry I*. J. Wiley, 1963.
- [5] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison-Wesley, 1994.
- [6] V. S. Varadarajan. *Geometry of Quantum Theory*. Springer, 1968.
- [7] F.J. Bloore. Geometrical description of the convex sets of states for systems with spin $1/2$  and spin $1$ . *J. Phys*, A 9:2059.
- [8] T. L. Curtright, D. B. Fairlie, and C. K. Zachos. A Compact Formula for Rotations as Spin Matrix Polynomials. *SIGMA*, 10:084, August 2014.
- [9] H. Bacry. Orbits of the rotation group on spin states. *Journal of Mathematical Physics*, 15(10):1686–1688, 1974.
- [10] R. Littlejohn. Phys 221AB Notes 13: Representations of the Angular Momentum Operators and Rotations. *University of California, Berkeley*, 2019.
- [11] N. Wheeler. Remarks concerning the explicit construction of spin matrices for arbitrary spin. *Reed College Physics Department*, August 2000.

- [12] D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger. Going beyond Bell's theorem. In *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, pages 69–72. Springer, 1989.
- [13] B. Podolsky A. Einstein and N. Rosen. Can Quantum-Mechanics Description of Physical Reality Be Complete? *Physical Review*, 47:777–780, 1935.
- [14] D. Bohm. *Quantum Theory*. Prentice-Hall New York, 1951.
- [15] A. Shimony D. M. Greenberger, M. A. Horne and A. Zeilinger. Bell's theorem without inequalities. *American Journal of Physics*, 58:1131, 1990.
- [16] M. Daniell H. Weinfurter D. Boumeester, J-W. Pan and A. Zeilinger. Observation of Three-Photons Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement. *Phys. Rev. Lett*, 82:1345, 1999.
- [17] N.Wheeler. Majorana representation of higher spin states. *Reed College Physics Department*, September 2000.
- [18] C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, and E. Serrano-Ensástiga. Geometry of spin coherent states. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 51(16):165202, 2018. arXiv:1710.11326.
- [19] J. Brown and R.Churchill. *Complex Variables and Applications*. Nueva York: McGraw-Hill, 1989.
- [20] T. Frankel. *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, 1997.
- [21] Y.-C Wong. Differential geometry of Grassmann manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, page 47:589, 1967.
- [22] J. V. Corbett M. Adelman and C. A. Hurst. The geometry of state space. *Found. Phys*, 23:211.
- [23] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry Vol. II*. Cambridge University Press, 1952.

- [24] F. Bachmann K. Fladt et al Behnke, H. *Fundamentals of Mathematics, Volume II*. MIT Press, 1984.
- [25] C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, L. Hanotel, and E. Serrano-Ensástiga. Stellar representation of multipartite antisymmetric states. *Commun. Math. Phys.*, 381:735–764, 2021. arXiv:1909.02592.
- [26] A. Banyaga and D. Hurtubise. *Lectures on Morse Homology*. Springer Science+Business Media, 2004.
- [27] R.Littlejohn. Phys 221AB Notes 12: Rotations in Quantum Mechanics, and Rotations of Spin 1/2 Systems. *University of California, Berkeley*, 2019.
- [28] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1:195, 1964.
- [29] Satyabrata Adhikari Anu Kumari. Classification witness operator for the classification of different subclasses of three-qubit ghz class. *J. Phys*, 2021.
- [30] Calsamiglia J. García-Alcaine, G. Quantum algorithm for a quantum and. *Physical Review A*, 61, 2000.
- [31] D. C. Brody and L. P. Hughston. Geometric quantum mechanics. *J. Geom. Phys.*, 38:19, 2001.
- [32] F. Calogero and J-P Francoise. Hamiltonian character of the motion of the zeros of a polynomial whose coefficients oscillate over time. *J. Phys. A: Math. Gen*, 30:211–218, 1997.
- [33] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Second Edition)*. Springer Verlag, 1989.