



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN DE UN LÍQUIDO
NEWTONIANO: MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN
COMPUTACIONAL EN EL PROGRAMA MATHEMATICA**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

PRESENTA:

EBERTH NEFTALI MATA SANTOYO

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M.C. LUIS ANTONIO TORRES RAMÍREZ

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 20 de octubre del 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno Mata Santoyo Eberth Neftalí con número de cuenta 419118459 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de noviembre de 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M.C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es: “Flujo continuo por compresión de un líquido newtoniano: Modelado Matemático y Simulación computacional en el programa MATHEMATICA”

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M.C. Doctorante Luis Antonio Torres Ramírez

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. Agradezco a mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores, mejores amigos y me permitió adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

DEDICATORIAS

Con gran orgullo y dedicación hacia mis padres: Margarita Santoyo y Miguel Ángel Mata Espinosa, por siempre apoyarme y guiarme no solo largo de toda mi carrera, sino en toda mi vida, el cual ha sido de gran admiración y apoyo para permitirme culminar mi carrera profesional, el cual es el mejor regalo y herencia para toda mi vida. Con gran admiración, amor y respeto, siempre serán mi gran ejemplo para seguir.

A mi abuelita Francisca Dávila Santoyo, quien con sus bendiciones día a día, hacia que diera de mi lo mejor, además de que siempre me decía que podía con eso y más; por siempre cuidarme y nunca dejarme decaer, pues siempre es mi motor para dar lo mejor de mí.

A mis hermanos (Miguel Ángel Mata Santoyo y Casandra Itzel Mata Santoyo), porque siempre creían en mí, además de que me daban muchos ánimos para nunca rendirme y ser grandes ejemplos para seguir.

A mis tíos y familiares cercanos a mí, que siempre me apoyaron para seguir adelante y cuidaron de mi cuando era necesario, por decirme que nunca me rindiera y apoyarme en lo necesario.

A mis grandes mejores amigos de la universidad (Efrén Palafox Vargas, Barrios Islas Jose Alfonso y Carranza Diaz Alejandro), que siempre me dieron momentos tan maravillosos y divertidos a su lado, el cual disfruté durante toda mi estancia en la universidad, además de siempre estar cuando los necesité.

INDICE

Nomenclatura.....	(9)
Glosario.....	(10)
Resumen.....	(12)
Capítulo 1.- introducción	
Preliminares.....	(14)
a) Flujo por compresión.....	(14)
b) Flujo continuo por compresión.....	(15)
c) Aplicaciones.....	(16)
Antecedentes.....	(16)
Historia del flujo por compresión y el flujo continuo por compresión.....	(16)
Hipótesis.....	(18)
Objetivos de la investigación.....	(18)
A) Objetivo general.....	(18)
B) Objetivo particular.....	(18)
Distribución del material.....	(19)
Capítulo 2.- Problema físico y ecuaciones teóricas	
Planteamiento físico del problema.....	(21)
Análisis del problema.....	(21)
Ecuaciones teóricas.....	(22)
Ecuación de continuidad.....	(22)
Ecuación de Cauchy en su segunda forma.....	(22)
Ecuación reológica.....	(23)
Capítulo 3.- Marco Teórico.	
Tensores cinemáticos.....	(26)
Modelado teórico.....	(27)
Cálculo de la fuerza que experimenta el fluido inducida por el plato superior.....	(29)
Ecuación de la fuerza que experimenta el fluido.....	(29)
Capítulo 4.- Variables y ecuaciones adimensionales	
Escalamiento.....	(31)
Ecuaciones adimensionales.....	(31)

Ec. de continuidad (dividida en regiones).....	(31)
Ec. de Navier-Stokes para componente “r”, radial (dividida en regiones).....	(32)
Ec. de Navier-Stokes para componente “z”, axial (dividida en regiones).....	(33)
Ec. de fuerza (F).....	(34)
Resumen de ecuaciones adimensionales obtenidas.....	(35)
Esquema perturbativo.....	(36)
Capitulo 5.- Método perturbativo a orden cero	
Perturbación de la ec. de continuidad adimensional.....	(38)
perturbación de la ec. de N-S para componente “r”, adimensional.....	(38)
Perturbación de la ec. de N-S para componente “z”, adimensional.....	(38)
Perturbación de la ec. de fuerza adimensional.....	(38)
Resumen de ecs. Perturbadas a orden cero	(38)
Modelado matemático a orden cero.....	(39)
Velocidad radial.....	(39)
Velocidad axial.....	(41)
Calculo de la fuerza a orden cero.....	(44)
Ecuación de fuerza perturbada a orden cero.....	(47)
Ecuación de fuerza perturbada a orden cero a flujo homogéneo.....	(47)
Capitulo 6.- Método perturbativo a primer orden	
Fuerza a primer orden.....	(49)
Componente radial de la ecuación de movimiento.....	(49)
Fuerza a primer orden.....	(49)
Ecuación de presión perturbada a primer orden.....	(61)
Gradiente de presión perturbado a primer orden.....	(62)
Ecuación de fuerza perturbada a primer orden.....	(63)
Ecuación de fuerza perturbada a primer orden a flujo homogéneo.....	(64)
Resumen de ecs. obtenidas perturbadas a primer orden.....	(64)
Capítulo 7.- Simulación y análisis de resultados.	
Teoría a orden cero.....	(67)
Velocidad radial.....	(67)
Velocidad axial.....	(68)

Gradiente de presión.....	(69)
Primer orden.....	(71)
Velocidad radial.....	(71)
Velocidad axial.....	(73)
Gradiente de presión.....	(75)
Capítulo 8.- Conclusiones.	
Aportación al conocimiento.....	(78)
Trabajo a futuro.....	(79)
Bibliografía.....	(80)

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Flujo por compresión del fluido en cuestión entre platos paralelos circulares...	(14)
Figura 2. Ilustración del sistema de flujo continuo por compresión, con las variables a considerar y tomar en cuenta.....	(15)
Figura 3. demostración esquemática del sistema y restricciones a considerar en el sistema.....	(22)
Figura 4.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad radial perturbada a orden cero.....	(67)
Figura 5.- Representación del perfil de velocidades formado a partir de la ec. de la velocidad radial a orden cero.....	(68)
Figura 6.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad axial perturbada a orden cero.....	(68)
Figura 7.- Representación gráfica de la ec. obtenida del gradiente de presión perturbado a orden cero.....	(69)
Figura 8.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad radial perturbada a primer orden con efecto de Reynolds = 5.....	(71)
Figura 9.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad radial perturbada a primer orden con efecto de Reynolds = 15.....	(72)
Figura 10.- Representación del perfil de velocidades formado a partir de la ec. de la velocidad radial a primer orden.....	(73)
Figura 11.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad axial perturbada a primer orden, con efecto de Reynolds = 5.....	(74)
Figura 12.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad axial perturbada a primer orden, con efecto de Reynolds = 35.....	(74)
Figura 13.- Representación gráfica de la ec. obtenida del gradiente de presión perturbado a primer orden, con un valor de Reynolds = 5.....	(75)

NOMENCLATURA

Variables dimensionales.

a	Radio del disco (r) [m]
z	Separación entre discos H(t) [m]
V_z	Velocidad Axial dimensional [m/s]
V_r	Velocidad Radial dimensional [m/s]
$\frac{dp}{dr}$	Gradiente de presión [Pa/m]
Re	Numero de Reynolds
{r,z}	Coordenadas axial y radial respectivamente [m]
F_{Nm}	Fuerza de compresión a flujo no homogéneo
F_{N0}	Fuerza de compresión a flujo homogéneo
P	presión hidrostática
Patm	presión atmosférica
$\langle V \rangle$	Velocidad promedio

Variables adimensionales

p_0	Presion perturbada a orden cero
p_1	Presion perturbada a primer orden
$\frac{dp_0}{dr^*}$	Gradiente de presión perturbado a orden cero
$\frac{dp_1}{dr^*}$	Gradiente de presión perturbado a primer orden
F_0	Fuerza perturbada a orden cero
F_1	Fuerza perturbada a primer orden
{r*,z*}	Coordenadas axial y radial adimensional
V_{r^*}	Velocidad radial adimensional
V_{z^*}	Velocidad axial adimensional
V_{z0}	Velocidad axial perturbada a orden cero
V_{r0}	Velocidad radial perturbada a orden cero
V_{z1}	Velocidad axial perturbada a primer orden
V_{r1}	Velocidad radial perturbada a primer orden
p^*	Presión hidrostática adimensional

Letras griegas

μ	Viscosidad del fluido [Pa*s]
ρ	Densidad del liquido [Kg/m ³]

Vectores y tensores.

D	Tensor de rapidez de deformación [1/s]
σ	Tensor de esfuerzos [Pa]
V	Vector velocidad. [m/s]
∇V	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
∇V^T	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s]

GLOSARIO.

Aproximación de Lubricación:

Es cuando en un sistema no se van a tomar en cuenta aquellos términos que son pequeños, en donde estos están relacionados con el cociente de dos longitudes características axial y radial respectivamente

Deformación:

Es aquel cambio relativo que hay de la posición con respecto a otra en un medio continuo; es decir, es la alteración de la forma de un cuerpo lograda mediante la aplicación de fuerzas sobre él.

Ecuación constitutiva de Newton:

Es una relación que hay entre las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico, como lo pueden ser: Presión, volumen, tensión, deformación, temperatura, densidad, entropía, etc..; es decir, es aquella ecuación que relaciona las variables dinámicas de un sistema, en donde particularmente para la reología se relaciona el esfuerzo y la deformación.

Ecuación de continuidad:

Es una ecuación diferencial parcial que nos demuestra o representa la conservación de materia en un sistema físico.

Ecuación de movimiento:

Es la segunda ley de Newton, la cual es aplicada a un medio continuo

Ecuación de Navier-Stokes:

Es la ecuación de movimiento que se aplica a un fluido Newtoniano, las cuales describen el movimiento tridimensional de sustancias fluidas viscosas

Estado estacionario:

Es cuando las variables que definen el comportamiento, respecto al tiempo, permanecen invariantes en un sistema o proceso; es decir, es el estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.

Fluido:

Es aquel medio continuo que es formado por alguna sustancia y que, al aplicarle un esfuerzo, este se deforma continua e irreversiblemente.

Fluido incompresible:

Aquel medio continuo que es formado por alguna sustancia y que tiene una densidad constante

Fluido newtoniano:

Es un fluido que tiene una viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.

Fluido no-newtoniano:

Fluido en donde su viscosidad es dependiente de la rapidez de deformación

Fluido adelgazante al corte:

Es aquel fluido en el que su viscosidad decrece por efecto de un aumento en la rapidez de deformación

Fluido engrozante al corte:

Es aquel fluido en el que su viscosidad aumenta cuando existe o se da un efecto de rapidez de deformación.

Flujo volumétrico:

Es el volumen de fluido que pasa por una superficie dada en un determinado tiempo; es decir, es el volumen por unidad de tiempo.

lubricación

Rapidez de deformación:

Es el cambio que se da en elongación o contracción de un material de un determinado componente, objeto o sistema de estudio; es decir, es el cambio o evolución temporal de la deformación.

Viscosidad:

Es la medida de la resistencia que poseen los fluidos al movimiento o a fluir.

RESUMEN

En este trabajo se analiza el flujo continuo por compresión de un líquido viscoso newtoniano, el cual se puede caracterizar con la ecuación constitutiva de Newton. El fluido es inyectado a flujo volumétrico constante en el plato inferior ($z = 0$) por medio de una serie de orificios distribuidos al azar. El fluido al entrar por el plato inferior induce una fuerza en el plato superior y posterior a eso, se produce un laminado en dirección radial. El sistema tiene la ventaja de que la inercia del plato superior no es tomada, i.e., la resistencia que presenta el plato superior por efecto del cambio de posición, como en el caso del flujo tradicional por compresión. El segundo punto importante, es que el sistema se encuentra en estado estacionario, los atributos o características no dependen del tiempo.

Para resolver las ecuaciones acopladas se propone un conjunto de variables adimensionales que permite introducir grupos adimensionales como el número de Reynolds Re y la razón geométrica entre las longitudes características $\alpha = H/R \ll 1$. Para resolver el sistema se propone un esquema perturbativo para las velocidades radiales, axiales, presión y fuerzas. A ordenes cero, se obtienen expresiones para la velocidad radial, axial, presión y fuerza en función de la no-homogeneidad, i.e. la distribución de orificios en el plato inferior afecta directamente a la fuerza en el plato superior. A primer orden se obtienen las mismas expresiones modificadas con la contribución de la inercia. Finalmente, las ecuaciones analíticas obtenidas son programadas en el programa de Wolfram-Mathematica, licencia-UNAM.

Este trabajo de investigación representa un esfuerzo en la búsqueda constante de sistemas de flujo que puedan caracterizar fluidos a través de la función viscosidad.

Palabras claves

Fluido Newtoniano, Flujo continuo por compresión, Viscosimetría y análisis de ordenes de magnitud.

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN

1. Preliminares

1.1 Flujo por compresión

En la historia de la reología, existen flujos clásicos que se estudian en diferentes cursos a nivel de pregrado y posgrado (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**). Entre estos flujos, se pueden citar: (i) Flujo por arrastre, (ii) Flujo de Poiseuille debido a un gradiente de presión, (iii) Flujo por gravedad. Estos flujos, tienen en común que salvo el primero, son no homogéneos, i.e., la rapidez de deformación es independiente del fluido (**Herrera-Valencia et al. 2023**). Además, este tipo de flujos solo tienen componentes cortantes debido a que la componente del vector velocidad que es diferente de cero solo depende de una coordenada geométrica (**Bird et al. 2002**).

Por otra parte, existen sistemas en donde se tienen dos componentes del vector velocidad, es decir estos sistemas tienen componentes cortantes y extensionales (**Engmann et al. 2005**). Uno de estos sistemas, es el conocido como flujo por compresión (**Engmann et al. 2005**). El flujo por compresión es uno de los sistemas más estudiados en el área de fenómenos de transporte y reología (**Bird et al. 2002, Engmann et al. 2005**). En este sistema, el fluido es colocado entre dos platos circulares paralelos, en donde el plato inferior se encuentra estático mientras que el superior se aproxima con una velocidad $-dH(t)/dt$ comprimiendo al fluido que se encuentra en el plato inferior (**Engmann et al. 2005**). El fluido es comprimido por una fuerza constante y fluye en dirección radial hacia fuera del sistema (**Oliver et al. 1978, 1981**). En este sistema, se infiere la tensión superficial entre el fluido y la superficie es lo suficientemente alta para que el fluido permanezca en el plato inferior (**Oliver et al. 1978, 1981**).

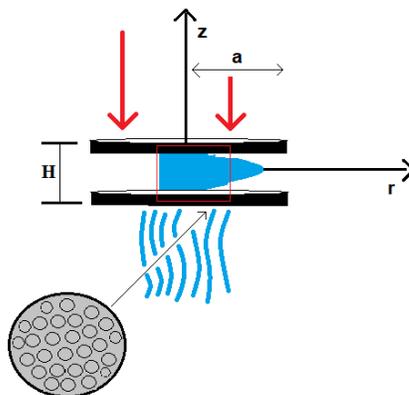


Figura 1. Flujo por compresión del fluido en cuestión entre platos paralelos circulares

1.2 Flujo continuo por compresión.

El flujo continuo por compresión es un sistema de flujo que se analizó como una opción diferente al flujo por compresión. El flujo por compresión tiene dos puntos importantes que complican su estudio:

- A) El plato superior se aproxima al fluido a rapidez constante por lo que, debe de tomarse en cuenta la inercia del plato.
- B) Cuando se aproxima el plato superior al inferior a nivel de nanómetros se produce efecto de deslizamiento por lo que los resultados de medición pueden tener errores de medición.

Oliver et al. (1978, 1981) presenta una opción diferente mediante un mecanismo ingeniosos que consiste en dos platos paralelos separados a una distancia física H , en donde el plato circular inferior de radio $r = a$, es perforado con una serie de orificios distribuidos aleatoriamente. Mediante un sistema mecánico es inyectado un fluido a volumen constante el cual, atraviesa los orificios ejerciendo una fuerza en el plato superior, seguido de un laminado radial **Oliver et al. (1978, 1981)**. Esta inyección del fluido en el plato inferior permite simular el flujo por compresión que se define cuando el fluido es comprimido por el plato superior, en el flujo por compresión clásico estudiado en mecánica de fluidos. El sistema se muestra en la Fig. (2).

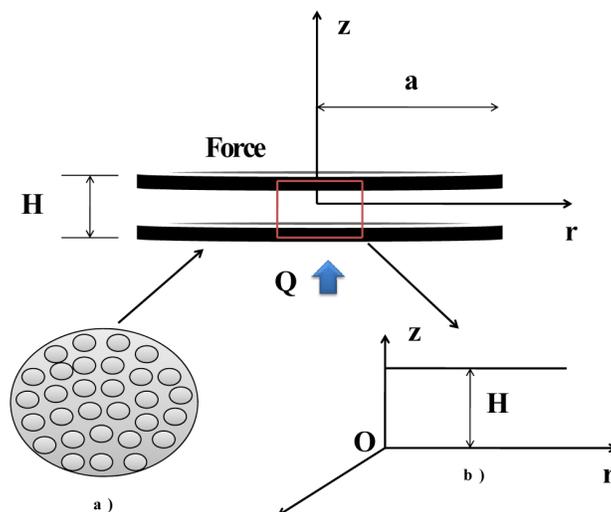


Figura 2. Ilustra el sistema de flujo continuo por compresión. El líquido Newtoniano es inyectado en el plato inferior, a flujo volumétrico constante. El fluido entra por los orificios hasta el plato superior en donde el líquido presenta un laminado radial. La distancia de separación de los platos es H y el radio de los platos es r = a.

1.3 Aplicaciones

Algunos ejemplos de flujo por compresión en la vida cotidiana son cuando se ingiere un alimento y se procesa en los dientes, donde posteriormente se forma una pasta que después es deglutida y pasa por el aparato digestivo; cuando se mastica un “chicle” o cuando se abre la llave y se observa la salida del agua de entre los orificios de la regadera (Engmann et al. 2005). El amasado de pan, la preparación de galletas cuando se une la pasta o la crema en las superficies sólidas, etc... estos son ejemplos claros de flujo por compresión en la industria alimenticia (Engmann et al. 2005). En la industria de los polímeros, los procesos de moldeo, inyección y extrusión combinan flujos cortantes y extensionales, los cuales son punto de partida en la descripción matemática y física de estos sistemas (Bird et al. 2002; Khadem and Rey 2019a-b, 2021). Los aditivos y aceites multigrados son fluidos que permiten evitar, o disminuir la fricción o desgaste entre la maquinaria y el equipo de uso en la industria mecánica (Bird et al. 2002; Lehmonen et al. 2020).

1.4 ANTECEDENTES

1.4.1 Historia del flujo por compresión y el flujo continuo por compresión

Primeramente, el flujo por compresión de un líquido newtoniano se llevó a cabo y fue estudiado despreciando los mecanismos inerciales (Bird et al. 1987, 2002). Dicho sistema constaba del fluido viscoso que se coloca entre los platos separados paralelamente con un radio $r = R$ y separados a una distancia $H(t)$, en donde el plato superior se aproxima a una velocidad no constante (esta se modifica punto a punto). demostró que la fuerza para mantener el movimiento del líquido fluyendo entre los platos, es proporcional a la viscosidad cortante y a las propiedades geométricas del sistema; obteniendo así la siguiente ecuación analítica básica de Stephan (Engmann et al. 2005).

$$F(t) = \frac{3}{2} \frac{\pi R^4 \eta_0}{H^3(t)} \left(-\frac{dH}{dt} \right) \quad (1)$$

Donde en la Ec. (1), $F(t)$ es la fuerza que experimenta el plato superior debido al medio, η_0 , es la viscosidad del medio, $H(t)$, es la separación del medio, R es el radio del disco y (-

$dH(t)/dt$) es la velocidad promedio. Los fluidos no-newtonianos presentan un comportamiento interesante y perplejo. El modelo más simple empleado en la industria es el de ley de potencia el cual, permite estudiar el adelgazamiento y engrosamiento de los fluidos (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**). Este modelo fue empleado para caracterizar un fluido no-newtoniano en el contexto del flujo por compresión (**Engmann et al. 2005**). La expresión para la fuerza es analítica y tiene la siguiente estructura matemática:

$$F(t) = \frac{2\pi \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}{n+3} K \frac{dH}{dt} \left| \frac{dH}{dt} \right|^{n-1} H^{-(2n+1)} R^{n+3} \quad (2)$$

Los parámetros (K, n) están relacionadas a las propiedades adelgazantes al corte del material (**Engmann et al. 2005**). La Ec. (2) representa la fuerza para mantener el movimiento del fluido por el efecto de la compresión (**Bird et al. 2002**).

El flujo continuo por compresión fue estudiado por Oliver y colaboradores (**Oliver et al. 1978; Oliver y Shahidullah 1981**). Ellos estudiaron este sistema caracterizado mediante un fluido incompresible, isotérmico y newtoniano y encontraron soluciones analíticas en términos de funciones de Bessel, características geométricas e intrínsecas del material de estudio (**Oliver et al. 1978; Oliver y Shahidullah 1981**).

Por otra parte, **Waters y Gooden (1983)** estudiaron el flujo continuo por compresión para un fluido no-newtoniano inelástico tipo ley de potencia, combinando un esquema perturbativo mediante una parametrización del escalar rapidez de deformación. Para resolver el conjunto de ecuaciones adimensionales, proponen un esquema perturbativo regular el cual toma como parámetro de perturbación el cociente entre las longitudes axiales y radiales. Las variables perturbadas son las velocidades, esfuerzos y presiones. Finalmente obtienen expresiones analíticas para la fuerza viscosa (orden cero) y la fuerza inercial (primer orden, **Waters y Gooden 1983**). **Waters y Gooden (1984) incorporan los mecanismos elásticos a través de un modelo tipo Oldroyd-B de 6 constantes. Su trabajo muestra tres cosas importantes:**

- A) Los mecanismos viscosos están relacionados directamente con la fuerza aplicada.
- B) Los mecanismos inerciales son pequeños y pueden ser despreciables.
- C) Los mecanismos elásticos son importantes y la compresión es negativa asociada a los cambios espaciales de la primera diferencia de esfuerzos normales.

Los datos que se obtuvieron experimentalmente para pastas demuestran que el modelo teórico predice los parámetros materiales.

No obstante, y a pesar de todos intentos realizados por entender este fenómeno, este trabajo presenta el desarrollo matemático del flujo por compresión mediante el flujo continuo por compresión. Como primera aproximación, se analizará el caso del fluido Newtoniano a ordenes cero y primero. Para este efecto, se plantea la siguiente hipótesis

1.5 HIPÓTESIS

La inyección continua en un plato con una distribución aleatoria de orificios, produce una fuerza normal en el plato superior, entonces esta dependerá de las propiedades viscosas, inerciales y de no-homogeneidad del sistema y será comparable al flujo continuo por compresión tradicional.

2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN:

2.1 General

Estudiar la respuesta dinámica del flujo por continuo por compresión de un fluido newtoniano en un sistema de platos paralelos, mediante un esquema perturbativo.

2.2 Particulares

P.1 Utilizar las ecuaciones de continuidad, transporte y reológica de Newton para caracterizar la dinámica del flujo continuo por compresión.

P.2 Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener las ecuaciones de continuidad, de momento y reológica con el fin de introducir grupos adimensionales que describan las fuerzas macroscópicas en el sistema de estudio.

P.3 Proponer un esquema perturbativo para las velocidades, presión, componentes del tensor de esfuerzos y fuerzas a ordenes cero y primero.

P.4 Obtener expresiones analíticas para la velocidad radial, velocidad axial, gradiente de presión y fuerza de compresión que experimenta el plato superior debido al líquido que entra por los orificios en el plato inferior a orden cero.

P.5 Obtener expresiones analíticas para la velocidad radial, velocidad axial, gradiente de presión y fuerza de compresión que experimenta el plato superior debido al líquido que entra por los orificios en el plato inferior a primer orden.

P.6 Programar las ecuaciones analíticas para las velocidades radiales, axiales, presiones y fuerzas a ordenes cero y primero en el programa de cómputo Wolfram-Mathematica.

3. DISTRIBUCIÓN DEL MATERIAL

En el capítulo 1, se describe las defunciones principales del flujo por compresión y del flujo continuo por compresión. Además, se presenta el estado del arte del flujo por compresión y del flujo continuo por compresión.

En el capítulo 2 se ilustra el sistema de flujo continuo por compresión y las principales restricciones físicas del sistema.

En el capítulo 3 se presentan las ecuaciones acopladas adimensionales en términos del número de Reynolds y de la razón geométrica entre la longitud característica axial H y radial R , i.e., $\alpha = H/R \ll 1$.

En el capítulo 4 se propone un esquema perturbativo para las velocidades radial, axial, presiones y de la fuerza que experimenta el palto superior debido al líquido.

- A) Orden cero: Se obtienen las velocidades radiales, axiales, presión y la fuerza a orden cero.
- B) Primer orden: Se obtienen las velocidades radiales, axiales, presión y la fuerza a primer orden, en donde los mecanismos inerciales juegan un papel preponderante.

En el capítulo 5, los resultados analíticos para las velocidades radiales, axiales, presión y fuerza a ordenes cero y primero en términos del número de Reynolds y del parámetro α . Estos resultados se programarán en el lenguaje Wolfram-MATHEMATICA. Finalmente, en el último capítulo se presenta la contribución al conocimiento, las conclusiones y trabajo en progreso.

CAPÍTULO 2
PROBLEMA FÍSICO Y
ECUACIONES TEÓRICAS

En este capítulo, se modela el flujo continuo por compresión de un fluido newtoniano entre dos placas paralelas, en un sistema de coordenadas cilíndricas debido a que se estudia específicamente en el centro del tubo; por lo tanto, se deducirá el perfil de velocidades axial y radial, el gradiente de presión y la fuerza del fluido hacia el disco superior, para que así posteriormente dichos resultados se puedan comparar con relación a los posteriores que estén afectados por los mecanismos inerciales y fuerzas viscosas.

2.1 PLANTEAMIENTO FÍSICO DEL PROBLEMA.

El sistema fluye entre dos placas paralelas de radio a , y distancia axial H . El movimiento es causado por la compresión del plato superior sobre el líquido que entra por la parte de abajo (a través de los orificios), del plato inferior, causando así un laminado en la dirección radial.

2.2 ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Para modelar el sistema se suponen las siguientes restricciones físicas. El sistema fluye por dos geometrías. La primera de ellas es una rendija y la segunda es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$.

- a) El líquido complejo es incompresible, i.e. su volumen no cambia.
- b) El proceso es isotérmico, i.e. la temperatura es constante y no es necesario el balance de energía.
- c) El fluido contiene dos contribuciones: c.1. Solvente y c.2 Polímero.
- d) Los mecanismos gravitacionales son despreciables, el fluido es cortado por un gradiente de presión oscilatorio, el cual depende del tiempo y de la frecuencia.
- e) El sistema de coordenadas es colocado en el centro del tubo por lo que, se supone simetría cilíndrica.

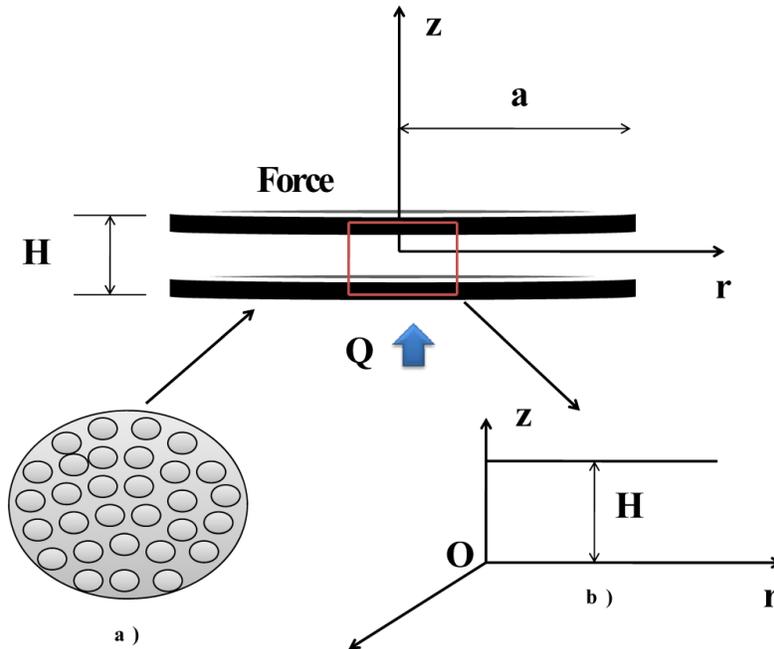


Figura 3.- demostración esquemática del sistema para un mejor entendimiento de este, y observar las restricciones que se harán en el sistema.

2.3 ECUACIONES TEÓRICAS

Las ecuaciones teóricas que se utilizarán en la descripción de la física del sistema.

2.3.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad describe la conservación de la masa en un sistema y matemáticamente se describe mediante la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1)$$

2.3.2 Ecuación de Cauchy en su segunda forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

En la Ec. (2), ρ es la densidad del líquido, mientras que $\frac{D}{Dt}$, es el operador de Stokes o la derivada material, en donde describe cambios en la velocidad en función de las variables temporal y espaciales del sistema; \mathbf{V} es el vector velocidad; $-\nabla p$ es el gradiente de presión o diferencial de presión, en donde su signo es negativo debido a una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica; $-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos y \mathbf{g} es el vector de aceleración de fuerza de gravedad, lo cual en el presente trabajo, este se despreciara.

2.3.3 Ecuación reológica.

Para caracterizar el líquido del sistema se utiliza la ecuación reológica de Newton, la cual relaciona la rapidez de deformación en función del esfuerzo en el sistema de la siguiente manera.

La ecuación constitutiva se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (3)$$

Esta Ec. (3), contiene a la variable $\boldsymbol{\sigma}$ [Pa], el cual es el tensor de esfuerzos viscoso; μ [Pas] es la viscosidad del fluido en cuestión y \mathbf{D} [1/s] es el tensor de rapidez de deformación, el cual, es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ∇ [1/s]. En donde la contribución del solvente se puede expresar como:

$$2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T \quad (4)$$

En la Ec. (4), \mathbf{V} es el vector velocidad; ∇ es el operador nabla; $\nabla\mathbf{V}$ es el tensor gradiente de velocidad y \mathbf{T} es la transpuesta del tensor gradiente de velocidad.

Sustituyendo la Ec. (3) en la Ec. (2):

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu\mathbf{D}) + \rho\mathbf{g} \quad (4.1)$$

Por conmutatividad

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla \cdot (2\mathbf{D}) + \rho\mathbf{g} \quad (4.2)$$

Al combinar las Ecs. (4) se obtiene la siguiente expresión para la ecuación dinámica, i.e.,

Sabiendo que $2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu(\nabla \cdot [\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T]) + \rho\mathbf{g} \quad (5)$$

Distribuyendo el operador divergencia, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu(\nabla^2\mathbf{V} + \nabla \cdot (\nabla\mathbf{V}^T)) + \rho\mathbf{g} \quad (6)$$

La Ec. (6), se puede simplificar a:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu(\nabla^2\mathbf{V} + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{V}]) + \rho\mathbf{g} \quad (7)$$

Suponiendo fluido incompresible $(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$, es decir densidad constante, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu(\nabla^2\mathbf{V} + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{V}]) + \rho\mathbf{g}$$

Por lo tanto

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (8)$$

Desarrollando la derivada material del vector velocidad \mathbf{V}

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (9)$$

El sistema se encuentra en estado estacionario, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \\ \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (10.1)$$

Suponiendo que los mecanismos gravitacionales son despreciables, i.e.,

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \cong -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (11)$$

Por lo que la Ec. (11), toma la forma:

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (12)$$

Finalmente, las ecuaciones fundamentales para el desarrollo de esta tesis, son la ecuación de continuidad y la de movimiento las cuales, pueden ser descritas de la siguiente manera:

$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned}$
--

Estas ecuaciones son punto de partida en este trabajo y serán desarrolladas en su componente r y z respectivamente. En el siguiente capítulo se presentarán las componentes de estas ecuaciones y se establecerá la parte dinámica del sistema, es decir:

- a) Tensor gradiente de velocidad
- b) Tensor rapidez de deformación
- c) Tensor de esfuerzos

CAPÍTULO 3
TENSORES Y ECUACIONES DE
TRANSPORTE DESACOPLADAS

3.1 TENSORES CINEMÁTICOS

Para obtener las componentes de las ecuaciones de transporte correspondientes, se emplearán los siguientes vectores y tensores cinemáticos y dinámicos en el sistema. El vector velocidad en este sistema, solo tiene dos componentes en la dirección radial y axial respectivamente, por lo que puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (V_r(r,z), 0, V_z(r,z)) \quad (13)$$

El tensor gradiente de velocidad tiene la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (14)$$

La transpuesta de la ec. (14), se tiene:

$$\nabla \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (14)$$

El tensor rapidez de deformación \mathbf{D} y el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ tienen la siguiente forma:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Y el tensor de esfuerzos este definido como:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (16)$$

El tensor de esfuerzos está relacionado a las fuerzas cortantes y extensionales en un elemento de control; sin embargo, el tensor de gradientes de velocidades nos da información acerca del cambio espacial de la velocidad.

3.2 MODELADO TEÓRICO

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas toma la forma:

$$\rho \neq \rho(r, t)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$$

De la derivada material

$$\nabla \cdot \rho V = 0$$

Por conmutatividad

$$\rho(\nabla \cdot V) = 0$$

Como la densidad es constante, se pasa dividiendo a lado derecho de la ecuación, quedando lo siguiente:

$$(\nabla \cdot V) = 0$$

Desarrollando la divergencia de la velocidad:

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{\theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Quedando lo siguiente

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

En esta sección se modelará solamente el capilar de radio $r = a$ y longitud L . En coordenadas cilíndricas el sistema, se puede modelar de la siguiente manera:

3.2.1 Componente en r:

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{(V_\theta)^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \quad (18)$$

3.2.2 Componente en θ :

En donde se eliminara el componente en θ debido a que no es el componente de interes

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta V_r}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_\theta \right) \quad (19)$$

3.2.3 Componente en z:

En donde se eliminara el componente en z debido a que no es el componente de interes

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (20)$$

Se quedara unicamente el componente en r, debido a que es la componente de analisis

$$\rho \left(V_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{(v_\theta)^2}{r} + V_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)$$

Se desprecia por efecto de curvatura
Se consideran insignificantes

Sabemos que

$$V = [V_r, 0, V_z]$$

Por lo que lo restante de la componente r es lo siguiente:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (20.1)$$

Acomodando la ec (20.1)

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (20.2)$$

3.2.4 Condiciones de frontera

El fluido satisface las iguientes condiciones de frontera:

$$V_z(z=0, r) = u(r) \quad (21)$$

Las siguientes condiciones de frontera se menciona a ontinuación:

$$V_z(z=H, r) = 0 \quad (22)$$

$$V_r(z, r=0) = 0 \quad (23)$$

3.2.5 Flujo volumétrico

El flujo volumétrico, se tiene lo siguiente:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(z=0,r) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a u(r) r dr d\theta \quad (24)$$

3.2.6 Fuerza normal en el plato superior

La fuerza normal en el plato superior, se puede calcular a través de una integral doble:

$$F_Z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(-T_{(zz)} \Big|_{z=h} \right) r dr d\theta \quad (25)$$

Las Ecs. (1-25) representan el núcleo de este trabajo de investigación a nivel de licenciatura. Estas, están basadas en los principios de conservación de masa sin reacción química y transferencia de cantidad de movimiento lineal y constitutiva del material (reológica).

Finalmente, la meta de este proyecto es obtener una contribución de la fuerza que experimenta el plato superior debido al bombeo del líquido en el medio. Este se descompondrá en dos componentes radial y axial respectivamente y permitirá a través de las condiciones de frontera obtener una expresión cerrada para el gradiente de presión y posterior a eso, la fuerza normal del sistema.

CAPÍTULO 4
VARIABLES Y ECUACIONES
ADIMENSIONALES

4.1 ESCALAMIENTO

Se propusieron las siguientes variables adimensionales para el adimensionamiento de la Ecuación de continuidad, Ecuación de Navier Stokes para el componente “r” (radial) y ec. de Navier Stokes para el componente “z” (Axial), con el fin de introducir grupos adimensionales y escalar las variables para así facilitar el modelado y simulación computacional del sistema de flujo continuo por compresión de un fluido Newtoniano entre dos placas paralelas. Las variables adimensionales utilizadas fueron las siguientes:

$$r^* = \frac{r}{a}; \quad z^* = \frac{z}{h}; \quad Vr^* = \frac{Vr}{\langle V \rangle}; \quad Vz^* = \frac{Vz}{\frac{h\langle V \rangle}{a}}; \quad p^* = \frac{p}{\frac{\mu\langle V \rangle a}{h^2}}$$

Con el uso de las variables adimensionales propuestas, se procede a adimensionar las ecuaciones de continuidad, movimiento y reológica.

4.2 ECUACIONES ADIMENSIONALES

4.2.1 Ecuación de Continuidad (Dividida en regiones).

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr)}_1 + \underbrace{\frac{\partial Vz}{\partial z}}_2 = 0$$

$$\text{región 1 adimensional: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) = \frac{\langle V \rangle}{a} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*)$$

$$\text{región 2 adimensional: } \frac{\partial Vz}{\partial z} = \frac{\langle V \rangle}{a} \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*}$$

Sustituyendo las variables adimensionales encontradas en la Ecuación de continuidad

$$\frac{\langle V \rangle}{a} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) + \frac{\langle V \rangle}{a} \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} = 0$$

Factorizando términos comunes y sabiendo que $\frac{\langle V \rangle}{a} \neq 0$, entonces la ec. de continuidad adimensional, queda de la siguiente forma

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) + \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} = 0$$

En términos de α (Se sabe que $Re = \frac{\rho\langle V \rangle h}{\mu}$ y $\alpha = \frac{h}{a}$)

$$\alpha^0 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) + \alpha^0 \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} = 0$$

Si Re y α es un valor pequeño, entonces

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) + \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad adimensional.}$$

La expresion anterior, es el resultado principal del adimensionamiento de la Ecuacion de continuidad, el cual es aquella ecuacion que nos demuestra o representa la conservacion de la materia en un sistema fisico, esto, en el caso de un fluido newtoniano. En la siguiente secci3n se desarrollara el adimensionamiento en la componente "r" de la ecuacion de Navier Stokes

4.2.2 Ecuaci3n de Navier Stockes para componente "r", radial (se divide en regiones)

$$\rho \left(\underbrace{Vr \frac{\partial Vr}{\partial r}}_1 + \underbrace{Vz \frac{\partial Vr}{\partial z}}_2 \right) = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial r}}_3 + \mu \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) \right)}_4 \right] + \underbrace{\frac{\partial^2 Vr}{\partial z^2}}_5 + \rho g$$

regi3n 1 adimensional: $Vr \frac{\partial Vr}{\partial r} = \langle V \rangle^2 \frac{1}{a} Vr^* \frac{\partial Vr^*}{\partial r^*}$

regi3n 2 adimensional: $Vz \frac{\partial Vr}{\partial z} = \langle V \rangle^2 \frac{1}{a} Vz^* \frac{\partial Vr^*}{\partial z^*}$

regi3n 3 adimensional: $-\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu \langle V \rangle}{h^2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*}$

regi3n 4 adimensional: $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) \right) = \frac{\langle V \rangle}{a^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) \right)$

regi3n 5 adimensional: $\frac{\partial^2 Vr}{\partial z^2} = \frac{\langle V \rangle}{h^2} \frac{\partial^2 Vr^*}{\partial z^{*2}}$

Sustituyendo las variables adimensionales en la ecuaci3n de Navier Stockes para componente "r", queda de la siguiente manera.

$$\rho \left(\langle V \rangle^2 \frac{1}{a} Vr^* \frac{\partial Vr^*}{\partial r^*} + \langle V \rangle^2 \frac{1}{a} Vz^* \frac{\partial Vr^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\mu \langle V \rangle}{h^2} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \mu \left[\frac{\langle V \rangle}{a^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) \right) \right] + \frac{\langle V \rangle}{h^2} \frac{\partial^2 Vr^*}{\partial z^{*2}} + \rho g$$

Factorizando y eliminando terminos, ademas de multiplicar toda la ecuacion por las siguientes variables $\frac{h^2}{\mu \langle V \rangle}$, y desarrollando, queda de la siguiente forma.

$$\frac{h}{a} \frac{\rho \langle V \rangle h}{\mu} \left(Vr^* \frac{\partial Vr^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vr^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) \right) + \frac{\partial^2 Vr^*}{\partial z^{*2}}$$

Se sabe que $Re = \frac{\rho \langle V \rangle h}{\mu}$ y $\alpha = \frac{h}{a}$, por lo que, sustituyendo en la ecuaci3n, queda lo siguiente.

$$\alpha Re \left(Vr^* \frac{\partial Vr^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vr^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) \right) + \frac{\partial^2 Vr^*}{\partial z^{*2}}$$

En t3rminos de α , la ec. De Navier Stokes en la componente radial "r", quedaría de la siguiente forma

$$\alpha^1 Re \left(Vr^* \frac{\partial Vr^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} \right) = \alpha^0 \left(-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) \right) + \alpha^0 \left(\frac{\partial^2 Vr^*}{\partial z^{*2}} \right)$$

Si Re y α es un valor pequeño, entonces

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 Vr^*}{\partial z^{*2}} \quad \text{Ecuación de Navier Stokes adimensional para componente "r", radial}$$

La expresión anterior, es el resultado principal de la componente radial de la ecuación de transferencia de cantidad de movimiento en el caso de un fluido newtoniano. En la siguiente sección se desarrollará la componente en "z"

4.2.3 Ecuación de Navier Stokes para componente "z", axial (se divide en regiones)

$$\rho \left(\underbrace{Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*}}_1 + \underbrace{Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*}}_2 \right) = \underbrace{-\frac{\partial p^*}{\partial z^*}}_3 + \mu \left[\underbrace{\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) \right)}_4 + \underbrace{\frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{*2}}}_5 \right] + \rho g$$

$$\text{región 1 adimensional: } Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} = \langle V \rangle^2 \frac{h}{a^2} Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*}$$

$$\text{región 2 adimensional: } Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} = \langle V \rangle^2 \frac{h}{a^2} Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*}$$

$$\text{región 3 adimensional: } -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = -\frac{\mu \langle V \rangle a}{h^2} \frac{\partial p^*}{\partial z^*}$$

$$\text{región 4 adimensional: } \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) = \frac{h}{a^3} \langle V \rangle \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right)$$

$$\text{región 5 adimensional: } \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{*2}} = \langle V \rangle \frac{1}{ah} \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{*2}}$$

Sustituyendo las variables adimensionales en la ecuación de Navier Stokes para componente "z", queda de la siguiente manera.

$$\rho \left(\langle V \rangle^2 \frac{h}{a^2} Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} + \langle V \rangle^2 \frac{h}{a^2} Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\mu \langle V \rangle a}{h^2} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \mu \left[\frac{h}{a^3} \langle V \rangle \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) + \langle V \rangle \frac{1}{ah} \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{*2}} \right] + \rho g$$

Factorizando y eliminando terminos, ademas de multiplicar toda la ecuacion por las siguientes variables $\frac{h^2}{\mu \langle V \rangle}$, y desarrollando, queda de la siguiente forma.

$$\frac{h^2}{a^2} \frac{\rho \langle V \rangle h}{\mu} \left(Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right)} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \left(\frac{h}{a}\right)^3 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) + \frac{h}{a} \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{*2}}$$

Se sabe que $Re = \frac{\rho \langle V \rangle h}{\mu}$ y $\alpha = \frac{h}{a}$, por lo que, sustituyendo en la ecuación, queda lo siguiente.

$$(\alpha)^2 Re \left(Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + (\alpha)^3 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) + (\alpha)^1 \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{2*}}$$

Desarrollando, en términos de α , la ec. De Navier Stokes en la componente axial “z”, quedaría de la siguiente forma

$$(\alpha)^3 Re \left(Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} \right) = -\alpha^0 \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + (\alpha)^4 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) + (\alpha)^2 \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{2*}}$$

La expresión anterior, es el resultado principal de la componente axial de la ecuación de transferencia de cantidad de movimiento en el caso de un fluido newtoniano. En la siguiente sección se desarrollará la fuerza normal en el sistema

4.2.4 Fuerza normal

$$-F = -\pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr$$

De las variables adimensionales

$$r^* = \frac{r}{a} \rightarrow r^{*2} = \frac{r^2}{a^2}$$

Por lo que,

$$r^* = \frac{r}{a} \rightarrow dr^* = \frac{dr}{a}$$

Por lo tanto, la fuerza toma la forma

$$-\frac{a^3}{a^3} F = \frac{a^3}{a^3} \left(-\pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr \right)$$

Desarrollando y haciendo las operaciones y calculos necesarios, se obtiene la siguiente ecuacion.

$$-F = -\pi \frac{a^3}{a} \int_0^1 \frac{dp(r)}{dr^*} r^{*2} dr^*$$

Se multiplicará por el termino $\frac{p_c}{1}$

$$-\frac{p_c}{1} F = -\pi \frac{a^3}{a} \frac{p_c}{1} \int_0^1 \frac{dp(r)}{dr^*} r^{*2} dr^*$$

Desarrollando, eliminando terminos semejantes y sustituyendo los despejes de las ecuaciones de variables adimensionales, finalmente se obtiene la siguiente ecuacion.

$$F = \pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^*$$

La fuerza adimensional esta representada por la expresion anterior. Notese, que la fuerza depende de variables geométricas y de la fuerza motriz a través del gradiente de presión a

ordenes cero y primero. A continuación se hará un resumen del resultado obtenido del adimensionamiento de las ecuaciones mencionadas ya anteriormente.

4.3 RESUMEN DE ECUACIONES ADIMENSIONALES OBTENIDAS:

Por lo tanto, las ecuaciones adimensionales en términos de α y Re son:

Ecuación de Navier Stockes para componente “r”, radial

$$\alpha^1 Re \left(Vr^* \frac{\partial Vr^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vr^*}{\partial z^*} \right) = \alpha^0 \left(-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) \right) + \alpha^0 \left(\frac{\partial^2 Vr^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (\text{I})$$

Ecuación de Navier Stockes para componente “z”, componente axial

$$(\alpha)^3 Re \left(Vr^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} + Vz^* \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} \right) = -\alpha^0 \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + (\alpha)^4 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Vz^*}{\partial r^*} \right) + (\alpha)^2 \frac{\partial^2 Vz^*}{\partial z^{*2}} \quad (\text{II})$$

Ecuación de continuidad

$$\alpha^0 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr^*) + \alpha^0 \frac{\partial Vz^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{III})$$

Las Ecs. (I, II, III) dependen de dos números adimensionales (α y Re), los cuales están definidos como:

$$\alpha = \frac{h}{a}$$

$$Re = \frac{\rho \langle V \rangle h}{\mu}$$

El primer grupo adimensional, es un cociente de dos longitudes características asociadas con el eje axial y radial respectivamente. El valor de alfa siempre es menor de uno, i.e. $\alpha = \frac{h}{a} < 1$.

El segundo número adimensional, es el número de Reynolds es un cociente de dos mecanismos los cuales relacionan los procesos viscosos e inerciales. Cuando el número de $Re \gg 1$, los mecanismos dominantes son los inerciales, mientras que si $Re \ll 1$, dominan los procesos viscosos.

En la siguiente sección, se llevará a cabo un desarrollo resumen de los cálculos y pasos necesarios que se llevaron a cabo para la perturbación a orden cero y a primer orden de los resultados de las ecuaciones adimensionales obtenidas; sin embargo, si quiere conocer acerca del desarrollo completo que se llevó a cabo para la obtención de los resultados perturbados a orden cero y a primero orden, puede revisarlos en los apéndices.

4.4 ESQUEMA PERTURBATIVO

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se propone una serie de potencia en donde el parámetro de perturbativo $\alpha = H/a \ll 1$, para la velocidad radial, axial y la presión, por lo que se tiene los siguiente:

$$V_r(r, z) = \alpha^0 V_{r_0} + \alpha^1 V_{r_1} + \alpha^2 V_{r_2} + O(\alpha^2) \quad (1)$$

$$V_z(r, z) = \alpha^0 V_{z_0} + \alpha^1 V_{z_1} + \alpha^2 V_{z_2} + O(\alpha^2) \quad (2)$$

$$p(r) = \alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + O(\alpha^2) \quad (3)$$

CAPÍTULO 5
MÉTODO PERTURBATIVO A
ORDEN CERO

5.1 Perturbación a orden cero

$$\alpha^0 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V r^*) + \alpha^0 \frac{\partial V z^*}{\partial z^*} = 0$$

Sustituir Ec. (1) y Ec. (2) en la ecuación de continuidad adimensionada, para posteriormente desarrollarla y eliminar términos semejantes y como únicamente se está perturbando a orden cero, se quedarán aquellos términos que contengan α^0 , por lo tanto, la ecuación de continuidad toma la forma siguiente.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* (V r_0)) + \frac{\partial}{\partial z^*} V z_0 = 0$$

La ecuación de continuidad permanece invariante ante la perturbación a orden cero, i.e. no existe ninguna contribución adicional por efecto de la perturbación.

5.2 Componente radial de la ecuación de Navier-Stokes

$$\alpha^1 Re \left(V r^* \frac{\partial V r^*}{\partial r^*} + V z^* \frac{\partial V r^*}{\partial z^*} \right) = \alpha^0 \left(-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V r^*) \right) + \alpha^0 \left(\frac{\partial^2 V r^*}{\partial z^{*2}} \right)$$

Sustituyendo el esquema perturbativo en la componente radial de la ecuación de movimiento, Ecs. (1-3), se obtiene la siguiente expresión a orden cero:

$$0 = -\frac{\partial (p_0)}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 (V r_0)}{\partial z^{*2}}$$

La ecuación anterior, es resultado de un balance de fuerzas viscosas y el del gradiente de presión en la dirección radial.

5.3 Componente axial de la ecuación de Navier-Stokes

$$(\alpha)^3 Re \left(V r^* \frac{\partial V z^*}{\partial r^*} + V z^* \frac{\partial V z^*}{\partial z^*} \right) = -\alpha^0 \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + (\alpha)^4 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V z^*}{\partial r^*} \right) + (\alpha)^2 \frac{\partial^2 V z^*}{\partial z^{*2}}$$

Al sustituir Ecs. (1-3) en las componentes de la ecuación de movimiento y despreciando las contribuciones mayores al orden cero, se tiene la siguiente expresión:

$$0 = -\frac{\partial (p_0)}{\partial z^*}$$

5.4 Fuerza normal a orden cero

La fuerza normal se obtiene a través de la integración de la fuerza que experimenta el sistema en el plato superior y el área de contacto en coordenadas cilíndricas. Al sustituir la serie de potencia de la presión se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$-F = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp^*}{dr^*} r^{*2} dr^*$$

La fuerza a orden de cero es proporcional al gradiente de presión inducido por el flujo continuo del líquido en el plato inferior y el resultado principal a orden cero de este proyecto de investigación.

5.5 RESUMEN A ORDEN CERO

5.5.1 Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* (V_{r_0})) + \frac{\partial}{\partial z^*} V_{z_0} = 0$$

5.5.2 Componente en r ecuación de Navier-Stokes

$$0 = -\frac{\partial(p_0)}{\partial r^*} + \frac{\partial^2(V_{r_0})}{\partial z^{*2}}$$

5.5.3 Componente en z ecuación de Navier-Stokes

$$0 = -\frac{\partial(p_0)}{\partial z^*}$$

5.5.4 Fuerza normal a orden cero

$$F_0 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_0}{dr^*} r^{*2} dr^*$$

A continuación se llevará a cabo el procedimiento de la obtención de la fuerza del plato superior a orden cero, en donde se llevará a cabo el uso de las ecuaciones obtenidas cuando se perturbaron aquellas ecuaciones que se habían adimensionado. Por esto, en la siguiente sección se encontrará una ecuación de fuerza del plato superior, sin embargo, también se encontrará la velocidad axial y radial del sistema y el gradiente de presión, en donde se podrá observar cómo afectan los mecanismos inerciales o viscosos de acuerdo al grado de perturbación en las ecuaciones que se obtendrán.

5.6 Modelado matemático: Orden cero $O(\alpha^0)$

5.6.1 Velocidad radial

De la ecuación de Navier Stokes para componente “r” (radial), a orden cero

$$0 = -\frac{\partial(p_0)}{\partial r^*} + \frac{\partial^2(Vr_0)}{\partial z^{*2}} \quad (1)$$

Despejando la segunda derivada espacial de la velocidad con respecto a la coordenada radial r, se tiene lo siguiente

$$-\frac{\partial^2(Vr_0)}{\partial z^{*2}} = -\frac{\partial(p_0)}{\partial r^*}$$

Multiplicando por un signo menos, para volver el lado izquierdo y derecho positivo

$$\frac{\partial^2(Vr_0)}{\partial z^{*2}} = \frac{\partial(p_0)}{\partial r^*} \quad (1.1)$$

Separando los términos de la Ec. (1.1).

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \frac{\partial Vr_0}{\partial z^*} = \frac{dp_0}{dr^*} \quad (2)$$

Pasando la ∂z^* a lado derecho de la ecuacion para posteriormente integrar la Ec.(2)

$$\int \partial \frac{\partial Vr_0}{\partial z^*} = \frac{dp_0}{dr^*} \int \partial z^*$$

Quedando lo siguiente:

$$\frac{\partial Vr_0}{\partial z^*} = \frac{dp_0}{dr^*} z^* + C_1$$

Nuevamente se pasa la ∂z^* a lado derecho de la ecuacion para integrar

$$\partial Vr_0 = \left(\frac{dp_0}{dr^*} z^* + C_1 \right) \partial z^*$$

Desarrollando la multiplicación e integrando nuevamente.

$$\int \partial Vr_0 = \frac{dp_0}{dr^*} \int z^* \partial z^* + C_1 \int \partial z^*$$

Obteniéndose así:

$$\therefore Vr_0 = \frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} z^{*2} + C_1 z^* + C_2 \quad (3)$$

Al sustituir las condiciones de frontera adimensionales.

$$z = 0 \rightarrow Vr_0(r, z) = 0 \text{ (C.F.1)} \quad (4)$$

$$z = 1 \rightarrow Vr_0(r, z) = 0 \text{ (C.F.2)} \quad (5)$$

Aplicando C.F.1 en la Ec. (3).

$$0 = \frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} 0^2 + C_1 0 + C_2 \quad (5.1)$$

Despejando a la C_2 , se obtiene que:

$$C_2 = 0$$

Aplicando C.F.2 en la Ec. (3)

$$0 = \frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} 1^2 + C_1(1) + C_2 \quad (5.2)$$

Sustituyendo C_2 en Ec. (5.2)

$$0 = \frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} + C_1 + 0 \quad (5.3)$$

Despejando la C_1 de la Ec. (5.3)

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en Ec. (3)

$$Vr_0(r, z) = \frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} z^{*2} - \frac{z^*}{2} \frac{dp_0}{dr^*} \quad (5.4)$$

Factorizando la Ec. (5.4)

$$Vr_0(r, z) = \frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} (z^{*2} - z^*) \quad (6)$$

5.6.2 Velocidad axial

Al integrar la ecuacion con respecto a z^* y utilizando la ecuación de continuidad a orden cero, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* (Vr_0)) + \frac{\partial Vz_0}{\partial z^*} = 0$$

Por lo que,

$$\frac{\partial Vz_0}{\partial z^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr_0)$$

Integrando de los dos lados de la ecuación.

$$\int_0^z \frac{\partial Vz_0(r, z)}{\partial z^*} dz^* = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \int_0^z Vr_0(r, z^*) dz^*) \quad (7)$$

Se obtiene lo siguiente.

$$Vz_0(r, z) = -\int_0^z \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* Vr_0) dz^* \quad (7.1)$$

Sustituyendo Vr_0 en la Ec. (7.1)

$$Vz_0(r, z) = -\int_0^z \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \left(\frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} (z^{*2} - z^*) \right) \right) dz^*$$

Multiplicando por r^*

$$Vz_0(r, z) = -\int_0^z \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} z^{*2} r^* - \frac{1}{2} \frac{dp_0 z^*}{dr^*} r^* \right) dz^*$$

Sacando $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*}$ de la integral

$$V_{z_0}(r, z) = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \int_0^z \left(\frac{1}{2} \frac{dp_0}{dr^*} z^{*2} r^* - \frac{1}{2} \frac{dp_0 z^*}{dr^*} r^* \right) dz^*$$

Poniendo la integral a cada termino y multiplicando el signo menos a cada termino

$$V_{z_0}(r, z) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(- \int_0^z r^* \frac{z^{*2}}{2} \frac{dp_0}{dr^*} dz^* + \int_0^z \frac{r^* z^*}{2} \frac{dp_0}{dr^*} dz^* \right)$$

Sacando constantes de las integrales

$$V_{z_0}(r, z) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(-\frac{r^*}{2} \frac{dp_0}{dr^*} \int_0^z z^{*2} dz^* + \frac{r^*}{2} \frac{dp_0}{dr^*} \int_0^z z^* dz^* \right)$$

Resolviendo las integrales y factorizando

$$V_{z_0}(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{dp_0}{dr^*} \left(\frac{z^{*3}}{3} \right) - r^* \frac{dp_0}{dr^*} \left(\frac{z^{*2}}{2} \right) \right)$$

Factorizando nuevamente la ecuación

$$V_{z_0}(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{dp_0}{dr^*} \right) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right)$$

Desarrollando

$$V_{z_0}(r, z) = V_{z_0}(r, z) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{dp_0}{dr^*} \right) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right)$$

Por lo tanto

$$V_{z_0}(r, z) = u(r^*) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right) \quad (8)$$

Sustituyendo la condicion de frontera adimensional, $z^* = 1$, la velocidad $V_{z_0}(r, z) = 0$ en la Ec. (8), por lo que se tiene lo siguiente:

$$0 = u(r^*) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) \quad (8.1)$$

Desarrollando la Ec. (8.1)

$$0 = u(r^*) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) \left(-\frac{1}{6} \right)$$

Desarrollando las multiplicaciones.

$$0 = u(r^*) + \frac{1}{12} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right)$$

Pasando $u(r)$ de lado izquierdo de la ecuacion

$$-u(r^*) = \frac{1}{12} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right)$$

Multiplicando por un (-) a cada lado de la ecuacion.

$$u(r^*) = -\frac{1}{12} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right)$$

Pasamos el termino $-\frac{1}{12}$ dividiendo en el lado izquierdo de la ecuacion y desarrollando.

$$-12u(r^*) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right)$$

Pasando el termino $\frac{1}{r^*}$ a lado izquierdo de la ecuacion y desarrollando

$$-12r^*u(r^*) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right)$$

Reacomodando la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) = -12r^*u(r^*) \quad (8.2)$$

Aplicando la integral definida de 0 a r en los dos lados de la ecuación.

$$\int_0^r \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) dr^* = \int_0^r -12r^*u(r^*) dr^*$$

Reacomodando la ecuación

$$\int_0^r \frac{\partial r^*}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) d = \int_0^r -12r^*u(r^*) dr^*$$

Eliminando terminos semejantes.

$$\int_0^r d \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) = \int_0^r -12r^*u(r^*) dr^*$$

Eliminando la integral de lado izquierdo con la diferencial sobrante, queda lo siguiente.

$$r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} = \int_0^r -12r^*u(r^*) dr^*$$

Sacando constantes de la integral.

$$r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \int_0^r r^*u(r^*) dr^*$$

Despejando la $\frac{\partial p_0}{\partial r^*}$ de la ecuación anterior

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} \int_0^r r^*u(r^*) dr^* \quad (8.3)$$

Sustituir la Ec. (8.2) en la Ec. (8)

$$Vz_0(r, z, t) = u(r^*) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p_0}{\partial r^*} \right) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right)$$

Sustituyendo la Ec. (8.2).

$$Vz_0(r, z, t) = u(r^*) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} (-12r^*u(r^*)) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right)$$

Multiplicando los signos negativos.

$$Vz_0(r, z) = u(r^*) + \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} (12r^*u(r^*)) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right)$$

Eliminando a r^* , ademas de reducir la fracción

$$Vz_0(r, z) = u(r^*) + \frac{1}{2} \frac{1}{r^*} (12r^*u(r^*)) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right)$$

Quedando lo siguiente.

$$Vz_0(r, z) = u(r^*) + (6u(r^*)) \left(\frac{z^{*3}}{3} - \frac{z^{*2}}{2} \right)$$

Desarrollando la multiplicación

$$Vz_0(r, z) = u(r^*) + \left(\frac{6}{3}z^{*3}u(r^*) - \frac{6}{2}z^{*2}u(r^*) \right)$$

Queda de la siguiente forma:

$$Vz_0(r, z) = u(r^*) + \frac{6}{3}z^{*3}u(r^*) - \frac{6}{2}z^{*2}u(r^*)$$

Desarrollando las fracciones.

$$Vz_0(r, z) = u(r^*) + 2z^{*3}u(r^*) - 3z^{*2}u(r^*)$$

Factorizando el termino $u(r)$

$$Vz_0(r, z) = u(r^*)(1 + 2z^{*3} - 3z^{*2})$$

Entonces se tiene lo siguiente.

$$Vz_0(r, z) = u(r^*)(1 + 2z^{*3} - 3z^{*2}) \quad (9)$$

5.6.3 Calculo de la fuerza a orden cero

La expresión analítica para el gradiente de presión es susutituido en la fuerza normal por lo que se obtiene:

$$F_0 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_0}{dr^*} r^{*2} dr^*$$

Del gradiente de presión (Ec. 8.3), integrando se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} \int_0^r r^* u(r^*) dr^* \quad (10)$$

La variable $u(r)$ describe la no homogeneidad en el sistema, por lo que se tiene la siguiente

$$u(r^*) = u_m(r^*)^m \quad (11)$$

Por lo que sustituyendo $u(r^*) = u_m(r^*)^m$ en la Ec. (10)

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} \int_0^r r^* u_m(r^*)^m dr^*$$

Multiplicando el termino r^* dentro de la integral

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} \int_0^r u_m(r^*)^{m+1} dr^*$$

Sacando la constante

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} u_m \int_0^r (r^*)^{m+1} dr^*$$

Desarrollando la integral.

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{m+2} \right]_0^r$$

Evaluando los limites.

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{m+2} - \frac{(0)^{m+2}}{m+2} \right]$$

Desarrollando

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 \frac{1}{r^*} u_m \frac{(r^*)^{m+2}}{m+2}$$

Eliminando terminos comunes (r^*)

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 u_m \frac{(r^*)^{m+1}}{m+2}$$

Por lo que se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r^*} = -12 u_m \frac{(r^*)^{m+1}}{m+2} \tag{12}$$

Pasar la ∂r^* a lado derecho de la Ec. (12)

$$\partial p_0 = -12 u_m \frac{(r^*)^{m+1}}{m+2} \partial r^*$$

Al integrar los dos lados de la ecuación, se tiene lo siguiente:

$$\int \partial p_0 = \int -12 u_m \frac{(r^*)^{m+1}}{m+2} \partial r^*$$

Sacando el signo y constantes de la integral.

$$\int \partial p_0 = -12 u_m \int \frac{(r^*)^{m+1}}{m+2} \partial r^*$$

Realizando la integral.

$$p_0 = -12 u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)(m+2)} \right] + C$$

Simplificando terminos queda lo siguiente.

$$p_0 = -12 u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] + C \tag{13}$$

En $r = 0$, la presión debe de estar definida por lo que, se tiene lo siguiente:

$$p_0 = -12 u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] + C \tag{14}$$

En $r = 1$, la $p_0 = p_{atm}$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$p_{atm} = -12 u_m \left[\frac{(1)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] + C$$

Despejando a C

$$C = p_{atm} + 12 u_m \left[\frac{(1)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] \tag{15}$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

Sustituyendo la Ec. (15) en la Ec. (13)

$$p_0 = -12u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] + p_{\text{atm}} + 12u_m \left[\frac{(1)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] \quad (15.1)$$

Factorizando.

$$p_0 = p_{\text{atm}} + 12u_m \left[- \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] + \left[\frac{(1)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] \right]$$

Desarrollando la factorizacion y reacomodando.

$$p_0 = p_{\text{atm}} + 12u_m \frac{(1)^{m+2}}{(m+2)^2} \left[1 - \left[\frac{r^*}{1} \right]^{m+2} \right] \quad (16)$$

De la ecuación de la fuerza perturbada a orden cero, se sustituirá la derivada de la Ec.(16) respecto a “r”, por lo tanto.

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_0}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (\text{Ec. de fuerza perturbada a orden cero})$$

Por lo tanto, se debe de sacar la derivada de la presión respecto a $r^* \cdot \frac{dp_0(r^*)}{dr^*}$. Por lo tanto, se

derivará la Ec. (15.1), respecto a r^*

$$\frac{d}{dr^*} \left(-12u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] + p_{\text{atm}} + 12u_m \left[\frac{(1)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] \right)$$

Realizando la derivada a cada termino.

$$\frac{d}{dr^*} \left(-12u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] \right) + \frac{d}{dr^*} (p_{\text{atm}}) + \frac{d}{dr^*} \left(12u_m \left[\frac{(1)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] \right)$$

Se elimina directamente a cada termino el cual no tenga la variable r^*

$$\frac{d}{dr^*} \left(-12u_m \left[\frac{(r^*)^{m+2}}{(m+2)^2} \right] \right)$$

Sacando constante de la derivada

$$-12u_m \frac{1}{(m+2)^2} \frac{d}{dr^*} ((r^*)^{m+2})$$

Realizando la derivada

$$-12u_m \frac{1}{(m+2)^2} ((m+2)((r^*)^{m+1}))$$

Eliminando terminos semejantes y desarrollando

$$\frac{dp_0(r^*)}{dr^*} = -12u_m \frac{(r^*)^{m+1}}{(m+2)}$$

Sustituyendo $\frac{dp_0(r^*)}{dr^*}$ en la Ec. de la fuerza perturbada a orden cero.

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_0}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (17)$$

Sustituyendo.

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \int_0^1 -12u_m \frac{(r^*)^{m+1}}{(m+2)} r^{*2} dr^*$$

Sacando constantes de la integral.

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \left(-12u_m \frac{1}{(m+2)} \right) \int_0^1 (r^*)^{m+1} r^{*2} dr^*$$

Desarrollando los terminos dentro de la integral

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \left(-12u_m \frac{1}{(m+2)} \right) \int_0^1 (r^*)^{m+3} dr^*$$

Desarrollando la integral.

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \left(-12u_m \frac{1}{(m+2)} \right) \left[\frac{(r^*)^{m+4}}{m+4} \right]_0^1$$

Evaluandolo en los limites.

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \left(-12u_m \frac{1}{(m+2)} \right) \left[\frac{(1)^{m+4}}{m+4} - \frac{(0)^{m+4}}{m+4} \right]$$

Desarrollando.

$$-F_0 = -\pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \left(-12u_m \frac{1}{(m+2)} \right) \left(\frac{(1)^{m+4}}{m+4} \right)$$

Finalmente multiplicando los signos.

$$-F_0 = \pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \left(12u_m \frac{(1)^{m+4}}{(m+2)(m+4)} \right)$$

Finalmente y reacomodando la ec., la fuerza se puede calcular como:

$$-F_0 = \pi \frac{12\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} u_m \frac{(1)^{m+4}}{(m+2)(m+4)}$$

$$-F_0 = \pi \frac{12\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} u_m \frac{1}{(m+2)(m+4)} \quad (18)$$

La Ec. (18) a orden cero, es base para el presente proyecto de investigación. La fuerza es directamente proporcional a la viscosidad del sistema. Si consideramos flujo homogeneo (m=0), se tiene lo siguiente:

$$-F_0 = \pi \frac{3\mu \langle V \rangle a^3}{2h^2} u_m \quad (19)$$

En la Ec. (19), en el caso u_m homogenea, su valor es de 2, es decir, $u_m = 2$.

$$-F_0 = \pi \frac{3\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \quad (20)$$

En el siguiente capitulo se presenta el mismo desarrollo pero para la fuerza a orden cero. El tratameinto es el mismo, se obtienen las componentes radial y axial de la velocidad, gradiente de presion, presión y fuerza en el plato superior.

CAPÍTULO 6
MÉTODO PERTURBATIVO A
PRIMER ORDEN

6.1 FUERZA A PRIMER ORDEN

En esta sección, se presentarán los resultados a primer orden del esquema perturbativo propuesto para resolver las ecuaciones diferenciales. Es importante notar, que se combinará la ecuación de continuidad, la componente en “r” de la ecuación de Navier Stokes y el balance de masa para obtener el gradiente de presión a primer orden, después de esto se sustituirá en la fuerza de primer orden y se obtendrá la fuerza modificada por los mecanismos inerciales. Una vez sustituidas las variables perturbativas en la ecuación de continuidad, se obtiene la siguiente ecuación diferencial.

Ecuación de continuidad perturbada a primer orden

$$\frac{\partial(Vz_1)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(Vr_1)) = 0 \quad (1)$$

6.1.1. Componente radial de la ecuación de movimiento

Una vez sustituidas las ecuaciones y las variables perturbadas se obtiene la segunda ley de Newton modificada por los mecanismos inerciales, la cual, se presenta a continuación.

$$Re \left(Vr_0 \frac{\partial(Vr_0)}{\partial r} + Vz_0 \frac{\partial(Vr_0)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial(p_1)}{\partial r} + \frac{\partial^2(Vr_1)}{\partial z^2} \quad (2)$$

6.1.2. Componente axial de la ecuación de movimiento

De la misma manera, la componente en “z” de la ecuación de movimiento se reduce a.

$$0 = - \frac{\partial(p_1)}{\partial z} \quad (3)$$

La Ec. (2) implica que la presión a primer orden no depende de la variable axial “z” y suponiendo que existe simetría cilíndrica en el sistema, la presión solamente depende de la coordenada radial “r”.

6.1.3. Fuerza a primer orden

La fuerza a primer orden se puede expresar de la siguiente forma:

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu \langle V \rangle a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_1}{dr} r^2 dr \quad (4)$$

Recordando, que los resultados obtenidos al final de la perturbación a orden cero son los siguientes para las velocidades radial, axial, presión se tienen los siguientes:

Velocidad en z perturbada a orden cero

$$Vz_0(r, z, m) = (m + 2)r^m(1 + 2z^3 - 3z^2) \quad (5)$$

Velocidad en r perturbada a orden cero

$$Vr_0(r, z, m) = 6(r)^{2m+1}(z - z^2) \quad (6)$$

Diferencia de la presión respecto a r a orden cero

$$\frac{dp_0(r)}{dr} = -12(r)^{2m+1} \quad (7)$$

En donde:

$$u(r) = (m + 2)r^m \quad (8)$$

De la Ec. (2), de Navier Stokes para componente "r" (radial) se susituira la Ec. (5) y (6).

$$Re \left(Vr_0 \frac{\partial(Vr_0)}{\partial r} + Vz_0 \frac{\partial(Vr_0)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial(p_1)}{\partial r} + \frac{\partial^2(Vr_1)}{\partial z^2}$$

Sustituyendo la Ec. (5) y (6), se obtiene lo siguiente.

$$Re \left((36(r)^{4m+1}(z - z^2)^2)(2m + 1) + (m + 2)6(r)^{3m+1}(1 + 2z^3 - 3z^2)(1 - 2z) \right) = - \frac{\partial(p_1)}{\partial r} + \frac{\partial^2(Vr_1)}{\partial z^2}$$

Ordenando la Ecuación

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial r} + Re \left((36(r)^{4m+1}(z - z^2)^2)(2m + 1) + (m + 2)6(r)^{3m+1}(1 + 2z^3 - 3z^2)(1 - 2z) \right) = \frac{\partial^2(Vr_1)}{\partial z^2} \quad (9)$$

Desarrollando la Ec. (9)

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial r} + Re \left(((2m + 1)36(r)^{4m+1}(z^2 - 2z^3 + z^4)) + (m + 2)6(r)^{3m+1}(-4z^4 + 8z^3 - 3z^2 - 2z + 1) \right) = \frac{\partial^2(Vr_1)}{\partial z^2}$$

Realizando multiplicaciones

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial r} + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1}(z^2 - 2z^3 + z^4) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1}(-4z^4 + 8z^3 - 3z^2 - 2z + 1) = \frac{\partial^2(Vr_1)}{\partial z^2}$$

Descomponiendo la $\frac{\partial^2(Vr_1)}{\partial z^2}$ de la ec. anterior.

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial r} + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1}(z^2 - 2z^3 + z^4) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1}(-4z^4 + 8z^3 - 3z^2 - 2z + 1) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial(Vr_1)}{\partial z}$$

Pasando la $\frac{\partial}{\partial z}$ a lado izquierdo de la ecuacion para posteriormente integrar

$$\int \partial z \left(\frac{\partial(p_1)}{\partial r} + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1}(z^2 - 2z^3 + z^4) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1}(-4z^4 + 8z^3 - 3z^2 - 2z + 1) \right) = \frac{\partial(Vr_1)}{\partial z} \int \partial$$

Repartiendo la integral en cada termino de la ecuacion

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial r} \int \partial z + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \int (z^2 - 2z^3 + z^4) \partial z + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \int (-4z^4 + 8z^3 - 3z^2 - 2z + 1) \partial z = \frac{\partial(Vr_1)}{\partial z} \int \partial$$

Desarrollando la ecuacion y resolviendo la primera integral.

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial r} z + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} (\int z^2 \partial z - 2 \int z^3 \partial z + \int z^4 \partial z) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} (-4 \int z^4 \partial z + 8 \int z^3 \partial z - 3 \int z^2 \partial z - 2 \int z \partial z + \int \partial z) = \frac{\partial(Vr_1)}{\partial z}$$

Desarrollando las integrales restantes

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial r} z + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{5} \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{4z^5}{5} + 2z^4 - z^3 - z^2 + z \right) + C_1 = \frac{\partial(Vr_1)}{\partial z}$$

Nuevamente se pasa la ∂z a lado izquierdo de la ecuacion para integrar

$$\partial z \left(\frac{\partial(p_1)}{\partial r} z + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{5} \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{4z^5}{5} + 2z^4 - z^3 - z^2 + z \right) + C_1 \right) = \partial(Vr_1)$$

Integrando nuevamente a cada uno de los terminos

$$\left(\frac{\partial(p_1)}{\partial r} \int z \partial z + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{1}{3} \int z^3 \partial z - \frac{1}{2} \int z^4 \partial z + \frac{1}{5} \int z^5 \partial z \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{4}{5} \int z^5 \partial z + 2 \int z^4 \partial z - \int z^3 \partial z - \int z^2 \partial z + \int z \partial z \right) + C_1 \int \partial z \right) = \int \partial(Vr_1)$$

Desarrollando la integral de cada uno de los terminos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{10} + \frac{z^6}{30} \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{2z^6}{15} + \frac{2z^5}{5} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right) + C_1 z + C_2 = Vr_1$$

Obteniendo asi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{10} + \frac{z^6}{30} \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{2z^6}{15} + \frac{2z^5}{5} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right) + C_1 z + C_2 = Vr_1$$

Acomodando la ecuacion se tiene que:

$$Vr_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{10} + \frac{z^6}{30} \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{2z^6}{15} + \frac{2z^5}{5} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right) + C_1 z + C_2 \quad (10)$$

Al sustituir las condiciones de frontera adimensionales

$$z = 0 \rightarrow Vr_1(r, z) = 0 \text{ (C.F. 1)}$$

$$z = 1 \rightarrow Vr_1(r, z) = 0 \text{ (C.F. 2)}$$

Aplicando la C.F.1 en la Ec. (10)

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} 0^2 + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{0^4}{12} - \frac{0^5}{10} + \frac{0^6}{30} \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{2(0)^6}{15} + \frac{2(0)^5}{5} - \frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^3}{3} + \frac{(0)^2}{2} \right) + C_1 0 + C_2 \quad (11)$$

Despejando C_2 , se obtiene que.

$$C_2 = 0$$

Aplicando la C.F.2 en la Ec. (10)

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} (1)^2 + Re(2m + 1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{1^4}{12} - \frac{1^5}{10} + \frac{1^6}{30} \right) + Re(m + 2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{2(1)^6}{15} + \frac{2(1)^5}{5} - \frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right) + C_1(1) + C_2 \quad (12)$$

Desarrollando

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} + Re(2m + 1)36r^{4m+1} \left(\frac{1}{60} \right) + Re(m + 2)6r^{3m+1} \left(\frac{11}{60} \right) + C_1 + C_2$$

Simplificando

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} + \frac{3}{5} Re(2m + 1)r^{4m+1} + \frac{11}{10} Re(m + 2)r^{3m+1} + C_1 + C_2 \quad (13)$$

Sustituyendo C_2 en la Ec. (13)

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} + \frac{3}{5} Re(2m + 1)r^{4m+1} + \frac{11}{10} Re(m + 2)r^{3m+1} + C_1 + 0$$

Quedando asi

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} + \frac{3}{5} Re(2m + 1)r^{4m+1} + \frac{11}{10} Re(m + 2)r^{3m+1} + C_1 \quad (14)$$

Despejando C_1 de la Ec. (14).

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} - \frac{3}{5} Re(2m + 1)r^{4m+1} - \frac{11}{10} Re(m + 2)r^{3m+1}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en la Ec. (10)

$$V_{r_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 + Re(2m+1)36(r)^{4m+1} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{10} + \frac{z^6}{30} \right) + Re(m+2)6(r)^{3m+1} \left(-\frac{2z^6}{15} + \frac{2z^5}{5} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} - \frac{3}{5} Re(2m+1)r^{4m+1} - \frac{11}{10} Re(m+2)r^{3m+1} \right) z$$

Desarrollando multiplicaciones

$$V_{r_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 + Re(2m+1)36r^{4m+1} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{10} + \frac{z^6}{30} \right) + Re(m+2)6r^{3m+1} \left(-\frac{2z^6}{15} + \frac{2z^5}{5} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z - \frac{3}{5} z Re(2m+1)r^{4m+1} - \frac{11}{10} z Re(m+2)r^{3m+1} \quad (15)$$

Factorizando terminos de la Ec. (15)

$$V_{r_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} (z^2 - z) + Re(2m+1)36r^{4m+1} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{10} + \frac{z^6}{30} \right) + Re(m+2)6r^{3m+1} \left(-\frac{2z^6}{15} + \frac{2z^5}{5} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right) - \frac{3}{5} z Re(2m+1)r^{4m+1} - \frac{11}{10} z Re(m+2)r^{3m+1}$$

Quedando asi por ultimo.

$$V_{r_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} (z^2 - z) + Re(2m+1)r^{4m+1} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5} z \right) + Re(m+2)r^{3m+1} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10} z \right) \quad (16)$$

Comprobacion de V_{r_1}

Integrando en $z=0$, $V_{r_1}=0$ y en $z=1$, $V_{r_1}=0$ a la Ec. (16)

$$V_{r_1} = Re(2m+1)r^{4m+1} \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \right) + Re(m+2)r^{3m+1} \left(\frac{11}{10} - \frac{11}{10} \right)$$

Continuacion.

De la ecuacion de continuidad a orden uno

$$\frac{\partial(V_{z_1})}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(V_{r_1})) = 0 \quad (17)$$

Reacomodando la Ec. (17)

$$\frac{\partial(V_{z_1})}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(V_{r_1}))$$

Integrando de los dos lados de la ecuacion

$$\int_0^z \frac{\partial V_{z_1}(r,z)}{\partial z} dz = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^z V_{r_1}(r,z) dz \right) \quad (18)$$

Se obtiene lo siguiente

$$V_{Z_1} = - \int_0^z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V r_1) dz \quad (19)$$

Sustituyendo a $V r_1$ en la Ec. (19)

$$V_{Z_1} = - \int_0^z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} (z^2 - z) + Re(2m + 1) r^{4m+1} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5} z \right) + \right. \right. \\ \left. \left. Re(m + 2) r^{3m+1} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10} z \right) \right) \right) dz$$

Multiplicando por “r” (desarrollando la ecuacion)

$$V_{Z_1} = - \int_0^z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 r - \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z r + Re(2m + 1) r^{4m+2} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5} z \right) + \right. \\ \left. Re(m + 2) r^{3m+2} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10} z \right) \right) dz$$

Aplicando linealidad en el operador integral

$$V_{Z_1} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^z \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 r - \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z r + Re(2m + 1) r^{4m+2} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5} z \right) + \right. \\ \left. Re(m + 2) r^{3m+2} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10} z \right) \right) dz$$

Repartiendo la integral a cada termino

$$V_{Z_1} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^z \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z^2 r dz - \int_0^z \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} z r dz + Re(2m + 1) r^{4m+2} \left(\int_0^z 3z^4 dz - \right. \right. \\ \left. \int_0^z \frac{18z^5}{5} dz + \int_0^z \frac{18z^6}{15} dz - \int_0^z \frac{3}{5} z dz \right) + Re(m + 2) r^{3m+2} \left(- \int_0^z \frac{4z^6}{5} dz + \int_0^z \frac{12z^5}{5} dz - \right. \\ \left. \int_0^z \frac{3z^4}{2} dz - \int_0^z 2z^3 dz + \int_0^z 3z^2 dz - \int_0^z \frac{11}{10} z dz \right) \right)$$

Sacando constantes de las integrales.

$$V_{Z_1} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \int_0^z z^2 dz - \frac{r}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \int_0^z z dz + Re(2m + 1) r^{4m+2} \left(3 \int_0^z z^4 dz - \right. \right. \\ \left. \frac{18}{5} \int_0^z z^5 dz + \frac{18}{15} \int_0^z z^6 dz - \frac{3}{5} \int_0^z z dz \right) + Re(m + 2) r^{3m+2} \left(-\frac{4}{5} \int_0^z z^6 dz + \frac{12}{5} \int_0^z z^5 dz - \right. \\ \left. \frac{3}{2} \int_0^z z^4 dz - 2 \int_0^z z^3 dz + 3 \int_0^z z^2 dz - \frac{11}{10} \int_0^z z dz \right) \right)$$

Resolviendo las integrales y multiplicando por el signo negativo del termino $-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$

$$V_{Z_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\frac{z^3}{3} \right) + \frac{r}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\frac{z^2}{2} \right) - Re(2m+1)r^{4m+2} \left(3 \left(\frac{z^5}{5} \right) - \frac{18}{5} \left(\frac{z^6}{6} \right) + \frac{18}{15} \left(\frac{z^7}{7} \right) - \frac{3}{5} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) - Re(m+2)r^{3m+2} \left(-\frac{4}{5} \left(\frac{z^7}{7} \right) + \frac{12}{5} \left(\frac{z^6}{6} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{z^5}{5} \right) - 2 \left(\frac{z^4}{4} \right) + 3 \left(\frac{z^3}{3} \right) - \frac{11}{10} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) \right)$$

Factorizando.

$$V_{Z_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\frac{z^3}{3} \right) - r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) - Re(2m+1)r^{4m+2} \left(3 \left(\frac{z^5}{5} \right) - \frac{18}{5} \left(\frac{z^6}{6} \right) + \frac{18}{15} \left(\frac{z^7}{7} \right) - \frac{3}{5} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) - Re(m+2)r^{3m+2} \left(-\frac{4}{5} \left(\frac{z^7}{7} \right) + \frac{12}{5} \left(\frac{z^6}{6} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{z^5}{5} \right) - 2 \left(\frac{z^4}{4} \right) + 3 \left(\frac{z^3}{3} \right) - \frac{11}{10} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) \right)$$

Desarrollando

$$V_{Z_1} = V_{Z_1}(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\frac{z^3}{3} \right) - r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) - Re(2m+1)r^{4m+2} \left(3 \left(\frac{z^5}{5} \right) - \frac{18}{5} \left(\frac{z^6}{6} \right) + \frac{18}{15} \left(\frac{z^7}{7} \right) - \frac{3}{5} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) - Re(m+2)r^{3m+2} \left(-\frac{4}{5} \left(\frac{z^7}{7} \right) + \frac{12}{5} \left(\frac{z^6}{6} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{z^5}{5} \right) - 2 \left(\frac{z^4}{4} \right) + 3 \left(\frac{z^3}{3} \right) - \frac{11}{10} \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) \right)$$

Por lo tanto, factorizando nuevamente.

$$V_{Z_1} = u(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2} r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\left(\frac{z^3}{3} \right) - \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) - Re(2m+1)r^{4m+2} \left(\left(\frac{3z^5}{5} \right) - \left(\frac{3z^6}{5} \right) + \left(\frac{6z^7}{35} \right) - \left(\frac{3z^2}{10} \right) \right) - Re(m+2)r^{3m+2} \left(-\left(\frac{4z^7}{35} \right) + \left(\frac{2z^6}{5} \right) - \left(\frac{3z^5}{10} \right) - \left(\frac{z^4}{2} \right) + z^3 - \left(\frac{11z^2}{20} \right) \right) \right)$$

Exapndiendo la parcial

$$V_{Z_1} = u(r) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(-\frac{1}{2} r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\left(\frac{z^3}{3} \right) - \left(\frac{z^2}{2} \right) \right) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} Re(2m+1)r^{4m+2} \left(\left(\frac{3z^5}{5} \right) - \left(\frac{3z^6}{5} \right) + \left(\frac{6z^7}{35} \right) - \left(\frac{3z^2}{10} \right) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} Re(m+2)r^{3m+2} \left(-\left(\frac{4z^7}{35} \right) + \left(\frac{2z^6}{5} \right) - \left(\frac{3z^5}{10} \right) - \left(\frac{z^4}{2} \right) + z^3 - \left(\frac{11z^2}{20} \right) \right)$$

Desarrollando la parcial y factorizando

$$V_{z_1} = u(r) - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\left(\frac{z^3}{3}\right) - \left(\frac{z^2}{2}\right) \right) \right) - Re(2m+1) \left(\left(\frac{3z^5}{5}\right) - \left(\frac{3z^6}{5}\right) + \left(\frac{6z^7}{35}\right) - \frac{3z^2}{10} \right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \left(-\left(\frac{4z^7}{35}\right) + \left(\frac{2z^6}{5}\right) - \left(\frac{3z^5}{10}\right) - \left(\frac{z^4}{2}\right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) (3m+2)(r^{3m}) \quad (20)$$

Sustituyendo la condicion de frontera adimensional, $z = 1$, la velocidad $V_{z_1}(r, z) = 0$ en la Ec. (20), por lo que se tiene lo siguiente:

$$0 = u(r) - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \left(\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \right) \right) - Re(2m+1) \left(\frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{6}{35}\right) - \frac{3}{10} \right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \left(-\left(\frac{4}{35}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) - \left(\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{11}{20} \right) (3m+2)(r^{3m})$$

Reduciendo terminos

$$0 = u(r) + \left(\frac{1}{12} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \right) - Re(2m+1) \left(-\frac{9}{70} \right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \left(-\frac{9}{140} \right) (3m+2)(r^{3m})$$

Por lo que,

$$(12) \left(-u(r) + Re(2m+1) \left(-\frac{9}{70} \right) (4m+2)(r^{4m}) + Re(m+2) \left(-\frac{9}{140} \right) (3m+2)(r^{3m}) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \right)$$

Multiplicando

$$-12u(r) + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m+2)(r^{4m}) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m+2)(r^{3m}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \right)$$

Despejando

$$(r) \left(-12u(r) + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m+2)(r^{4m}) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m+2)(r^{3m}) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \right)$$

Multiplicando

$$\left(-12ru(r) + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (4m + 2)(r^{4m+1}) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (3m + 2)(r^{3m+1})\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r}\right) \quad (21)$$

Aplicando la integral definida de 0 a r en los dos lados de la ecuacion.

$$\left(-12 \int_0^r ru(r) + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (4m + 2) \int_0^r (r^{4m+1}) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (3m + 2) \int_0^r (r^{3m+1})\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \int_0^r \left(r \frac{\partial(p_1)}{\partial r}\right)$$

Desarrollando las integrales

$$\left(-12 \int_0^r ru(r) \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (4m + 2) \int_0^r (r^{4m+1}) \partial r + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (3m + 2) \int_0^r (r^{3m+1}) \partial r\right) = r \frac{\partial(p_1)}{\partial r}$$

Pasando al termino "r" al otro lado de la ecuacion y desarrollando

$$\left(-12 \frac{1}{r} \int_0^r ru(r) \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (4m + 2) \frac{1}{r} \int_0^r (r^{4m+1}) \partial r + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (3m + 2) \frac{1}{r} \int_0^r (r^{3m+1}) \partial r\right) = \frac{\partial(p_1)}{\partial r}$$

Desarrollando las integrales

$$\left(-12 \frac{1}{r} \int_0^r ru(r) \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (4m + 2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2}\right) \frac{1}{r} + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (3m + 2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2}\right) \frac{1}{r}\right) = \frac{\partial(p_1)}{\partial r} \quad (22)$$

Sustituir la Ec.(21) en la Ec. (20)

$$\begin{aligned} Vz_1 = u(r) - \left(\frac{1}{2r}\right) & \left(\left(\left(-12ru(r) + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (4m + 2)(r^{4m+1}) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (3m + 2)(r^{3m+1}) \right) \right) \left(\left(\frac{z^3}{3} - \left(\frac{z^2}{2}\right) \right) \right) - Re(2m + 1) \left(\left(\frac{3z^5}{5} - \left(\frac{3z^6}{5}\right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left(\frac{6z^7}{35} - \frac{3z^2}{10}\right) (4m + 2)(r^{4m}) - Re(m + 2) \left(-\left(\frac{4z^7}{35}\right) + \left(\frac{2z^6}{5}\right) - \left(\frac{3z^5}{10}\right) - \left(\frac{z^4}{2}\right) + z^3 - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{11z^2}{20}\right) (3m + 2)(r^{3m}) \right) \right) \end{aligned}$$

Multiplicando el signo negativo del termino $-\left(\frac{1}{2r}\right)$

$$Vz_1 = u(r) + \left(\frac{11}{2r}\right) \left(\left(\left(12ru(r) - Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35}\right) (4m+2)(r^{4m+1}) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. Re(m+2) \left(-\frac{27}{35}\right) (3m+2)(r^{3m+1}) \right) \right) \left(\left(\frac{z^3}{3} - \left(\frac{z^2}{2}\right) \right) \right) \right) - Re(2m+1) \left(\left(\frac{3z^5}{5} - \left(\frac{3z^6}{5}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{6z^7}{35} - \frac{3z^2}{10} \right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \left(-\left(\frac{4z^7}{35}\right) + \left(\frac{2z^6}{5}\right) - \left(\frac{3z^5}{10}\right) - \left(\frac{z^4}{2}\right) + z^3 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{11z^2}{20} \right) (3m+2)(r^{3m}) \right)$$

Eliminando a r ademas de reducir la fraccion

$$Vz_1 = u(r) + \left(\left(6u(r) - Re(2m+1) \left(-\frac{27}{35}\right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \right. \right. \\ \left. \left. \left(-\frac{27}{70} \right) (3m+2)(r^{3m}) \right) \right) \left(\left(\frac{z^3}{3} - \left(\frac{z^2}{2}\right) \right) \right) - Re(2m+1) \left(\left(\frac{3z^5}{5} - \left(\frac{3z^6}{5}\right) + \left(\frac{6z^7}{35}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{3z^2}{10} \right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \left(-\left(\frac{4z^7}{35}\right) + \left(\frac{2z^6}{5}\right) - \left(\frac{3z^5}{10}\right) - \left(\frac{z^4}{2}\right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) (3m+2) \right. \\ \left. \left. (r^{3m}) \right)$$

Desarrollando la ecuacion.

$$Vz_1 = u(r) + \left(\frac{z^3}{3}\right) 6u(r) - Re(2m+1) \left(\frac{z^3}{3}\right) \left(-\frac{27}{35}\right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \\ \left(\frac{z^3}{3}\right) \left(-\frac{27}{70}\right) (3m+2)(r^{3m}) - \left(\frac{z^2}{2}\right) 6u(r) + Re(2m+1) \left(\frac{z^2}{2}\right) \left(-\frac{27}{35}\right) (4m+2)(r^{4m}) + \\ Re(m+2) \left(\frac{z^2}{2}\right) \left(-\frac{27}{70}\right) (3m+2)(r^{3m}) - Re(2m+1) \left(\left(\frac{3z^5}{5} - \left(\frac{3z^6}{5}\right) + \left(\frac{6z^7}{35}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{3z^2}{10} \right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \left(-\left(\frac{4z^7}{35}\right) + \left(\frac{2z^6}{5}\right) - \left(\frac{3z^5}{10}\right) - \left(\frac{z^4}{2}\right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) (3m+2) \right. \\ \left. \left. (r^{3m}) \right)$$

Multiplicando las fracciones.

$$Vz_1 = u(r) + 2z^3u(r) - Re(2m+1) \left(-\frac{9z^3}{35}\right) (4m+2)(r^{4m}) - Re(m+2) \\ \left(-\frac{9z^3}{70}\right) (3m+2)(r^{3m}) - 3z^2u(r) + Re(2m+1) \left(-\frac{27z^2}{70}\right) (4m+2)(r^{4m}) + \\ Re(m+2) \left(-\frac{27z^2}{140}\right) (3m+2)(r^{3m}) - Re(2m+1) \left(\left(\frac{3z^5}{5} - \left(\frac{3z^6}{5}\right) + \left(\frac{6z^7}{35}\right) - \frac{3z^2}{10} \right) (4m+2) \right. \\ \left. \left. (r^{4m}) - Re(m+2) \left(-\left(\frac{4z^7}{35}\right) + \left(\frac{2z^6}{5}\right) - \left(\frac{3z^5}{10}\right) - \left(\frac{z^4}{2}\right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) (3m+2) \right) (r^{3m}) \right)$$

Factorizando terminos semejantes se obtiene la velocidad axial a primer orden.

$$Vz_1 = u(r)(1 + 2z^3 - 3z^2) - Re(2m + 1)(4m + 2)(r^{4m}) \left(\left(-\frac{9z^3}{35} \right) + \left(\left(\frac{3z^5}{5} \right) - \left(\frac{3z^6}{5} \right) + \left(\frac{6z^7}{35} \right) - \frac{3z^2}{10} \right) - \left(-\frac{27z^2}{70} \right) \right) - Re(m + 2)(3m + 2)(r^{3m}) \left(\left(-\frac{9z^3}{70} \right) - \left(-\frac{27z^2}{140} \right) + \left(-\left(\frac{4z^7}{35} \right) + \left(\frac{2z^6}{5} \right) - \left(\frac{3z^5}{10} \right) - \left(\frac{z^4}{2} \right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) \right)$$

6.2 Fuerza primer orden.

$$F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_1}{dr} r^2 dr$$

Del gradiente de presión (ec. (22)), integrando se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12 \frac{1}{r} \int_0^r ru(r) \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m + 2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) \frac{1}{r} + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m + 2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) \frac{1}{r} \quad (23)$$

La variable $u(r)$ describe la no homogeneidad en el sistema, por lo que se tiene la siguiente

$$u(r) = (m + 2)r^m \quad (24)$$

Por lo que sustituyendo $u(r) = (m + 2)r^m$ en la ec. (23)

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12 \frac{1}{r} \int_0^r r(m + 2)r^m \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m + 2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) \frac{1}{r} + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m + 2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) \frac{1}{r}$$

Multiplicando el termino r dentro de la integral

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12 \frac{1}{r} \int_0^r (m + 2)r^{m+1} \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m + 2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) \frac{1}{r} + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m + 2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) \frac{1}{r}$$

Sacando la constante

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12 \frac{1}{r} (m + 2) \int_0^r r^{m+1} \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m + 2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) \frac{1}{r} + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m + 2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) \frac{1}{r}$$

Desarrollando la interal.

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12 \frac{1}{r} (m+2) \left[\frac{(r)^{m+2}}{m+2} \right]_0^r + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m+2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) \frac{1}{r} +$$

$$Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m+2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) \frac{1}{r}$$

Evaluando los limites.

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12 \frac{1}{r} (m+2) \left[\frac{(r)^{m+2}}{m+2} - \frac{(0)^{m+2}}{m+2} \right] + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m+2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) \frac{1}{r} +$$

$$Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m+2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) \frac{1}{r}$$

Desarrollando

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12 \frac{1}{r} (m+2) \frac{(r)^{m+2}}{m+2} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m+2) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) \frac{1}{r} + Re(m+2)$$

$$2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m+2) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) \frac{1}{r}$$

Eliminando terminos comunes (r)

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12(m+2) \frac{(r)^{m+1}}{m+2} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m+2) \left(\frac{r^{4m+1}}{4m+2} \right) + Re(m+2)$$

$$2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m+2) \left(\frac{r^{3m+1}}{3m+2} \right)$$

Por lo que se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12(m+2) \frac{(r)^{m+1}}{m+2} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (4m+2) \left(\frac{r^{4m+1}}{4m+2} \right) + Re(m+2)$$

$$2) \left(-\frac{27}{35} \right) (3m+2) \left(\frac{r^{3m+1}}{3m+2} \right)$$

Eliminando terminos comunes.

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12(r)^{m+1} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r^{4m+1}) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r^{3m+1}) \quad (25)$$

(La ec. (25), es el gradiente de presion perturbado a primer orden).

Pasar la ∂r a lado derecho de la ec. (25)

$$\partial p_1 = \left(-12(r)^{m+1} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r^{4m+1}) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r^{3m+1}) \right) (\partial r)$$

Expandiendo la parcial

$$\partial p_1 = -12(r)^{m+1} \partial r + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r^{4m+1}) \partial r + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r^{3m+1}) \partial r$$

Al integrar los dos lados de la ecuacion, se tiene lo siguiente.

$$\int \partial p_1 = -12 \int (r)^{m+1} \partial r + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \int (r^{4m+1}) \partial r + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \int (r^{3m+1}) \partial r$$

Realizando la integral.

$$p_1 = -12 \left(\frac{(r)^{m+2}}{m+2} + C\right) + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} + C\right) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} + C\right)$$

Agrupando constantes

$$p_1 = -12 \left(\frac{(r)^{m+2}}{m+2}\right) + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2}\right) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2}\right) + C \quad (26)$$

Despejando la constante

$$p_1 + 12 \left(\frac{(r)^{m+2}}{m+2}\right) - Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2}\right) - Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2}\right) = C$$

En $r=1$, la $p_1 = p_{atm}$, por lo que se tiene lo siguiente.

$$p_{atm} + 12 \left(\frac{(1)^{m+2}}{m+2}\right) - Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \left(\frac{1^{4m+2}}{4m+2}\right) - Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \left(\frac{1^{3m+2}}{3m+2}\right) = C \quad (27)$$

Sustituyendo la ec.(27) en la ec.(26)

$$p_1 = -12 \left(\frac{(r)^{m+2}}{m+2}\right) + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2}\right) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2}\right) + p_{atm} + 12 \left(\frac{(1)^{m+2}}{m+2}\right) - Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \left(\frac{1^{4m+2}}{4m+2}\right) - Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \left(\frac{1^{3m+2}}{3m+2}\right) \quad (28)$$

Factorizando

$$p_1 = -12 \left(\frac{(r)^{m+2}}{m+2} - \frac{(1)^{m+2}}{m+2}\right) + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} - \frac{1^{4m+2}}{4m+2}\right) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} - \frac{1^{3m+2}}{3m+2}\right) + p_{atm}$$

Multiplicando los signos.

$$p_1 = 12 \left(-\frac{(r)^{m+2}}{m+2} + \frac{(1)^{m+2}}{m+2}\right) + Re(2m + 1) \left(\frac{54}{35}\right) \left(-\frac{r^{4m+2}}{4m+2} + \frac{1^{4m+2}}{4m+2}\right) + Re(m + 2) \left(\frac{27}{35}\right) \left(-\frac{r^{3m+2}}{3m+2} + \frac{1^{3m+2}}{3m+2}\right) + p_{atm}$$

Desarrollando la factorizacion y reacomodando.

$$p_1 = p_{atm} + 12 \frac{(1)^{m+2}}{m+2} \left(1 - \left[\frac{r}{1}\right]^{m+2}\right) + Re(2m + 1) \left(\frac{54}{35}\right) \left(\frac{1^{4m+2}}{4m+2}\right) \left(1 - \left[\frac{r}{1}\right]^{4m+2}\right) + Re(m + 2) \left(\frac{27}{35}\right) \left(\frac{1^{3m+2}}{3m+2}\right) \left(1 - \left[\frac{r}{1}\right]^{3m+2}\right) \quad (29)$$

(Ec. de presion perturbada a primer orden)

De la ec. de la fuerza perturbada a orden uno.

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_1}{dr} r^2 dr$$

Por lo tanto, se debe de sacar la derivada de la presión respecto a r . $\frac{dp_1}{dr}$. Por lo tanto, se

deriva la ec. (28), respecto a r

$$\frac{d}{dr} \left(-12 \left(\frac{r^{m+2}}{m+2} \right) + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) + p_{atm} + \right. \\ \left. 12 \left(\frac{1^{m+2}}{m+2} \right) - Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \left(\frac{1^{4m+2}}{4m+2} \right) - Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \left(\frac{1^{3m+2}}{3m+2} \right) \right)$$

Expandiendo la derivada a cada término.

$$-12 \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{m+2}}{m+2} \right) + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right) + \\ \frac{d}{dr} p_{atm} + 12 \frac{d}{dr} \left(\frac{1^{m+2}}{m+2} \right) - Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1^{4m+2}}{4m+2} \right) - Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1^{3m+2}}{3m+2} \right)$$

Se elimina directamente cada término que no tenga la variable r , quedando lo siguiente:

$$-12 \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{m+2}}{m+2} \right) + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{4m+2}}{4m+2} \right) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{3m+2}}{3m+2} \right)$$

Sacando las constantes de la derivada.

$$-12 \frac{1}{m+2} \frac{d}{dr} ((r)^{m+2}) + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \frac{1}{4m+2} \frac{d}{dr} ((r)^{4m+2}) + Re(m+2) \\ \left(-\frac{27}{35} \right) \frac{1}{3m+2} \frac{d}{dr} ((r)^{3m+2})$$

Realizando la derivada

$$-12 \frac{1}{m+2} ((m+2)((r)^{m+1})) + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \frac{1}{4m+2} ((4m+2)((r)^{4m+1})) + \\ Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \frac{1}{3m+2} ((3m+2)((r)^{3m+1}))$$

Eliminando términos semejantes y desarrollando.

$$\frac{dp_1}{dr} = -12(r)^{m+1} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r)^{4m+1} + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r)^{3m+1}$$

(Gradiente de presión perturbado a primer orden)

Sustituyendo $\frac{dp_1}{dr}$ en la ecuación de fuerza perturbada a orden uno.

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \frac{dp_1}{dr} r^2 dr$$

Sustituyendo

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \left(-12(r)^{m+1} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r)^{4m+1} + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r)^{3m+1} \right) r^2 dr$$

Multiplicando r^2 por cada uno de los terminos.

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \int_0^1 \left(-12(r)^{m+3} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r)^{4m+3} + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r)^{3m+3} \right) dr$$

Expandiendo la integral

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \left(-12 \int_0^1 (r)^{m+3} dr + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \int_0^1 (r)^{4m+3} dr + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \int_0^1 (r)^{3m+3} dr \right)$$

Desarrollando las integrales

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \left(-12 \left[\frac{(r)^{m+4}}{m+4} \right]_0^1 + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \left[\frac{(r)^{4m+4}}{4m+4} \right]_0^1 + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \left[\frac{(r)^{3m+4}}{3m+4} \right]_0^1 \right)$$

Evaluando los limites

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \left(-12 \left[\frac{(1)^{m+4}}{m+4} - \frac{(0)^{m+4}}{m+4} \right] + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \left[\frac{(1)^{4m+4}}{4m+4} - \frac{(0)^{4m+4}}{4m+4} \right] + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \left[\frac{(1)^{3m+4}}{3m+4} - \frac{(0)^{3m+4}}{3m+4} \right] \right)$$

Desarrollando

$$-F_1 = -\pi \frac{\mu(V)a^3}{h^2} \left(-12 \left[\frac{(1)^{m+4}}{m+4} \right] + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) \left[\frac{(1)^{4m+4}}{4m+4} \right] + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) \left[\frac{(1)^{3m+4}}{3m+4} \right] \right)$$

Finalmente

$$-F_1 = \pi \frac{12\mu(V)a^3}{h^2} \left(\left[\frac{(1)^{m+4}}{m+4} \right] + Re(2m+1) \left(\frac{9}{70} \right) \left[\frac{(1)^{4m+4}}{4m+4} \right] + Re(m+2) \left(\frac{9}{140} \right) \left[\frac{(1)^{3m+4}}{3m+4} \right] \right)$$

Desarrollando

$$-F_1 = \pi \frac{12\mu(V)a^3}{h^2} \left(\left[\frac{1}{m+4} \right] + Re(2m+1) \left(\frac{9}{70} \right) \left[\frac{1}{4m+4} \right] + Re(m+2) \left(\frac{9}{140} \right) \left[\frac{1}{3m+4} \right] \right) \quad (30)$$

(Ec. de fuerza perturbada a primer orden)

La Ec. (30) a orden uno, es base para el presente proyecto de investigación. La fuerza es directamente proporcional a la viscosidad del sistema. Si consideramos flujo homogéneo ($m=0$), se tiene lo siguiente:

Sustituyendo (m=0) en la ec. (30)

$$-F_1 = \pi \frac{12\mu\langle V \rangle a^3}{h^2} \left(\left[\frac{1}{0+4} \right] + Re(2(0) + 1) \left(\frac{9}{70} \right) \left[\frac{1}{4(0)+4} \right] + Re(0 + 2) \left(\frac{9}{140} \right) \left[\frac{1}{3(0)+4} \right] \right)$$

Desarrollando

$$-F_1 = \pi \frac{12\mu\langle V \rangle a^3}{h^2} \left(\left[\frac{1}{4} \right] + Re(1) \left(\frac{9}{70} \right) \left[\frac{1}{4} \right] + Re(2) \left(\frac{9}{140} \right) \left[\frac{1}{4} \right] \right)$$

Factorizando y desarrollando

$$-F_1 = \pi \frac{12\mu\langle V \rangle a^3}{h^2} \left[\frac{1}{4} \right] \left(1 + Re \left(\frac{9}{70} \right) + 2Re \left(\frac{9}{140} \right) \right)$$

Simplificando

$$-F_1 = \pi \frac{12\mu\langle V \rangle a^3}{h^2} \left[\frac{1}{4} \right] \left(1 + Re \left(\frac{9}{70} \right) + Re \left(\frac{9}{70} \right) \right)$$

Reduciendo

$$-F_1 = \pi \frac{3\mu\langle V \rangle a^3}{h^2} \left(1 + \frac{9}{35} Re \right) \quad (31)$$

(Ec. de fuerza, considerando un flujo homogéneo)

RESUMEN DE RESULTADOS OBTENIDOS A PERTURBACION A ORDEN UNO

En donde

$$u(r) = (m + 2)r^m \quad (32)$$

Gradiente de presión perturbado a primer orden:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12(r)^{m+1} + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r^{4m+1}) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r^{3m+1}) \quad (33)$$

Para Vz_1

$$\begin{aligned} Vz_1 = u(r)(1 + 2z^3 - 3z^2) - Re(2m + 1)(4m + 2)(r^{4m}) & \left(\left(-\frac{9z^3}{35} \right) + \left(\left(\frac{3z^5}{5} \right) - \left(\frac{3z^6}{5} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{6z^7}{35} \right) - \frac{3z^2}{10} \right) - \left(-\frac{27z^2}{70} \right) \Big) - Re(m + 2)(3m + 2)(r^{3m}) \left(\left(-\frac{9z^3}{70} \right) - \left(-\frac{27z^2}{140} \right) + \right. \\ & \left. \left(-\left(\frac{4z^7}{35} \right) + \left(\frac{2z^6}{5} \right) - \left(\frac{3z^5}{10} \right) - \left(\frac{z^4}{2} \right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) \right) \end{aligned}$$

Se sustituye la ec. (32) en la ec. de Vz_1 .

Obteniéndose así la velocidad axial perturbada a primer orden

$$\begin{aligned} \mathbf{Vz}_1 = & ((m+2)r^m)(1+2z^3-3z^2) - Re(2m+1)(4m+2)(r^{4m}) \left(\left(-\frac{9z^3}{35} \right) + \right. \\ & \left. \left(\left(\frac{3z^5}{5} \right) - \left(\frac{3z^6}{5} \right) + \left(\frac{6z^7}{35} \right) - \frac{3z^2}{10} \right) - \left(-\frac{27z^2}{70} \right) \right) - Re(m+2)(3m+2)(r^{3m}) \left(\left(-\frac{9z^3}{70} \right) - \right. \\ & \left. \left(-\frac{27z^2}{140} \right) + \left(-\left(\frac{4z^7}{35} \right) + \left(\frac{2z^6}{5} \right) - \left(\frac{3z^5}{10} \right) - \left(\frac{z^4}{2} \right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right) \right) \end{aligned}$$

Para V_{r_1}

$$\begin{aligned} V_{r_1} = & \frac{1}{2} \frac{\partial(p_1)}{\partial r} (z^2 - z) + Re(2m+1)r^{4m+1} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5}z \right) + Re(m+2) \\ & r^{3m+1} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10}z \right) \end{aligned}$$

Se sustituye la ec. (33) en la ec. de V_{r_1}

$$\begin{aligned} V_{r_1} = & \frac{1}{2} \left(-12(r)^{m+1} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{35} \right) (r^{4m+1}) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{35} \right) (r^{3m+1}) \right) (z^2 - \\ & z) + Re(2m+1)r^{4m+1} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5}z \right) + Re(m+2)r^{3m+1} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \right. \\ & \left. \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10}z \right) \end{aligned}$$

Desarrollando la multiplicacion, se obtiene la velocidad radial perturbada a primer orden.

$$\begin{aligned} \mathbf{Vr}_1 = & \left(-6(r)^{m+1} + Re(2m+1) \left(-\frac{54}{70} \right) (r^{4m+1}) + Re(m+2) \left(-\frac{27}{70} \right) (r^{3m+1}) \right) (z^2 - \\ & z) + Re(2m+1)r^{4m+1} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5}z \right) + Re(m+2)r^{3m+1} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \right. \\ & \left. \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10}z \right) \end{aligned}$$

Este capitulo presenta los resultados a primero orden en donde la inecia juega un papel prepodenrante en el estudio del flujo. Es importante resaltar que, la inercia esta asociadas con la resistencia que presenta un sistema a modsificar su estado y se cuantifica con su masa inercial e indriectamenre atraves del númeo de Reynolds. Las imulaciones se hicieron en el paquete de computo de Mathematica (Licencia UNAM) y fieron exportados a una hoja de cálculo. Las simulacioens se hiciern para el ordenc ero y el primero respectivamente

CAPÍTULO 7
SIMULACIÓN
Y
ANÁLISIS DE RESULTADOS

7.1 TEORÍA A ORDEN CERO

7.1.1 Velocidad radial

A continuación, se muestra la gráfica de la ecuación obtenida de la velocidad radial perturbada a orden cero, con un flujo de entrada de fluido al plato inferior de forma homogénea ($m=0$; en donde los orificios de entrada del plato inferior son del mismo tamaño y el volumen del fluido es el mismo en todos ellos), en función de la coordenada radial r . La ecuación matemática que describe el perfil radial tiene la siguiente forma analítica:

$$Vr_0(r, z, m) = 6(r)^{2m+1}(z - z^2)$$

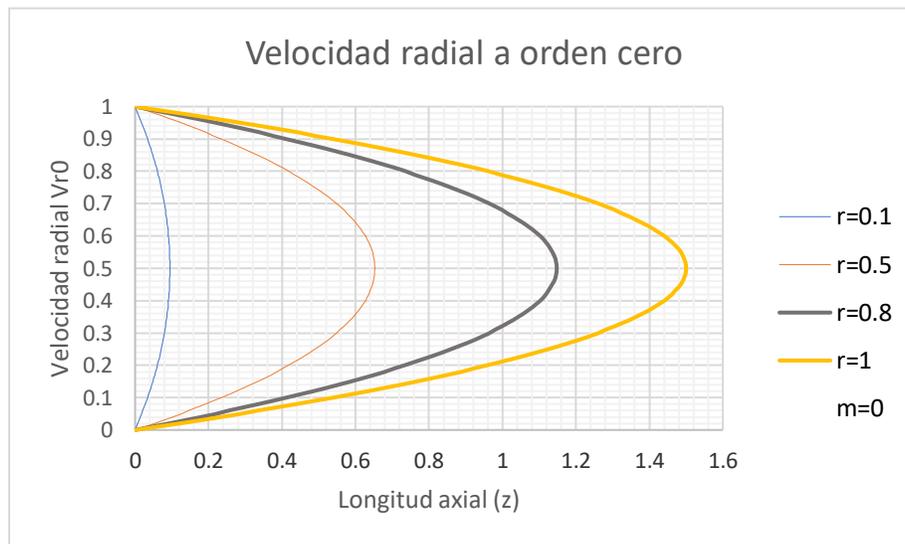


Figura 4.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad radial perturbada a orden cero

En la Fig. 4 se ilustra el comportamiento de la velocidad radial vs la longitud axial (z), para diferentes valores de la coordenada radial (r). En particular, se está considerando flujo homogéneo, i.e., $m=0$, por lo que la velocidad en las paredes es cero debido a la adherencia del líquido al sólido (condición de no deslizamiento), y en el centro de las dos placas paralelas se obtiene una velocidad máxima. Es claro, que debido a la forma geométrica del perfil de velocidades se tiene un flujo de Poiseuille a gradiente de presión constante.

Por otro lado, el efecto del valor de la coordenada radial “ r ”, afecta el máximo del perfil de velocidades en los volúmenes de control del sistema de estudio.

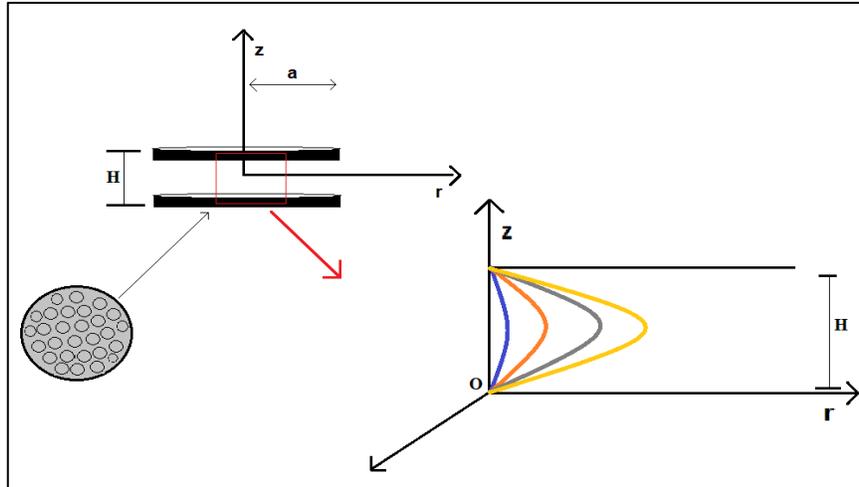


Figura 5.- Representación del perfil de velocidades formado a partir de la ec. de la velocidad radial a orden cero

7.2 Velocidad axial

En esta sección, se presenta la velocidad axial vs coordenada axial para diferentes valores de no-homogeneidad m . En estas simulaciones el valor de la coordenada radial $r = 0.5$, es un valor fijo, es decir, se analiza el perfil de velocidades en la mitad del sistema. La ecuación analítica que describe al componente z del perfil de velocidades tiene la siguiente forma:

$$Vz_0(r, z, m) = (m + 2)r^m(1 + 2z^3 - 3z^2)$$

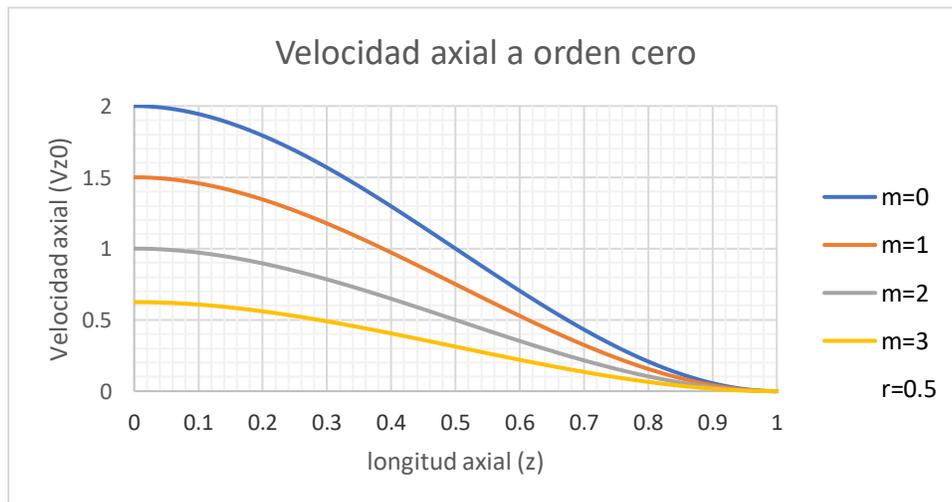


Figura 6.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad axial perturbada a orden cero

En la Fig. 6 se ilustra el comportamiento de la velocidad axial a orden cero (V_{z0}) vs la longitud axial (z), para diferentes valores de parámetro (m), en donde $m=0$ se considera un flujo homogéneo y para valores diferente de 0 es un flujo no homogéneo.

El valor de $m=0$ significa, que el volumen del fluido que entra por los orificios del plato inferior es el mismo, mientras que, para valores de m diferente de cero, no lo es.

Para todas las simulaciones el comportamiento es el mismo, es decir, a valores pequeños de la longitud axial, se presenta una meseta, mientras que, a un valor crítico de z , se observa en todos los casos un comportamiento monótono decreciente. El efecto del parámetro m , es de trasladar las curvas a menores valores. Es decir, físicamente, m controla el impacto de la componente z del vector velocidad en el sistema de estudio.

7.3 Gradiente de presión

El gradiente de presión inducido por la entrada del líquido en el plato inferior es una función exclusiva de la no-homogeneidad del plato inferior, por lo que su comportamiento dependerá del parámetro m y no de las características del fluido. La expresión matemática para el gradiente de presión radial tiene la siguiente arquitectura matemática:

$$\frac{dp_0(r)}{dr} = -12(r)^{2m+1}$$

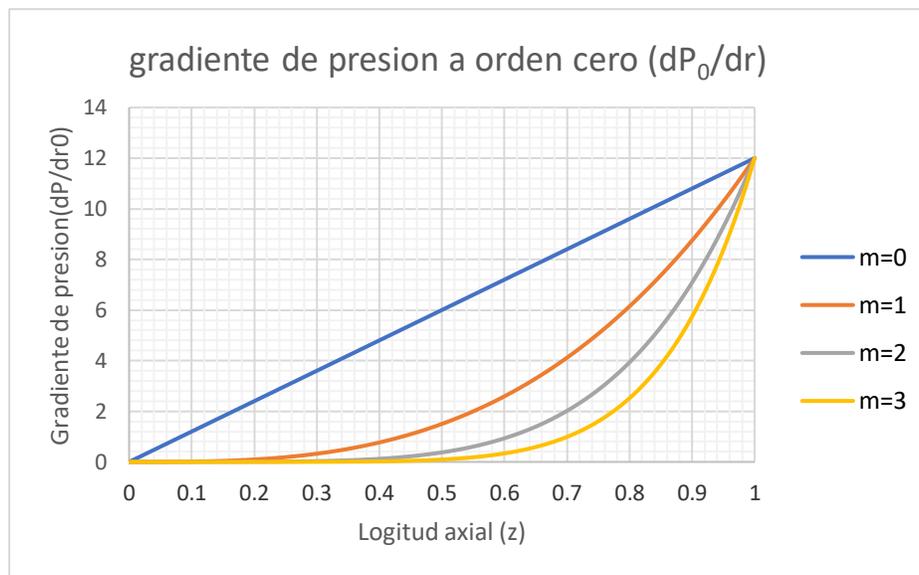


Figura 7.- Representación gráfica de la ec. obtenida del gradiente de presión perturbado a orden cero

En la Fig. 7 se ilustra el comportamiento del gradiente de presión (dP_0/dr) vs la longitud axial (z), para diferentes valores del parámetro (m), en donde $m = 0$ se considera un flujo homogéneo y para valores diferente de $m = 0$ es un flujo no homogéneo.

Se puede observar, que el gradiente de presión es lineal en el caso de flujo homogéneo ($m=0$), sin embargo, si el flujo es no-homogéneo ($m\neq 0$), el gradiente de presión va aumentando de forma potencial, llegando así al máximo gradiente de presión cuando el fluido llega al plato superior ($z=1$).

7.4 PRIMER ORDEN

7.4.1 Velocidad radial

A continuación, se muestra la gráfica de la ecuación obtenida de la velocidad radial perturbada a primer orden, con un flujo de entrada de fluido al plato inferior de forma homogénea ($m = 0$; en donde los orificios de entrada del plato inferior son del mismo tamaño y el volumen del fluido es el mismo en todos ellos), en función de la coordenada radial r . De la misma manera, para esta ecuación perturbada a primer orden, se asigna un valor Reynolds a flujo laminar, es decir, el valor del Reynolds es un valor bajo; esto debido a que en el sistema de estudio, el flujo de entrada es a velocidades muy bajas, otorgándole por lo tanto un valor de Reynolds= 5. La ecuación matemática que describe el perfil radial tiene la siguiente forma analítica.

$$V_{r1} = \left(-6(r)^{m+1} + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{70} \right) (r^{4m+1}) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{70} \right) (r^{3m+1}) \right) (z^2 - z) + Re(2m + 1)r^{4m+1} \left(3z^4 - \frac{18z^5}{5} + \frac{18z^6}{15} - \frac{3}{5}z \right) + Re(m + 2)r^{3m+1} \left(-\frac{4z^6}{5} + \frac{12z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} - 2z^3 + 3z^2 - \frac{11}{10}z \right)$$

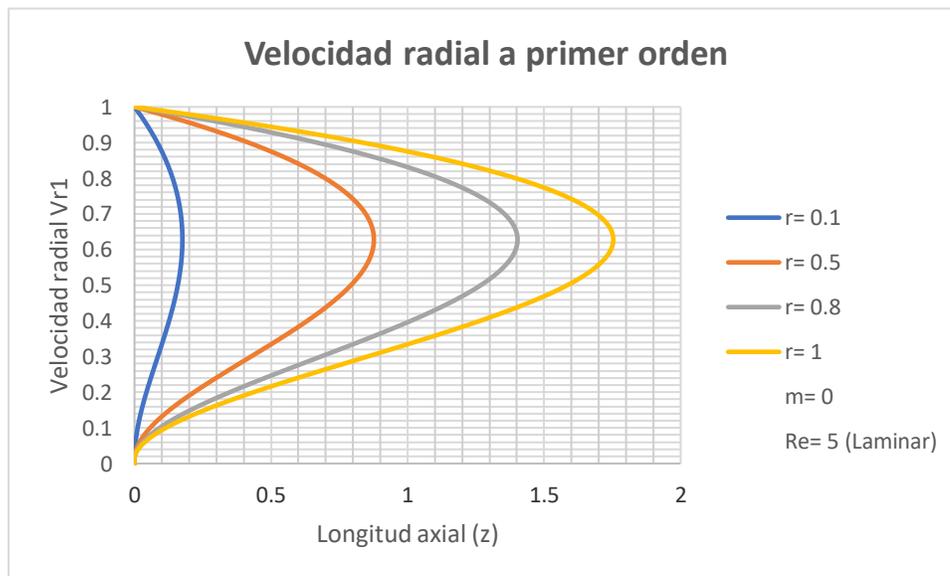


Figura 8.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad radial perturbada a primer orden con efecto de Reynolds= 5.

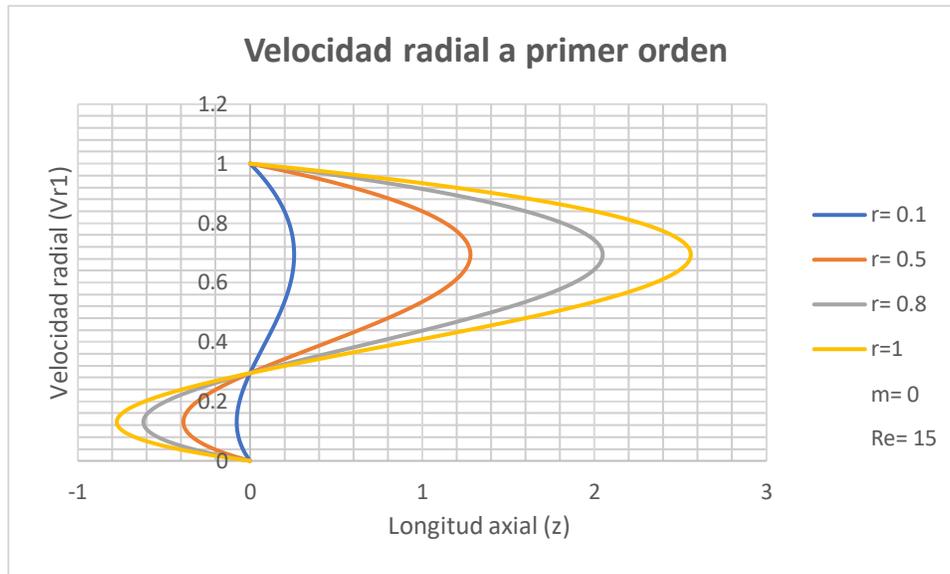


Figura 9.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad radial perturbada a primer orden con efecto de Reynolds= 15, formando así otro perfil de velocidades a dirección contraria respecto a la coordenada radial.

En la Fig. (8) se ilustra el comportamiento de la velocidad radial vs la longitud axial (z), para diferentes valores de la coordenada radial (r). En particular, se está considerando $m=0$ (flujo homogéneo), además de un valor de $Re= 5$, el cual representa un flujo laminar. Se observa que la velocidad en las paredes es cero debido a la adherencia del líquido al sólido (condición de no deslizamiento), y en el centro de las dos placas paralelas se obtiene una velocidad máxima; sin embargo, en comparación de la velocidad radial a orden cero, aquí sí afecta el Reynolds, pues en la Fig. (8), el perfil de velocidades empieza a tomar forma parabólica conforme se aumenta el valor del Reynolds, llegando a formar otro perfil de velocidades en dirección contraria a la coordenada radial, como se observa en la Fig. (9). Es importante mencionar, que, debido al efecto del Reynolds, este causará un incremento de la velocidad respecto a la longitud axial, en comparación de la velocidad radial perturbada a orden cero. Es claro que debido a la forma geométrica del perfil de velocidades se tiene un flujo de Poiseuille a gradiente de presión constante. Por otro lado, el efecto del valor de la coordenada radial “ r ”, afecta el máximo del perfil de velocidades en los volúmenes de control del sistema de estudio.

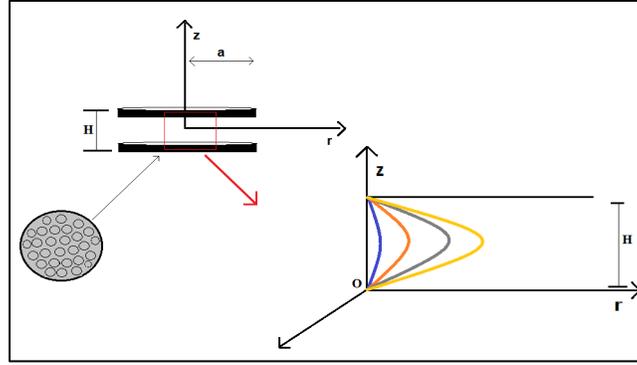


Figura 10.- Representación del perfil de velocidades formado a partir de la ec. de la velocidad radial a primer orden.

7.4.2 Velocidad axial

En esta sección, se presenta la velocidad axial vs coordenada axial para diferentes valores del parámetro m asociado a la no homogeneidad m . En estas simulaciones el valor de la coordenada radial en donde se analizó el flujo es $r = 0.5$. En esta simulación, el valor del número de Reynolds es $Re = 5$, el cual significa que los mecanismos inerciales dominan sobre los viscosos. La expresión analítica de la velocidad a primer orden tiene la siguiente estructura matemática:

$$\begin{aligned}
 Vz_1 = & ((m + 2)r^m)(1 + 2z^3 - 3z^2) - Re(2m + 1)(4m + 2)(r^{4m}) \left(\left(-\frac{9z^3}{35} \right) + \right. \\
 & \left. \left(\frac{3z^5}{5} \right) - \left(\frac{3z^6}{5} \right) + \left(\frac{6z^7}{35} \right) - \frac{3z^2}{10} \right) - \left(-\frac{27z^2}{70} \right) - Re(m + 2)(3m + 2)(r^{3m}) \left(\left(-\frac{9z^3}{70} \right) - \right. \\
 & \left. \left(-\frac{27z^2}{140} \right) + \left(-\frac{4z^7}{35} \right) + \left(\frac{2z^6}{5} \right) - \left(\frac{3z^5}{10} \right) - \left(\frac{z^4}{2} \right) + z^3 - \frac{11z^2}{20} \right)
 \end{aligned}$$

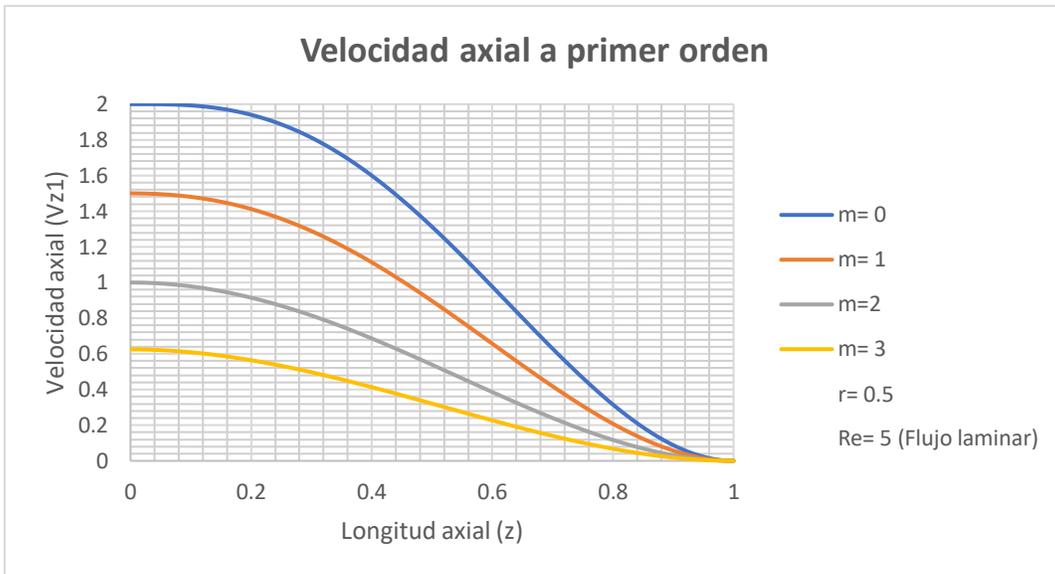


Figura 11.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad axial perturbada a primer orden, con efecto de Reynolds= 5

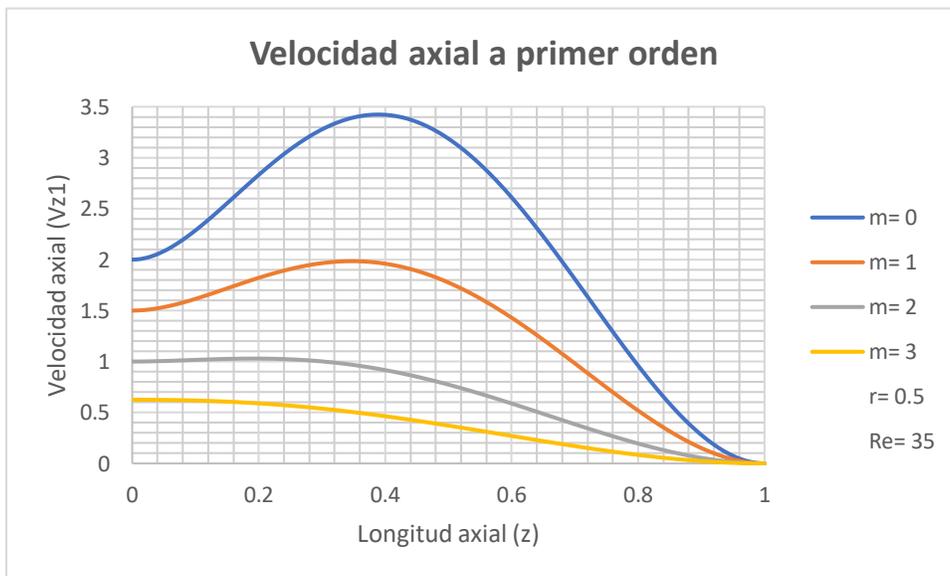


Figura 12.- Representación gráfica de la ec. de la velocidad axial perturbada a primer orden, con efecto de Reynolds= 35

En la Fig. (11) se ilustra el comportamiento de la velocidad axial a primer orden (V_{z0}) vs la longitud axial (z), para diferentes valores de parámetro (m), en donde $m=0$ se considera un flujo homogéneo y para valores diferentes de 0 es un flujo no homogéneo.

El valor de $m = 0$ significa, que el volumen del fluido que entra por los orificios del plato inferior es el mismo, mientras que, para valores del parámetro m diferente de cero, no lo es. Para todas las simulaciones el comportamiento es el mismo, es decir, a valores pequeños de longitud axial (z), se presenta una meseta en relación con la velocidad axial, mientras que, a un valor crítico de z , se observa en todos los casos un comportamiento monótono decreciente. El parámetro m , es trasladar las curvas a menores valores, es decir, físicamente, m controla el impacto de la componente z del vector velocidad en el sistema de estudio; mientras que el parámetro de Reynolds, cuando este va aumentando, la velocidad axial en todas las simulaciones presenta una meseta aún más pronunciada para los valores pequeños de longitud axial (z) en comparación con la gráfica de la velocidad axial a orden cero, como se muestra en la Fig. (12) , mientras que para los valores críticos de z , el comportamiento monótono decreciente será el mismo. Todo esto tomando un valor de longitud radial fijo de 0.5

7.4.3 Gradiente de presión

El gradiente de presión inducido por la entrada del liquido en el plato inferior es una función exclusiva de la no-homogeneidad y del valor del Reynolds del plato inferior, por lo que su comportamiento dependerá tanto del parámetro m como del valor de Reynolds y no de las características del fluido. La expresión matemática para el gradiente de presión radial tiene la siguiente arquitectura matemática.

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -12(r)^{m+1} + Re(2m + 1) \left(-\frac{54}{35}\right) (r^{4m+1}) + Re(m + 2) \left(-\frac{27}{35}\right) (r^{3m+1})$$

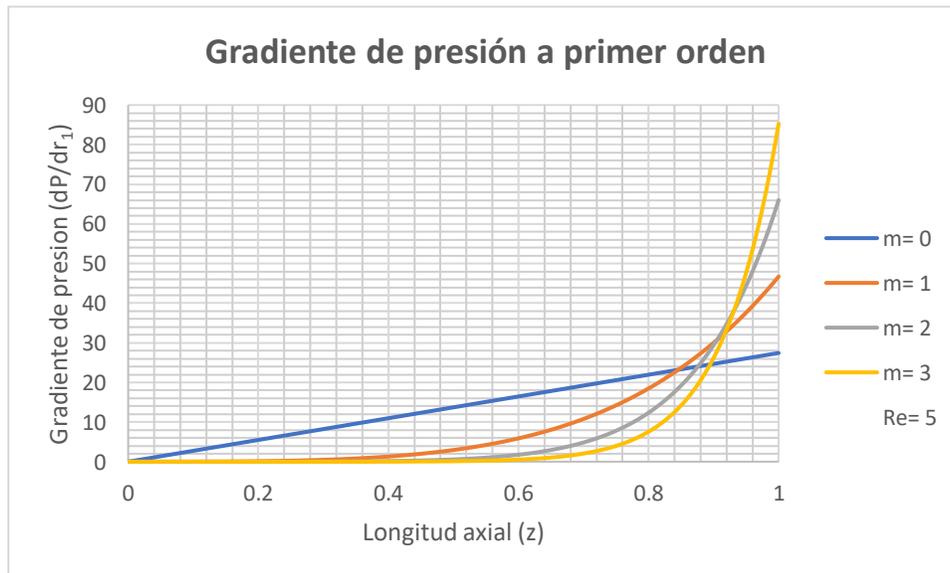


Figura 13.- Representación gráfica de la ec. obtenida del gradiente de presión perturbado a primer orden, con un valor de Reynolds= 5

En la Fig. (13) se ilustra el comportamiento del gradiente de presión (dP_1/dr) vs la longitud axial (z), para diferentes valores del parámetro (m), en donde $m=0$ se considera un flujo homogéneo y para valores diferente de 0 es un flujo no homogéneo. Se puede observar que el gradiente de presión es lineal en el caso de flujo homogéneo ($m=0$), sin embargo, si el flujo es no-homogéneo ($m\neq 0$), el gradiente de presión va aumentando de forma potencial, llegando así al máximo gradiente de presión cuando el fluido llega al plato superior ($z= 1$). Cabe recalcar, que en comparación del gradiente de presión a orden cero, a primer orden, el valor de Reynolds afecta de forma significativa a todas las curvas del flujo homogéneo y no-homogéneo en el gradiente de presión, debido a que en todas las simulaciones el gradiente de presión aumenta drásticamente en valores críticos de la longitud axial (z), como también desde que se empieza a formar la curva potencial.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

7.1 Aportación al conocimiento

En esta investigación a nivel de licenciatura se analizó el flujo continuo por compresión el cual consiste en dos platos paralelos separados a una distancia H y de radio R . El plato de abajo contiene una serie de perforaciones por donde entra el fluido viscoso. Los orificios están distribuidos aleatoriamente y la entrada del fluido en ($z = 0$) es a flujo volumétrico constante. El líquido comprime al plato superior y se obtiene seguidamente de esto, un lamina radial el cual induce un gradiente de presión en la dirección de r (Flujo de Poiseuille). La transferencia de momento y reología es caracterizada por la ecuación constitutiva de Newton la cual, es el modelo reológico más sencillo y contiene una propiedad material conocida como viscosidad. Asumiendo que estado estacionario, incompresible, proceso isotérmico y que el campo de velocidades tiene dos componentes (radial y axial), se obtienen tres ecuaciones diferenciales no lineales cuya solución es numérica.

Para simplificar el sistema y analizar cuáles son los términos importantes en nuestro análisis, se propone un conjunto de variables adimensionales que permiten escalar el sistema de estudio y que se manifiesten grupos adimensionales que describan la naturaleza de las fuerzas macroscópicas del sistema de estudio. En este punto, el número de Reynolds relaciona los mecanismos inerciales y viscosos y el parámetro α el cociente entre las longitudes axial y radial respectivamente. Este último, nos permite proponer o invocar un esquema perturbativo con el fin de obtener expresiones analíticas a órdenes cero y primero asociados, a los procesos viscosos e inerciales.

A orden cero, se obtienen expresiones cerradas para las componentes radial y axial del sistema, gradiente de presión, presión y fuerza. La fuerza es proporcional al modelo de Stefan obtenido en el flujo continuo por compresión. Es claro que este modelo, es una buena aproximación y tiene ventajas muy importantes con respecto al flujo tradicional por compresión.

A primer orden en el esquema perturbativo, se obtuvieron las contribuciones asociadas a la inercia para los componentes de la velocidad radial, axial, gradiente de presión, presión y la fuerza en el sistema. En esta contribución aparece el número de Reynolds el cual, cuantifica los mecanismos inerciales y viscosos. En particular, se observó que la fuerza aumenta si se toma en cuenta los mecanismos inerciales. Un hecho importante, es que los perfiles de velocidad se deforman por efecto de las contribuciones inerciales. Este sistema se

puede emplear para la caracterización de fluido newtoniano y como base para los fluidos no newtonianos. Este trabajo puede servir para la caracterización viscométrica de fluidos newtonianos y en especial aquellos relacionadas como ciencia de lubricación, alimentos y pinturas.

7.2 Trabajo futuro

- a) Analizar el flujo por compresión en fluidos no newtonianos
- b) Acoplar la transferencia de movimiento con ecuaciones de masa.
- c) Trabajo experimental para contrastar los resultados teóricos obtenidos.

Finalmente, este trabajo es un paso en la búsqueda constante de sistemas de flujo que permitan entender fluidos más realistas y que sean punto de partida en la caracterización de sistemas complejos y que permitan entender las fuerzas que deforman continua e irreversiblemente estos materiales de trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

Bird RB, Stewart E, Lighfoot EN (2002), Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Engmann J, Servais C, Burbidge AS (2005), Squeeze flow theory and applications to rheometry: A review. *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 132, 1-27.

Herrera Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D, Soriano Correa C, Núñez-Ramírez Diola Marina, Medina-Torres L, Hernández-Abad VJ (2022), Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: Flujo pulsátil de sangre humana, UNAM, FES-ZARAGOZA, 1-122, ISBN: 978-607-30-7018-8.

Herrera Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D, Soriano Correa C, Hernández-Abad VJ (2023), Fenómenos de transporte y reología de fluidos estructurados, UNAM, FES-ZARAGOZA, 1-100, ISBN: 978-607-30-7605-0

Li YM, Ullah I, Ameer Ahammad N, Ullah I, Muhammad T, Asiri SA (2022), Approximation of unsteady squeezing flow through porous space with slip effect: DJM approach. *Waves Random Complex Media*, 1–15.

Lehmonen J, Retulainen E, Paltakari J, Kinnunen-Raudaskoski K, Koponen A (2020), Dewatering of foam-laid and water-laid structures and the formed web properties, *Cellulose* 27, 1127-1146.

Khadem SA, Rey AD (2019). Thermodynamic modelling of acidic collagenous solutions: from free energy contributions to phase diagrams. *Soft Matter*. 20, 1833-1846.

Khadem SA, Rey AD (2019), Theoretical Platform for Liquid-Crystalline Self-Assembly of Collagen-Based Biomaterials. *Front. Phys.* 7, 88.

Khadem SA, Rey AD (2021). Nucleation and growth of cholesteric collagen tactoids: A time-series statistical analysis based on integration of direct numerical simulation (DNS) and long short-term memory recurrent neural network (LSTM-RNN). *J Colloid Interface Sci.* 582, 859-873.

Mat Noor NA, Shafie S, Admon MA (2021), Slip effects on MHD squeezing flow of Jeffrey nanofluid in horizontal channel with chemical reaction. *Mathematics* 9, 1215.

Mat Noor NA, Shafie S, Admon MA (2021), Heat and mass transfer on MHD squeezing flow of Jeffrey nanofluid in horizontal channel through permeable medium. *PLoS ONE* 16, e0250402.

Mat Noor NA, Shafie S, Admon MA (2022), Heat Transfer on Magnetohydrodynamics Squeezing Flow of Jeffrey Fluid Through Permeable Medium with Slip Boundary. *J. Nanofluids* 11, 31–38.

Mat Noor NA, Shafie S, Admon MA (2021) Impacts of chemical reaction on squeeze flow of MHD Jeffrey fluid in horizontal porous channel with slip condition. *Phys. Scr.* 2021, 96, 035216.

Memon M, Shaikh AA, Shaikh WA, Siddiqui AM, Sahoo SK, De la Sen M (2023), Analysis of inertia effect on Axisymmetric Squeeze Flow of Slightly Viscoelastic Fluid Film Between Two Disks by Recursive Approach, *Axioms* 12, 363.

Oliver DR, Ashton RC, Wadelin GD (1978), The load-bearing capacity of a continuous-flow squeeze film of liquid. *Appl.Sci. Res.* 34, 25-47.

Oliver DR, Shahidullah M (1981), Definitive load-enhancement effect by polymer-thickened oils in a squeeze film experiment. *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 9, 251-267.

Waters ND, Gooden DK (**1983**), The flow of a power-law liquid in a continuous squeeze flow film, Applied Scientific Research 40, 169-184.

Waters ND, Gooden DK (**1984**), The flow of an Oldroyd liquid in a continuous-flow squeeze film. J. Non-Newton. Fluid Mech. 14, 361-376.