UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DENDROIDES SIAMESES Y SELECCIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
EDDER YAIR VALERIANO REYES

DIRECTOR
DRA VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO MAYO 2023.

Agradecimientos

A mis padres:

Siempre les estaré agradecido por todo el empeño, esfuerzo y dedicación que han puesto para que mi hermana y yo podamos estar donde ahora estamos y ser lo que somos. Gracias por todos esos consejos y regaños que nos han ayudado a ser mejores como personas, gracias por siempre alentarnos a dar nuestro mejor esfuerzo y enseñarnos que con trabajo y dedicación todo se puede lograr.

A mi hermana:

Gracias por todo el apoyo incondicional que me has brindado, gracias por tomarte el tiempo de escucharme cuando lo he necesitado.

A mi familia:

Quienes a pesar de la distancia nunca he dejado de sentir ese gran apoyo.

A mis amigos:

Eshele, *compa,* gracias por tu amistad, apoyo y tiempo. Jonathan, amigo te agradezco todo el apoyo que me has brindado incondicionalmente, espero haber correspondido de la misma manera. Jorge, gracias por esta amistad, por siempre tener la mejor disposición en resolver mis dudas, en verdad te lo agradezco. Lazcano, *profe* muchas gracias por todo, tanto acádemicamente como personalmente. Pao, te agradezco esta amistad que hemos formado, gracias por la ayuda y confianza que me has brindado.

A mi asesora, Vero:

No tengo palabras para expresar lo agradecido que estoy por toda la dedicación, paciencia y empeño que ha puesto en este trabajo y mi formación acádemica. También quisiera expresar mi gratitud por el apoyo mostrado fuera del ámbito acádemico.

A mis sinodales:

Quisiera agradecer a la Dra. Isabel Puga Espinoza, al Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano, al Dr. Raúl Escobedo Conde y al Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado por el tiempo que se tomaron para revisar este trabajo así como las oportunas observaciones para enriquecerlo.

Índice general

Introducción

¿ Cuándo la unión de dos dendroides selectibles es selectible? Con esta pregunta inicié la investigación de este trabajoy que me llevó a introducir los conceptos de ***dendroides siameses, dendroides siameses fuertes*** y a demostrar que los dendroides siameses fuertes son selectibles. Con estas definiciones y resultados es posible realizar demostraciones más generales y sencillas que las que se encuentran hasta hoy en la literatura. Estos resultados son originales y están siendo escritos para su publicación.

Anteriormente, cuando escribí mi tesis de licenciatura, encontré un error en la demostración de Mackowiak de que el dendroide que presentamos al final de esta tesis (Ejemplo 4.5) es selectible. Los conceptos de dendroides siameses siguen sin dar respuesta a este ejemplo. Una de las preguntas que me planteo es si es no selectible.

Con el fin de que este trabajo resulte accesible para estudiantes de licenciatura en Mateáticas que estén interesados en el tema, he incluído lass definiciones y resultados preliminares pertinentes. El lector dede de estar familiarizado con los conceptos básicos de Análisis Matemático, Topología y tener conocimientos básicos en Teoría de Continuos e Hiperespacios.

En el Capítulo 1 definiremos otros hiperespacios que nos serán de utilidad a lo largo de este trabajo. También enunciaremos resultados importantes. Supondremos que el lector tiene conocimientos sobre Teoría de Continuos e Hiperespacios.

En el Capítulo 2, presentaremos algunas propiedades sobre selecciones, así como ejemplos de continuos que son selectibles y que no lo son. Definiremos que es un ***dendroide*** y daremos algunas propiedades de este tipo de continuos. Esto para poder probar que todo continuo selectible es un dendroide. Por último veremos lo que son las ***dendritas.***

En el Capítulo 3, definiremos los ***dendroides siameses*** desarrollamos la teoría necesaria que nos permite probar que la unión por un arco(bajo ciertas condiciones) de dos dendroides selectibles siempre nos da un dendroide selectible. Esto simplifica muchas pruebas realizadas en el pasado y aumenta la facilidad de encontrar dendroides selectibles. En este Capítulo generalizamos este resultado para la unión de dendroides por un arco(***dendroides siameses***) y probamos que bajo ciertas condiciones (***dendroides siameses fuertes***) este tipo de dendroides también son selectibles.

Finalmente, en el Capítulo 4, probamos que no es fácil hacer un resultado más general pues podemos encontrar ejemplos que cumplan con ser selectibles y otros que no cumplan con ser selectibles cuando intentamos debilitar las hipótesis y características de nuestros dendroides para una situación más general. También daremos algunas aplicaciones del Teorema de dendroides siaméses fuertes, que desarrollamos en el Capítulo 3.

Capítulo 1

Continuos, Hiperespacios y Métrica de Hausdorff

1.1. Preliminares

Definición 1.1. Sean, (X, d) un espacio métrico, $\varepsilon > 0$ y $p \in X$, definimos la ***bola de radio*** ε como:

$$B_\varepsilon^d(p) = \{x \in X \mid d(p, x) < \varepsilon\}$$

Cuando no exista confusión con las métricas se denotará simplemente como $B_{\varepsilon(p)}$.

Definición 1.2. Dados X, Yespacios topológicos y $f : X \to Y$, diremos que f es ***homeomorfismo*** si f es biyectiva, continua y f^{-1} también es continua.

Teorema 1.3. *[13, Theorem 17.5]* Sea X un espacio topológico compacto, si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A es compacto.

Teorema 1.4. *[13, Theorem 17.14]* Sea X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Definición 1.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es ***disconexo*** si existen abiertos, ajenos no vacíos U y V tales que $X = U \cup V$. En el caso de que no existan dichos abiertos, diremos X es ***conexo.***

Definición 1.6. Un espacio (X, d) decimos que es ***localmente conexo*** si para cada $x \in X$ y para todo abierto U tal que $x \in U$ existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subseteq U$.

Definición 1.7. Sean, (X, τ) un espacio topólogico, $A \subseteq X$ y $r : X \to A$ una función continua. Diremos que r es una ***retracción de*** X ***en*** A si $r(a) = a$ para toda $a \in A$.

Definición 1.8. Un espacio topológico (X, τ) es ***arcoconexo*** si para cualesquiera $a, b \in X$ con $a \neq b$, existe una función continua e inyectiva $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

1.2. Métrica de Hausdorff e Hiperespacios

Definición 1.9. Un ***continuo*** es un espacio métrico (X, d), no degenerado, compacto y conexo.

Una vez que hemos definido lo que es un continuo, veamos algunos hiperespacios que nos serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

Definición 1.10. Dado un continuo X, definimos los siguientes hiperespacios:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado.}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo.}\}$$

$$F_1(X) = \{\{x\} : p \in X\}$$

dado $D \in C(X)$, definimos:

$$C(D, X) = \{A \in C(X) : D \subseteq A\}$$

En particular, cuando $D = \{p\}$ para algún $p \in X$ se escribirá como:

$$C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$$

Los hiperespacios antes definidos tienen una serie de propiedades interesantes, una de ellas es que también son continuos. Para probarlo es necesario darle una métrica a dichos conjuntos.

Definición 1.11. Sean, X un continuo, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la ***nube de radio*** ε ***con centro en*** A como:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } y \in A \text{ tal que } d(x, y) < \varepsilon\}$$

Definición 1.12. Sean, X un continuo, $A \in 2^X$ y $A, B \in 2^X$, la ***métrica de Hausdorff*** es una función

$$H : C(X) \times C(X) \to \mathbb{R}$$

definida como:

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$$

En [4, 2.2 Theorem] y [9, 4.2 Theorem] se prueba que H está bien definida y es una métrica.

Por último,

Definición 1.13. Dado un continuo X y $A \in C(X)$, definimos la ***bola de radio*** ε ***con centro en*** A como:

$$B^H_\varepsilon(A) = \{B \in C(X) : H(A, B) < \varepsilon\}$$

Teorema 1.14. *[2, Teorema 4.2] Dado un continuo X, el hiperespacio 2^X es compacto.*

Teorema 1.15. *[2, Teorema, 4.3] Dado un continuo X, el hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

Para ver que 2^X y $C(X)$ son continuos resta probar que dichos hiperspacios son conexos. Para esto es necesario definir arcos ordenados, una importante herramienta dentro de la teoría de Hiperespacios.

Definición 1.16. Sean, X un continuo, $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un ***arco ordenado en*** $C(X)$ si:

- $\alpha(0) = A$
- $\alpha(1) = B$
- Para cualesquiera $0 \leq s < t \leq 1$, se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Teorema 1.17. *[2, Teorema 6.10]* Dados $A, B \in C(X)$ tal que $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado de A a B.

El Teorema 1.17 nos ayuda a probar la conexidad de 2^X y $C(X)$, de hecho, se prueba que son arco conexos.

Corolario 1.18. *[2, Corolario 6.11]* El hiperespacio 2^X es arcoconexo.

Corolario 1.19. *[2, Corolario 6.12]* El hiperespacio $C(X)$ es arcoconexo

Utilizando los Teoremas 1.14 y 1.15 ([2, Teorema 4.2 & 4.3]) donde se prueba que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son compactos y por los Corolarios 1.18 y 1.19 donde se prueba que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son conexos, podemos dar el siguiente teorema.

Teorema 1.20. Dado un continuo X, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son continuos.

Definición 1.21. Dado un continuo X y una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty)$, μ es una ***función de Whitney*** si:

- $\mu(\{p\}) = 0$ para todo $p \in X$.
- $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

Teorema 1.22. *[2, Teorema 5.3]* Para cualquier continuo X, el hiperespacio 2^X admite funciones de Whitney.

Para nuestro propósito, dada una función de Whitney $\mu : 2^X \to [0, \infty)$, consideremos, $\mu|_{C(X)}$, su restricción al hiperespacio $C(X)$, en éste caso diremos que μ es una función de Whitney para $C(X)$, como $\mu' = \dfrac{\mu}{\mu(X)}$, tenemos que $\mu' : 2^X \to [0,1]$ y $\mu'|_{C(X)} : C(X) \to [0,1]$ son funciones de Whitney y para los fines de ésta tesis, serán las funciones de Whitney que se consideran de ahora en adelante.

1.3. Modelos de Hiperespacios

Como ya vimos, dado un continuo X, cada hiperespacio $\mathcal{H}$ que hemos definido tiene como elementos a subconjuntos de X. Ésta idea puede resultar abrumadora cuando uno inicia en la Teoría de Hiperespacios. Por esta razón se intenta dar un conjunto M con el cual estemos más familiarizados y que además sea homeomorfo a $\mathcal{H}$, esto es lo que entendemos por dar un modelo para el hiperespacio $\mathcal{H}$.

Para entender mejor este concepto daremos modelos, sin realizar las pruebas, para algunos continuos como el intervalo $[0,1]$ y la circunferencia $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

En el caso del intervalo $[0,1]$, recordemos que

$$C([0,1]) = \{A \in 2^{[0,1]} : A \text{ es conexo.}\}$$

También debemos notar que los subcontinuos del intervalo son de la forma $[a,b]$ donde $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Gracias a lo anterior podemos dar un homeomorfismo entre $C([0,1])$ y el conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ con la función $f : C([0,1]) \to M$ dada por

$$f([a,b]) = (a,b)$$

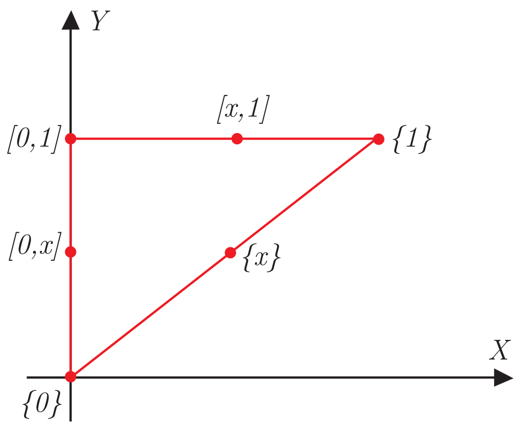


Figura 1.1: Hperespacio $C([0,1])$

Aquí podemos notar que en este modelo, el intervalo $\{0\} \times [0,1]$ representa a los subintervalos del $[0,1]$ que su extremo izquierdo es el punto 0, es decir $\{0\} \times [0,1] \cong \{[0,b] : b \in [0,1]\}$ de igual manera el intervalo $[0,1] \times \{1\}$ representan los subintervalos del $[0,1]$ cuyo extremo derecho es el punto 1. Es decir $[0,1] \times \{1\} \cong \{[a,1] : a \in [0,1]\}$. También se puede ver que los puntos (x,x) en la diagonal, representan los intervalos degenerados o los conjuntos de un solo punto, y los puntos (x,y) en el interior de este triángulo representan subintervalos $[x,y]$ del intervalo $[0,1]$ que cumplen que $0 < x < y < 1$. Ver Figura 1.1

Ahora, observaremos qué ocurre en la circunferencia. A diferencia del intervalo $[0,1]$, en la circunferencia S^1 tenemos tres tipos de subcontinuos que son: la circunferencia misma, arcos (subarcos de la circunferencia) y puntos (o arcos degenerados).

En el caso de los subarcos A contenidos en la cincunferencia S^1 a estos los podemos distinguir mediante los siguientes elementos:

I) su punto medio, al cual denotaremos $m(A)$

II) su longitud, la cual denotamos por $l(A)$.

Para los intervalos degenerados o puntos, $\{p\}$, podemos hacer la misma asociación considerando que para todo singular $\{p\}$ se tiene que:

I) $m(\{p\}) = p$

II) $l(\{p\}) = 0$.

Habiendo hecho estas observaciones, podemos ver que el modelo para la circunferencia será el disco

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

y el homeomorfismo es la función $f : C(S^1) \to \mathbb{D}$ dada por

$$f(A) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{l(A)}{2\pi}\right) \cdot m(A) & \text{si} \quad A \subsetneq S^1 \\ (0,0) & \text{si} \quad A = S^1 \end{cases}$$

(Ver Figura 1.2)

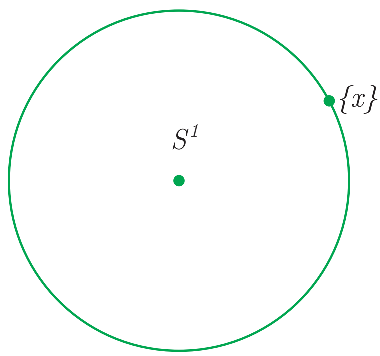


Figura 1.2: Hiperespacio $C(S^1)$

1.4. Hiperespacios Anclados

Definición 1.23. Dado X un continuo y $D \subseteq X$, definimos

$$C(D, X) = \{Y \in C(X) : Y \subseteq D\}$$

como el ***hiperespacio anclado en*** D.

Teorema 1.24. Dado un continuo X y $D \in C(X)$, el hiperespacio $C(D, X)$ es compacto.

Demostración: Notemos que $C(D, X) \subset C(X)$ y $C(X)$ es compacto, por el Teorema 1.3 es suficiente probar que $C(D, X)$ es cerrado.

Tomemos una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \to M$ tal que $M_n \in C(D, X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $M_n \in C(D, X)$ tenemos que $D \in M_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos además que las sucesiones $\{D\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen, de manera que $\{D\}_{n=1}^{\infty} \to D$ y $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \to M$, además $D \subset M_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por tanto $D \subseteq M$. Con esto concluimos que $M \in C(D, X)$; esto prueba que el hiperespacio $C(D, X)$ es cerrado y por tanto compacto. □

Teorema 1.25. Dado un continuo X y $D \in C(X)$, el hiperespacio $C(D, X)$ es arcoconexo.

Demostración: Sean $A, B \in C(D, X)$, con $A \neq B$, construiremos un arco γ en $C(D, X)$ que une al punto A con el punto B.

Como $D \subseteq A$ y $D \subseteq B$, entonces $D \subseteq A \cup B$ y por tanto $A \cup B \in C(D, X)$.

Por el Teorema 1.17 existen arcos ordenados $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ y $\beta : [0, 1] \to C(X)$ que cumplen:

- $\alpha(0) = A$
- $\alpha(1) = A \cup B$
- $\beta(0) = B$
- $\beta(1) = A \cup B$

Como α y β son arcos ordenados, $D \subset A$ y $D \subset B$ por la Definición 1.16 tenemos que para toda $t \in [0, 1]$ se cumple que $D \subseteq \alpha(t)$ y $D \subseteq \beta(t)$, con lo cual obtenemos que $\alpha([0, 1]) \subseteq C(D, X)$ y $\beta([0, 1]) \subseteq C(D, X)$.

Así que la unión $\alpha([0, 1]) \cup \beta([0, 1]) \subseteq C(D, X)$ y $\alpha([0, 1]) \cup \beta([0, 1])$ contiene un arco γ en el hiperespacio $C(D, X)$ que une a los puntos A y B. Por tanto, el hiperespacio $C(D, X)$ es arcoconexo. □

Teorema 1.26. Dado un continuo X y $D \in C(X)$, el hiperespacio $C(D, X)$ es localmente conexo.

Demostración: Sean $\varepsilon > 0$, $M \in C(D, X)$ y $U = B_{\varepsilon}^{H}(M) \cap C(D, X)$, veamos que U es conexo.

Afirmación 1.27. *Si $R \in U$, entonces $R \cup M \in U$*

Como $R, M \in C(D, X)$, se tiene que $D \subseteq R$ y $D \subseteq M$ con lo cual $D \subseteq R \cup M$ y $R \cup M \in C(D, X)$.

Ahora solo tenemos que probar que $R \cup M \in B_{\varepsilon}^{H}(M)$; probaremos entonces que $M \subseteq N(\varepsilon, R \cup M)$ y $R \cup M \subseteq N(\varepsilon, M)$.

La primera contención es clara ya que como $M \subseteq R \cup M$, entonces $M \subseteq N(\varepsilon, M \cup R)$.

Para la segunda contención recordemos que $R \in B_{\varepsilon}^{H}(M)$ lo cual implica $R \subseteq N(\varepsilon, M)$, además $M \subseteq N(\varepsilon, M)$ con esto concluimos $R \cup M \subseteq N(\varepsilon, M)$. De las dos contenciones anteriores obtenemos que $R \cup M \in B_{\varepsilon}^{H}(M)$, así $H(M, R \cup M) < \varepsilon$, $R \cup M \in U$ y la afirmación queda demostrada.

Afirmación 1.28. *Sean, $R, M \in U$ y $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha(0) = M$ y $\alpha(1) = R \cup M$, entonces $\alpha([0,1]) \subseteq U$.*

Como $D \subseteq M$ por la Definición 1.16 $D \subset \alpha(0) = M \subset \alpha(t) \subset \alpha(1) = M \cup R$ para toda $t \in (0,1)$, esto nos dice que $\alpha([0,1]) \subset C(D, X)$.

Ahora probaremos que $\alpha([0,1]) \subseteq B_{\varepsilon}^{H}(M)$. Observemos que $M \subseteq \alpha(t) \subseteq N(\varepsilon, \alpha(t))$ para toda $t \in [0,1]$, por lo tanto $M \subset N(\varepsilon, \alpha([0,1])$.

Por otro lado, por la Afirmación 1.27, si $R \in B_{\varepsilon}^{H}(M)$, entonces $R \cup M \in B_{\varepsilon}^{H}(M)$ y así tenemos que para toda $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \subseteq R \cup M \subseteq N(\varepsilon, M)$, por tanto $\alpha([0,1]) \subseteq R \cup M \subseteq N(\varepsilon, M)$.

Hemos probado que $M \subseteq N(\varepsilon, \alpha([0,1]))$ y $\alpha([0,1]) \subseteq N(\varepsilon, M)$, con esto podemos concluir que $H(M, \alpha([0,1])) < \varepsilon$ y por tanto tenemos que $\alpha([0,1]) \subseteq U$ y la afirmación queda demostrada.

De manera análoga podemos probar que si $\beta : [0,1] \to C(X)$ es un arco de R a $R \cup M$, entonces $\beta([0,1]) \subseteq U$.

Ahora sí estamos listos para probar que U es conexo.

Dado $S \in U$ consideremos los arcos ordenados :
$\alpha : [0,1] \to C(X)$ donde $\alpha(0) = M$, $\alpha(1) = S \cup M$ y
$\beta : [0,1] \to C(X)$ con $\beta(0) = S$, $\beta(1) = M \cup S$.

Por la Afirmación 1.28, estos arcos ordenados cumplen que $\alpha([0,1]) \subseteq U$ y $\beta([0,1]) \subseteq U$ por lo cual $\alpha([0,1]) \cup \beta([0,1]) \subseteq U$ con esto concluimos que $\alpha([0,1]) \cup \beta([0,1])$ es una trayectoria en U que conecta M con S. Esto nos dice que U es conexo por trayectorias y $C(D, X)$ es localmente conexo, con esto terminamos la prueba del teorema.

□

De los Teoremas 1.24, 1.25 y 1.26 podemos dar el siguiente Corolario.

Corolario 1.29. Dado un continuo X y $D \in C(X)$, el hiperespacio $C(D, X)$ es un subcontinuo localmente conexo de $C(X)$.

Demostración. Notemos que en la prueba del Teorema 1.26 lo que prueban las Afirmaciones 1.27 y 1.28 es que el hiperespacio $C(D, X)$ tiene una base de vecindades localmente arcoconexas, y por tanto es un espacio localmente arococonexo. □

1.5. Modelos de Hiperescacios anclados $C(D, X)$

Sin realizar las pruebas de los homeomorfismos, daremos algunos modelos de hiperespacios anclados $C(D, X)$ en el caso de que D se un punto (i.e. $D = \{p\}$ con $p \in X$).

En el intervalo $[0, 1]$, si $p = 0$, los subcontinuos que tienen 0 como elemento son de la forma $[0, t]$ con $t \in [0, 1]$. Por lo que el hiperespacio

$$C(p, [0, 1]) = \{[0, t] : t \in [0, 1]\}$$

y es homemorfo al intervalo. (Ver Figura 1.3)

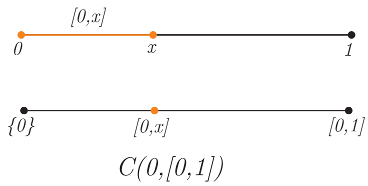


Figura 1.3: Hiperespacio anclado $C(0, [0, 1])$

Si tomamos $p \in (0, 1)$, los subcontinuos que tienen a p se ven de la forma $[a, b]$, donde $a \leq p \leq b$ y $C(p, [0, 1])$ es homeomorfo a una 2-celda.(Ver Figura 1.4)

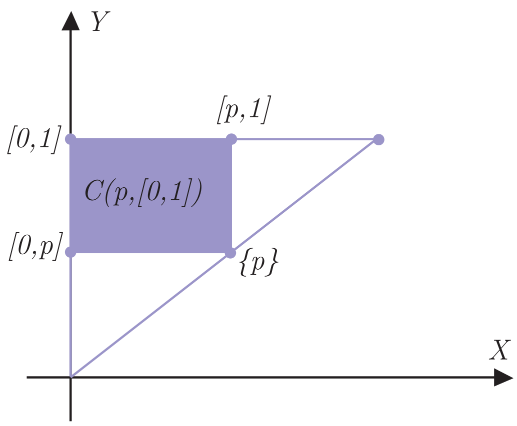


Figura 1.4: Hiperespacio $C(x, [0, 1])$ con $x \in (0, 1)$.

En el caso de la circunferencia S^1, si tomamos un punto $p \in S^1$, notemos que siempre tenemos dos direcciones en las cuales hacer crecer nuestro continuo (en dirección de las manecillas del reloj y en dirección contraria a las manecillas del reloj) (Ver Figura 1.5)

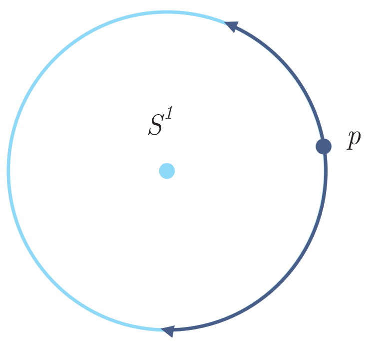


Figura 1.5: Continuos en la circunfernecia.

De manera que nuestro hiperespacio anclado $C(p, S^1)$ se ve de la siguiente manera.(Ver Figura 1.6)

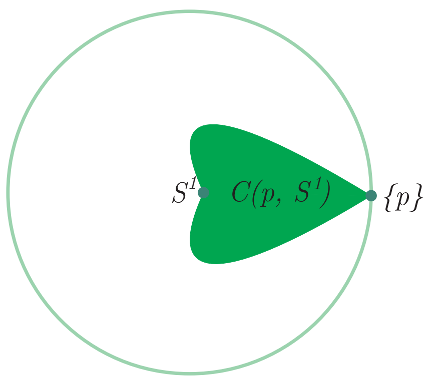


Figura 1.6: Hiperespacio $C(p, S^1)$.

Con esto terminamos la sección de modelos de hiperespacios anclados y el Capítulo 1. El siguiente capítulo lo dedicaremos a probar cuales son las funciones que denotamos como selecciones y probaremos también que los únicos continuos que admiten selcciones son los dendroides.

Capítulo 2

Selecciones

Este capítulo lo dedicaremos a estudiar un tipo especial de funciones de un hiperespacio en el espacio, a este tipo de funciones las llamamos selecciones. El trabajo de esta tesis se resume en dar una herramienta que nos permite encontrar dendroides más dendroides selectibles, ésta herramienta también simplifica muchos resultados pasados en que las pruebas para demostrar que una función es una selección o mejor dicho que un dendroide es selectible; son demostraciones muy elaboradas y generalmente sólo sirven para el dendroide específico para el que la selección está descrita.

El tema de selecciones sigue siendo sumamente atrayente y con muchos resultados por resolver, y este nuevo resultado es fuerte y muy interesante.

Definición 2.1. Sean, X un continuo, $s : C(X) \to X$ una función continua, diremos que s una ***selección*** si para todo $A \in C(X)$, se tiene que $s(A) \in A$.

En el caso de que podamos definir este tipo de funciones, diremos que X es ***selectible*** o bien que X ***admite selecciones.***

Observación. 2.2. *Sea X un continuo que admite selecciones y $s : C(X) \to X$ una selección, entonces para toda $\{x\} \in F_1(X)$ se cumple que $s(\{x\}) = x$.*

Demostración. Sea $\{x\} \in F_1(X)$, notemos que $\{x\}$ es un elemento de $C(X)$ y por la Definición 2.1 tenemos que $s(\{x\}) \in \{x\}$, como el único elemento del conjunto $\{x\}$ es el punto x, tenemos que $s(\{x\}) = x$ y la observación queda demostrada. □

Para poder trabajar con selecciones, regresaremos primero a probar algunos resultados de hiperespacios; recordemos que

$$F_1(X) = \{\{p\} : p \in X\}$$

y consideremos $f : X \to F_1(X)$ como $f(x) = \{x\}$.

Proposición 2.3. La función $f : X \to F_1(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que f es inyectiva.

Sean $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$. Como $\{x\} = f(x) = f(y) = \{y\}$, entonces $\{x\} = \{y\}$, así $x = y$. Con lo cual probamos que f es un función inyectiva.

Veamos ahora que f es una función suprayectiva.

Para probar que f es suprayectiva, tomemos $\{x\} \in F_1(X)$. Notemos que $x \in X$ y $f(x) = \{x\}$, de esta forma tenemos que f es una función suprayectiva.

Ahora veamos que f es una función continua.

Para probar éste hecho, usaremos que f es una función es continua si y solo si la imagen inversa de cualquier abierto en $F_1(X)$ es un abierto de X.

Sea $x \in X$ y U un abierto de $F_1(X)$ tal que $\{x\} \in U$, consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^H(\{x\}) \cap F_1(X) \subseteq U$ basta probar que se cumple que

$$f^{-1}\left(B_\varepsilon^H(\{x\}) \cap F_1(X)\right) = B_\varepsilon^d(x)$$

De esta manera

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\{x\} \in U} B_\varepsilon^d(x)$$

que es un abierto de X.

Probaremos ambas contenciones:

($\subseteq$) Tomemos un punto $z \in f^{-1}\left(B_\varepsilon^H(\{x\}) \cap F_1(X)\right)$, tenemos entonces que $f(z) = \{z\} \in B_\varepsilon^H(\{x\}) \cap F_1(X)$, de donde $H(\{x\}, \{z\}) < \varepsilon$, esto quiere decir que $x \in N(\varepsilon, \{z\})$ y $z \in N(\varepsilon, \{x\})$ lo cual implica que $d(x, z) < \varepsilon$ y por tanto $z \in B_\varepsilon^d(x)$.

($\supseteq$) Ahora sea $z \in B_\varepsilon^d(x)$, entonces $d(x, z) < \varepsilon$, de aquí $x \in N(\varepsilon, \{z\})$ y $z \in N(\varepsilon, \{x\})$, lo que significa que $H(\{x\}, \{z\}) < \varepsilon$, podemos concluir entonces que $f(z) = \{z\} \in B_\varepsilon^H(\{x\}) \cap F_1(X)$.

De ambas contenciones tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X y por tanto f es una función continua

Habiendo probado que f es una función continua y biyectiva, como por el Teorema 1.15 ([2, Corolario 4.3]) ya sabemos que $C(X)$ es un espacio compacto, bastaría probar que $F_1(X)$ es un espacio Hausdorff y utilizar el Teorema 1.4, pero sabemos que $F_1(X)$ es un subespacio de $C(X)$ que es métrico y por tanto Hausdorff.

Otra forma de concluir la prueba de que la función f es un homeomorfismo es mostrar que la función f es una función abierta; probaremos que para toda $x \in X$ y para toda $\varepsilon > 0$, se cumple que

$$f\left(B_\varepsilon^d(x)\right) = B_\varepsilon^H(\{x\}) \cap F_1(X).$$

También probaremos esta igualdad, mostrando que cada una de las contenciones se cumple.

($\supseteq$) Sea $\{y\} \in B_\varepsilon^H(\{x\}) \cap F_1(X)$, entonces $H(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon$, esto implica que $y \in N(\varepsilon, \{x\})$, con lo cual $d(x, y) < \varepsilon$, con esto tenemos que $y \in B_\varepsilon^d(x)$ y así concluimos que $\{y\} = f(y) \in f\left(B_\varepsilon^d(x)\right)$.

($\subseteq$) Ahora consideremos un elemento $\{y\} \in f\left(B_\varepsilon^d(x)\right)$, como $\{y\} = f(y)$ y f es una función biyectiva, esto implica que $y \in B_\varepsilon^d(x)$, entonces $d(x, y) < \varepsilon$, lo que significa que $x \in N(\varepsilon, \{y\})$ y $y \in N(\varepsilon, \{x\})$, así concluimos que $H(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon$

y $\{y\} \in B_{\varepsilon}^{H}(\{x\}) \cap F_1(X)$

Con lo anterior probamos que f es una función abierta, como además f es una función continua y biyectiva concluimos que f es un homemomorfismo y terminamos la prueba de la proposición.

$\square$

De manera que $F_1(X) \cong X$ y como $F_1(X)$ es un subcontinuo de $C(X)$, concluimos que $C(X)$ contiene una copia homeomorfa de X.

Lema 2.4. Si X es un continuo selectible, entonces existe una retracción

$$r : C(X) \to F_1(X).$$

Demostración. Como X es un continuo selectible, sean $s : C(X) \to X$ una selección y definamos $f : X \to F_1(X)$ como $f(x) = \{x\}$; al igual que en la Proposición 2.3.

Consideremos la función

$$f \circ s : C(X) \to F_1(X)$$

y veamos que $f \circ s$ es una retracción de $C(X)$ en $F_1(X)$.

Como s es una selección, s es una función continua, además por la Proposición 2.3 sabemos que f es un homeomorfismo, en particular f es continua, de manera que $f \circ s$ es continua.

Tomemos ahora, $\{x\} \in F_1(X)$ y veamos que $(f \circ s)(\{x\}) = \{x\}$.

Ahora, por la Definición 2.1 y la Proposición 2.3 tenemos que $s(\{x\}) = x$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$, por lo que

$$(f \circ s)(\{x\}) = f(s(\{x\})) = f(x) = \{x\}$$

De manera que $f \circ s$ es una retracción de $C(X)$ en $F_1(X)$ y el lema queda demostrado.

$\square$

Lema 2.5. Sea X un continuo y $s : C(X) \to X$ es una selección. Si $A \in C(X)$, entonces $s|_{C(A)} : C(A) \to A$ es una selección.

Demostración. Como s es una función continua, entonces $s|_{C(A)}$ también es continua. Sólo nos falta probar que para todo $B \in C(A)$, se cumple $s|_{C(A)}(B) \in B$. Tomemos $B \in C(A)$, ahora, $s|_{C(A)}(B) = s(B) \in B$. Por lo tanto $s|C(A)$ es una selección. $\square$

Proposición 2.6. El intervalo $[0, 1]$ admite selecciones.

Demostración. Recordemos que si $A \in C([0, 1])$, existen $a, b \in [0, 1]$ tales que $A = [0, 1]$. Consideremos la función $s : C([0, 1]) \to [0, 1]$ dada por

$$s(A) = \text{mín}\, A$$

Sabemos de nuestros cursos de cálculo que si $\mathcal{P}_C(\mathbb{R})$ representa los subconjuntos cerrados y acotados de la recta real $\mathbb{R}$, entonces la función mín : $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Figura 2.1: Selección de la Proposición 2.6

es una función continua, por tanto $s = \text{mín}\,|_{C([0,1])}$ es continua. Además, dado $A \in C([0,1])$, A es cerrado y acotado, entonces $\text{mín}\, A \in A$. Así s es una selección. (Ver Figura 2.1)

□

Lema 2.7. *[5, Corolario 3.23]* Si $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, entonces S^1 no es un retracto de $\mathbb{D}$.

El lema anterior se puede encontrar en varios textos y nos dice que no existen retracciones del disco unitario en la circunferencia.

Proposición 2.8. La circunferencia S^1 no admite selecciones.

Demostración. Supongamos por el contrario que existe una selección $s : C(S^1) \to S^1$. Por el Lema 2.4, sabemos que, existe una una retracción $r : C(S^1) \to F_1(S^1)$. Además sabemos por la Sección 1.3 que $C(S^1)$ es un disco cuya frontera es $F_1(S^1)$, es decir, si existe una selección $s : C(S^1) \to S^1$ entonces existe una retracción del disco en su frontera, lo que contradice el Lema 2.7. Por tanto S^1 no admite selecciones y la proposición queda demostrada. □

Probaremos ahora que el abanico armónico, X, admite selecciones; sin embargo estas selecciones son un poco rígidas pues ocurre que si T_0 es el segmento límite del abanico armónico, v es su vértice, y $s : C(X) \to X$ es una selección, entonces $s(T_0) = v$

Notación 2.9. *En Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $\overline{xy}$ al segmento de recta que los une.*

Ejemplo 2.10. El ***abanico armónico*** es el continuo X definido en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

Sean $v = (0,0), t_0 = (1,0)$, $T_0 = \overline{vt_0}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $t_n = (1, \frac{1}{n})$ y $T_n = \overline{vt_n}$.

De manera que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.(Ver Figura 2.2)

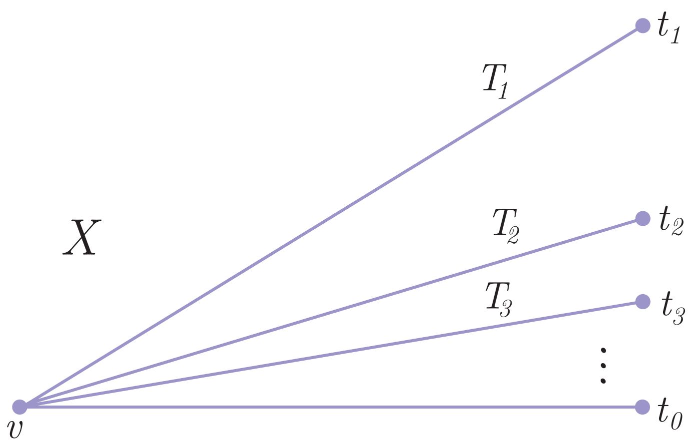


Figura 2.2: Abanico Armonico

Proposición 2.11. Sea X el abanico armónico del Ejemplo 2.10,
Si $s : C(X) \to X$ es una selección, entonces $s(T_0) = v$.

Demostración. Supongamos por el contrario que $s(T_0) = t$ con $t \neq v$. Como $t \neq v$ entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $v \notin B_\varepsilon(t)$. Por la continuidad de la selección s, existe $\delta > 0$ tal que $s(B_\delta(T_0)) \subseteq B_\varepsilon(t)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = T_{2n-1}$ y $B_n = T_{2n}$.

Notemos también que $v \in A_n$ y $v \in B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de manera que $A_n \cup B_n$ es un continuo.

Además tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = T_0$$

De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se cumple que A_n, B_n y $A_n \cup B_n \in B_\delta^H(T_0)$.
Como s es una función continua $s(A_n), s(B_n), s(A_n \cup B_n) \in B_\varepsilon(t)$.
Dado que $s(T_0) = t \in T_0$ y $v \notin B_\varepsilon(t)$, entonces $B_\varepsilon(t)$ no es conexo, de manera que $A_n \cap B_\varepsilon(t) \neq \varnothing$ y $B_n \cap B_\varepsilon(t) \neq \varnothing$ se encuentran en componentes diferentes de $B_\varepsilon(t)$.
Supongamos ahora, que $s(A_n \cup B_n) \in A_n$ y sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de B_n a $A_n \cup B_n$, es decir $\alpha(0) = B_n$ y $\alpha(1) = A_n \cup B_n$.

Notemos que $\alpha([0,1])$ es un conjunto conexo, siguiendo el mismo argumento que en la Afirmación 1.28, sabemos que $\alpha([0,1]) \subset B_\delta^H(T_0)$.
De manera que $s(\alpha([0,1])) \subseteq B_\varepsilon(t)$ pero $s(\alpha(0)) = s(B_n) \in B_n \cap B_\varepsilon(t)$ y $s(\alpha(1)) = s(A_n \cup B_n) \in A_n \cap B_\varepsilon(t)$. Lo cual implica que el continuo $s(\alpha([0,1])) \subset B_\varepsilon(t)$ intersecta a dos componentes diferentes de $B_\varepsilon(t)$, ésto contradice la conexidad de $s(\alpha([0,1]))$ y es una contradicción que vino de suponer que $s(T_0) \neq v$. Por tanto $s(T_0) = v$ y la proposición queda demostrada.

$\square$

En el ejemplo y la proposición que acabamos de probar describimos al abanico armónino que pertenece a la clase de los dendroides, sin embargo, todavía no hemos definido este tipo de continuos que nos serán de gran utilidad. La siguiente sección está dedicada a dendroides, sus propiedades y las relaciones que tienen con las selecciones.

2.1. Dendroides

Definición 2.12. Dado un conjunto X, decimos que X es ***arcoconexo*** si para cualesquiera $u, v \in X$ existe una función $\alpha : [0,1] \to X$ continua e inyectiva tal que $\alpha(0) = u$ y $\alpha(1) = v$.(Ver Figura 2.3)

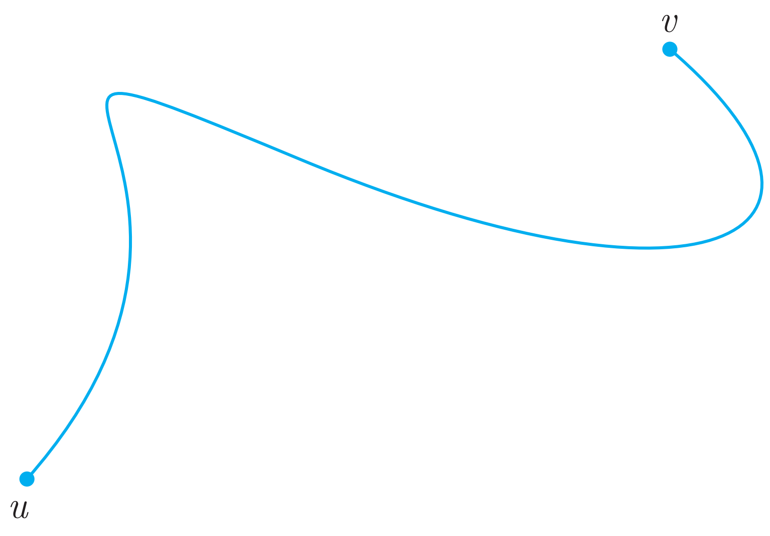


Figura 2.3: Arco entre u y v.

Definición 2.13. Diremos que X es ***unicoherente*** si existen $A, B \in C(X)$ tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es conexo.

Definición 2.14. Un continuo X es ***hereditariamente unicoherente*** si para cualesquiera $A, B \in C(X)$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.(Ver Figura 2.4)

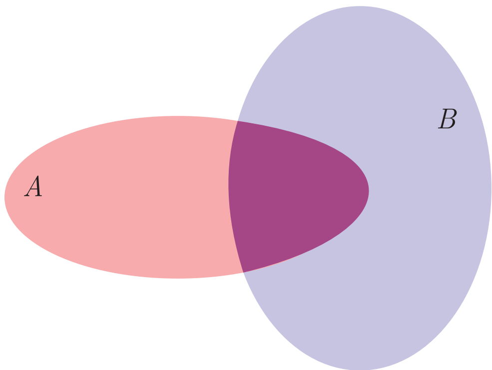


Figura 2.4: Intersección conexa de subcontinuos.

Definición 2.15. Un continuo X es un ***dendroide***, si X es arcoconexo y hereditariamente unicoherente.(Ver Figura 2.5)

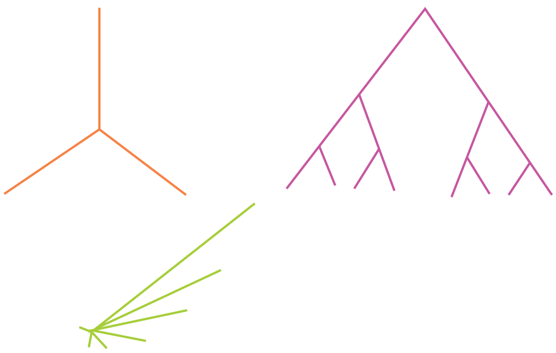


Figura 2.5: Ejemplos de dendroides.

El siguiente teorema nos dice que los dendroides son continuos únicamente arcoconexos. Este teorema está probado en varios libros de texto y varias tesis, lo repetiremos aquí para facilitarle al lector si quiere consultarlo.

Teorema 2.16. *[8, Teorema 4.4]* Si X es un dendroide y $a, b \in X$ con $a \neq b$, entonces existe un único arco en X que los une, el cual vamos a denotar por ab.

Demostración. Supongamos que existen dos arcos diferentes de a a b que llamaremos A_1 y A_2. Entonces, $\{a, b\} \subset A_1$ y $\{a, b\} \subset A_2$. Por tanto $\{a, b\} \subset A_1 \cap A_2$. Como X es hereditariamente unicoherente, $A_1 \cap A_2 \in C(X)$.

Además $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, entonces $A_1 \cap A_2$ es un subarco de A_1 que contiene a los puntos $\{a, b\}$, de modo que $A_1 \cap A_2 = A_1$. De manera análoga podemos probar que $A_1 \cap A_2 = A_2$. Por tanto, $A_1 = A_2$. $\square$

Lema 2.17. Los subcontinuos de los dendroides son arcoconexos.

Demostración. Sea X un dendroide y A un subcontinuo de X(Si A es degenerado, A es un punto y cumple con ser un dendroide).

Consideremos dos puntos $a, b \in A$ por el Teorema 2.16, existe un único arco ab en X. Notemos que por la Definición 2.15 $ab \cap A$ es un continuo. De hecho $ab \cap A$ es un subarco de ab que contiene a los puntos a, b por lo que podemos concluir que $ab \cap A = ab$. Con lo cual probamos que A es arcoconexo.

$\square$

Lema 2.18. Los subcontinuos de los dendroides son dendroides.

Demostración. Sea X un dendroide y A un subcontinuo de X.

Por la Definición 2.15 tenemos que A es hereditariamente unicoherente y por el Teorema 2.16 tenemos que A es arcoconexo. Por tanto A es un continuo arcoconexo y hereditariamente lo cual es un dendroide.

$\square$

Lema 2.19. Sean, X un dendroide, $p, a \in X$ con $a \neq p$. Sea $g : C(p, pa) \to pa$ dada por $g(pz) = z$, entonces g es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que g es biyectiva. Tomemos $py, pz \in C(p, pa)$ tales que $g(py) = g(pz)$, de manera que $y = z$. Como X es un dendroide, el arco que va de p a $y = z$ es único, entonces $py = pz$, por tanto g es inyectiva.

Para ver que g es suprayectiva, sea $z \in pa$, Entonces, $g(pz) = z$, de manera que g es suprayectiva.

Para probar que g es continua, consideremos al conjunto $\mathcal{P}(pa) = \{A \subset X : A \subset pa\}$. De manera que la función g la podemos considerar de la siguiente manera:

$$g = \text{máx} : \mathcal{P}(pa)|_{C(p,pa)} \to pa$$

Como la función máx es continua, tenemos que su restricción a $C(p, pa)$ está bien definida y es continua y por tanto g es continua.

Como además $C(p, pa)$ es compacto y el arco pa es un espacio Hausdorff, tenemos por el Teorema 1.4 que g es un homeomorfismo. $\square$

Lema 2.20. Sea, X un dendroide, $p, a \in X$ con $p \neq a$ y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Consideremos $\widehat{\mu} = \mu|_{C(p,pa)} : C(p, pa) \to [0, \mu(pa)]$, entonces $\widehat{\mu}$ es un homemorfismo.

Demostración. Veamos que $\widehat{\mu}$ es biyectiva.

Sean $pb, pc \in C(p, pa)$ distintos, como $pb \neq pc$ y $pb, pc \subseteq pa$, se tiene que $pb \subsetneq pc$ o $pc \subsetneq pb$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $pb \subsetneq pc$, de aquí podemos deducir que $\mu(pb) < \mu(pc)$ y así $\widehat{\mu}(pb) < \widehat{\mu}(pc)$. Con esto concluimos que $\widehat{\mu}$ es inyectiva.

Además, $\widehat{\mu}$ es continua pues las funciones de Whitney son continuas(Definición 1.21) y $\widehat{\mu}$ es la restricción de una función de Whitney μ al hiperespacio $C(p, pa)$.

Notemos que también que $\widehat{\mu}(pp) = \mu(\{p\}) = 0$ y $\widehat{\mu}(pa) = \mu(pa)$, por el Teorema del Valor Intermedio, $\widehat{\mu}$, toma los valores en $[0, \widehat{\mu}(pa)]$ y por lo tanto es suprayectiva.

Finalmente, como $C(p, pa)$ es compacto y $[0, \mu(pa)]$ es un espacio Haudorff, por el Teorema 1.4 tenemos que $\widehat{\mu}$ es un homeomorfismo.

□

A continuación daremos una condición necesaria para que un continuo admita selecciones, sin embargo dicha condición no es suficiente.

Teorema 2.21. Si X es un continuo selectible, entonces X es un dendroide.

Demostración. Sea $s : C(X) \to X$ una selección. Primero, veremos que X es arcoconexo.

Afirmación 2.22. Si X es un continuo selectible, X es arcoconexo.

Prueba. Notemos que s es una función continua y recordemos que el Corolario 1.19 nos dice que $C(X)$ es arcoconexo. Como $s(\{p\}) = p$, tenemos que s es una función continua y suprayectiva, así $s(C(X)) = X$ es arcoconexo. □

Afirmación 2.23. Si X es un continuo selectible, X es hereditariamente unicoherente.

Prueba. Para ver que X es hereditariamente unicoherente, tomemos $A, B \in C(X)$ y probemos que $A \cap B \in C(X)$. Dado que A y B son cerrados, entonces $A \cap B$ es cerrado, además X es compacto y $A \cap B \subseteq X$, en consecuencia $A \cap B$ es compacto.

Solo nos falta ver que X es conexo.

Supongamos por el contrario que $A \cap B$ no es conexo, entonces existen subconjuntos $M, N \subset X$, cerrados, ajenos y no vacíos tales que $A \cap B = M \cup N$.

Si consideramos las restricciones de la función s a $C(A)$ y $C(B)$ respectivamente, $s|_A$ y $s|_B$ tenemos que estas restricciones, por el Lema 2.5 son selecciones para A y B, respectivamente; de manera que por la Afirmación 2.22 podemos concluir que A y B son continuos arcoconexos.

Tomemos ahora $x_0, x_1 \in A \cap B$ tales que $x_0 \in M$ y $x_1 \in N$, entonces existen arcos $\alpha : [0, 1] \to A$ y $\beta : [0, 1] \to B$ tales que $\alpha(0) = x_0 = \beta(0)$ y $\alpha(1) = x_1 = \beta(1)$.

Ahora el subcontinuo arcoconexo $\alpha([0, 1]) \cup \beta([0, 1]) \subset A \cup B \subset X$ contiene una copia topológica, R de S^1, lo cual es una contradicción pues $s|_R$ por el Lema 2.5 es una selección; sin embargo sabemos por la Proposición 2.8 que $R \cong S^1$ no admite selecciones.

Dicha contradicción viene de suponer que $A \cap B$ no es conexo. Con esto concluimos que $A \cap B$ es conexo y $A \cap B \in C(X)$.

□

De las Afirmaciones 2.22 y 2.23 se tiene que X es un dendroide.

□

Ahora daremos la definición de suavidad, que es una propiedad que tienen algunos dendroides, ésta propiedad nos ayuda (de cierta manera) a encontrar dendroides selectibles.

Definición 2.24. Sean, X un dendroide y $p \in X$. Decimos que X es ***suave en*** $\boldsymbol{p}$ si para todo $q \in X$ y toda sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \to q$ se tiene que $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty} \to pq$. Si existe un punto $p \in X$ tal que X es suave en p, diremos que X es ***suave***.

Una propiedad importante que tienen los dendroides es la Propiedad del primer punto [7, Chapther X], que describimos a continuación.

Teorema 2.25. Sean, X un dendroide, $B \in C(X)$ y $a \in X$, entonces existe un único punto $x_B \in B$ al cual llamamos el primer punto de a a B en X y que cumple que:

a) En el arco ax_B se tiene que $ax_B \cap B = \{x_B\}$.

b) Para todo $y \in B$, al considerar el arco ay se tiene que $x_B \in ay$.

Demostración. (a) Para cada punto $y \in B$, consideremos al arco ay, como $y \in B$ y X es un dendroide, $ay \cap B$ es un subarco de ay.

De donde tenemos que $ay \cap B = x_B y$ para algún $x_B \in B$, por lo que $ay = ax_B \cup x_B y$ y $ax_B \cap B = \{x_B\}$.

(b) Consideremos $y' \in B$, $y \neq y'$ y el arco ay'. Por lo que mostramos en (a), existe $x'_B \in B \cap ay'$ tal que $ax'_B \cap B = \{x'_B\}$. Como $x'_B, y \in B \in C(X)$ y B es arcoconexo, tenemos que $ay = ax'_B \cup x'_B y$ y $x'_B y \subseteq B$. De modo que $x'_B \in ax'_B \cup x'_B y$ es un arco de a a y. Por el Teorema 2.16 tenemos que el arco ay es único, entonces $ax_B \cup x_B y = ax'_B \cup x'_B y$.

Ahora sólo nos falta probar que $x_B = x'_B$.

Como $ay \cap B = x_B y$ y $x'_B y \subset B \cap ay$, de lo cual obtenemos que $x'_B y \subseteq x_B y$.

Por otro lado, puesto que $x_B y \subseteq ay = ax'_B \cup x'_B y$ y tenemos que $B \cap ax'_B = \{x'_B\}$ tenemos entonces que $B \cap ay = x'_B y$ de lo cual obtenemos que $x_B y \subseteq x'_B y$ y por tanto $x_B y = x'_B y$.

De esto modo hemos demostrado el teorema. (Ver Figura 2.6) □

Notación 2.26. De ahora en adelante, si X es un dendroide, A un subcontinuo de X y $p \in A$, sabemos que hay un punto p_A que cumple con las propiedades del Teorema 2.25 y nos referiremos a esta propiedad como ***la propiedad del primer punto de*** A ***con respecto a*** p***,*** o como ***el primer punto de*** p ***a*** A***.***

Con el teorema anterior podemos probar lo siguiente:

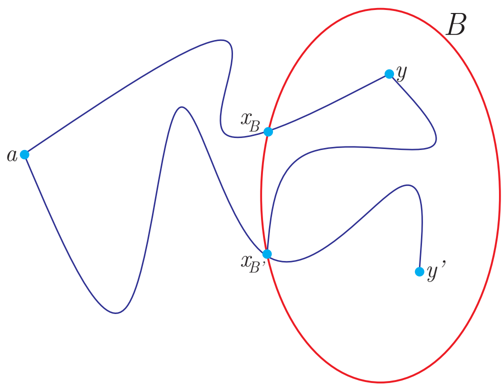


Figura 2.6: Ilustración de la demostración del Teorema 2.25

Teorema 2.27. Sea X un dendroide suave, entonces X es selectible.

Demostración. Sean, $p \in X$ el punto de suavidad de X y $s : C(X) \to X$ definida como:

$$s(A) = x_A$$

donde x_A es el primer punto de A con respecto a p.

Debido al Teorema 2.25 se tiene que s está bien definida y $s(A) = x_A \in A$,

Veamos que s es una función continua, tomemos, en $C(X)$, una sucesión de puntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$ en $C(X)$.

Probemos que $\{s(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \to s(A)$.

Por simplicidad, llamemos $a_n = s(A_n)$ y $a = x_A$. Como A es cerrado, de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tomemos una subsucesión convergente $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to y$ para algún $y \in X$. Como $A_{n_k} \to A$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$, tenemos que $y \in A$.

El objetivo es probar que $a = y$.

($\subseteq$) Como $y \in A$ y a es el primer punto de A con respecto a p, entonces $pa \subseteq py$.

($\supseteq$) Ahora, dado que $a \in A$ y $A_n \to A$ en $C(X)$, existe una sucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos en X tal que $z_{n_k} \in A_{n_k}$ y $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to a$. Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $pa_{nk} \subseteq pz_{n_k}$ pues a_{n_k} es el primer punto de A_{n_k} con respecto a p.

Recordemos que X es suave en p, con lo cual $\{pz_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to pa$ y también $\{pa_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to py$, como $pa_{n_k} \subseteq pz_{n_k}$ podemos concluir que $py \subseteq pa$.

De ambas contenciones se tiene que $pa = py$ y por tanto $a = y$.

Con esto hemos probado que toda subsucesión convergente $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $s(A) = a$, así $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$, con lo cual concluimos que

$$\{s(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \to s(A)$$

y s es continua, por lo que s es una selección y con esto probamos que los dendroides suaves son selectibles. (Ver Figura 2.7)

□

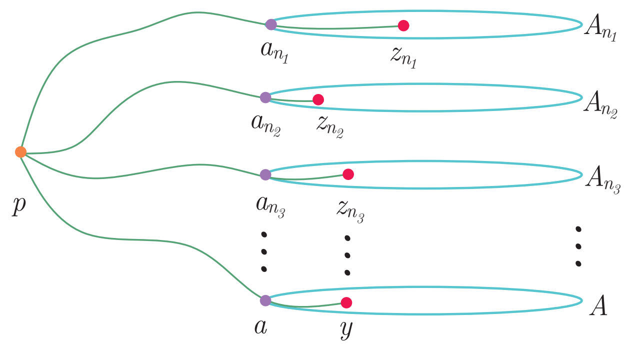


Figura 2.7: Ilustración de la demostración del Teorema 2.27

Recordemos el Ejemplo 2.10 que describe al Abanico Armónico. En la proposición 2.11 probamos que si el abanico armónico admite selecciones, entonces la selección de la barra límite es el vértice v. Probaremos ahora que el abanico armónico es suave y por el Teorema 2.27 es selectible.

Teorema 2.28. El abanico armónico del Ejemplo 2.10 es suave.

Demostración. Sea X el abanico armónico del Ejemplo 2.10, probaremos que este dendroide es suave en v.

Sea $q \in X$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en X que converge al punto q, $(\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \to q)$.

Consideremos a la sucesión de arcos $\{vq_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ y supongamos que existe una subsucesión convergente $\{vq_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a un continuo A. Lo único que tenemos que probar es que $A = vq$. Probaremos ambas contenciones:

$(\supseteq)$ Sabemos que como $v \in vq_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $q_{n_k} \to q$, entonces $v, q \in A$ y por el Lema 2.17 A es arcoconexo, por tanto el arco $vq \subset A$.

$(\subseteq)$Sea p un punto en A tal que $p \notin vq$ y sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $vq \subseteq T_m$.

Notemos que como $p \in A$ y $vq_{n_k} \to A$, entonces existe $p_{n_k} \in vq_{n_k}$ tal que $p_{n_k} \to p$ y se cumple que $\|p_{n_k}\| \leq \|q_{n_k}\|$. Por tanto $\|p\| \leq \|q\|$.

Si $p \in T_m \setminus vq$, entonces, como X es un continuo en $\mathbb{R}^2$ y $T_m = \overline{v(1, \frac{1}{m})}$ $(T_0 = \overline{v(1,0)})$ tenemos que $\|p\| > \|q\|$ lo cual es una contradicción, por tanto $p \notin T_m$

Analizaremos dos casos:

Caso 2.29. $q \in T_m \setminus T_0$

En este caso, existe una $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(q) \subseteq T_m$, lo cual implica que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq K$, se cumple que $vq_{n_k} \subseteq T_m$. Como $C(T_m)$ es compacto, tenemos que $A \subset T_m$.

Lo cual implica que $p \in T_m \setminus vq$ y ya vimos que eso nos lleva a una contradicción.

Caso 2.30. $q \in T_0$

Supongamos que $p \in T_m$ para alguna $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. De manera que existe una $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subseteq T_m$, lo cual implica que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq K$, se cumple que $p_{n_k} \in T_m$. Pero como $p_{n_k} \subseteq vq_{n_k} \subseteq T_{m_{n_k}}$ para alguna $m_{n_k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que $vq_{n_k} \subseteq T_m = T_{m_{n_k}}$ para toda $k \geq K$. Como $C(T_m)$ es compacto, tenemos entonces que que $A \subset vq_m \subseteq T_m$ lo cual implica que $q \in T_0 \cap T_m$, entonces $q = v$. Como $p \neq v$, obtenemos que $vq = v$ y esto implica que $p \in T_m \setminus vq$ para toda $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ lo cual es una contradicción.

Hemos llegado en ambos casos a una contradicción, lo cual implica que para toda $p \in A$, $p \in vq$ por tanto $A \subseteq vq$ y la contención queda demostrada.

De ambas contenciones tenemos que $A = vq$ como esto se cumple para cualquier subsucesión convergente vq_{n_k} tenemos entonces que la sucesión $vq_n \to vq$ en $C(X)$ y X es un dendroide suave en v y por tanto, un dendroide suave.

□

Teorema 2.31. Sea X un dendroide suave en p, entonces X es localmente conexo en p.

Demostración. Sean, $p \in X$ un punto de suavidad, V un abierto tal que $p \in V$. Definimos $U = \{x \in X : px \subseteq V\}$. Notemos que $U \subseteq V$, de manera que basta probar que U es abierto y conexo.

Afirmación 2.32. U es abierto y conexo.

Prueba. Para cada $x \in U$, recordemos que $px \subseteq V$, de manera que $U = \bigcup_{x \in U} px$ es arcoconexo.

Supongamos ahora que U no es abierto, es decir, existe $x \in U \setminus int(U)$ así $x \in \overline{X \setminus U}$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\{x_n\}_{n=1}^\infty \to x$ y $x_n \in X \setminus U$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $x_n \notin U$, entonces el arco $px_n \not\subseteq U$, es decir, existe $y_n \in px_n \setminus V$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora, una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty \to y$.

Como X es suave en p, también $x \in U$ y $y_{n_k} \in px_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, en particular $y_{n_k} \in X \setminus V$, con esto $y \in X \setminus V$. Esta contradicción vino de suponer que $U \setminus int(U) \neq \emptyset$, por lo tanto $U = int(U)$, es decir U es abierto. □

De la Afirmación 2.32, encontramos un abierto conexo U tal que $x \in U \subseteq V$. Con esto terminamos la prueba de que X es localmente conexo en p. □

La siguiente sección la dedicaremos a trabajar en dendritas, que son dendroides localmente conexo; revisamos algunas de sus propiedades y con los resultados que probemos, estaremos listos para probar el teorema principal que ocupa este trabajo.

2.2. Dendritas

Las dendritas han sido estudiadas de muchas maneras, se pueden definir de varias formas y de hecho hay muchas equivalencias de estas definiciones. Lo amigable de trabajar con estos objetos topólogicos es que son localmente conexos, no contienen curvas cerradas simples y pueden ser encajadas en $\mathbb{R}^2$ por lo cual visualmente es muy fácil percibir sus propiedades aunque matemáticamente sea elaborado demostrarlo.

Definición 2.33. Sea X un dendroide, diremos que X es una ***dendrita*** si es localmente conexo.

Teorema 2.34. Las dendritas son suaves.

Demostración. Sean, X una dendrita, $p, x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos que convergen a x $(x_n \to x)$. Probaremos que la sucesión de arcos $\{px_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $C(X)$ al arco $px(px_n \to px)$.

Sea $\varepsilon > d(x, p)$, como X es localmente conexo y métrico, en particular es T_3, de manera que existe U, un abierto conexo tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ Como U es conexo, tenemos que $\overline{U}$ es un subcontinuo del dendroide X; por los Lemas 2.17 & 2.18 $\overline{U}$ es arcoconexo y un dendroide.
Por el Teorema 2.25 sabemos que existe un punto $w \in \overline{U}$, que es el primer punto de p a $\overline{U}$, entonces $pw \cap \overline{U} = \{w\}$ y para toda $u \in \overline{U}$ tenemos que $w \in pu$, de hecho $pu = pw \cup wu$.
Como $x_n \to x$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se cumple que $x_n \in U \subseteq \overline{U}$. Probaremos que para toda $n \geq N$ se cumple que $H(px_n, px) < \varepsilon$. Como $px = pw \cup wx$ y $px_n = pw \cup wx_n$ tenemos que para toda $y \in pw$, $y \in px \cap px_n$.
Si $y \notin pw$, como $wx, wx_n \in U \subseteq \overline{U} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$; tenemos que para cualesquiera $y \in wx$ y $z \in wx_n$ se tiene que $d(y, z) < d(y, x) + d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Por tanto $wx \subset N(\varepsilon, wx_n)$ y $wx_n \subset N(\varepsilon, wx)$, con lo cual podemos concluir que $H(wx, wx_n) < \varepsilon$ y de hecho que $H(px, px_n) < \varepsilon$. Para toda $n \in \mathbb{N}$.

Hemos probado entonces que $px_n \to px$ en $C(X)$ por tanto X es suave en el punto p y el teorema queda demostrado

□

Corolario 2.35. Sea X una dendrita, entonces X es suave en todos sus puntos.

Demostración. Notemos que en la prueba del Teorema 2.34, la elección del punto p fue arbitraria. Por tanto probamos que X es suave en todos sus puntos.

□

Corolario 2.36. Sea X un dendroide selectible, $s : C(X) \to X$ una selección y $K \in C(K, X)$, entonces $s(C(K, X))$ es una dendrita.

Demostración. Por el Corolario 1.29, tenemos que para todo continuo X y subcontinuo D, el hiperespacio $C(D, X)$ es un subcontinuo localmente conexo de $C(X)$, por tanto $C(K, X)$ es localmente conexo en $C(X)$. Como s es continua, se tiene que $s(C(K, X))$ es un subcontinuo localmente conexo del dendroide X y por el Teorema 2.18, $s(C(K, X))$, es un dendroide localmente conexo y por tanto es una dendrita.

□

Corolario 2.37. Sea X una dendrita, entonces X es selectible.

Demostración. Por el Corolario 2.34, X es suave en todos sus puntos y por el Teorema 2.27, tenemos que todo dendroide suave es selectible, por tanto X es selectible. □

Con esto terminamos las pruebas que necesitamos sobre dendroides y dendritas y el capítulo. Estamos listos para desarrollar el resultado principal de esta tesis.

Capítulo 3

Dendroides Siameses

En este capítulo vamos a definir un cierto tipo de dendroides al que llamaremos *dendroides siameses*, los resultados que aquí estudiaremos están inspirados en el Ejemplo 2.10 (el abanico armónico). Podemos pensar que el siguiente ejemplo son dos abanicos armónicos siameses, pegados por un punto. Al igual que en el abanico armónico este ejemplo es un dendroide en $\mathbb{R}^2$ y dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\overline{xy}$ denota el segmento de recta que los une.

En el siguiente ejemplo, daremos un dendroide selectible que no es suave.

Ejemplo 3.1. Sean, $z = (0,0), v_1 = (-1,0), v_2 = (1,0), S_0 = \overline{v_1 z}, T_0 = \overline{z v_2}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \overline{v_1(0, \frac{1}{2n})}$ y $T_n = \overline{(0, \frac{1}{2n-1})v_2}$, definimos $X_1 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n$ y $X_2 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T_n$ y $X = X_1 \cup X_2$.(Ver Figura 3.1)

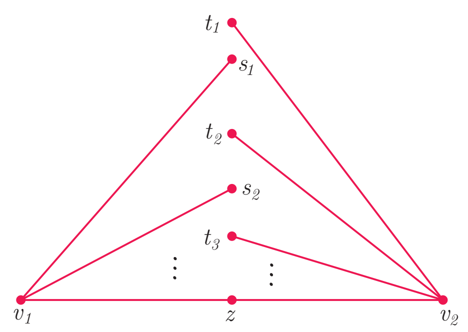


Figura 3.1: Doble abanico.

El lector puede consultar en [11, Ejemplo 4.0.8] que X no es un dendroide suave en z. Lo que haremos ahora será hacer algunas observaciones acerca de los subcontinuos de X para después proceder a dar una selección.

Como X es un dendroide, a partir de este momento dados $a, b \in X$ utilizaremos el hecho de que los arcos son únicos (Teorema 2.16) para denotar por ab el único arco en X que une a los puntos a y b. La siguiente observación no la probaremos, ya que como X es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ se podrá hacer como un ejercicio de Cálculo 3, pero sobretodo no queremos desviarnos del objetivo que es estudiar las selecciones de los dendroides siameses.

Observación. 3.2. *Consideraremos dos tipos de subcontinuos de X, los que contienen al punto z y los que no.*

a) Si $A \in C(X)$ y $z \notin A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^H_\varepsilon(A) \subseteq C(X_i)$, para alguna $i \in \{1, 2\}$.

b) Si $A \in C(X)$ y $z \in A$, existe $x_a \in v_1z$ y $y_a \in zv_2$ tales que $A \cap v_1v_2 = x_ay_a$.

Definición 3.3. Consideremos X al continuo del Ejemplo 3.1 el hiperespacio anclado en z, $C(z, v_1v_2)$ definimos la función $w : C(z, v_1v_2) \to v_1v_2$ como:

$$w(A) = (\|y_a\| - \|x_a\|, 0)$$

Proposición 3.4. La función w está bien definida y es una función continua.

Demostración. Veamos que como $v_1v_2 = \overline{(-1, 0)(1, 0)}$ es un arco, si $A \in C(z, v_1v_2)$ tenemos que $x_a = \text{mín}\, A$ y $y_a = \text{máx}\, A$, entonces $w(A) = (\|\text{mín}\, A\| - \|\text{máx}\, A\|, 0)$ Como en el intervalo $[-1, 1]$ la funciones mín, máx y $\|\ \|$ están bien definidas y son continuas, tenemos que $w(A) \in v_1v_2$, y por tanto w está bien definida y es continua.

□

Ahora estamos listos para definir una selección en el dendroide X.
Como se vio en el Ejemplo 2.10 y los Teoremas 2.27 & 2.28, los dendroides X_1 y X_2 son suaves y selectibles.

Notación 3.5. *Para $i \in \{1, 2\}$ llamemos a $s_i : C(X_i) \to X_i$ la selección que a cada $A \in C(X_i)$ le asocia el primer punto de A con respecto a v_i.*

Teorema 3.6. El continuo X del Ejemplo 3.1 es selectible.

Demostración. Definimos $s : C(X) \to X$ de la siguiente manera:

$$s(A) = \begin{cases} s_i(A) & \text{si} \quad A \in C(X_i) \text{ para } i \in \{1, 2\} \\ \\ w(A \cap v_1v_2) & \text{si} \quad A \in C(z, X) \end{cases}$$

Afirmación 3.7. La función $s : C(X) \to X$ está bien definida y es continua.

Si $A \in C(X_i)$ para alguna $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $s(A) = s_1(A)$ que por el Teorema 2.27 es una selección por tanto está bien definida y es continua.

Si $A \in C(X_i) \cap C(z, X)$ para alguna $i \in \{1, 2\}$.

Veamos el caso para $i = 1$. Como $A \in C(X_1)$, $s(A) = s_1(A)$ que es el primer punto de A con respecto a v_1 y $A \cap v_1v_2 = x_ay_a$ donde $y_a = (0, 0)$.
Como $A \in C(z, X)$, $s(A) = w(A \cap v_1v_2) = (\|y_a\| - \|x_a\|, 0) = (-\|x_a\|, 0) = x_a$.

Notemos que es el primer punto de A con respecto a v_1, es el primer punto de $A \cap v_1v_2$ con respecto a v_1 y como $A \cap v_1v_2 = x_ay_a$, el primer punto es $x_a = s_1(A)$.
El caso para $i = 2$, se prueba de manera análoga.
Por tanto, la función s es continua.
Para ver que s es continua, notemos que por Teorema 2.27 $s_i(A)$ es continua y por la Proposición 3.4 w es continua, por tanto s está bien definida y es continua.

Afirmación 3.8. La función $s : C(X) \to X$ es una selección.

Si $A \in C(X_i)$ para alguna $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $s(A) = s_i(A)$ que por el Teorema 2.27 es una selección.

Si $A \in C(z, X)$, $A \cap v_1v_2 = x_ay_a$ y $s(A) = w(A \cap v_1v_2) = (\|y_a\| - \|x_a\|, 0)$ donde $x_a = (-\|x_a\|, 0)$ y $y_a = (\|y_a\|, 0)$; como $-\|x_a\| \leq \|y_a\| - \|x_a\| \leq \|y_a\|$ tenemos que $s(A) = w(A \cap v_1v_2) = (\|y_a\| - \|x_a\|, 0) \in x_ay_a \subseteq A$. Acabamos de probar que para toda $A \in C(X)$, $s(A) \in A$ y por tanto s es una selección.

Con esto acabamos la prueba del teorema.

□

Como se puede ver en la Figura 3.1, X es la unión de dos selectibles que se pegan por un punto z, por lo que resulta natural preguntarnos:

Pregunta 3.9. *¿Bajo qué condiciones la unión de dos dendroides es selectibles?*

Mas aún ésta pregunta sólo tiene sentido si ambos dendroides son selectibles, pues si $Y = X_1 \cup X_2$ es la unión de dos dendroides por un punto z y $s : C(Y) \to Y$ es una selección, entonces $s|_{C(X_i)}$ es una selección y por tanto X_1 y X_2 son selectibles. De manera que la pregunta que nos haremos es la siguiente:

Pregunta 3.10. *Si X_1 y X_2 son dos dendroides selectibles, entonces ¿Bajo qué circunstancias $X_1 \cup X_2$ es selectible?*

A continuación contestaremos parcialmente estas preguntas, pero primero daremos un par de definiciones para podernos adentrar en el tema.

Definición 3.11. Sea X un dendroide. Decimos que X es un **dendroide siamés** si existen dendroides X_1 y X_2 tales que:

1. $X = X_1 \cup X_2$,
2. $X_1 \cap X_2 = K$ y
3. Para toda $M \in C(X)$, si $M \cap (X_1 \setminus X_2) \neq \emptyset \neq M \cap (X_2 \setminus X_1)$, entonces $K \subset M$

Proposición 3.12. Sea X un dendroide siamés, entonces K es un arco o un punto.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \in (X_1 \setminus X_2)$ y $x_2 \in (X_2 \setminus X_1)$ y sea x_1x_2 el único arco en X que une a los puntos x_1, x_2. Como:

$$x_1x_2 \cap (X_1 \setminus X_2) \neq \emptyset \neq x_1x_2 \cap (X_2 \setminus X_1)$$

entonces, por la Definición 3.11(3), $K \subset x_1x_2$ y así concluimos que K es un arco o un punto.

□

Podemos ver que el Ejemplo 3.1, el dendroide X es un dendroide siamés, donde $X_1 \cap X_2 = K = \{z\}$ es un punto. Antes de contestar parcialmente la Pregunta 3.10 daremos primero una serie de resultados preliminares.

Lema 3.13. Sea X un dendroide, $p, a \in X$ y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Consideramos $\hat{\mu} = \mu|_{C(p,pa)} : C(p,pa) \to [0, \mu(pa)]$, entonces $\hat{\mu}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Primero notemos que tanto $C(p,pa)$ como $[0, \mu(pa)]$ son espacios compactos y métricos, y por tanto son espacios Hausdorff; además como $\hat{\mu}$ es la restricción de la función continua μ, entonces $\hat{\mu}$ es continua. De manera que usando el Teorema 1.4 solo nos resta probar que la función $\hat{\mu}$ es biyectiva.

Sean $pb, pc \in C(p,pa)$ arcos diferentes. Como $pb \neq pc$ y $pb, pc \subseteq pa$, se tiene que $pb \subsetneq pc$ o $pc \subsetneq pb$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $pb \subsetneq pc$ de aquí, por la Definición 1.21 podemos deducir que $\mu(pb) < \mu(pc)$ y así $\hat{\mu}(pb) < \hat{\mu}(pc)$, con lo cual concluimos que $\hat{\mu}$ es una función continua y biyectiva entre continuos y por tanto, un homeomorfismo.

□

Ahora fijaremos toda la notación que necesitamos para contestar parcialmente la Pregunta 3.10.

Notación 3.14. *Si $X = X_1 \cup X_2$ es un dendroide siamés y X_1 y X_2 son selectibles, fijaremos a las selecciones $\mathbf{s_1} : \mathbf{C(X_1)} \to \mathbf{X_1}$ y $\mathbf{s_2} : \mathbf{C(X_2)} \to \mathbf{X_2}$.*
Notemos que como $K = X_1 \cap X_2$, tenemos que $\mathbf{s_1(K)} = \mathbf{k_1}$ y $\mathbf{s_2(K)} = \mathbf{k_2}$.
Consideremos una función de Whitney $\mu : \mathbf{C(X)} \to \mathbf{[0,1]}$ y el hiperespacio anclado en K, $C(K,X)$.
Sea $M \in C(K,X)$ como $K \subseteq M$ y $K = X_1 \cap X_2$ tenemos que

$$K \subseteq M \cap X_1 \neq \emptyset \neq M \cap X_2 \supseteq K$$

llamemos $\mathbf{A} = \mathbf{M} \cap \mathbf{X_1}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{M} \cap \mathbf{X_2}$.
Notemos que $A, B \in C(K,X)$. Además, como $C(K,X)$, es compacto (Teorema 1.24), podemos elegir una sucesión convergente $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(K,X)$ de manera que $M_n \cap X_1 \neq \emptyset \neq M_n \cap X_2$, llamemos $\mathbf{A_n} = \mathbf{M_n} \cap \mathbf{X_1}$ y $\mathbf{B_n} = \mathbf{M_n} \cap \mathbf{X_2}$.
de igual manera notemos que $A_n, B_n \in C(K,X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora que tenemos nuestra notación definida seguiremos probando resultados para poder probar que tipo de dendroides siameses son selectibles.

Definición 3.15. Dado X un dendroide siamés, para $i \in \{1,2\}$ definimos:
$\varphi_i : C(K,X) \to C(X_i)$ como $\varphi_i(M) = M \cap X_i$.

Proposición 3.16. Para $i \in \{1,2\}$ la función φ_i es continua.

Demostración. Utilizando la notación descrita en 3.14. Como $\varphi_1(M) = M \cap X_1 = A$ y $\varphi_2(M) = M \cap X_2 = B$, lo que tenemos que probar es que si $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en $C(K,X)$ tal que $M_n \to M$ entonces las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes en $C(K,X)$ donde además, $A_n \to A$ y $B_n \to B$.

Como $A_n \in C(K,X_1)$ y $C(K,X_1)$ es compacto (Teorema 1.24) existe una subsucesión convergente $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $C \in C(K,X_1)$ que cumple que $A_{n_k} \to C$. Probaremos que $C = A$.

($\subseteq$) Veamos que $C \subseteq M \cap X_1 = A$.
Sea $c \in C$ como $A_{n_k} \to C$ para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $a_{n_k} \in A_{n_k}$ tal que la sucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ cumple que $a_{n_k} \to c$. Como además $A_{n_k} = M_{n_k} \cap X_1$ y $M_{n_k} \to M$ tenemos que $\{a_{n_k}\} \in (M_{n_k} \cap X_1)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por tanto $c \in M \cap X_1 = A$ y la contención queda demostrada.

($\supseteq$) Veamos que $A \subseteq C$.
Sea $a \in A$, si $a \in K$, como $C \in C(K, X_1)$ entonces $a \in C$.
Si $a \notin K$, entonces $a \in X_1 \setminus K$. Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en M_n tal que $p_n \to a$, como $a \in X_1 \setminus K$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se cumple que $p_n \in X_1 \setminus K$ y como $p_n \in M_n \setminus K$, tenemos entonces que $p_n \in (M_n \cap X_1) \setminus K$ de manera que $p_n \in A_n$ y como $p_n \to a$ y $A_{n_k} \to C$, tenemos que $p_{n_k} \to a \in C$ de manera que $A \subseteq C$ y la contensión queda demostrada. Hemos probado que toda subsucesión convergente de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A por tanto $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $A_n \to A$ con lo cual queda probado que φ_1 es continua.

Para probar que φ_2 es continua podemos probar, de igual manera, que $B_n \to B$ y la proposición queda demostrada.

□

Definición 3.17. Dado un dendroide siamés $X = X_1 \cup X_2$ y $\mu : C(K, X) \to [0, 1]$ Una función de Whitney, definimos como:

$$E_1 = \{M \in C(K, X) : \mu(\varphi_1(M)) \geq \mu(\varphi_2(M))\}$$

y

$$E_2 = \{M \in C(K, X) : \mu(\varphi_2(M)) \geq \mu(\varphi_1(M))\}$$

Proposición 3.18. Dado un dendroide siamés X, tenemos que:

I los conjuntos E_1 y E_2 son cerrados;

II $E_1 \cap E_2 = \{M \in C(K, X) : \mu(\varphi_1(M)) = \mu(\varphi_2(M))\}$

III $C(K, X) = E_1 \cup E_2$

Demostración. (I)Como por la Definición 1.21 y la Proposición 3.16, para $i \in \{1, 2\}$, las funciones μ y φ_i son continuas, tenemos que la función

$$\eta = (\mu \circ \varphi_1) - (\mu \circ \varphi_2) : C(K, X) \to [-1, 1]$$

es continua, de manera que $E_1 = \eta^{-1}([0, 1])$ y $E_2 = \eta^{-1}([-1, 0])$ son conjuntos cerrados.
(II) Es inmediata de las definiciones de E_1 y E_2
(III) Probaremos (III) por doble contención.
($\subseteq$) Por la Definición 3.17 tenemos que $E_1 \cup E_2 \subseteq C(K, X)$
($\supseteq$) Sea $M \in C(K, X)$ por tricotomía la función $\eta : C(K, X) \to [-1, 1]$ cumple alguna de las siguientes tres condiciones:

1. $\eta(M) > 0$ en cuyo caso $M \in E_1$

2. $\eta(M) < 0$ en cuyo caso $M \in E_2$
3. $\eta(M) = 0$ en cuyo caso $M \in E_1 \cap E_2$

Por tanto $C(K, X) \subseteq E_1 \cup E_2$. De las dos contenciones tenemos que se cumple (III) y la proposición queda demostrada. □

Definición 3.19. Sea $X = X_1 \cup X_2$ un dendroide siamés, utilizando la notación descrita en 3.14 para $i \in \{1, 2\}$, X_i es selectible y definimos $S_i : C(K, X) \to X_i$ como $S_i = s_i \circ \varphi_i(M)$ que por 3.14 también se puede describir como $S_1(M) = s_1(A) = a$ y $S_2(M) = s_2(B) = b$.

Proposición 3.20. Para $i \in \{1, 2\}$, la función S_i es continua.

Demostración. Por definición $S_i = s_i \circ \varphi_i$ y como por 3.14 s_i es una selección y por la Proposición 3.16 φ_i es continua, tenemos que S_i es continua □

Todavía nos falta definir un par de funciones. Lo hemos hecho todo con mucho cuidado, de manera que cuando queramos definir una selección para cierto tipo de dendroides siameses, podamos demostrar rápidamente que la función que definamos es realmente una selección.

Definición 3.21. Dado un dendroide siamés, $X = X_1 \cup X_2$, para $i \in \{1, 2\}$, X_i es selectible y definimos $\phi_i : C(K, X) \to C(k_i, X_i)$ como

$$\phi_i(M) = s_i(K)S_i(M) = s_i(K)s_i(\varphi_i(M)).$$

Es decir, usando 3.14 y la Definición 3.19, tenemos que $\phi_1(M) = k_1a$ donde k_1a es el arco en X_1 que une a los puntos $s_1(K) = k_1 \in K \subseteq X_1$ $a = s_1(A) = s_1(\varphi_1(M)) = S_1(M)$ y de igual manera, $\phi_2(M) = kb$.

Proposición 3.22. Sea $X = X_1 \cup X_2$ un dendroide siamés. Para $i \in \{1, 2\}$, X_i es selectible y la función $\phi_i : C(K, X) \to C(k_i, X_i)$ es continua.

Demostración.

Caso 3.23. *La función ϕ_1 está bien definida.*

Recordemos que en 3.14 llamamos a $s_1(K) = k_1 \in K \subseteq A$ y en la Definición 3.19 $S_1(M) = a = s_1(A) \in A$ de manera que los puntos $k_1, a \in A \subseteq X_1$ y el arco $k_1a \in C(k_1, X_1)$. Por tanto ϕ_1 está bien definida.

Caso 3.24. *La función ϕ_1 es continua.*

Para ver que ϕ_1 es continua, consideremos $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de puntos en $C(K, X)$ tal que $M_n \to M$. Por el Teorema 1.24, tenemos que $M \in C(K, X)$.
Si denotamos por $a_n = S_1(M_n) = s_1(A_n) \in A_n$, tenemos que $\phi_1(M_n) = k_1a_n$ donde los puntos $a_n, k_1 \in A_n$, y como por la Proposición 3.20, tenemos que S_1 es continua, entonces $S_1(M_n) \to S_1(M)$ que en realidad implica que $a_n \to a$ También observemos que como $K, A_n \in C(K, X_1)$, tenemos que los puntos $k_1, a_n \in s_1(C(K, X_1))$. Por los Corolario 2.36 & 2.34, tenemos que $s_1(C(K, X_1))$ es una dendrita y es suave en todos sus puntos.
Por tanto $\phi_1(M_n) = k_1a_n \to k_1a = \phi_1(M)$ Acabamos de probar que la función ϕ_1 es continua.

La demostración de que ϕ_2 está bien definida y es continua es anánolga al caso anterior.
Así queda demostrada la proposición.

$\square$

Definición 3.25. Dado $X = X_1 \cup X_2$ un dendroide siamés, donde X_1, X_2 son selectibles, μ una función contiuna como en 3.14 y usando las funciones continuas φ_1, φ_2 (Definición 3.16) donde para $M \in C(K, X)$, $\varphi_1(M) = A$ y $\varphi_1(M) = B$ definimos la función $\gamma : C(K, X) \to [0, 1]$ de la siguente manera:

$$\gamma(M) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad M = K \\ \frac{\mu(A)-\mu(B)}{\mu(A)-\mu(K)}\mu(\phi_1(M)) & \text{si} \quad M \in E_1 \setminus K \\ \frac{\mu(B)-\mu(A)}{\mu(B)-\mu(K)}\mu(\phi_2(M)) & \text{si} \quad M \in E_2 \setminus K \end{cases}$$

Lema 3.26. La función $\gamma : C(K, X) \to [0, 1]$ está bien definida y es continua.

Demostración.

Afirmación 3.27. *La función* $\gamma : C(K, X) \to [0, 1]$ *está bien definida y es acotada.*

Para probar la afirmación, primero notemos que por la Proposición 3.22, tenemos que $\mu(\phi_i(M))$ está bien definida y es continua para $i \in \{1, 2\}$.

Si $M \in C(K, X) \setminus \{K\}$, entonces por la Proposición 3.17 (III) tenemos que $M \in E_1 \cup E_2$.
Si $M \in E_1 \setminus \{K\}$, tenemos que $\mu(A) \geq \mu(B)$ y también tenemos que $\mu(A) > \mu(K)$, pues si suponemos por el contrario que $\mu(A) = \mu(K)$, como $A, K \in C(X_1)$, tenemos que $A = K$ y como $K \subset B$ si $B \neq K$, entonces $\mu(B) > \mu(K) = \mu(A)$ lo cual implica que $M \in E_2 \setminus E_1$ y eso es una contradicción.
Por tanto $\mu(A) > \mu(K)$, se cumple que $0 \leq \mu(A) - \mu(B) \leq \mu(A) - \mu(K)$ y

$$0 \leq \frac{\mu(A) - \mu(B)}{\mu(A) - \mu(K)} \leq 1$$

y

$$0 \leq \frac{\mu(A) - \mu(B)}{\mu(A) - \mu(K)}\mu(\phi_1(M)) \leq \mu(\phi_1(M)) = \mu(k_1 a)$$

Por tanto $\gamma|_{E_1 \setminus \{K\}}$ está bien definida y es acotada.

Ahora si $M \in (E_1 \cap E_2) \setminus \{K\}$ tenemos que $\mu(A) - \mu(B) = 0$, entonces, procediendo de igual manera, obtenemos que si $B \in E_2 \setminus \{K\}$, entonces $\mu(B) - \mu(K) > 0$ por lo que $\gamma|_{E_2 \setminus \{K\}}$ está bien definida y es acotada, donde

$$0 \leq \gamma(M) \leq \mu(k_2 b)$$

Finalmente, como $\gamma(K) = 0$, tenemos que para toda $M \in C(K, X)$ se cumple γ es una función bien definida y que $0 \leq \gamma(M) \leq 1$.

Afirmación 3.28. *La función* $\gamma : C(K, X) \to [0, 1]$ *es continua*

Para ver que γ es una función continua, sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de puntos de $C(K,X)$ tal que $M_n \to M$, probaremos que $\gamma(M_n) \to \gamma(M)$. Usando la notación en 3.14 y la Proposición 3.16, tenemos que $A_n = M_n \cap X_1 = \varphi_1(M_n)$, $B_n = M_n \cap X_2 = \varphi_2(M_n)$, donde $A_n \to A$ y $B_n \to B$.

También sabemos que las funciones μ, φ_i y ϕ_i son continuas para $i \in \{1,2\}$ por tanto:

(a) $\gamma|_{E_1 \setminus \{K\}} = \frac{\mu(A)-\mu(B)}{\mu(A)-\mu(K)}\mu(\phi_1(M))$, es continua;

(b) $\gamma|_{E_2 \setminus \{K\}} = \frac{\mu(B)-\mu(A)}{\mu(B)-\mu(K)}\mu(\phi_2(M))$, es continua;

(c) $\gamma|_{(E_1 \cap E_2) \setminus \{K\}} = \frac{\mu(A)-\mu(B)}{\mu(A)-\mu(K)}\mu(\phi_1(M)) = 0 = \frac{\mu(B)-\mu(A)}{\mu(B)-\mu(K)}\mu(\phi_2(M))$ es continua y

(d) $\gamma|_{\{K\}} = 0$, es continua.

Ahora sólo nos falta probar que si $M_n \in E_i \setminus K$ y $M = K$, entonces $\gamma(M_n) \to \gamma(M) = \gamma(K) = 0$.
Notemos primero que como $M_n \to M = K$ y como $K \subseteq A_n \subseteq M_n$ y $K \subseteq B_n \subseteq M_n$, entonces $A_n \to K$, y $B_n \to K$. Como las funciones s_1 y s_2 son continuas, tenemos que $\phi_1(M_n) = s_1(K)s_1(A_n) \to s_1(K)s_1(K) = \{k_1\}$ y por tanto $\mu(\phi_1(M_n)) \to \mu(\{k_1\}) = 0$, de igual manera también ocurre que $\mu(\phi_2(M_n)) \to \mu(\{k_2\}) = 0$ de manera que $\mu(\phi_i(M_n)) \to \mu(\{k_i\}) = 0$. Notemos también que si $M_n \in E_1 \setminus K$, entonces $0 \leq \frac{\mu(A)-\mu(B)}{\mu(A)-\mu(K)}, \leq 1$ y de igual manera si $M_n \in E_2 \setminus K$, entonces $0 \leq \frac{\mu(B)-\mu(A)}{\mu(B)-\mu(K)} \leq 1$.
De todo lo anterior podemos concluir que si $M_n \in (E_i \setminus K)$, entonces

$$0 \cdot \phi_1(M_n) \leq \frac{\mu(A)-\mu(B)}{\mu(A)-\mu(K)}\mu(\phi_1(M_n)) \leq 1 \cdot \mu(\phi_1(M_n)) = \mu(k_1a_n)$$

o

$$0 \cdot \phi_2(M_n) \leq \frac{\mu(B)-\mu(A)}{\mu(A)-\mu(K)}\mu(\phi_2(M_n)) \leq 1 \cdot \mu(\phi_2(M_n)) = \mu(k_2b_n)$$

Por lo que $0 \leq \gamma(M_n) \leq \mu(\phi_i(M_n))$. Como $\mu(\phi_i(M_n)) \to \mu(\{k_i\}) = 0$ tenemos que $\gamma(M_n) \to 0 = \gamma(K) = \gamma(M)$. Por tanto la función γ es continua y el lema queda demostrado. $\square$

Ahora ya estamos listos para probar que tipo de dendroides siameses admiten selecciones.

Definición 3.29. Sea X un dendroide siamés, decimos que X es un **dendroide siamés fuerte** si cumple que para $i \in \{1,2\}$ existen selecciones $s_i : C(X_i) \to X_i$ tales que $s_1|_{C(K)} = s_2|_{C(K)}$.

Definición 3.30. Sea $X = X_1 \cup X_2$ un dendroide siamés fuerte, y $s : C(X_1) \cup C(X_2) \to X$ dada por $s(M) = s_i(M)$ si $M \in C(X_i)$

Proposición 3.31. Si $X = X_1 \cup X_2$ es un dendroide siamés fuerte, entonces la función s de la Definición 3.30 es continua y $s(M) \in M$ para toda $M \in C(X_1) \cup C(X_2)$.

Demostración. Sabemos que si $M \in C(X_1) \cap C(X_2)$, entonces $M \subset X_1 \cap X_2 = K$, por tanto $M \in C(K)$. Por la Definición 3.29, tenemos que $s_1|_{C(K)} = s_2|_{C(K)}$ por lo que s está bien definida y es continua. Además para $i \in \{1, 2\}$ y $M \in C(X_i)$ se tiene que $s(M) = s_i(M) \in M$, con esto queda demostrada la proposición □

Utilizaremos la notación que hemos estado desarrollando todo el capítulo. De manera que dado $M \in C(K, X)$, y tenemos que:

1. $s(K) = s_1(K) = s_2(K) = k$,
2. $\varphi_1(M) = A \cap X_1$ y $\varphi_2(M) = B \cap X_2$
3. $a = s_1(A) = s_1(\varphi_1(M))$ y $b = s_2(B) = s_2(\varphi_1(M))$
4. $g : C(k, ka) \to ka$ definida como $g(kz) = z$ es un homeomorfismo (Lema 2.19)
5. $\mu|_{C(k,ka)} = \hat{\mu} : C(k, ka) \to [0, \mu(ka)]$ es un homeomorfismo (Lema 3.13)
6. $S_i(M) = s_i \circ \varphi_i(M)$ es decir $S_1(M) = s_1(A) = a$ y $S_2(M) = s_2(B) = b$, es continua (Observación 3.19)
7. $\phi_i(M) = s_i(K)S_i(M) = s_i(K)s_i(\varphi_i(M))$ es decir $\phi_1(M) = ka$ y $\phi_2(M) = kb$ es continua (Proposición 3.22)

Definición 3.32. Sea X un dendroide siamés fuerte. Definimos $\psi_i : E_i \to X$ como
$$\psi_i = g \circ [(\hat{\mu}^{-1}) \circ (\gamma)]$$

Entonces
$$\psi_1(M) = g(\hat{\mu}^{-1}(\gamma(M))) = z_a$$
y
$$\psi_2(M) = g(\hat{\mu}^{-1}(\gamma(M))) = z_b.$$

Observación. 3.33. *Para $i \in \{1, 2\}$, la funcion ψ_i está bien definida y es continua*

Demostración. Esta observación se puede explicar claramente porque $0 \leq \gamma(M) \leq \mu(ka)$, y como $\hat{\mu}$ es un homeomorfismo, entonces $\hat{\mu}^{-1}(\gamma(M)) \in C(k, ka)$, es el único arco en $C(k, ka)$ que su medida es $\gamma(M)$ y este arco tiene como extremos los puntos k y z_a de manera que lo llamamos kz_a. Si a este arco le aplicamos el homeomorfismo g, obtenemos que $g(kz_a) = z_a$.
Haciendo un análisis similar, se cumple lo mismo para el arco kb.

□

Estamos utilizando que X es un dendroide siamés fuerte, en el hecho de que $s_1(K) = k = s_2(K)$ y por tanto $\phi_1(M) = ka$ y $\phi_2(M) = kb$
Otra manera de explicarlo es la siguiente: sabemos por construcción que ψ_1 y ψ_2 es la composición de funciones continuas, en particular $\hat{\mu}^{-1}$ y g son homeomorfismos. Así que el punto z_a es el único punto en el arco ka tal que $\hat{\mu}(kz_a) = \gamma(M)$ si $M \in E_1$.
De igual manera z_b es el único punto en el arco kb tal que $\hat{\mu}(kz_b) = \gamma(M)$ si $M \in E_2$.

Definición 3.34. Sea $X = X_1 \cup X_2$ un dendroide siamés fuerte, definimos $\psi : C(K, X) \to X$, como $\psi(M) = \psi_i(M)$ si $M \in E_i$.

Lema 3.35. La función ψ de la Definición 3.34 es una selección.

Demostración. Por la Observación 3.33, tenemos que para $i \in \{1, 2\}$, la función $\psi_i|_{E_i}$ está bien definida y es continua. Además para $M \in E_1 \cap E_2$, se tiene que $\gamma(M) = 0$ y el único punto en kb o en ka tal que $\hat{\mu}(kb) = 0$ o $\hat{\mu}(ka) = 0$ es el punto k y por tanto, $\psi_i|_{E_1 \cap E_2} = k$
Nos resta probar que ψ es una selección.
Si $M \in E_i$, entonces $s_1(A) \in A \in C(M)$, $s_2(B) \in B \in C(M)$ y $k \in K \in C(M)$ por tanto los arcos $ak, bk \subset M$ de manera que como $\psi_1(M) = z_a \in ak \subseteq M$ y $\psi_2(M) = z_b \subseteq bk \in M$, tenemos que $\psi(M) \in M$. Por tanto ψ es una selección $\square$

Estamos listos para definir una función $\sigma : C(X) \to X$, y probaremos que la función σ es una selección. Utilizaremos toda la notación de las funciones que hemos definido.

Definición 3.36. Sea X un dendroide siamés fuerte y $X = X_1 \cup X_2$, definimos una función $\sigma : C(X) \to X$ de la siguiente manera:

$$\sigma(M) = \begin{cases} s(M) & \text{si} \quad M \in C(X_1) \cup C(X_2); \\ \\ \psi(M) & \text{si} \quad M \in C(K, X) \end{cases}$$

Lema 3.37. La función σ de la Definición 3.36 está bien definida y es continua.

Demostración. Recordemos que $X = X_1 \cup X_2$ es un dendroide siamés fuerte, donde $X_1 \cap X_2 = K$, si $M \in C(X)$ es tal que $M \cap (X_1 \setminus X_2) \neq \emptyset \neq M \cap (X_2 \setminus X_1)$, entonces $K \subseteq M$ y $M \in C(K, X)$ y K es un arco o un punto.

Veamos que $C(X) = C(X_1) \cup C(X_2) \cup C(K, X)$.

($\supseteq$) Está contención es inmediata, pues $X_1, X_2 \subseteq X$, de hecho $X_1, X_2 \in C(X)$ y por tanto $C(X_1), C(X_2) \subset C(X)$ y por la Definición 1.23 $C(K, X) \subset C(X)$.

($\subseteq$) Para probar esta contención, sea $M \in C(X)$, si $M \subset X_1$, entonces $M \in C(X_1)$ de igual manera, si $M \subset X_2$, entonces $M \in C(X_2)$.
Por último, por la Definición 3.11 (3),tenemos que si $M \cap (X_1 \setminus X_2) \neq \emptyset \neq M \cap (X_2 \setminus X_1)$, entonces, $K \in M$; lo cual implica que $M \in C(K, X)$.
Con esto queda probada la igualdad.

Ahora, sabemos que s y ψ son funciones continuas. Solo nos falta ver que coinciden en las intersecciones.S Sea $M \in (C(X_1) \cup C(X_2)) \cap C(K, X)$
Si $M \in (C(X_1) \cap C(X_2) \cap E_i$ para alguna $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $M \in C(K) \cap C(K, X)$, por tanto $K \subseteq M \subseteq K$, que implica que $M = K$. En este caso $s(M) = s(K) = s_1(K) = s_2(K) = k$ y por el Lema 3.33, tenemos que $\psi(M) = \psi(K) = \psi_1(K) = \psi_2(K) = k$.

Por último $\sigma|_{E_i} = \psi_i$ y por ahora por la Observación 3.33, las funciones ψ_i, están bien definidas y son continuas. Por tanto σ está bien definida y es continua.
Con esto terminamos la prueba del Lema.

□

Teorema 3.38. Sea X un dendroide siamés fuerte, entonces X es selectible.

Demostración. Por la Definición 3.36 y el Lema 3.37, tenemos una función continua $\sigma : C(X) \to X$. Veamos que para toda $M \in C(X)$, $\sigma(M) \in M$.
Si $M \in C(X_i)$, entonces $\sigma(M) = s_i(M) \in M$.

□

Hemos probado el teorema más importante de la tesis, en el siguiente capítulo, daremos algunas aplicaciones a este teorema y también mostraremos porque las hipótesis que utilizamos son tan importantes, lo que nos llevará a dejar un par de preguntas abiertas para futuras investigaciones.

Capítulo 4

Aplicaciones, Ejemplos y Contraejemplos

En este capítulo veremos que gracias a la Definición 3.36, el Lema 3.37, y el Teorema 3.38; tenemos que los Dendroides siameses fuertes son selectibles. Esto nos permite dar el siguiente teorema, que es una aplicación del Teorema 3.38.

Teorema 4.1. Sea X, la unión de dos dendroides selectibles X_1 y X_2 por un punto k. Entonces X es selectible.

Demostración: Como $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 \cap X_2 = \{k\}$. Como X_i es selectible y para cualquier selección $s_i : C(X_i) \to X_i$, y cualquier punto $\{x\} \in F_1(X)$ se tiene que $s_i(\{x\}) = x$, tenemos que $s_1|_{C(\{k\})} = s_2|_{C(\{k\})} = \{k\}$. De manera que X cumple con ser un dendroide siamés fuerte y por el Teorema 3.38, X es selectible.

□

Teorema 4.2. Sea $n \in \mathbb{N}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dendroides selectibles, $X_i = Y_1 \cup \ldots \cup Y_i$ donde $Y_1 \cap Y_2 = \{k_1\}$, y en general $X_i \cap Y_{i+1} = \{k_i\}$, entonces X_i es selectible para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.(Ver Figura 4.1)

Demostración. Haremos la prueba por inducción.

Para $n = 1$, $X_1 = Y_1$ que por hipótesis de inducción es selectible.

Supongamos que X_n es selectible. Probaremos que X_{n+1} también lo es. Como X_n, Y_{n+1} son selectibles donde $X_{n+1} = X_n \cup Y_{n+1}$ y $X_n \cap Y_{n+1} = \{k_n\}$, tenemos por el Teorema 4.1 que X_{n+1} es selectible y el teorema queda demostrado.

□

El Teorema anterior, es una fuente infinita de dendroides selectibles, infinita en términos de homeomorfismos, pues cada vez que pegamos dos dendroides selectibles por un punto, el dendroide que obtenemos no es homeomorfo a ninguno de sus uniendos y es un dendroide selectible.

En particular, este teorema nos permite demostrar muy rápidamente que el dendroide del Ejemplo 3.1 es selectible. Y además de que nos permite dar familias infinitas de dendroides selectibles. Reduces las pruebas de ejemplos que en los años 70's tomaban muchas páginas para su demostración. Para los

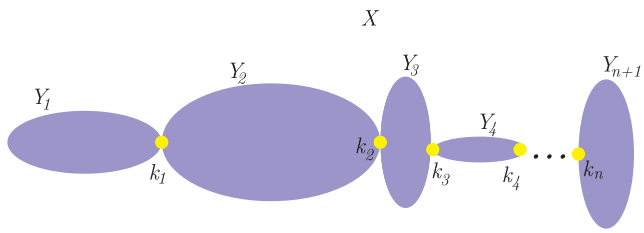


Figura 4.1: Ilustración del Teorema 4.2

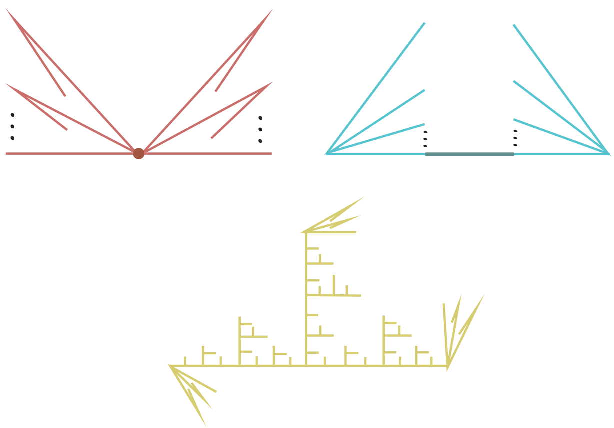


Figura 4.2: Dendroides que son selectibles gracias al Teorema 4.2

conocedores, este teorema generaliza la famosa técnica del vagón del metro. A continuación daremos algunas figuras.(Ver Figura 4.2)

Ahora veremos un par de ejemplos que nos permiten ilustrar por qué las hipótesis que hemos utilizado en la Definición 3.29 y el Teorema 3.38 son tan importantes y como no es posible debilitarlas. No haremos todas las pruebas estrictamente formales, pero lo explicaremos para que se puedan entender los argumentos, de la mejor manera posible.

Ejemplo 4.3. *Consideremos en* $\mathbb{R}^2$ *los puntos* $s_0 = (0,0), t_0 = (1,0)$ *y para cada*

$n \in \mathbb{N}$, definimos $t_n = (1, \frac{1}{n})$ y $s_n = (0, \frac{-1}{n})$. Definimos X como el dendroide

$$X = s_0t_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(s_0t_n \cup t_0s_n)$$

Entonces X no es selectible(Ver Figura 4.3).

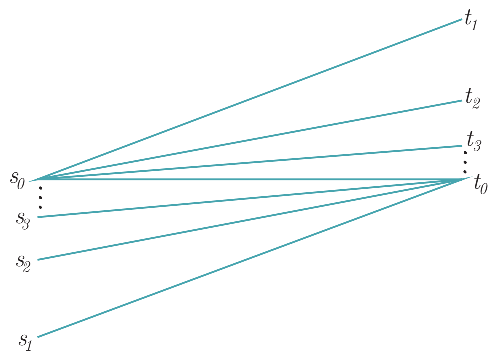


Figura 4.3: Doble abanico no selectible.

Demostración. Consideremos

$$X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(s_0t_n) \text{ y } X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(t_0s_n)$$

Observemos que $X_1 \cap X_2 = K = s_0t_0$ es un arco. Además, si $M \in C(X)$ cumple que

$$M \cap (X_1 \setminus X_2) \neq \emptyset \neq M \cap (X_2 \setminus X_1)$$

Tenemos entonces, que existen $m, l \in \mathbb{N}$ tal que

$$u \in M \cap (s_0t_m \setminus \{s_0\}) \neq \emptyset \text{ y } v \in M \cap (t_0s_l \setminus \{t_0\}) \neq \emptyset$$

De manera que $K \subseteq M$ y $M \in C(K, X)$ por tanto X es un dendroide siamés.

Veamos ahora que X no es selectible. Supongamos que existe una selección $s : C(X) \to X$, esto querría decir que $s_1 = s|_{C(X_1)}$ y $s_2 = s|_{C(X_2)}$ son seleccione. Notemos que tanto X_1 como X_2 son homeomorfos al Abanico armónico del Ejemplo 2.10, de manera que por la proposición 2.11 tenemos que

$$s(K) = s_1(s_0t_0) = s_0 \text{ y } s(K) = s_2(t_0s_0) = t_0$$

lo cual querría decir que en el arco $K = s_0t_0$, la selección s no está definida y eso es una contradicción. La contradicción nace de suponer que X es selectible.

Por tanto X no es selectible y eso muestra que no todos los dendroides siameses son selectibles. $\square$

Del Teorema 4.2 podemos que cuando la unión de dos dendroides siameses es por un punto, lo que obtenemos es un dendroide selectible, pero en el Ejemplo 4.3 podemos ver que cuando la unión de dos dendroides selectibles es por un arco, esta unión no necesariamente nos da un dendroide selectible.

A continuación daremos otro ejemplo de un dendroide siamés que es la unión de dos dendroides selectibles, que se intersectan en un arco, pero no es selectible. Este dendroide tiene la particularidad de ser de tipo N generalizado, y existen retracciones tanto de $2^X \to X$ como de $C(X) \to X$, pero no una selección. Además de ser un dendroide aplanable, aunque a continuación lo describiremos en $\mathbb{R}^3$, también haremos un dibujo en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.4. *En $\mathbb{R}^3$, consideremos al punto $v = (0,0,0)$ y los arcos*

$$A_0 = \overline{v(1,0,0)}, B_0 = \overline{v(0,1,0)} \text{ y } C_0 = \overline{v(-1,0,0)}$$

Llamemos T_0 al triodo formado por la unión de los arcos $A_0 \cup B_0 \cup C_0$.

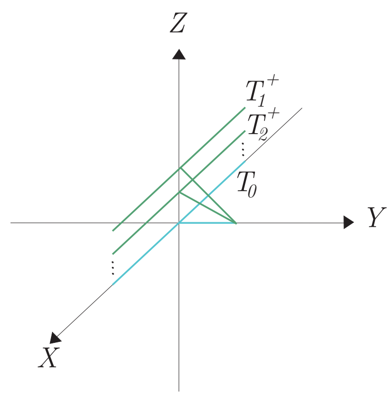
Para $n \in \mathbb{N}$ denotamos a los puntos $v_n = (0,0,\frac{1}{n})$ y $z_n = (0,0,\frac{-1}{n})$. Notemos que $v_n \to v$ y $z_n \to v$.

Denotemos a los arcos

$$A_n^+ = \overline{v_n\left(1,0,\frac{1}{n}\right)}, B_n^+ = \overline{v_n\,(0,1,0)} \text{ y } C_n^+ = \overline{v_n\left(-1,0,\frac{1}{n}\right)}$$

y al triodo T_n^+ como la unión de estos arcos. Es decir

$$T_n^+ = A_n^+ \cup B_n^+ \cup C_n^+.$$



Denotamos a los arcos

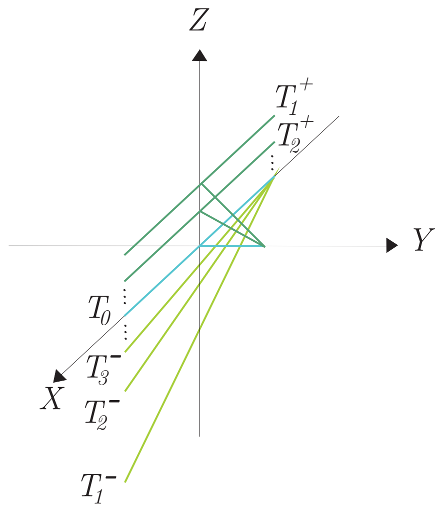
$$A_n^- = \overline{(-1,0,0)\left(1,0,\frac{-1}{n}\right)}$$

y a Y como la unión de estos arcos. Es decir

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (T_0 \cup A_n^-)$$

Sea

$$X = T_0 \cup Y \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (T_n^+)$$



Notemos que las sucesiones de arcos $A_n^+ \to A_0, B_n^+ \to B_0$ y $C_n^+, A_n^- \to A_0 \cup C_0$.

En [7, Theorem] y [3, Example] se prueba que X no es selectible.

El Ejemplo 4.4 nos da dos dendroides selectibles, $T_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (T_n^+)$ y Y que se unen por un arco $A_0 \cup C_0$, pero que la unión X, no es selectible. Más aún, este dendroide en realidad, no es un dendroide siamés, pues no cumple con la propiedad de que si

$$M \cap \left(T_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (T_n^+) \right) \setminus (A_0 \cup C_0) \neq \emptyset \neq (M \cap Y) \setminus (A_0 \cup C_0)$$

entonces $(A_0 \cup C_0) \subset M$ como es el caso de $M = \overline{(0,0,1)v} \cup C_0 \cup \overline{z_1(-1,0,0)}$.

Por último dibujaremos un ejemplo de un dendroide desarrollado por Mackowiak. Este ejemplo nos muestra un dendroide siamés que no sabemos si es o no selectible. Aunque Mackowiak asegura que es selectible, hemos encontrado un error en la prueba. En este momento no describiremos ni el error, ni la construcción del dendroide. Si este dendroide, no es selectible, lo que obtenemos es una unión de dos dendroides selectibles, por un arco, cuya unión no es selectible.

Si este dendroide es selectible, tenemos un dendroide no siamés que si es selectible. Hasta ahora todos los ejemplos nos hacen ver que no podemos debilitar las hipótesis del Teorema 3.38.

Ejemplo 4.5. *Sean* $p = (0,0), a = (1,0), b = (0,1), c = (-1,0), d = (0,-1)$ *y consideremos* P *como la unión de los arcos* ap, bp, cp, dp*, es decir,*

$$P = ap \cup bp \cup cp \cup dp$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$*, definimos*

$$p_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right), b_n = \left(0, \frac{n+1}{n}\right), p'_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$$

$$q_n = -p_n, d_n = -b_n, q'_n = -p'_n, c_n = -a_n$$

Por último, consideremos:

$$X = P \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (cp_n \cup p_nb_n \cup b_np'_n \cup p'_na_n \cup aq_n \cup q_nd_n \cup d_nq'_n \cup q'_nc_n)\right]$$

(Ver Figura 4.4)

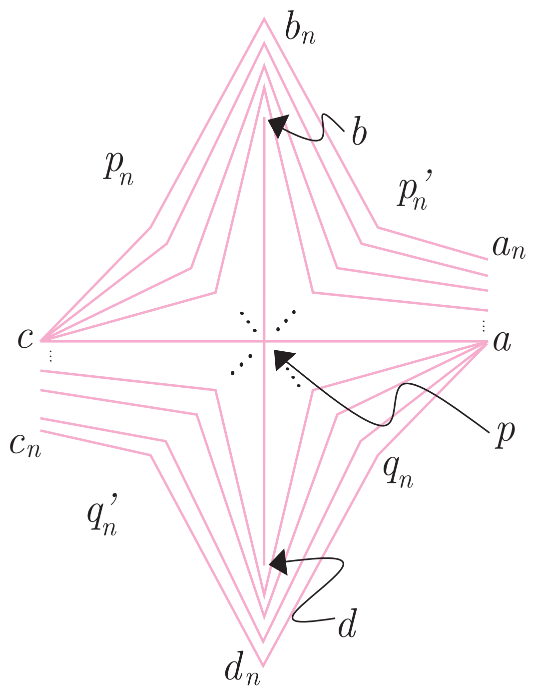


Figura 4.4: Dendroide del Ejemplo 4.5

Con esto terminamos este trabajo, que nos da un teorema que nos permite trabajar y crear una infinidad de dendroides selectibles y nos muestra que este método de todas maneras es limitado y todavía hay mucho por investigar en esta dirección.

Bibliografía

[1] J.J. Charatonik. *Contractibility and continuous selections* 1980.

[2] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos.* 2006.

[3] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos.* 1998.

[4] A. Illanes, S.B. Nadler *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances.* 2010/2011

[5] M. Macho Stadler *Topología Algebráica y Homotopía* 1999

[6] T. Mackowiak. *Continuous Selections for* $C(X)$. 1978.

[7] T. Mackowiak. *Continuous Selections for* $C(X)$. 1985.

[8] V. Martínez de la Vega Mansilla. *El hiperespacio de continuos con la topología producto.* 1998.

[9] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[10] S.B. Nadler. *Hyperspaces of sets. A text with research questions.* 2006.

[11] E.Y. Valeriano Reyes. *Selecciones en Continuos y sus Propiedades.* 2019.

[12] J.E. Vega Acevedo *Hiperespacios de continuos orilla.* 2022.

[13] S. Willard. *General topology* 1970.