



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

"ZARAGOZA"

DISIPACIÓN VISCOELÁSTICA EN EL FLUJO PULSÁTIL DE UN LÍQUIDO COMPLEJO: MECANISMOS INERCIALES Y DEL SOLVENTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERA QUÍMICA

PRESENTA:

ELIZABETH HERNÁNDEZ RIVERA

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORRES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M. en C. LUIS ANTONIO RAMIREZ TORRES

CIUDAD DE MÉXICO, 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> << Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- A la Unidad de Investigación en Bio-Ingeniería (UI-FESZ-110323)
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- A la línea de investigación en:
Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415)
Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619)
por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de Ingeniería Química de la Facultad de Estudios Superiores (FES) Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.

DEDICATORIAS

A mis padres, por darme su amor, acompañarme, guiarme, apoyarme y respaldarme a cada paso desde el segundo uno en la búsqueda de ser una mejor persona, una profesionista y motivarme todos los días para seguir preparándome. Gracias por no soltarme.

A mis hermanos, por darme su apoyo moral las noches de desvelo, alentarme a cada paso y demostrando su apoyo creyendo en mí.

A mi director de tesis por el tiempo, dedicación y esfuerzo puesto en este trabajo para poder estar en este punto, que además de darme lecciones académicas ha sido una guía y un amigo acompañándome y apoyándome para mi crecimiento académico y personal.

A mis amigos y familia, que han estado presentes en cada paso de mi crecimiento y me han demostrado todo su apoyo y cariño incondicional alentándome siempre a seguir hacia adelante.

Contenido

CAPÍTULO I.....	11
INTRODUCCIÓN.....	11
1.1 Definiciones básicas.....	12
1.3 Aplicaciones.....	13
1.4 Relevancia.....	14
1.5 Estado del arte.....	14
1.6 Hipótesis.....	15
CAPÍTULO II.....	17
MODELADO MATEMÁTICO.....	17
CONFIGURACIÓN 1.....	18
2.1 Deducción de las funciones de transferencia para el flujo pulsátil de un fluido viscoelástico en una geometría capilar.....	19
2.2 Balance de masa sin reacción química.....	19
2.3 Ecuación de movimiento con mecanismos inerciales.....	19
2.4 Perfil de velocidades.....	20
2.4.1 Ecuación diferencial homogénea del perfil de velocidades.....	20
2.4.2 Solución particular del perfil de velocidades.....	21
2.4.3 Condiciones de frontera.....	21
2.5 Flujo volumétrico con transformada de Fourier.....	23
2.6 Parámetro Beta.....	25
2.7.1 Función de transferencia compleja para una corona circular.....	27
2.7.2 Condiciones de frontera para la corona circular.....	27
2.7.3 Flujo volumetrico en una corona circular con mecanismos inerciales.....	29
CAPÍTULO III.....	31
SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	31
3.1 Variables adimensionales.....	32
3.2 Números adimensionales.....	32
3.2.1 Capilar.....	32
3.2.2 Corona circular.....	32
3.4 Función de transferencia: capilar.....	34
3.4 Función de transferencia: corona circular.....	41

CAPÍTULO IV	48
CONCLUSIONES	48
4.1 Aportación al conocimiento.....	49
4.2 Trabajo futuro	50
BIBLIOGRAFÍA	51

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Ilustra la función de transferencia de la velocidad vs gradiente de presión. Nótese que depende del operador fluidez, del parámetro Alpha y de un cociente de funciones de Bessel, lo que implica una resonancia en el sistema.

Figura 2.2 Ilustra la función de transferencia de la velocidad vs gradiente de presión. Nótese que depende del operador fluidez, del parámetro Alpha y de un cociente de funciones de Bessel, lo que implica una resonancia en el sistema.

Figura 2.3 Ilustra la función de transferencia de la velocidad vs gradiente de presión. Nótese que depende del operador fluidez, del parámetro Alpha y de un cociente de funciones de Bessel, lo que implica una resonancia en el sistema.

Figura 3.1 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.2 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.3 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.4 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.5 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.6 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.7 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.8 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.9 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.10 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.11 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Figura 3.12 Se presenta un resumen gráfico de los principales atributos de este trabajo.

NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS

a	Radio del tubo [m]
G_0	Modulo elástico de corte [Pa]
L	Longitud característica axial [m]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]
r	Coordenada radial [m]
R_1	Radio menor de la corona circular [m]
R_2	Radio mayor de la corona circular [m]
T_F	Función de transferencia compleja [1/Pas]
t	Tiempo de proceso [s]
z	Coordenada axial [m]

Números adimensionales

De	Deborah [1]
De_J	Deborah de Jeffreys [1]
R	Razón geométrica [1]

Letras griegas

ω	Frecuencia [rad/s]
η_s	Viscosidad del solvente [Pas]
η_p	Viscosidad del polímero [Pas]
η	Viscosidad total [Pas]
λ_0	Tiempo viscoelástico de Maxwell [s]
λ_J	Tiempo de retardo de Jeffreys [s]
ρ_s	Densidad del solvente [Kg/m ³]
ρ_p	Densidad del polímero [Kg/m ³]
ρ	Densidad total solvente + polímero [Kg/m ³]
θ	Coordenada angular [1]

Vectores, diadas y tensores

σ	Tensor de esfuerzos [Pa]
V	Tensor de velocidad [m/s]
γ	Tensor de deformación [1]

Operadores diferenciales y otros símbolos

$O\phi$	Operador fluidez [1/Pas]
$O\eta$	Operador viscosidad [Pas]
Dt	Derivada parcial [1/s]

RESUMEN

En este trabajo de investigación a nivel de licenciatura, se estudia el efecto del gradiente de presión transitorio sobre el flujo pulsátil de un líquido de Jeffreys. Este, se compone de una parte asociada al solvente y una al polímero. Esta ecuación constitutiva posee tres propiedades materiales: (i) Viscosidad, (ii) Tiempo de relajación de Maxwell y (iii) Tiempo de retardo del material. El sistema consiste en dos geometrías, la primera es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y la segunda es una corona circular de radios $r = R_1$ y R_2 de longitud $z = L$. Asumiendo estado no-estacionario y que los mecanismos inerciales son importantes, se obtiene una ecuación diferencial parcial lineal que describe los mecanismos: (i) inerciales, (ii) viscosos, (iii) elásticos, (iv) solvente y (v) del polímero. Asumiendo que la velocidad es máxima en el centro del tubo y que en la pared es cero, debido a que hay adherencia del líquido al sólido por fricción. Aplicando el formalismo de Fourier, en la ecuación diferencial parcial, se obtiene una ecuación algebraica en términos de la frecuencia y una diferencial ordinaria con respecto a la coordenada radial. La solución de esta expresión se expresa como la suma de dos contribuciones asociadas a una combinación de funciones de Bessel y la otra a un término no-homogéneo. Aplicando las condiciones de frontera, se obtiene el perfil de concentraciones particular en términos de una función de transferencia que depende de la frecuencia y de la coordenada radial r . El promedio de esta función de transferencia, permite deducir una función de transferencia para el flujo volumétrico. Aplicando variables adimensionales se obtienen números de Deborah asociados a la inercia y a los mecanismos del solvente. Los códigos se prepararon, en el programa Mathematica y se hacen variar los números adimensionales con el fin de obtener la respuesta dinámica del material.

Palabras claves:

Flujo pulsátil, Transformada integral de Fourier, Soluciones analíticas, Fluido Complejo.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Definiciones básicas

En la historia de la reología, uno de los hechos fundamentales es analizar las fuerzas que deforman continua e irreversiblemente los sistemas de estudio, i.e. los fluidos (Referencia). Los resultados más fundamentales que se analizan son: (i) Adelgazamiento, (ii) Engrosamiento, (iii) Tixotropía, (iv) Reopexia, (v) Esfuerzo de cedencia, (vi) Primera diferencia de Esfuerzos Normales, (vii) Segunda diferencia de Esfuerzos Normales y (viii) Flujo bandeado (Referencia). La primera aproximación que se hace, es la más simple que existe al suponer que la única constante que describe la naturaleza material del fluido es la viscosidad (Referencia). Este tipo de Fluidos se conocen como de tipo Newtoniano.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (1)$$

En la Ec.(1) la propiedad material μ es la viscosidad cortante y depende de la temperatura. Si esta, permanece constante, la viscosidad no cambia. Las unidades de esta ecuación son: $\boldsymbol{\sigma}$ [Pa], \mathbf{D} [1/s] y μ [Pa s]. La idea de la reología es modificar la Ec. (1) con el fin de incluir otros mecanismos los cuales, surgen de manera natural con el estudio experimental de estos (elasticidad, plasticidad, viscoelasticidad, etc)(Ref. X). Una de las primeras aproximaciones es tomar en cuenta la resistencia que involucra la transferencia de momento entre dos fases. La primera de ellas, puede ser la viscosa la cual se denomina disipativa y la otra asociada a la elasticidad del material (almacenamiento), es el modelo de Maxwell, el cual proviene de una ecuación conocida en la biología matemática denominada como presa-depredador, que habla de la competencia entre dos especies (Ref. X). Esta ecuación se puede expresar como:

$$\frac{dx}{dt} = kx \cdot y = kx \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \quad (2)$$

Al realizar un cambio de variable

$$z = \frac{1}{x} \quad (3)$$

Al sustituir el cambio de variable (Ec.3) en la Ec. (2) y realizando el álgebra pertinente:

$$\frac{dz}{dt} = k(z_0 - z) \quad (4)$$

La Ec. (4) es base para muchas ecuaciones de reología y es punto de partida en el modelo de Maxwell, el cual formalmente se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = 2\eta_0\mathbf{D} \quad (5)$$

En la Ec. (5), λ_0 [s] es el tiempo de relajación de Maxwell, en el sistema. El tiempo de relajación esta ligado con la viscosidad a través del modulo elástico de corte, como es definido a continuación:

$$G_0 = \frac{\eta_0}{\lambda_0} \quad (6)$$

Este módulo está relacionado con la capacidad elástica del material en corte.

1.2 Efecto de la frecuencia en sistemas biológicos

El efecto de la frecuencia en los sistemas es sumamente importante porque las frecuencias de proceso se empatan con las frecuencias naturales del material y se produce un efecto llamado resonancia (**Krylov y Osipova 2023**). La resonancia se puede interpretar como la energía liberada por un sistema mecánico debido a su energía vibrátil (**Goldstein**). La resonancia se ha estudiado en fluidos complejos especialmente los relacionados al sistema circulatorio humano y su correlación con diferentes patologías (**Herrera-Valencia et al. 2019**). En transferencia de momento y reología se ha estudiado el flujo pulsátil sanguíneo mediante un gradiente de presión que cambia con el tiempo (**Herrera-Valencia et al. 2022**). La primera aproximación es suponer que este es oscilatorio y la segunda es suponer que es una función probabilística que evoluciona en el tiempo, i.e. estocástica (**Herrera-Valencia et al. 2019, 2022**). Un fluido que presenta mecanismos viscosos e inerciales deformado continua e irreversiblemente no muestra las clásicas curvas resonantes, i.e., todos los mecanismos juegan un papel preponderante, sin embargo, existen combinaciones que no permiten tener este efecto:

- A) Inercia-Viscosidad: En este caso, no existen curvas resonantes y solo disipativas.
- B) Inercia-Viscosidad/Elástica: En este caso, si existen curvas resonantes
- C) Viscosos-elásticos: En este caso, si se tendrían curvas resonantes, pero el ancho y el máximo de las curvas resonantes disminuirán y aumentarían respectivamente y quizá, no exista un tren de picos secundarios.
- D) Inercia-Viscoelasticidad-Solvente: En este caso, se tendrán curvas resonantes pero el efecto del polímero disminuirá el impacto de estas.

Los sistemas que involucran resonancia han sido aplicados en diferentes situaciones físicas, como son: (i) Medios porosos, (ii) Sistemas biológicos, (iii) Sistemas magnéticos, (iv) Sistemas médicos aplicados a la citotoxicidad de las células (**Helekar 2021**). En los sistemas médicos, se han aplicado este tipo de investigaciones para estudiar oclusiones periféricas, centrales y trastornos metabólicos, diabetes mellitus, hipercolesterolemia, hiperglucemia y diferentes patologías (**Herrera-Valencia et al. 2019, 2022**).

1.3 Aplicaciones

El efecto de una fuerza periódica ha sido ampliamente analizado en la literatura reológica. En los sistemas biológicos y médicos juega un papel fundamental (**Cortassa et al. 2023; Fernandez et al. 2021; Flores et al. 2022a, 2022b**). Otra aplicación de estos sistemas, se ha empleado para entender patologías y la relación entre la medicina del corazón, el sistema circulatorio suponiendo que las venas o arterias se aproxima como capilares y que la sangre puede ser modelada como un fluido viscoelástico de cuando menos un tiempo de relajación (**Herrera-Valencia et al. 2022**). El efecto de la frecuencia y la amplitud en los sistemas biológicos moleculares y su aplicación en la medicina preventiva es de vital importancia en la medicina preventiva (**Krylov y Osipova 2023**).

En ciencias físico-química en el estudio de la permeabilidad magnética y eléctrica, se han calculado expresiones para describir la interacción de materiales con campos magnéticos y eléctricos (**Lombard et al. 2020**). Otra de las aplicaciones es el estudio de la

curvatura promedio en sistemas biológicos que amplifican la respuesta mecánica y resonante en el oído humano (**Herrera-Valencia y Rey 2023**).

1.4 Relevancia

Todos estos estudios involucran una propiedad del medio que cuantifica la resistencia a fluir en este, y se conoce como: Permeabilidad dinámica, la cual se define como: “La propiedad intrínseca que tiene un sistema físico para fluir en este”, la ecuación básica se define en términos de la Ecuación de Hagen y Poiseuille, la cual relaciona el gradiente de presión (variable de entrada) y el flujo volumétrico (variable de salida). La ecuación de Hagen y Poiseuille ha sido punto de partida en muchos estudios y es una de las ecuaciones básicas para entender los conceptos de flujo no-homogeneo (**Tozzi y Hartt 2022; Herrera-Valencia 2019, 2022**).

1.5 Estado del arte

Fernández et al. (2021) estudio las inducciones de ondas no-lineales en nanofluidos pulsátiles debido a la vibración de nanotubos. Estas vibraciones inducen múltiples resonancias y fuerzas acopladas de los tubos del fluido (**Goldstein**)

Por otra parte, **Flores et al. (2022a, 2022b)** estudia la dinámica de las líneas de contacto de interfaces de fluidos pulsátiles modulados por sustratos y por los mecanismos inerciales y las fuerzas acopladas que interactúan en estos sistemas.

Lombard et al. (2020) estudia la respuesta dinámica de una mezcla binaria de fluidos compresibles. **Herrera-Valencia et al. (2019)** estudia el flujo pulsátil de un fluido estructurado complejo mediante una ecuación que describe la ecuación deformacional de Maxwell acoplada con una de tipo cinético que describe la evolución de la estructura. Esta ecuación cinética describe la resistencia al cambio de la estructura y al trabajo irreversible en contra de las fuerzas viscoelásticas (**Herrera-Valencia et al. 2022**). EL sistema de flujo, es analizado por medio de un esquema perturbativo. A orden cero, el sistema se reduce al flujo no-homógeno de Poiseuille y a primer orden se obtiene el efecto del pulso. Los resultados son analíticos y demuestran que el pulso tiene dos efectos:

- A) El efecto del flujo pulsátil es el de desestructura y ordena el fluido.
- B) Los sistemas biológicos utilizan este hecho para defenderse. La hipercolesterolemia es el exceso del colesterol en la sangre y este puede producir que la reología cambie drásticamente, es decir, cambia de adelgazante a plástico el cual, esta asociado a los esfuerzos de cedencia (**Herrera-Valencia et al. 2019 y referencias ahí citadas**).

Muralevla (2021) estudia fluidos visco-plasto en una tubería de sección transversal compleja con deslizamiento en la pared. Este tipo de sistemas pueden ayudar a entender las oclusiones centrales y periféricas en este tipo de sistemas. **Riera-Llobet et al. (2023)** ha estudiado la sangre y el efecto del hematocrito en microcanales mediante el efecto del flujo pulsátil.

Por otra parte, el flujo pulsátil ha sido punto de partida en el flujo electro-osmótico en nano-fluidos **Mukherjee et al. (2022)**. **Sadek y Pinho** estudiaron el flujo electro-osmótico oscilatorio en una rendija de espesor $2B$ con diferentes valores de potencial en las paredes. En este trabajo, se deducen expresiones analíticas para las principales funciones reológicas y del flujo volumétrico. El modelo empleado es la ecuación convectiva superior de

Maxwell (**Herrera et al. 2022**). De la misma manera **Shan et al. (2020)** estudia la electrodinámica del flujo de un líquido de Maxwell en una geometría capilar. Torres-Herrera (2021) amplía estos trabajos en geometrías cuadradas. El estudio el efecto de la viscoelasticidad y de las resonancias bidimensionales. Este es uno de los primeros trabajos que estudia estos sistemas de manera analítica.

No obstante, y a pesar de todos los intentos en describir las oclusiones centrales y periféricas en sangre, la mayoría de los modelos de estudio **no contemplan todas las propiedades características** de la sangre: (i) viscoelasticidad, (ii) esfuerzo de cedencia, (iii) transferencia de masa acoplada con la transferencia de movimiento, (iv) concentración de colesterol en la sangre.

Precisamente, este trabajo de investigación a nivel licenciatura contribuye en esta búsqueda.

El estudio de la función de transferencia en sistemas de flujo pulsátil, debe de hacerse con modelos más sofisticados, en este caso, estudiaremos la sangre con hipercolesterolemia con el modelo de Jeffreys el cual acopla la contribución del **solvente y la del polímero combinado**. Para hacer eso se plantea la siguiente hipótesis.

1.6 Hipótesis

Si el efecto de introducir una fuerza motriz oscilatoria en la disipación viscosa de un fluido viscoelástico depende de los mecanismos inerciales, viscoelásticos y del solvente, entonces, estos podrán ser cuantificados a través de la respuesta dinámica y los respectivos grupos adimensionales.

Para debatir esta hipótesis, se propondrán los siguientes objetivos:

1.7 Objetivos de la investigación

1.6.1 General

Estudiar la disipación viscoelástica, solvente y del polímero y la respuesta dinámica del flujo en un sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil la función de transferencia y grupos adimensionales característicos

1.6.2 Particulares

- A. Estudiar el flujo de Poiseuille de un fluido viscoelástico en dos geometrías básicas
- B. Calcular la función de transferencia compleja del sistema en función de las propiedades materiales.
- C. Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de describir la física del sistema.
- D. Usar el modelo resultante para caracterizar el rol de los mecanismos disipativos de almacenamiento y del solvente sobre las curvas resonantes.
- E. Deducir los parámetros y grupos adimensionales críticos que maximizan la respuesta lineal en el sistema de estudio.

1.8 Distribución del material de la tesis de licenciatura

Este documento está organizado de la siguiente manera:

Sección 1: Introducción al problema y los antecedentes de la permeabilidad dinámica en fluidos newtonianos y no newtonianos en geometrías inelásticas y elásticas, hipótesis y objetivos.

Sección 2: Marco teórico en donde se ven los elementos básicos esenciales para entender esta investigación: (i) Flujo de Poiseuille en un tubo y (ii) Flujo de Poiseuille en una corona circular.

Sección 3: Problema físico, y la modelo constitutiva empleado junto con las restricciones matemáticas, físicas y biológicas del sistema de trabajo.

Sección 4: Modelado matemático y se obtiene la función de transferencia del sistema de estudio.

Sección 5: Predicciones variando los grupos adimensionales correspondientes y aplicación al sistema biológico de estudio con simulaciones en el programa Mathematica (licencia UNAM).

Sección 6: Análisis de resultados, conclusiones y trabajo futuro

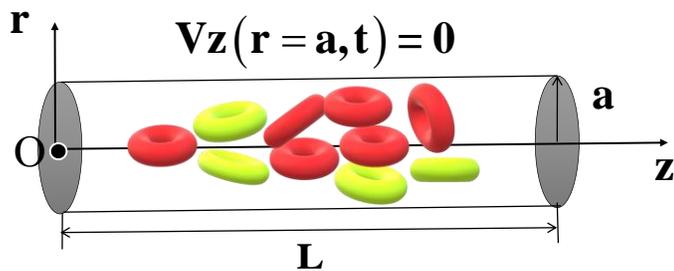
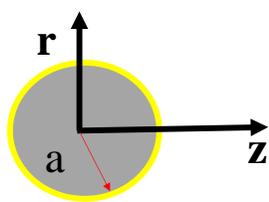
Los apéndices al final de esta tesis muestran los resultados matemáticos más importantes, sí como los pasos matemáticos a detalle que resultaron de este trabajo.

CAPÍTULO II

MODELADO MATEMÁTICO

CONFIGURACIÓN 1

Geometría A: CAPILAR



- a = Longitud característica radial
- L = Longitud característica axial
- Capilar inextensible
- O : Origen del sistema de coordenadas

$V_z=0$; No hay deslizamiento en la pared

2.1 Deducción de las funciones de transferencia para el flujo pulsátil de un fluido viscoelástico en una geometría capilar

En esta sección, se presentan los pasos matemáticos para obtener la función de transferencia del capilar y de la corona circular para el modelo de Jeffreys. Para resolver el problema se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- Estado estacionario:
- Fluido incompresible
- Proceso isotérmico
- Flujo unidireccional
- Mecanismos gravitacionales despreciables
- El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.
- Simetría cilíndrica

Bajo las anteriores aseveraciones, obtenemos lo siguiente:

- El vector de velocidad es solo función de a la coordenada radial r
- El gradiente de presión es constante en la dirección z
- Existe un balance entre las fuerzas viscosas y el gradiente de presión.

2.2 Balance de masa sin reacción química

Suponiendo que, el fluido es incompresible, e isotérmico, simetría cilíndrica y flujo unidireccional,

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

2.3 Ecuación de movimiento con mecanismos inerciales

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (2)$$

El término $\rho \partial_t V_z$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema. El esfuerzo cortante σ_{rz} es el producto de la función viscosidad por la rapidez de deformación:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{O_\Phi^J(D_t)} \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3a)$$

En donde $O_\Phi(D_t)$ es un operador viscosidad que depende de la derivada parcial del tiempo y de las propiedades materiales del fluido.

$$O_\Phi^J(D_t) = \frac{1 + \lambda_0 D_t}{1 + \lambda_J D_t} \quad (3b)$$

En la Ec. (3b) λ_0 y λ_J son los tiempos de relajación de Maxwell y de Jeffreys. El tiempo de Jeffreys se relaciona de la siguiente manera:

$$\lambda_J = \lambda_0 \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \quad (3c)$$

En la Ec. (3c) η_s y η_p son las viscosidades del solvente y del polímero respectivamente. Al combinar las Ecs. (2) y (3), se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{O_\phi^J(D_t)} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4)$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{O_\phi^J(D_t)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (5)$$

La Ec. (5) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + i^2 \rho O_\phi^J(D_t) \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z = O_\phi^J(D_t) \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6)$$

La Ec. (6) es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en las derivadas temporales de la Ec. (6)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rightarrow (i\omega)^k \quad (7)$$

Y para las funciones: (i) Velocidad axial $V_z = V_z(r, t)$, $p = p(t)$, $Q = Q(t)$. Además, el operador viscosidad en el espacio de Fourier, toma la forma:

$$O_\phi^J \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t} \right) \rightarrow O_\phi^J(i\omega) \quad (8)$$

Por lo que al aplicar la ecuación diferencial lineal toma la forma

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) \right\} V_z(r, \omega) = O_\phi^J(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (9)$$

Y el parámetro Beta, tiene la forma:

$$\alpha^2(\omega) = \rho O_\phi^J(i\omega) i^3 \omega \quad (10)$$

La Ec. (9) es punto de partida para el cálculo de la velocidad y el flujo volumétrico respectivamente.

2.4 Perfil de velocidades

Para resolver la Ec. (9), se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular.

$$V_z(r, \omega) = V_{z_H}(r, \omega) + V_{z_p}(r, \omega) \quad (11)$$

2.4.1 Ecuación diferencial homogénea del perfil de velocidades

Solución de la ecuación diferencial homogénea, por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2(\omega) \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (12)$$

La Ec. (12) puede ser desarrollada de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (13)$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) r^2 \right\} Vz(r, \omega) = 0 \quad (14)$$

La Ec. (14) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $z = \alpha r$

$$\left\{ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right\} Vz(r, \omega) = 0 \quad (15)$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (15) está dada por la expresión:

$$Vz(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \quad (16)$$

En la Ec. (17) $\{J_0(z), Y_0(z)\}$ son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente.

2.4.2 Solución particular del perfil de velocidades

La solución particular para el problema de la Ec. (17) se puede expresar como:

$$Vz_p(r, \omega) = A; A \in \mathbb{R} \quad (17)$$

Al sustituir la Ec. (17) en la Ec. (9)

$$\alpha^2(\omega) A = O_\Phi^J(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (18)$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{O_\Phi^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (19)$$

La solución general del perfil de velocidades toma la forma:

$$Vz(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r) + \frac{O_\Phi^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (20)$$

2.4.3 Condiciones de frontera

La solución general (Ec. 20) contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 , las cuales deben de determinarse a partir de las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{C.F.1: } r = 0; \quad |Vz(0, \omega)| \leq M \quad (21)$$

$$\text{C.F.2: } r = a \quad Vz(a, \omega) = 0 \quad (22)$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita. La segunda condición de frontera, se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$Vz_{\max} = Vz(r = 0, \omega) = C_1 J_0(\alpha 0) + C_2 Y_0(\alpha 0) + \frac{O_\Phi^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (23)$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$V_{z_{\max}} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_{\phi}^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (24)$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_{\phi}^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \quad (25)$$

La última igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar, es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero, i.e. $C_2 = 0$. Por lo que la solución general tiene la siguiente estructura:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + \frac{O_{\phi}^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (27)$$

La segunda condición de frontera al sustituirla nos da la siguiente información física:

$$V_z(R, \omega) = C_1 J_0(\alpha a) + \frac{O_{\phi}^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (28)$$

De análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1(\omega) = -\frac{1}{J_0(\alpha a)} \frac{O_{\phi}^J(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (29)$$

Finalmente, la velocidad axial $V_z(r, \omega)$ tiene la siguiente forma:

$$V_z(r, \omega) = T(r, \omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (30)$$

En donde la función de transferencia para el perfil de velocidades toma la forma:

$$\therefore T(r, \omega) = \frac{V_z(r, \omega)}{\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}} = \text{Re}[T(r, \omega)] + i \text{Im}[T(r, \omega)] = O_{\phi}^J(i\omega) \frac{1}{\alpha^2(\omega)} \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \right) \quad (31)$$

La Ec. (31) es la función de transferencia del sistema velocidad-gradiente de presión en el espacio de Fourier.

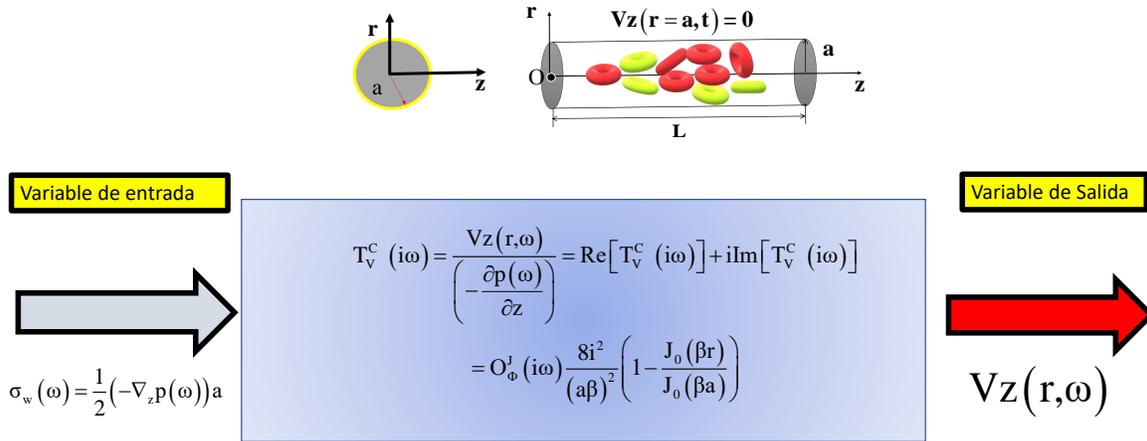


Figura 2.1 Ilustra la función de transferencia de la velocidad vs gradiente de presión. Nótese que depende del operador fluidez, del parámetro Beta y de un cociente de funciones de Bessel, lo que implica una resonancia en el sistema.

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del líquido, la fuerza motriz que de forma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir efectos resonantes en el sistema.

2.5 Flujo volumétrico con transformada de Fourier

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, se puede expresar como la doble integral del producto interno del vector de velocidad y la diferencial de superficie. El vector velocidad solo tiene componente axial z y el vector unitario que describe la sección de área transversal es el vector unitario en la dirección z ,

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a Vz(r,t) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a Vz(r,t) r dr \quad (32)$$

Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguientes:

$$Q(\omega) = F\{Q(t)\} = F\left\{2\pi \int_0^a Vz(r,t) r dr\right\} \quad (33)$$

Por otra parte, suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$F\left\{2\pi \int_0^a Vz(r,t) r dr\right\} = 2\pi \int_0^a F\{Vz(r,t)\} r dr = 2\pi \int_0^a Vz(r,\omega) r dr \quad (34)$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(r, \omega) r dr \quad (35)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(r, \omega) r dr = 2\pi \int_0^a \left(T(r, \omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \right) r dr \quad (36)$$

La integral de la Ec. (36) toma la siguiente forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a \left(T(r, \omega) \right) r dr \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (37)$$

Para resolver la integral definida en la Ec. (37), realizamos el siguiente cambio de variable, $x = r/a$ por lo que;

$$Q(\omega) = 2\pi a^2 \left(\int_0^1 \left(T(x, \omega) \right) x dx \right) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (38)$$

Sustituyendo la función de transferencia de la velocidad y el gradiente de presión, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi a^4 O_\Phi^J(i\omega) \frac{1}{(\alpha a)^2} \int_0^1 \left(1 - \frac{J_0(\alpha a x)}{J_0(\alpha a)} \right) x dx \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (39)$$

Por lo que, el flujo volumétrico toma la forma:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^3}{4} T_v(\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \quad (40)$$

En donde la función de transferencia toma la forma:

$$\therefore T_v(\omega) = \frac{\pi Q(\omega) / a^3}{-\frac{1}{2} \nabla_z p(\omega) a} = \text{Re}[T_v(\omega)] + i \text{Im}[T_v(\omega)] = O_\Phi^J(i\omega) \frac{8i^2}{(\alpha a)^2} \left(1 - 2 \frac{J_1(\alpha a) / \alpha a}{J_0(\alpha a)} \right) \quad (41)$$

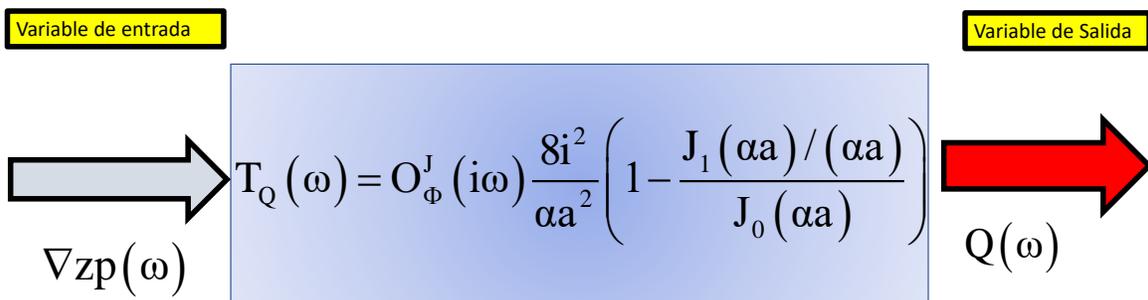


Figura 2.2 Ilustra la función de transferencia de la velocidad vs gradiente de presión. Nótese que depende del operador fluidez, del parámetro Alpha y de un cociente de funciones de Bessel, lo que implica una resonancia en el sistema.

2.6 Parámetro Beta

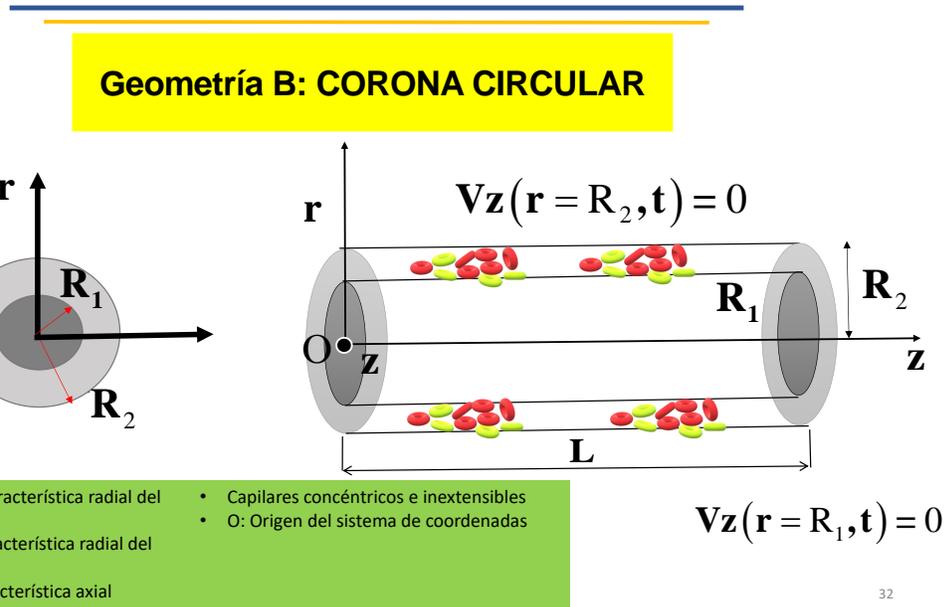
Para un fluido no-newtoniano viscoelástico lineal, la fluidez característica $\varphi_c = 1/\eta_0$ y el tiempo característico del sistema t_c es el tiempo unimodal de Maxwell, i.e. $t_c = \lambda_0$. Por lo que el parámetro β tiene la forma:

$$\beta(\omega) = i^{3/2} De \sqrt{O_\phi(i\omega)} \omega \quad (42)$$

En la Eq. (42) De es el número de Deborah, el cual puede

$$De = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0} \quad (43)$$

2.7 Deducción de la función de transferencia para un fluido viscoelástico en una corona circular de radios R_1 y R_2 y longitud $z = L$.



2.7.1 Función de transferencia compleja para una corona circular.

Basicamente, las condiciones de flujo son las mismas que en el de un capilar, por lo que se tiene la misma expresión de la velocidad general, i.e.

$$V_z(r,\omega) = C_1 J_0(r\alpha) + C_2 Y_0(r\alpha) + \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (44)$$

2.7.2 Condiciones de frontera para la corona circular

La Ec. (44) contiene dos constantes de integración $\{C_1, C_2\}$, por lo que estas deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera.

C.F.1.: La velocidad axial en la frontera del tubo es cero, i.e., $V_z(r = R_2) = 0$.

C.F.2.: La velocidad axial en el centro del tubo es máxima, i.e., $V_z(r = R_1) = 0$.

Aplicando las condiciones de frontera, en la Ec. (1) se tiene lo siguiente:

$$V_z(R_2,\omega) = C_1 J_0(R_2\alpha) + C_2 Y_0(R_2\alpha) + \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (45)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$V_z(R_1,\omega) = C_1 J_0(R_1\alpha) + C_2 Y_0(R_1\alpha) + \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (46)$$

$$C_1 J_0(R_2\alpha) + C_2 Y_0(R_2\alpha) + \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (47)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$C_1 J_0(R_1\alpha) + C_2 Y_0(R_1\alpha) + \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (48)$$

Las Ecs. (47) y (48) pueden ser rescritas de la siguiente forma:

$$C_1 J_0(\beta) + C_2 Y_0(\beta) + R_2^2 \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (49)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$C_1 J_0(R\beta) + C_2 Y_0(R\beta) + R_2^2 \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (50)$$

En donde $R = R_1/R_2$. Al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, podemos obtener las constantes C_1 y C_2 . Al restar las Ecs. (49) y (50), se obtiene la constante C_1 en terminos C_2

$$C_1 = -C_2 \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta) - J_0(R\beta)} \quad (51)$$

Al despejar C_2 de la Ec. (50)

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(R\beta)}{Y_0(R\beta)} - \frac{1}{Y_0(R\beta)} \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (52)$$

Al combinar las Ecs. (51) y (52)

$$C_2 = C_4 \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (53)$$

En donde C_4 , esta definida como:

$$C_4 = \frac{J_0(R\beta) - J_0(\beta)}{J_0(\beta)Y_0(R\beta) - Y_0(\beta)J_0(R\beta)} \quad (54)$$

De la Ecs. (51) y (52), se tiene:

$$C_1 = C_3 \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (55)$$

Entonces C_3 , se define como:

$$C_3 = \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta)Y_0(R\beta) - Y_0(\beta)J_0(R\beta)} \quad (56)$$

Por lo que el perfil de velocidades puede ser reescalado de la siguiente manera.

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{O_\phi^J(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (57)$$

La Ec. (57) toma la forma:

$$\therefore \frac{V_z(r, \omega)}{\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right)} = R(i\omega) = \text{Re}[R(i\omega)] + i\text{Im}[R(i\omega)] = O_\phi^J(i\omega) \frac{R_2^2}{\beta^2} i^2 \{1 + C_3 J_0(r\beta) + C_4 Y_0(r\beta)\} \quad (58)$$

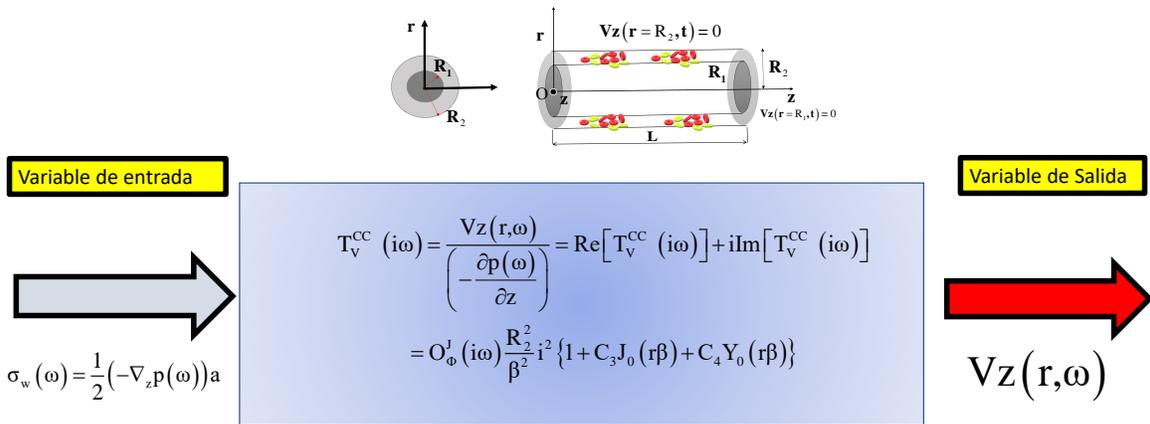


Figura 2.3 Ilustra la función de transferencia de la velocidad vs gradiente de presión. Nótese que depende del operador fluidez, del parámetro Alpha y de un cociente de funciones de Bessel, lo que implica una resonancia en el sistema.

2.7.3 Flujo volumetrico en una corona circular con mecanismos inerciales

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} V_Z(r, \omega) r dr \quad (59)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} T_V^{CC}(i\omega) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) r dr \quad (60)$$

Escalando la Ec. (43) se tiene:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_R^1 O_\Phi^J(i\omega) \frac{R_2^2}{\beta^2} i^2 \{1 + C_3 J_0(r\beta) + C_4 Y_0(r\beta)\} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) r dr \quad (61)$$

Aplicando linealidad a la Ec. (61), se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi O_\Phi^J(i\omega) \frac{R_2^4}{\beta^2} i^2 \int_R^1 \{1 + C_3 J_0(r\beta) + C_4 Y_0(r\beta)\} \frac{r}{R_2} d \frac{r}{R_2} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (62)$$

Aplicando los siguientes cambios de variable: $x = r/R_2$ y $R = R_1/R_2$; $\beta = R_2\beta$

$$Q(\omega) = 2\pi O_\Phi^J(i\omega) \frac{R_2^4}{\beta^2} i^2 \int_R^1 \{1 + C_3 J_0(x\beta) + C_4 Y_0(x\beta)\} x dx \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (63)$$

Integrando,

$$Q(\omega) = \pi \frac{R_2^3}{4} T_F^{CC}(i\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2 \right) \quad (64)$$

En donde la función de transferencia compleja para la corona circular, toma la forma:

$$\therefore T_F^{CC}(i\omega) = \frac{4Q(\omega) / \pi R_2^3}{-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2} = \text{Re}[T_F^{CC}(i\omega)] + i \text{Im}[T_F^{CC}(i\omega)] = O_\Phi^J(i\omega) f(\beta, R) \quad (65)$$

Y la función de dispersión tiene la forma:

$$f(\beta, R) = 8 \frac{i^2}{\beta^2} \left[1 - R^2 + C_3 2 \frac{J_1(\beta)\beta - J_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} + C_4 2 \frac{Y_1(\beta)\beta - Y_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} \right] \quad (66)$$

En este capítulo se desarrollaron los resultados principales de este trabajo. En particular, se obtuvieron las funciones de transferencia para el capilar y para la corona circular. En general, estas dependen de:

- Operador viscosidad, es decir de la reología en el sistema, en este punto, las ecuaciones deducidas en esta sección son completamente generales y pueden ser aplicadas a cualquier modelo reológico en el régimen de viscoelasticidad lineal.

- b) La función de dispersión depende del parámetro beta el cual describe los procesos inerciales-viscoelásticos y de los procesos asociados a los mecanismos solventes y del polímero.
- c) En el caso de la corona circular, se observa que la función de dispersión f depende de la geometría a través de la razón R la cual, está asociada a las constricciones por efecto de la geometría. Este número, describe las oclusiones en sistemas biológicos como la sangre con alto colesterol o por tejido muerto.

CAPÍTULO III

SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

3.1 Variables adimensionales

En esta sección se presentan los resultados más importantes de este trabajo de investigación a nivel licenciatura. Las simulaciones se hicieron en el programa Mathematica y se exportaron a una hoja de cálculos. Las ecuaciones principales fueron escaladas con las siguientes variables:

A) Capilar

$$T(\omega) = \frac{T(\omega)}{\varphi_0}; O_{\phi}^J(\omega) = \frac{O_{\phi}^J(\omega)}{\varphi_0}; \beta = \beta a$$

B) Corona circular

$$T(\omega) = \frac{T(\omega)}{\varphi_0}; O_{\phi}^J(\omega) = \frac{O_{\phi}^J(\omega)}{\varphi_0}; \beta = \beta R_2$$

3.2 Números adimensionales

Los números adimensionales pertinentes para este trabajo son:

A) Capilar

$$De_M = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G}}{\lambda_0}; De_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_0} = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p}$$

B) Corona circular

$$De_M = \frac{\sqrt{\rho R_2^2 / G}}{\lambda_0}; De_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_0} = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p}; R = \frac{R_1}{R_2}$$

Las ecuaciones adimensionales que se obtuvieron son las siguientes:

3.2.1 Capilar

$$T_V^C(\omega) = \text{Re}[T_V(\omega)] + i\text{Im}[T_V(\omega)] = O_{\phi}^J(i\omega) f(\alpha)$$

En donde la función de dispersión, tiene la siguiente forma analítica:

$$f_C(\alpha) = \frac{8i^2}{\alpha^2} \left(1 - 2 \frac{J_1(\alpha)/\alpha}{J_0(\alpha)} \right)$$

3.2.2 Corona circular

$$T_F^{CC}(i\omega) = \text{Re}[T_F^{CC}(i\omega)] + i\text{Im}[T_F^{CC}(i\omega)] = O_{\phi}^J(i\omega) f(\beta, R)$$

En donde la función de dispersión, tiene la siguiente forma analítica:

$$f_C(\beta, R) = 8 \frac{i^2}{\beta^2} \left[1 - R^2 + C_3 2 \frac{J_1(\beta)\beta - J_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} + C_4 2 \frac{Y_1(\beta)\beta - Y_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} \right]$$

A)CAPILAR

3.4 Función de transferencia: capilar

En la Fig. 3.1 se ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. En particular, en esta simulación la contribución del plasma es cero por lo que, se tiene un polímero puro representado por el número de Deborah. Hay tres zonas claras que muestra la Fig. 5.1, las cuales son descritas a continuación:

- A) La primera zona a bajas frecuencias, se observa que la función de transferencia (FT) tiene un comportamiento constante, i.e., es independiente de la frecuencia. Es importante resaltar que, a frecuencias cortas, el tiempo va a la inversa por lo se encuentra en estado estacionario.
- B) En la segunda zona, existe una frecuencia crítica en la cual la función de transferencia compleja, describe un comportamiento monótono creciente hasta el valor el valor máximo. Este máximo está determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales y viscoelásticas del sistema.
- C) A una segunda frecuencia crítica, la respuesta de la función de transferencia compleja, ilustra un comportamiento seguido de un tren secundario de picos. Estos picos están determinados por los tiempos característicos y están relacionados a los tiempos característicos del material.
- D) La resonancia en el sistema se obtiene debido a que los tiempos característicos del material empata con las resonancias del sistema y cuando son iguales se presentan los espectros que se observan en todas las figuras.
- E) La resonancia que se observa en todas las simulaciones puede ser inducida por el cociente de funciones de Bessel en las funciones de transferencia. Es claro que, este punto deber ser investigado con datos experimentales.
- F) El efecto del número de Deborah es el de modificar el máximo en las curvas resonantes. Si el Deborah es mayor a uno, i.e., $De > 1$, los mecanismos inerciales dominan sobre los viscoelásticos y se presenta una disminución en la respuesta dinámica. En cambio, si $De < 1$, las fuerzas viscoelásticas predominan sobre las inerciales y el máximo en las curvas resonantes se amplifica.
- G) El máximo valor que puede tomar el Deborah de Jeffreys está determinado por la relación de viscosidades, i.e.

$$De_J(\eta_s = 0) = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} = 0$$

$$De_J(\eta_s = \eta_p) = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} = \frac{\eta_p}{2\eta_p} = \frac{1}{2}$$

El máximo valor que puede tomar el número de Deborah-Jeffreys es 0.5. Esto significa que la viscosidad del solvente es del orden de la del polímero. Esto, implica que al aumentar los mecanismos del solvente las resonancias tienden a decrecer drásticamente como se observa en las Figs. (5.2) y (5.3 Respectivamente.

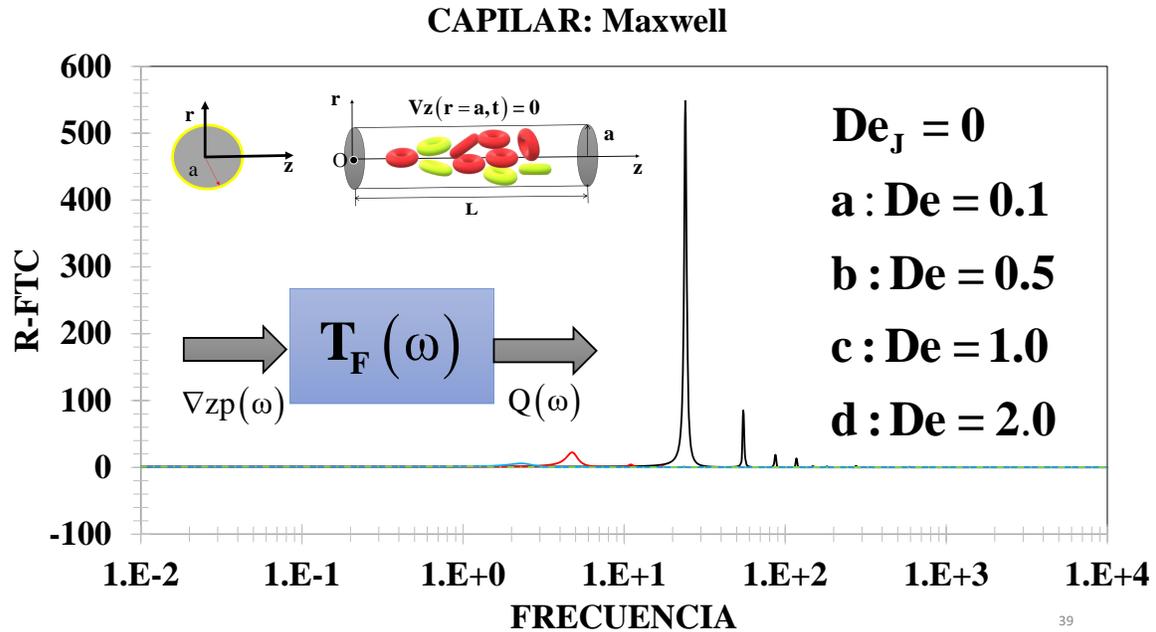


Figura 3.1 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

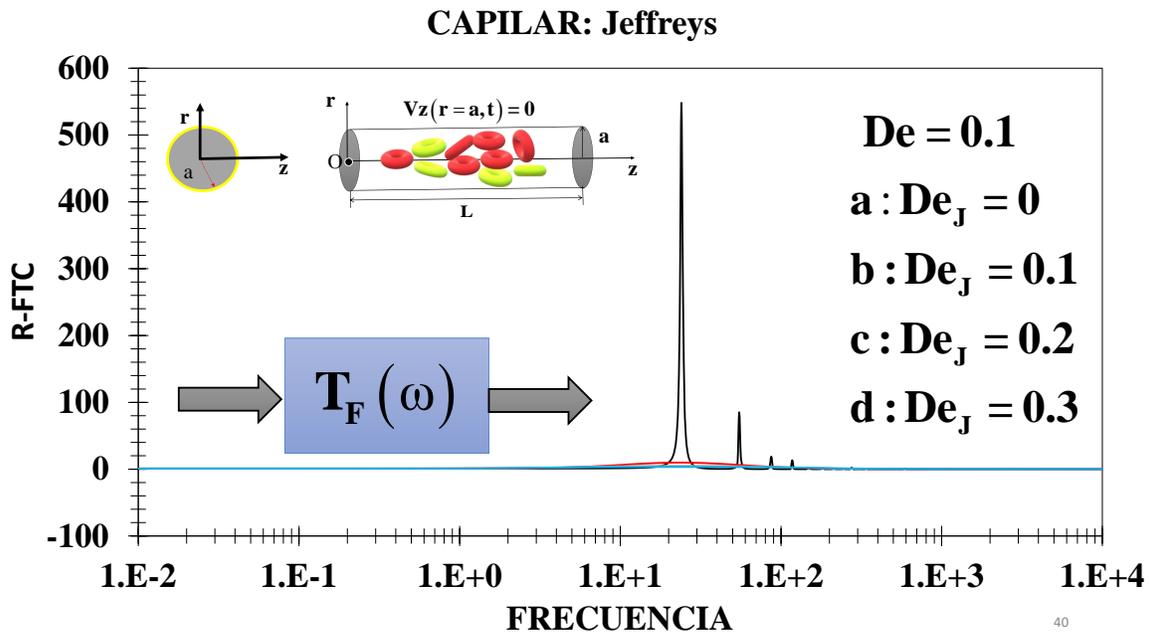


Figura 3.2 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

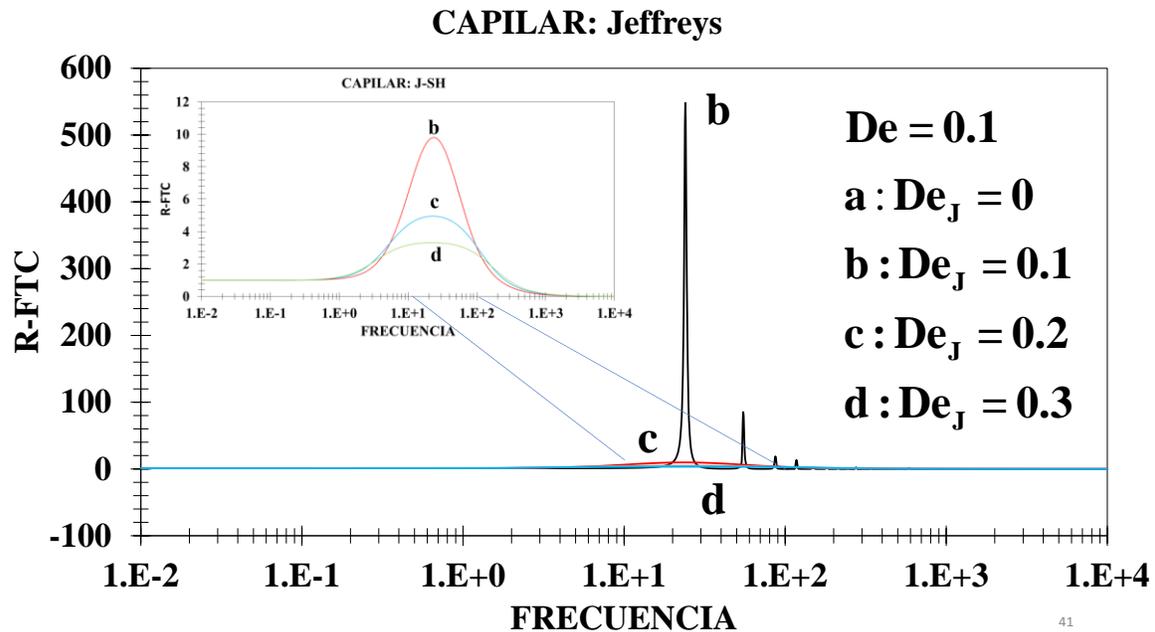


Figura 3.3 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

En la Fig. 3.4 se Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja (FT) vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. Como en las Figs. (5.1-5.3) se hacen las siguientes afirmaciones:

- A) A frecuencias bajas, se observa que la parte imaginaria de la función de transferencia no muestra una respuesta o estímulo.
- B) A una frecuencia crítica, el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo anti resonante.
- C) A un valor mayor de la frecuencia anti-resonante, se observa una transición del mínimo al máximo. Esta, se puede considerar como una discontinuidad en la respuesta imaginaria.
- D) Para un segundo valor crítico, el sistema presenta un comportamiento decreciente hasta un valor mínimo.
- E) Un hecho importante, es que estas discontinuidades se repiten conforme la frecuencia aumenta y son conocidas como discontinuidades tipo diente de sierra.
- F) El efecto del número de Deborah, sobre la función de transferencia es modificar la respuesta del sistema. Si el Deborah aumenta, las curvas resonantes o anti-resonantes decrecen considerablemente.
- G) Se observa de las simulaciones anteriores (5.1-5.3) que la respuesta dinámica decrece cuando aumenta los mecanismos inerciales y los del solvente.

- H) Al igual que en las simulaciones de la Figs. (5.1-5.3) se observa que la respuesta imaginaria decrece conforme aumenta el solvente a través del número.
- I) En pocas palabras, para un fluido real el solvente que por lo regular son líquidos con bajo peso molecular tienden a tener un efecto negativo en la respuesta dinámica del sistema
- J) Matemáticamente, la ecuación constitutiva que describe la mayor respuesta en el sistema dinámico es el modelo constitutivo de Maxwell, es decir aquel en donde la deformación en el elemento viscoso y elástico es la misma. En este caso, el esfuerzo total es la suma de las contribuciones viscosa y elástica.

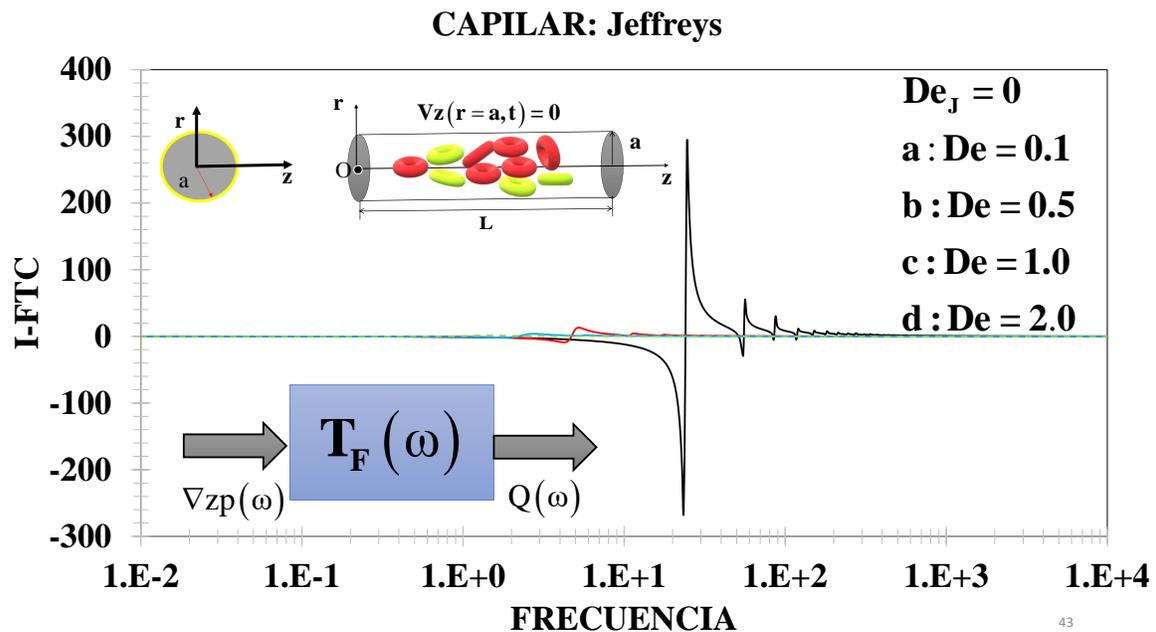


Figura 3.4 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

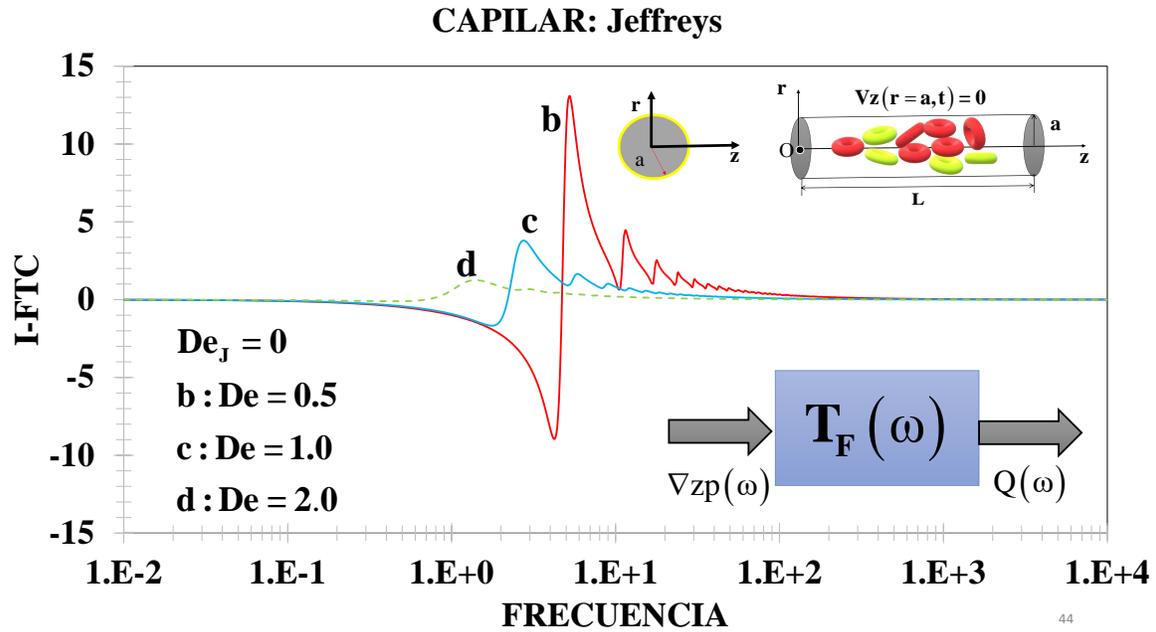


Figura 3.5 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $\text{De}_J = 0$.

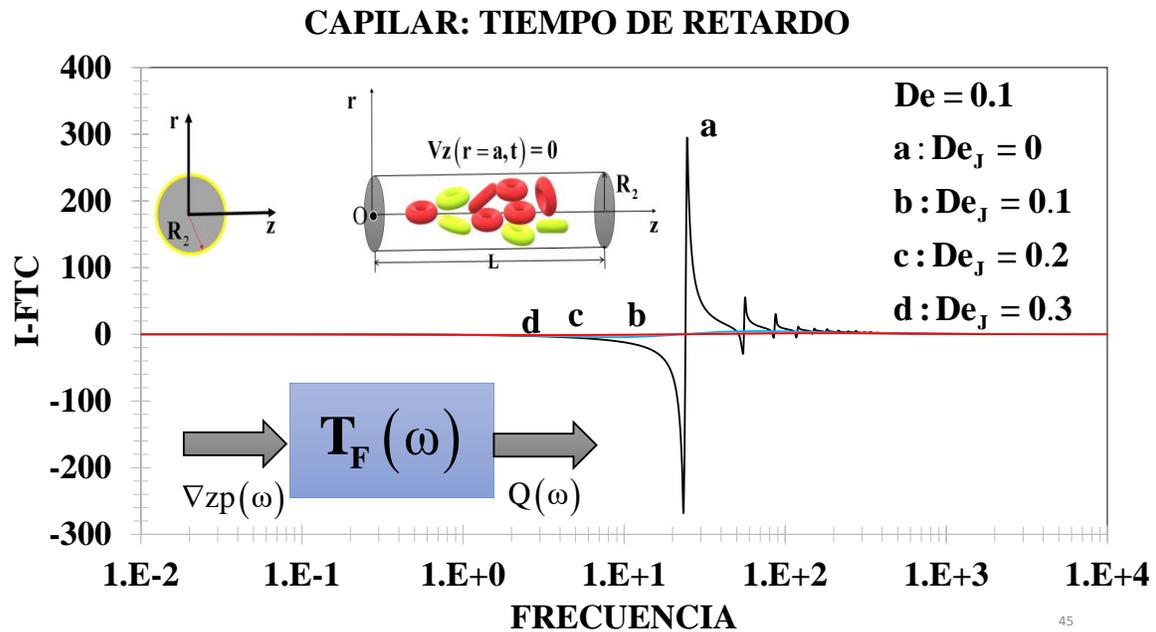


Figura 3.6 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $\text{De}_J = 0$.

CAPILAR: TIEMPO DE RETARDO

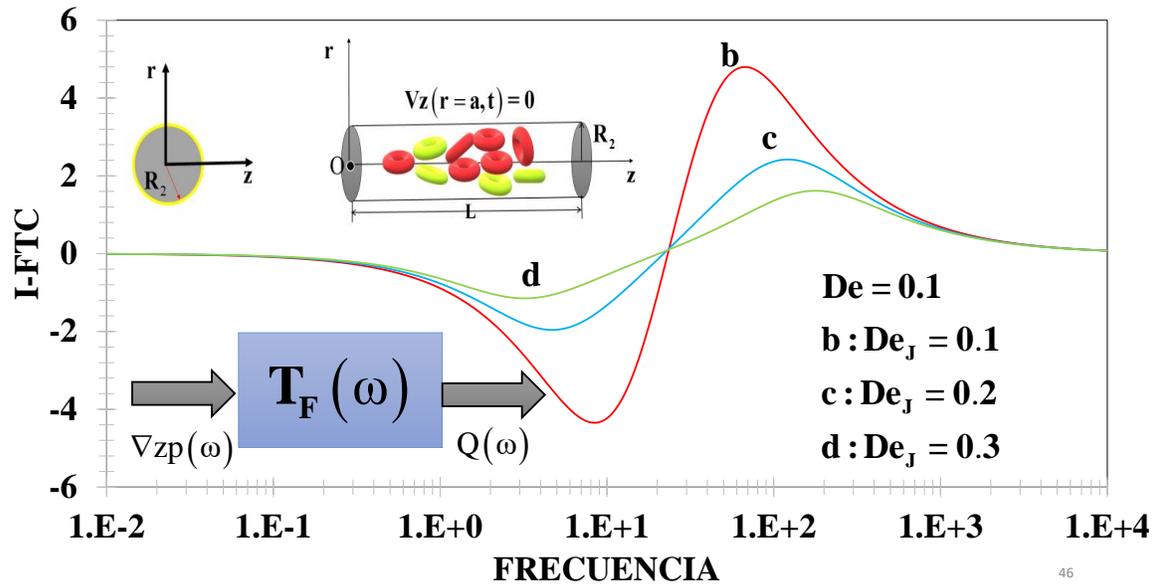


Figura 3.7 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De . En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

B) CORONA CIRCULAR

3.4 Función de transferencia: corona circular

En la Figs. (3.8) se ilustra la función de transferencia real vs frecuencia para diferentes valores de la razón geométrica R . En esta simulación, los valores de los números de Deborah y Deborah de Jeffreys tienen los siguientes valores: (i) $De = 1$, i.e. los mecanismos inerciales y viscoelásticos son iguales, y (ii) $De_J = 0$ (Fluido de Maxwell) y $De_J = 0.1$.

Como en el capilar, se tiene las siguientes observaciones:

- A) A frecuencias bajas, se observa que la FTCC es independiente de la frecuencia y el valor de la meseta está determinado por el valor de la razón geométrica R .
- B) A una frecuencia crítica, el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Como en el caso del capilar, el máximo está determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales y viscoelásticas del material.
- C) A una frecuencia crítica, el sistema experimenta un decrecimiento monótono hasta un valor mínimo anti resonante.
- D) El valor del mínimo en la Fig. (3.8) puede estar asociado a un cambio de signo en el gradiente de presión transitorio.
- E) A un segundo valor crítico de la frecuencia el sistema experimenta un comportamiento asintótico a frecuencias altas.
- F) El efecto de la razón geométrica R es la de disminuir la respuesta de la parte real de la función de transferencia compleja.
- G) Biológicamente, la disminución a través del número R , se debe a que el sistema se encuentra ocluido debido a, tejido muerto o un aumento en el colesterol que induzca una patología que ocluya la vena.

En la Fig. (3.9) se ilustra la función de transferencia compleja vs frecuencia para valores distintos en el número de Deborah-Jeffreys.

- A) El tratamiento matemático es exactamente el mismo que en la Fig. (3.8). En esta simulación se tienen una competencia entre los mecanismos inerciales y viscoelásticos.
- B) El efecto de aumentar el número de Deborah-Jeffrey es el de disminuir las resonancias y anti resonancias en el sistema y que en el máximo del número de Deborah-Jeffreys, el sistema presenta relajación, es decir, en pocas palabras el solvente afecta la resonancia en el capilar y en la corona circular.

CORONA CIRCULAR: Jeffreys

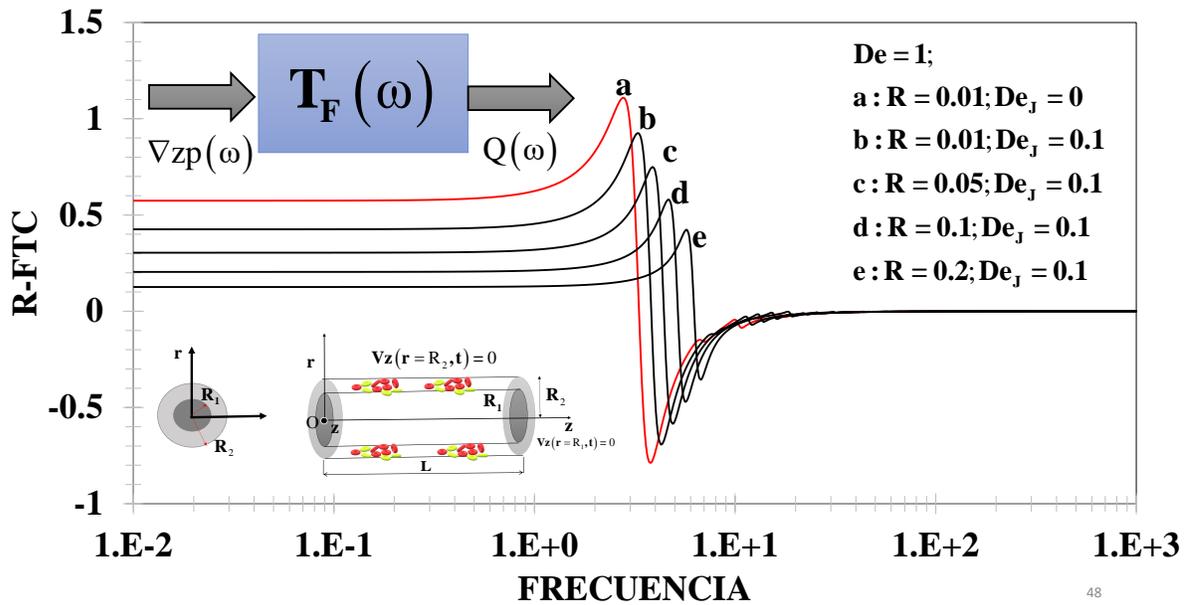


Figura 3.8 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De. En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

CORONA CIRCULAR: Jeffreys

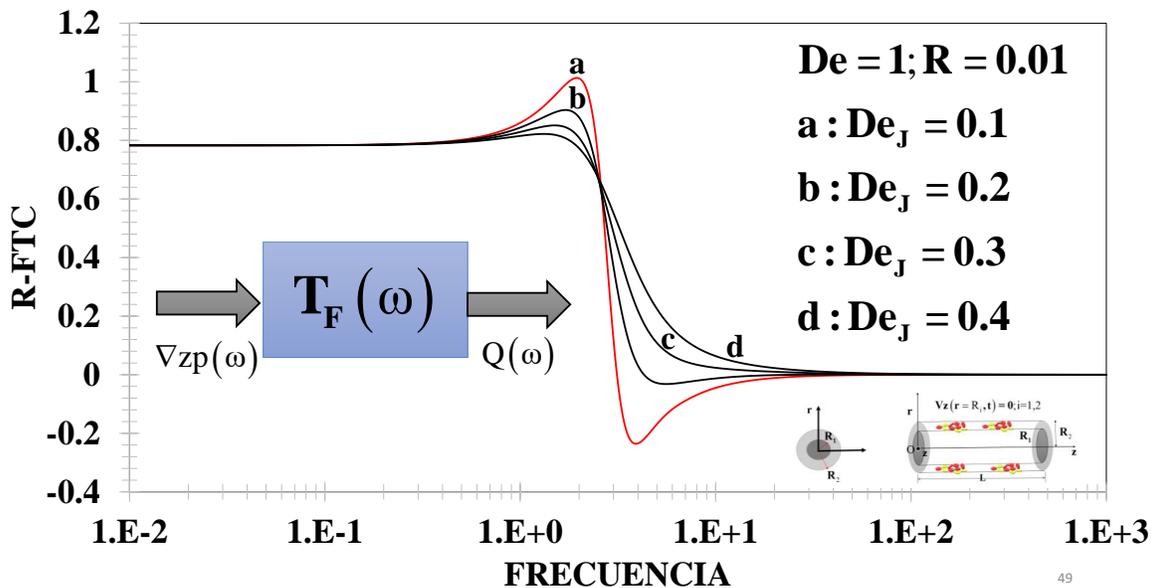


Figura 3.9 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De. En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

En la Figs. (3.8) se ilustra la función de transferencia real vs frecuencia para diferentes valores de la razón geométrica R . En esta simulación, los valores de los números de Deborah y Deborah de Jeffreys tienen los siguientes valores: (i) $De = 1$, i.e. los mecanismos inerciales y viscoelásticos son iguales, y (ii) $De_J = 0$ (Fluido de Maxwell) y $De_J = 0.1$.

Como en el capilar, se tiene las siguientes observaciones:

- H) A frecuencias bajas, se observa que la FTCC es independiente de la frecuencia y el valor de la meseta está determinado por el valor de la razón geométrica R .
- I) A una frecuencia crítica, el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Como en el caso del capilar, el máximo está determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales y viscoelásticas del material.
- J) A una frecuencia crítica, el sistema experimenta un decrecimiento monótono hasta un valor mínimo anti resonante.
- K) El valor del mínimo en la Fig. (3.8) puede estar asociado a un cambio de signo en el gradiente de presión transitorio.
- L) A un segundo valor crítico de la frecuencia el sistema experimenta un comportamiento asintótico a frecuencias altas.
- M) El efecto de la razón geométrica R es la de disminuir la respuesta de la parte real de la función de transferencia compleja.
- N) Biológicamente, la disminución a través del número R , se debe a que el sistema se encuentra ocluido debido a, tejido muerto o un aumento en el colesterol que induzca una patología que ocluya la vena.

En la Fig. (3.9) se ilustra la función de transferencia compleja vs frecuencia para valores distintos en el número de Deborah-Jeffreys.

- C) El tratamiento matemático es exactamente el mismo que en la Fig. (3.8). En esta simulación se tienen una competencia entre los mecanismos inerciales y viscoelásticos.
- D) El efecto de aumentar el número de Deborah-Jeffrey es el de disminuir las resonancias y anti resonancias en el sistema y que en el máximo del número de Deborah-Jeffreys, el sistema presenta relajación, es decir, en pocas palabras el solvente afecta la resonancia en el capilar y en la corona circular.

En la Figs. (3.10) y (3.11) se ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. Los valores que se emplearon en esta simulación son: (i) $R = 0.01$, (ii) $De = 1$ y (iii) $De_J = \{a: 0.1, b: 0.2, c: 0.3, d: 0.4\}$. Las siguientes observaciones de la Fig. (3.10) pueden ser resumidas:

- A) A frecuencias bajas, se observa que la parte real de la FTCC es independiente de la frecuencia.
- B) A una frecuencia crítica, el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Como en el caso del capilar, el máximo está

determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales y viscoelásticas del material.

- C) A una segunda frecuencia crítica, el sistema experimenta un comportamiento monótono decreciente.
- D) A frecuencias altas, el sistema se aproxima asintóticamente a cero, i.e., a tiempos cortos.
- E) Es importante notar, que cuando el número de Deborah-Jeffreys aumenta, el sistema decrece y el ancho de las campanas aumenta. Es decir, los mecanismos del solvente controlan la respuesta dinámica del sistema en la parte real y en la imaginaria.

En la Fig. (3.11) se ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para valores distintos de la razón geométrica R . En esta simulación el número de Deborah $De = 1$, lo que significa que existe una competencia entre los mecanismos inerciales y viscoelásticos y la viscosidad del solvente es pequeña en comparación con la del polímero.

- A) El tratamiento matemático es exactamente el mismo que en la Fig. (3.10). A bajas y altas frecuencias se observa un comportamiento asintótico y a moderadas un pico resonante característico.
- B) El efecto de la razón geométrica R es la de decrecer las curvas resonantes y trasladar los máximos resonantes hacia valores mayores en la frecuencia.
- C) En general, la resonancia puede ser afectada por tres mecanismos:
 1. Mecanismos inerciales: Al aumentar estos compiten con los mecanismos viscoelásticos.
 2. El efecto geométrico a través de R . Si $R \rightarrow 1$, la parte real e imaginaria de la función de transferencia compleja.
 3. Mecanismos del solvente: Si se aumentan los mecanismos del solvente, estos contribuyen a disminuir los efectos resonantes en el sistema de estudio.

CORONA CIRCULAR: Jeffreys

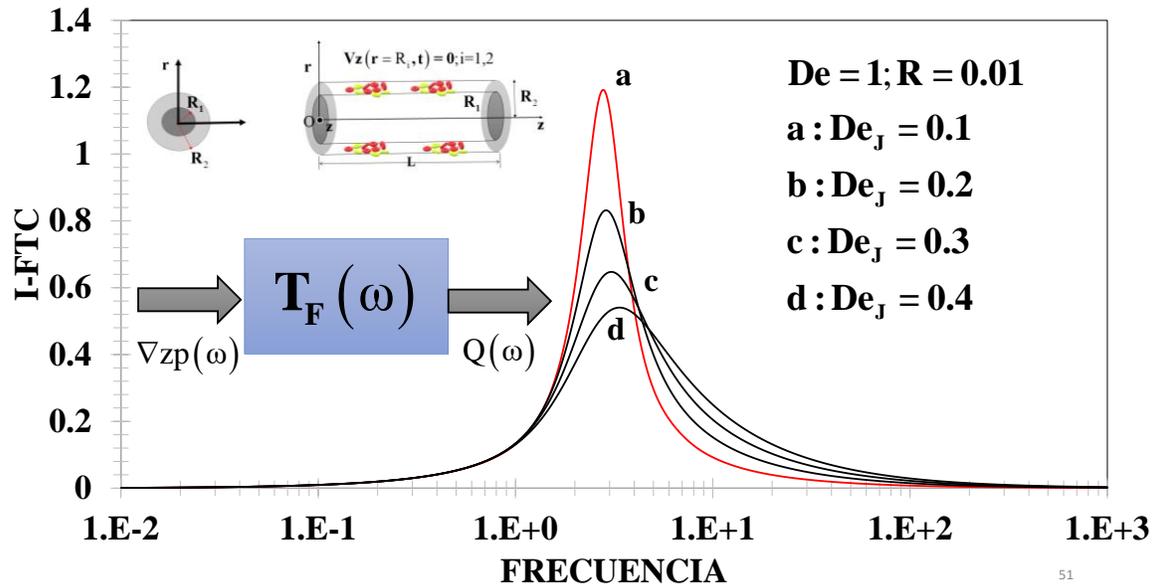


Figura 3.10 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De. En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

CORONA CIRCULAR: Jeffreys

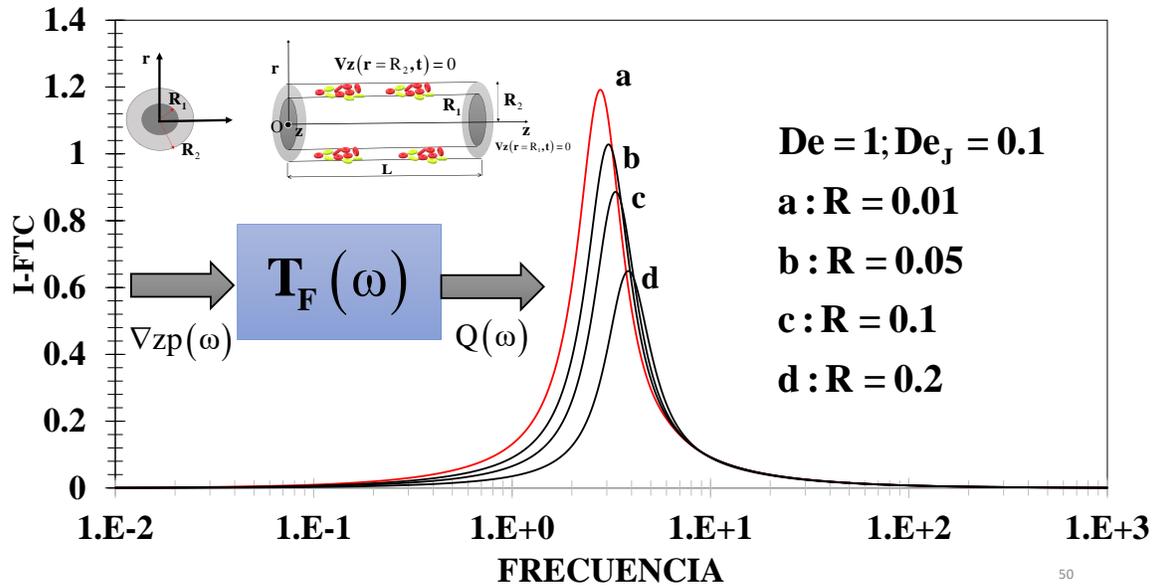


Figura 3.11 Ilustra la parte real de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional De. En esta simulación el valor del Deborah de Jeffrey es cero, i.e., $De_J = 0$.

Resumen de los principales atributos de este trabajo

En esta sección presentamos un resumen gráfico de los principales atributos de este sistema. El tema de este trabajo de investigación se centra en el estudio del flujo pulsátil en dos configuraciones: (i) cilindro o capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y (ii) corona circular de radio R_1 y R_2 con $R_1 < R_2$ y longitud $z = L$.

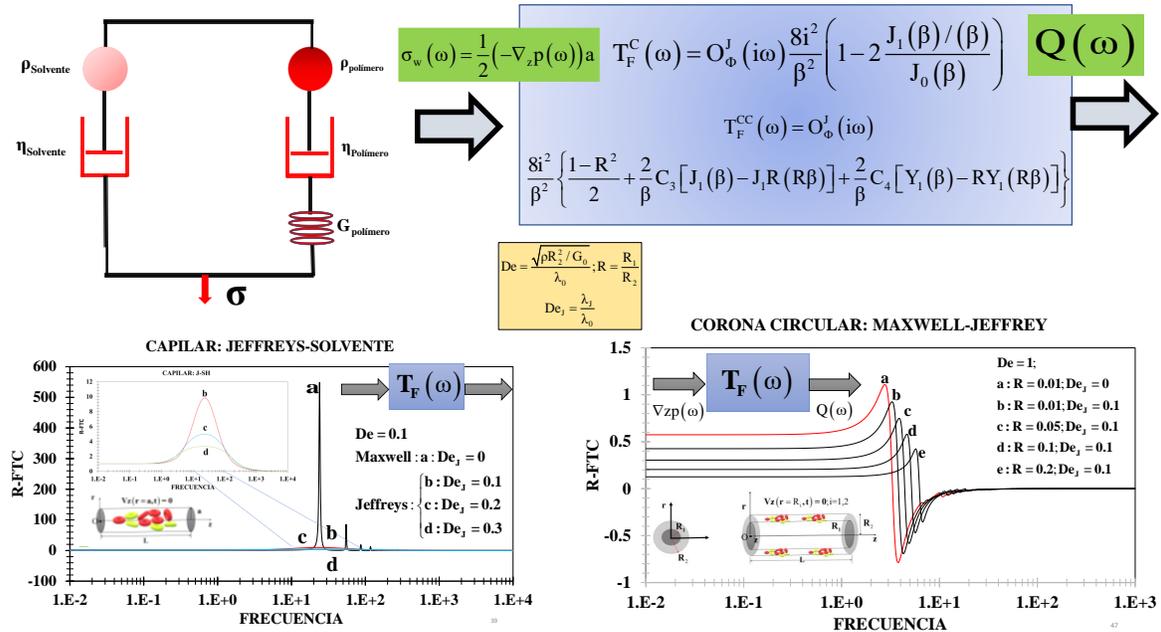


Figura 3.12 Se presenta un resumen gráfico de los principales atributos de este trabajo.

En la Fig. (3.11) se observa la configuración mecánica para el fluido y el sistema. Del lado izquierdo se observa la masa del solvente y la viscosidad de este en paralelo con la contribución del polímero que consiste en: (i) una masa, (ii) una viscosidad y (iii) una parte elástica asociada al resorte. En este sistema, la deformación que se aplica al sistema es la misma y el esfuerzo total es la suma de la parte viscosa del plasma y la viscoelástica resultado una ecuación diferencial que describe el sistema esfuerzo-rapidez de deformación y que contiene tres propiedades materiales asociados a la viscosidad del polímero, el tiempo viscoelástico que asocia la transición de la parte disipativa y de la elástica relacionada con el almacenamiento. El tiempo de retardo o tiempo de Jeffreys es un tiempo que se obtiene como el producto del tiempo de Maxwell y del cociente entre la viscosidad del solvente y la viscosidad total (polímero + solvente).

Al aplicar un gradiente de presión pulsátil y bajo las condiciones ampliamente explicadas, se tiene una expresión analítica que describe la relación entre la variable de entrada y de salida y que esta determinada por la función de transferencia. En general, se puede expresar el flujo volumétrico de un fluido viscoelástico de la siguiente manera:

$$Q_V = Q_N T_F(\omega_0, De_M, De_j) \text{Exp}[i\omega_0 t]$$

La función de transferencia en general, se puede expresar como el producto de dos funciones. La primera de ellas a la reología del sistema y otra a la dispersión de los mecanismos. Los mecanismos de dispersión dependen del parámetro

$$\beta = i^{3/2} De \sqrt{\omega_0 O_\phi^J(\omega_0)}$$

Y el parámetro Beta relaciona un cociente de dos longitudes características, por lo que una ellas son un parámetro geométrico y la otra a la longitud de onda de las funciones de Bessel. Es importante resaltar que el cociente de funciones de Bessel, son activadas debido a los mecanismos inerciales y viscoelásticas. Las funciones de Bessel, en el capilar son de ordenes cero y uno de primera especie, mientras que en la corona circular aparece la función de Bessel de segunda especie de ordenes cero y primero. Es importante notar que la función de transferencia para la corona circular se complica matemáticamente y esto es un efecto exclusivo de la curvatura.

En este punto, el sistema esta dominado por tres números adimensionales que describen los mecanismos macroscópicos en el sistema:

$$De = \frac{\text{Tiempo Inercial-Elasticidad de bulto}}{\text{Tiempo Viscoelástico}} = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0}$$

$$De_J = \frac{\text{Solvente}}{\text{Solvente-Polímero}} = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p}$$

$$R = \frac{R_1}{R_2}$$

En las simulaciones obtenidas, se observa que en la mayor resonancia se obtiene con el polímero puro, debido a que el solvente juega un papel secundario en el contexto de la respuesta dinámica lineal. Sin embargo, en la corona circular se observa que el efecto de la reducción del área de flujo induce una transición resonante y anti-resonante asociada a la curvatura y activada por las funciones de Bessel de segunda especie de ordenes cero y primero respectivamente. Básicamente, se tienen las siguientes contribuciones:

- A) El efecto de los mecanismos inerciales juega un papel negativo en el contexto de la función de transferencia compleja.
- B) El solvente, decrece la respuesta dinámica del sistema y el valor crítico del número de Deborah de Jeffreys es $De_J = 0.5$. Esto significa que la viscosidad del solvente es igual al solvente del polímero.
- C) La razón geométrica $R = R_1/R_2$, esta asociada con las oclusiones y cuando $R \rightarrow 0$, la corona circular se aproxima a un capilar mientras que, cuando $R \rightarrow 1$ la corona circular esta completamente ocluida.
- D) Un hecho importante, es que los comportamientos se invierten es decir, las curvas resonantes y anti-resonantes que aparecen en el capilar se invierten en la corona circular por lo que este efecto se debe a la curvatura o puede ser inducido por un cambio en el gradiente de presión.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

4.1 Aportación al conocimiento

En este trabajo de investigación a nivel de licenciatura, se estudia el efecto del gradiente de presión transitorio sobre el flujo pulsátil de un líquido de Jeffreys. Este, se compone de una parte asociada al solvente y una al polímero. Esta ecuación constitutiva posee tres propiedades materiales: (i) Viscosidad, (ii) Tiempo de relajación de Maxwell y (iii) Tiempo de retardo del material. El sistema consiste en dos geometrías, la primera es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y la segunda es una corona circular de radios $r = R_1$ y R_2 de longitud $z = L$. Asumiendo estado no-estacionario y que los mecanismos inerciales son importantes, se obtiene una ecuación diferencial parcial lineal que describe los mecanismos: (i) inerciales, (ii) viscosos, (iii) elásticos, (iv) solvente y (v) del polímero. Asumiendo que la velocidad es máxima en el centro del tubo y que en la pared es cero, debido a que hay adherencia del líquido al sólido por fricción. Aplicando el formalismo de Fourier, en la ecuación diferencial parcial, se obtiene una ecuación algebraica en términos de la frecuencia y una diferencial ordinaria con respecto a la coordenada radial. La solución de esta expresión se expresa como la suma de dos contribuciones asociadas a una combinación de funciones de Bessel y la otra a un término no-homogéneo. Aplicando las condiciones de frontera, se obtiene el perfil de concentraciones particular en términos de una función de transferencia que depende de la frecuencia y de la coordenada radial r . El promedio de esta función de transferencia, permite deducir una función de transferencia para el flujo volumétrico. Aplicando variables adimensionales se obtienen números de Deborah asociados a la inercia y a los mecanismos del solvente. Los códigos se prepararon, en el programa Mathematica y se hacen variar los números adimensionales con el fin de obtener la respuesta dinámica del material.

4.2 Trabajo futuro

Este trabajo sienta las bases para estudiar el flujo pulsátil en el régimen de viscoelasticidad lineal tomando en cuenta los mecanismos inerciales, viscoelásticos, solvente y del polímero. Las siguientes líneas de trabajo pueden ser exploradas para la continuación de este trabajo:

- A) Extender este trabajo al régimen de viscoelasticidad no-lineal con el fin de analizar los efectos de la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales.
- B) Analizar los efectos acoplados de mecanismos:
 - (i): Transferencia de momento-energía
 - (ii): Transferencia de momento-masa
- C) Estudiar los efectos de orientación mediante ecuaciones constitutivas que describan estos mecanismos, un ejemplo de estos podrían ser los cristales líquidos nemáticos.
- D) Experimentos con fluidos complejos que describan este tipo de sistemas. En este primer punto, se pueden utilizar fluidos modelos como son: (i) sistemas micelares, (ii) dispersiones de cristales líquidos, (iii) polímeros, (iv) sistemas biológicos.
- E) Fluidos biológicos como son: (i) Sangre con colesterol bajo, (ii) Sangre con colesterol alto, (iii) Cirrosis hepática y (iv) Sangre en general con diferentes patologías.

BIBLIOGRAFÍA

Binhi VN (2008). Do naturally occurring magnetic nanoparticles in the human body mediate increased risk of childhood leukaemia with EMF exposure? *Int. J. Radiat. Biol.* 84, 569–579.

Cortassa S, Aon MA, Marbán E, Winslow RL, O'Rourke B (2023). An integrated model of cardiac mitochondrial energy metabolism and calcium dynamics. *J. Biophys.* 84, 2734–2755.

Fernández KA, Miranda LE, Torres-Herrera U (2021). Nonlinear wave interactions in pulsatile nanofluidics due to vending nanotube vibration: Net flow induced by the multiple resonances of complex pressure gradients and coupled fluid-tube forces. *Phys. Fluids* 33, 072015.

Flores Gerónimo J, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2022). Contact line dynamics of pulsatile fluid interfaces modulated by patterned substrates. *Phys. Fluids* 34, 052001.

Flores Gerónimo J, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2022). Enhanced imbibition from the cooperation between wetting and inertia via pulsating forces. *Phys. Fluids* 31, 032107.

Goldstein, Poole Classical Mechanics Third Edition & Safko, Addison Wesley."

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Medina-Torres L, Nuñez-Ramirez DM, Hernández-Abad VJ, Calderas F, Manero O (2019). New simple analytical method for flow enhancement predictions of pulsatile flow of a structured fluid. *Phys. Fluids* 31, 063104.

Helekar SA, Hambarde S, Ijare OB, Pichumani K, Baskin DS, Sharpe MA (2021). Selective induction of rapid cytotoxic effect in glioblastoma cells by oscillating magnetic fields. *J. Cancer Res. Clin. Oncol.* 147, 3577–3589

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D. Soriano-Correa C. Nuñez-Ramirez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana. UNAM, FES Zaragoza, agosto 2022. ISBN: 978-607-30-6436-1.

Krylov VV, Osipova EA (2023). Molecular biological effects of weak low frequency magnetic fields: frequency-amplitude efficiency windows and possible mechanisms. *Int. J. Mol. Sci.* 24, 10989.

Lombard J, Pagonabarraga I, Poiré EC (2020). Dynamic response of a compressible binary fluid mixture. *Phys. Rev. Fluids* 5, 064201.

Moulinos L, Manopoulos C, Tsangaris S (2023). Modification of Poiseuille Flow to a Pulsating Flow using a Periodically Expanding-Contraction Balloon. 8(4), 129.

Muralevla L (2021). Viscoplastic flow in a pipe of a complex cross section with stick-slip at the wall. *Phys. Fluids* 33, 073107.

Mukherjee S, Shit GC, Vajravelu K (2022). Effects of Diffusive Reynolds number on electro-osmotic pulsating nanofluid flow. *Phys. Fluids* 34, 122004.

Riera-Llobet C, Méndez-Mora L, Cabello-Fusarés M, Hernández-Machado A (2023). Altered blood rheology in multiwidth microchannels: Hematocrit and tonicity variation. *Phys. Fluids* 35, 013107.

Sadek SH, Pinho FT (2019). Electro-osmotic oscillatory flow of viscoelastic fluids in a microchannel, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 266, 46-58.

Shah NA, Mahsud Y, Aziz M, Tlili I (2020). Analytical solutions for unsteady electrohydrodynamics flows of a Maxwell fluid in microchannels with circular cross section. *Phys. Fluids* 32, 013107.

Torres-Herrera U (2021). Dynamic permeability of fluids in rectangular and square microchannels: Shit and coupling of viscoelastic bidimensional resonances. *Phys. Fluids* 33, 012016.

Tozzi E, Hartt W (2022). Non-Newtonian laminar flows in pipes using radius, stress, shear rate or velocity as the independent variable. *Phys. Fluids* 33, 103104.

Wolfram Research, Inc., Mathematica (Licencia UNAM) Version 13, Champaign, IL., 2020