



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**CARACTERIZACIÓN Y PROPIEDADES DE
DIGRÁFICAS
QUASI-TRANSITIVAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA :

ANDREA MORA GÓMEZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ



Ciudad Universitaria, CD. MX., 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Samuel Gómez
y Vicente Mora*

Agradecimientos

Gracias a mis padres por el esfuerzo que significó mi formación académica, especialmente a mi mamá por darme su apoyo día con día.

Gracias a mi asesora Hortensia Galeana por haberme motivado durante todo el proceso de titulación y siempre tener palabras de aliento para mí.

Gracias a Alberto Rincón por estar al pendiente de mis dudas desde que fue mi ayudante, hasta la fecha.

Gracias a mis sinodales Rocío Sánchez, Ofelia Cepeda, Germán Benitez y Carlos Alberto Vilchis por haber leído mi tesis y haberme mandado sus comentarios y correcciones.

Gracias a la Facultad de Ciencias y a la UNAM por haberme brindado una segunda casa desde que entre a CCH-Sur hace tantos años.

Gracias a mis profesores y ayudantes por su enseñanza y su tiempo, en particular a los que me enseñaron Teoría de Gráficas. Sin ellos, este trabajo no hubiera sido posible.

Gracias a Alberto Juárez por seguir siendo mi maestro, incluso después de haber aprobado su materia.

Gracias a mis amigos por haber aparecido en mi vida y hacer que mis años en la Universidad fueran tan divertidos. Gracias por haberse quedado a explicarme en tantas ocasiones, cuando sentía que estaba perdida y que no entendía nada.

Gracias al Consejo Nacional De Ciencia y Tecnología (CONACyT), por brindarme el apoyo financiero bajo el proyecto FORDECYT-PRONACES/39570/2020 Funciones y estructuras en gráficas y digráficas.

Gracias a las personas que por alguna u otra razón ya no están en mi vida, pero que aportaron a mi crecimiento profesional e hicieron de mí la persona que soy hoy.

Gracias a mis hermanos por motivarme a convertirme en un ejemplo para ellos.

Y por último, pero no menos importante, gracias a Apolonio por estar a mi lado durante todo el tiempo que elaboré esta tesis.

Índice general

Introducción	1
1 Conceptos y resultados preliminares	3
1.1 Digráficas	3
1.2 Camino, paseo, trayectoria y ciclo	5
1.3 Conexidad	6
2 Digráficas transitivas y quasi-transitivas	8
2.1 Digráficas transitivas	8
2.2 Digráficas quasi-transitivas	12
2.3 Caracterización de las digráficas quasi-transitivas	22
3 Núcleos en digráficas quasi-transitivas	24
3.1 Núcleos	24
3.2 Núcleos en digráficas m -coloreadas	27
4 Núcleos en la unión de dos digráficas quasi-transitivas	34
5 Aplicación sobre digráficas quasi-transitivas	42
5.1 Teorema de Arrow	42
5.2 Paradoja de sorites	44
5.3 La propuesta de Sen	46
Conclusión	47
Bibliografía	49

Introducción

Una digráfica D es quasi-transitiva si para x, y, z vértices de D , se tiene que si hay una flecha de x hacia y y otra de y hacia z , entonces existe al menos una flecha entre x y z (de x hacia z , de z hacia x o ambas). Este concepto fue introducido por Ghouilá–Hourri [8] basado en la definición de digráficas transitivas, ya que una digráfica H es transitiva si para x, y, z vértices de H , se tiene que si hay una flecha de x hacia y y otra de y hacia z , entonces existe una flecha de x hacia z .

En la primera parte del presente trabajo, expondremos algunos resultados de las digráficas transitivas, obtenidos de [1], para poder probar su caracterización, con el objetivo de abrir paso a las digráficas quasi-transitivas. Del mismo modo, se estudiarán las características de estas digráficas y se detallarán los resultados necesarios para finalmente, enunciar y demostrar la caracterización de las digráficas quasi-transitivas, obtenida de [2], como uno de los propósitos fundamentales de esta tesis.

La segunda parte estará dedicada a núcleos en digráficas quasi-transitivas. Las demostraciones en ese capítulo son propias, pudiendo coincidir con algunas expuestas en otras fuentes. Un núcleo N de una digráfica D es un subconjunto de vértices de D tal que es independiente y absorbente, es decir, que para cualesquiera dos vértices en N , no hay flechas entre ellos; y que para todo vértice de D fuera de N , hay una flecha hacia algún vértice en N . Este concepto fue introducido por von Neumann y Morgenstern [13] en la Teoría de Juegos y fue llamado *solución*. Posteriormente, Berge [4] le da el nombre de *núcleo* a su adaptación en la Teoría de Digráficas. La importancia del estudio de los núcleos se debe a que muchos problemas en Teoría de Juegos, Economía, Optimización, Teoría de Decisiones, etc; pueden ser modelados con digráficas y resueltos al encontrar un núcleo. Sin embargo, determinar si una digráfica tiene o no núcleo no es un problema sencillo, por lo que se ha optado por trabajar con digráficas que cumplan condiciones específicas.

Meyniel observó en [5] que si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas, entonces cada subdigráfica completa de D tiene núcleo, lo que conduce al siguiente resultado: *si D es una

digráfica quasi-transitiva finita tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos 2 flechas simétricas, entonces D es una digráfica núcleo perfecta.

Siguiendo este camino, presentaremos una generalización del concepto de núcleo, este es el núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas, introducido por Galeana-Sánchez en [6], y describiremos algunas de sus características. Uno de los resultados clásicos de este concepto es el obtenido en [11] por Sands, Sauer y Woodrow; demostraron que, en particular, ******toda digráfica 2-coloreada con un número finito de vértices tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

En el artículo *Kernels in quasi-transitive digraphs* [7], Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy proponen una generalización de los dos resultados anteriores, que estudiaremos a fondo en este escrito.

Finalmente, se realizó una investigación en la Teoría de Elección Social para exponer una aplicación usando el concepto de *relación quasi-transitiva*, propuesto por Sen en [12], que se modelará con digráficas quasi-transitivas para dar una solución a la Paradoja de Arrow [10]. Para poder entender mejor el problema del Teorema de Arrow, se expondrá la Paradoja de sorites y el ejemplo de los gramos de azúcar en el café propuesto por Luce en [9].

Las definiciones básicas para poder seguir los términos expuestos en el presente trabajo se obtuvieron de [3] y se encuentran enlistadas en el primer capítulo.

Capítulo 1

Conceptos y resultados preliminares

1.1 Digráficas

Definición 1.1. Una **gráfica dirigida** o **digráfica** es una pareja $D = (V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto no vacío de objetos, llamados los **vértices** de D , y $F(D)$ es un conjunto de pares ordenados de vértices distintos, que llamaremos las **flechas** de D .

El **orden** de D es el número de vértices de D , denotado por $|V(D)|$ y el **tamaño** de D es el número de flechas de D , denotado por $|F(D)|$.

Sean u, v vértices de D , decimos que u y v son **adyacentes** si existe una flecha de u hacia v o de v hacia u . Si a es una flecha de D y $a = (u, v)$, decimos que u **domina a** v y v **es dominado por** u , también denotado como $u \rightarrow v$ o uv ; u y v son los **extremos** de la flecha a y decimos que u es la **cola** y v es la **cabeza** de la flecha. Si a es una flecha tal que uv y vu son flechas de D , diremos que a es una **flecha simétrica**.

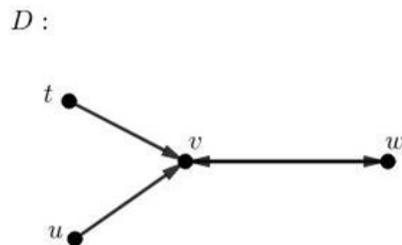


Figura 1.1

En la figura 1.1 podemos ver la representación geométrica de la digráfica D con $V(D) = \{t, u, v, w\}$ y $F(D) = \{tv, uv, vw, wv\}$.

Definición 1.2. Dadas dos digráficas D_1 y D_2 , decimos que son **isomorfas** si existe una función biyectiva $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ tal que para todo par $u, v \in V(D_1)$ el número de flechas de u hacia v es el mismo que de $f(u)$ hacia $f(v)$.

Definición 1.3. Dadas dos digráficas distintas D_1 y D_2 , definimos $D_1 \cup D_2$ como $V(D_1 \cup D_2) = V(D_1) \cup V(D_2)$ y $F(D_1 \cup D_2) = F(D_1) \cup F(D_2)$.

Definición 1.4. Sea D una digráfica, diremos que una digráfica H es una **subdigráfica** de D , denotada por $H \leq D$, si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Definición 1.5. Sean $X, Y \leq D$ subdigráficas que no comparten vértices. Escribiremos $X \rightarrow Y$ si todo vértice de X domina a todo vértice de Y , y $X \mapsto Y$ si $X \rightarrow Y$ y además no existen $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $yx \in F(D)$.

Definición 1.6. Sea D una digráfica y $G \subseteq V(D)$. La **subdigráfica** de D **inducida** por G , denotada por $D\langle G \rangle$, es tal que su conjunto de vértices es G y su conjunto de flechas son las flechas de D que tienen ambos extremos en G . Diremos que una subdigráfica $H \leq D$ es una **subdigráfica inducida** de D si H es la subdigráfica de D inducida por $V(H)$.

Definición 1.7. Sean D una digráfica y $S \leq D$ una subdigráfica. Denotaremos $D - S$ a la subdigráfica inducida $D\langle V(D) - V(S) \rangle$. Si $V(S) = \{x\}$ escribiremos simplemente $D - x$.

Definición 1.8. Para un vértice $v \in V(D)$,

$N_D^+(v) = \{u \in V(D) - \{v\} \mid (v, u) \in F(D)\}$, es la **exvecindad** de v en D .

$N_D^-(v) = \{u \in V(D) - \{v\} \mid (u, v) \in F(D)\}$, es la **invecindad** de v en D .

La **vecindad** de D , es el conjunto $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$.

Definición 1.9. Para un vértice $v \in V(D)$:

- El **exgrado** de v , se define como $\delta_D^+(v) = |N_D^+(v)|$.
- El **ingrado** de v , se define como $\delta_D^-(v) = |N_D^-(v)|$.
- El **grado** de v es $\delta_D(v) = \delta_D^+(v) + \delta_D^-(v)$.

Cuando sea muy claro en qué digráfica estamos trabajando, escribiremos simplemente, $\delta(v)$, $\delta^+(v)$ y $\delta^-(v)$.

1.2 Camino, paseo, trayectoria y ciclo

Definición 1.10. Un **camino** es una sucesión alternada de vértices y flechas, $W = (v_1, a_1, v_2, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k)$, con $v_i \in V(D)$ y $a_i \in F(D)$, tal que v_i y v_{i+1} son los extremos de a_i . Si $v_1 = v_k$, diremos que W es un **camino cerrado**. Un uv -camino es un camino que empieza en u y termina en v .

Un **paseo** P , es un camino en el que no se repiten flechas. Si $P = (v_1, a_1, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k)$ es tal que $v_1 = v_k$, diremos que P es un **paseo cerrado**.

Una **trayectoria** T , es un camino donde no se repiten vértices.

Si W es un camino cerrado tal que $W = (v_1, a_1, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k)$ y los elementos de $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ son distintos dos a dos, $k \geq 3$, decimos que W es un **ciclo**.

Nota: Cuando entre dos vértices consecutivos del camino exista una única flecha, el camino se puede denotar y se denotará por la sucesión de sus vértices.

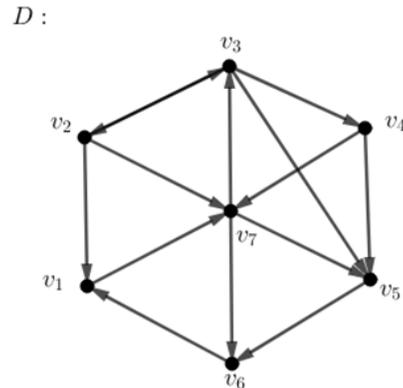


Figura 1.2

Notemos que en el ejemplo de la figura 1.2, $W_1 = (v_1, v_2, v_7, v_4)$ es un camino y $W_2 = (v_1, v_2, v_7, v_2, v_1)$ es un camino cerrado. $P_1 = (v_1, v_7, v_5, v_6, v_7)$ es un paseo y $P_2 = (v_1, v_7, v_5, v_6, v_7, v_2, v_1)$ es un paseo cerrado. $T = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$ es una trayectoria y $C = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_3)$ es un ciclo.

Definición 1.11. Un **camino dirigido** es una sucesión de vértices $W = (v_1, \dots, v_k)$, con $v_i \in V(D)$, tal que $v_i v_{i+1} \in F(D)$. Si $v_1 = v_k$, entonces diremos que W es un **camino dirigido cerrado**. Un uv -camino dirigido es un camino dirigido que empieza en u y termina en v .

Un **paseo dirigido** P , es un camino dirigido en el que no se repiten flechas. Si $P = (v_1, \dots, v_k)$ es tal que $v_1 = v_k$, diremos que P es un **paseo dirigido cerrado**.

Una **trayectoria dirigida** T , es un camino dirigido donde no se repiten vértices.

Si W es un camino dirigido cerrado tal que $W = (v_1, \dots, v_k)$ y los elementos de $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ son distintos dos a dos, con $k \geq 2$, decimos que W es un **ciclo dirigido**.

Podemos ver en la figura 1.2 que $W_3 = (v_1, v_7, v_3, v_4, v_7)$ es un camino dirigido, $W_4 = (v_1, v_7, v_3, v_4, v_7, v_6, v_1)$ es un camino dirigido cerrado. $P_3 = (v_1, v_7, v_3, v_4, v_7, v_5)$ es un paseo dirigido, $P_4 = (v_1, v_7, v_3, v_4, v_7, v_6, v_1)$ es un paseo dirigido cerrado. $T_2 = (v_1, v_7, v_3, v_2)$ es una trayectoria dirigida y $C_2 = (v_1, v_7, v_3, v_2, v_1)$ es un ciclo dirigido.

1.3 Conexidad

Definición 1.12. Una digráfica D es **conexa** (o débilmente conexa) si para cualquier par de vértices distintos u y v de D existe un uv -camino.

Una digráfica D es **unilateralmente conexa**, si para cualquier par de vértices distintos u y v de D existe un uv -camino dirigido o un vu -camino dirigido.

Una digráfica D es **fuertemente conexa** (o fuerte), si para cualquier par de vértices distintos u y v de D existe un uv -camino dirigido y un vu -camino dirigido.

Definición 1.13. Sea D una digráfica. Una **componente fuertemente conexa** de D (o componente fuerte), es una subdigráfica de D máxima por contención, con la propiedad de ser fuerte.

D :

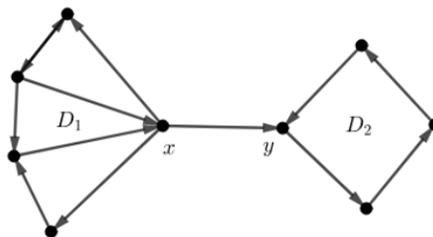


Figura 1.3

En la figura 1.3 podemos ver que las componentes fuertes de la digráfica D son D_1 y D_2 . Notemos que D es débilmente conexa, unilateralmente conexa, pero no es fuertemente conexa ya que no existe un yx -camino dirigido.

Definición 1.14. Sean D una digráfica y A, B componentes fuertes de D . Decimos que A es una **componente inicial** si $\bigcup_{v \in V(A)} N_D^-(v) \subseteq V(A)$ y B es

una **componente final** si $\bigcup_{u \in V(B)} N_D^+(u) \subseteq V(B)$.

Definición 1.15. Sean D una digráfica, se le denomina **ordenamiento acíclico** al arreglo D_1, D_2, \dots, D_k de las **componentes fuertes** de D , tales que si $i < j$, entonces $x_j x_i \notin F(D)$ para todo $x_i \in V(D_i)$ y $x_j \in V(D_j)$.

Definición 1.16. Sea D una digráfica y D_1, D_2, \dots, D_k sus componentes fuertemente conexas. La **digráfica de condensación** de D , denotada por D^* , es tal que $V(D^*) = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $v_i v_j \in F(D^*)$ si y sólo si existe $xy \in F(D)$, con $x \in V(D_i)$ y $y \in V(D_j)$.



Figura 1.4

La digráfica D^* en la figura 1.4, es la digráfica de condensación de D en la figura 1.3. Notemos que D_1 y D_2 son las componentes fuertes de D y los vértices v_1 y v_2 son sus correspondientes en D^* .

Definición 1.17. Una digráfica D es **acíclica** si no contiene ningún ciclo dirigido.

Proposición 1.1. Si D es una digráfica finita acíclica, entonces D tiene un vértice de exgrado cero.

Demostración. Supongamos que D es una digráfica acíclica tal que $\delta^+(v) > 0$ para todo $v \in V(D)$. Tomemos $v_1 \in V(D)$ y como $\delta^+(v_1) > 0$, entonces existe v_2 tal que $v_1 \rightarrow v_2$, del mismo modo, existe v_3 tal que $v_2 \rightarrow v_3$, siguiendo así obtenemos un camino $W = (v_1, \dots, v_j)$. Observemos que debe haber algún vértice que se repite, ya que de lo contrario, tendríamos una trayectoria infinita. Digamos que $v_i = v_k$, con $1 < i < k < j$, es el primer vértice que se repite, por lo que $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_k)$ es un ciclo, lo que supone una contradicción. Por lo tanto, existe al menos un vértice $x \in V(D)$ tal que $\delta^+(x) = 0$. \square

Capítulo 2

Digráficas transitivas y quasi-transitivas

2.1 Digráficas transitivas

Definición 2.1. Diremos que una digráfica D es **transitiva**, si para cualquier par $xy, yz \in F(D)$, con $x \neq z$, se cumple que la flecha $xz \in F(D)$.

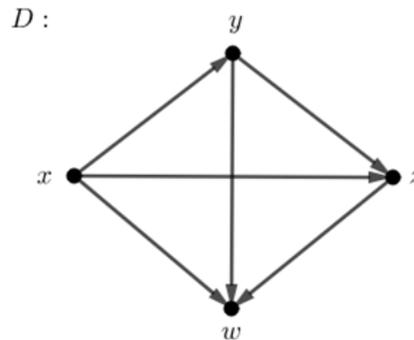


Figura 2.1

La digráfica de la figura 2.1 es transitiva ya que como $xy, yz \in F(D)$, también $xz \in F(D)$. Del mismo modo, como $xy, yw \in F(D)$, también $xw \in F(D)$. Como $xz, zw \in F(D)$, también $xw \in F(D)$. Y, como $yz, zw \in F(D)$, también $yw \in F(D)$.

Antes de entrar de lleno a la caracterización de las digráficas transitivas, veremos un par de definiciones y ejemplos necesarios para esta.

Definición 2.2. Sea D una digráfica. Se le denomina **ordenamiento acíclico** al arreglo x_1, x_2, \dots, x_k de los vértices de D , tal que si $x_i x_j \in F(D)$, entonces $i < j$.

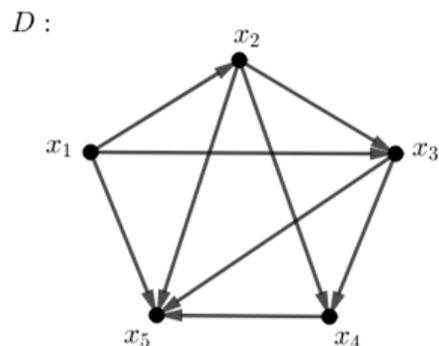


Figura 2.2

Notemos cómo en el etiquetado de los vértices en la digráfica de la figura 2.2 no hay flechas $x_i x_j$ tales que $j < i$, entonces este acomodo es un ordenamiento acíclico.

Definición 2.3. Una digráfica D es **completa** si $xy, yx \in F(D)$ para cualesquiera $x, y \in V(D)$. Si D es una digráfica completa y $|V(D)| = n$, denotaremos a D como K_n .

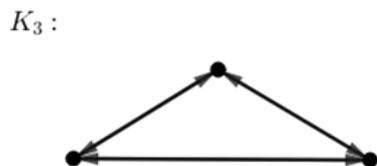


Figura 2.3

Definición 2.4. Sea D una digráfica, con $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, y sean G_1, G_2, \dots, G_n digráficas ajenas por vértices dos a dos. La **composición** $D[G_1, \dots, G_n]$ es tal que sus vértices son $V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_n)$ y sus flechas son $\left(\bigcup_{i=1}^n F(G_i)\right) \cup \{g_i g_j : g_i \in V(G_i), g_j \in V(G_j) \text{ y } v_i v_j \in F(D)\}$.

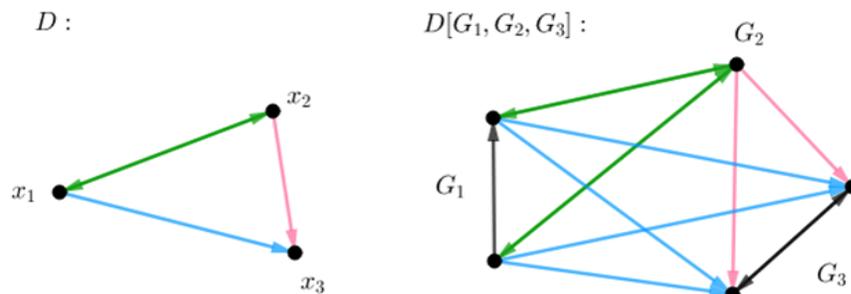


Figura 2.4

La figura 2.4 muestra la composición $D[G_1, G_2, G_3]$, donde G_1 consiste en un par de vértices y una flecha que va de uno a otro, G_2 es un único vértice, y G_3 consiste en un par de vértices y las dos flechas entre ellos.

Con estas definiciones, estamos listos para poder enunciar la caracterización de las digráficas transitivas:

Proposición 2.1. Sea D una digráfica con un ordenamiento acíclico D_1, D_2, \dots, D_p de sus componentes fuertemente conexas. D es transitiva si y sólo si cada D_i es una subdigráfica completa, D^* es una digráfica transitiva y $D = D^*[D_1, \dots, D_p]$.

Demostración. Comenzaremos probando que si D es transitiva, entonces D_i , con $i \in \{1, \dots, p\}$, es una subdigráfica completa.

Sean $u, v \in V(D_i)$, como D_i es una componente fuerte, entonces existe un uv -camino dirigido, y por lo tanto, existe una uv -trayectoria dirigida. Tomemos la uv -trayectoria dirigida de longitud mínima. Si esta es de longitud uno, entonces $uv \in F(D_i)$, de lo contrario, sea $T_1 = (u = x_1, x_2, \dots, x_k = v)$ esta trayectoria. Como $D_i \subseteq D$ y D es transitiva, si $x_1x_2, x_2x_3 \in F(D_i)$, entonces $x_1x_3 \in F(D_i)$, del mismo modo, como $x_3x_4 \in F(D_i)$, entonces $x_1x_4 \in F(D_i)$. Bajo esta secuencia, llegaremos a que $x_1x_k = uv \in F(D_i)$. De manera análoga, sea $T_2 = (v = y_1, y_2, \dots, y_s = u)$ una vu -trayectoria dirigida. Si la longitud de T_2 es uno, entonces $vu \in F(D_i)$, de lo contrario, sabemos que si $y_1y_2, y_2y_3 \in F(D_i)$, entonces $y_1y_3 \in F(D_i)$, del mismo modo, como $y_3y_4 \in F(D_i)$, entonces $y_1y_4 \in F(D_i)$. Con el argumento anterior, llegaremos a que $y_1y_s = vu \in F(D_i)$. Concluyendo que uv es una flecha simétrica, es decir, que $uv, vu \in F(D)$ para cualesquiera $u, v \in V(D_i)$. Por lo tanto, D_i es una subdigráfica completa de D .

Continuaremos con la implicación: si D es transitiva, entonces D^* es una digráfica transitiva.

Supongamos que existen $v_i, v_j, v_k \in V(D^*)$, con $v_i \neq v_k$, tales que $v_i v_j, v_j v_k \in F(D^*)$. Veamos que $v_i v_k \in F(D^*)$, (nótese que, de no existir tales vértices, D^* es transitiva). Como $v_i v_j \in F(D^*)$, entonces $x_i x_j \in F(D)$, con $x_i \in V(D_i)$ y $x_j \in V(D_j)$, y como $v_j v_k \in F(D^*)$, entonces $y_j y_k \in F(D)$, con $y_j \in V(D_j)$ y $y_k \in V(D_k)$. Por la prueba anterior, sabemos que D_j es una subdigráfica completa, entonces $x_j y_j \in F(D)$, y como $x_i x_j \in F(D)$, entonces $x_i y_j \in F(D)$, ya que D es transitiva. Y como $y_j y_k \in F(D)$, por transitividad de D , $x_i y_k \in F(D)$. Por tanto, $v_i v_k \in F(D^*)$.

Para concluir la demostración de la necesidad, probaremos que si D es transitiva, entonces $D = D^*[D_1, \dots, D_p]$, donde $p = |V(D^*)|$.

Por definición de composición $V(D^*[D_1, \dots, D_p]) = \bigcup_{i=1}^p V(D_i) = V(D)$. Y sabemos que $\bigcup_{i=1}^p F(D_i) \subseteq F(D)$ por ser D_i subdigráfica de D . Sea $u_i u_j \in F(D)$ tal que $u_i \in V(D_i)$ y $u_j \in V(D_j)$. Para todo $x_i \in V(D_i)$, con $x_i \neq u_i$, se tiene que $x_i u_i \in F(D)$, ya que D_i es una subdigráfica completa, y por transitividad de D , tenemos que $x_i u_j \in F(D)$. Ahora, por el mismo argumento, tenemos que $u_j x_j \in F(D)$, para todo $x_j \in V(D_j)$, con $x_j \neq u_j$, y nuevamente porque D es transitiva, $x_i x_j \in F(D)$. De modo que $\bigcup_{i=1}^p F(D_i) \cup \{x_i x_j : x_i \in V(D_i) \text{ y } x_j \in V(D_j), u_i u_j \in F(D^*)\} \subseteq F(D)$. Por último, sea $xy \in F(D)$, entonces se cumple una y sólo una de las siguiente dos afirmaciones: $xy \in F(D_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, p\}$, o $x \in V(D_i)$ y $y \in V(D_j)$, con $i < j$, por la definición de ordenamiento acíclico. En cualquier caso, $xy \in F(D^*[D_1, \dots, D_p])$.

Para la demostración de la suficiencia, probaremos que si cada D_i es una subdigráfica completa, D^* es una digráfica transitiva y $D = D^*[D_1, \dots, D_p]$ donde $p = |V(D^*)|$, entonces D es una digráfica transitiva.

Sean $x, y, z \in V(D)$ vértices distintos tales que $xy, yz \in F(D)$, queremos ver que $xz \in F(D)$. (Nuevamente, notemos que de no existir tales vértices, D es transitiva).

Caso 1: $x, z \in V(D_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, p\}$. Como D_i es una subdigráfica completa, entonces $xz \in F(D_i)$ y por tanto, $xz \in F(D)$.

Caso 2: $x \in V(D_i)$ y $z \in V(D_j)$, con $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i < j$, por estar en un ordenamiento acíclico.

Subcaso 2.1: $y \in V(D_i)$. Como $z \in V(D_j)$ y $yz \in F(D)$, entonces existe $v_i v_j \in F(D^*)$, y como $D = D^*[D_1, \dots, D_p]$, entonces para todo $x_i \in F(D_i)$ y para todo $x_j \in F(D_j)$, $x_i x_j \in F(D)$, en particular, $xz \in F(D)$.

Subcaso 2.2: $y \in V(D_j)$. Como $x \in V(D_i)$ y $xy \in F(D)$, entonces existe $v_i v_j \in F(D^*)$, y como $D = D^*[D_1, \dots, D_p]$, entonces para todo $x_i \in F(D_i)$ y para todo $x_j \in F(D_j)$, $x_i x_j \in F(D)$, en particular, $xz \in F(D)$.

Subcaso 2.3: $y \in V(D_k)$ con $i < k < j \in \{1, \dots, p\}$. Como $x \in V(D_i)$ y $z \in V(D_j)$, entonces existen $v_i v_k, v_k v_j \in F(D^*)$, pero D^* es transitiva, por lo que $v_i v_j \in F(D^*)$, y como $D = D^*[D_1, \dots, D_p]$, entonces para todo $x_i \in V(D_i)$ y para todo $x_j \in V(D_j)$, $x_i x_j \in F(D)$, en particular, $xz \in F(D)$. \square

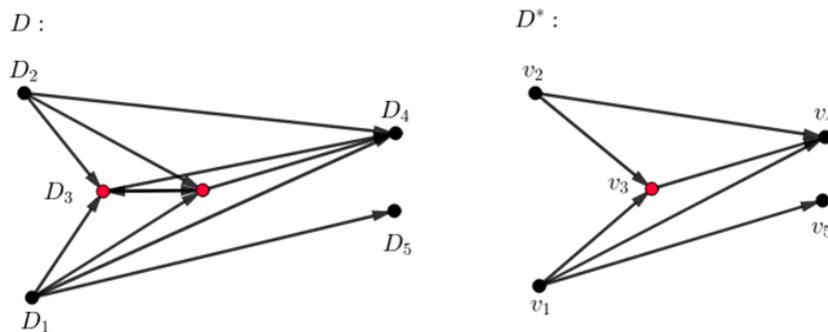


Figura 2.5

En la figura 2.5, D es una digráfica transitiva que tiene un ordenamiento acíclico de sus componentes fuertes. Notemos que D_3 es la única componente fuerte que tiene más de un vértice, y como $v_2 v_3, v_1 v_3, v_3 v_4 \in F(D^*)$, en $D^*[D_1, \dots, D_p]$ tendremos todas las adyacencias de D_2 a D_3 , de D_1 a D_3 y de D_3 a D_4 ; mientras que el resto de flechas se mantienen igual que en D por ser componentes de un solo vértice. Con esta observación, notemos que estamos describiendo a D .

2.2 Digráficas quasi-transitivas

Definición 2.5. Una digráfica D es **quasi-transitiva**, si para $x, y, z \in V(D)$ se tiene que si $xy, yz \in F(D)$, entonces existe al menos una flecha entre x y z .

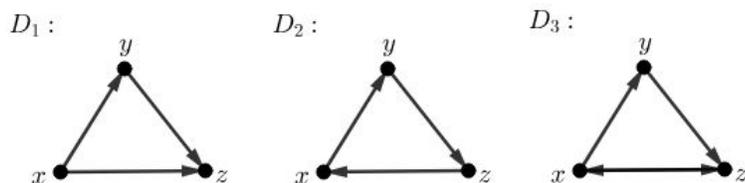


Figura 2.6

Para cada D_i en la figura 2.6, se muestran las posibles opciones de las flechas en una digráfica quasi-transitiva, recordando que de no existir vértices que cumplan con la hipótesis, la digráfica es quasi-transitiva por vacuidad.

Definición 2.6. Una digráfica D es **semicompleta** si para cualesquiera $x, y \in V(D)$ se cumple que $xy \in F(D)$ o $yx \in F(D)$.

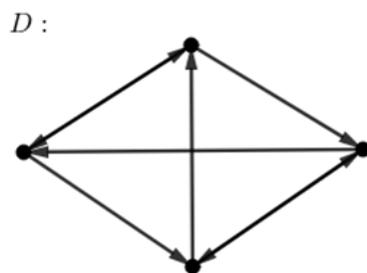


Figura 2.7

En la figura 2.7 podemos apreciar que para cualesquiera dos vértices, existe al menos una flecha entre ellos, lo que hace a D una digráfica semicompleta.

Nota: Las digráficas transitivas son digráficas quasi-transitivas, pero no siempre se cumple que las quasi-transitivas sean transitivas. De manera similar, las digráficas completas son digráficas semicompletas, pero no todas las semicompletas son completas.

Para continuar con la caracterización de digráficas quasi-transitivas, tenemos algunos resultados previos

Proposición 2.2. Sea D una digráfica quasi-transitiva. Supongamos que $T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ es una x_1x_k -trayectoria de longitud mínima. Entonces la subdigráfica inducida por $V(T)$ es una digráfica semicompleta y $x_jx_i \in F(D)$, para cada $2 \leq i + 1 < j \leq k$, excepto para $k = 4$, en este caso, la flecha entre x_1 y x_k se omite.

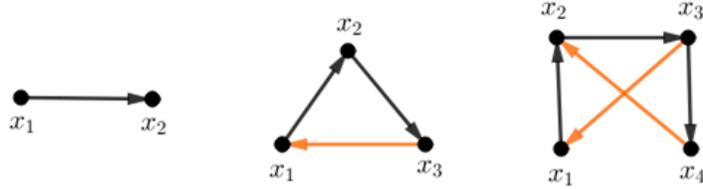


Figura 2.8

Demostración. En la figura 2.8 podemos verificar los casos para $k = 2, 3, 4$. Sea T una x_1x_k -trayectoria de longitud mínima, $H = D\langle V(T) \rangle$ y $k = 5$. Como D es quasi-transitiva, entonces x_i y x_{i+2} son adyacentes para $i = 1, 2, 3$; además, T es de longitud mínima, por lo que $x_i x_{i+2} \notin F(H)$, de modo que $x_3x_1, x_4x_2, x_5x_3 \in F(H)$. Ahora, como $x_5x_3, x_3x_1 \in F(H)$, entonces x_5 y x_1 son adyacentes, pero $x_1x_5 \notin F(H)$ ya que T es de longitud mínima, por lo que $x_5x_1 \in F(H)$. Con el mismo argumento, como $x_4x_5, x_5x_1 \in F(H)$, entonces $x_4x_1 \in F(H)$, y de igual manera, como $x_5x_1, x_1x_2 \in F(H)$, entonces $x_5x_2 \in F(H)$. Con esto se verifica que H es semi-completa y que $2 \leq i + 1 < j \leq 5$.

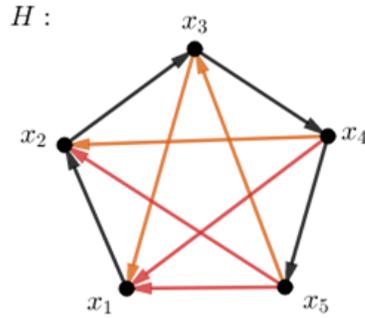


Figura 2.9

El caso para $k \geq 6$ será probado por inducción sobre k , con el caso $k = 5$ como base. Supongamos que la proposición es válida para $k = n$, veamos que también se cumple para $k = n + 1$. Sean $T^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una x_1x_n -trayectoria de longitud mínima y $T = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ una trayectoria, con $x_{n+1} \in V(D)$ y $x_l x_{n+1} \notin F(D)$, con $l = 1, \dots, n - 1$. Notemos que $D\langle V(T^*) \rangle \leq D\langle V(T) \rangle$; por hipótesis de inducción, sabemos que $D\langle V(T^*) \rangle$ es una subdigráfica semi-completa y, $x_j x_i \in F(D\langle V(T^*) \rangle)$ para $2 \leq i + 1 < j \leq n$. Como $x_{n-1}x_n, x_n x_{n+1} \in F(D\langle V(T) \rangle)$, entonces x_{n-1} y x_{n+1} son adyacentes, concluyendo que $x_{n+1}x_{n-1} \in F(D\langle V(T) \rangle)$ ya que T es de longitud mínima. Como $x_{n-1}x_i \in F(D\langle V(T^*) \rangle)$ con $i = 1, \dots, n - 3$, por cumplir con la des-

igualdad, entonces x_{n+1} y x_i son adyacentes, y nuevamente concluimos que $x_{n+1}x_i \in F(D\langle V(T) \rangle)$ por ser T de longitud mínima. Por último, tenemos que $x_{n+1}x_{n-3}, x_{n-3}x_{n-2} \in F(D\langle V(T^*) \rangle)$, entonces x_{n+1} y x_{n-2} son adyacentes, y por el mismo argumento, concluimos que $x_{n+1}x_{n-2} \in F(D\langle V(T) \rangle)$. De este modo, tenemos todas las adyacencias posibles, concluyendo que $D\langle V(T) \rangle$ es semi-completa. Además, cumple que $x_jx_i \in F(D\langle V(T) \rangle)$ para $2 \leq i+1 < j \leq n+1$. \square

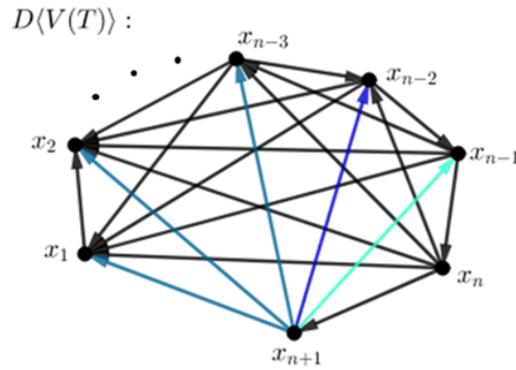


Figura 2.10

La figura 2.10 es un apoyo visual de cómo al incluir el vértice x_{n+1} a la x_1x_{n-2} -trayectoria se genera nuevamente una subgráfica semi-completa de orden $n+1$ y que todas las flechas x_jx_i cumplen que $2 \leq i+1 < j \leq n+1$.

Definición 2.7. Una **gráfica** (no dirigida), $G = (V, A)$, consiste de un conjunto finito no vacío $V = V(G)$ de objetos llamados **vértices** de G y un conjunto finito $A = A(G)$ de pares no ordenados de vértices distintos llamados **aristas** de G . Si $x, y \in V(G)$ y $\{x, y\} \in A(G)$, diremos que x y y son adyacentes.

Definición 2.8. El **complemento** de una gráfica G , denotado por \overline{G} , es la gráfica con conjunto de vértices $V(G)$ en la que dos vértices son adyacentes si y sólo si no son adyacentes en G .



Figura 2.11

En la figura 2.11 notemos que si hay una arista, digamos $\{x, y\} \in A(G)$, entonces $\{x, y\} \notin A(\overline{G})$. Similarmente, si $\{x, w\} \notin A(G)$, entonces $\{x, w\} \in A(\overline{G})$.

Definición 2.9. Sea G una gráfica. Una **biorientación** de G , es una digráfica D obtenida de G reemplazando cada arista xy ya sea por la flecha xy, yx o ambas.

Definición 2.10. Una digráfica D es una **digráfica orientada** si no contiene flechas simétricas. Una **orientación** de una gráfica G , es una biorientación que no contiene flechas simétricas.

Definición 2.11. La **gráfica subyacente** $UG(D)$ de una digráfica D , es la única gráfica G tal que D es una de sus biorientaciones.

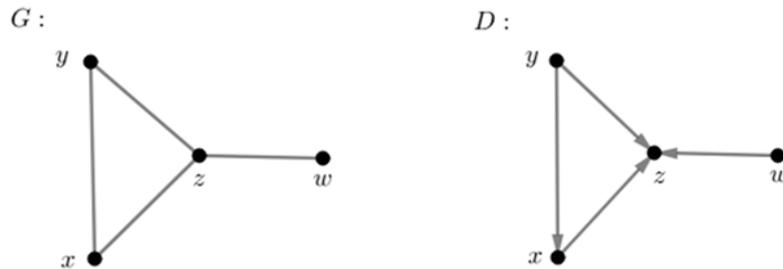


Figura 2.12

En la figura 2.12, podemos observar que D es una orientación (y biorientación) de G . De manera recíproca, $G = UG(D)$, es decir, G es la gráfica subyacente de D .

Proposición 2.3. Si una digráfica quasi-transitiva D contiene una xy -trayectoria, pero x no domina a y , entonces $yx \in F(D)$ o existen $u, v \in V(D) - \{x, y\}$ tales que $x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow y$ y $y \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow x$.

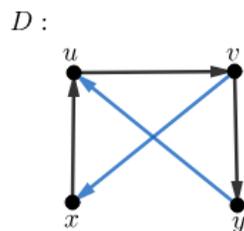


Figura 2.13

Demostración. Sea $T = (x = x_1, x_2, \dots, x_k = y)$ una xy -trayectoria de longitud mínima, mayor a uno por hipótesis. Por la proposición 2.2, sabemos que $x_k x_1 = yx \in F(D)$ con excepción del caso cuando $k = 4$, para ese caso apoyémonos en la figura 2.13. Notemos que $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4 \in F(D)$ por ser parte de T , es decir, $xu, uv, vy \in F(D)$. Y $x_4 x_2, x_3 x_1 \in F(D)$ por cumplir con la condición de la proposición 2.2, es decir, $yu, vx \in F(D)$, por lo que $yu, uv, vx \in F(D)$. \square

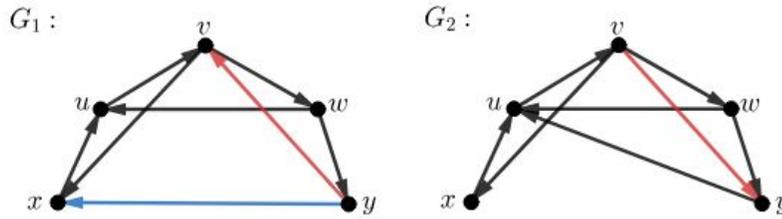


Figura 2.14

En la figura 2.14 podemos ver los dos casos de la proposición 2.3. En G_1 se eligió la flecha yv , y como G_1 es quasi-transitiva, forzosamente tenemos la flecha yx . Por otro lado, en G_2 se eligió la flecha vy , por lo que la xy -trayectoria de longitud mínima es (x, u, v, y) , teniendo así las flechas xu, uv, vy y yu, uv, vx .

Proposición 2.4. Sean A y B dos componentes fuertes distintas de una digráfica quasi-transitiva D . Si existe al menos una flecha de A a B , entonces $A \mapsto B$.

Demostración. Sean $x \in V(A)$ y $y \in V(B)$. Sabemos que existe una trayectoria de x a y en D por ser A y B componentes fuertes y porque existe al menos una flecha entre A y B . Notemos que $yx \notin F(D)$, de lo contrario, A y B formarían una misma componente fuerte, lo que contradice la hipótesis de ser distintas; con el mismo argumento, podemos notar que no existe ninguna flecha de B a A . Ahora, supongamos que existen $u, v \in V(D) - \{x, y\}$ tales que $x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow y$ y $y \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow x$, es decir, existe un yx -camino en D , lo que no puede pasar, por lo que podemos concluir que $xy \in F(D)$ usando la proposición 2.3 en contraposición. \square

En la figura 2.15 tenemos un ejemplo de la proposición 2.4, donde A y B son las componentes fuertes de D y zy es la flecha de A a B que cumple la hipótesis.

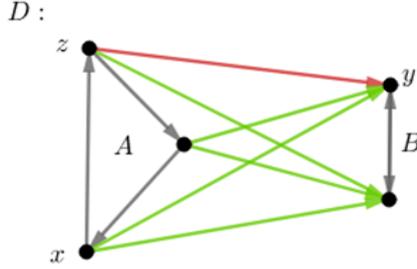


Figura 2.15

Proposición 2.5. Si D es una digráfica fuerte y quasi-transitiva con al menos dos vértices, entonces:

- (a) $\overline{UG(D)}$ es no conexas.
- (b) Si S_1 y S_2 son dos subdigráficas de D tales que $\overline{UG(S_1)}$ y $\overline{UG(S_2)}$ son distintas componentes conexas de $\overline{UG(D)}$, entonces $S_1 \mapsto S_2$ o $S_2 \mapsto S_1$, o ambas $S_1 \rightarrow S_2$ y $S_2 \rightarrow S_1$ en cuyo caso $|V(S_1)| = |V(S_2)| = 1$.

Demostración:

(a) Sea G es una digráfica. Observemos que existe un vértice u tal que $G - u$ es fuerte o bien, existe un vértice w tal que $G - w$ no es fuerte (pues este hecho es equivalente a que no sucede que para cualquier vértice u , $G - u$ no sea fuerte y simultáneamente, para cualquier vértice w , $G - w$ sea fuerte). Concluimos que para cualquier digráfica D sucede siempre una de las siguientes afirmaciones: existe en D un vértice z tal que $D - z$ no es fuerte, o bien, existe un vértice v tal que $D - v$ es fuerte. Sea D una digráfica como en la hipótesis, notemos que si $|V(D)| = 2$ y $x, y \in V(D)$, entonces $F(D) = \{xy, yx\}$, por lo que se cumplen los incisos a y b. Consideremos, pues, a D con al menos tres vértices.

Caso 1: Supongamos que existe en D un vértice z tal que $D - z$ no es fuerte, por lo mismo, notemos que en $D - z$ existen al menos una componente fuerte terminal y una componente fuerte final. Como D es fuerte, en cada componente fuerte terminal γ_t de $D - z$, debe haber una flecha hacia z en D , es decir, que en γ_t existe al menos un vértice u_0 tal que $u_0z \in F(D)$ ya que de no ser así, como γ_t es terminal no habría en D una u_0z -trayectoria, contradiciendo la hipótesis. Así mismo, en cada componente fuerte inicial γ_i de $D - z$ debe existir al menos un vértice u_1 tal que $zu_1 \in F(D)$, pues de lo contrario no habría en D una zu_1 -trayectoria. Afirmamos que para cada componente inicial X de $D - z$ y cada componente terminal Y de $D - z$, tenemos $X \rightarrow Y$, pues sea $y_0 \in V(Y)$ tal que $y_0z \in F(D)$ y $x_0 \in V(X)$ tal que $zx_0 \in F(D)$. Como D es quasi-transitiva, para $y_0z, zx_0 \in F(D)$ tenemos que $x_0y_0 \in F(D)$ o $y_0x_0 \in F(D)$. Como y_0 es parte de una componente terminal de $D - z$, se sigue que necesariamente $x_0y_0 \in F(D)$.

Así pues, observemos que como D es quasi-transitiva, $D - z$ también lo es, y por la proposición 2.4 tenemos que $X \mapsto Y$. Además, podemos observar también que z es adyacente a cada vértice de X y cada vértice de Y , pues si X es cualquier componente inicial de $D - z$ y Y cualquier componente terminal de $D - z$, sean $y_1 \in V(Y)$ y $x_1 \in V(X)$ con $y_1z, zx_1 \in F(D)$. Si x_2 es cualquier vértice de X , como $X \mapsto Y$, tenemos que para $y_1 \in V(Y)$, $x_2y_1 \in F(D)$. Como D es quasi-transitiva, y $x_2y_1 \in F(D)$, $y_1z \in F(D)$ tenemos que z es adyacente a x_2 en D . Análogamente, si y_2 es cualquier vértice de Y , tenemos que $x_1y_2 \in F(D)$, y como $zx_1 \in F(D)$, se sigue que z es adyacente a y_2 en D .

A continuación, demostraremos que cada componente no terminal de $D - z$ domina a alguna componente terminal de $D - z$ y que cada componente no inicial de $D - z$ es dominada por alguna componente inicial de $D - z$. Primero, sea γ_1 una componente no terminal de $D - z$. Afirmamos que en D , z domina a algún vértice de γ_1 : como D es fuerte, en D debe existir una zc_1 -trayectoria para $c_1 \in V(\gamma_1)$. Sea $P_1 = (z, v_1, v_2, \dots, v_n, c_1)$ una zc_1 -trayectoria en D . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $V(P_1) \cap V(\gamma_1) = \{c_1\}$ pues si sucediera que $v_j \in V(\gamma_1)$, para algún $j \in \mathbb{N}$, podríamos renombrar los vértices v_j y c_1 . Notemos que no hay flechas de $V(\gamma_1)$ a $V(P_1) - \{c_1\}$, pues de lo contrario, γ_1 no sería máxima por contención. Así, como D es quasi-transitiva, $v_{n-1}v_n$ y $v_nc_1 \in F(D)$ implican que $v_{n-1}c_1 \in F(D)$, del mismo modo, $v_{n-2}v_{n-1}$ y $v_{n-1}c_1 \in F(D)$ implican que $v_{n-2}c_1 \in F(D)$. Continuando de esta manera, llegamos eventualmente a que zv_1 y $v_1c_1 \in F(D)$ implican que $zc_1 \in F(D)$. Ahora bien, sea Y cualquier componente terminal de $D - z$ y $y_0 \in V(Y)$, con $y_0z \in F(D)$. Como $zc_1 \in F(D)$, se tiene que $c_1y_0 \in F(D)$ ($y_0c_1 \notin F(D)$) pues y_0 forma parte de una componente terminal de $D - z$. Usando la proposición 2.4, tenemos que $\gamma_1 \rightarrow Y$, además, z es adyacente en D a cada vértice de γ_1 pues para $c_2 \in V(\gamma_1)$, como $\gamma_1 \rightarrow Y$, $c_2y_0 \in F(D)$ y como $y_0z \in F(D)$, por ser D quasi-transitiva, tenemos que z y c_2 son adyacentes en D .

Ahora, demostraremos de manera completamente análoga, que si γ_2 es una componente no inicial de $D - z$, γ_2 es dominada por alguna componente inicial de $D - z$. En D existe un vértice de γ_2 que domina a z , pues como D es fuerte, debe existir una c_3z -trayectoria para $c_3 \in V(\gamma_2)$. Sea $P_2 = (c_3, u_1, u_2, \dots, u_m, z)$ una c_3z -trayectoria y supongamos que $V(P_2) \cap V(\gamma_2) = \{c_3\}$. Así, como γ_2 es una componente fuerte, no hay flechas de $V(P_2) - \{c_3\}$ a $V(\gamma_2)$, luego, $c_3 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2$ implica que $c_3 \rightarrow u_2$; $c_3 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3$ implica que $c_3 \rightarrow u_3$, y así sucesivamente hasta obtener $c_3 \rightarrow u_m \rightarrow z$ implica que $c_3 \rightarrow z$. Ahora, si X es cualquier componente inicial de $D - z$ y $x_0 \in V(X)$ es tal que $z \rightarrow x_0$, tenemos que $c_3 \rightarrow z \rightarrow x_0$ y por lo tanto, $x_0 \rightarrow c_3$, pues D es quasi-transitiva y x_0 forma parte de una componente inicial. Así, por la proposición 2.4 tenemos que $X \rightarrow \gamma_2$, y también z es adyacente a cada vértice de γ_2 en D , pues si c_4 es cualquier vértice de γ_2 , tenemos $z \rightarrow x_0 \rightarrow c_4$, por lo tanto z y c_4 son adyacentes en D . Concluimos que en cualquier caso, z es adyacente a cada vértice de $D - z$ en D . Por lo tanto, $\delta_{\overline{UG(D)}}(z) = 0$, de donde concluimos que $\overline{UG(D)}$ no es conexa.

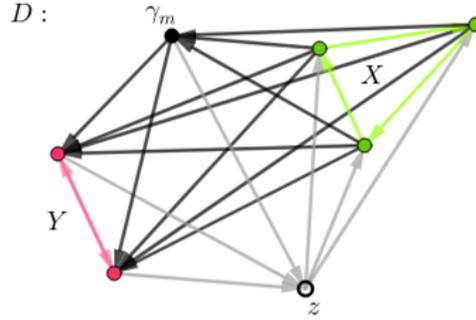


Figura 2.16

Podemos notar en la figura 2.16 que X , componente inicial de $D - z$, domina a Y , componente terminal de $D - z$, y además la componente intermedia γ_m de $D - z$ es dominada por la componente inicial y domina a la componente final de $D - z$. Podemos notar también que z es adyacente a todos los vértices de $D - z$, por lo que en $\overline{UG(D)}$, z es un vértice aislado.

Caso 2: Supongamos ahora que en D existe un vértice v tal que $D - v$ es fuerte. Procederemos por inducción sobre $|V(D)|$. Como base de inducción, consideremos $|V(D)| = 3$, con $V(D) = \{u, v, w\}$. Como $D - v$ es fuerte, entonces $F(D - v) = \{uw, wu\}$, por lo que v es adyacente a u y w en D , ya que D es fuerte y quasi-transitiva, de modo que $\overline{UG(D)}$ es los tres vértices aislados y se cumplen los incisos a y b. Como hipótesis de inducción, supongamos que la proposición se cumple para $|V(D)| = n - 1$. Sea D tal que $|V(D)| = n$, como D es fuerte, existe una flecha vw con $w \in V(D - v)$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $\overline{UG(D - v)}$ no es conexa, por lo que tiene al menos dos componentes conexas. Sean S_1 y S_2 dos componentes conexas de $\overline{UG(D - v)}$ tales que $w \in V(S_1)$ y $S_1 \mapsto S_2$, ya que de lo contrario, si γ_1 es la componente donde se encuentra w y $S_1 \mapsto \gamma_1$ para cada componente $S_1 \neq \gamma_1$ de $\overline{UG(D - v)}$, no habría en $D - v$ una ws_1 -trayectoria con $s_1 \in V(S_1)$, contradiciendo que $D - v$ es fuerte. Como $v \rightarrow w$, tenemos que v es adyacente a todos los vértices de S_2 en D por ser quasi-transitiva. Esto demuestra que al añadir a v , $\overline{UG(S_2)}$ sigue siendo sólo una componente conexa de $\overline{UG(D)}$ en la que no se encuentra v . Por lo tanto, $\overline{UG(D)}$ es no conexa, pues $\overline{UG(S_1)}$ y $\overline{UG(S_2)}$ siguen siendo componentes conexas en $\overline{UG(D)}$ y no hay trayectorias de $\overline{UG(S_2)}$ a $\overline{UG(S_1)}$.

En la figura 2.17 podemos observar que al elegir la flecha vw , como D es quasi-transitiva, entonces v es adyacente a todos los vértices de S_2 en D . De ese modo se puede asegurar que $\overline{UG(D)}$ no es conexa.

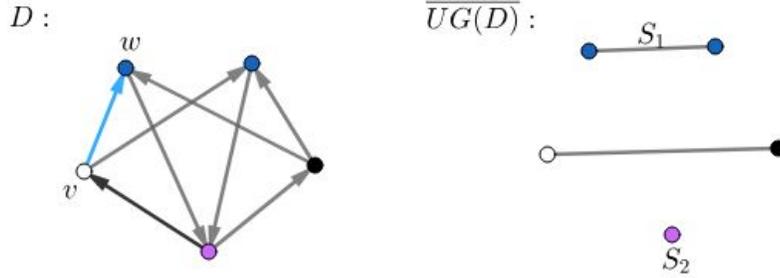


Figura 2.17

(b) Sean S_1 y S_2 como en la hipótesis, observemos que, como $V(S_1)$ y $V(S_2)$ inducen subgráficas conexas máximas por contención en $\overline{UG(D)}$, si $|V(S_1)| \neq 1$, entonces $A(\overline{UG(S_1)}) \neq \emptyset$, lo mismo para S_2 . Así, podemos demostrar por contradicción que si $S_2 \rightarrow S_1$ y $S_1 \rightarrow S_2$, entonces $|V(S_1)| = |V(S_2)| = 1$: si suponemos, sin pérdida de generalidad, que $|V(S_1)| \neq 1$, entonces $|V(S_1)| > 1$ y por ser $\overline{UG(S_1)}$ conexas, tenemos que existen al menos dos vértices distintos u y v en $V(S_1)$ que son adyacentes en $\overline{UG(S_1)}$. Eso significa que u y v no son adyacentes en D . Sea ahora $w \in V(S_2)$, como $S_1 \rightarrow S_2$, $uw \in F(D)$ y como $S_2 \rightarrow S_1$, $wv \in F(D)$, por lo tanto, como D es quasi-transitiva, se sigue que u y v son adyacentes en D , lo que es imposible pues $\{u, v\} \in A(\overline{UG(S_1)})$. Concluimos que, necesariamente $|V(S_1)| = |V(S_2)| = 1$. Supongamos ahora que $\overline{UG(S_1)}$ y $\overline{UG(S_2)}$ son distintas componentes conexas como en la hipótesis y supongamos, sin pérdida de generalidad, que S_1 tiene al menos dos vértices u y v . Como $\overline{UG(S_1)}$ y $\overline{UG(S_2)}$ son distintas componentes conexas de $\overline{UG(D)}$, por la propiedad de maximidad, tenemos que en $\overline{UG(D)}$ no hay aristas entre S_1 y S_2 . Por lo tanto, en D cualquier vértice de S_1 es adyacente a cada vértice de S_2 . Afirmamos que si en D hay una flecha con cabeza en S_2 y cola en S_1 , entonces no hay en D una flecha con cabeza en S_1 y cola en S_2 : si, por ejemplo, $uw \in F(D)$ para $u \in V(S_1)$ y $w \in V(S_2)$, entonces $wu \notin F(D)$ pues para un vértice u_0 adyacente a u en $\overline{UG(S_1)}$, tenemos $u_0w \in F(D)$ o $wu_0 \in F(D)$, pero si $u_0w \in F(D)$, $u_0 \rightarrow w \rightarrow u$, y por lo tanto, u sería adyacente a u_0 en D , y si $wu_0 \in F(D)$, $u \rightarrow w \rightarrow u_0$ y lo mismo, una contradicción con $\{u, u_0\} \in A(\overline{UG(D)})$. Así pues, supongamos por contradicción que $w_0 \rightarrow v_0$ con $w_0 \in V(S_2)$ y $v_0 \in V(S_1)$, w_0 no necesariamente distinto de w , y $v_0 \neq u$. Como $u, v_0 \in V(S_1)$, debe existir en $\overline{UG(S_1)}$ una uv_0 -trayectoria, digamos $(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_0)$. Como $w, w_0 \in V(S_2)$, debe existir en S_2 una ww_0 -trayectoria, digamos $(w, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, w_0)$. Afirmamos que $wv_1 \notin F(D)$, pues en otro caso, $u \rightarrow w \rightarrow v_1$ y tendríamos que u y v_1 son adyacentes en D , contradiciendo que $\{u, v_1\} \in A(\overline{UG(D)})$. Por lo tanto, $v_1w \in F(D)$. Así mismo, $wv_2 \notin F(D)$, pues de no ser así, $v_1 \rightarrow w \rightarrow v_2$. Por tanto, $v_2w \in F(D)$. Continuando de esta manera, llegamos a que $v_0 \rightarrow w$ y $w \nrightarrow v_0$. Observemos ahora que $w_0 \rightarrow v_0$ y $v_0 \nrightarrow w_0$, pues si $v_0 \rightarrow w_0$, como w_0 es adyacente a w_{m-1} en $\overline{UG(S_2)}$, si $w_{m-1}v_0 \in F(D)$, $w_{m-1} \rightarrow v_0 \rightarrow w_0$, como D es quasi-transitiva,

entonces w_{m-1} y w_0 serían adyacentes en D , lo que es una contradicción. De manera que en cualquier caso tenemos que $w_0 \rightarrow v_0$ y $v_0 \not\rightarrow w_0$. Así mismo, $w_{m-1} \rightarrow v_0$ y $v_0 \not\rightarrow w_{m-1}$, pues si $v_0 \rightarrow w_{m-1}$, tendríamos una contradicción con $w_0 \rightarrow v_0 \rightarrow w_{m-1}$. Continuando de esta manera, llegaremos a que $w \rightarrow v_0$ y $v_0 \not\rightarrow w$ que es una contradicción. Concluimos que $S_1 \mapsto S_2$. \square

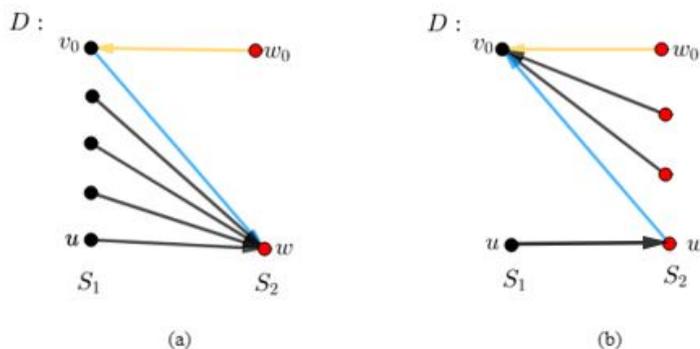


Figura 2.18

Notemos que en el inciso (a) de la figura 2.18 se obtiene que $v_0 \rightarrow w$ y $w \not\rightarrow v_0$. Y por el contrario, en el inciso (b) se llega a que $w \rightarrow v_0$ y $v_0 \not\rightarrow w$, que es una contradicción, por lo que la flecha w_0v_0 no puede estar en $F(D)$.

2.3 Caracterización de las digráficas quasi-transitivas

Procederemos a enunciar la caracterización de las digráficas quasi-transitivas en la siguiente proposición:

Proposición 2.6. Sea D una digráfica quasi-transitiva:

(a) Si D no es fuerte, entonces existe una digráfica transitiva orientada T , con vértices $\{u_1, u_2, \dots, u_t\}$, y digráficas quasi-transitivas fuertes H_1, H_2, \dots, H_t tales que $D = T[H_1, H_2, \dots, H_t]$, donde H_i es sustituida por u_i , con $i = 1, 2, \dots, t$.

(b) Si D es fuerte, entonces existe una digráfica semicompleta fuerte S con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, y digráficas quasi-transitivas Q_1, Q_2, \dots, Q_s tales que Q_i no es fuerte o es un vértice y $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$, donde Q_i es sustituido por v_i , con $i = 1, 2, \dots, s$.

Demostración. (a) Supongamos que D no es fuerte y sean H_1, H_2, \dots, H_t componentes fuertes de D . Por la Proposición 2.4, si existe una flecha entre H_i y H_j , entonces $H_i \mapsto H_j$ o $H_j \mapsto H_i$. Ahora, si $H_i \mapsto H_j \mapsto H_k$ entonces, por

quasi-transitividad y porque H_i, H_j, H_k son componentes fuertes máximas por contención, $H_i \mapsto H_k$. Entonces, contrayendo cada H_i a un vértice h_i , obtenemos una digráfica T transitiva orientada con vértices h_1, h_2, \dots, h_t . Esto demuestra que $D = T[H_1, H_2, \dots, H_t]$.

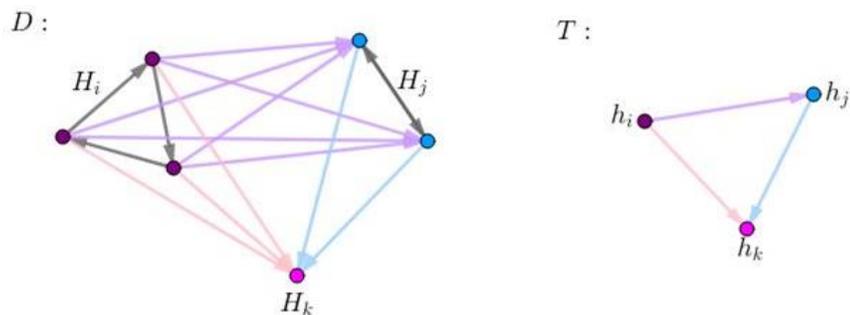


Figura 2.19

Notemos en la figura 2.19 como T se obtiene de contraer a H_i, H_j, H_k de D y que la transitividad se mantiene. Además, por construcción $D = T[H_i, H_j, H_k]$.

(b) Supongamos ahora que D es fuerte. Sean Q_1, Q_2, \dots, Q_s subdigráficas de D tales que $\overline{UG}(Q_i)$ es una componente conexa de $\overline{UG}(D)$. De acuerdo a la proposición 2.5 (a), cada Q_i es fuerte o un sólo vértice y por la proposición 2.5 (b), obtenemos una digráfica fuerte semicompleta S si cada Q_i se contrae a un vértice. Esto demuestra que $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$. \square

Capítulo 3

Núcleos en digráficas quasi-transitivas

3.1 Núcleos

Definición 3.1. Un conjunto $I \subseteq V(D)$ es **independiente** si $F(D\langle I \rangle) = \emptyset$.

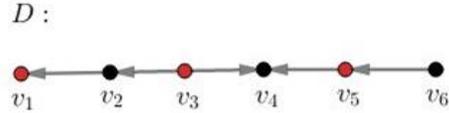


Figura 3.1

Notemos en la digráfica D de la figura 3.1 que el conjunto de vértices rojos es un conjunto independiente de D , ya que no existen flechas entre sus vértices. Por el mismo argumento, el conjunto de vértices negros es también un conjunto independiente de D .

Definición 3.2. Un **núcleo** N de D es un conjunto independiente de vértices tal que para cada $z \in V(D) - N$ existe una flecha de z a N en D , es decir, N es absorbente. Una digráfica D es llamada digráfica **núcleo-perfecta** cuando toda subdigráfica inducida de D tiene un núcleo.

Como observación, la digráfica D de la figura 3.1 es una digráfica núcleo-perfecta, ya que para cualquier subconjunto S de vértices de D , $D\langle S \rangle$ tiene un núcleo. Por ejemplo, si $S = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$, entonces $N = \{v_1, v_4\}$ es un núcleo de $D\langle S \rangle$.

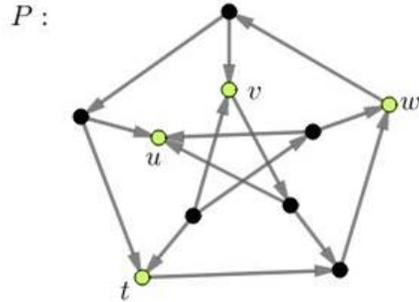


Figura 3.2

En la figura 3.2 tenemos una biorientación de la gráfica de Petersen, denotada por P . Notemos que el conjunto $N = \{t, u, v, w\} \subseteq V(P)$ es independiente, ya que sus vértices son dos a dos, no adyacentes. Además, para cualquier vértice $x \in V(P) - N$, existe una flecha de x a N ; por lo que N es un núcleo de P .

Proposición 3.1. Si D es una digráfica quasi-transitiva finita, tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D es un digráfica núcleo-perfecta.

Demostración. Como toda subdigráfica inducida de D hereda las propiedades de ser quasi-transitiva, y que cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas, entonces basta demostrar que toda digráfica con tales propiedades tiene núcleo. Procederemos a hacer esta demostración usando inducción sobre $|V(D)|$. Como base inductiva, si $|V(D)| = 1$, entonces ese vértice es su mismo núcleo. Si $|V(D)| = 2$, $V(D) = \{v_1, v_2\}$ y $\{v_1, v_2\}$ es independiente, entonces el núcleo de D es $N = \{v_1, v_2\}$. Si existe al menos una flecha, digamos $v_1 \rightarrow v_2$, entonces el núcleo de D es $N = \{v_2\}$.

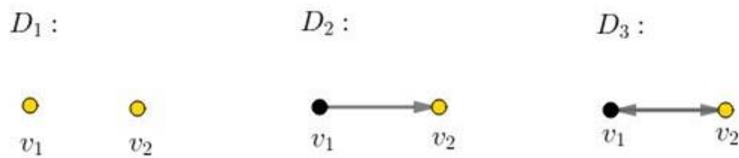


Figura 3.3

En la figura 3.3 tenemos los 3 casos que puede tomar una digráfica de orden 2. Notemos que los vértices en color amarillo son el núcleo de cada digráfica D_1, D_2 y D_3 respectivamente.

Como hipótesis de inducción, supongamos que si H es una digráfica quasi-transitiva finita tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas y $|V(H)| = q - 1$, entonces H tiene un núcleo. Veamos ahora que si D es una digráfica quasi-transitiva finita, tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas y $|V(D)| = q$, entonces D tiene un núcleo. Sea D una digráfica quasi-transitiva como en la hipótesis. Sea $S = \{xy \in F(D) \mid yx \in F(D)\}$, es decir, el conjunto de las flechas simétricas de D . Afirmamos que $D - S$ es transitiva: sean $u_1, u_2, u_3 \in V(D - S)$ tales que $u_1u_2, u_2u_3 \in F(D - S)$, como D es quasi-transitiva, entonces $u_3u_1 \in F(D)$ o $u_1u_3 \in F(D)$. Afirmación: $u_3u_1 \notin F(D)$, ya que de otro modo, (u_1, u_2, u_3, u_1) es un ciclo de longitud 3 y por lo tanto contiene al menos dos flechas simétricas, lo que no puede pasar. Por lo tanto, $u_1u_3 \in F(D)$, además $u_1u_3 \notin S$ por la afirmación anterior, por lo que $u_1u_3 \in F(D - S)$. Por lo tanto, $D - S$ es transitiva. Veamos que $D - S$ es acíclica: supongamos que $D - S$ contiene un ciclo de longitud n , denotado por $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$, como v_1v_2 y $v_2v_3 \in F(D - S)$, entonces $v_1v_3 \in F(D - S)$ ya que $D - S$ es transitiva, y como v_1v_3 y $v_3v_4 \in F(D - S)$, entonces $v_1v_4 \in F(D - S)$. Siguiendo de este modo, llegaremos a que $v_1v_{n-1} \in F(D - S)$ y como $\{v_{n-1}v_n, v_nv_1\} \subseteq F(D - S)$, entonces (v_1, v_{n-1}, v_n, v_1) es un ciclo de longitud 3, y por lo tanto tiene al menos dos flechas simétricas, lo que es una contradicción. Confirmamos entonces que $D - S$ es acíclica. Sabemos por la proposición 1.1 que toda digráfica acíclica tiene un vértice de exgrado cero. Sea $x \in V(D - S)$ tal que $\delta^+(x) = 0$ en $D - S$.

Observación: Todas las flechas de D que inician en x son simétricas.

Como $D - x$ es subdigráfica propia de D , por la hipótesis de inducción tiene núcleo, digamos N_1 , ya que $|V(D - x)| = q - 1$ y por ser quasi-transitiva y acíclica. Sea $N_* = \{y \in N_1 \mid yx \in F(D)\}$, afirmamos que $N = (N_1 - N_*) \cup \{x\}$ es núcleo de D : N es independiente ya que no existen flechas de $N_1 - N_*$ hacia x por definición de N_* , ni existen flechas de x a $N_1 - N_*$ ya que serían simétricas. Falta ver que N es absorbente: supongamos que existe $z \in V(D)$ tal que $zy \notin F(D)$ para todo $y \in N$, entonces existe $w \in N_*$ tal que $zw \in F(D)$. Como $wx \in F(D)$, entonces $zx \in F(D)$ o $xz \in F(D)$. Si $zx \in F(D)$, tendríamos una contradicción por la elección de z , entonces $xz \in F(D)$ y (z, w, x, z) es un ciclo de longitud 3, por lo tanto, contiene al menos 2 flechas simétricas, pero sabemos que $zx \notin F(D)$, por lo que $xw, wz \in F(D)$, lo que es una contradicción ya que $\delta^+(x) = 0$. Por lo tanto, N es núcleo de D . \square

En la figura 3.4 podemos visualizar que el núcleo de $D - x$ es $N_1 = \{w_2, w_4\}$ y que $N_* = \{w_2\}$, por lo que el núcleo de D es $N = \{x, w_4\}$.

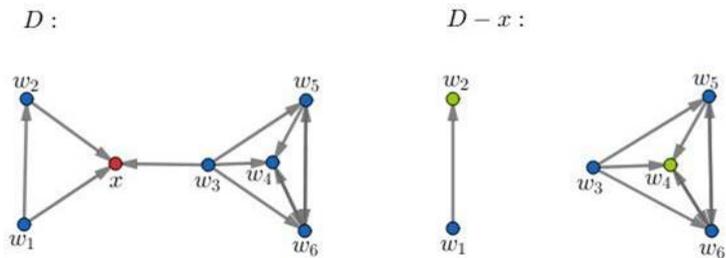


Figura 3.4

3.2 Núcleos en digráficas m -coloreadas

Definición 3.3. Sea D una digráfica y m un número natural mayor que cero. Decimos que D es una digráfica m -coloreada si las flechas de D son coloreadas con m colores.

Definición 3.4. En una digráfica m -coloreada, una trayectoria dirigida es llamada **monocromática** si todas sus flechas son coloreadas del mismo color.

En el resto del trabajo, todas las trayectorias que se consideren serán trayectorias dirigidas, excepto cuando se especifique lo contrario.

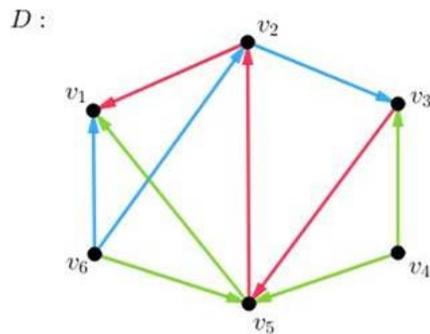


Figura 3.5

Notemos que la digráfica D en la figura 3.5 es una digráfica 3-coloreada, $T = (v_3, v_5, v_2, v_1)$ es una v_3v_1 -trayectoria monocromática.

Definición 3.5. Un **núcleo por trayectorias monocromáticas** en una digráfica D m -coloreada, es un conjunto de vértices N que satisface: (i) para cada par de vértices distintos $u, v \in N$ no existe una trayectoria monocromática

entre ellos. (ii) para cualquier vértice $x \in V(D) - N$ existe un vértice $y \in N$ tal que hay una xy -trayectoria monocromática.

Podemos ver en la figura 3.5 que $N = \{v_1\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D , ya que existen las trayectorias monocromáticas (v_2, v_1) , (v_3, v_5, v_2, v_1) , (v_4, v_5, v_1) , (v_5, v_1) y (v_6, v_1) .

Definición 3.6. Si D es una digráfica m -coloreada, entonces la **cerradura** de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$, es la digráfica tal que $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$ y $uv \in F(\mathcal{C}(D))$ si y sólo si existe una uv -trayectoria monocromática contenida en D .

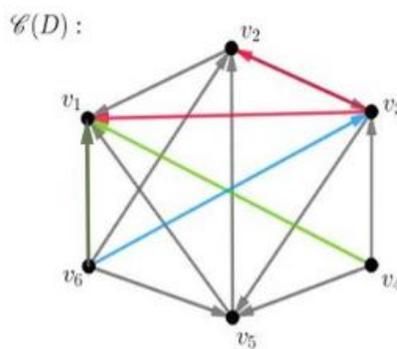


Figura 3.6

Notemos que todas las flechas de una digráfica D m -coloreada son flechas en $\mathcal{C}(D)$, ya que una flecha $v_i v_j$ en D es una $v_i v_j$ -trayectoria monocromática de longitud 1. En la figura 3.6 tenemos la cerradura de D de la figura 3.5, donde las flechas de D están en color gris y las flechas de colores representan las flechas añadidas por la existencia de trayectorias monocromáticas de longitud mayor a 1 de ese color.

Definición 3.7. Una **trayectoria exterior infinita** es de la forma $T = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ tal que existe una flecha de t_i a t_{i+1} para cada $i \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.2. Para cualquier digráfica m -coloreada D ; D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo.

Demostración. Veamos primero que si D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, entonces $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo. Sea N un núcleo por trayectorias monocromáticas de D y $y \in V(D) - N$, entonces hay un vértice $x \in N$ tal que existe una yx -trayectoria monocromática, por lo que tenemos de la definición de $\mathcal{C}(D)$ que $yx \in F(\mathcal{C}(D))$, y como y fue tomado aleatoriamente, podemos concluir que N es absorbente en $\mathcal{C}(D)$. Ahora, sean $x, z \in N$, como N es

independiente por trayectorias monocromáticas en D , entonces no existe una trayectoria monocromática de x a z ni de z a x . Por lo tanto, no existe una flecha ni de x a z ni de z a x en $\mathcal{C}(D)$, es decir, N es independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Ahora, veamos que si $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Sea N un núcleo de $\mathcal{C}(D)$, veamos que N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D . Sea $x \in V(D) - N$. Dado que N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$, tenemos que existe $y \in N$ tal que $xy \in F(\mathcal{C}(D))$, entonces por la definición de $\mathcal{C}(D)$ existe una xy -trayectoria monocromática en D de longitud mayor o igual a 1, de modo que N es absorbente por trayectorias monocromáticas en D . Sean ahora $x, z \in N$. Como N es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$, es decir, x y z no son adyacentes en $\mathcal{C}(D)$, entonces no existe una xz -trayectoria monocromática ni una zx -trayectoria monocromática en D . Por lo tanto, N es independiente por trayectorias monocromáticas en D . \square

Notemos en la figura 3.6 que $N = \{v_1\}$ es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$, así como N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D en la figura 3.5.

Tomemos como ejemplo las siguientes digráficas 2-coloreadas y cómo se ven sus cerraduras:

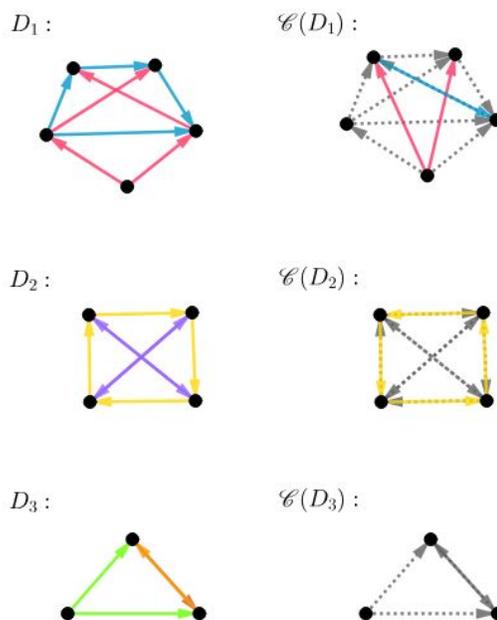


Figura 3.7

En la figura 3.7 podemos ver una 2-coloración de las digráficas D_1 , D_2 y D_3 y en las digráficas $\mathcal{C}(D_1)$, $\mathcal{C}(D_2)$ y $\mathcal{C}(D_3)$, las flechas de color son las correspon-

dientes a las trayectorias monocromáticas de longitud mayor a 1 en D_1 , D_2 y D_3 respectivamente. Notemos que, en el tercer caso, D_3 es isomorfa a $\mathcal{C}(D_3)$.

Con estos resultados, podemos notar que:

Proposición 3.3. Sea D una digráfica cuyas flechas son coloreadas con 2 colores. Si D no contiene ninguna trayectoria monocromática infinita exterior, entonces existe un conjunto S de vértices de D tal que ningún par de vértices de S son conectados por una trayectoria monocromática y para cualquier vértice $x \notin S$, existe una trayectoria monocromática de x a algún vértice en S .

La proposición anterior puede escribirse como:

Proposición 3.4. Si D es una digráfica 2-coloreada que no contiene trayectorias monocromáticas infinitas exteriores, entonces $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo.

Para fines de esta tesis no demostraremos la Proposición 3.4, pero puede encontrarse en [11].

Proposición 3.5. Sea D una digráfica, D_1 y D_2 subdigráficas transitivas de D tales que $D = D_1 \cup D_2$ y $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$. Si D no contiene trayectorias infinitas exteriores en D_i ($i = 1, 2$), entonces D tiene núcleo.

Analicemos algunos ejemplos de digráficas que son unión de 2 subdigráficas transitivas:

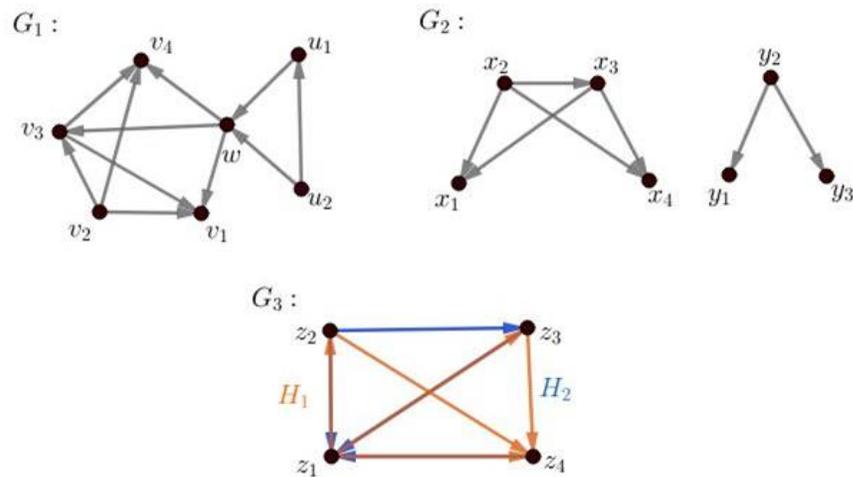


Figura 3.8

Notemos en la figura 3.8 que la digráfica G_1 puede verse como la unión de la subdigráfica transitiva inducida por $\{w, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y la subdigráfica transitiva inducida por $\{w, u_1, u_2\}$. Notemos también, que la digráfica G_2 puede verse como la unión de la subdigráfica transitiva inducida por $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y la subdigráfica transitiva inducida por $\{y_1, y_2, y_3\}$. Por último, la digráfica G_3 puede verse como la unión de la subdigráfica H_1 donde $V(H_1) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ y $F(H_1) = \{z_1z_2, z_1z_3, z_1z_4, z_2z_4, z_3z_4\}$; y la subdigráfica H_2 donde $V(H_2) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ y $F(H_2) = \{z_2z_1, z_2z_3, z_3z_1, z_4z_1\}$.

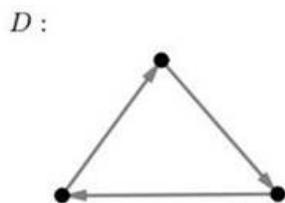


Figura 3.9

En la figura 3.9 tenemos un ejemplo de una digráfica que no puede ser unión de dos subdigráficas transitivas.

Veamos ahora, que la proposición 3.4 es equivalente a la proposición 3.5.

Demostración. I) Supongamos que la proposición 3.4 es verdadera, veamos que la proposición 3.5 se cumple. Sea D una digráfica, D_1 y D_2 subdigráficas transitivas de D tales que $D = D_1 \cup D_2$. Supongamos que D no contiene trayectorias infinitas exteriores en D_i , $i = 1, 2$. Ahora, llamemos D' a D tal que las flechas de D_1 sean de color azul y las flechas de D_2 de color rojo (ya que $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$). Como D no contiene trayectorias infinitas exteriores en D_i , $i = 1, 2$, entonces D_i , no contiene trayectorias monocromáticas infinitas exteriores en D' , y por la Proposición 3.4, $\mathcal{C}(D')$ tiene núcleo. Veamos que $\mathcal{C}(D')$ es isomorfa a D .

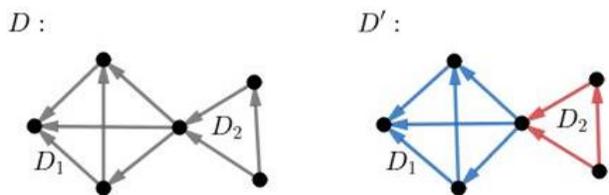


Figura 3.10

En la figura 3.10 se puede visualizar que D' es la misma digráfica que D con una 2-coloración.

- 1) $V(D) = V(D') = V(\mathcal{C}(D'))$ por definición.
- 2) Falta ver que existe una función $f : V(D) \rightarrow V(\mathcal{C}(D'))$ biyectiva tal que $uv \in F(D)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in F(\mathcal{C}(D'))$.

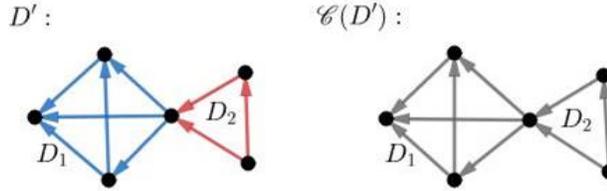


Figura 3.11

En la figura 3.11 podemos ver que D' es isomorfa a $\mathcal{C}(D')$.

- 2.1) Como $V(D) = V(\mathcal{C}(D'))$, entonces para todo $x \in V(D)$, consideramos $f(x) = x \in V(\mathcal{C}(D'))$. Y sabemos que la identidad es biyectiva.
- 2.2) Veamos primero que si $uv \in F(D)$, entonces $f(u)f(v) \in F(\mathcal{C}(D'))$. Sea $uv \in F(D)$, como la flecha uv es una uv -trayectoria de longitud 1, entonces $f(u)f(v) = uv \in F(\mathcal{C}(D'))$ por definición. Falta ver que si $f(u)f(v) \in F(\mathcal{C}(D'))$, entonces $uv \in F(D)$. Supongamos, por contradicción, que existe una flecha $xy \in F(\mathcal{C}(D'))$ de modo que no existen x' y y' en $V(D)$ tales que $f(x')f(y') = xy$. Como $xy \in F(\mathcal{C}(D'))$, entonces existe una xy -trayectoria monocromática en D' , llamémosla T , tal que $l(T) > 1$. Notemos que las flechas de T son de color azul o de color rojo, es decir, T está contenida en D_1 o D_2 . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que está contenida en D_1 . Como D_1 es transitiva, entonces x es adyacente a y en D' , ya que si $T = (x = v_1, v_2, \dots, v_n = y)$ y $xv_2, v_2v_3 \in F(D')$, entonces $xv_3 \in F(D')$. Si $xv_3, v_3v_4 \in F(D')$, entonces $xv_4 \in F(D')$. Continuando de esta manera, llegaremos a que $xv_n \in F(D')$, es decir, $xy \in F(D')$, que es una contradicción, ya que $F(D') = F(D)$, es decir, $xy \in F(D)$.

II) Supongamos ahora que la proposición 3.5 es verdadera, veamos que la proposición 3.4 se cumple. Sea D una digráfica 2-coloreada con los colores azul y rojo, que no contiene trayectorias monocromáticas infinitas exteriores y sea $\mathcal{C}(D)$ con una 2-coloración tal que si existe una xy -trayectoria de color azul (rojo) en D , entonces xy es una flecha de color azul (rojo) en $\mathcal{C}(D)$. Para esta demostración admitiremos flechas múltiples, por ejemplo, si existe una xy -trayectoria de color azul y otra xy -trayectoria de color rojo en D , entonces habrán dos flechas de x a y en $\mathcal{C}(D)$, una azul y otra roja.

En la digráfica D de la figura 3.12 podemos ver las trayectorias (x, z, y) azul y (x, y) roja, por lo que en $\mathcal{C}(D)$ tendremos una flecha de x a y de cada color.

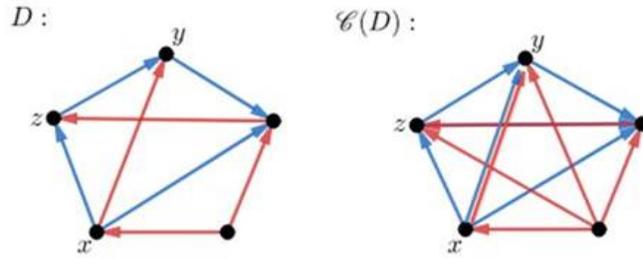


Figura 3.12

Llamemos D_1 a la subdigráfica de $\mathcal{C}(D)$ tal que $V(D_1) = V(\mathcal{C}(D))$ y las flechas de D_1 son las flechas de $\mathcal{C}(D)$ de color azul; y D_2 a la subdigráfica de $\mathcal{C}(D)$ tal que $V(D_2) = V(\mathcal{C}(D))$ y las flechas de D_2 son las flechas de $\mathcal{C}(D)$ de color rojo. Notemos que $\mathcal{C}(D) = D_1 \cup D_2$ ya que $V(\mathcal{C}(D)) = V(D_1) \cup V(D_2) = V(D_1 \cup D_2)$; y que cualquier flecha de $\mathcal{C}(D)$ es de color azul o de color rojo. Veamos que D_1 y D_2 son subdigráficas transitivas. Sean $xy, yz \in F(D_1)$, entonces existen una xy -trayectoria y una yz -trayectoria ambas de color azul en D , por lo que la unión de ambas resulta un xz -camino de color azul que contiene una xz -trayectoria de color azul en D , por lo tanto, en $\mathcal{C}(D)$ existe la flecha xz y es de color azul. Por lo tanto, D_1 es transitiva. Con los mismos argumentos, podemos ver que D_2 también es transitiva. Como D_1 y D_2 son subdigráficas transitivas de $\mathcal{C}(D)$, $\mathcal{C}(D) = D_1 \cup D_2$, y además, como D no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces $\mathcal{C}(D)$ tampoco, y por tanto, no hay trayectorias infinitas exteriores en D_i , $i = 1, 2$. Por la Proposición 3.5, podemos concluir que $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo. \square

Capítulo 4

Núcleos en la unión de dos digráficas quasi-transitivas

Definición 4.1. Sean X un conjunto y R una relación binaria sobre el conjunto X . Decimos que X es un **conjunto parcialmente ordenado** por R si para cualesquiera $a, b, c \in X$ se tiene que:

- 1) aRa (reflexividad).
- 2) Si aRb y bRc , entonces aRc (transitividad).
- 3) Si aRb y bRa , entonces $a = b$ (antisimetría).

Definición 4.2. Sean X un conjunto parcialmente ordenado por R y $a \in X$. Decimos que a es una **cota superior** de X si para todo $b \in X$, bRa .

Definición 4.3. Sean X un conjunto parcialmente ordenado por R y C un subconjunto de X . Diremos que C es una **cadena** si para cualesquiera dos elementos $a, b \in C$ se cumple al menos una de las dos siguientes afirmaciones: aRb o bRa .

Para continuar, introduciremos la siguiente notación. Sean D una digráfica y D_1, D_2 dos subdigráficas de D (posiblemente $F(D_1) \cap F(D_2) \neq \emptyset$). Para distintos vértices $x, y \in V(D)$ y $S \subseteq V(D)$, $x \xrightarrow{i} y$ significa que la flecha $xy \in F(D_i)$ y $x \xrightarrow{i} S$ significa que existe una flecha en D_i de x hacia un vértice en S . La negación de $x \xrightarrow{i} y$ ($x \xrightarrow{i} S$) se denotará como $x \not\xrightarrow{i} y$ ($x \not\xrightarrow{i} S$), para $i = 1, 2$. Cuando no sepamos si la flecha está en D_1 o D_2 , escribiremos simplemente $x \rightarrow y$, y $x \not\rightarrow y$ significa que $xy \notin F(D)$. Un ciclo dirigido de longitud 3 será llamado triángulo.

Proposición 4.1. Sea D una digráfica tal que todo triángulo tiene al menos dos flechas simétricas. Si D_1 es una subdigráfica quasi-transitiva de D y

(v_1, v_2, \dots, v_n) es una sucesión de vértices de D_1 tal que, $v_i v_{i+1} \in F(D_1)$ y $v_{i+1} v_i \notin F(D_1)$, entonces la sucesión es una trayectoria asimétrica (que no contiene flechas simétricas) de D contenida en D_1 , y para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $v_i v_j \in F(D_1)$ y $v_j v_i \notin F(D_1)$ para todo $j \in \{i+1, \dots, n\}$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n . Tomaremos el caso para $n \leq 2$, expuesta en la figura 4.1, como base inductiva.

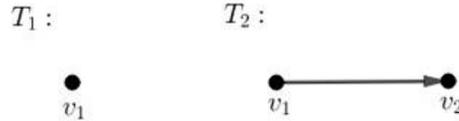


Figura 4.1

La figura 4.1 muestra los casos para cuando $n = 1$ en T_1 y $n = 2$ en T_2 .

Supongamos que el resultado es verdadero para una sucesión $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ que satisfice la hipótesis de la Proposición 4.1. Consideremos la sucesión $T' = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1})$ tal que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i v_{i+1} \in F(D_1)$ y $v_{i+1} v_i \notin F(D_1)$. Como T es una trayectoria asimétrica contenida en D_1 , se sigue de la hipótesis de inducción, que para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $v_i v_j \in F(D_1)$ y $v_j v_i \notin F(D_1)$ para todo $j \in \{i+1, \dots, n\}$. Sólo nos falta probar que para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, con $v_i \neq v_{n+1}$, $v_i v_{n+1} \in F(D_1)$ y $v_{n+1} v_i \notin F(D_1)$.

Supongamos por contradicción que, $v_i = v_{n+1}$ para alguna $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Se sigue de la hipótesis de inducción en T , que $v_i v_n = v_{n+1} v_n \in F(D_1)$, lo que es una contradicción a la hipótesis en T' . Concluimos que T' es una trayectoria asimétrica de D contenida en D_1 . Ahora, tenemos de la hipótesis inductiva en T , que para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $v_i v_n \in F(D_1)$ y como $v_n v_{n+1} \in F(D_1)$ y D_1 es una subdigráfica quasi-transitiva, tenemos que $v_i v_{n+1} \in F(D_1)$ o $v_{n+1} v_i \in F(D_1)$. Si $v_{n+1} v_i \in F(D_1)$, entonces $C = (v_i, v_n, v_{n+1}, v_i)$ es un triángulo, y por la hipótesis en D , C tiene al menos dos flechas simétricas, lo que no es posible, ya que $v_{n+1} v_n \notin F(D_1)$ y $v_n v_i \notin F(D_1)$. Por lo tanto, $v_i v_{n+1} \in F(D_1)$ y $v_{n+1} v_i \notin F(D_1)$. \square

Proposición 4.2. Sean D una digráfica tal que todo triángulo tiene al menos dos flechas simétricas, y D_1 una subdigráfica quasi-transitiva de D que no contiene trayectorias infinitas exteriores (en D). Si $\emptyset \neq U \subseteq V(D)$, entonces existe $x \in U$ tal que para todo $y \in U$, $xy \in F(D_1)$ implica que $yx \in F(D)$.

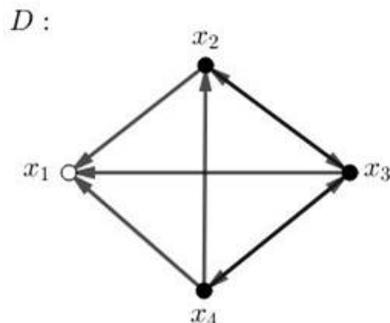


Figura 4.2

En la figura 4.2, consideremos a D_1 como la subdigráfica inducida de D dada por $V(D_1) = \{x_2, x_3, x_4\}$ y $V(U) = \{x_2, x_4\}$. Notemos que x_4 no cumple que para cualquier otro elemento en U , es decir x_2 , si $x_4x_2 \in F(D_1)$, entonces $x_2x_4 \in F(D)$; pero x_2 sí lo cumple, ya que x_3 es el único exvecino de x_2 en U y $x_3x_2 \in F(D)$.

Demostración. Sean D , D_1 y U como en las hipótesis. Supongamos por contradicción, que para cada $x \in U$, existe $y \in U$ tal que $xy \in F(D_1)$ y $yx \notin F(D)$. Consideremos algún $x_1 \in U$, entonces existe $x_2 \in U$ tal que $x_1x_2 \in F(D_1)$ y $x_2x_1 \notin F(D)$. De modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $x_n \in U$, existe $x_{n+1} \in U$ tal que $x_nx_{n+1} \in F(D_1)$ y $x_{n+1}x_n \notin F(D)$. Continuando de esta manera, tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una trayectoria $T_m = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ definida inductivamente como se explico en lo anterior. Se sigue de la Proposición 4.1 que $T_{n+1} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ es una trayectoria asimétrica dirigida de D contenida en D_1 . Consideremos la sucesión $T = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_nx_{n+1} \in F(D_1)$, y si $n < m$ tenemos que $\{x_n, x_m\} \subseteq V(T_m)$ y como T_m es una trayectoria dirigida, entonces $x_n \neq x_m$; por eso T es una trayectoria infinita exterior asimétrica de D contenida en D_1 , lo que es una contradicción. \square

Para la demostración de la siguiente proposición, necesitaremos del siguiente lema:

Lema de Zorn: Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, contiene al menos un elemento máximo por contención (o maximal).

Proposición 4.3. Sea D una digráfica tal que $D = D_1 \cup D_2$ (posiblemente $F(D_1) \cap F(D_2) \neq \emptyset$), donde D_i , $i = 1, 2$, es una subdigráfica quasi-transitiva de D que no contiene trayectorias exteriores infinitas asimétricas (en D). Si todo triángulo contenido en D tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D es una digráfica núcleo perfecta.

Demostración. Basta probar que D tiene núcleo, ya que cualquier subdigráfica inducida de D cumple la hipótesis de la proposición 4.3. Para dos conjuntos independientes de vértices S y T de D , escribiremos $S \leq T$ si y sólo si para cada $s \in S$ existe $t \in T$ tal que $s = t$ o $(s \xrightarrow{1} t$ y $t \nrightarrow s)$. Nótese que en particular, $S \subseteq T$ implica que $S \leq T$.

(1) Veamos que la colección de todos los conjuntos independientes de vértices de D es parcialmente ordenado por \leq .

(1.1) \leq es reflexiva.

Esto se sigue de que $S \subseteq S$.

(1.2) \leq es transitiva.

Sean S, T y R conjuntos independientes de vértices de D tales que $S \leq T$ y $T \leq R$, y sea $s \in S$. Como $S \leq T$, entonces existe $t \in T$ tal que $s = t$ o $(s \xrightarrow{1} t$ y $t \nrightarrow s)$, y $T \leq R$ implica que existe $r \in R$ tal que $t = r$ o $(t \xrightarrow{1} r$ y $r \nrightarrow t)$. Si $s = t$ o $t = r$, entonces $s = r$ o $(s \xrightarrow{1} r$ y $r \nrightarrow s)$, con $r \in R$. Supongamos que $s \neq t$, $t \neq r$, $(s \xrightarrow{1} t$ y $t \nrightarrow s)$ y $(t \xrightarrow{1} r$ y $r \nrightarrow t)$. Como D_1 es una digráfica quasi-transitiva, se sigue de la proposición 4.1 en la sucesión (s, t, r) , que $(s \xrightarrow{1} r$ y $r \nrightarrow s)$.

(1.3) \leq es antisimétrica.

Sean S y T conjuntos independientes de vértices de D tales que $S \leq T$ y $T \leq S$, veamos que $S = T$. Sea $s \in S$, como $S \leq T$, existe $t \in T$ tal que $s = t$ o $(s \xrightarrow{1} t$ y $t \nrightarrow s)$. Supongamos que $s \neq t$. Como $T \leq S$ implica que existe $s' \in S$ tal que $t = s'$ o $(t \xrightarrow{1} s'$ y $s' \nrightarrow t)$, cuando $t = s'$, entonces $s \xrightarrow{1} s'$ contradiciendo que S es un conjunto independiente; entonces $t \neq s'$ y $(t \xrightarrow{1} s'$ y $s' \nrightarrow t)$. Ahora, aplicando la Proposición 4.1 en la sucesión (s, t, s') , tenemos que $s \xrightarrow{1} s'$, contradiciendo que S es un conjunto independiente. Concluimos que $s = t$ y en consecuencia $s \in T$ y $S \subseteq T$. De manera análoga, se puede ver que $T \subseteq S$.

Sea \mathcal{F} la familia de conjuntos independientes S , no vacíos, de vértices de D tales que $S \xrightarrow{2} y$ implica que $y \rightarrow S$ para todo vértice $y \in V(D)$.

(2) Veamos que (\mathcal{F}, \leq) tiene elementos maximales.

(2.1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Como D_2 es una digráfica quasi-transitiva que no contiene trayectorias exteriores infinitas asimétricas, se sigue de la Proposición 4.2 (tomando $U = V(D)$ y D_2 en lugar de D_1) que existe un vértice $x \in V(D)$ tal que $x \xrightarrow{2} y$ implica que $y \rightarrow x$, para todos los vértices $y \in V(D)$, por lo que $\{x\} \in \mathcal{F}$.

(2.2) Toda cadena en (\mathcal{F}, \leq) tiene una cota superior.

Sea \mathcal{C} una cadena en (\mathcal{F}, \leq) , y definimos $S^\infty = \{s \in \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S \mid \text{existe } S \in \mathcal{C} \text{ tal que } s \in S \text{ siempre que } T \in \mathcal{C} \text{ y } S \leq T\}$. (S^∞ consiste de todos los vértices de D que pertenecen a cada miembro de \mathcal{C} desde algún punto en adelante). Veamos que S^∞ es una cota superior de \mathcal{C} .

(2.2.1) $S^\infty \neq \emptyset$, y para cada $S \in \mathcal{C}$, $S \leq S^\infty$.

Sean $S \in \mathcal{C}$ y $t_0 \in S$. Probaremos que existe $t \in S^\infty$ tal que $t_0 = t$ o $(t_0 \xrightarrow{1} t$ y $t \not\rightarrow t_0)$. Si $t_0 \in S^\infty$, entonces se cumple alguna de las dos condiciones anteriores, por lo que asumiremos que $t_0 \notin S^\infty$. Procederemos por contradicción; supongamos que si $t \in V(D)$ con $(t_0 \xrightarrow{1} t$ y $t \not\rightarrow t_0)$, entonces $t \notin S^\infty$. Tomemos $T_0 = S$. Como $t_0 \notin S^\infty$ tenemos que existe $T_1 \in \mathcal{C}$, $T_1 \geq T_0$ tal que $t_0 \notin T_1$. Por lo tanto, existe $t_1 \in T_1$ tal que $t_0 \xrightarrow{1} t_1$ y $t_1 \not\rightarrow t_0$. Y nuestra suposición implica que $t_1 \notin S^\infty$. El hecho de que $t_1 \notin S^\infty$ implica que $t_1 \notin T_2$ para algún $T_2 \in \mathcal{C}$, $T_2 \geq T_1$. Por lo tanto, existe $t_2 \in T_2$ tal que $t_1 \xrightarrow{1} t_2$ y $t_2 \not\rightarrow t_1$. Como D_1 es una digráfica quasi-transitiva, se sigue de la Proposición 4.1 en la sucesión $\tau_2 = (t_0, t_1, t_2)$ que τ_2 es una trayectoria dirigida asimétrica de D contenida en D_1 , $(t_0 \xrightarrow{1} t_2$ y $t_2 \not\rightarrow t_0)$; y $t_2 \notin S^\infty$. Si continuamos de esta manera, obtendremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n \in \mathcal{C}$, $t_n \in T_n$, $(t_0 \xrightarrow{1} t_n$ y $t_n \not\rightarrow t_0)$ y $t_n \notin S^\infty$. Por lo tanto, existe $T_{n+1} \in \mathcal{C}$ tal que $T_{n+1} \geq T_n$ y $t_n \notin T_{n+1}$. Entonces, existe $t_{n+1} \in T_{n+1}$ con $(t_n \xrightarrow{1} t_{n+1}$ y $t_{n+1} \not\rightarrow t_n)$. Como D_1 es una digráfica quasi-transitiva, y $(t_n \xrightarrow{1} t_{n+1}$ y $t_{n+1} \not\rightarrow t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue de la Proposición 4.1 (en la sucesión $\tau_{n+1} = (t_0, t_1, \dots, t_{n+1})$) que τ_{n+1} es una trayectoria dirigida asimétrica contenida en D_1 , y en particular $(t_0 \xrightarrow{1} t_{n+1}$ y $t_{n+1} \not\rightarrow t_0)$. Nuestra suposición implica que $t_{n+1} \notin S^\infty$. Ahora, considérese la sucesión $\tau = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(t_n \xrightarrow{1} t_{n+1}$ y $t_{n+1} \not\rightarrow t_n)$, y notemos que para $n < m$, $\{t_n, t_m\} \subseteq V(\tau_m)$, y como τ_m es una trayectoria dirigida, tenemos que $t_n \neq t_m$. Por lo tanto, τ es una trayectoria exterior infinita asimétrica contenida en D_1 , lo que es una contradicción. Así, como no existen trayectorias infinitas exteriores en T_1 , se sigue que S^∞ es no vacío. Concluimos que existe $t \in S^\infty$ tal que $(t_0 \xrightarrow{1} t$ y $t \not\rightarrow t_0)$.

(2.2.2) S^∞ es un conjunto independiente.

Sean $s_1, s_2 \in S^\infty$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ son tales que $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ y $S_1 \leq S_2$. Como $s_1 \in S^\infty$, tenemos que $s_1 \in S$ siempre que $S \in \mathcal{C}$ y $S_1 \leq S$, entonces $s_1 \in S_2$, y como S_2 es independiente, entonces no hay una flechas entre s_1 y s_2 en D .

(2.2.3) $S^\infty \in \mathcal{F}$.

Hay que ver que para cada vértice $y \in V(D)$ si $S^\infty \xrightarrow{2} y$ entonces $y \rightarrow S^\infty$. Supongamos que $S^\infty \xrightarrow{2} y$ con $y \in V(D)$, es decir, existe $s \in S^\infty$ con $s \xrightarrow{2} y$. Sea $S \in \mathcal{C}$ tal que $s \in T$ para todo $T \in \mathcal{C}$ con $S \leq T$, en particular $s \in S$. Como $S \in \mathcal{F}$, $s \xrightarrow{2} y$ y $y \rightarrow S$, entonces existe $s' \in S$ con $y \rightarrow s'$. Cuando $s' \in S^\infty$, ya terminamos. Cuando $s' \notin S^\infty$, tenemos dos posibilidades: $y \xrightarrow{1} s'$ o $y \xrightarrow{2} s'$. Primero supongamos que $y \xrightarrow{2} s'$. Como $s \xrightarrow{2} y$ y D_2 es una digráfica quasi-transitiva, se sigue que $s \xrightarrow{2} s'$ o $s' \xrightarrow{2} s$, lo que no es posible ya que S es un conjunto independiente y $\{s, s'\} \subseteq S$. Ahora, supongamos que $y \xrightarrow{1} s'$, como $s' \in S$, $S \leq S^\infty$ por el inciso (2.2.1) y $s' \notin S^\infty$, existe $t \in S^\infty$ tal que $s' \xrightarrow{1} t$ y $t \not\rightarrow s'$. Obtenemos que $y \xrightarrow{1} t$ o $t \xrightarrow{1} y$, ya que $y \xrightarrow{1} s'$, $s' \xrightarrow{1} t$ y D_1 es una digráfica quasi-transitiva. Si $y \xrightarrow{1} t$, entonces $y \xrightarrow{1} S^\infty$ y ya terminamos.

Si $t \xrightarrow{1} y$, entonces obtenemos el triángulo (y, s', t, y) , y se sigue de la hipótesis que tiene dos flechas simétricas, y como $t \nrightarrow s'$, tenemos que $s' \rightarrow y$ y $y \rightarrow t$, así que $y \rightarrow S^\infty$.

Hemos probado que cualquier cadena en \mathcal{F} tiene una cota superior en \mathcal{F} y por el Lema de Zorn, (\mathcal{F}, \leq) tiene elementos maximales. Sea S' un elemento maximal de (\mathcal{F}, \leq) .

(3) S' es un núcleo de D .

Como $S' \in \mathcal{F}$, S' es un conjunto independiente de vértices de D .

(3.1) S' es un conjunto absorbente.

Veamos que para cada $x \in (V(D) - S')$, existe una flecha de x a S' . Supongamos por contradicción, que existe $x \in (V(D) - S')$ tal que $x \nrightarrow S'$.

(3.1.1) Veamos que existe un vértice $x_0 \in V(D)$ tal que $x_0 \nrightarrow S'$ y x_0 satisface: $x_0 \xrightarrow{2} y$ y $y \nrightarrow S'$ implica que $y \rightarrow x_0$ para todo vértice $y \in V(D)$.

Sea $U = \{z \in V(D_2) - S' \mid z \nrightarrow S'\}$. Cuando $U \neq \emptyset$, se sigue de la Proposición 4.2 (aplicada en D_2 y D) que existe x_0 con las propiedades requeridas. Cuando $U = \emptyset$, se sigue de nuestra suposición que $z \nrightarrow S'$, para algún vértice $z \in V(D_1) - (S' \cup V(D_2))$. Denotemos por x_0 a tal vértice.

Notemos que la elección de x_0 implica que $x_0 \nrightarrow S'$ y como $S' \in \mathcal{F}$, también tenemos $S' \xrightarrow{2} x_0$. Sea $T = \{s \in S' \mid s \xrightarrow{1} x_0\}$, se sigue de lo anterior que $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente de vértices de D .

(3.1.2) $T \cup \{x_0\} \in \mathcal{F}$

Supongamos que $T \cup \{x_0\} \xrightarrow{2} y$ y $y \nrightarrow T$. Probaremos que $y \rightarrow x_0$. Primero, hagamos las siguientes observaciones:

(3.1.2.1) Si $y \xrightarrow{1} (S' - T)$ entonces $y \rightarrow x_0$.

Sea $s \in (S' - T)$ tal que $y \xrightarrow{1} s$. Como $s \in (S' - T)$ tenemos que $s \xrightarrow{1} x_0$. Ahora, el hecho de que D_1 es una digráfica quasi-transitiva implica que $y \xrightarrow{1} x_0$ o $x_0 \xrightarrow{1} y$. Si $x_0 \xrightarrow{1} y$, entonces (y, s, x_0, y) es un triángulo que por la hipótesis tiene dos flechas simétricas, y como $x_0 \nrightarrow s$ se sigue que $y \rightarrow x_0$.

Procederemos a demostrar el inciso (3.1.2) considerando los siguientes dos casos:

Caso a: $T \xrightarrow{2} y$.

Como $T \subset S'$ tenemos que $S' \xrightarrow{2} y$, y el hecho de que $S' \in \mathcal{F}$ implica que $y \rightarrow S'$. Así, $y \rightarrow (S' - T)$ (si asumimos que $y \nrightarrow T$). Cuando $y \xrightarrow{1} (S' - T)$, se sigue del inciso (3.1.2.1) que $y \rightarrow x_0$. Cuando $y \xrightarrow{2} (S' - T)$, como tenemos que $T \xrightarrow{2} y$ y D_2 es una digráfica quasi-transitiva, obtenemos que $T \xrightarrow{2} (S' - T)$ o $(S' - T) \xrightarrow{2} T$, pero esto es imposible ya que $T \subseteq S'$ y S' es un conjunto independiente.

Caso b: $x_0 \xrightarrow{2} y$. Consideramos dos posibles subcasos:

Caso b.1: $y \nrightarrow S'$.

Como $x_0 \xrightarrow{2} y$ y $y \nrightarrow S'$, la elección de x_0 (ver inciso (3.1.1)) implica que $y \rightarrow x_0$.

Caso b.2: $y \rightarrow S'$.

En este caso tenemos que $y \rightarrow (S' - T)$ (si asumimos que $y \nrightarrow T$). Cuando $y \xrightarrow{2} (S' - T)$, como $x_0 \xrightarrow{2} y$ y D_2 es una digráfica quasi-transitiva, tenemos que $x_0 \xrightarrow{2} (S' - T)$ o $(S' - T) \xrightarrow{2} x_0$. Ahora, recordando que $x_0 \nrightarrow S'$, obtenemos que $(S' - T) \xrightarrow{2} x_0$ y como $S' \in \mathcal{F}$, se sigue que $x_0 \rightarrow S'$ no es posible. Cuando $y \xrightarrow{1} (S' - T)$ se sigue del inciso (3.1.2.1) que $y \rightarrow x_0$.

(3.1.3) $S' < T \cup \{x_0\}$.

Para $s \in (S' - T)$ tenemos que $s \xrightarrow{1} x_0$ y habíamos notado que $x_0 \nrightarrow S'$; por eso $S' \leq T \cup \{x_0\}$. Además, como $x_0 \notin S'$ (ya que, como $x_0 \nrightarrow S'$ y x_0 satisface que $x_0 \xrightarrow{2} y$ y $y \nrightarrow S'$, si $x_0 \in S'$ se tendría una contradicción), entonces tenemos que $S' < T \cup \{x_0\}$.

Claramente, los incisos (3.1.2) y (3.1.3) contradicen que S' es un elemento maximal de (\mathcal{F}, \leq) . Por lo tanto, S' es un conjunto absorbente en D . Así, S' es un núcleo de D . \square

Nota: Para que la conclusión de la Proposición 4.3 sea cierta, cada una de las hipótesis es indispensable.

Ejemplo 1: La condición de que D_i no tenga trayectorias exteriores infinitas en la proposición 4.3 es necesaria.

Considérese la siguiente digráfica D' con $V(D') = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ y $F(D') = \{(u_n, u_m) | n, m \in \mathbb{N} \text{ y } n < m\}$, $D_1 = D'$, $D_2 = D'$ y $D' = D_1 \cup D_2$.

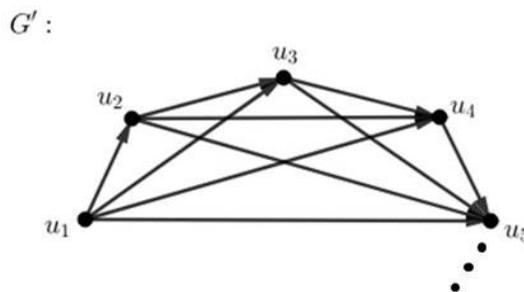


Figura 4.3

Podemos notar en la figura 4.3 que la digráfica D' es transitiva por construcción, y por lo tanto, es quasi-transitiva; además, cumple que $D' = D_1 \cup D_2$ y que todo triángulo contenido en D tiene al menos dos flechas simétricas. Sin embargo, D' no tiene núcleo, ya que para cualquier $u_i \in V(D')$, existe $u_j \in V(D')$ tal que $u_j \nrightarrow u_i$ con $i < j \in \mathbb{N}$, por lo que no puede existir un conjunto de vértices que sea absorbente.

Ejemplo 2: La siguiente digráfica D es la unión de dos digráficas quasi-transitivas finitas; cada triángulo en D tiene al menos una flecha simétrica y D no tiene núcleo.

$$\begin{aligned}
V(D_1) &= \{u_0, u_1, u_2, u_3\}, \\
V(D_2) &= V(D_1) \cup \{w\}, \\
F(D_1) &= \{(u_i, u_{i+1}) \mid i \in \{0, 1, 2, 3\}(\text{mod } 4)\} \cup \{(u_0, u_2), (u_2, u_0), (u_1, u_3), (u_3, u_1)\}, \\
F(D_2) &= \{(w, u_i) \mid i \in \{0, 1, 2, 3\}\}, \\
D &= D_1 \cup D_2.
\end{aligned}$$

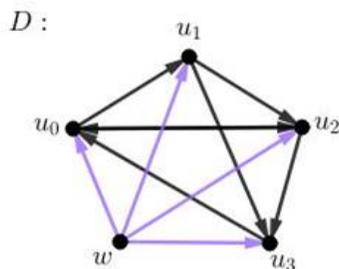


Figura 4.4

Por lo tanto, podemos deducir de la figura 4.4 que la condición de que cada triángulo en D tenga al menos dos flechas simétricas no se puede cambiar.

Ejemplo 3: Claramente \vec{C}_5 , el ciclo dirigido de orden 5, es la unión de la xy -trayectoria y las yx -trayectoria (dos subdigráficas inducidas finitas), \vec{C}_5 no tiene triángulos y \vec{C}_5 no tiene núcleo.

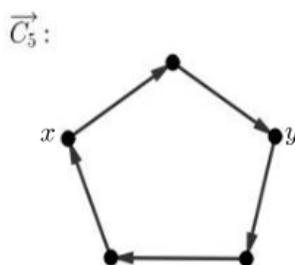


Figura 4.5

Con el ejemplo en la figura 4.5 tenemos que la digráfica D debe ser la unión de dos digráficas quasi-transitivas.

Capítulo 5

Aplicación sobre digráficas quasi-transitivas

5.1 Teorema de Arrow

La teoría de la *elección social* es una de las soluciones más recurrentes de la ética económica en la actualidad. Su objetivo es la ampliación o mejoramiento del método de decisión de votación por mayorías, en otras palabras, es la búsqueda de un método, un procedimiento, o una “constitución” que permita conocer las preferencias y aspiraciones de una sociedad democrática para poder proponer las medidas de política económica y social más adecuadas a dicha sociedad.

Constantemente, una comunidad necesita acordar un orden de preferencia entre opciones de adquisición o situaciones sociales en general. Estas preferencias en el campo de la microeconomía se conocen como “el orden en que un individuo prioriza un conjunto de alternativas según su utilidad buscando encontrar la elección más óptima para sí mismo”. Cada persona tiene un orden de preferencia individual y no importa cuál sea el mecanismo de elección, es imposible encontrar la manera de que haya una elección justa y que nadie sienta un descontento con la elección final.

El teorema sobre la imposibilidad de Arrow (1950) es un razonamiento enfocado en un sistema axiomático de preferencias. Este teorema establece que cuando los votantes tienen tres o más alternativas, no es posible diseñar un sistema de votación que permita reflejar las preferencias de los individuos en una preferencia global de modo que al mismo tiempo se cumplan ciertos criterios “racionales”.

En resumen, el teorema de Arrow establece que no se puede diseñar un sistema electoral que siempre satisfaga estos tres criterios de “equidad”:

1. Si todos los votantes prefieren la alternativa X a la alternativa Y , entonces el grupo prefiere X sobre Y .

2. Si la preferencia de cada votante entre X y Y permanece sin cambios, entonces la preferencia del grupo entre X y Y también permanecerá sin cambios (incluso si cambian las preferencias de los votantes entre otros pares como X y Z , Y y Z , o Z y W).
3. No hay “dictador”: ningún votante individual posee el poder de determinar siempre la preferencia del grupo.

Como ejemplo, tenemos la paradoja del voto de Condorcet.

En una elección de tres candidatos A, B y C, tres grupos o votantes ordenan sus preferencias de la siguiente manera:

Votante	Preferencia
1	A B C
2	B C A
3	C A B

Si se declara vencedor al candidato A, se puede argumentar que en realidad C debía ganar ya que:

- dos votantes (el 2 y el 3) piensan que C es un mejor candidato que A;
- solo un votante (el 1) prefiere al candidato A sobre el C.

Al ser el candidato C preferido sobre A por una mayoría de votantes, el candidato A no puede en realidad declararse vencedor. Pero este mismo argumento puede usarse para el candidato C (donde B es preferido) y B (donde A es preferido), de modo que se crea un ciclo en el que nunca se decidiría al vencedor.

La paradoja de Condorcet ilustra que la persona que puede reducir alternativas tiene esencialmente la capacidad de guiar la elección. Por ejemplo, si los votantes 1 y 2 escogen a sus candidatos preferidos (A y B respectivamente) y si el votante 3 está dispuesto a renunciar su voto por C, entonces el tercer votante puede escoger entre A y B y convertirse en el votante decisivo.

En búsqueda de una solución para hacer posible la elección social de Arrow, Amartya Sen (1969) propone sustituir uno de los requisitos de Arrow (concretamente la transitividad: si se prefiere a X sobre Y y a Y sobre Z , entonces se deduce que se prefiere a X sobre Z) por una versión menos estricta de la misma, es decir, aceptar una transitividad débil, o quasi-transitividad. De esta manera, una *Función de Decisión Social* será una regla de elección colectiva que genera relaciones de preferencia suficientes para la existencia de funciones de elección, es decir, sería la función con los requisitos mínimos que necesitamos para garantizar una elección social.

La siguiente sección tiene como objetivo ilustrar el concepto propuesto por Sen.

5.2 Paradoja de sorites

Considérese un montón de arena del que se extraen granos individualmente. Uno podría construir el argumento usando premisas como sigue:

- 1.000.000 de granos de arena es un montón de arena* (Premisa 1)
Un montón de arena menos un grano sigue siendo un montón. (Premisa 2)

Las aplicaciones repetidas de la Premisa 2 finalmente obligan a aceptar la conclusión de que un montón puede estar compuesto por un solo grano de arena.

- 1.000.000 de granos es un montón.*
Si 1.000.000 de granos es un montón, entonces 999,999 granos es un montón.
Si 999,999 granos es un montón, entonces 999,998 granos es un montón.
Si

Entonces 1 grano es un montón.

La paradoja de sorites (Eubulides de Mileto, siglo IV a. C.) surge cuando se investigan los patrones de preferencias de una persona. En menor escala, es fácil encontrar a alguien que prefiera en su café 3 gramos de azúcar (1 cubo) a 15 gramos (5 cubos), sin embargo, por lo general le será indiferente si son 3.00 o 3.03 gramos, así como entre 3.03 y 3.06 gramos, 3.06 y 3.09 gramos, y así sucesivamente hasta 14.97 y 15.00 gramos.

Para evitar la paradoja de sorites en tal escenario, se toman dos medidas:

- En lugar de afirmaciones positivas, se utilizan afirmaciones comparativas, es decir, en vez de “a X le gusta una taza de café con 3 gramos de azúcar” o “a X no le gusta una taza de café con 15 gramos de azúcar”, decimos “a X le gusta más una taza de café con 3 gramos de azúcar que una con 15 gramos de azúcar”.
- Se distingue la preferencia “a X le gusta... más que...” de la indiferencia “a X le gusta... tanto como...”.

Para visualizar este ejemplo, construiremos una digráfica D tal que $V(D) = \{c_i\}$ con $i = 3.00, 3.03, \dots, 15.00$ (las taza de café con i gramos de azúcar), y las flechas de D son tales que si “a X le gusta c_x tanto como c_y ”, entonces $c_x \leftrightarrow c_y$ (donde “ \leftrightarrow ” simboliza una flecha simétrica).

En la figura 5.1 podemos notar que el hecho de que $c_{3.00} \leftrightarrow c_{3.03}$, $c_{3.03} \leftrightarrow c_{3.06}$, ..., $c_{14.97} \leftrightarrow c_{15.00}$ no implica que $c_{3.00} \leftrightarrow c_{15.00}$. Por lo que la relación “ \leftrightarrow : a X le gusta c_x tanto como c_y ”, no se considera transitiva.

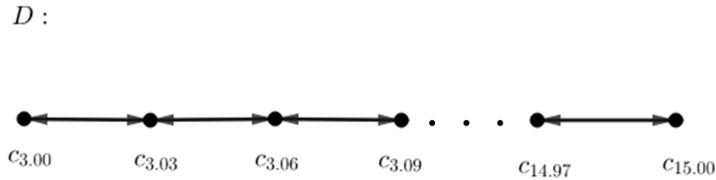


Figura 5.1

Ahora, si X no es indiferente entre $c_{3.00}$ y $c_{3.06}$, y asumimos que “X prefiere $c_{3.00}$ que $c_{3.06}$ ”, entonces $c_{3.00} \leftarrow c_{3.06}$ (es decir, hay una flecha de $c_{3.06}$ a $c_{3.00}$). Y entonces, para cualquier $x \geq 3.06$, $c_{3.00} \leftarrow c_x$. Si usamos el mismo argumento para todo vértice, tenemos que si $x + 0.06 \leq y$, entonces $c_x \leftarrow c_y$.

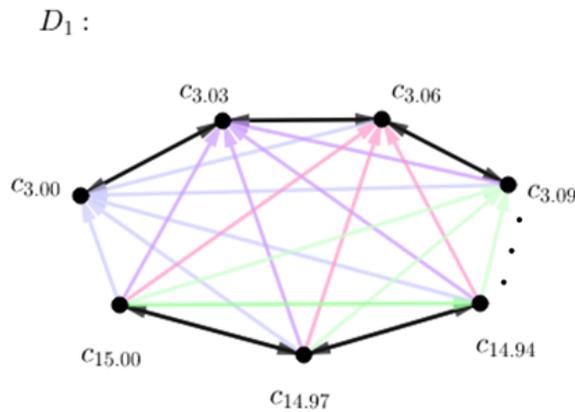


Figura 5.2

La digráfica D_1 modela el sistema de preferencias que tiene X con respecto a el azúcar en su café. Notemos que D_1 :

1. Es quasi-transitiva.
2. Es semicompleta (Proposición 2.2).
3. Es núcleo-perfecta (Proposición 4.3).

De manera similar, para resolver la variación del montón original de la paradoja con este enfoque, la relación “X granos son más un montón que Y granos” podría considerarse quasi-transitiva en lugar de transitiva.

5.3 La propuesta de Sen

Pero la *función* de Sen dejaba sin resolver cuestiones importantes, sobre todo la acusación que mostraba que el modelo de Sen generaba o podía generar una “oligarquía social” que impusiera sus preferencias sociales unánimes estrictas al resto de la sociedad. Hubo intentos de superar esta oligarquía proponiendo eliminar la transitividad débil (o quasi-transitividad).

Conclusión

Comenzamos esta tesis exponiendo la definición y algunos resultados de las digráficas transitivas, pensando que al demostrar su caracterización se crearía un camino a seguir para enunciar y demostrar la caracterización de las digráficas quasi-transitivas, ya que en definición son muy similares (todas las digráficas transitivas son quasi-transitivas, pero no viceversa). Sin embargo, aunque ambos enunciados tienen elementos en común, la caracterización de las digráficas quasi-transitivas necesitó de una cadena de resultados para poderse demostrar.

Sea D una digráfica quasi-transitiva:

(a) Si D no es fuerte, entonces existe una digráfica transitiva orientada T , con vértices $\{u_1, u_2, \dots, u_t\}$, y digráficas quasi-transitivas fuertes H_1, H_2, \dots, H_t tales que $D = T[H_1, H_2, \dots, H_t]$, donde H_i es sustituido por u_i , con $i = 1, 2, \dots, t$.

(b) Si D es fuerte, entonces existe una digráfica semicompleta fuerte S con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, y digráficas quasi-transitivas Q_1, Q_2, \dots, Q_s tales que Q_i no es fuerte o es un vértice y $D = S[Q_1, Q_2, \dots, Q_s]$, donde Q_i es sustituido por v_i , con $i = 1, 2, \dots, s$.

Posteriormente, desarrollamos con detalle el artículo de Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy [7], donde se llegó a la proposición:

Sea D una digráfica tal que $D = D_1 \cup D_2$ (posiblemente $F(D_1) \cap F(D_2) \neq \emptyset$), donde D_i , $i = 1, 2$, es una subdigráfica quasi-transitiva de D que no contiene trayectorias exteriores infinitas asimétricas (en D). Si todo triángulo contenido en D tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D es una digráfica núcleo perfecta.

como generalización de dos resultados: la Proposición 3.1 deducida de [5], y la Proposición 3.5 que se demostró equivalente a la Proposición 3.3 obtenida en [11].

Finalmente, se modeló con digráficas quasi-transitivas la propuesta por Sen para darle solución a la Paradoja de Arrow. La hipótesis expuesta en la introducción era que al encontrar un núcleo de la digráfica se encontraría también su solución.

Sin embargo, aunque se resolvió el problema en la paradoja, parece que en la elección social, cuando se cuenta con 3 o más opciones para votar, la solución no es tan aparente.

Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen y G. Gutin. *Classes of Directed Graphs*. Springer, 2018.
- [2] J. Bang-Jensen y J. Huang. Quasi-transitive digraphs. *Journal of Graph Theory*, 20(2):141-161, 1995.
- [3] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.
- [4] C. Berge y P. Duchet. Recent problems and results about kernels in directed graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1-3):27-31, 1991.
- [5] P. Duchet y H. Meyniel. A note on kernel-critical graphs. *Discrete Mathematics*, 33(1):103-105, 1981.
- [6] H. Galeana-Sánchez. Kernels in edge-colored digraphs. *Discrete Mathematics*, 184(1-3):87-99, 1998.
- [7] H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy. Kernels in quasi-transitive digraphs. *Discrete Mathematics*, 306(16):1969-1974, 2006.
- [8] A. Ghouila-Houri. Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arrêtes de manière à obtenir le graphe d' un relation d'ordre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 254:1370-1371, 1962.
- [9] R. D. Luce. Semiorders and a Theory of Utility Discrimination. *Econometrica*, 24(2):178, 1956.
- [10] M. Pedrajas. Las posibilidades de la teoría de la elección social en K. Arrow y A. Sen. *XVI Congrés Valencià de Filosofia: València, Facultat de Filosofia i Ciències de l'Educació*, 1:355-367, 2006.
- [11] B. Sands, N. Sauer, y R. E. Woodrow. On monochromatic paths in edge-coloured digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 33(3):271-275, 1982.
- [12] A. Sen. Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions. *The Review of Economic Studies*, 36(3):381-393, 1969.
- [13] J. von Neumann y O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. American Mathematical Society eBooks, 2019.