



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUPERFICIES DE CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A

CRISTO IGOR VÁZQUEZ MOTA

TUTOR

DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS

Ciudad Universitaria, CD. MX. Marzo, 2021





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mis docentes y en especial a mi tutor, Chryssomalis, por su ayuda, infinita paciencia y dedicación. Agradecerle también a toda mi familia por darme ánimo durante este proceso. A mis amigos de toda la vida que me acompañan desde siempre. Y también al proyecto DGAPA-PAPIIT de la UNAM IN 111920.

Índice general

Agradecimientos	I
1. Introducción	2
2. Antecedentes y motivación	6
2.1. Aspectos geométricos en electromagnetismo	6
2.1.1. Invariante de Hopf y helicidad	6
2.1.2. Construcción de Rañada y el Hopfion electromagnético	10
2.1.3. Construcción de Arrayás y nudos electromagnéticos	14
2.2. Enlazamiento en el espaciotiempo de Minkowski	15
3. Conceptos preliminares	19
3.1. Distribuciones y foliaciones	19
3.2. Teorema de Frobenius	20
3.3. Bivectores y 2-distribuciones	21
4. Superficies de campo electromagnético	23
4.1. Definición de H	23
4.2. Boost	24
4.3. Coeficientes y factorización de H	25
4.4. Interpretación física de H	26
4.5. Componentes y factorización explícita de H	26
4.6. Integrabilidad de F y H	28
4.7. Complexión del campo electromagnético	29
4.8. Eigenvectores del tensor energía-momento	30

5. Ejemplos	33
5.1. Campos ortogonales	33
5.1.1. Electrostática y magnetostática	34
5.1.2. Ondas electromagnéticas planas	34
5.1.3. Campos de radiación	35
5.1.4. Flujo de Poynting saliente	36
5.1.5. Monopolo magnético rotante	36
5.2. Campos no ortogonales	38
5.2.1. Campos homogéneos y estáticos	38
5.2.2. Carga eléctrica y campo magnético homogéneo	38
5.2.3. Campo eléctrico constante con dipolo magnético	40
5.2.4. Carga eléctrica con dipolo magnético	41
6. Conclusiones	43
A. Construcción de Arrayás y nudos electromagnéticos	45

Capítulo 1

Introducción

La idea de explicar fenómenos electromagnéticos con conceptos topológicos se remite al mismo Faraday, quien durante una buena parte del siglo XIX intentó explicar las líneas de fuerza en términos de corrientes y vórtices en el hipotético éter. La misma idea motivó a Kelvin a proponer que los átomos son nudos en las líneas de vorticidad del éter, un punto de vista que expresó en su trabajo *On vortex atoms* [1] en 1867. En 1877 Gauss [2] consideró dos circuitos enlazados y estableció la relación entre el campo magnético inducido por las corrientes a lo largo de los circuitos y un invariante topológico conocido como el número de enlace. Argumentos topológicos también juegan un papel importante en mecánica cuántica, como es en la propuesta de Dirac del monopolo magnético en 1931 [3], donde se encuentra un mecanismo para la cuantización de la carga eléctrica. Más aún, desde 1959 cuando Aharonov y Bohm descubrieron el efecto que lleva su nombre [4], es conocido que la descripción de ciertos fenómenos electromagnéticos requieren consideraciones topológicas. Los aspectos geométricos y topológicos del electromagnetismo se pueden expresar de muchas maneras, como el lenguaje del cálculo vectorial [5], las formas diferenciales [6], el álgebra geométrica [7][8] y la topología diferencial [9]; cada una de ellas con sus problemas y técnicas particulares recopilan una pila de evidencia sobre un hecho innegable: el electromagnetismo tiene fundamentos tanto geométricos como topológicos.

La creciente aparición de modelos topológicos de campos físicos subyace en la posible solución a algunos de los problemas de la mecánica cuántica a la hora de establecer propiedades físicas discretas y su análogo clásico, si es que lo tiene, a través de los conocidos teoremas

de índice en topología (véase [10] Cap. 12 para una presentación formal de los teoremas más recurrentes). En este contexto es que Rañada propone en 1989 un modelo topológico para el electromagnetismo en el vacío [11], basado en la dinámica de las líneas de campo electromagnético y sus propiedades topológicas. Este modelo trajo consigo dos aportaciones remarcables, por un lado, una maquinaria teórica que permite construir líneas de campo enlazadas o con forma de nudo, y por otro lado, una descripción de la helicidad del campo electromagnético como el índice de Hopf (un invariante topológico) de estas líneas [12].

En [13], Rañada encuentra la primera solución de su modelo en un par de campos eléctrico y magnético cuyas líneas están dadas por curvas cerradas sobre la superficie de un toro con número de enlace 1, conocidos como el *Hopfion electromagnético*. Esta publicación marcó un antes y un después en la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Maxwell en el vacío con particularidades topológicas. En [14] se presenta una clase de campos electromagnéticos nulos (en los que $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}F^{\mu\nu}F^{\sigma\rho} = 0$), donde el índice de Hopf tanto del campo eléctrico como del campo magnético son constantes de movimiento. Parte de este trabajo es desarrollado a través de transformaciones conformes de ondas planas y teoría de twistores, para una breve introducción a la teoría de twistores en electromagnetismo ver [15]. Más tarde, Arrayás y Trueba [16] encontraron una clase de campos electromagnéticos no nulos con líneas de campo que forman nudos toroidales, donde propiedades como la energía, el momento y la helicidad se expresan en términos de la clase de homotopía de los nudos.

En este zoológico de soluciones a las ecuaciones de Maxwell en el vacío, la helicidad eléctrica y magnética juega un papel crucial para describir al invariante topológico de cada clase. Sin embargo este es un concepto no relativista, pues considera al campo eléctrico y al campo magnético como entidades separadas y las describe a través de sus curvas integrales en el espacio. En estas clases de campos electromagnéticos, las configuraciones topológicas son dependientes del observador y no definen una propiedad intrínseca del campo.

La dificultad de definir un invariante topológico que sea relativista, viene del hecho de que dos objetos geométricos solamente se pueden enlazar si el producto cartesiano entre ellos tiene

codimensión menor o igual a 1 respecto al espacio ambiente. Por ejemplo, dos curvas en \mathbb{R}^3 pueden estar enlazadas, pero no lo pueden estar en \mathbb{R}^4 . Una definición relativista de la helicidad que coincida con propiedades topológicas del campo exige que se consideren objetos geométricos de mayor dimensión, como podría ser una superficie electromagnética. Por ejemplo, recientemente se han estudiado las mismas clases de nudos electromagnéticos desde la perspectiva de la teoría de foliaciones [17]. Hay ciertos casos particulares (en el capítulo 4 de esta tesis encontramos algunos de estos casos) en los que el campo electromagnético define una foliación del espacio-tiempo por superficies 2-dimensionales que presentan características topológicas.

Una definición relativista de la helicidad se puede encontrar en el trabajo de Yoshida, Kawazura y Yokoyama [18], donde se estudia la vorticidad del 4-momento de un plasma barotrópico acoplado a un campo electromagnético. La idea esencial para definir un invariante topológico es que la evolución del plasma en el espaciotiempo define un difeomorfismo a través del cual se pueden evolucionar las líneas de campo, formando una superficie 2-dimensional en el espaciotiempo de Minkowski. El enlace de dos superficies en el espaciotiempo induce una definición de enlace sobre la hipersuperficie 3-dimensional que se mueve con el plasma, coincidiendo con la helicidad. La presencia de un plasma acoplado al campo electromagnético es crucial para definir las superficies que tienen particularidades topológicas, por esta razón, con las ecuaciones de Maxwell en el vacío no se puede proceder de la misma manera.

Siguiendo la misma línea de estudio de las propiedades topológicas de la teoría electromagnética cabe preguntarse bajo cuáles condiciones un campo electromagnético define superficies 2-dimensionales en el espaciotiempo. La propuesta del proyecto de tesis presente es caracterizar en términos de cantidades independientes del observador, las condiciones necesarias para definir superficies de campo electromagnético de una forma natural como foliaciones del espaciotiempo. Las herramientas matemáticas esenciales incluyen campos multivectoriales, distribuciones en el espacio tangente del espaciotiempo de Minkowski, foliaciones y el Teorema de Frobenius.

En el capítulo 2 de este trabajo se presenta una revisión de los aspectos geométricos recientes encontrados en las clases de nudos electromagnéticos, sus aspectos más generales y una breve

discusión acerca de por qué los conceptos topológicos involucrados no son relativistas como una motivación para el estudio de superficies de campo.

En el capítulo 3 se presentan todos los conceptos generales necesarios para la exposición de la teoría, mientras que en el capítulo 4 se sigue el desarrollo de las ideas que consiguen definir superficies a través del tensor de campo electromagnético. En este capítulo los resultados más importantes son que para campos nulos, donde $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, el campo electromagnético siempre define una foliación del espaciotiempo por superficies tangentes a los eigenvectores de la transformación lineal $F^\mu{}_\nu$. Y que para campos no nulos siempre se puede definir una distribución de planos tangentes a la línea de mundo de observadores que perciben al campo eléctrico y magnético como paralelos; esta distribución es integrable en superficies si el gradiente de la complejión del campo pertenece al mismo plano.

Con objetivo de explorar el contenido geométrico del campo electromagnético, en el capítulo 5 se visitarán una serie de campos aseguibles que definen una foliación del espaciotiempo, así como otros donde no se satisfacen las condiciones de integrabilidad. Finalmente, el capítulo 6 contiene una serie de conclusiones y reflexiones sobre las posibles direcciones a seguir en la misma línea de investigación. También se discuten algunas consecuencias de la existencia de superficies electromagnéticas.

Capítulo 2

Antecedentes y motivación

2.1. Aspectos geométricos en electromagnetismo

2.1.1. Invariante de Hopf y helicidad

Un *fibrado de Hopf* es un haz fibrado (S^3, S^2, ϕ, S^1) con espacio total S^3 , espacio base S^2 , proyección ϕ y fibra S^1 . Esto significa que $\phi : S^3 \rightarrow S^2$ es un mapeo suave sobreyectivo, tal que para todo $x \in S^2$, existe un entorno U de x donde la preimagen $\phi^{-1}(U)$ es difeomorfa a $U \times S^1$. El mapeo ϕ es conocido como *mapeo de Hopf* o *fibración de Hopf*. Si tomamos dos puntos diferentes $p, q \in S^2$ sus preimágenes $A = \phi^{-1}(p)$, $B = \phi^{-1}(q)$ son dos curvas cerradas disjuntas en S^3 [19]. El *número de enlace* $L(A, B)$ del par de curvas se define como el número de veces que B interseca una superficie orientada Σ_A con frontera en A , tomando en cuenta su orientación (ver Fig. 2.1).

El número de enlace no sólo es simétrico $L(A, B) = L(B, A)$, sino que ni siquiera depende de la elección de p o q , y es el mismo para cualquier deformación continua del mapeo ϕ , ya que las curvas se mantienen cerradas en todo momento [19, 20]. Dada la invarianza bajo deformaciones continuas, el número de enlace es una manera de indexar las clases de homotopía de los mapeos de Hopf por un número entero. Por esta razón también se le conoce como *invariante de Hopf* o *índice de Hopf*.

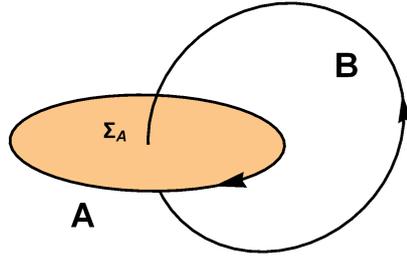


Figura 2.1. Cada intersección de B con Σ_A suma $+1$ al número de enlace si B interseca en la dirección del vector normal a la superficie, o suma -1 si interseca en la dirección contraria.

Whitehead [21] escribió el índice de Hopf de una forma integral muy conveniente para realizar cálculos. Sea un mapeo suave $\phi : S^3 \rightarrow S^2$ y σ una 2-forma de área en S^2 normalizada, $\int_{S^2} \sigma = 1$. El pullback $\phi^*\sigma$ es una forma cerrada en S^3 ya que $d(\phi^*\sigma) = \phi^*(d\sigma) = 0$ (donde d representa la derivada exterior), y como S^3 es simplemente conexo, existe una 1-forma α tal que $\phi^*\sigma = d\alpha$. Con estos elementos, el índice de Hopf del mapeo se puede calcular como

$$\mathcal{H}(\phi) = \int_{S^3} \alpha \wedge \phi^*\sigma. \quad (2.1)$$

Si tomamos una 1-forma $\alpha' \neq \alpha$ tal que $d\alpha' = d\alpha$, entonces $\alpha' = \alpha + df$ ya que S^3 es simplemente conexo, por lo tanto

$$\mathcal{H}'(\phi) - \mathcal{H}(\phi) = \int_{S^3} (\alpha' \wedge d\alpha' - \alpha \wedge d\alpha) = \int_{S^3} df \wedge d\alpha = \int_{S^3} d(f d\alpha) = \int_{\partial S^3} (f d\alpha) = 0, \quad (2.2)$$

de aquí que el índice de Hopf no dependa de la elección particular de α .

En 1989, Rañada [11] notó que si se utilizan las proyecciones estereográficas de S^3 a \mathbb{R}^3 y de S^2 a \mathbb{C} , para dar coordenadas reales (x, y, z) a S^3 y una compleja ζ a S^2 , el índice de Hopf toma una forma familiar en física. Para ello primero tomemos un encajamiento de la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas (n_1, n_2, n_3) dado por $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. La proyección estereográfica desde el polo norte de la esfera S^2 al plano complejo \mathbb{C} , define la coordenada compleja ζ en S^2 como

$$\zeta = \frac{n_1 + i n_2}{1 - n_3}, \quad (2.3)$$

con proyección inversa

$$n_1 = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad n_2 = \frac{1}{i} \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad n_3 = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}. \quad (2.4)$$

De forma análoga, $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ está dada en coordenadas cartesianas (u_1, u_2, u_3, u_4) por $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$. Usamos la proyección estereográfica desde el polo norte de S^3 a \mathbb{R}^3 para definir coordenadas (x, y, z) en S^3

$$x = \frac{u_1}{1 - u_4}, \quad y = \frac{u_2}{1 - u_4}, \quad z = \frac{u_3}{1 - u_4}, \quad (2.5)$$

con proyección inversa

$$u_1 = \frac{2x}{r^2 + 1}, \quad u_2 = \frac{2y}{r^2 + 1}, \quad u_3 = \frac{2z}{r^2 + 1}, \quad u_4 = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}, \quad (2.6)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. En estas coordenadas un mapeo de Hopf es una función escalar compleja $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ que debe satisfacer lo siguiente

1. $\phi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.
2. La imagen inversa de $\phi = \infty$ no depende de la dirección en la que se vaya a infinito en \mathbb{C} .

La primera condición se debe a la compactificación de \mathbb{R}^3 en S^3 agregando un punto al infinito, aunque valdría cualquier valor constante, se elige cero por razones que veremos más adelante. La segunda condición se debe a la compactificación de \mathbb{C} en S^2 también considerando al infinito como un punto. Usando a \mathbb{R}^3 como espacio ambiente, podemos escribir la 2-forma de área normalizada de S^2 como

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{dn_1 \wedge dn_2}{n_3}. \quad (2.7)$$

La forma de área en la coordenada ζ resulta

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}, \quad (2.8)$$

entonces el pullback es

$$\phi^* \sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\phi \wedge d\bar{\phi}}{(1 + \phi\bar{\phi})^2}, \quad (2.9)$$

y en coordenadas locales (x, y, z) de S^3 ,

$$\phi^* \sigma = \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial_j \phi \partial_k \bar{\phi} - \partial_k \phi \partial_j \bar{\phi}}{(1 + \phi\bar{\phi})^2} dx^j \wedge dx^k, \quad (2.10)$$

que también se puede escribir como

$$\phi^* \sigma = \frac{1}{2} F_{jk} dx^j \wedge dx^k \quad \text{con} \quad F_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial_j \phi \partial_k \bar{\phi} - \partial_k \phi \partial_j \bar{\phi}}{(1 + \phi \bar{\phi})^2}. \quad (2.11)$$

El pullback entonces define un campo vectorial en \mathbb{R}^3 dado por $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$ en coordenadas cartesianas, donde ϵ^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. En notación vectorial

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\nabla \phi \times \nabla \bar{\phi}}{(1 + \phi \bar{\phi})^2}, \quad (2.12)$$

donde $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ es el mapeo de Hopf en coordenadas locales, $\bar{\phi}$ denota su complejo conjugado y ∇ es el operador diferencial estándar en \mathbb{R}^3 . El hecho de que $\phi^* \sigma = d\alpha$ implica que existe otro campo \mathbf{A} tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y define a la 1-forma $\alpha = A_i dx^i$. En términos de estos campos el índice de Hopf (2.1) se expresa como

$$\mathcal{H}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r. \quad (2.13)$$

En electromagnetismo si se tiene un campo magnético \mathbf{B} y su vector potencial \mathbf{A} , la integral escrita en (2.13) se conoce como la helicidad magnética.

Las superficies de ϕ constante son, de hecho, curvas ya que la ecuación $\phi(x, y, z) = \zeta_0$ establece dos condiciones reales para las tres variables (x, y, z) . La curva en \mathbb{R}^3 que satisface $\phi(x, y, z) = \zeta_0$ es la preimagen del punto ζ_0 del mapeo de Hopf. Tales curvas siempre son ortogonales al gradiente $\nabla \phi$ y en el caso complejo también a $\nabla \bar{\phi}$, por lo que $\frac{1}{i} \nabla \phi \times \nabla \bar{\phi}$ es un vector real tangente a las curvas de nivel. Dada la ecuación (2.12), el campo vectorial \mathbf{B} es tangente a las curvas de nivel de ϕ , y como el invariante de Hopf nos dice el número de enlace entre dos curvas de nivel, entonces también nos dice el número de enlace entre las curvas integrales de \mathbf{B} .

Por lo anterior, si un campo magnético estático \mathbf{B} proviene de un mapeo de Hopf a través de la ecuación (2.12), la helicidad magnética es un invariante topológico que representa el número de enlace entre las líneas de campo magnético. Para construir un campo electromagnético dinámico a través de esta descripción topológica de sus líneas de campo se pueden tomar dos caminos distintos, la construcción de Rañada y la de Arrayás [22].

2.1.2. Construcción de Rañada y el Hopfion electromagnético

La construcción de Rañada se basa en dos mapeos de Hopf dependientes del tiempo ϕ y θ que definen al campo magnético y eléctrico respectivamente, en la misma manera que la ecuación (2.12). Para que los campos cumplan con las ecuaciones de Maxwell, los mapeos deben satisfacer un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. De encontrar una solución para dichas ecuaciones se obtienen dos mapeos que evolucionan de manera continua y en consecuencia los índices de Hopf de las líneas de campo eléctrico y magnético se mantienen invariantes, es decir, las helicidades son constantes de movimiento con significado topológico en las líneas de campo.

La construcción parte de suponer un mapeo de Hopf dinámico $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con $\phi(x, y, z, t) = \zeta$. Podemos usar covarianza en la expresión (2.11) para definir el tensor electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \bar{\phi} - \partial_\nu \phi \partial_\mu \bar{\phi}}{(1 + \phi \bar{\phi})^2}, \quad (2.14)$$

donde el campo magnético está dado por $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$ y el campo eléctrico por $E^i = F^{i0}$, o en notación vectorial

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\nabla \phi \times \nabla \bar{\phi}}{(1 + \phi \bar{\phi})^2} \quad y \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial_t \bar{\phi} \nabla \phi - \partial_t \phi \nabla \bar{\phi}}{(1 + \phi \bar{\phi})^2}. \quad (2.15)$$

Basta con definir el tensor de esta manera para que se satisfaga la identidad de Bianchi, es decir, se satisfacen las ecuaciones homogéneas de Maxwell. Para resolver el otro par de ecuaciones en el vacío usamos un segundo mapeo de Hopf $\theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y definimos el tensor dual

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial_\mu \theta \partial_\nu \bar{\theta} - \partial_\nu \theta \partial_\mu \bar{\theta}}{(1 + \theta \bar{\theta})^2}, \quad (2.16)$$

donde $B^i = G^{i0}$ y $E^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} G_{jk}$ y por lo tanto $G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$. Entonces

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial_t \bar{\theta} \nabla \theta - \partial_t \theta \nabla \bar{\theta}}{(1 + \theta \bar{\theta})^2} \quad y \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\nabla \bar{\theta} \times \nabla \theta}{(1 + \theta \bar{\theta})^2}. \quad (2.17)$$

Para el tensor dual la identidad de Bianchi es equivalente a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell en el vacío. El índice de Hopf de θ nos da el número de enlace del campo eléctrico

$$\mathcal{H}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} d^3 r, \quad (2.18)$$

con $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C}$. Esta integral también es conocida como la helicidad eléctrica. La condición $G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ establece las ecuaciones diferenciales que deben satisfacer los mapeos ϕ y θ para solucionar las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\frac{\nabla\phi \times \nabla\bar{\phi}}{(1+\phi\bar{\phi})^2} &= \frac{\partial_t\bar{\theta}\nabla\theta - \partial_t\theta\nabla\bar{\theta}}{(1+\theta\bar{\theta})^2}, \\ \frac{\nabla\bar{\theta} \times \nabla\theta}{(1+\theta\bar{\theta})^2} &= \frac{\partial_t\bar{\phi}\nabla\phi - \partial_t\phi\nabla\bar{\phi}}{(1+\phi\bar{\phi})^2}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Finalmente, la construcción de Rañada parte de dos mapeos de Hopf dinámicos ϕ y θ , que evolucionan siguiendo las ecuaciones (2.19). Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} definidos vía (2.15) o (2.17) satisfacen las leyes de Maxwell en el vacío, como consecuencia de que los mapeos satisfacen (2.19). Más aún, dado que los mapeos evolucionan de manera continua, se mantienen en la misma clase de homotopía dada por el índice de Hopf de cada uno. Entonces las helicidades son constantes de movimiento asociadas al número de enlace entre las líneas de cada campo.

El Hopfion electromagnético

La primer solución topológicamente no trivial de las ecuaciones (2.19), ahora conocida como el *Hopfion electromagnético*, fue encontrada por Rañada y Trueba [13] tomando una fibración de Hopf de índice 1. Las soluciones explícitas de los mapeos ϕ y θ son

$$\phi = \frac{(AX - TZ) + i(AY + T(A-1))}{(AZ + TX) + i(A(A-1) - TY)}, \quad \theta = \frac{(AY + T(A-1)) + i(AZ + TX)}{(AX - TZ) + i(A(A-1) - TY)}, \quad (2.20)$$

donde las coordenadas (X, Y, Z, T) son adimensionales para asegurar que ϕ y θ también lo sean. En el espaciotiempo físico (x, y, z, t) se definen como

$$X = \frac{x}{L_0}, \quad Y = \frac{y}{L_0}, \quad Z = \frac{z}{L_0}, \quad T = \frac{ct}{L_0}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (2.21)$$

con c la velocidad de la luz en el vacío, L_0 un parámetro libre asociado a una escala de longitud que define la cantidad de energía electromagnética, y el escalar A está dado por

$$A = \frac{R^2 - T^2 + 1}{2}. \quad (2.22)$$

Los campos físicos \mathbf{B} y \mathbf{E} están dados por la ecuación (2.15) o (2.17)

$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{a}}{\pi L_0^2} \frac{QH_1 + PH_2}{(A^2 + T^2)^3}, \quad \mathbf{E} = \frac{c\sqrt{a}}{\pi L_0^2} \frac{QH_2 - PH_1}{(A^2 + T^2)^3}, \quad (2.23)$$

donde a es una constante con las unidades físicas adecuadas, los escalares P y Q se definen como

$$P = T(T^2 - 3A^2), \quad Q = A(A^2 - 3T^2), \quad (2.24)$$

y los vectores $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \left(Y + T - XZ, -X - Z(Y + T), \frac{-1 - Z^2 + X^2 + (Y + T)^2}{2} \right), \\ \mathbf{H}_2 &= \left(\frac{1 + X^2 - Z^2 - (Y + T)^2}{2}, -Z + X(Y + T), Y + T + XZ \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Una ventaja de tener el mapeo ϕ dependiente del tiempo es que podemos definir superficies magnéticas (superficies tangentes a las líneas del campo magnético), para esto expresamos a los mapeos en su forma polar $\phi = |\phi|e^{i\mathcal{A}_\phi}$ y se recurre a los potenciales de Euler definidos de la siguiente manera [22]

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + |\phi|^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\mathcal{A}_\phi}{2\pi}, \quad (2.26)$$

donde $|\phi|$ denota el módulo de ϕ y \mathcal{A}_ϕ su argumento. Las líneas de campo magnético se obtienen de la ecuación $\phi(X, Y, Z, T) = \zeta$, para algún $\zeta \in \mathbb{C}$ fijo. Dicha ecuación se puede separar en dos ecuaciones reales usando el módulo y el argumento de ϕ . Cada una define una superficie en el espacio tal que las líneas de campo están en la intersección. Esto es esencialmente lo que representan los potenciales de Euler con la ventaja de que el campo magnético se escribe como

$$\mathbf{B} = \sqrt{a} \nabla\alpha_1 \times \nabla\alpha_2. \quad (2.27)$$

A tiempo $T = 0$ las superficies $0 < \alpha_1 < 1$ son toros con centro en el origen y eje de simetría en la dirección de z , anidados de tal manera que cubren todo el espacio. Hay dos superficies degeneradas, la superficie $\alpha_1 = 1$ que corresponde al eje z y $\alpha_1 = 0$ que corresponde a la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$, ambos casos son líneas de campo. Para tiempos posteriores las superficies se deforman manteniendo las misma topología, ver Fig. 2.2.

Las superficies $\alpha_2 = cte$ son algo más complicadas y se omitirán por no aportar más al análisis. A tiempo $T = 0$ las líneas de campo magnético son circunferencias con número de enlace 1 que cubren toda la superficie del toro, ver Fig. 2.3. Inicialmente los mapeos son idénticos

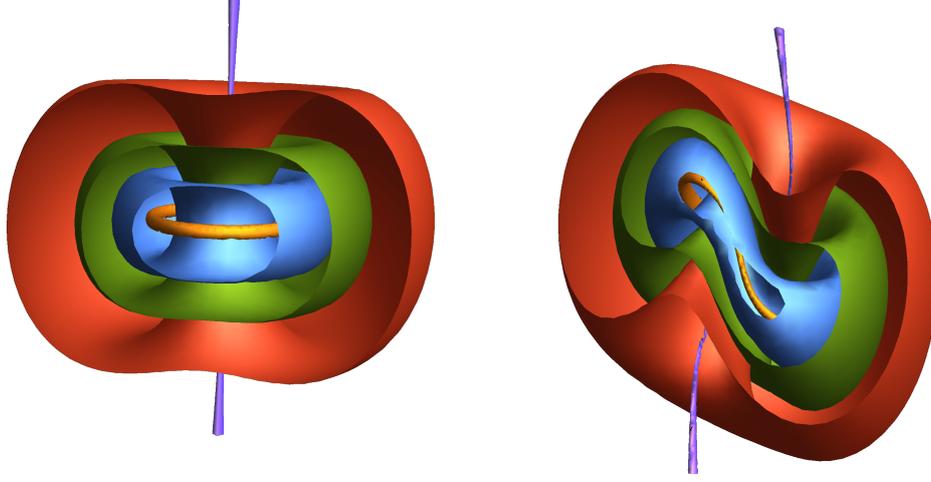


Figura 2.2. A la izquierda se muestran las superficies tangentes al campo magnético en tiempo $T = 0$. A la derecha se muestran las mismas superficies a un tiempo posterior.

bajo una permutación cíclica de los ejes $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z, Z \rightarrow X$

$$\phi(T = 0) = \frac{2(Y - iX)}{X^2 + Y^2 + (Z - i)^2}, \quad \theta(T = 0) = \frac{2(Z - iY)}{Y^2 + Z^2 + (X - i)^2}, \quad (2.28)$$

por lo que el campo eléctrico tiene la misma configuración toroidal de \mathbf{B} pero con el eje de simetría en la dirección de X y el análisis anterior también es válido para \mathbf{E} . Aunque esto sólo se cumple para $T = 0$, en tiempos posteriores \mathbf{E} también evoluciona manteniendo la misma topología, pero no exactamente como lo hace \mathbf{B} .

El Hopfion pertenece a una clase de campos electromagnéticos conocidos como *campos nulos*, donde los escalares invariantes de Lorentz $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y $c^2\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ son ambos cero. Por construcción, las curvas integrales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} tienen número de enlace igual a 1, por lo que sus helicidades en unidades físicas son [22]

$$h_m = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r = \frac{a}{2} \mathcal{H}(\phi) = \frac{a}{2}, \quad y \quad h_e = \frac{1}{2c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} d^3r = \frac{a}{2} \mathcal{H}(\theta) = \frac{a}{2}. \quad (2.29)$$

También es común definir la helicidad electromagnética h_{em} como la suma de la helicidad magnética h_m y la eléctrica h_e , en este caso $h_{em} = a$. La simpleza de los campos nos permite

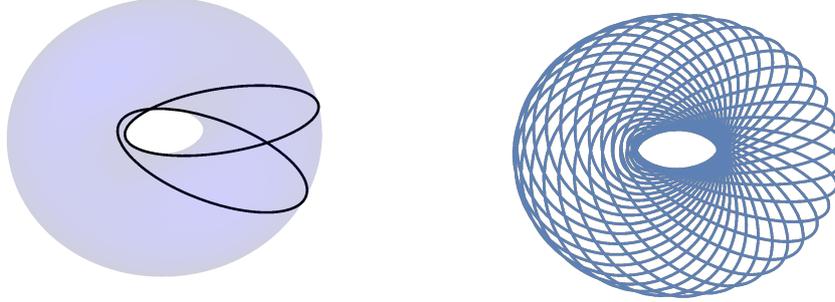


Figura 2.3. Las líneas del Hopfion magnético siempre son circunferencias con número de enlace 1.

calcular de forma explícita la energía W y momento total \mathbf{P} del Hopfion, resultando

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2) d^3r = \frac{2a}{\mu_0 L_0}, \\ \mathbf{P} &= \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3r = \frac{a}{c\mu_0 L_0} \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Donde se puede ver cómo la energía electromagnética define la escala de longitud L_0 .

2.1.3. Construcción de Arrayás y nudos electromagnéticos

En esta construcción se consideran dos mapeos de Hopf ϕ y θ que generan a los campos en $t = 0$, y luego se resuelven las ecuaciones de Maxwell con estas condiciones iniciales (un problema de Cauchy en ecuaciones diferenciales). Los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} inicialmente tienen un índice dado por $\mathcal{H}(\phi)$ y $\mathcal{H}(\theta)$, pero para tiempos posteriores los campos no necesariamente son generados por algún mapeo de Hopf, lo que significa que su helicidad no tiene por qué mantenerse constante. Aún así, al fijar una configuración topológica inicial, la helicidad tiene información valiosa sobre la dinámica de los campos.

En [16] se encontró un conjunto de soluciones que tienen nudos toroidales como líneas de campo e incluyen al Hopfion como un caso particular. Los nudos toroidales son curvas anudadas sobre la superficie de un toro. Cualquier nudo toroidal está definido por dos números enteros

(n, m) de tal manera que da n vueltas alrededor del círculo dentro del toroide y m vueltas alrededor del eje de simetría del toroide (ver Figura 2.4). La topología inicial de las líneas de campo determina su evolución y el valor de otras cantidades como la energía, el momento y la helicidad. En el apéndice A se puede encontrar un análisis más detallado.

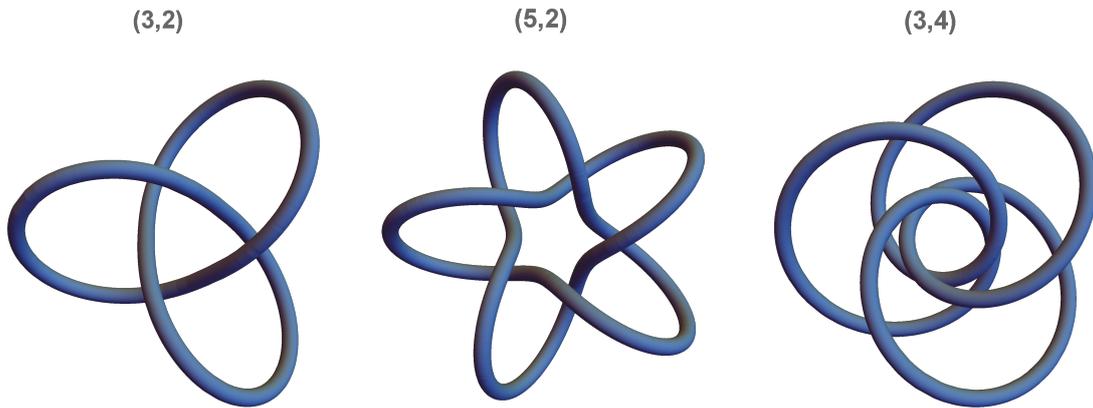


Figura 2.4. Nudos toroidales con diferente clasificación (n, m) .

En la Figura 2.5 podemos observar que las líneas de campo magnético inicialmente son nudos toroidales de tipo (n, m) y (l, s) para el campo eléctrico, pero para tiempos posteriores las líneas de campo no son cerradas y se extienden de manera indefinida sobre una superficie con topología toroidal. A pesar de que la helicidad no es un invariante topológico para cada campo, la helicidad total se mantiene constante

$$h_{em}(t) = h_m(t) + h_e(t) = \frac{a}{2}(nm + ls) \quad (2.31)$$

y se observa un intercambio de helicidad entre los campos, ver la Fig. 2.6.

2.2. Enlazamiento en el espaciotiempo de Minkowski

Las técnicas anteriores se basan en construir dos campos vectoriales en el espacio, cada uno con nudos no triviales, para después acoplarlos vía las ecuaciones de Maxwell. Por ser una construcción que considera a los campos por separado en lugar de considerar al campo electromagnético, las helicidades encontradas no son en general constantes de movimiento, ni

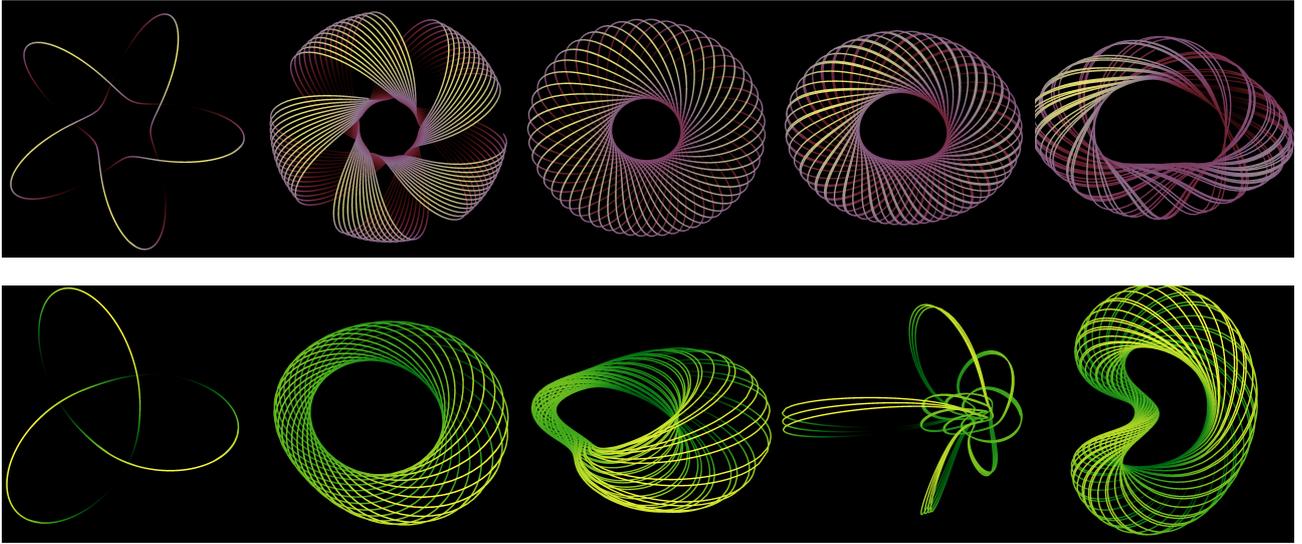


Figura 2.5. Líneas de campo magnético $(5, 2)$ y eléctrico $(3, 2)$. De izquierda a derecha, se muestra una línea de campo magnético (arriba) y una de campo eléctrico (abajo) a tiempos $T = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ y 0.4 .

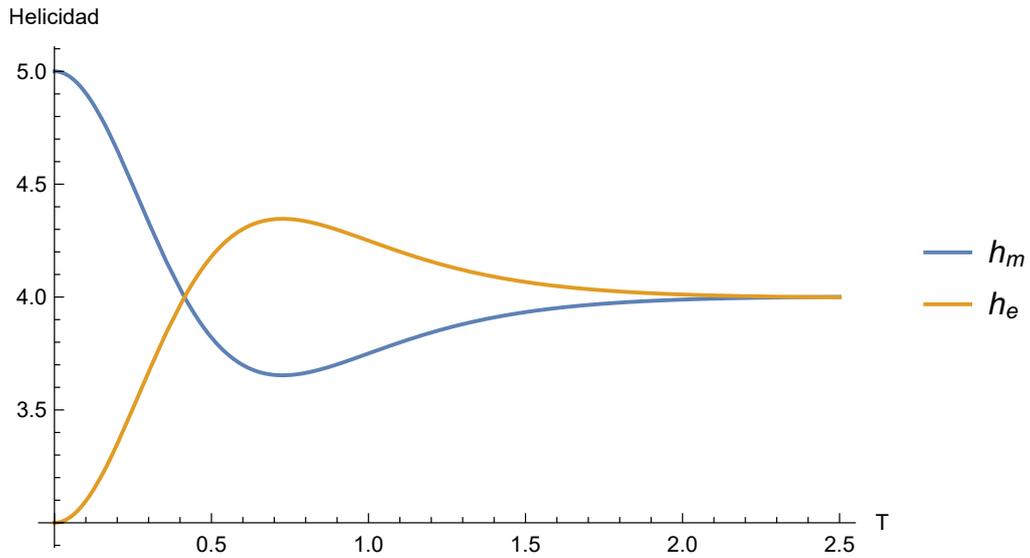


Figura 2.6. Helicidad magnética (h_m) y eléctrica (h_e) del campo toroidal $(5, 2) - (3, 2)$.

invariantes de Lorentz. Sin embargo, la antes llamada helicidad electromagnética sí es una cantidad conservada en todos los casos y forma parte de una cuatro corriente conservada, que es en todo sentido relativista.

La definición del número de enlace se puede generalizar para dos variedades orientables

disjuntas M y N encajadas en \mathbb{R}^k , de dimensión m y n respectivamente, como el grado del mapeo de Gauss

$$\phi : M \times N \rightarrow S^{k-1} \tag{2.32}$$

que asocia a cada par de puntos $p \in M$ y $q \in N$, con el vector unitario que apunta en la dirección de la recta que los une en el espacio ambiente \mathbb{R}^k . Notemos que si $k > m + n + 1$ el grado del mapeo de Gauss siempre es cero, ya que no se puede envolver S^{k-1} con una variedad de dimensión inferior.

Entonces, dos curvas cerradas pueden enlazarse en el espacio tridimensional pero no lo hacen en un espacio de dimensión cuatro. Por esta razón es que la helicidad eléctrica ni la helicidad magnética definidas como el número de enlace de las líneas de campo forman parte de un concepto relativista en el espaciotiempo de Minkowski. Para encontrar una definición relativista de helicidad que coincida con las propiedades geométricas del campo electromagnético hay que considerar el enlace de objetos de mayor dimensión, como podría ser una superficie electromagnética.

En un trabajo reciente [17], se da una descripción de los nudos electromagnéticos presentados anteriormente, desde la perspectiva de la teoría de foliaciones. Un nudo electromagnético se define como una foliación del espaciotiempo por superficies que forman nudos. Este punto de vista es más cercano a una construcción relativista.

En [18], se estudia la helicidad y el número de enlace del campo electromagnético acoplado al movimiento de un fluido barotrópico cargado (plasma). En el artículo se presenta una definición relativista de la helicidad sustentada en el hecho de que la evolución del fluido define un difeomorfismo a través del cuál se pueden evolucionar las líneas de campo, formando una superficie 2-dimensional en el espaciotiempo de Minkowski. El enlace de un par de superficies en el espaciotiempo induce una definición de enlace de líneas de campo en la hipersuperficie 3-dimensional que se mueve con el plasma. Sin embargo, en ausencia del plasma no contamos con dicho difeomorfismo que pueda evolucionar las líneas de campo, por lo que no se puede

proceder de la misma manera en el vacío.

Motivado por los trabajos presentados anteriormente, se continua el estudio de las propiedades geométricas del campo electromagnético en la misma dirección, donde se encuentra el propósito de este proyecto de tesis: describir en términos de cantidades invariantes bajo un cambio de sistema de referencia, las condiciones necesarias para que un campo electromagnético en el vacío defina superficies 2-dimensionales en el espaciotiempo. Para llevar a cabo este estudio, a continuación se presentan algunos conceptos preliminares.

Capítulo 3

Conceptos preliminares

3.1. Distribuciones y foliaciones

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Una k -distribución Δ es la elección de un subespacio $\Delta_p \subset T_p(M)$ de dimensión $k \leq n$ para cada punto $p \in M$. Δ es una *distribución suave* si para cada $p \in M$ existe una vecindad U y k campos vectoriales $X_1, \dots, X_k \in T(U)$ de clase C^∞ que generan a Δ en cada punto de U . Dichos campos son conocidos como una *base local de la distribución*. En este trabajo solamente se utilizarán distribuciones suaves, a las que a partir de ahora llamaremos simplemente distribuciones.

Si Δ es una k -distribución en M y N es una subvariedad de M de tal manera que para cada $q \in N$ se tiene $T_q(N) \subset \Delta$, entonces N es una *variedad integral* de Δ . Por otro lado, diremos que Δ es *completamente integrable* si para cada $p \in M$ hay una carta (U, ϕ) con coordenadas locales x^1, \dots, x^n tales que los vectores $E_i = \phi_*^{-1}(\partial/\partial x^i)$, $i = 1, \dots, k$ son una base local para Δ . La esencia de una distribución integrable es que para cada $p \in M$ existe una variedad integral N de dimensión k , tangente a la distribución. De hecho, si (a^1, \dots, a^n) son las coordenadas de p , la variedad integral que pasa por p está definida por $x^{k+1} = a^{k+1}, \dots, x^n = a^n$.

Una k -foliación de una variedad M es la unión disjunta de subconjuntos conexos $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, con A un conjunto de índices, llamados *hojas* de la foliación con la propiedad de que para todo $p \in M$ hay una carta (U, ϕ) con coordenadas locales x^1, \dots, x^n tales que para cada hoja, la com-

ponente $U \cap \mathcal{L}_\alpha$ está descrita por las ecuaciones $x^{k+1} = a^{k+1}, \dots, x^n = a^n$ con a^j constantes. De esta manera, una k -distribución integrable en M define una k -foliación $\{N_\alpha\}$ por subvariedades de dimensión k tangentes a la distribución, donde además, las coordenadas x^i con $1 \leq i \leq k$ sirven de coordenadas para cada subvariedad y las coordenadas con $k+1 \leq i \leq n$ sirven de índices para cada hoja N_α . Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}^3$ con coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , la 2-distribución generada por los vectores $X^1 = \partial_\phi$ y $X^2 = \partial_z$ define una 2-foliación $\{N_\rho\}$ por cilindros concéntricos de radio ρ .

Cualquier k -foliación $\{N_\alpha\}$ define una k -distribución a través de $\Delta_q = T_q(N_\alpha)$ para cada $q \in N_\alpha$ usando todas las hojas de la foliación. Sin embargo, no cualquier distribución es integrable en una familia de subvariedades $\{N_\alpha\}$. El teorema de Frobenius provee la condición necesaria y suficiente para que una distribución sea integrable, usando el conmutador entre los vectores de una base local de la distribución.

3.2. Teorema de Frobenius

Se dice que una k -distribución Δ es *involutiva* si existe una base local X_1, \dots, X_k en la vecindad de cada punto en M tal que el conmutador $[X_i, X_j]$ para toda $i, j = 1, \dots, k$ pertenece a la distribución, es decir, es una combinación lineal de la base local.

Teorema 1 (Frobenius) *Una distribución Δ en una variedad M es completamente integrable si y sólo si esta es involutiva.*

Para una demostración formal del teorema en el contexto de la geometría diferencial véanse [23, 24], y en particular, para una equivalencia del teorema en términos de formas diferenciales véase [25]. Como consecuencia del teorema de Frobenius para que una distribución sea integrable, los vectores base deben obedecer el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no triviales

$$[X_l, X_m] = \sum_{n=1}^k C_{lm}^n X_n \quad (3.1)$$

con C_{lm}^n funciones en M . La propuesta de la siguiente sección es reescribir el sistema de ecuaciones de una 2-distribución en una variedad arbitraria M como una ecuación diferencial para las componentes de un tensor de rango 2 que contiene toda la información de la distribución.

3.3. Bivectores y 2-distribuciones

El álgebra geométrica es una herramienta desarrollada por matemáticos que ha sido bien adaptada a las necesidades de la física, ya que describe eficientemente las propiedades de objetos en el espaciotiempo e incluso las propiedades del espaciotiempo mismo. Generalmente es utilizada como un puente entre cantidades geométricas de diferentes dimensiones (k -volúmenes) y los campos físicos de una teoría, todo en un lenguaje unificado (ver por ejemplo [26, 27]). En electromagnetismo, el álgebra geométrica define de forma natural al campo electromagnético como un bivector en el espaciotiempo y las ecuaciones de Maxwell como una cómoda y única ecuación diferencial. Siguiendo la idea de que el campo electromagnético define un bivector en el espaciotiempo, es conveniente repasar algunas definiciones generales y escribir las condiciones necesarias para que un bivector represente una distribución integrable.

En geometría diferencial, dada una variedad M de dimensión n , un k -vector es un vector en el álgebra exterior del espacio tangente $\wedge^k T(M)$, esto es, una combinación lineal del producto exterior de k vectores tangentes. Una k -forma se puede considerar como un k -vector del álgebra exterior del espacio dual al espacio tangente. Para $k = 0, 1, 2, 3$, los k -vectores suelen ser llamados escalares, vectores, bivectores y trivectores, y sus formas duales 0-formas (funciones en M), 1-formas, 2-formas y 3-formas.

Un k -vector es *simple* si éste se puede expresar como el producto exterior de k vectores linealmente independientes,

$$A = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k. \quad (3.2)$$

Cualquier k -vector se puede escribir como una combinación lineal de k -vectores simples. Si el conjunto de vectores a_i es linealmente dependiente, el k -vector asociado es cero. Geométricamente, un k -vector simple representa un k -volumen orientado de dimensión k en el espacio tangente $T(M)$, el cual contiene a los vectores a_i y sus combinaciones lineales [27]. Un k -vector simple (a diferencia de un k -vector genérico) define una k -distribución a través del subespacio generado por la base $a_1, a_2, \dots, a_k \in T(M)$, por lo que se vuelve de especial interés encontrar un criterio algebraico para distinguir entre k -vectores simples y no simples.

Teorema 2 Sea $\omega \in \wedge T(M)$ un k -vector con k par, entonces ω es simple $\iff \omega \wedge \omega = 0$.

En el caso particular de un bivector H , si éste es simple entonces existe un par de vectores u y v tales que $H = v \wedge u$ (esta descomposición no es única). Eligiendo coordenadas en M , el bivector es de la forma $H = \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\partial_\mu \wedge \partial_\nu$ con $H^{\mu\nu} = v^\mu u^\nu - v^\nu u^\mu$.

El teorema de Frobenius impone como condición de integrabilidad que $[v, u]$ sea una combinación lineal de u y v . Dicho de otra manera,

$$H \wedge [v, u] = v \wedge u \wedge [v, u] = 0. \quad (3.3)$$

Reescribiendo el conmutador usando Leibniz tenemos que

$$\begin{aligned} [v, u] &= (v^\mu \partial_\mu u^\nu - u^\mu \partial_\mu v^\nu) \partial_\nu \\ &= \partial_\mu (v^\mu u^\nu - v^\nu u^\mu) \partial_\nu + (\partial_\mu u^\mu) v^\nu \partial_\nu - (\partial_\mu v^\mu) u^\nu \partial_\nu \\ &= (\partial_\mu H^{\mu\nu}) \partial_\nu + (\partial_\mu u^\mu) v - (\partial_\mu v^\mu) u. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entonces la condición de Frobenius es

$$\begin{aligned} 0 &= H \wedge [v, u] \\ &= H \wedge (\partial_\mu H^{\mu\nu}) \partial_\nu + (\partial_\mu u^\mu) H \wedge v - (\partial_\mu v^\mu) H \wedge u \\ &= H \wedge (\partial_\mu H^{\mu\nu}) \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} H^{\alpha\beta} (\partial_\mu H^{\mu\nu}) \partial_\alpha \wedge \partial_\beta \wedge \partial_\nu. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Antisimetrizando índices con el símbolo de Levi-Civita, las componentes de la ecuación anterior resultan

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} (H^{\alpha\beta} \partial_\mu H^{\mu\nu} + H^{\beta\nu} \partial_\mu H^{\mu\alpha} + H^{\nu\alpha} \partial_\mu H^{\mu\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} H^{\alpha\beta} \partial_\mu H^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

más aún, si M está equipado con una métrica, la condición de Frobenius se reduce a

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} * H_{\nu\sigma} = 0, \quad (3.7)$$

donde $*H_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} H^{\alpha\beta}$ es el tensor dual de Hodge. La ecuación (3.7) resume el conjunto de ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las componentes de un bivector simple H para definir una distribución integrable, y por ende una foliación de M por superficies 2-dimensionales.

Capítulo 4

Superficies de campo electromagnético

4.1. Definición de H

Trabajando en un sistema de unidades donde $\epsilon_0 = c = 1$, M^4 es el espaciotiempo de Minkowski con métrica $\eta = (+1, -1, -1, -1)$ en coordenadas cartesianas $x^\mu = (t, x, y, z)$. Definimos a un campo electromagnético F como un campo de bivectores en M^4 que satisface las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Denotamos a $*F$ como el campo dual de Hodge a F , con componentes en coordenadas cartesianas

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad *F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Para simplificar la notación, definimos $\partial_{\mu\nu} := \partial_\mu \wedge \partial_\nu$, $\partial_{\mu\nu\sigma} := \partial_\mu \wedge \partial_\nu \wedge \partial_\sigma$ y $\partial_{\mu\nu\sigma\rho} := \partial_\mu \wedge \partial_\nu \wedge \partial_\sigma \wedge \partial_\rho$. Tomando la base $\{\partial_{tx}, \partial_{ty}, \partial_{tz}, \partial_{yz}, \partial_{zx}, \partial_{xy}\}$ del espacio de bivectores, podemos escribir al campo electromagnético y a su dual como los vectores

$$F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} = (-E_x, -E_y, -E_z, -B_x, -B_y, -B_z), \quad y \quad (4.2)$$
$$*F = \frac{1}{2} *F^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} = (-B_x, -B_y, -B_z, E_x, E_y, E_z).$$

De manera un poco más general, en coordenadas donde $x^0 = t$ y x^i son las coordenadas espaciales, abreviamos la notación como

$$F = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad y \quad *F = (-\mathbf{B}, \mathbf{E}), \quad (4.3)$$

con \mathbf{E} el campo eléctrico en ese sistema de coordenadas y \mathbf{B} el campo magnético. Un bivector define una distribución de planos en el espacio tangente si se puede descomponer como el producto exterior de dos vectores. Utilizando el Teorema 2 tenemos la siguiente equivalencia

$$\omega = \alpha \wedge \beta \iff \omega \wedge \omega = 0, \quad (4.4)$$

para algún par de vectores α y β . Para aplicar el criterio a F y $*F$ calculamos los productos

$$F \wedge F = 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\partial_{0123}, y \quad *F \wedge *F = -2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\partial_{0123}. \quad (4.5)$$

Si se satisface que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, tanto F como $*F$ definen una distribución, pero este no es el campo electromagnético más general. En [17] se realiza un estudio a profundidad sobre este caso.

Para definir una distribución sin imponer condiciones sobre los campos podemos probar con una combinación lineal $H = \lambda F + \mu *F$ con λ y μ funciones del espaciotiempo.

$$\begin{aligned} 0 &= H \wedge H \\ &= \lambda^2 F \wedge F + 2\lambda\mu F \wedge *F + \mu^2 *F \wedge *F, \end{aligned} \quad (4.6)$$

lo que implica que

$$I_1(\lambda^2 - \mu^2) + 2I_2\lambda\mu = 0, \quad (4.7)$$

donde $I_1 = 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ y $I_2 = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ son los invariantes de Lorentz del campo electromagnético. Si los coeficientes λ, μ satisfacen (4.7) también lo harán cualquier múltiplo de ellos, así como el intercambio $\lambda \rightarrow -\mu, \mu \rightarrow \lambda$. Este último se corresponde con el bivector dual $*H = -\mu F + \lambda *F$.

4.2. Boost

La ecuación (4.7) siempre se puede resolver para λ y μ , en consecuencia siempre existe un bivector simple H que define una 2-distribución. Sin embargo, para encontrar un significado físico a los coeficientes nos vamos a apoyar en un resultado conocido en electromagnetismo.

Para cada punto del espaciotiempo existe una velocidad \mathbf{v} ortogonal a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} tal que un sistema de referencia inercial con esa velocidad observa que el campo eléctrico y

magnético están alineados en ese punto. Dicha velocidad está dada por [28]

$$\frac{\mathbf{v}}{1+v^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}. \quad (4.8)$$

La ecuación para la magnitud de la velocidad es

$$v^2 - 2\chi v + 1 = 0, \quad (4.9)$$

con $\chi = \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{P}} > 1$, la densidad de energía $\mathcal{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ y la densidad de momento $\mathcal{P} = |\mathbf{E} \times \mathbf{B}|$.

La solución tal que $v < 1$ es

$$v = \chi - \sqrt{\chi^2 - 1}, \quad (4.10)$$

por lo tanto la velocidad con la que se debe hacer el boost va en la dirección de la densidad de momento con la magnitud dada por (4.10), es decir, $\mathbf{v} = v\hat{\mathcal{P}}$.

Cuando se realiza un boost, las componentes del bivector F se transforman de tal manera que en los campos eléctrico y magnético sólo se transforman las componentes ortogonales a la velocidad del boost. En este caso, como ambos campos inicialmente son ortogonales a la velocidad, la transformación los mantiene en el mismo plano ortogonal a \mathbf{v} . El marco de referencia que observa a los campos alineados no es único, cualquier sistema con velocidad relativa al primero en la dirección en la que están \mathbf{E}' y \mathbf{B}' también los observará paralelos.

4.3. Coeficientes y factorización de \mathbf{H}

Cambiando de base utilizando la matriz $\Lambda_{\mathbf{v}}$ del boost dado por la velocidad \mathbf{v} , los campos son de la forma $\mathbf{E}' = E_0\hat{\mathbf{n}}$ y $\mathbf{B}' = B_0\hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Los bivectores se transforman como

$$\begin{aligned} F' &= (-E_0\hat{\mathbf{n}}, -B_0\hat{\mathbf{n}}), \\ *F' &= (-B_0\hat{\mathbf{n}}, E_0\hat{\mathbf{n}}), \\ H' &= (-(\lambda E_0 + \mu B_0)\hat{\mathbf{n}}, (\mu E_0 - \lambda B_0)\hat{\mathbf{n}}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si tomamos $\lambda = E_0$ y $\mu = B_0$, entonces

$$H' = -(E_0^2 + B_0^2)\hat{\mathbf{n}}, 0 = -(E_0^2 + B_0^2)\partial_{\nu'} \wedge \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.12)$$

con $\hat{n} = n^i \partial_i$. En la base original

$$H = -(E_0^2 + B_0^2)(\Lambda_{\mathbf{v}}^{-1} \partial_{\nu'}) \wedge (\Lambda_{\mathbf{v}}^{-1} \hat{n}), \quad (4.13)$$

lo que demuestra que $H = E_0 F + B_0 * F$ es factorizable y en consecuencia define una distribución de planos en el espacio tangente.

4.4. Interpretación física de H

Supongamos una partícula masiva con 4-velocidad $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$. Sabemos que al pasar a su marco de referencia la partícula está en reposo, es decir $\Lambda_{\mathbf{v}} u = \partial_{\nu'}$. Por otro lado, un boost aplicado a un 3-vector espacial, sólo transforma la componente paralela a la dirección de \mathbf{v} , como \hat{n} es un vector ortogonal a la velocidad, el boost lo deja invariante. Usando lo anterior podemos escribir

$$H = -(E_0^2 + B_0^2)u \wedge \hat{n}. \quad (4.14)$$

Dado que la distribución H contiene a todas las combinaciones lineales posibles de u y \hat{n} en el espacio tangente, incluyendo las 4-velocidades que llevan una velocidad en el plano \mathbf{v} - \mathbf{n} , H define el plano en el espacio tangente, que contiene a las 4-velocidades todos los observadores que ven a los campos paralelos.

4.5. Componentes y factorización explícita de H

Analicemos las componentes de H ,

$$\begin{aligned} H &= E_0 F + B_0 * F \\ &= (-E_0 \mathbf{E} - B_0 \mathbf{B}, B_0 \mathbf{E} - E_0 \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{aligned}$$

donde los vectores \mathbf{X} y \mathbf{Y} son ortogonales

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = E_0 B_0 (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - (B_0^2 - E_0^2) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = \frac{I_1}{2} I_2 - I_2 \frac{I_1}{2} = 0, \quad (4.15)$$

y junto con el vector $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y} = (E_0^2 + B_0^2)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ forman una base ortogonal en \mathbb{R}^3 . Podemos escribir la velocidad \mathbf{v} en términos de esta base. Para ello usamos el hecho de que u pertenece al plano H , por lo que

$$H \wedge u = 0. \quad (4.16)$$

La expresión anterior es equivalente a cuatro ecuaciones para las componentes del trivector $H \wedge u$. Estas ecuaciones se pueden reescribir como

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{X} \times \mathbf{v} + \mathbf{Y} = 0. \quad (4.18)$$

Como la velocidad está en la misma dirección que \mathbf{Z} proponemos $\mathbf{v} = s\mathbf{Z}$, con lo que automáticamente se satisface la primer ecuación y la segunda nos da la expresión para s

$$s\mathbf{X} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) + \mathbf{Y} = 0 \quad (4.19)$$

$$-sX^2\mathbf{Y} + \mathbf{Y} = 0$$

$$s = \frac{1}{X^2},$$

por lo que $\mathbf{v} = \frac{1}{X^2}\mathbf{Z} = \frac{Y}{X}\hat{\mathbf{Z}}$.

Nos interesa una factorización explícita de H en términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Empecemos por las magnitudes E_0, B_0 . Usamos los invariantes de Lorentz para definir un sistema de ecuaciones

$$2E_0B_0 = 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = I_1, \quad (4.20)$$

$$B_0^2 - E_0^2 = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = I_2,$$

cuya solución es

$$E_0^2 = \frac{1}{2}(I_3 - I_2), \quad (4.21)$$

$$B_0^2 = \frac{1}{2}(I_3 + I_2),$$

donde se ha definido un tercer escalar de Lorentz $I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$. Para encontrar $\hat{\mathbf{n}}$ comparemos las componentes de H

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -(E_0^2 + B_0^2)u \wedge \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.22)$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -I_3\gamma(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}}),$$

usando la definición de los vectores \mathbf{X} y \mathbf{Y} y la expresión $v = \frac{Y}{X}$ se obtiene que $I_3\gamma = X$, por lo que la última ecuación es

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -(X\hat{\mathbf{n}}, Y\hat{\mathbf{Z}} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (4.23)$$

La única solución es $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{X}}$. Finalmente

$$H = -I_3 u \wedge \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.24)$$

$$I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}, \quad (4.25)$$

$$u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}), \quad (4.26)$$

$$\mathbf{v} = (\chi - \sqrt{\chi^2 - 1})\hat{\mathcal{P}}, \quad (4.27)$$

$$\chi = \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{P}}, \quad (4.28)$$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (4.29)$$

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{n} = E_0\mathbf{E} + B_0\mathbf{B}, \quad (4.31)$$

$$E_0^2 = \frac{1}{2}(I_3 - I_2), \quad (4.32)$$

$$B_0^2 = \frac{1}{2}(I_3 + I_2). \quad (4.33)$$

4.6. Integrabilidad de F y H

Para que un bivector H defina una foliación del espaciotiempo por superficies 2-dimensionales debe cumplir dos condiciones:

1. $H \wedge H = 0$, para que H defina una 2-distribución.
2. Satisfacer la ecuación (3.7) para que la distribución sea integrable.

El campo electromagnético F así como su dual $*F$, cumplen la primera condición si $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y la segunda se satisface si se siguen las ecuaciones de Maxwell en el vacío $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0$. Además, de la dualidad de Hodge se sigue que las superficies de cada foliación son ortogonales. En el caso particular de campos \mathbf{E} y \mathbf{B} ortogonales, siempre se puede definir una foliación del espaciotiempo por superficies de campo electromagnético.

Alternativamente, si no se impone ninguna condición a los campos, el bivector $H = E_0 F + B_0 * F$ cumple la primera condición. Ahora nos interesa escribir la segunda condición en términos de los campos. Para ello vamos a necesitar las siguientes identidades

$$F^{\mu\nu} * F_{\nu\sigma} = *F^{\mu\nu} F_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} I_1 \delta^\mu{}_\sigma, \quad (4.34)$$

$$F^{\mu\nu} F_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} I_2 \delta^\mu{}_\sigma = *F^{\mu\nu} * F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} I_2 \delta^\mu{}_\sigma = \mathcal{T}^\mu{}_\sigma, \quad (4.35)$$

donde $\mathcal{T}^{\mu\sigma}$ es el tensor de energía-momento simetrizado del campo electromagnético. Reescribamos la ecuación (3.7) en términos de $F^{\mu\nu}$ usando las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} *H_{\nu\sigma} \partial_\mu H^{\mu\nu} &= (E_0 * F_{\nu\sigma} - B_0 F_{\nu\sigma}) (\partial_\mu E_0 F^{\mu\nu} + \partial_\mu B_0 * F^{\mu\nu}) \\ &= E_0 (\partial_\mu E_0 F^{\mu\nu}) * F_{\nu\sigma} - B_0 (\partial_\mu B_0 * F^{\mu\nu}) F_{\nu\sigma} + E_0 (\partial_\mu B_0 * F^{\mu\nu}) * F_{\nu\sigma} - B_0 (\partial_\mu E_0 F^{\mu\nu}) F_{\nu\sigma} \\ &= (E_0 \partial_\mu E_0 - B_0 \partial_\mu B_0) \frac{1}{2} I_1 \delta^\mu{}_\sigma + E_0 (\partial_\mu B_0) (\mathcal{T}^\mu{}_\sigma + \frac{1}{2} I_2 \delta^\mu{}_\sigma) - B_0 (\partial_\mu E_0) (\mathcal{T}^\mu{}_\sigma - \frac{1}{2} I_2 \delta^\mu{}_\sigma) \\ &= \frac{1}{4} I_1 \partial_\sigma (E_0^2 - B_0^2) + \frac{1}{2} I_2 \partial_\sigma (E_0 B_0) + (E_0 \partial_\mu B_0 - B_0 \partial_\mu E_0) \mathcal{T}^\mu{}_\sigma \\ &= -\frac{1}{4} I_1 \partial_\sigma I_2 + \frac{1}{4} I_2 \partial_\sigma I_1 + (E_0 \partial_\mu B_0 - B_0 \partial_\mu E_0) \mathcal{T}^\mu{}_\sigma \\ &= \frac{1}{4} (I_2 \partial_\sigma I_1 - I_1 \partial_\sigma I_2) + \frac{1}{2 I_3} (I_1 \partial_\mu I_2 - I_2 \partial_\mu I_1) \mathcal{T}^\mu{}_\sigma, \end{aligned} \quad (4.36)$$

entonces la condición de Frobenius implica una ecuación de eigenvectores

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu (I_1 \partial^\nu I_2 - I_2 \partial^\nu I_1) = \frac{I_3}{2} (I_1 \partial^\mu I_2 - I_2 \partial^\mu I_1). \quad (4.37)$$

El tensor de energía-momento y sus eigenvalores son cantidades bien comprendidas por la teoría electromagnética, sin embargo el vector $I_1 \partial^\nu I_2 - I_2 \partial^\nu I_1$ no tiene alguna mención destacada en la literatura. Para explorar el significado físico de la condición de Frobenius, vamos a expresar al vector mencionado en términos de una cantidad asociada al campo electromagnético conocida como la *complejión*.

4.7. Complejión del campo electromagnético

La complejión del campo electromagnético es una cantidad poco mencionada en la literatura por lo que aún carece de un significado físico. En los trabajos [29] y [30], se desarrolla toda una maquinaria teórica para determinar por completo un campo electromagnético en términos de

la geometría (el tensor de Riemann) del espaciotiempo en el que esta inmerso, el punto de vista de estos trabajos es que las ecuaciones de Einstein-Maxwell son condiciones geométricas sobre el campo electromagnético y lo determinan casi por completo. En este contexto la complejión aparece como una función del campo electromagnético que hay que determinar usando las ecuaciones diferenciales que la relacionan con el tensor de Riemann. En [31] se da una posible interpretación geométrica, también en el contexto de la relatividad general donde posiblemente la complejión pueda ser mejor valorada. En [27] también se puede encontrar una motivación en el lenguaje del álgebra geométrica, donde es llamada *la fase física del campo electromagnético*. La *complejión* del campo electromagnético se define como una cantidad angular α tal que

$$\tan 2\alpha = -\frac{I_1}{I_2}. \quad (4.38)$$

Es notable que la complejión también es un invariante de Lorentz. Tomando su gradiente tenemos

$$\partial_\mu \alpha = \frac{I_1 \partial_\mu I_2 - I_2 \partial_\mu I_1}{2I_3^2}. \quad (4.39)$$

Considerando que cualquier múltiplo de un eigenvector también es un eigenvector, la condición de integrabilidad de H (4.37) se reduce a

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial^\nu \alpha = \frac{I_3}{2} \partial^\mu \alpha. \quad (4.40)$$

Ahora vamos a analizar los eigenvectores del tensor de energía momento a través de los eigenvectores del campo electromagnético, para establecer las propiedades que debe tener el gradiente de la complejión para que H sea integrable.

4.8. Eigenvectores del tensor energía-momento

Usando la métrica, el campo electromagnético define un operador $F^\alpha{}_\beta$ que actúa sobre vectores del espacio tangente. La ecuación característica que satisface el operador es

$$0 = \det(F^\alpha{}_\beta - \lambda \delta^\alpha{}_\beta) = \lambda^4 + I_2 \lambda^2 - \frac{1}{4} I_1^2, \quad (4.41)$$

de donde se pueden encontrar cuatro eigenvalores $\lambda = iB_0, -iB_0, E_0, -E_0$, con sus respectivos eigenvectores e_1, e_2, e_3, e_4

$$\begin{aligned} e_1^\nu &= (\mathbf{B}^2 - B_0^2, \mathcal{P} + i\mathbf{Y}), \\ e_2^\nu &= (\mathbf{B}^2 - B_0^2, \mathcal{P} - i\mathbf{Y}), \\ e_3^\nu &= (\mathbf{B}^2 + E_0^2, \mathcal{P} - \mathbf{X}), \\ e_4^\nu &= (\mathbf{B}^2 + E_0^2, \mathcal{P} + \mathbf{X}), \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde e_1, e_2 son vectores complejos y e_3, e_4 son vectores reales. Por la antisimetría de $F^{\alpha\beta}$ todos son vectores nulos pero no son ortogonales entre sí. El tensor electromagnético también define los bivectores

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \wedge \partial_\beta = -iB_0 e_1 \wedge e_2 - E_0 e_3 \wedge e_4, \\ *F &= \frac{1}{2} * F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \wedge \partial_\beta = iE_0 e_1 \wedge e_2 - B_0 e_3 \wedge e_4. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Sustituyendo F y $*F$ en H , se tiene una factorización explícita en términos de los eigenvectores de F

$$H = E_0 F + B_0 *F = -(E_0^2 + B_0^2) e_3 \wedge e_4, \quad (4.44)$$

comparando con la ecuación (4.14), entonces e_3 y e_4 son vectores nulos que pertenecen al plano de observadores que ven a los campos paralelos.

El tensor de energía-momento también define un operador en el espacio tangente que va como el cuadrado del campo electromagnético $\mathcal{T}^\mu{}_\nu = F^\mu{}_\sigma F^\sigma{}_\nu + \frac{1}{2} I_2 \delta^\mu{}_\nu$. Tiene dos eigenvalores degenerados $-\frac{I_3}{2}$ y $\frac{I_3}{2}$ con respectivos eigenvectores e_1, e_2 y e_3, e_4 .

La ecuación (4.40) requiere que el gradiente de la complexión sea un eigenvector del tensor de energía-momento con eigenvalor $\frac{I_3}{2}$, es decir, que el vector $\nabla\alpha = (g^{\mu\nu} \partial_\nu \alpha) \partial_\mu$ pertenezca a la distribución generada por e_3 y e_4 , que a su vez es H . Finalmente, la integrabilidad de H se resume en la siguiente ecuación

$$H \wedge \nabla\alpha = 0. \quad (4.45)$$

Esta condición aún carece de un significado físico claro. Más allá de saber que H es una distribución de planos generados por los vectores tangentes a la línea de mundo de observadores

que ven a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} alineados en cada punto de su trayectoria; no hay mucha información disponible sobre la complejidad del campo electromagnético ni su gradiente en el contexto del espaciotiempo de Minkowski. Esto presenta la oportunidad de abrir una línea investigación sobre la complejidad y su caracterización geométrica en espaciotiempo plano, y la investigación de superficies de campo electromagnético en espaciotiempo curvo, donde la complejidad juega un papel más remarcable.

Capítulo 5

Ejemplos

Teniendo en cuenta que la complejión del campo electromagnético es una cantidad poco explorada en la literatura, vale la pena repasar algunas configuraciones típicas de campos electromagnéticos y explorar lo que se puede decir acerca de la complejión, la 2-distribución H y su integrabilidad. Dado que la ecuación (4.45) es independiente del sistema de coordenadas, cada uno de los siguientes ejemplos representan a toda una clase de campos equivalentes bajo un cambio de sistema inercial.

5.1. Campos ortogonales

Tomemos una descomposición de Minkowski $M^4 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ con coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) , donde x^i son coordenadas espaciales. Un vector $A = A^i \partial_i$ en $T(\mathbb{R}^3)$, también define un bivector $\tilde{A} = \star_S A$, donde \star_S es el operador de Hodge en \mathbb{R}^3 con la métrica euclidiana. Usando esta notación, el campo electromagnético y su dual de Hodge se puede expresar de la forma

$$F = E \wedge \partial_t - \tilde{B} \quad y \quad *F = B \wedge \partial_t + \tilde{E}. \quad (5.1)$$

Además, si los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son ortogonales, los bivectores se pueden factorizar explícitamente como

$$F = E \wedge (\partial_t + \frac{1}{\mathbf{E}^2} \mathcal{P}) \quad y \quad *F = B \wedge (\partial_t + \frac{1}{\mathbf{B}^2} \mathcal{P}), \quad (5.2)$$

donde \mathcal{P} es el vector de Poynting, que en esta notación se define tal que $\tilde{\mathcal{P}} = E \wedge B$.

Como se menciona en la sección 4.6, si los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son ortogonales entre sí, entonces F y su dual $\star F$ siempre definen una 2-foliación del espaciotiempo en virtud de que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Dada la expresión (4.38), la complejión es cero en todo el espaciotiempo o no está definida en caso de que $I_2 = 0$, por lo que poco se puede comentar acerca de su significado físico. A continuación se enlistan algunos casos particulares de campos ortogonales.

5.1.1. Electroestática y magnetostática

En electrostática ($\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B} = 0$), el campo electromagnético $F = E \wedge \partial_t$, define una 2-distribución integrable. La 2-foliación está dada por superficies encajadas en M^4 , tangentes al campo eléctrico en cada hipersuperficie de t constante, y al vector ∂_t . Dicho de otro modo, la intersección de las superficies de la foliación con hipersuperficies de t constante, son las curvas integrales de \mathbf{E} . El parámetro de las curvas integrales del campo eléctrico y la coordenada temporal t , definen coordenadas sobre las superficies de la foliación.

En magnetostática ($\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{E} = 0$) la situación es completamente análoga. En este caso $\star F = B \wedge \partial_t$ define una 2-foliación del espaciotiempo de la misma manera que F la define en electrostática.

5.1.2. Ondas electromagnéticas planas

En una onda electromagnética plana, tanto \mathbf{E} como \mathbf{B} satisfacen la ecuación de onda y se propagan en la misma dirección, de tal manera que \mathbf{E} y \mathbf{B} son ortogonales entre sí, a la vez que son ortogonales a la dirección de propagación, por lo que la evolución de los campos está en el plano ortogonal a la dirección de propagación. En coordenadas cartesianas, la forma general de una onda plana monocromática en el vacío está dada por

$$\mathbf{E} = (E_+ \mathbf{e}_+ + E_- \mathbf{e}_-) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \quad (5.3)$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base ortonormal en \mathbb{R}^3 , $\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)$, E_\pm son constantes complejas, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$ es el vector de onda y ω es la frecuencia de la onda. La polarización de la onda está determinada por el complejo $E_-/E_+ = r e^{i\beta}$. Si $r \neq 0$, la onda tiene polarización elíptica

cuyos ejes principales se corresponden con los ejes \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 rotados en el mismo plano por un ángulo $\beta/2$, y la razón entre el semieje mayor y el semieje menor es de $(1+r)/(1-r)$. Si $r = 0$ o $r^{-1} \rightarrow 0$, la onda tiene polarización circular izquierda o derecha respectivamente. Y si $r = \pm 1$, la onda tiene polarización lineal en el plano ortogonal a \mathbf{e}_3 .

Consideremos una onda que se propaga en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, entonces E evoluciona dentro del plano xy y $F = E \wedge (\partial_t - \partial_z)$ es una 2-distribución integrable. Más aún, para una onda con polarización lineal a lo largo del eje $\hat{\mathbf{x}}$, $F = E_0 \cos(kz - \omega t) \partial_x \wedge (\partial_t - \partial_z)$ define una 2-foliación de M^4 de planos infinitos generados por los vectores ∂_x y $\partial_t - \partial_z$.

5.1.3. Campos de radiación

Un sistema que en principio puede ser muy complicado, es el de la radiación electromagnética emitida por una fuente arbitraria pero finita, localizada en un entorno del origen. Para distancias muy grandes comparadas con el tamaño de la fuente, la única contribución relevante en los campos se debe al momento dipolar de la fuente. Bajo ciertas aproximaciones los campos que se obtienen son [32]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}, \quad (5.4)$$

donde $\ddot{\mathbf{p}}$ es la segunda derivada respecto al tiempo del momento dipolar de la fuente, evaluada en el tiempo retardado $t_0 = t - r$. Los campos resultan ser ortogonales entre sí y de la misma magnitud, de manera muy similar a las ondas planas.

Tomando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , tales que el eje z está en la dirección de $\ddot{\mathbf{p}}$, los campos toman la forma

$$\mathbf{E} = \ddot{p}(t_0) \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{B} = \ddot{p}(t_0) \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (5.5)$$

Si hacemos un cambio de coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (u, v, \theta, \phi)$ con $u = t - r$ y $v = t + r$, el campo electromagnético $F = 8\ddot{p}(u) \frac{\sin \theta}{(v-u)^2} \partial_\theta \wedge \partial_v$, define una 2-foliación del espaciotiempo por superficies de u y ϕ constantes.

5.1.4. Flujo de Poynting saliente

En el contexto de la astrofísica, toman especial relevancia las soluciones a las ecuaciones de Maxwell que modelan los campos externos a una estrella perfectamente conductora o un agujero negro que rota. Una clase importante de estas soluciones son las magnetosferas libres de fuerzas, donde el campo electromagnético es magneticamente dominante ($\mathbf{B}^2 > \mathbf{E}^2$), las fuentes tienen simetría rotacional y la fuerza de Lorentz sobre ellas es nula. En [33], se desarrolla la teoría general de magnetosferas libres de fuerzas en un lenguaje completamente covariante, en términos de la 2-forma de campo electromagnético $\mathcal{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ en un espaciotiempo curvo.

Una de las soluciones más remarcables del artículo por su simpleza, y porque no se simplifica de manera trivial en el espaciotiempo plano, es la llamada solución de *flujo de Poynting saliente* definida en Minkowski como $\mathcal{F} = -d\zeta \wedge du$, donde $\zeta = \zeta(\theta, \phi, u)$ es una función real que sólo depende de las variables angulares en coordenadas esféricas y del tiempo retardado $u = t - r$. En esta solución es inevitable la existencia de fuentes radiales, de hecho, el vector de densidad de corriente es proporcional al vector nulo $\partial_t + \partial_r$. La solución describe energía electromagnética que emerge del origen de coordenadas, donde el campo es singular, por esta razón no se considera una solución física. En las mismas coordenadas (u, v, θ, ϕ) utilizadas en los campos de radiación, tenemos que

$$F = -2\nabla\zeta \wedge \partial_v, \quad (5.6)$$

donde $\nabla\zeta = (g^{\mu\nu}\partial_\nu\zeta)\partial_\mu$ es el vector gradiente de la función ζ . Dado que F es factorizable, pertenece al grupo de campos ortogonales, sin embargo, no necesariamente satisface la ecuación (3.7) ya que no satisface Maxwell en el vacío. En este caso, sólo podemos asegurar que $\star F$ define una 2-foliación del espaciotiempo.

5.1.5. Monopolo magnético rotante

Como caso particular de una magnetosfera libre de fuerzas, podemos tomar la superposición de un monopolo magnético y un flujo de Poynting radial saliente. Esta solución, conocida como el *monopolo magnético rotante* [33], sí puede corresponder a la situación física de un plasma relativista esférico en rotación. La 2-forma de campo electromagnético se toma como

$\mathcal{F} = -q \sin \theta d\theta \wedge d\phi - d\zeta \wedge du$, con $\zeta = q\Omega \cos \theta$, q el monopolo magnético y Ω la velocidad angular constante. Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en coordenadas esféricas son

$$\mathbf{E} = -q\Omega \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - q\Omega \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (5.7)$$

En coordenadas (u, v, θ, ϕ) el campo dual

$$\star F = 2 \frac{q_m}{r^2} \partial_v \wedge (\partial_u + \Omega \partial_\phi), \quad (5.8)$$

define una 2-foliación del espaciotiempo. Los vectores ∂_v y $\partial_u + \Omega \partial_\phi$ son independientes de θ , por lo que las superficies están dentro de hipersuperficies de θ constante. En la Fig. 5.1 se muestra la foliación en el subespacio xyt dado por el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.



Figura 5.1. Superficies de campo electromagnético de un monopolo magnético rotante. Las superficies están dentro del subespacio xyt .

5.2. Campos no ortogonales

En el caso más general, los campos eléctrico y magnético no son ortogonales entre sí, en consecuencia F no define una 2-distribución de planos en el espacio tangente, pero en su lugar tenemos las distribuciones H y $\star H$ dadas por los subespacios degenerados de eigenvectores del tensor de energía momento. La condición de integrabilidad (4.45) junto con la factorización explícita de H (4.14), imponen que el gradiente de la complexión electromagnética pertenezca al plano tangente generado por la velocidad $u = u^\mu \partial_\mu$ de un observador que ve a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} localmente alineados y el propio vector que define la dirección en la que se alinean $\hat{n} = n^i \partial_i$. Si tomamos campos independientes del tiempo, el gradiente no tiene componente en la dirección de ∂_t , de esta manera, la única forma de que pertenezca al plano tangente H es si es paralelo a \hat{n} ; pero \hat{n} a su vez pertenece al plano en el que están \mathbf{E} y \mathbf{B} . Entonces, buscar campos electromagnéticos estáticos no ortogonales que definan una 2-foliación del espaciotiempo, nos lleva a pensar en configuraciones tales que los campos eléctrico y magnético sólo tengan variaciones dentro del mismo plano al que pertenecen. En el resto de este capítulo vamos a explorar algunos ejemplos de este tipo.

5.2.1. Campos homogéneos y estáticos

El sistema más sencillo a considerar es el de dos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} homogéneos y estáticos. Si los campos no son ortogonales, siempre existe otro sistema de referencia con una velocidad respecto al primero dada por las ecuaciones (4.10) y (4.8), donde los campos están alineados. En este nuevo sistema de referencia $\mathbf{E} = E_0 \hat{n}$, $\mathbf{B} = B_0 \hat{n}$ y la complexión toma el valor constante

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_0 B_0}{E_0^2 - B_0^2}, \quad (5.9)$$

por lo que su gradiente es cero y la condición (3.7) se satisface trivialmente. Entonces $H = (E_0^2 + B_0^2) \hat{n} \wedge \partial_t$ es integrable y da lugar a una 2-foliación del espaciotiempo por planos infinitos tangentes a $\hat{n} \wedge \partial_t$.

5.2.2. Carga eléctrica y campo magnético homogéneo

Las primeras clases de campos estáticos con una complexión no constante, aparecen cuando fijamos uno de los campos homogéneo y el otro como una solución no trivial de las ecuaciones

de Maxwell. Por ejemplo, tomemos un campo magnético constante de magnitud B y un campo eléctrico generado por una carga puntual q .

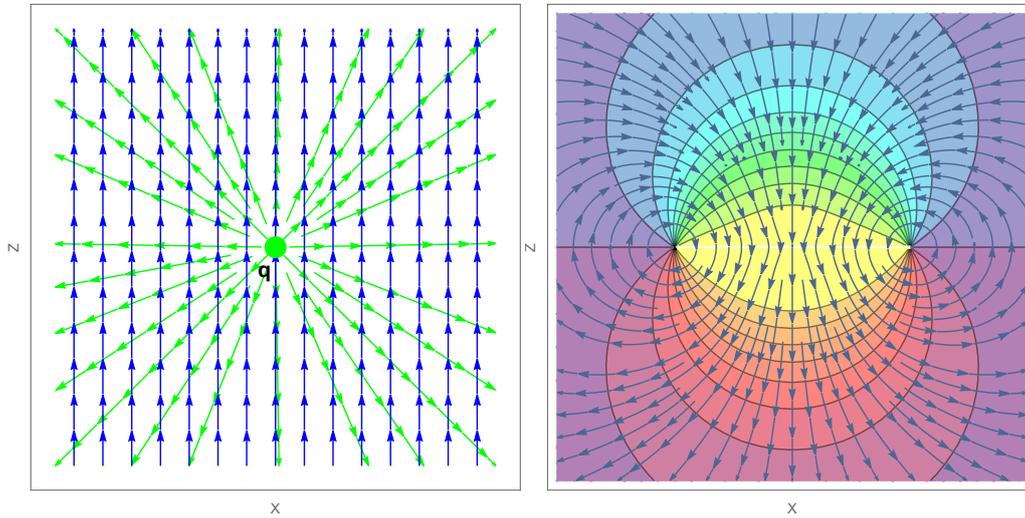


Figura 5.2. En la izquierda se muestran el campo eléctrico de una carga puntual (verde) y un campo magnético constante (azul). A la derecha se muestra un mapa de colores de la complejión junto a su campo gradiente en el plano XZ .

Complejión	Color	Campos localmente alineados	I_1	I_2
$\frac{\pi}{2}$	■	$B_0 = 0, E_0 \neq 0$	$= 0$	< 0
$\frac{\pi}{4}$	■	Antiparalelos, $E_0 = B_0$	< 0	$= 0$
0	■	$E_0 = 0, B_0 \neq 0$	$= 0$	> 0
$-\frac{\pi}{4}$	■	Paralelos, $E_0 = B_0$	> 0	$= 0$
$-\frac{\pi}{2}$	■	$B_0 = 0, E_0 \neq 0$	$= 0$	< 0

Tabla 5.1: Código de colores para valores de la complejión.

El sistema tiene una escala de longitud dada por $d = (q/B)^{\frac{1}{2}}$. En la Fig. 5.2 se usan coordenadas adimensionales $X = x/d$ y $Z = z/d$ para graficar los campos y la complejión en el plano XZ . Los campos tienen simetría axial respecto a \mathbf{B} y no dependen del tiempo, por lo que el gradiente de la complejión es un vector espacialoide dentro del mismo plano en el que

están los campos. El gradiente de la complexión se vuelve singular en un anillo de radio d en el plano $z = 0$.

En la expresión (4.38), la complexión toma valores $-\pi \leq 2\alpha \leq \pi$, donde los extremos se corresponden con la misma situación física: campo electromagnético nulo y eléctricamente dominante ($\mathbf{E}^2 > \mathbf{B}^2$). En la Tabla 5.1 se enlistan distintos valores de la complexión con la correspondiente situación física en términos de los campos localmente alineados. De dicha tabla se puede inferir que para $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ el campo electromagnético es eléctricamente dominante, por otra parte, para $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ el campo es magnéticamente dominante.

A pesar de que el gradiente está en el mismo plano que los campos, no está precisamente en la dirección de \hat{n} , por lo que no se satisface la condición (3.7) y la distribución H no es integrable.

5.2.3. Campo eléctrico constante con dipolo magnético

Ahora tomemos un campo eléctrico constante de magnitud E y el campo magnético de un dipolo \mathbf{m} alineado con el campo eléctrico. El sistema tiene una escala de longitud dada por $d = (m/E)^{\frac{1}{3}}$ que también define un sistema de coordenadas adimensionales. En la Fig. 5.3 se grafican los campos y la complexión en el plano XZ . Los campos tienen simetría axial respecto a \mathbf{E} y no dependen del tiempo, por lo que el gradiente de la complexión es un vector espacialoide dentro del mismo plano en el que están los campos. El código de colores es el mismo que se indica en la Tabla 5.1. El gradiente de la complexión se vuelve singular en dos anillos de radio d en los planos $z = \pm d/2$. En este sistema, el gradiente tampoco resulta estar en la dirección de \hat{n} , ni tampoco lo está para ninguna otra orientación del dipolo magnético, por lo que este sistema no define superficies de campo electromagnético.

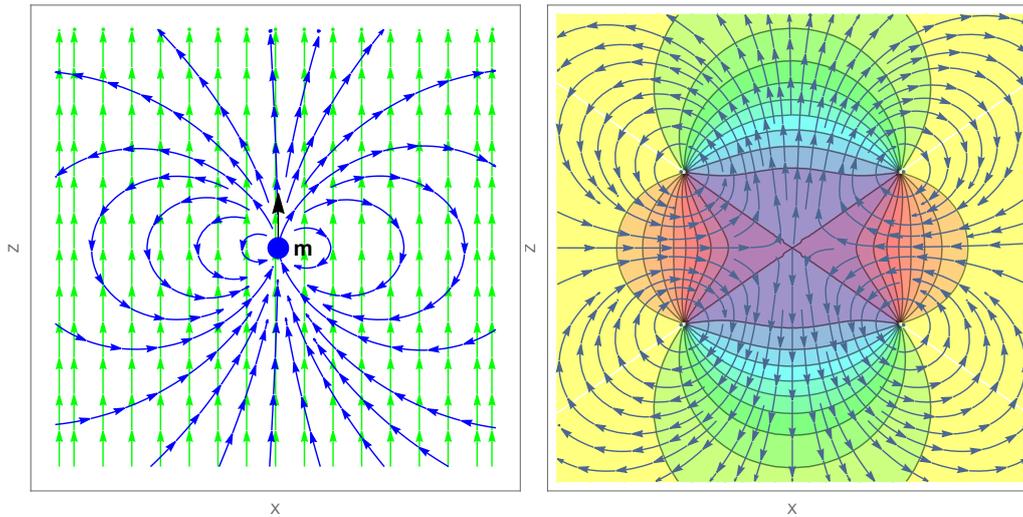


Figura 5.3. En la izquierda se muestran un campo eléctrico constante (verde) y el campo magnético de un dipolo (azul) alineado con el campo eléctrico. A la derecha se muestra un mapa de colores de la complejión junto a su campo gradiente en el plano XZ .

5.2.4. Carga eléctrica con dipolo magnético

Consideremos el campo electromagnético generado por una carga puntual q en el origen y un dipolo magnético \mathbf{m} también en el origen. El sistema tiene una escala de longitud dada por $d = m/q$ que también define un sistema de coordenadas adimensionales. Cabe mencionar que este sistema también es equivalente a los campos generados en el exterior de una esfera hueca de radio a , con una carga total q , que rota al rededor del eje del dipolo \mathbf{m} con una velocidad angular $\Omega = \frac{3m}{qa^2}$. En la Fig. 5.4 se grafican los campos y la complejión en el plano XZ . Los campos tienen simetría axial respecto a \mathbf{E} y no dependen del tiempo. El gradiente de la complejión es un vector espacialoide dentro del mismo plano en el que están los campos. El código de colores es el mismo que se indica en la Tabla 5.1. El gradiente de la complejión también es singular en un anillo de radio d en el plano $z = 0$. La condición de integrabilidad (3.7) tampoco se satisface para esta configuración, por lo que este sistema tampoco define superficies de campo electromagnético.

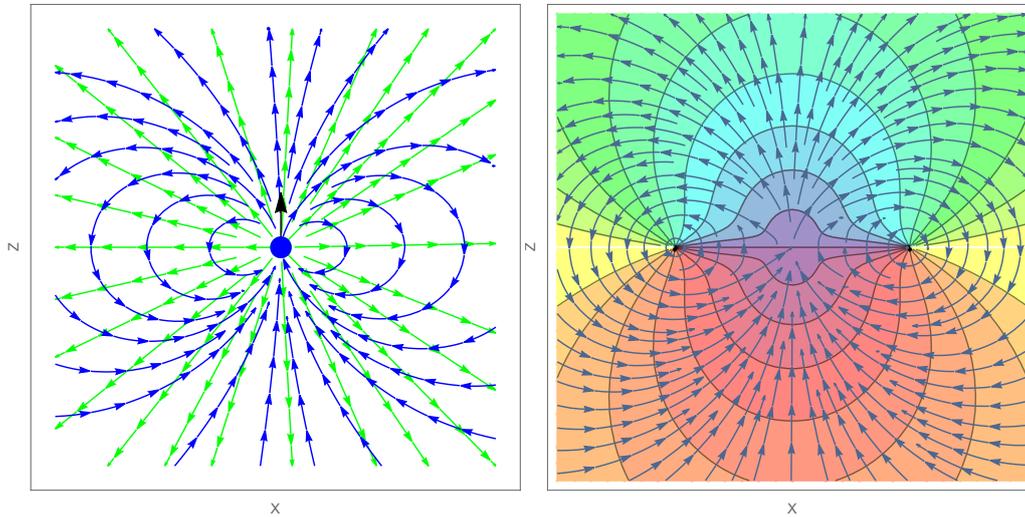


Figura 5.4. En la izquierda se muestran el campo eléctrico de una carga (verde) y el campo magnético de un dipolo (azul). A la derecha se muestra un mapa de colores de la complexión junto a su campo gradiente en el plano XZ .

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha encontrado que un campo electromagnético dado como un bivector $F = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\partial_\mu \wedge \partial_\nu$ define una foliación del espaciotiempo por superficies 2-dimensionales si este es degenerado, es decir, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y cumple las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Esto coincide directamente con la clase de campos electromagnéticos analizados en [17] a través de la foliación que definen. Pero este no es el caso más general. Si los campos no son ortogonales siempre se puede construir una combinación lineal de F y $*F$, que se identifica con la distribución de planos tangentes a las líneas de mundo de observadores que perciben al campo eléctrico y magnético en la misma dirección. Esta distribución H y su dual son las únicas que se pueden definir como una combinación lineal del campo y su dual. Para que H sea integrable se tiene como requisito una ecuación diferencial no lineal de primer orden que, en términos del gradiente de la complexión del campo electromagnético, se puede expresar como una ecuación completamente independiente del observador.

El hecho de que en la ecuación (4.45) aparezca el gradiente de la complexión es ya por sí mismo destacable. La complexión es una cantidad física poco estudiada en la literatura, de la cual sólo se habla en el contexto de la relatividad general y las ecuaciones de Einstein-Maxwell en un espaciotiempo con simetrías [29, 31]. Por esta razón cabe cuestionarse si la condición de integrabilidad de H es más transparente en un fondo curvo o incluso, si un estudio más detallado podría revelar el significado físico de la complexión.

Una consecuencia de que H sea integrable es que $*H$ también lo es y ambas definen foliaciones mutuamente perpendiculares con la métrica de Minkowski. La foliación descrita por $*H$ es ortogonal al gradiente de la complexión por lo que la condición de integrabilidad de $*H$ podría tener una perspectiva más ilustrativa sobre el significado geométrico de $\nabla\alpha$.

Las clases de campos \mathbf{E} y \mathbf{B} ortogonales que investigamos, son prueba de que hay suficiente estructura en un campo electromagnético, que puede abordarse desde un punto de vista completamente geométrico. Y en particular, en el contexto de la astrofísica, hay un camino ya construido para explorar soluciones degeneradas de las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo curvo, donde cantidades como la complexión aparecen con mayor frecuencia. Por otro lado, las clases de campos no degenerados que tomamos de ejemplo, reflejan que no cualquier campo electromagnético define una 2-foliación del espaciotiempo por superficies tangentes a los eigenvectores del tensor de energía-momento, o equivalentemente, tangentes a las líneas de mundo de observadores inerciales que ven a los campos eléctrico y magnético localmente alineados. La principal dificultad a la que nos enfrentamos a la hora de buscar campos donde la distribución H sea integrable, es que la condición de integrabilidad por sí misma, en cualquiera de sus versiones (3.7), (4.37) o (4.45), involucra términos no lineales de alto orden en los campos, y se vuelve una necesidad simplificar los sistemas tanto como sea posible. Aún así, la discusión sobre la integrabilidad de H introdujo a la complexión y a su gradiente como cantidades físicas de interés hasta en los sistemas más sencillos.

Continuando la idea de establecer invariantes topológicos en electromagnetismo, un posible estudio subsecuente es la definición del número de enlace entre las superficies de la foliación en términos de cantidades físicas relativistas, lo que definiría una propiedad topológica del campo electromagnético.

Apéndice A

Construcción de Arrayás y nudos electromagnéticos

En esta construcción se consideran dos mapeos de Hopf ϕ y θ , que generan a los campos a tiempo $t = 0$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \frac{\sqrt{a} \nabla \phi \times \nabla \bar{\phi}}{2\pi i (1 + \phi \bar{\phi})^2}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \frac{c\sqrt{a} \nabla \bar{\theta} \times \nabla \theta}{2\pi i (1 + \theta \bar{\theta})^2}, \quad (\text{A.1})$$

y luego se resuelven las ecuaciones de Maxwell con estas condiciones iniciales. Existe una clase de campos electromagnéticos no nulos construida de esta manera [16], donde las curvas integrales de \mathbf{E} y \mathbf{B} forman nudos sobre la superficie de toroides que llenan por completo el espacio a tiempo $t = 0$. Cualquier nudo sobre un toroide está caracterizado por el número de vueltas n que da entorno al círculo dentro del toroide, y el número de vueltas m entorno al eje de simetría del toroide, formando la clase (n, m) de nudos topológicamente equivalentes (ver Figura 2.4).

A tiempo $T = 0$ los mapeos que generan esta configuración de las líneas del campo magnético y eléctrico se definen como

$$\phi = \frac{(X + iY)^{(n)}}{(Z + i(R^2 - 1)/2)^{(m)}}, \quad \theta = \frac{(Y + iZ)^{(l)}}{(Z + i(R^2 - 1)/2)^{(s)}}, \quad (\text{A.2})$$

donde las coordenadas adimensionales X , Y , Z , T y R se definen igual que en (2.21). Los mapeos ϕ y θ están inspirados en las fibraciones de Seifert [34], la única diferencia está en que la notación $\xi^{(n)}$ significa tomar la potencia de la fase de ξ dejando igual su módulo, es decir, si $\xi = \rho e^{i\theta}$ entonces $\xi^{(n)} = \rho e^{in\theta}$. Con estas condiciones iniciales se hace un análisis de Fourier

según [35] para resolver las ecuaciones de Maxwell. El resultado final es

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\pi L_0^2} \frac{Q\mathbf{H}_1 + P\mathbf{H}_2}{(A^2 + T^2)^3}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\pi L_0^2} \frac{Q\mathbf{H}_4 - P\mathbf{H}_3}{(A^2 + T^2)^3}, \quad (\text{A.3})$$

donde los escalares A , P y Q se definen como

$$A = \frac{R^2 - T^2 + 1}{2}, \quad P = T(T^2 - 3A^2), \quad Q = A(A^2 - 3T^2), \quad (\text{A.4})$$

y los vectores \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}_3 , \mathbf{H}_4

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \left(mY + sT - nXZ, -mX - nZY - lTZ, n \frac{-1 - Z^2 + X^2 + Y^2 + T^2}{2} + lTY \right), \\ \mathbf{H}_2 &= \left(s \frac{1 + X^2 - Z^2 - Y^2 - T^2}{2} - mTY, -lZ + sXY + mTX, lY + nT + sXZ \right), \\ \mathbf{H}_3 &= \left(nY + lT - mXZ, -nX - mZY - sTZ, m \frac{-1 - Z^2 + X^2 + Y^2 + T^2}{2} + sTY \right), \\ \mathbf{H}_4 &= \left(l \frac{1 + X^2 - Z^2 - Y^2 - T^2}{2} - nTY, -sZ + lXY + nTX, sY + mT + lXZ \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A diferencia del Hopfion, los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} no necesariamente provienen de algún mapeo de Hopf para $T > 0$, lo que significa que el índice de Hopf no está definido. En la Figura 2.5 podemos observar que las líneas de campo magnético en $T = 0$ son nudos toroidales de tipo (n, m) , y de tipo (l, s) para el campo eléctrico. Para $T > 0$ las líneas de campo no son cerradas y se extienden de manera indefinida sobre una superficie con topología toroidal.

Para los campos electromagnéticos (n, m, l, s) se puede calcular explícitamente la helicidad, obteniendo

$$\begin{aligned} h_m(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{4} \left[(nm + ls) + (nm - ls) \frac{1 - 6T^2 + T^4}{(1 + T^2)^4} \right], \\ h_e(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4} \left[(nm + ls) - (nm - ls) \frac{1 - 6T^2 + T^4}{(1 + T^2)^4} \right], \\ h_{em}(t) &= h_m(t) + h_e(t) = \frac{1}{2} (nm + ls). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Bibliografía

- [1] S. W. Thomson, “On vortex atoms,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. VI, pp. 94–105, 1867.
- [2] C. F. Gauss, “Zur mathematischen theorie der electrodynamischen wirkungen,” in *Werke*, pp. 601–630, Springer, 1877.
- [3] P. A. M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 133, no. 821, pp. 60–72, 1931.
- [4] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,” *Phys. Rev.*, vol. 115, no. 3, pp. 485–491, 1959.
- [5] J. Binysh and G. P. Alexander, “Maxwell’s theory of solid angle and the construction of knotted fields,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 51, no. 38, p. 385202, 2018.
- [6] K. Warnick and P. Russer, “Differential forms and electromagnetic field theory,” *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 148, pp. 83–112, 2014.
- [7] B. Jancewicz, *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*. WORLD SCIENTIFIC, 1989.
- [8] T. Ivezić, “Axiomatic geometric formulation of electromagnetism with only one axiom: the field equation for the bivector field F with an explanation of the Trouton-Noble experiment,” *Foundations of Physics Letters*, vol. 18, no. 5, pp. 401–429, 2005.

- [9] T. W. Barrett, *Topological foundations of electromagnetism.*, vol. 26 of *World Scientific series in contemporary chemical physics*. World Scientific, 2008.
- [10] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis, 2nd ed., 2003.
- [11] A. F. Rañada, “A topological theory of the electromagnetic field,” *Letters in Mathematical Physics*, vol. 18, no. 2, pp. 97–106, 1989.
- [12] A. F. Rañada, “On the magnetic helicity,” *European Journal of Physics*, vol. 13, no. 2, pp. 70–76, 1992.
- [13] A. F. Rañada and J. Trueba, “Two properties of electromagnetic knots,” *Physics Letters A*, vol. 232, no. 1, pp. 25–33, 1997.
- [14] H. Kedia, I. Bialynicki-Birula, D. Peralta-Salas, and W. T. M. Irvine, “Tying knots in light fields,” *Physical Review Letters*, vol. 111, no. 15, p. 150404.
- [15] J. W. Dalhuisen and D. Bouwmeester, “Twistors and electromagnetic knots,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, no. 13, p. 135201, 2012.
- [16] M. Arrayás and J. L. Trueba, “A class of non-null toroidal electromagnetic fields and its relation to the model of electromagnetic knots,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 48, no. 2, 2015.
- [17] W. Costa e Silva, E. Goulart, and J. E. Ottoni, “On spacetime foliations and electromagnetic knots,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 52, no. 26, p. 265203, 2019.
- [18] Z. Yoshida, Y. Kawazura, and T. Yokoyama, “Relativistic helicity and link in Minkowski space-time,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 55, no. 4, p. 043101, 2014.
- [19] H. Hopf, “Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.,” *Mathematische Annalen*, vol. 104, pp. 637–665, 1931.
- [20] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*. No. 82 in Graduate texts in mathematics, New York: Springer-Verlag, 3rd ed., 1995.

- [21] J. H. C. Whitehead, “An Expression of Hopf’s Invariant as an Integral,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 33, no. 5, pp. 117–123, 1947.
- [22] M. Arrayás, D. Bouwmeester, and J. Trueba, “Knots in electromagnetism,” *Physics Reports*, vol. 667, pp. 1–61, 2017.
- [23] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer, 1971.
- [24] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, vol. 120 of *Pure and applied mathematics*. Academic Press, 2nd ed., 1986.
- [25] S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*. Springer Science & Business Media, 1995.
- [26] C. Doran and A. N. Lasenby, *Geometric algebra for physicists*. Cambridge University Press, 2007.
- [27] D. Hestenes, *Space-Time Algebra*. Springer International Publishing, 2015.
- [28] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. No. 1.0 in Course of Theoretical Physics, Butterworth-Heinemann, 1975.
- [29] C. W. Misner and J. A. Wheeler, “Classical physics as geometry,” *Annals of Physics*, vol. 2, no. 6, pp. 525–603, 1957.
- [30] R. P. Geroch, “Electromagnetism as an aspect of geometry?: Already unified field theory—The null field case,” *Annals of Physics*, vol. 36, no. 2, pp. 147–187, 1966.
- [31] J. R. Ray, “Spacetime symmetries and the complexion of the electromagnetic field,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 16, no. 2, pp. 345–346, 1975.
- [32] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 3rd ed., 1999.
- [33] S. E. Gralla and T. Jacobson, “Spacetime approach to force-free magnetospheres,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 445, pp. 2500–2534, 10 2014.
- [34] E. Dufraine, “About homotopy classes of non-singular vector fields on the three-sphere,” *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 361–376, 2002.

- [35] A. M and T. J L, “The method of fourier transforms applied to electromagnetic knots,” *European Journal of Physics*, vol. 40, no. 1, p. 015205, 2019.