



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

**FUNCIONES DE PESO EN INVERSIÓN DE DATOS DE TRE-3D PARA ARREGLOS NO
CONVENCIONALES**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:

SHAMARA ZORAIDA CRUZ ALANÍS

TUTOR

DR. RENÉ EFRAÍN CHÁVEZ SEGURA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

COMITÉ TUTOR

DRA. ELSA LETICIA FLORES MÁRQUEZ

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

DR. ANDRÉS TEJERO ANDRADE

FACULTAD DE INGENIERÍA

CDMX, OCTUBRE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Código de ética

Declaro conocer el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, plasmado en la Legislación Universitaria. Con base en las definiciones de integridad y honestidad ahí especificadas, aseguro mediante mi firma al calce que el presente trabajo es original y enteramente de mi autoría. Todas las citas de, o referencias a, las obras de otros autores aparecen debida y adecuadamente señaladas, así como acreditadas mediante los recursos editoriales convencionales. En caso contrario su título podrá ser anulado.



Shamara Zoraida Cruz Alanís

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser una universidad pública.

Al Posgrado en Ciencias de la Tierra y al Instituto de Geofísica por la formación académica y proveerme las herramientas necesarias para llevar a cabo mi proyecto.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada del programa “Becas Nacionales” para la realización de mis estudios de Doctorado.

A mi comité tutor conformado por el Dr. René Chávez, la Dra. Leticia Flores y el Dr. Andrés Tejero. Les agradezco el esfuerzo dedicado a la revisión y seguimiento de mi proyecto. Sus ideas fueron parte muy importante en la realización de este trabajo. Aprendí mucho de ustedes.

A Araceli Chamán y Erika Ulloa por su disposición e invaluable apoyo en los trámites administrativos.

A mi familia y amistades por su constante y fundamental apoyo, expresado de diversas formas, para que pudiera realizar este proyecto.

Resumen

En la última década, diversos estudios de Tomografía de Resistividad Eléctrica 3D han empleado una nueva técnica de adquisición de datos que permite obtener un volumen de datos irregularmente distribuidos en el subsuelo mediante la colocación de electrodos en el perímetro de la superficie de estudio y el uso de arreglos no convencionales; a esta técnica le llamaremos adquisición de datos perimetral. Si bien esta técnica ha permitido determinar la existencia de anomalías eléctricas y caracterizar el subsuelo, la solución presenta un notable error al calcular la profundidad y altura de los cuerpos anómalos; además, se ha observado una deformación de la anomalía en la dirección vertical que parece continuarla hasta la superficie, lo que llamaremos efecto de afloramiento. Este efecto no aparece en los estudios de tomografía tridimensional que utilizan la adquisición de datos tradicional en malla; por lo tanto, parece ser causada por la distribución irregular de datos que genera la técnica de adquisición perimetral.

El presente trabajo tiene como objetivo proporcionar un método numérico de modelación que permita disminuir o eliminar el efecto de afloramiento en las tomografías que emplean la técnica de adquisición perimetral para resolver con mejor aproximación la profundidad y altura de los cuerpos anómalos. Para ello, se hace uso de funciones de peso durante el proceso de inversión para enfocar el ajuste de datos en una zona específica de la región de estudio y mejorar su caracterización. Se proponen tres funciones de peso diseñadas a partir de la profundidad teórica de investigación de los arreglos y la desviación estándar de la resistividad. Cada una se evaluó en la inversión de dos conjuntos de datos sintéticos ruidosos. El proceso de inversión está liderado por el método Optimización por enjambre de partículas (PSO, por su nombre en inglés *Particle Swarm Optimization*) y la función de ajuste es la norma del valor cuadrático medio (RMS, por su nombre en inglés *Root Mean Square*).

Los resultados indican que el uso de funciones de peso permite resolver de forma óptima los parámetros verticales de los cuerpos someros bajo las condiciones que la metodología implica; por lo tanto, se puede emplear como herramienta para la caracterización vertical de anomalías específicas.

Abstract

In the last decade, several 3D Electrical Resistivity Tomography surveys have employed a new data acquisition technique that allows obtaining a volume of data irregularly distributed in the subsurface by placing electrodes on the perimeter of the survey surface and employing various non-conventional arrays; this work call this technique Perimeter Data Acquisition. Although this technique has determined the existence of electrical anomalies and characterize the subsurface, the solution presents a notable error when calculating the depth and height of the anomalous bodies; in addition, a deformation of the anomaly in the vertical direction has been observed that seems to continue it up to the surface, which we call the outcropping effect. This effect does not appear in three-dimensional tomographies surveys that employ traditional data acquisition; therefore, it seems to be caused by the irregular data distribution generated by the perimeter acquisition technique.

The present work aims to provide a numerical modeling method that allows to reduce or eliminate the upcropping effect in tomographies using the perimeter technique to better approximate the depth and height of the anomalous bodies. For this purpose, weighting functions are introduced during the inversion process to focus the data fitting on a specific zone of the study region and improve its characterization. Three weighting functions designed from the theoretical depth of investigation of the arrays and the standard deviation of the resistivity are proposed. Each was tested in the inversion of two noisy synthetic data sets. The inversion process is led by the Particle Swarm Optimization method and the fitting function is the Root Mean Square (RMS) norm.

The results indicate that the weighting functions optimally resolve the vertical parameters of shallow bodies under the restrictions the methodology involves; therefore, they can be employed as a tool for the vertical characterization of specific anomalies.

Índice

Código de ética	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
Abstract.....	v
Lista de figuras.....	viii
Nomenclatura	x
Introducción	1
1. Marco Teórico	8
1.1 Tomografía de resistividad eléctrica 3D (TRE-3D)	8
1.2 Técnica de adquisición perimetral en TRE-3D	10
1.3 Teoría de inversión en TRE-3D	13
1.3.1 Modelo directo	15
1.3.2 Problema inverso	17
1.3.3 Métodos de inversión	18
1.4 Funciones de peso.....	22
2. Metodología	25
2.1 Modelo directo de prismas rectangulares de diferente resistividad enterrados en un medio homogéneo.....	25
2.2 Optimización por Enjambre de Partículas (PSO).....	29
2.3 Funciones de peso	33
2.3.1 Introducción de la función de peso en la función de ajuste	33
2.3.2 Función de peso 1 (FP1).....	34
2.3.3 Función de peso 2 (FP2)	37
2.3.4 Función de peso 3 (FP3)	38
2.4 Algoritmo de inversión con funciones de peso (PSO-FP).....	39
3. Validación del algoritmo con modelos sintéticos	44
3.1 Modelos sintéticos y técnicas de adquisición de datos	44
3.1.1 Modelos sintéticos	45

3.1.2 Técnicas de adquisición de datos.....	46
3.2 Inversión de datos sintéticos	50
3.3 Resultados modelo 1 (estrato)	51
3.4 Resultados modelo 2 (dos prismas enterrados).....	56
4. Caso de estudio.....	61
5. Conclusiones.....	67
5.1 Recomendaciones	68
Referencias	69
Anexo 1. Implementación computacional del algoritmo de inversión	71
Anexo 2. Parámetros de inversión del algoritmo MC-EF	73

Lista de figuras

Fig. 1 Adquisición de datos 3D empleada en Loke y Barker (1996). En la primera medición (a) y en las mediciones siguientes (b) el punto rojo representa el electrodo de corriente y el punto azul representa un electrodo de potencial mientras los círculos vacíos representan electrodos que no se están usando en la medición actual.....	2
Fig. 2 Adquisición de datos 3D empleada en Dahlin y Bernstone (1997). En las primeras mediciones (a) se utiliza el arreglo Polo-Polo a lo largo de toda la primera línea y después sobre la línea perpendicular a través de las siguientes líneas. En las mediciones siguientes (b) se repite el proceso hasta terminar con todas las líneas.	2
Fig. 3 (a) Adquisición de datos tradicional donde se colocan los electrodos sobre en líneas paralelas abarcando toda la superficie de la región de estudio. (b) Adquisición de datos perimetral donde se colocan los electrodos en el perímetro de la superficie de la región de estudio debido a que hay objetos o estructuras que impiden la técnica tradicional.	3
Fig. 4 (a) Modelo de un prisma rectangular profundo. (b) Modelo inverso que logra definir las dimensiones y localización del cuerpo anómalo, sin embargo, no identifica correctamente las resistividades. (c) Modelo inverso que no logra identificar la forma, dimensiones, localización del cuerpo anómalo ni las resistividades.	6
Fig. 5 Instrumentos para generar un campo eléctrico estacionario. Los dos electrodos de corriente (A y B) se incrustan en el suelo y se conectan a una pila; mientras los dos electrodos usados para medir el potencial (M y N) se conectan a un medidor de voltaje.	9
Fig. 6 Cálculo de las coordenadas (x, y) del punto de atribución para cualquier arreglo cuadrupolar. .	13
Fig. 7 (a) Pares ordenados de la forma (x, y) que satisfacen la ecuación de la recta $y = 2x - 3$. (b) Problema directo que se soluciona con la evaluación de los valores x en el modelo de la línea recta para obtener los valores y . (c) Problema inverso que se soluciona al conocer los valores de la pendiente y ordenada al origen de la ecuación de la recta que satisfacen los datos (x, y) . .	14
Fig. 8 Conjunto de datos que tienen una tendencia. Las líneas representan los modelos solución obtenidos con diferentes normas L	21
Fig. 9 Representación del subsuelo que se asume en el cálculo de potencial con el modelo directo de León Sánchez (2004). Semi espacio homogéneo con un prisma rectangular enterrado. También se muestra la relación entre las coordenadas absolutas y relativas, definidas por el origen $O(0,0,0)$ y el centro del prisma enterrado O' , respectivamente. La relación está definida por el punto N donde se mide el potencial porque se puede definir mediante las coordenadas absolutas $Nx, y, 0$ o mediante las relativas $N(x', y', z')$	27
Fig. 10 Diagrama que representa el funcionamiento del método PSO. En la primera iteración se realiza la selección aleatoria de los modelos iniciales para cada partícula dentro de la región de búsqueda (con dimensión igual al número de parámetros del modelo directo). En las iteraciones siguientes, el ajuste de los modelos se realiza mediante la Ec.4. Cuando el proceso iterativo termina, el modelo solución óptimo es el último que queda guardado en la variable $mbest$	33
Fig. 11 Diagrama de flujo del algoritmo PSO-FP.	43
Fig. 12 Modelos sintéticos. (a) Modelo de un estrato ubicado entre los 2 y 4 metros de profundidad. (b) Modelo de dos prismas enterrados; el somero es resistivo y se ubica entre los 2 y 4 metros de profundidad, mientras el profundo es conductivo y se ubica entre los 4 y 10 metros de profundidad.	45
Fig. 13 En los tres arreglos los puntos rojos son los electrodos de corriente, los puntos azules rellenos son los electrodos de potencial y los círculos azules sin relleno representan las mediciones siguientes. Las flechas indican la dirección de desplazamiento de los electrodos. (a) Tres etapas del arreglo Esquinas. (b) Arreglo Ecuatorial paralelo y (c) Ecuatorial invertido.	48

Fig. 14 Electrodo y puntos de atribución de las adquisiciones (a) perimetral ADP y (b) tradicional ADT.	49
Fig. 15. Imágenes de las soluciones obtenidas para el modelo del estrato. a) Perfil en $y = 10m$ del modelo inverso de los datos DAT con MC-EF. b) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAT con PSO. c) Perfil en $y = 10m$ del modelo inverso de los datos DAP con MC-EF. d) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAP con PSO.....	52
Fig. 16 Vista frontal de los modelos solución obtenidos de la inversión de los datos DAP con el algoritmo PSO-FP. En cada modelo se indican las coordenadas Z mínima y Z máxima del estrato; con esto se limita verticalmente el prisma.	55
Fig. 17. Imágenes de las soluciones obtenidas para el modelo 2. a) Perfil en $y = 15 m$ del modelo inverso de los datos DAT con MC-EF. b) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAT con PSO. c) Perfil en $y = 15 m$ del modelo inverso de los datos DAP con MC-EF. d) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAP con PSO.....	58
Fig. 18. Vista frontal de los modelos solución obtenidos de la inversión de los datos DAP con el algoritmo PSO-FP. En cada modelo se indican las coordenadas Z mínima y Z máxima de los prismas con el fin de limitarlos verticalmente.	60
Fig. 19 a) Esquema de la caverna reportada por Thompson & Thompson (1938). B) Vista frontal y c) vista 3D de la distribución de los 3976 datos con los arreglos WSP, MA y WSG.....	62
Fig. 20 TRE-3D e iso-superficie en $\rho=190 \Omega m$ del subsuelo de la pirámide del Osario, generada a partir de la solución obtenida en el estudio de 2014.	63
Fig. 21 Tomografía 2D tomada a partir de la TRE-3D en las cuales se observan los perfiles a) $y = 17 m$ y b) $x = 15 m$	64
Fig. 22 Vista frontal de los modelos solución obtenidos de la inversión de los datos del Osario con el algoritmo PSO-FP. En cada modelo se indican las coordenadas Z mínima y Z máxima del prisma que representa la sección C de la caverna.	66

Nomenclatura

E	Campo de intensidad eléctrica
D	Campo de desplazamiento eléctrico
B	Campo de intensidad magnética
H	Campo magnético inducido
J	Densidad de corriente
Q	Densidad de carga eléctrica
ϵ	Permitividad eléctrica
μ	Permeabilidad magnética
ρ	Resistividad eléctrica
ρ_a	Resistividad eléctrica aparente
k	Factor geométrico
U	Potencial eléctrico
V	Voltaje eléctrico
R	Resistencia eléctrica
I	Corriente eléctrica
∇	Operador nabra
$\nabla\phi$	Gradiente de la función escalar ϕ
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	Divergencia de la función vectorial \mathbf{A}
$\nabla \times \mathbf{A}$	Rotacional de la función vectorial \mathbf{A}
$\nabla^2\phi$	Laplaciano de la función escalar ϕ
Δ	Diferencia
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial respecto a la variable t
\bar{p}	Vector formado por los parámetros del modelo directo
\bar{d}^o	Vector formado por los datos medidos
\bar{e}	Vector diferencia entre datos medidos y calculados
E	Función escalar objetivo que generalmente es una norma de ajuste
W	Matriz diagonal de pesos
W	Función escalar de pesos
N	Cantidad de datos medidos/observados
z_e	Profundidad media definida por Loke (1996-2022)
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas para definir un punto en el espacio 3D
F_{ID}	Función de sensibilidad
Z	Conjunto de profundidades teóricas de los datos
r	Distancia entre los polos del arreglo Polo-Polo
δ	Función Delta de Dirac
dV	Diferencial de volumen

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Vectores unitarios en las direcciones x, y, z , respectivamente
x', y', z'	Coordenadas relativas donde el origen es el centro del prisma.
NP	Cantidad de partículas/modelos iniciales
M	Cantidad de parámetros a invertir
\mathcal{S}^M	Espacio solución de dimensión M
FP_{op}	Opción de función de peso
tol	Valor de tolerancia que detiene el proceso de inversión
k_{max}	Número máximo de iteraciones del proceso de inversión
k	Valor de la iteración actual
i	Índice del número de partícula
\bar{m}_i	Vector de tamaño M con los valores asignados a los parámetros que se invierten, llamado modelo inicial en la primera iteración del proceso de inversión y después simplemente modelo.
\bar{v}_i	Vector que modifica a \bar{m}_i en cada iteración
\bar{m}_i^{best}	Mejor modelo de la partícula i hasta la iteración actual
\bar{m}_{best}	Mejor modelo de la población hasta la iteración actual
$\Phi(c, d)$	Función que devuelve valores aleatorios entre el intervalo $[c, d]$
χ	Factor de inercia dinámico que cambia en cada iteración
A, B, M, N	Electrodos de corriente (A y B) y electrodos de potencial (M y N)

Introducción

La Tomografía de resistividad eléctrica 3D (TRE-3D) es una de las técnicas de prospección eléctrica que se utiliza sobre todo en detección de agua subterránea, búsqueda de minerales, determinación de intrusiones salinas, detección de contaminantes en el suelo, entre otros (Orellana, 1982). Además, el desarrollo tecnológico de los resistivímetros, que automatizan el proceso de adquisición de datos, ha facilitado el uso de la técnica en estudios de caracterización del subsuelo.

Los primeros estudios que reportan la realización de una TRE-3D son Loke y Barker (1996) y Dahlin y Bernstone (1997). En Loke y Barker (1996) colocan los electrodos de tal forma que crean una malla de electrodos que cubre la superficie de la región de estudio; luego, asignan el primer electrodo como electrodo de corriente y a partir de él se trazan líneas imaginarias en las direcciones 0° , 45° y 90° . Los electrodos que se encuentran sobre estas líneas son usados como electrodos de potencial y se realizan las mediciones correspondientes. Después, se cambia de electrodo de corriente y se repite el proceso de medición (Fig. 1). Por otro lado, Dahlin y Bernstone (1997) desarrollaron el método llamado *Roll along* que consiste en formar líneas de electrodos paralelas sobre las cuales se realizan mediciones con el arreglo Polo-Polo y después se realizan mediciones entre líneas. En las mediciones entre líneas, se asigna a la primera como línea de corriente y a las demás como líneas de potencial. Una vez que se terminan las mediciones entre un par de líneas, se asigna a la siguiente como línea de potencial y se repite el proceso de medición (Fig. 2). De estas dos maneras, se obtienen datos en las 3 direcciones (X, Y, Z) y se puede crear una tomografía tridimensional porque todos los datos son procesados e invertidos en conjunto.

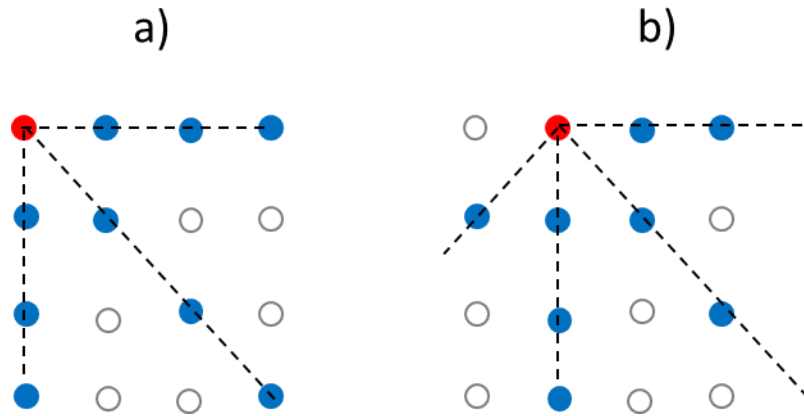


Fig. 1 Adquisición de datos 3D empleada en Loke y Barker (1996). En la primera medición (a) y en las mediciones siguientes (b) el punto rojo representa el electrodo de corriente y el punto azul representa un electrodo de potencial mientras los círculos vacíos representan electrodos que no se están usando en la medición actual.

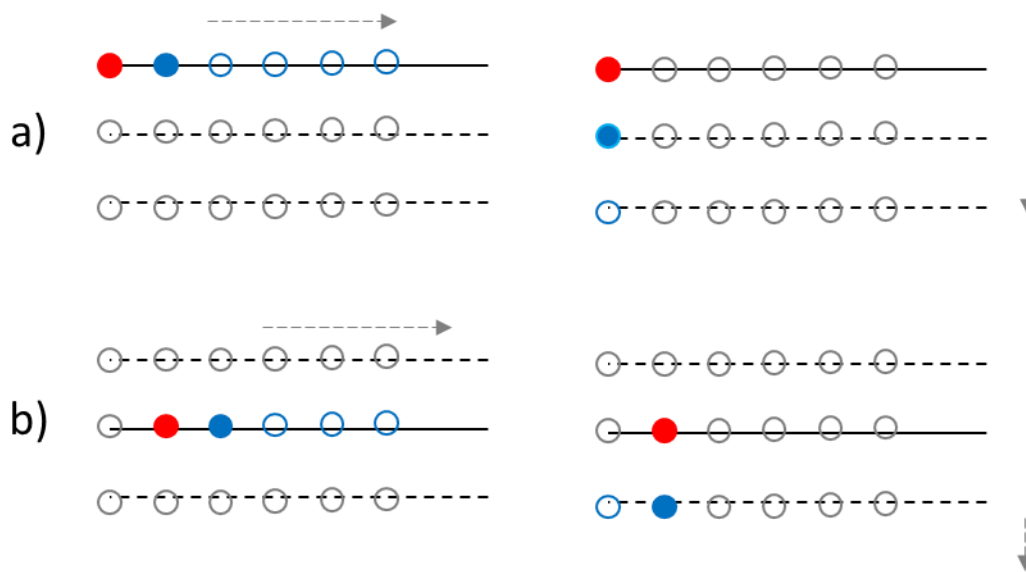


Fig. 2 Adquisición de datos 3D empleada en Dahlin y Bernstone (1997). En las primeras mediciones (a) se utiliza el arreglo Polo-Polo a lo largo de toda la primera línea y después sobre la línea perpendicular a través de las siguientes líneas. En las mediciones siguientes (b) se repite el proceso hasta terminar con todas las líneas.

A la forma de adquisición de datos que consiste en colocar los electrodos formando una malla o líneas paralelas que abarcan la superficie de la región de estudio y después adaptar uno o más arreglos electródicos sobre cada línea para

obtener perfiles debajo de cada una (Fig. 3a) se le llamará en este trabajo técnica tradicional.

La técnica tradicional se puede implementar en aquellos lugares libres de estructuras u obstáculos sobre la región de estudio; sin embargo, en estudios llevados a cabo en zonas urbanas o arqueológicas no siempre es posible utilizar la técnica tradicional debido a la presencia de edificaciones que imposibilitan la colocación en malla de los electrodos. Debido a esto, en Tejero, et al., (2015) se presentan dos nuevos arreglos llamados “L” y “Esquinas” que colocan los electrodos alrededor de las edificaciones formando un cuadrado y se obtienen mediciones asociadas a puntos, generalmente, irregularmente distribuidos debajo de la estructura (Fig. 3b). Este volumen de datos se procesa en conjunto para obtener una TRE-3D que representa la distribución de la resistividad eléctrica en el subsuelo.

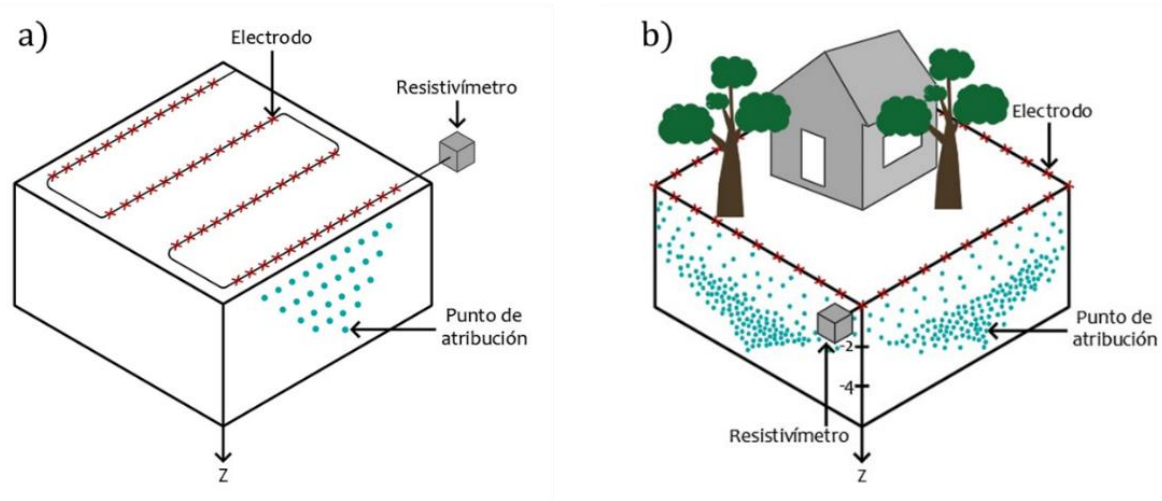


Fig. 3 (a) Adquisición de datos tradicional donde se colocan los electrodos sobre en líneas paralelas abarcando toda la superficie de la región de estudio. (b) Adquisición de datos perimetral donde se colocan los electrodos en el perímetro de la superficie de la región de estudio debido a que hay objetos o estructuras que impiden la técnica tradicional.

Además de los arreglos presentados por Tejero, et al. (2015), diversos estudios han tomado la idea de colocar los electrodos en la periferia de las estructuras y adaptar diferentes arreglos para obtener un conjunto de mediciones asociadas puntos debajo

de las estructuras. Por ejemplo, en Fischanger, et al. (2007) se colocaron los electrodos alrededor de un edificio con el fin de monitorear y supervisar la inyección de resinas alrededor de los cimientos; aunque el despliegue de los electrodos permitió caracterizar el subsuelo debajo del edificio, el estudio se limitó a caracterizar el perímetro de la región de estudio. Otros estudios en los que se ha utilizado una disposición cuadrada de los electrodos son los de Chávez, et al. (2011) que realizan una TRE-3D para identificar fracturas en las estructuras de un complejo habitacional, y Cifuentes-Nava, et al. (2017) que determinan la existencia de túneles debajo de una catedral. Por otro lado, Vargas (2015) lleva a cabo tres estudios utilizando en cada uno una geometría eléctrica diferente. En el primer estudio forma un círculo con los electrodos alrededor del basamento de una estructura arqueológica, que también tiene forma circular. El segundo estudio tuvo como objetivo localizar el contacto entre agua dulce y salada de una zona costera, y dado que en la zona de estudio había un conjunto de edificios, se decidió colocar los electrodos alrededor formando un triángulo. El último estudio se llevó a cabo en una zona urbana, cuyo suelo presenta hundimiento y fracturas; debido a la presencia de los edificios, el estudio tuvo que realizarse sobre dos avenidas paralelas y una perpendicular que las une; así, los electrodos tomaron la forma de una letra H. En estos tres estudios se logró obtener una tomografía tridimensional de la distribución de la resistividad del subsuelo que permitió detectar los objetivos; sin embargo, también se presentó el efecto de afloramiento y la distorsión de la forma de las anomalías.

Todos los estudios anteriores tienen en común la colocación de los electrodos en el perímetro de la región de estudio, por lo tanto, se le llamará en este trabajo adquisición de datos perimetral, o simplemente técnica perimetral. Es importante observar que los datos obtenidos con la técnica perimetral tienen una distribución irregular a lo largo de la región de estudio, contrariamente a la que se obtiene con la técnica tradicional; además, la densidad de datos depende de la geometría de los

electrodos y de los arreglos adaptados. Generalmente, en la técnica perimetral la mayor densidad de datos se ubica en el perímetro de la región de estudio y disminuye hacia la parte central y superficial de la región.

La distribución irregular de datos puede ser una causa del efecto de afloramiento en las imágenes de tomografía, pero también puede deberse a otros factores como el modelo de inversión, las restricciones en el proceso de inversión o la forma de extrapolación para crear la imagen continua de la tomografía. Este trabajo se enfocará en el proceso de inversión y el uso de una herramienta llamada funciones de peso para minimizar el efecto de afloramiento.

Un ejemplo de la importancia de usar funciones de peso en el proceso de inversión se puede ver en Cruz-Alanís (2016), donde se invierten datos sintéticos con dos algoritmos de inversión comerciales que emplean básicamente el mismo método de inversión, pero con funciones de peso diferentes. Cada algoritmo se usó para invertir datos sintéticos adquiridos con la técnica perimetral, pero solo el primer algoritmo determinó correctamente la geometría y localización vertical de la anomalía en uno de los cinco casos analizados (Fig. 4b). El otro algoritmo erró la geometría y localización de las anomalías en los cinco casos; además, presentó el efecto de afloramiento alargando la anomalía hasta la superficie de las regiones de estudio (Fig. 4c). Lo anterior indica que la diferencia entre las funciones de peso usadas en cada algoritmo para guiar la búsqueda del modelo solución son un factor importante en la aparición del efecto de afloramiento en adquisiciones perimetales. Lamentablemente, es muy difícil conocer de forma certera los detalles del proceso de inversión de los algoritmos comerciales y resulta imposible pensar en su modificación para seleccionar o cambiar las funciones de peso.

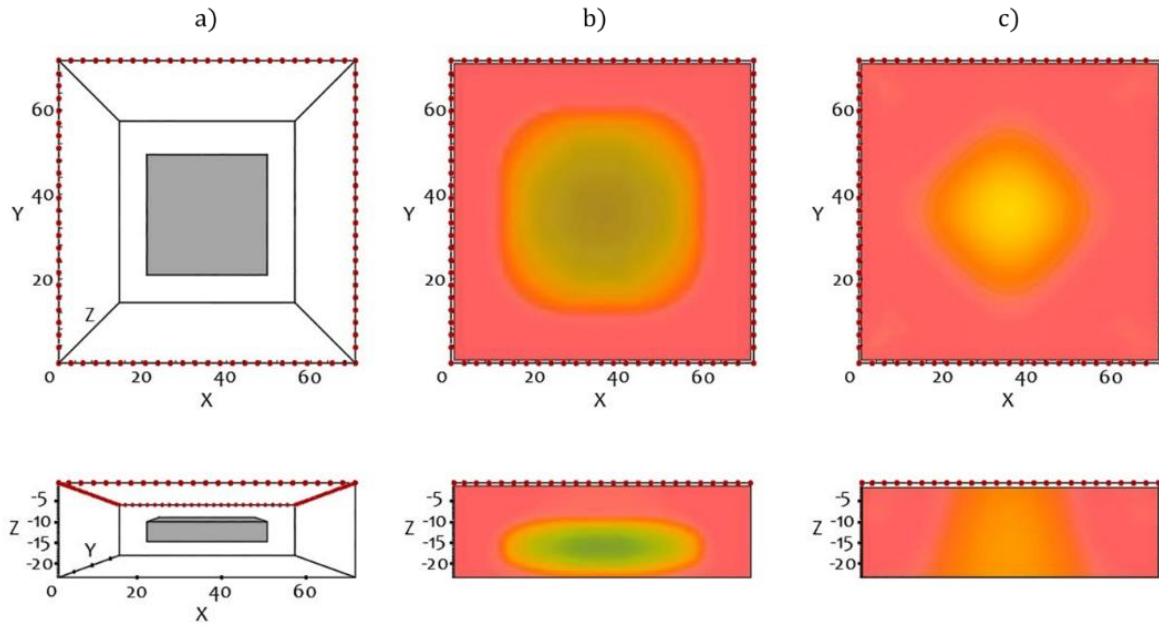


Fig. 4 (a) Modelo de un prisma rectangular profundo. (b) Modelo inverso que logra definir las dimensiones y localización del cuerpo anómalo, sin embargo, no identifica correctamente las resistividades. (c) Modelo inverso que no logra identificar la forma, dimensiones, localización del cuerpo anómalo ni las resistividades.

Es importante mencionar que ambos programas se han utilizado para invertir datos adquiridos con la técnica tradicional y nunca han presentado dicho efecto de afloramiento; por lo tanto, la distribución de datos irregular producida por la técnica perimetral y la nula o incorrecta selección de funciones de peso en el proceso de inversión podría ser la causa de la deformación de los cuerpos anómalos.

Lo anterior permite concluir que, aunque la técnica perimetral es una solución sencilla, útil y eficiente para realizar una TRE-3D y detectar anomalías en lugares donde no se puede usar la técnica tradicional, conlleva un problema de deformación de las anomalías en la dirección vertical. Por lo anterior, es necesaria una metodología para disminuir o eliminar el efecto de afloramiento y el uso de funciones de peso en el proceso de inversión es una de ellas.

El objetivo de este trabajo es desarrollar una metodología para invertir los datos de resistividad eléctrica 3D obtenidos con la técnica perimetral mediante el diseño y

uso de tres funciones de peso, que tienen como fin calcular con mayor aproximación la profundidad y altura de los cuerpos anómalos, evitar su deformación en la dirección vertical y disminuir el efecto de afloramiento. Para ello, las funciones de peso se diseñaron considerando la profundidad teórica de los datos y la resistividad aparente. Dichas funciones se validaron mediante la inversión de datos sintéticos ruidosos de dos modelos sintéticos. Además, para poder introducir las funciones de peso se desarrolló un algoritmo de inversión liderado por el método de optimización estocástico llamado Optimización por Enjambre de Partículas (mejor conocido por sus siglas en inglés PSO) cuya construcción permite introducir las funciones de peso de una forma sencilla.

La presentación del trabajo se divide en 5 capítulos. El capítulo 1 corresponde al Marco Teórico y contiene los modelos matemáticos que sustentan el método Tomografía de Resistividad Eléctrica 3D, la teoría de inversión y las funciones de peso. En el capítulo 2 se definen las funciones de peso y la construcción del algoritmo de inversión liderado por el método de optimización PSO. El capítulo 3 contiene las pruebas de validación de las funciones de peso mediante la inversión de datos sintéticos y el análisis de sus resultados. En el capítulo 4 se emplea la metodología sobre datos reales de un estudio arqueológico para determinar la profundidad y altura de una caverna ubicada debajo de la pirámide del Osario en Yucatán, México. Finalmente, el capítulo 5 presenta las conclusiones derivadas del trabajo.

Este trabajo también derivó en la creación y publicación de un artículo titulado *Inversion of ERT-3D data using PSO and weighting functions* (Cruz-Alanís, et al., 2023) que se adjunta al final de esta tesis.

1. Marco Teórico

En este capítulo se presenta la teoría que sustenta el método de Tomografía de resistividad eléctrica 3D, la descripción de la técnica de adquisición de datos perimetral y la distribución de datos que genera, la teoría de inversión que permite obtener valores de resistividad a partir de los datos medidos para formar la imagen de TRE-3D y la teoría de las funciones de peso como herramienta en el proceso de inversión.

1.1 Tomografía de resistividad eléctrica 3D (TRE-3D)

La Tomografía de resistividad eléctrica 3D (TRE-3D) es una de las técnicas de prospección geofísica que permiten conocer el tipo de materiales que se encuentran en el subsuelo y su estado físico mediante la distribución de su resistividad eléctrica. Las aplicaciones de esta técnica son diversas; por ejemplo, se puede usar para caracterizar la litología del subsuelo, determinar cuerpos de agua subterráneos, detectar contaminantes en el suelo, identificar intrusiones de agua salada, detectar fracturas o cavidades, identificar materiales arqueológicos, entre otras.

La TRE-3D es el resultado del desarrollo tecnológico de los instrumentos de adquisición de datos que se utilizaron en los primeros métodos de prospección eléctrica llamados Sondeo Eléctrico Vertical (SEV) y Tomografía de Resistividad Eléctrica 2D (TRE-2D). Los tres métodos (SEV, TRE-2D y TRE-3D) permiten conocer los cambios del valor de resistividad eléctrica en diferentes dimensiones. El SEV indica el cambio de resistividad en la dirección vertical, es decir, la profundidad (Z); la TRE-2D lo hace tanto a profundidad como en una dirección horizontal (X, Z); finalmente, la TRE-3D representa la variación de la resistividad a lo largo de las tres dimensiones (X, Y, Z). Este último método, en teoría, debe proveer los resultados más precisos ya que los objetos en la realidad son tridimensionales (Loke, 1996-2022).

La TRE-3D, al igual que el SEV y la TRE-2D, se basa en la generación de un campo eléctrico estático, mediante una corriente eléctrica continua no natural, que se propaga a través del subsuelo o medio de estudio. Una vez generado el campo eléctrico se mide el voltaje entre diversos puntos de la superficie. Estos datos, que están asociados a puntos ubicados a lo largo de la región de estudio del subsuelo, se procesan e invierten en conjunto para obtener la imagen de TRE-3D.

La generación del campo eléctrico se realiza mediante un circuito simple de una pila conectada al suelo mediante dos varillas conductoras llamadas electrodos de corriente, que suelen recibir el nombre de A y B. Por otro lado, la medición de voltaje se lleva a cabo con dos varillas conductoras más llamadas electrodos de potencial, que se suelen renombrar como M y N, conectadas a un medidor de voltaje (Fig. 5).

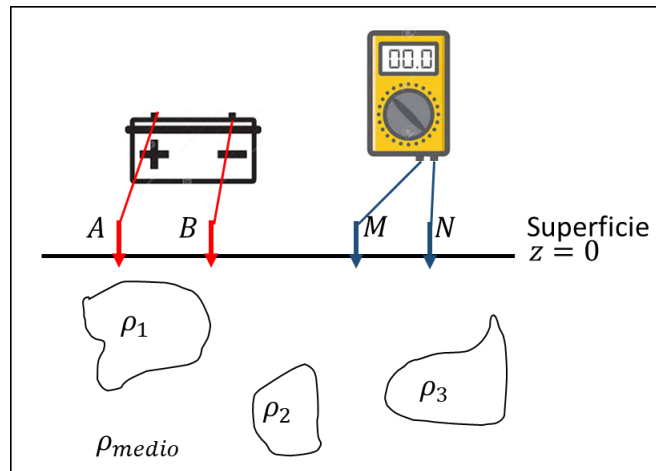


Fig. 5 Instrumentos para generar un campo eléctrico estacionario. Los dos electrodos de corriente (A y B) se incrustan en el suelo y se conectan a una pila; mientras los dos electrodos usados para medir el potencial (M y N) se conectan a un medidor de voltaje.

Actualmente, existen equipos electrónicos llamados resistivímetros que permiten conectar decenas de electrodos para optimizar la toma de mediciones. Estos equipos permiten programar una secuencia de asignación de electrodos de corriente y potencial para realizar una mayor cantidad de mediciones de voltaje de forma automática, lo cual facilita emplear diversos arreglos electródicos en un mismo estudio mediante cambios en la secuencia de asignación de electrodos.

1.2 Técnica de adquisición perimetral en TRE-3D

La TRE-3D se aplica en diversas áreas para caracterizar el subsuelo, entre ellas se encuentran la geotecnia y la arqueología. En la geotecnia sirve para detectar fracturas, cimientos, tuberías, etc., mientras en la arqueología se emplea para identificar estructuras o restos arqueológicos. Sin embargo, su uso en estas áreas puede llegar a ser complicado debido a que la adquisición de datos se debe adaptar al terreno y a las estructuras o edificaciones que se encuentren sobre él. Generalmente, en estudios de geotecnia, los edificios pueden impedir llevar a cabo una adquisición de datos tradicional; en el caso de estudios arqueológicos, las mismas ruinas o materiales también pueden impedir una adquisición de datos tradicional. Por lo anterior, en Tejero, et al., (2015) se presentaron dos arreglos llamados “L” y “Esquinas” que utilizan otra técnica de adquisición de datos y permiten obtener mediciones del subsuelo cuando no se puede usar la técnica de adquisición tradicional. Los arreglos “L” y “Esquinas” necesitan dos líneas de electrodos perpendiculares en forma de L para realizar la toma de mediciones. El arreglo “L” consiste en dos etapas. La primera etapa utiliza el conocido arreglo Dipolo-Dipolo y lo ejecuta en cada una de las líneas. En la segunda etapa se deja fijo el dipolo de corriente mientras el dipolo de potencial recorre ambas líneas; después, el dipolo de corriente se recorre una posición y se repite el proceso. Por otro lado, el arreglo “Esquinas” es la combinación de un arreglo ecuatorial y uno azimutal llevados a cabo sobre las líneas perpendiculares. Ambos arreglos fueron también sometidos a pruebas con modelos sintéticos y utilizados en un estudio con fines arqueológicos demostrando su eficacia para generar una imagen de TRE-3D que permita caracterizar el subsuelo debajo de estructuras.

El alcance de esta técnica no queda ahí porque se pueden colocar los electrodos en la forma más conveniente de acuerdo con las necesidades de cada estudio. Por ejemplo, en Vargas (2015) se realizaron tres estudios de TRE-3D utilizando tres

geometrías diferentes. En el primer estudio se colocaron los electrodos en forma de círculo para rodear una pirámide circular y poder caracterizar el subsuelo debajo de ella. En el segundo, los electrodos formaron un triángulo para rodear una propiedad localizada en la costa de Nayarit y tuvo como objetivo encontrar el contacto entre el agua dulce y salada. El último estudio se llevó a cabo en una zona urbana con el fin de localizar fracturas en los cimientos de edificios, para ello se colocaron los electrodos a lo largo de tres calles, dos de ellas paralelas unidas por otra perpendicular; así, el tendido de electrodos tomó la forma de una letra H.

Los estudios de Tejero, et al. (2015) y Vargas (2015) son solo una muestra de diversos estudios que han tomado la idea de colocar los electrodos en el perímetro de la región de estudio y adaptar diferentes arreglos para obtener medidas asociadas a puntos debajo de estructuras; a esta idea de adquisición se le llamará en este trabajo técnica de adquisición de datos perimetral o simplemente técnica perimetral.

Es importante mencionar que la técnica perimetral no se limita a colocar los electrodos en forma de cuadrados, círculos o triángulos; en realidad, puede tomar cualquier forma regular o irregular, siempre y cuando la adaptación de arreglos a dicha forma permita obtener mediciones útiles para generar una imagen de TRE-3D que caracterice correctamente el subsuelo.

Una desventaja que tiene la técnica perimetral respecto a la técnica tradicional es la distribución irregular de los datos. Mientras la técnica tradicional ofrece una distribución regular mediante perfiles de datos, la distribución de los datos con la técnica perimetral dependerá de la geometría que formen los electrodos y los arreglos usados en ella. Generalmente, hay una mayor densidad de datos en las zonas cercanas a los electrodos y una menor densidad hacia la parte central y superficial de la región de estudio y en las zonas laterales inferiores.

El punto en el subsuelo al cual se le atribuye una medición hecha en la superficie se le llama punto de atribución. Conocer la localización teórica de los puntos de

atribución generados por un diseño de adquisición es importante para definir las zonas del subsuelo que tendrán información y determinar si la adquisición permitirá caracterizarlo. Por lo tanto, antes de llevar a cabo la adquisición de datos en campo es necesario realizar pruebas con la geometría y arreglos seleccionados para conocer las zonas con mayor y menor densidad de datos; así, se evitará realizar interpretaciones en zonas donde hay poca o nula información del subsuelo.

El cálculo de las coordenadas de un punto de atribución se realiza asumiendo un medio homogéneo, por lo tanto, la localización es hipotética. En realidad, no es cierto que la medición de voltaje tomada en superficie representa a solo un punto en el subsuelo porque todos los materiales del medio influyen en el valor medido. Sin embargo, el hecho de que se midan diferentes valores de voltaje en diferentes puntos de la superficie haciendo uso del mismo arreglo indica que los valores dependen de la distancia entre los electrodos y la porción del volumen más cercana al arreglo; entonces, se puede asignar la medición a un punto representativo de dicha porción de volumen.

De acuerdo con Tejero, et al. (2015), las coordenadas (x,y) de un punto de atribución usando cualquier arreglo son aquellas del punto medio del segmento recto que une los puntos medios de los segmentos de recta formados por los dipolos de corriente y potencial (Fig. 6). Por otro lado, calcular la coordenada z es aún tema de análisis; desde definiciones que se sustentan en resultados empíricos (Evjen, 1938) hasta análisis formales que, generalmente, calculan la profundidad para un medio y arreglos específicos (Roy y Apparao, 1971). En (McGillivray y Oldenburg, 1990) y (Loke, 1996-2022) se discute el uso de una función de sensibilidad o de la derivada de Fréchet para analizar la variación que tienen las mediciones de voltaje o resistencia respecto a la variación de resistividad en el subsuelo; así, se puede calcular el valor máximo de esa variación para saber con qué proporción de volumen está relacionada y definir ahí el punto de atribución.

Al momento de seleccionar o definir el método para calcular las coordenadas del punto de atribución, se debe escoger alguno que permita cualquier posición de los electrodos de corriente y potencial.

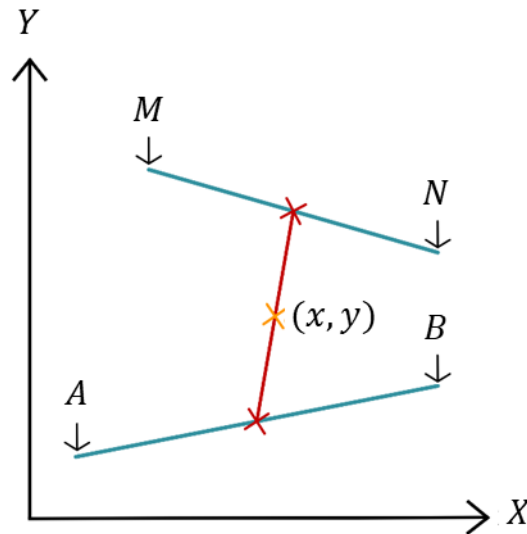


Fig. 6 Cálculo de las coordenadas (x, y) del punto de atribución para cualquier arreglo cuadrípolar.

1.3 Teoría de inversión en TRE-3D

La teoría de inversión es una rama de las matemáticas que se enfoca en el estudio de los problemas inversos, así como en la creación y desarrollo de herramientas para resolverlos. De acuerdo con la teoría de inversión, existen dos tipos de problemas: los directos y los inversos. Ambos problemas están relacionados mediante una función matemática llamada modelo directo.

Para explicar la diferencia entre problema directo e inverso se propone como ejemplo el conjunto de puntos de la forma (x, y) que satisfacen la ecuación de la recta $y = 2x - 3$ (Fig. 7a). Suponga que solo se conocen los valores de x y la ecuación de la recta, pero se desconocen los valores imagen de x , es decir, y ; en este caso se tiene

un problema directo y se soluciona al calcular los valores de y mediante la evaluación de x en la función $y = f(x) = 2x - 3$ (Fig. 7b). Por el contrario, si se tiene un conjunto de puntos (x, y) y se piensa que están relacionados mediante la ecuación de una línea recta, pero no se sabe cuál de todas las líneas rectas posibles; entonces se tiene un problema inverso cuya solución implica encontrar los parámetros (pendiente y ordenada al origen) que definen a la recta que contiene el conjunto de puntos (Fig. 7c).

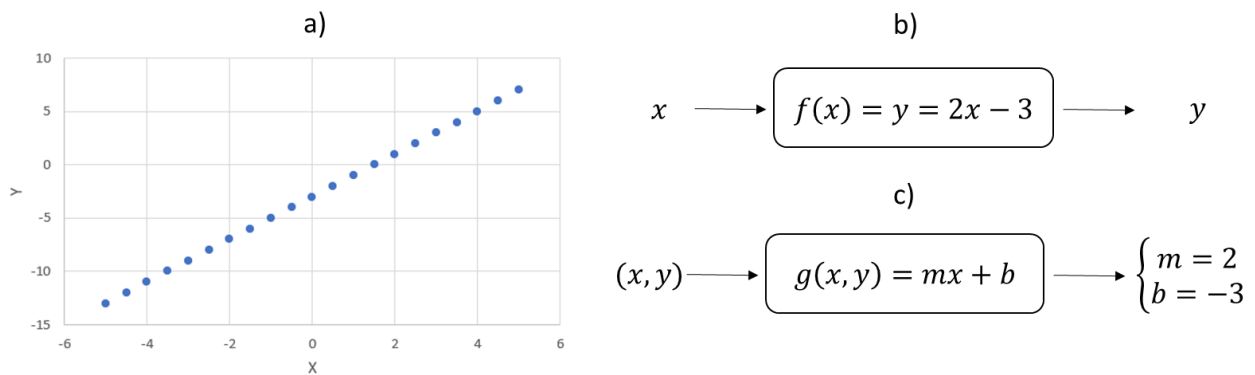


Fig. 7 (a) Pares ordenados de la forma (x, y) que satisfacen la ecuación de la recta $y = 2x - 3$. (b) Problema directo que se soluciona con la evaluación de los valores x en el modelo de la línea recta para obtener los valores y . (c) Problema inverso que se soluciona al conocer los valores de la pendiente y ordenada al origen de la ecuación de la recta que satisfacen los datos (x, y) .

En TRE-3D, el problema directo se presenta cuando se desconocen los valores de voltaje que se medirían en un estudio, pero se conoce el modelo directo (función matemática) que representa la respuesta eléctrica del subsuelo; por lo tanto, su solución consiste en evaluar las coordenadas del arreglo eléctrico en el modelo directo. Por el contrario, el problema inverso se presenta cuando se conocen los valores de voltaje medidos en la superficie, las posiciones de los electrodos y se sabe la forma general del modelo directo, pero se desconocen los valores de los parámetros de dicho modelo que definen y caracterizan el subsuelo.

Cuando se lleva a cabo un estudio de TRE-3D se presenta un problema inverso porque se desconocen las características del subsuelo; por lo tanto, no se sabe qué

valores deben tomar los parámetros del modelo directo para que represente el subsuelo. En este caso se busca solucionar el problema inverso mediante el proceso de inversión, que consiste en la aplicación de la teoría de inversión.

1.3.1 Modelo directo

Generalmente, en estudios de TRE-3D reales se propone un modelo directo (función matemática) que representa las características geométricas y resistivas de los materiales que conforman el subsuelo y se usa durante el proceso de inversión.

Para determinar el modelo directo que representa el comportamiento eléctrico del subsuelo es necesario partir de la teoría electromagnética, en particular de las ecuaciones de Maxwell (Ec. 1.1 – Ec. 1.4) porque ellas modelan matemáticamente cualquier campo electromagnético.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Ec. 1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad \text{Ec. 1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Ec. 1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = Q \quad \text{Ec. 1.4}$$

Donde:

- ◆ \mathbf{E} y \mathbf{D} son el campo de intensidad eléctrico y el campo de desplazamiento eléctrico, respectivamente; relacionados por la permitividad eléctrica (ϵ) así: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.
- ◆ \mathbf{H} y \mathbf{B} son el campo de intensidad magnética y el campo magnético inducido, respectivamente; relacionados por la permeabilidad magnética (μ) así: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.
- ◆ \mathbf{J} y Q son la densidad de corriente eléctrica y la densidad de carga eléctrica, respectivamente.

En un estudio de TRE-3D se considera que el campo eléctrico generado es de tipo estacionario, por lo tanto, la Ec. 1.1 se debe ajustar para que no se consideren variaciones temporales del campo magnético. Con lo anterior se obtiene la Ec. 1.5, la cual indica que el campo eléctrico es conservativo y proviene del operador gradiente de un campo potencial escalar llamado potencial eléctrico U (Ec. 1.6).

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{Ec. 1.5}$$

$$\mathbf{E} = \nabla U \quad \text{Ec. 1.6}$$

Si se sustituye la Ec. 1.6 y la relación del campo eléctrico con el campo de desplazamiento eléctrico en la Ec. 1.4, llegamos a la Ec. 1.7 que es la Ecuación de Poisson y se cumple en todos los puntos del espacio con carga ($Q \neq 0$). Por otro lado, en los puntos libres de carga ($Q = 0$) se cumple la Ec. 1.8, llamada Ecuación de Laplace.

$$\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = \frac{Q}{\epsilon} \quad \text{Ec. 1.7}$$

$$\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = 0 \quad \text{Ec. 1.8}$$

Aunque estas dos últimas ecuaciones modelan el comportamiento del potencial eléctrico generado en cualquier estudio de TRE-3D, siguen siendo generales debido a que la función potencial U depende de las características particulares de cada subsuelo y de sus condiciones físicas. Además, en prospección eléctrica, interesan solo los valores de la función potencial U en puntos de la superficie del subsuelo porque es ahí donde se llevan a cabo las mediciones; por ello se han desarrollado métodos analíticos y numéricos para resolver las ecuaciones anteriores con el fin de encontrar la función U que devuelve los valores de potencial para un medio específico en diversos puntos de la superficie y con ello calcular el voltaje entre dos puntos.

En muchas ocasiones, después de obtener la función U , se prefiere trabajar con la resistividad aparente (en unidades Ωm) que se obtiene a partir de la diferencia de potencial ($\Delta U = V$) cuando se utiliza la ley de Ohm. Su cálculo toma en cuenta las posiciones de los electrodos de corriente y potencial a través del factor k llamado factor geométrico (Ec. 1.9).

$$\rho_a = k \frac{\Delta U}{I} = k \frac{V}{I} = kR \quad \text{Ec. 1.9}$$

En cualquiera de los casos, ya sea trabajar con el concepto de resistividad aparente o de potencial, contar con un modelo directo es necesario para llevar a cabo un estudio de TRE-3D. En la sección 2.1 se presenta el modelo directo empleado en este trabajo.

1.3.2 Problema inverso

El problema inverso en TRE-3D se presenta cuando se conocen los valores de voltaje medidos en la superficie, las posiciones de los electrodos y se sabe la forma general del modelo directo, pero se desconocen los valores de sus parámetros que definen y caracterizan el subsuelo.

Otra característica del problema inverso en TRE-3D es que es un problema mal planteado; para explicar esto, se parte un problema bien planteado que es aquel que cumple tres características: tiene solución, su solución es única y su solución es estable respecto a pequeñas perturbaciones (Tarantola, 2005). Los problemas inversos en TRE-3D son mal planteados porque no tienen solución única debido a que diferentes combinaciones en los valores de los parámetros del modelo pueden generar los mismos datos medidos de voltaje; por lo tanto, cuando se quiere resolver el problema inverso no se pretende encontrar la solución exacta, sino una solución aproximada que sea óptima. De esta forma, el problema inverso se convierte en un problema de optimización que requiere de diversas herramientas numéricas y enfoques de resolución llamados métodos de inversión (Parker, 1994).

1.3.3 Métodos de inversión

La teoría de inversión ha desarrollado diversos métodos para resolver los problemas inversos, entre ellos están los métodos de optimización. En este contexto, los métodos de optimización son algoritmos matemáticos cuyo fin es determinar los valores óptimos de los parámetros numéricos del modelo directo que representan las características eléctricas y geométricas del subsuelo; estos métodos se pueden agrupar en dos categorías: los métodos determinísticos y los métodos estocásticos.

Los métodos de optimización determinísticos son aquellos que, dado un conjunto de datos de entrada, devuelven la misma solución óptima cada vez que el algoritmo es ejecutado. Algunos ejemplos de métodos de optimización determinísticos son los métodos Descomposición en Valores Singulares y Mínimos Cuadrados. En la actualidad, existe una vasta cantidad de algoritmos basados en estos métodos para invertir datos de resistividad eléctrica aparente, desarrollados tanto por empresas privadas como por la comunidad académica. Ejemplos de algoritmos comerciales son RES3DINV[®] de AGS que está basado en el método de Mínimos Cuadrados con restricción suave, EarthImager3D[®] de AGI que también utiliza el método de Mínimos Cuadrados con una regularización de Tikhonov y ZondRes3d[®] de ZOND que tiene la opción de 4 tipos de restricción del método Mínimos Cuadrados. Por parte de la comunidad académica se tienen los programas BERT (Leibniz Institute for Applied Geosciences, Hannover, Germany) que utiliza el método Gauss-Newton con un esquema de regularización global con restricciones de suavidad especiales; también está el software ProfileR (Environment Centre, Lancaster University) basado en el principio de Occam que implica una restricción de suavidad en el modelo solución.

Por otro lado, los métodos estocásticos son aquellos que, dado un conjunto de datos de entrada, devuelven una solución diferente cada vez que el algoritmo se ejecuta porque incluyen una perturbación aleatoria en la búsqueda de la solución óptima como parte fundamental de su enfoque de resolución. Ejemplos de métodos

estocásticos son los métodos Recocido Simulado (SA, por sus siglas en inglés), Algoritmos Genéticos (GA, por sus siglas en inglés) y Optimización por Enjambre de Partículas (PSO, por sus siglas en inglés) que, si bien se han adaptado en diversos algoritmos diseñados por la comunidad académica, aún no cuentan con la popularidad de los métodos determinísticos para desarrollarse de igual manera en el ámbito comercial.

Los dos tipos de métodos de inversión consisten en optimizar una función llamada función objetivo. Generalmente, la función objetivo es una norma de ajuste que determina la diferencia que tienen dos conjuntos de datos. En un estudio de TRE-3D se tienen dos tipos de datos, los datos medidos u observados y los datos calculados. Los datos medidos son valores de voltaje medidos sobre el terreno de estudio, mientras los datos calculados son valores de voltaje calculados a partir de un modelo directo que trata de representar el subsuelo. Si el modelo directo y sus parámetros representan perfectamente el subsuelo, los datos calculados serán prácticamente iguales a los datos medidos y la norma de ajuste tendrá su valor mínimo; por lo tanto, los métodos de optimización se enfocan en encontrar los parámetros del modelo directo que optimizan la norma de ajuste.

Las normas de ajuste más utilizadas en el proceso de inversión de datos eléctricos son la norma L_2 y la norma RMS (siglas de su nombre en inglés *Root Mean Square*); ambas se calculan a partir de la diferencia entre los datos medidos y calculados (Ec. 1.10). La norma L_2 (Ec. 1.11) es parte de la familia de normas L_n definida por la Ec. 1.12. El valor del índice n indica la potencia a la cual se eleva la diferencia entre los datos medidos y calculados. Por otra parte, la norma RMS está definida por la Ec. 1.13 que calcula la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de las diferencias entre los datos medidos y calculados.

$$\bar{e} = \bar{d}^o - \bar{d}^c \quad \text{Ec. 1.10}$$

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |e_i|^2} \quad \text{Ec. 1.11}$$

$$L_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^N |e_i|^n} \quad \text{Ec. 1.12}$$

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_i|^2} \times 100 \quad \text{Ec. 1.13}$$

$$e_i = \frac{d_i^o - d_i^c}{d_i^o}$$

La selección de la función de ajuste es muy importante en el proceso de inversión porque indica la relevancia que adquieren los datos atípicos en el proceso de inversión; para explicar esto observe la Fig. 8 que muestra un conjunto de datos que tienen una tendencia (entre ellos también hay datos llamados datos atípicos o *outliers* que no siguen la tendencia) y los modelos óptimos que resultan al seleccionar diferentes normas de ajuste. Cuando se selecciona la norma L_1 como función de ajuste, el método de inversión intenta ajustar todos los datos por igual y las diferencias e_i producidas por los datos atípicos no son muy relevantes en el proceso de inversión. Sin embargo, un valor mayor de n hará que las diferencias producidas por los *outliers* adquieran mayor relevancia en el valor total de ajuste (porque están elevadas a la potencia n), mientras que las diferencias de los demás datos dejan de ser relevantes en el valor final de la función por ser valores más pequeños (Menke, 1989). En otras palabras, mientras mayor sea el valor de n , el método de inversión se enfocará en ajustar los datos atípicos.

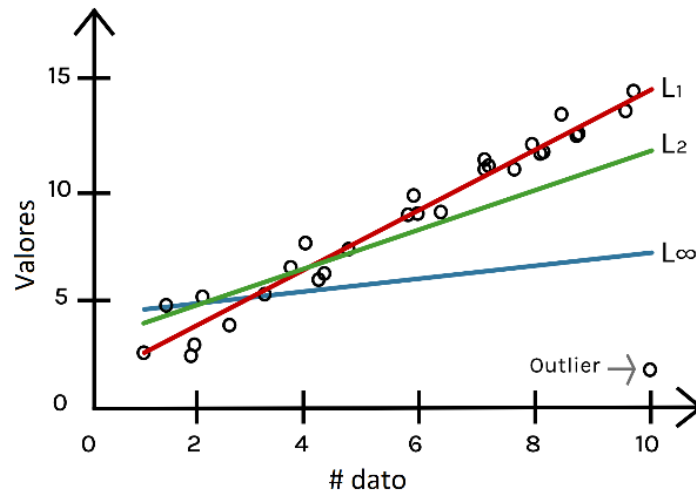


Fig. 8 Conjunto de datos que tienen una tendencia. Las líneas representan los modelos solución obtenidos con diferentes normas L .

Aunque la norma RMS se parece a la norma L_2 , es un caso particular de la función media general con potencia igual a 2. Esta es la norma de ajuste que se emplea en este trabajo porque presenta una ventaja respecto a la norma L_2 cuando se analizan dos o más conjuntos de datos de un mismo fenómeno con diferente cantidad de ellos. Para explicar esta ventaja, suponga dos conjuntos de datos medidos (A y B) y dos conjuntos de datos calculados (C y D); donde $A \subset B$ y $C \subset D$; además $card(A) = card(C)$ y $card(B) = card(D)$. El conjunto C ajusta al A , mientras el conjunto D ajusta al B y se obtiene en ambos ajustes que $e_i = k$ para todo i , donde k es un valor constante. Esto significa que cualitativamente se obtiene el mismo ajuste en ambos casos. Sin embargo, el valor de la norma L_2 será mayor en el ajuste de B y D porque se suma más veces el valor k elevado a la potencia n ; así, cuantitativamente parece que el ajuste entre B y D es peor. En cambio, si se usa la función RMS, el aumento en el valor de ajuste será menor porque el cálculo del promedio del cuadrado de las diferencias lo mantiene más estable y convierte a la función RMS en una norma más robusta que la norma L_2 .

1.4 Funciones de peso

Debido a que los problemas inversos de los estudios de TRE-3D son del tipo mal planteados, porque pueden no tener solución o una infinidad de soluciones, se debe hacer uso de toda la información geológica, geofísica o matemática que sea útil y añadirla en el planteamiento del problema para restringir el espacio de soluciones. En esta sección se exponen dos herramientas que tienen como objetivo añadir condiciones al problema para limitar la cantidad de posibles soluciones.

La primera herramienta se conoce como agregar información *a priori*. Una de las formas más simples de uso, y necesaria en todos los métodos de inversión numéricos, es restringir los valores que pueden tomar los parámetros que se invierten a un rango establecido. Para establecer el rango es necesario estimar el tipo de materiales que conforman en subsuelo mediante información geológica o geofísica previamente obtenida.

Otra forma de introducir restricciones a un problema de optimización es mediante los Multiplicadores de Lagrange; que consisten en optimizar la función objetivo $E(\vec{p})$, que puede ser la norma L_2 , la norma RMS o cualquier otra función escalar de variable vectorial (\vec{p}) sujeta a la restricción de la Ec. 1.14, mediante la optimización de la función $L(\lambda)$ (Ec. 1.15) donde λ se conoce como multiplicador de Lagrange. Esto implica resolver la ecuación vectorial Ec. 1.16 para obtener los puntos críticos y después conocer su naturaleza.

$$C(\vec{p}) = 0 \quad \text{Ec. 1.14}$$

$$L(\vec{p}, \lambda) = E(\vec{p}) + \lambda C(\vec{p}) \quad \text{Ec. 1.15}$$

$$\nabla E = -\lambda \nabla C \quad \text{Ec. 1.16}$$

La segunda herramienta es la función de peso y es una de las formas más populares para modificar la función de ajuste; con ella se da prioridad al ajuste de ciertos datos

sobre otros; por ejemplo, se le puede dar mayor relevancia de ajuste a los datos que siguen una tendencia y no a los datos atípicos. La función de peso se puede definir mediante diferentes criterios y puede aplicarse también a los parámetros invertidos. En este trabajo se empleará sobre los datos medidos.

Las funciones de peso se han empleado sobre todo en métodos de inversión determinísticos y su introducción es mediante una matriz de peso \mathbf{W} (matriz diagonal formada por los valores de peso) que modifica la función objetivo. Por ejemplo, el método de inversión Mínimos Cuadrados, cuya función objetivo suele ser la Ec. 1.17 y su solución se obtiene con la Ec. 1.18, donde \mathbf{G} es la matriz *Kernel*, cambia de nombre a Mínimos Cuadrados Pesados o Ponderados cuando se agrega una matriz de pesos para asignar un valor de peso a cada diferencia e_i^2 ; generalmente, este factor de peso es el inverso de la varianza de los datos (Ec. 1.19) (Zhdanov, 2015). Con esta selección, los datos con los menores valores de varianza tienen el mayor valor de peso en el cálculo de E , mientras los datos con la mayor varianza tienen la menor relevancia en este cálculo.

$$E = \bar{e}^T \bar{e} = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad \text{Ec. 1.17}$$

$$\bar{p} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \bar{d}^o \quad \text{Ec. 1.18}$$

$$E = \bar{e}^T \mathbf{W} \bar{e} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} e_i^2 \quad \text{Ec. 1.19}$$

$$\bar{p} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \bar{d}^o \quad \text{Ec. 1.20}$$

Si bien el uso de una matriz de pesos es útil para enfocar el ajuste de ciertos datos, puede generar inestabilidad en el problema inverso si las matrices que se deben invertir para obtener la solución (Ec. 1.20) son prácticamente singulares (Richardson y Zandt, 2003).

Los métodos de optimización estocásticos evitan la inestabilidad numérica producida por la singularidad de las matrices, porque su enfoque de solución es diferente y no hay matrices por invertir, aunque la función objetivo sea la misma. Debido a esto, la asignación de pesos se hace simplemente con una función escalar W que asigna un valor de peso a cada diferencia e_i^2 .

En el siguiente capítulo se detallan los criterios que definen las tres funciones de peso usadas en este trabajo y su introducción en el algoritmo de inversión. A su vez, se detallan los modelos numéricos que se emplearon para crear el algoritmo de inversión.

2. Metodología

En este capítulo se presentan las definiciones de las tres funciones de peso propuestas en este trabajo, que tienen como objetivo reducir o eliminar el efecto de afloramiento en TRE-3D en las cuales se empleó la técnica de adquisición perimetral; de esta manera, se pretende resolver con mayor aproximación los valores de los parámetros verticales de los cuerpos anómalos. Para esto es necesario introducir las funciones de peso en un algoritmo de inversión; sin embargo, no es sencillo modificar un algoritmo ya hecho o puede ser imposible. Por lo tanto, también se creó un algoritmo de inversión de datos de resistividad eléctrica 3D. Este algoritmo usa como modelo directo una función numérica que calcula la resistividad aparente debida a prismas rectangulares con diferente resistividad enterrados en un semi espacio homogéneo y como método de inversión usa una adaptación del método estocástico Optimización por enjambre de partículas (PSO, por sus siglas en inglés). Se empezará con la descripción del modelo directo y método de inversión, después se definen las funciones de peso y por último se describe el algoritmo de inversión completo que se usa las pruebas de validación del capítulo 3.

2.1 Modelo directo de prismas rectangulares de diferente resistividad enterrados en un medio homogéneo.

El modelo directo es una función matemática que devuelve un valor de resistividad aparente al evaluar un arreglo electródico sobre un medio hipotético; por lo tanto, sus parámetros son las características geométricas y resistivas del medio y es función de las coordenadas del arreglo cuadripolar. En este trabajo se utiliza el modelo directo de León-Sánchez (2004) que calcula la resistividad aparente debida a cuerpos con forma de prismas rectangulares, de diferente resistividad, enterrados en un semi espacio de resistividad homogénea.

Aunque los métodos numéricos Diferencias Finitas o Elemento Finito han ganado cada vez más popularidad como método de resolución del problema directo y ofrecen una solución numérica aproximada en problemas con geometrías complejas (porque discretizan la región de estudio en una malla tan fina como se desee y se resuelve la ecuación diferencial en cada elemento de la malla), conllevan un alto costo computacional y de tiempo. Por lo anterior, y aunado al hecho de que el modelo de León-Sánchez (2004) también provee una solución numérica aproximada, es sencilla, rápida y se puede usar para cualquier arreglo electródico, se decidió utilizarlo como modelo directo. A pesar de que este modelo parece limitarse a medios sencillos, en realidad puede formar un medio complejo mediante la combinación de varios prismas de diversos tamaños y resistividades. Sin embargo, es importante considerar que mientras más cuerpos conformen el medio, el tiempo de cómputo aumentará.

El modelo directo de León-Sánchez (2004) se basa principalmente en dos hipótesis para resolver el problema directo:

1. El medio está formado por un conjunto de paralelepípedos de resistividad homogénea inmersos en un medio homogéneo.
2. Las corrientes eléctricas secundarias creadas por los cuerpos anómalos son despreciables.

Se inicia con la suposición de un semi espacio homogéneo de resistividad ρ_{medio} con un prisma rectangular enterrado en él, cuya resistividad es ρ . Además, el campo eléctrico es generado por una fuente eléctrica puntual ubicada en el punto $A(x_s, y_s, 0)$ sobre la superficie del medio ($z = 0$) y se mide el potencial eléctrico en el punto $N(x, y, 0)$. Estas suposiciones implican que la Ec. 1.7 y la Ec. 1.8 se puedan reescribir en una sola ecuación mediante la Delta de Dirac (Ec. 2.1) donde \vec{r} es el vector desde el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ hasta el punto $N(x, y, 0)$, I es la corriente eléctrica y $\rho(\vec{r})$ es la resistividad que depende de \vec{r} (Fig. 9). Además, las condiciones de frontera quedan definidas por la Ec. 2.2, en la cual la variación del potencial U medido en la

interfaz medio-aire es cero; por otro lado, mientras más lejos esté P de la fuente, el valor de U tiende a cero.

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla U(\vec{r})}{\rho(\vec{r})} \right) = -I\delta(\vec{r}) \quad \text{Ec. 2.1}$$

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \eta} = 0; z = 0 \quad \text{Ec. 2.2}$$

$$U(\vec{r}) = 0; |\vec{r}| \rightarrow \infty$$

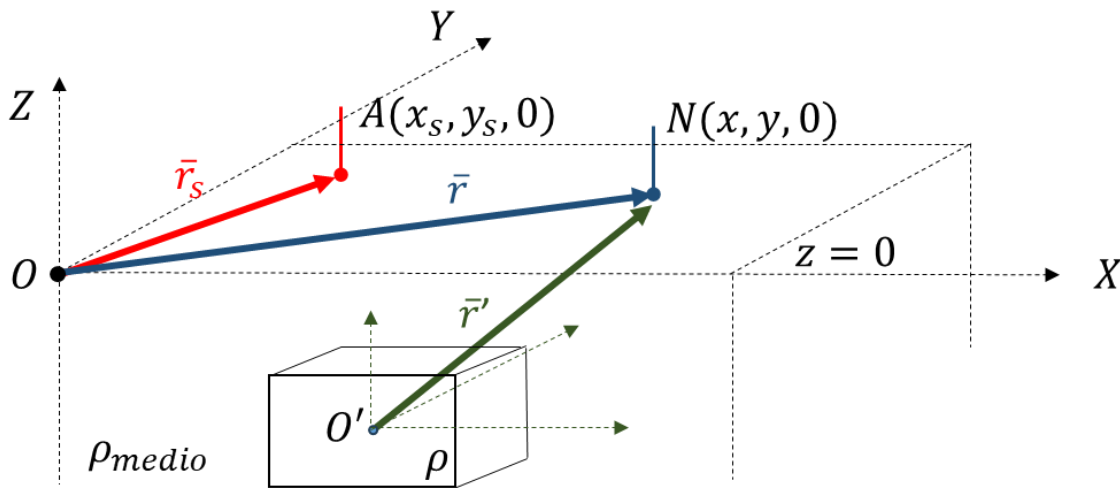


Fig. 9 Representación del subsuelo que se asume en el cálculo de potencial con el modelo directo de León Sánchez (2004). Semi espacio homogéneo con un prisma rectangular enterrado. También se muestra la relación entre las coordenadas absolutas y relativas, definidas por el origen $O(0,0,0)$ y el centro del prisma enterrado O' , respectivamente. La relación está definida por el punto N donde se mide el potencial porque se puede definir mediante las coordenadas absolutas $N(x, y, 0)$ o mediante las relativas $N(x', y', z')$.

A partir de aquí, León-Sánchez (2004) emplea la primera identidad de Green para determinar la función U (Ec. 2.3) en términos de la función de Green ($G(\vec{r}, \vec{r}')$), definida a partir de las coordenadas absolutas (\vec{r}) y relativas (\vec{r}'). Después utiliza el gradiente de la función de Green, la Ec. 1.6 y la ley de Ohm ($E(\vec{r}) = \rho(\vec{r})J(\vec{r})$) para reescribir a U como la Ec. 2.4.

$$U(\vec{r}) = - \int_V \nabla U(\vec{r}) \cdot \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') dV - \int_S U(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{S} \quad \text{Ec. 2.3}$$

$$U(\vec{r}) = - \frac{1}{2\pi} \int_V \rho(\vec{r}) \bar{J}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV \quad \text{Ec. 2.4}$$

Es en esta parte donde incluye la segunda hipótesis, la cual desprecia las corrientes secundarias (\bar{J}_s) generadas por el prisma porque se consideran menores que la corriente primaria ($\bar{J}_s(\vec{r}) \ll \bar{J}_p(\vec{r})$). A esto Eskola (1992) le llama problema de dispersión débil. Por lo tanto, la Ec 2.4 queda definida en términos de la corriente primaria (\bar{J}_p) generada en el punto $A(x_s, y_s, 0)$; además, si la corriente total entra por A y el balance de las corrientes que entran y salen de una superficie semiesférica con centro en la fuente se mantiene igual a cero, \bar{J}_p puede definirse por la Ec. 2.5.

Finalmente, al sustituir la Ec. 2.5 en la Ec. 2.4 se obtiene el potencial eléctrico en términos de A con el vector \vec{r}_s y N con el vector \vec{r}' .

$$\bar{J}_p = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|^3} \right] \quad \text{Ec. 2.5}$$

$$U(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi^2} \int_V \rho(\vec{r}') \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|^3} \right) \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV \quad \text{Ec. 2.6}$$

La segunda hipótesis de dispersión débil desprecia las corrientes producidas por los cuerpos enterrados; entonces, también serán despreciables los efectos entre dos cuerpos cercanos, lo que permite calcular el potencial eléctrico debido a dos o más prismas mediante la suma de los potenciales individuales. Lo anterior indica que el cálculo de potencial es un fenómeno lineal; por lo tanto, se puede calcular el potencial debido a un circuito de dos electrodos de corriente y dos electrodos de potencial mediante la superposición de los efectos de cada electrodo.

La solución numérica y computacional del modelo directo de León-Sánchez (2004) se ha llevado a cabo de diversas maneras, estas se pueden consultar en Flores-Márquez, et al. (2015) y Hernández-Contreras y Flores-Márquez (2023). En esta tesis se usa la implementación numérica y computacional original de León-Sánchez (2004) porque, al estar programado en lenguaje FORTAN 90, su adaptación al algoritmo de inversión de esta tesis fue muy sencilla.

La adaptación consistió en seleccionar solo a los parámetros altura del prisma (Δz), profundidad del centro del prisma (z) y resistividad del prisma (ρ) como los únicos parámetros a invertir, debido a que son los parámetros objetivo de esta tesis. Los demás parámetros relacionados a la posición horizontal del prisma no se invertirán porque se suelen resolver correctamente con cualquier método de inversión bajo cualquier técnica de adquisición (Tejero, et al., 2015).

Aunque los parámetros relacionados a la posición horizontal de los cuerpos no se invierten, es necesario definir sus valores para obtener datos calculados debido a que el modelo directo considera un problema tridimensional; por lo tanto, se dejarán fijos a sus valores correctos en cada una de las pruebas con modelos sintéticos.

2.2 Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)

El método de Optimización por Enjambre de Partículas, mejor conocido por sus siglas en inglés PSO (*Particle Swarm Optimization*), es un método de optimización estocástico que se publicó por primera vez en Kennedy y Eberhart (1995) y desde entonces se ha utilizado como método de inversión en diversos problemas de la física, incluyendo los estudios de prospección geofísica. Algunos ejemplos de su aplicación en prospección geofísica son el estudio de Fernández-Martínez, et al. (2010) que realiza una serie de análisis del método, así como definir su propia familia de algoritmos PSO que los termina aplicando en un problema inverso de Sondeo

Eléctrico Vertical. Yuan Sanyi, et al. (2009) aplica el método PSO a un problema lineal sensible a ruido, un problema de inversión sincrónica de inversión lineal y no lineal, y un problema no lineal. Como último ejemplo, Monteiro Santos (2010) aplica el método en la inversión de potencial espontáneo único y múltiple causados por cuerpos enterrados con geometrías simples como esferas, cilindros o láminas inclinadas.

A continuación, se presentan las razones para usar el método PSO como método de inversión en este trabajo.

- Los métodos estocásticos tienen una gran ventaja respecto a los determinísticos; son eficaces para resolver problemas inversos no lineales, incluso sin contar con una solución inicial cercana a la óptima (Menke, 1989).
- La introducción de funciones de peso como se propone en este trabajo es un enfoque nuevo y simple de desarrollar en los métodos estocásticos debido al enfoque de optimización por búsqueda que manejan.
- Para seleccionar el método estocástico a utilizar se revisaron diversas adaptaciones de estos métodos en problemas inversos de prospección eléctrica. El estudio decisivo fue el de Göktürkler y Balkaya (2012) que compara el funcionamiento y resultados de los métodos GA, SA y PSO en la inversión de datos reales y sintéticos de potencial espontáneo. En este estudio, los tres métodos ofrecen prácticamente las mismas soluciones óptimas, siendo las soluciones del método PSO ligeramente mejores y aproximadas a las exactas; además, este método tiene una notable ventaja en tiempo de cómputo debido a la simpleza de su diseño. Esto último lo convierte en el método más eficaz de los tres para adaptar las funciones de peso.

- Los parámetros numéricos del método son mínimos en comparación con otros métodos estocásticos; por lo tanto, su uso permite enfocarse en el estudio de las funciones de peso.

El método PSO, al igual que los métodos GA y SA, toma como referencia el comportamiento de la naturaleza para definir su algoritmo de búsqueda; en este caso, el algoritmo simula la búsqueda de comida o el proceso de caza de un enjambre de insectos llamados partículas. Desde esta perspectiva, una población de NP partículas es liberada para moverse por un espacio limitado llamado espacio solución, que tiene dimensión igual al número de parámetros a invertir (M) y donde cada punto del espacio solución (\mathcal{S}^M) es una posible solución del problema inverso.

El método es un proceso iterativo que requiere establecer primero los límites del espacio solución, el tamaño de la población de partículas y el criterio de finalización del proceso iterativo. Los límites del espacio solución se deben definir para cada parámetro como el valor mínimo y máximo que puede tomar cada uno. El tamaño de la población de partículas (NP) es arbitrario, pero se debe considerar que un número pequeño puede producir que no se encuentre la solución óptima; por el contrario, un valor grande puede provocar un tiempo de cómputo excesivo. El criterio de finalización del proceso iterativo puede ser un valor de tolerancia de la función objetivo (tol) o un límite máximo de iteraciones (k_{max}).

Después de las definiciones iniciales, las NP partículas se sitúan de forma aleatoria en diferentes puntos del espacio solución llamados modelos iniciales que tienen la forma $\bar{m}_i = (p_1, p_2, \dots, p_M)$ con $i = 1, 2, \dots, NP$; es decir, para formar el modelo inicial \bar{m}_i se asigna un valor aleatorio a cada uno de sus parámetros dentro de los límites del espacio solución. Dichos modelos iniciales se usan como argumento de la función modelo directo para generar NP conjuntos de datos calculados. Es en este momento donde comienza el proceso iterativo: cada conjunto de datos calculados se compara con los datos observados mediante la función de ajuste, después el modelo \bar{m}_i se

modifica con la Ec. 2.7. La modificación está definida por \bar{v}_i (Ec. 2.8), que se calcula a partir del mejor modelo que ha tenido la población (\bar{m}_{best}) y el mejor modelo que ha tenido la partícula (\bar{m}_i^{best}) hasta la iteración actual (k), con lo cual se obtienen nuevos modelos que se usan para generar nuevos conjuntos de datos de calculados y repetir el proceso. Cuando se alcanza el criterio de finalización, la solución óptima es el último conjunto de parámetros guardado en la variable \bar{m}_{best} (Fig. 10).

$$\bar{m}_i^{k+1} = \bar{m}_i^k + \bar{v}_i^k \quad \text{Ec. 2.7}$$

$$\bar{v}_i^k = \bar{v}_i^{k-1} + \Phi(0, a)(\bar{m}_i^{best} - \bar{m}_i^k) + \Phi(0, b)(\bar{m}_{best} - \bar{m}_i^k) \quad \text{Ec. 2.8}$$

$$\bar{v}_i^k = (\chi^k)\bar{v}_i^{k-1} + \Phi(0, a)(\bar{m}_i^{best} - \bar{m}_i^k) + \Phi(0, b)(\bar{m}_{best} - \bar{m}_i^k) \quad \text{Ec. 2.9}$$

El planteamiento original para calcular \bar{v}_i es mediante la Ec. 2.8, la cual, además de considerar \bar{m}_{best} y \bar{m}_i^{best} incluye dos perturbaciones aleatorias $\Phi(0, a)$ y $\Phi(0, b)$ que modifican la aportación que hace el aprendizaje social y cognitivo de la población de partículas. La función Φ genera valores aleatorios dentro del rango establecido y tiene una distribución uniforme.

Con el paso del tiempo, la versión original del algoritmo se ha ido modificando por diversos autores y adaptando a diferentes estudios; en Poli, et al. (2007) se puede encontrar una recopilación de algunas versiones notables. En este trabajo se adaptó el algoritmo original para agregar un factor de inercia dinámica (χ) al cálculo de \bar{v}_i (Ec. 2.9) que permite regular las modificaciones de \bar{m}_i en cada iteración; de esta forma, en las primeras iteraciones la búsqueda se realiza a lo largo de todo el espacio solución, pero conforme aumentan las iteraciones la búsqueda se centrará en una zona específica.

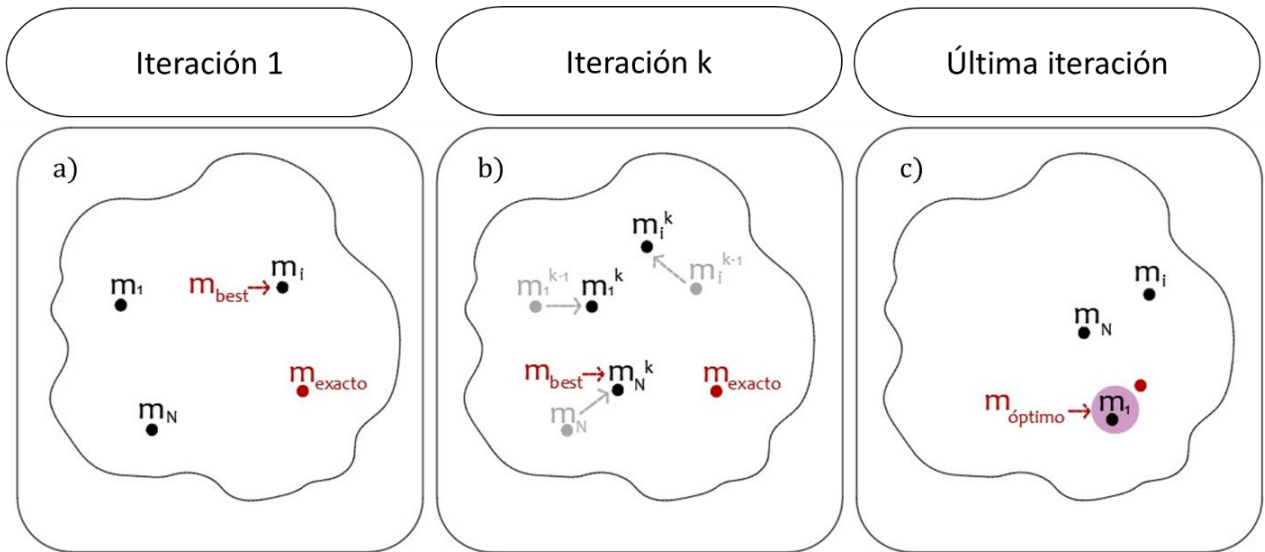


Fig. 10 Diagrama que representa el funcionamiento del método PSO. En la primera iteración se realiza la selección aleatoria de los modelos iniciales para cada partícula dentro de la región de búsqueda (con dimensión igual al número de parámetros del modelo directo). En las iteraciones siguientes, el ajuste de los modelos se realiza mediante la Ec.4. Cuando el proceso iterativo termina, el modelo solución óptimo es el último que queda guardado en la variable m_{best} .

2.3 Funciones de peso

Las funciones de peso propuestas están definidas a partir de la profundidad teórica de los datos y de la desviación estándar de los valores de resistividad aparente. Cada una asigna una mayor relevancia de ajuste a una zona específica del volumen de datos.

Antes de presentar los criterios del diseño de las tres funciones de peso, se explicará la forma de introducir las funciones en la norma de ajuste, que en este trabajo es la norma RMS.

2.3.1 Introducción de la función de peso en la función de ajuste

La función de ajuste empleada es la norma RMS e indica la similitud o ajuste que existe entre los datos medidos y calculados a partir de la métrica Euclidiana. Su rango va de cero a infinito, siendo cero el valor que indicaría un ajuste perfecto de datos, es decir, ambos conjuntos de datos serían iguales. En inversión de TRE-3D no se

puede lograr un ajuste perfecto porque hay varios factores que hacen que los datos medidos y calculados no sean iguales; por lo tanto, el objetivo del algoritmo de inversión es encontrar la solución que minimiza la norma RMS.

La norma RMS definida por la Ec. 1.13 cambia a la Ec. 2.10 cuando se introduce la función de peso W . En esta expresión N es la cantidad de datos medidos y w_i es un escalar que multiplica a e_i , haciendo que su contribución al valor total de RMS sea proporcional a w_i . Por lo tanto, el valor de la norma RMS dependerá de \bar{e} y de los valores de peso W .

Es importante mencionar que las tres funciones de peso propuestas fueron normalizadas al rango (0,1] con el fin de no incrementar el valor de ajuste que se obtiene cuando no se usan funciones de peso. De esta forma, solo los datos con un peso ($w_i < 1$) toman menor relevancia en el cálculo de RMS.

$$RMS(e, w) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i |e_i|^2} \times 100 \quad \text{Ec. 2.10}$$

2.3.2 Función de peso 1 (FP1)

La primera función de peso está definida a partir de la profundidad teórica del punto de atribución y asigna un mayor peso a los datos asociados a profundidades más someras.

El campo eléctrico estacionario que se genera al realizar la TRE-3D sigue la ley cuadrática inversa, es decir, la intensidad del campo eléctrico es inversamente proporcional a la distancia entre la fuente eléctrica y cualquier punto en el subsuelo (Orellana, 1982). Asimismo, se sabe que la distancia entre los cuatro electrodos es uno de los factores que definen la profundidad del punto al que se asocia la medición; así, mientras se aumente la distancia entre electrodos se obtendrán mediciones

asociadas a puntos más profundos del subsuelo. Sin embargo, la calidad de las mediciones tiende a disminuir cuando la profundidad aumenta debido a la dispersión del campo eléctrico y su disminución de intensidad aunado a una mayor probabilidad de ruido debido a la distancia entre electrodos.

El objetivo de la función de peso FP1 será lograr un mejor ajuste en la zona somera del subsuelo; para ello asignará el valor de peso máximo igual a 1 a los datos más someros y el valor de peso irá disminuyendo conforme los datos aumenten su profundidad. De acuerdo con esta idea, se pretende obtener una solución que defina con mayor aproximación el límite superior de los cuerpos anómalos y con ello disminuir o eliminar el efecto de afloramiento.

Para asignar los valores de peso a los datos es necesario contar con una expresión teórica que determine la profundidad de investigación de cada dato, lo cual es un tema aún en desarrollo. En Evjen (1938) se presentó una función para determinar la contribución que tiene cada capa del medio a diferentes profundidades en el valor de voltaje medido en superficie, y se determinó que la profundidad donde se tuviera el máximo valor es la profundidad de investigación. Después, en Roy y Apparao (1971) se siguió la idea de Evjen (1938) y definieron su propia función que representa la contribución que tiene cada capa a diferente profundidad en el valor de potencial medido en superficie. Dicha función llamada DIC es la integral de la diferencial de voltaje cuyo límite superior varía con la profundidad; así, también se conoce la profundidad de investigación cuando se encuentra el máximo de la función. Uno de los análisis más recientes para definir la profundidad de investigación es el que presentaron Gómez Treviño y Esparza (2014), donde cuestionaron la idea del potencial medido como la suma de todas las respuestas eléctricas a diferentes profundidades porque es imposible saber cuál es la contribución individual de cada capa a diferente profundidad; sin embargo, plantearon que la resistividad aparente depende del valor de la función de sensibilidad que a la vez depende de la

profundidad y definen a la profundidad de investigación como aquella que devuelve el máximo valor de la función de sensibilidad (F_{ID}).

En este trabajo se decidió utilizar el cálculo de profundidad que propone Tejero, et al. (2015) y que se basa en la definición de profundidad media (z_e) de Loke (1996-2022), pero generalizada para cualquier arreglo cuadripolar. La profundidad media la define como aquella donde la integral de la función de sensibilidad de la parte superior del medio es igual a la integral de la sensibilidad de la región inferior (Ec. 2.11). Dicha función de sensibilidad es la derivada de Fréchet de primer orden para un medio homogéneo, que para el caso del arreglo Polo-Polo se calcula con la Ec. 2.12, donde a es la distancia entre electrodos y, por el principio de superposición, se puede emplear con cualquier arreglo cuadripolar.

$$\int_0^{z_e} F_{ID}(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F_{ID}(z) dz \quad \text{Ec. 2.11}$$

$$F_{ID}(z) = \frac{2z}{\pi(a^2 + 4z^2)^{1.5}} \quad \text{Ec. 2.12}$$

La ventaja significativa que tiene la expresión de Tejero es que permite el cálculo de la profundidad teórica al utilizar cualquier tipo de arreglo, ya sea convencional o no convencional, lo cual es importante cuando se utiliza la técnica de adquisición de datos perimetral.

Una vez calculada la profundidad de cada dato, que en este trabajo corresponde a la profundidad media ($z_i = z_e$), la asignación de pesos se hace de acuerdo con la Ec. 2.13 que normaliza en un rango de (0,1] los valores de las profundidades cuadráticas inversas. De esta forma, los datos con la menor profundidad tendrán un valor de peso igual a 1 y los datos más profundos tendrán un valor de peso tendiendo a cero, aunque nunca cero para no eliminar su contribución en la búsqueda de la solución

óptima. La normalización de los valores z_i^{-2} se hace tomando como referencia el valor máximo obtenido z_{max}^{-2} (que corresponde a los puntos más someros).

$$Z = \{z_i^{-2}\}; \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, N$$
$$w_i = \frac{z_i^{-2}}{z_{max}^{-2}}; \text{ donde } z_{max}^{-2} = \max(Z)$$

Ec. 2.13

2.3.3 Función de peso 2 (FP2)

La segunda función de peso se definió a partir de los valores de resistividad aparente medidos y su valor estimado de desviación estándar.

La resistividad aparente es el nombre que se le da al valor de resistividad calculada a partir de una medición de voltaje tomada en la superficie del subsuelo, y es el resultado de la interacción eléctrica entre todos los cuerpos en él (Orellana, 1982). En el caso particular de un medio homogéneo con un cuerpo de diferente resistividad enterrado (como el que plantea el modelo directo que se utiliza en este trabajo), los datos medidos lejos del cuerpo anómalo tenderán al valor de resistividad del medio porque la influencia del cuerpo es pequeña, pero conforme las mediciones se toman en zonas cercanas al cuerpo anómalo, los valores de resistividad tenderán hacia el valor de resistividad del cuerpo enterrado. Lo anterior indica que el rango en el cual estarán los valores de resistividad aparente tomados en una TRE-3D están limitados por la resistividad del medio y la del cuerpo anómalo; por lo tanto, dicho rango puede segmentarse y usarse como referencia para clasificar a los datos.

En este trabajo se utiliza el rango de una desviación estándar para asignar los valores de peso; es decir, los datos de resistividad aparente dentro del rango de una desviación estándar $(-\sigma, \sigma)$ tendrán el valor de peso máximo igual a 1, mientras los datos fuera de ese rango tendrán la mitad del peso. Con esta asignación de pesos se pretende marcar un contraste entre los datos asociados a zonas cercanas al cuerpo

anómalo y las zonas alejadas de él. Sin importar la cantidad de datos y su densidad a lo largo de la región de estudio, el algoritmo dará prioridad a ajustar la zona que tenga el valor de peso 1, que se asocia a zonas de contraste entre el medio homogéneo y los cuerpos anómalos; de esta manera se podría obtener una mejor solución de los límites verticales y forma de los cuerpos.

La asignación de pesos se realiza de la siguiente forma: primero se calcula el valor de media de la resistividad aparente ($\bar{\rho}$) y el valor estimado de desviación estándar de la resistividad aparente (σ) (Ec. 2.14), después se asigna el valor de peso 1 si el dato está dentro del rango $(-\sigma, \sigma)$ y se asigna el peso 0.5 cuando está fuera (Ec. 2.15).

$$\bar{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_{a_i} ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\rho_{a_i} - \bar{\rho})^2} \quad \text{Ec. 2.14}$$

$$w_i = \begin{cases} 1; & |\rho_{a_i} - \bar{\rho}| \leq \sigma \\ \frac{1}{2}; & |\rho_{a_i} - \bar{\rho}| > \sigma \end{cases} ; \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad \text{Ec. 2.15}$$

2.3.4 Función de peso 3 (FP3)

La tercera función de peso también está definida a partir de la profundidad teórica del punto de atribución como la FP1, pero asigna un mayor peso a los datos asociados a mayores profundidades. El objetivo de esta función es buscar un mejor ajuste en las zonas profundas de la región de estudio para resolver con mayor aproximación el límite vertical inferior de los cuerpos anómalos.

Debido a que las técnicas de adquisición superficial de datos, especialmente la técnica perimetral, suelen generar una menor densidad de datos hacia las zonas profundas, la solución obtenida al usar esta función de peso podría resolver con mayor error la zona somera; sin embargo, si resuelve eficientemente el límite inferior de los cuerpos, podría usarse después otra función para definir la parte somera.

La asignación de pesos se hace de acuerdo con la Ec. 2.16 que normaliza en un rango de (0,1] los valores de las profundidades cuadráticas. El cálculo de la profundidad se hace utilizando la expresión de Tejero, et al. (2015) y la normalización se hace tomando como referencia el máximo valor de Z.

$$Z = z_i^2 ; \text{ para } i = 1,2,3, \dots, N$$

$$w_i = \frac{z_i^2}{z_{max}^2} ; \text{ donde } z_{max}^2 = \max(Z)$$

Ec. 2.16

2.4 Algoritmo de inversión con funciones de peso (PSO-FP)

En esta sección se detalla el diagrama de flujo del algoritmo de inversión de datos de TRE-3D completo (Fig. 11) que incluye el modelo directo, el método PSO adaptado, las funciones de peso y todos los parámetros numéricos que se utilizaron en las pruebas de validación con modelos sintéticos que se presentan en el siguiente capítulo.

Diagrama de flujo

1. Definiciones iniciales

El algoritmo comienza con las definiciones iniciales que son el tamaño del espacio solución, el número de partículas (modelos iniciales), la función objetivo, el criterio para finalizar el algoritmo, y la función de peso.

- *Espacio solución S^M* . Su tamaño queda definido por el número de parámetros del modelo directo que se van a invertir. En este trabajo son tres: la altura, la cota del centro de los prismas y su resistividad ($\Delta z, z$ y ρ); por lo tanto, el espacio solución corresponde a \mathbb{R}^3 .

Para limitar cada dimensión se debe determinar el valor mínimo y máximo que puede tomar cada parámetro de acuerdo con las características del diseño de adquisición de datos que se realice y la información geológica y

geofísica previa que se tenga. En las pruebas con modelos sintéticos y en el caso de estudio, el rango de búsqueda para los parámetros Δz y z se determinó con el valor mínimo y máximo de profundidad de los puntos de atribución de los diseños de adquisición empleados.

- *Número de partículas NP (número de modelos iniciales)*. Un número pequeño puede generar un largo tiempo de búsqueda y una solución con poca aproximación a la óptima. Por el contrario, un número grande puede provocar un tiempo de cómputo excesivo e innecesario para obtener la solución óptima. Actualmente, no existe una metodología para determinar el valor óptimo de la cantidad de modelos iniciales, así que queda a consideración del geofísico. En este trabajo se probaron los valores $N = 3, 5, 8$ y 10 . Los valores 8 y 10 permitieron obtener soluciones óptimas, así que se decidió usar 8 modelos iniciales para tener el menor tiempo de cómputo.
- *Función objetivo*. Se seleccionó la norma RMS como función de ajuste; por lo tanto, es la función que se debe optimizar para obtener su valor mínimo.
- *Criterio para finalizar el proceso iterativo*. Se decidió que todas las pruebas tengan el mismo número de iteraciones y se probaron con los valores $k_{max} = 100, 300$ y 500 . Desde el valor 100 se obtienen soluciones óptimas, así que se decidió usar dicho valor para no alargar el tiempo de cómputo.
- *Selección de la función de peso*. El algoritmo permite cuatro opciones de función de peso: Sin Función de peso (Sin FP), FP1, FP2 y FP3. En el caso de seleccionar Sin FP, el cálculo de ajuste se hace con la Ec. 1.13.

2. Lecturas y cálculos iniciales.

En este paso se leen los datos medidos de resistividad aparente y se calculan los valores de la función de peso.

- *Lectura de datos.* Se leen 10 valores por medición: 8 corresponden a las coordenadas laterales (x, y) de los electrodos A, B, M y N, el siguiente valor corresponde a la resistividad aparente medida/observada y el último valor corresponde a la profundidad teórica del cuadripolo.
- *Cómputo de los valores de peso FP_{op} .* Una vez leídos los datos observados \bar{d}_{obs} y seleccionada la opción de función de peso, se calculan los pesos $W(d_{obs})$ con la ecuación correspondiente a la función de peso escogida. Si se seleccionó la opción Sin FP, entonces se asigna un valor de peso igual a uno a todos los datos para que no se modifique la Ec. 1.13.

En lo subsiguiente, cuando se mencione el algoritmo PSO, significa que no se usó función de peso; en cambio, cuando se mencione el algoritmo PSO-FP, implica que se usó alguna de las tres funciones de peso.

3. Selección de los modelos iniciales

- Se seleccionan de forma aleatoria 8 modelos iniciales, cada uno con la forma $\bar{m}_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})$ con $i = 1, 2, \dots, 8$; donde p_{i1} toma un valor aleatorio dentro del rango de búsqueda de Δz , p_{i2} toma un valor aleatorio dentro del rango de z y p_{i3} toma un valor aleatorio en el rango de ρ . Para generar estos valores aleatorios se usó la función $rand()$ que tiene una distribución de probabilidad uniforme.

4. Cálculo de ajuste de los modelos

Este cálculo implica la generación de datos calculados de resistividad aparente para comparar con los datos observados.

- *Generación de datos calculados de resistividad aparente.* Cada modelo \bar{m}_i es evaluado en el modelo directo para obtener un conjunto de datos de resistividad aparente \bar{d}_{cal} . En total se generan 8 conjuntos de datos calculados debido a los 8 modelos iniciales.

- *Cálculo del ajuste.* Cada conjunto de datos calculados se compara con los datos observados mediante la función de ajuste RMS que considera además los valores de peso para cada dato.
5. Selección del mejor modelo particular y global.
- *Selección del mejor modelo particular.* En la primera iteración ($k = 1$), el modelo inicial \bar{m}_i de cada partícula se asigna como su mejor modelo y se guarda en la variable \bar{m}_i^{best} . En las iteraciones siguientes ($k > 1$), se compara el ajuste que tiene el modelo actual \bar{m}_i^k con el ajuste que tiene \bar{m}_i^{best} ; si el valor RMS del modelo actual es menor, entonces el modelo \bar{m}_i^k se guarda en \bar{m}_i^{best} .
 - *Selección del mejor modelo global.* En la primera iteración, se compara el ajuste de todos los modelos iniciales y se guarda en la variable \bar{m}_{best} aquel con el menor valor de RMS. En las iteraciones siguientes, se selecciona el modelo que tiene el menor valor de RMS y se compara con el ajuste del modelo guardado en \bar{m}_{best} ; se guarda el modelo con el menor valor.

6. Modificación de los modelos

En cada iteración se modifica el modelo de cada partícula para realizar la búsqueda del óptimo. La modificación se hace con la Ec. 2.7 y Ec. 2.9.

El parámetro χ toma el valor inicial 0.9 y decrece equitativamente en cada iteración hasta tomar el valor 0.4 en la última iteración. Los valores de a y b son 2.041 y 0.948 respectivamente.

El algoritmo de inversión repite los pasos 4, 5 y 6 hasta alcanzar el máximo número de iteraciones. La solución óptima es el último modelo guardado en \bar{m}_{best} .

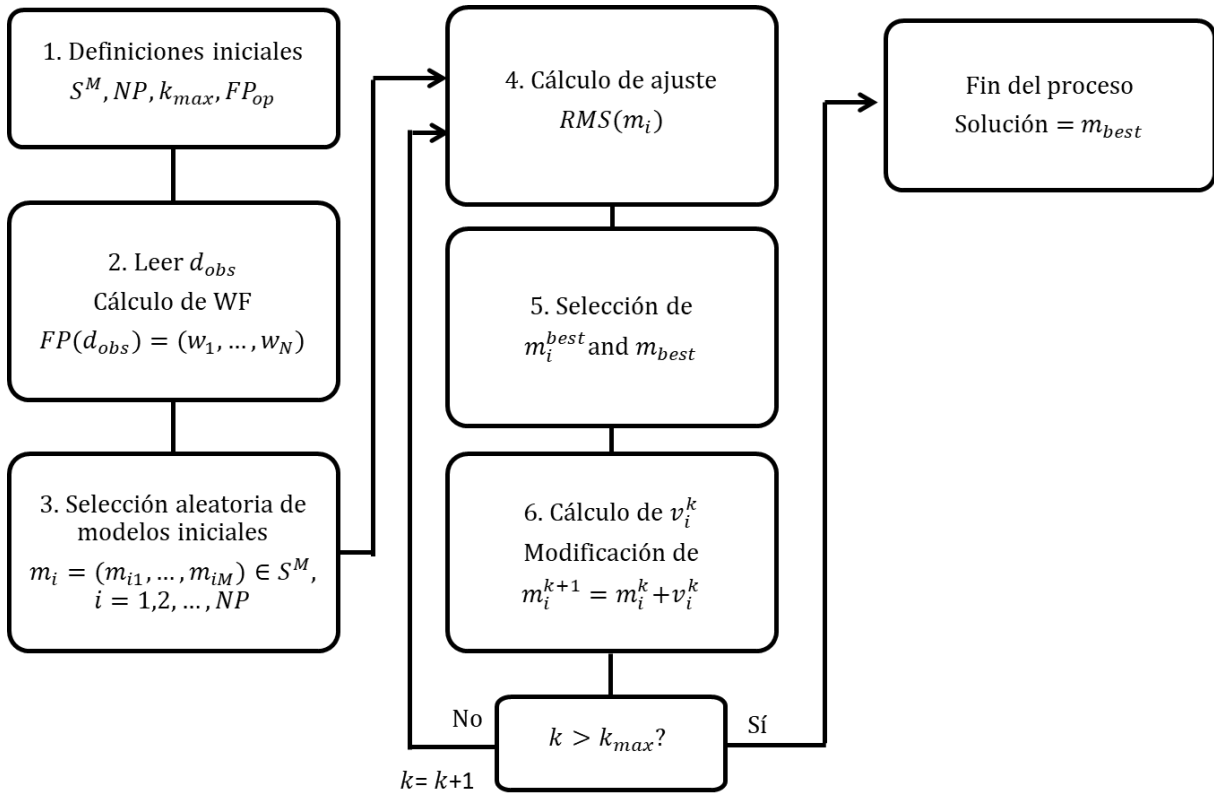


Fig. 11 Diagrama de flujo del algoritmo PSO-FP

El algoritmo de inversión creado en este trabajo es una herramienta innovadora ya que emplea por primera vez la combinación del método PSO con las funciones de peso definidas para tratar de dar solución al problema de distorsión de la anomalía en la dirección vertical y obtener una mejor solución de los parámetros verticales de los cuerpos.

En el siguiente capítulo se pone a prueba el algoritmo con dos modelos sintéticos.

3. Validación del algoritmo con modelos sintéticos

En este capítulo se pone a prueba el algoritmo de inversión descrito en la sección 2.4 usando modelos sintéticos. Para esto, primero se explicará brevemente lo que es un modelo sintético, los dos modelos sintéticos diseñados para las pruebas, así como las características de los arreglos empleados para generar los datos sintéticos ruidosos. Después, se explica la forma de agregar ruido a los datos sintéticos, los resultados de las inversiones de datos usando cada función de peso y la discusión de resultados.

3.1 Modelos sintéticos y técnicas de adquisición de datos

Un modelo sintético es un modelo hipotético y simplificado del subsuelo que se utiliza para simular la adquisición de datos de TRE-3D sobre él y tener una respuesta aproximada de lo que ocurriría en el estudio real. A los datos adquiridos a partir de modelos sintéticos se les llama datos sintéticos.

En este trabajo se utilizan 2 modelos sintéticos para simular la adquisición de datos de TRE-3D. En ambas adquisiciones se usa la técnica perimetral; después, los datos se invierten con el algoritmo PSO-FP usando cada opción de función de peso; esto con el objetivo de evaluar la efectividad de las funciones de peso en la solución de los parámetros verticales del medio.

Además de los datos sintéticos generados con la técnica perimetral, se generaron datos sintéticos con la técnica tradicional de perfiles para invertirlos con el algoritmo PSO sin las funciones de peso, esto con el fin de verificar la correcta solución de los parámetros verticales cuando se emplea dicha técnica.

3.1.1 Modelos sintéticos

Se diseñaron 2 modelos sintéticos; cada uno consiste en un semi espacio homogéneo con uno o dos prismas rectangulares enterrados. La resistividad del semi espacio en los dos modelos es $300 \Omega m$.

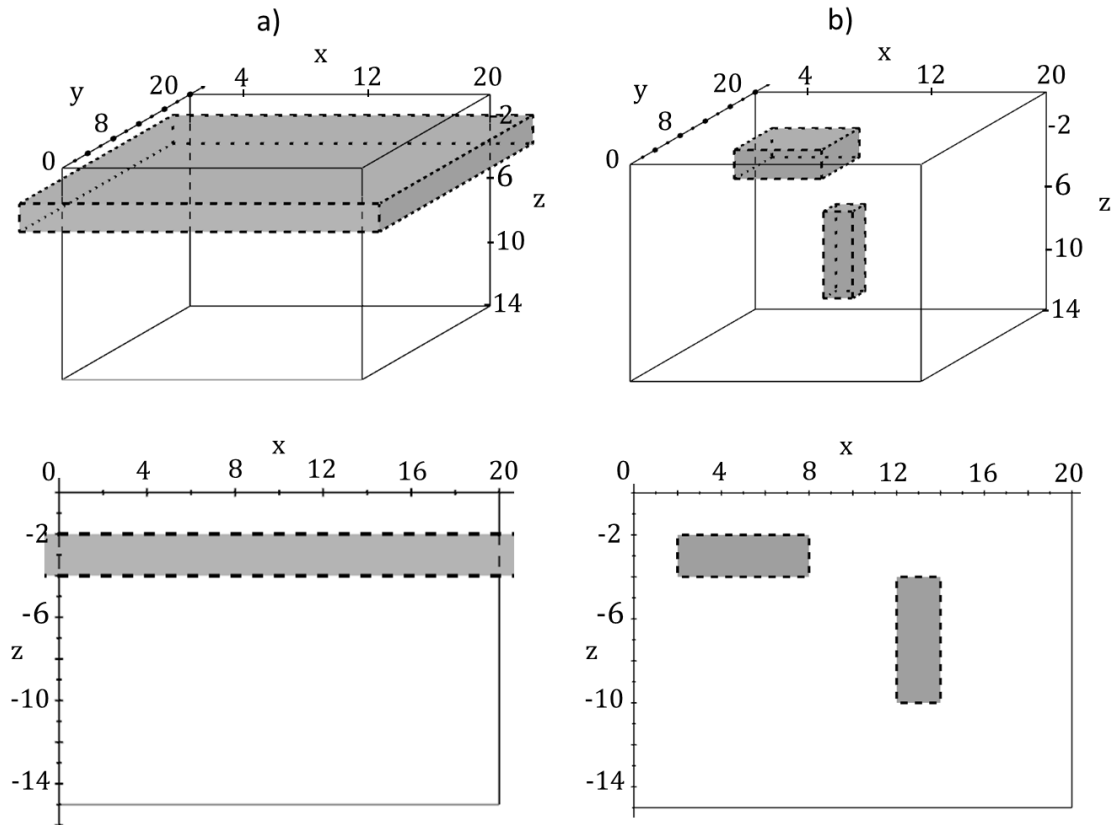


Fig. 12 Modelos sintéticos. (a) Modelo de un estrato ubicado entre los 2 y 4 metros de profundidad. (b) Modelo de dos prismas enterrados; el somero es resistivo y se ubica entre los 2 y 4 metros de profundidad, mientras el profundo es conductivo y se ubica entre los 4 y 10 metros de profundidad.

El primer modelo consiste en un estrato horizontal formado por un prisma resistivo ($500 \Omega m$) de dimensiones $60m \times 60m \times 2m$ cuyo centro está ubicado en el punto $(10m, 10m, -3m)$; lo que indica que su cara superior se encuentra a 2 metros de profundidad; por lo tanto, este medio representa una variación vertical de resistividad creada por la estructura somera (Fig. 12a).

El segundo modelo consiste en dos prismas rectangulares con diferente contraste de resistividad respecto al medio. El primer prisma es un cuerpo somero resistivo ($450 \Omega m$), ubicado a $2 m$ de profundidad. Sus dimensiones son $6m \times 6m \times 2m$ y su centro se ubica en el punto $(5m, 15m, -3m)$. El segundo prisma está enterrado dos metros más abajo, tiene una resistividad de $50 \Omega m$, sus dimensiones son $2m \times 2m \times 6m$ y su centro está en el punto $(13m, 4m, -7m)$ (Fig. 12b). Este modelo se diseñó para saber si el algoritmo en conjunto con las funciones de peso puede resolver los parámetros verticales de dos cuerpos enterrados a diferentes profundidades. Además, su inversión de datos implica resolver el doble de parámetros que los modelos anteriores.

3.1.2 Técnicas de adquisición de datos

En la técnica perimetral los electrodos pueden tomar la geometría deseada a lo largo de la periferia de la región de estudio. En este trabajo se decidió colocar 80 electrodos formando un cuadrado que cubrió un área de $20m \times 20m$. Al primer electrodo se le asignó el origen de coordenadas cartesianas y se dejó una distancia de $1 m$ entre cada par de electrodos; con ello, el último electrodo se encuentra en el punto $(20m, 20m)$.

La técnica perimetral permite la adaptación de arreglos convencionales (Wenner, Schlumberger, Dipolo-Dipolo, etc.) como no convencionales (“L”, Esquinas, etc.) y la distribución que se obtiene de cada uno es diferente e irregular. Debido a que la densidad de datos suele ser pobre en algunas zonas al utilizar la técnica perimetral; generalmente, se emplea más de un arreglo para tratar de tener información en la mayor parte posible del volumen de estudio. En este trabajo se utilizaron tres arreglos en conjunto: Esquinas, Ecuatorial Paralelo y Ecuatorial Paralelo Invertido.

El arreglo Esquinas (Fig. 13a) utiliza solo los electrodos que se encuentran sobre los dos segmentos de las líneas perpendiculares que terminan en una esquina. Un electrodo de potencial y uno de corriente se colocan al final de uno de los segmentos, mientras los otros dos se colocan al final del otro segmento para tomar la primera medida. Después, cada par de electrodos se recorre una posición hacia la esquina para realizar la siguiente medición; esto se realiza sucesivamente hasta que los dipolos se encuentran en la esquina. Una vez terminado el recorrido de los dipolos en una esquina, se repite el proceso para las tres esquinas restantes del cuadrado. Este arreglo genera una mayor densidad de datos en las esquinas someras y alrededor de la zona central.

El arreglo Ecuatorial Paralelo (Fig. 13b) utiliza los electrodos que se encuentran sobre dos líneas paralelas. Las mediciones inician asignando el primer electrodo de cada línea como electrodo de corriente y los siguientes como electrodos de potencial. Después, la asignación de los electrodos de potencial se recorre hasta llegar al final de las líneas; cuando ocurre esto, los electrodos de corriente se recorren una posición y se repite el avance de los electrodos de potencial. Una vez que se terminan las mediciones sobre un par de líneas, se realizan las mediciones sobre el restante par de líneas paralelas del cuadrado. Esta adaptación del arreglo genera dos perfiles verticales de datos perpendiculares que se cruzan en el centro de la región de estudio. Ambos tienen forma de triángulos con una mayor densidad de datos en la zona central somera.

El tercer y último arreglo adaptado es el llamado Ecuatorial Paralelo Invertido (Fig. 13c). Este arreglo es muy similar al anterior ya que también toma mediciones sobre los dos pares de líneas paralelas del cuadrado, pero se realiza un cambio en la asignación de electrodos que genera una distribución de datos diferente. La medición empieza asignando como electrodos de corriente a los dos primeros electrodos de una de las líneas mientras en la otra se asignan los electrodos de

potencial. Luego, B y N se irán recorriendo una posición hacia adelante hasta llegar al final de las líneas. Después, los electrodos A y M se recorren una posición y el proceso de medición se repite hasta que todos los electrodos lleguen al final de las líneas. Todo el proceso se realiza de igual forma en el par de líneas restante. La distribución que ofrece este arreglo es muy similar a la del arreglo Ecuatorial Paralelo, pero ahora la forma de los triángulos queda invertida, con lo cual se obtiene una mayor densidad de datos en la zona central profunda.

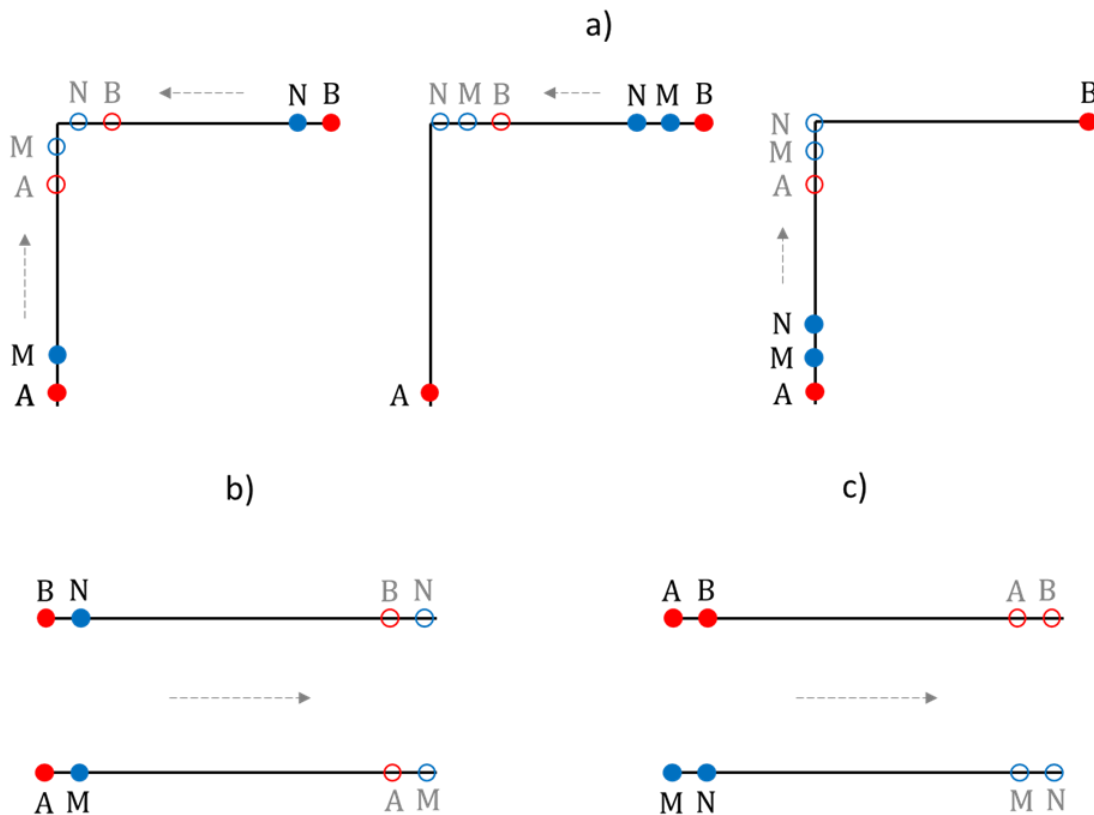


Fig. 13 En los tres arreglos los puntos rojos son los electrodos de corriente, los puntos azules rellenos son los electrodos de potencial y los círculos azules sin relleno representan las mediciones siguientes. Las flechas indican la dirección de desplazamiento de los electrodos. (a) Tres etapas del arreglo Esquinas. (b) Arreglo Ecuatorial paralelo y (c) Ecuatorial invertido.

En conjunto, los tres arreglos permiten obtener un total de 3120 mediciones (Fig. 14a); aun así, todavía hay zonas sin información, sobre todo en la parte central y en las esquinas inferiores. Es muy difícil que un solo arreglo o incluso varios arreglos

cubran todo el volumen de estudio con la técnica perimetral; por ello, es importante conocer la distribución de datos que ofrecería cada arreglo adaptado a la geometría de la línea de electrodos para poder detectar cambios de resistividad a lo largo de todo el volumen.

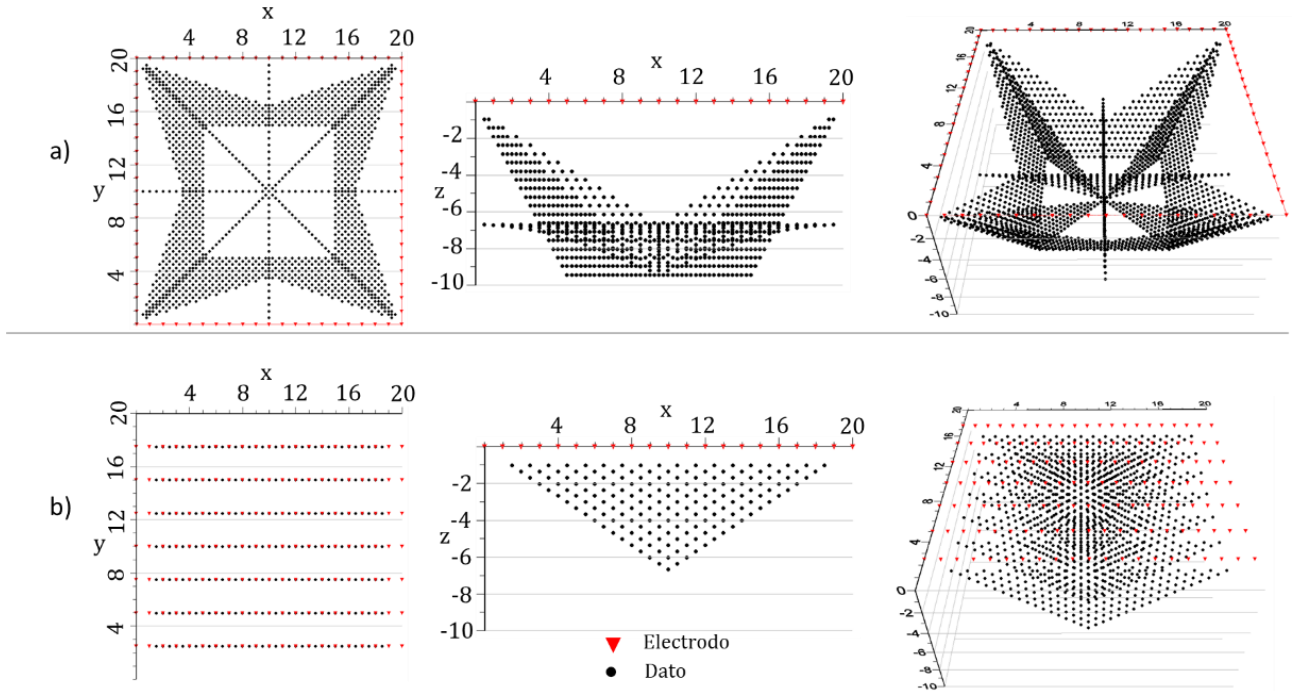


Fig. 14 Electrodo y puntos de atribución de las adquisiciones (a) perimetral ADP y (b) tradicional ADT.

Como se mencionó antes, también se usó la técnica de adquisición tradicional en perfiles para generar un conjunto de datos para cada modelo. Esta consistió en colocar los electrodos formando siete líneas paralelas sobre el medio, todas alineadas en la dirección X . Cada línea estuvo formada por 21 electrodos con una separación entre ellos de 1 m ; la separación entre cada línea fue de 2.5 m . El primer electrodo se ubicó en el punto $(0\text{ m}, 2.5\text{ m})$ y el último en el punto $(20\text{ m}, 17.5\text{ m})$; en total se usaron 147 electrodos cubriendo un área de $20\text{ m} \times 15\text{ m}$. Después, se empleó el arreglo colineal Dipolo-Dipolo sobre cada una de las 7 líneas de electrodos. La separación entre electrodos fue constante de 1 m ($a = 1$) y la separación entre dipolos inició en 1 m y aumentó en cada medición hasta 20 m . Esto se hizo sobre cada línea para

obtener un perfil de datos debajo de cada una; sin embargo, el total de 1197 datos se trabajó en conjunto (Fig. 14b).

Considerando los dos tipos de adquisición, perimetral y tradicional, cada modelo sintético cuenta con dos conjuntos de datos sintéticos, dando un total de 4 conjuntos de datos. En la siguiente sección se detalla el proceso de inversión que se realizó en los cuatro conjuntos.

3.2 Inversión de datos sintéticos

Cuando los datos que se van a invertir son sintéticos se les suele añadir una perturbación para tratar de reproducir el fenómeno de ruido presente en todas las adquisiciones reales. En este caso, el ruido se añadió a los datos de resistencia (R) obtenidos a partir de los datos de resistividad aparente mediante el despeje de R de la Ec. 1.9. Después se utilizó la Ec. 3.1 para obtener datos ruidosos de resistencia ($R_{ruidosos}$). En esta expresión, la función L devuelve números aleatorios dentro del rango $(0,1]$ y tiene una distribución normal estándar con desviación estándar igual a 2. Una vez obtenidos los datos de resistencia ruidosos, se volvió a usar la Ec. 1.9 para calcular los datos de resistividad aparente ruidosos, los cuales fueron usados en el proceso de inversión.

$$R_{ruidosos} = R(1 + 0.01L) \quad \text{Ec. 3.1}$$

Cada conjunto de datos obtenido con la técnica perimetral fue sometido al algoritmo de inversión PSO-FP cuatro veces, una por cada función de peso; mientras los datos adquiridos con la técnica tradicional solo se invirtieron con el algoritmo PSO sin funciones de peso.

En todos estos procesos se usaron los parámetros numéricos detallados en la sección 2.4.

Por otra parte, también se llevó a cabo la inversión de los datos con un algoritmo comercial (Geoestudi Aster and Multiphase Technologies LLC 2006) que emplea el método de inversión determinístico Mínimos Cuadrados con una regularización de Tikhonov y el método numérico Elementos Finitos como solución del problema directo; en las siguientes páginas se hará referencia a él como algoritmo MC-EF. Lo anterior se hizo con el único fin de mostrar el marcado efecto de afloramiento en las inversiones de datos adquiridos con la técnica perimetral usando este método de inversión. Los parámetros numéricos empleados con este software se definen en el anexo 2.

A continuación, se presentan las soluciones agrupadas por modelo sintético. La solución del algoritmo PSO para el modelo 1 consiste en los valores de los parámetros Δz , z y ρ del estrato; en cambio, la solución del modelo 2 son seis parámetros debido a los dos prismas enterrados. Con el fin de tener una comparativa visual de la solución obtenida y los parámetros exactos, también se realizó una imagen que superpone el modelo correcto y la solución óptima obtenida. Los resultados de las inversiones con el algoritmo MC-EF fueron visualizados con la herramienta *Viewer* del mismo software (Geoestudi Aster and Multiphase Technologies LLC 2006).

Debido a que en los siguientes párrafos se hace mención muchas veces a los datos adquiridos con la técnica tradicional y a los datos adquiridos con la técnica perimetral, se hará referencia a ellos como datos DAT y datos DAP, respectivamente.

3.3 Resultados modelo 1 (estrato)

La Tabla 1 contiene la solución de la inversión de los datos DAT y DAP usando el algoritmo PSO sin las funciones de peso. En la primera columna están los parámetros correctos, en la segunda columna la solución de la inversión de los datos DAP y en la tercera columna la solución de la inversión de los datos DAT; además del valor RMS calculado con la Ec. 1.13 en cada caso. Por otro lado, la Fig. 15 presenta cuatro

imágenes que corresponden a la visualización gráfica de los modelos solución obtenidos del algoritmo MC-EF y el algoritmo PSO.

Modelo 1 - estrato: Parámetros correctos	DAP	DAT
$\Delta z = 2.0 \text{ m}$	$\Delta z = 4.86 \text{ m}$	$\Delta z = 2.18 \text{ m}$
$z = -3.0 \text{ m}$	$z = -3.83 \text{ m}$	$z = -3.08 \text{ m}$
$\rho = 500 \Omega\text{m}$	$\rho = 208 \Omega\text{m}$	$\rho = 462 \Omega\text{m}$
	RMS=3.93%	RMS=4.09%

Tabla 1. Parámetros solución de la inversión de datos del modelo del estrato sin FP. En la primera columna están los parámetros correctos del modelo; mientras en la segunda y tercera columna están los parámetros solución obtenidos de la inversión a los datos DAP y DAT, respectivamente, con el algoritmo PSO sin FP.

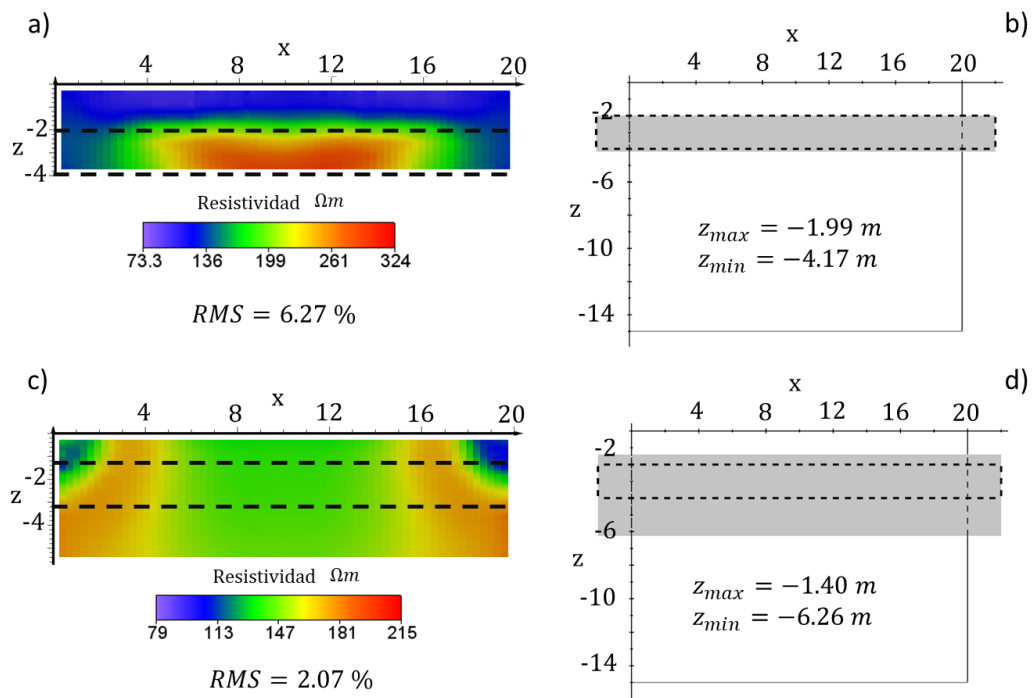


Fig. 15. Imágenes de las soluciones obtenidas para el modelo del estrato. a) Perfil en $y = 10\text{m}$ del modelo inverso de los datos DAT con MC-EF. b) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAT con PSO. c) Perfil en $y = 10\text{m}$ del modelo inverso de los datos DAP con MC-EF. d) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAP con PSO.

La Fig. 15a corresponde al perfil ($y = 10 \text{ m}$) de la TRE-3D de los datos DAT obtenida con el algoritmo MC-EF. En ella se observa una variación de resistividades dentro del rango $[73 \Omega\text{m}, 324 \Omega\text{m}]$, asignando el menor valor (color azul) a lo que parece el medio encajonante y el mayor valor (color rojo) a la anomalía central. Debido a este contraste se nota un contacto vertical bien delimitado a los 2 m de profundidad donde inicia un cuerpo resistivo que abarca hasta los 4 m de profundidad; sin embargo, con esta imagen no es posible determinar la altura del cuerpo resistivo porque la profundidad máxima que resuelve el algoritmo son 4 m ; así que no hay más información a mayor profundidad. Respecto a la variación lateral, parece que el cuerpo se ubica entre los 4 m y 16 m aproximadamente en la dirección X . Comparando con el modelo correcto, se concluye que detecta la anomalía del estrato y calcula correctamente la profundidad de su cara superior, pero no los valores correctos de resistividad del estrato ni del medio; además, con esta solución no se puede conocer la altura del cuerpo anómalo.

La Fig. 15b se hizo con los parámetros solución obtenidos de la inversión PSO-sin FP. En este caso la solución presenta una capa resistiva ($462 \Omega\text{m}$) de 2 m de altura ubicada entre los 2 m y 4 m de profundidad. Por lo tanto, se puede concluir que se calcularon casi de forma exacta los parámetros; aun así, hay un valor de 4.09% de RMS.

Respecto al efecto de afloramiento, no se presenta en estos dos casos de inversión.

La Fig. 15c es el perfil $y = 10 \text{ m}$ de la TRE-3D obtenida de los datos DAP con el algoritmo MC-EF. En ella se observa una variación lateral de resistividad dentro del rango $[79 \Omega\text{m}, 215 \Omega\text{m}]$ predominando el valor $\rho = 147 \Omega\text{m}$ en la parte central, entre los 4 m y 16 m en la dirección X , y volviéndose ligeramente más resistivo ($\rho = 181 \Omega\text{m}$) hacia los extremos laterales, con excepción de las esquinas superiores donde se tiene el menor valor de resistividad. Comparando este resultado con el modelo exacto, se concluye que se detecta un cuerpo anómalo que causa la variación de resistividad,

pero no se resuelve la forma, ubicación ni resistividad del cuerpo o el medio encajonante. Además, es bastante claro el efecto de afloramiento de la anomalía central que continua hasta la superficie.

La Fig. 15d es la representación gráfica de la solución óptima de los datos DAP con el algoritmo PSO comparada con la solución exacta. Se observa que la solución calcula un estrato más grueso, localizándolo entre los 1.4 m y 6.2 m de profundidad; además calcula una resistividad menor incluso que el medio, lo cual lo convierte en un cuerpo conductor respecto al medio de $\rho = 300 \Omega m$. Se concluye que no resuelve el carácter resistivo del estrato ni su altura, pero se sí calcula de forma óptima la profundidad de su cara superior, lo que implica que no hay efecto de afloramiento.

A continuación, se presentan las soluciones de las inversiones con el algoritmo PSO-FP de los datos DAP.

La Tabla 2 contiene las soluciones obtenidas con cada función de peso. En este caso los valores se agrupan por función de peso y contienen los valores óptimos obtenidos y su valor RMS.

La Fig. 16 contiene las representaciones gráficas de los modelos solución obtenidos con cada FP (rectángulos sombreados en gris) y su comparación con el modelo correcto (rectángulos en línea punteada negra).

La solución de la FP1 (Fig. 16a) identifica el estrato como un cuerpo conductor respecto al medio porque le asigna una resistividad de $237 \Omega m$ y calcula el doble de altura del estrato; sin embargo, ubica la cara superior del estrato a 1.6 m de profundidad. Se concluye que no resuelve su carácter resistivo ni su altura, pero presenta una mejoría de 0.2 m en el cálculo de su profundidad respecto a la solución sin FP y no presenta efecto de afloramiento.

La solución de la FP2 (Fig. 16b) tiene un error de 0.48 m en el cálculo del grosor del estrato y un error de 0.11 m en la profundidad de su centro; esto lo ubica entre los 1.8

m y $4.3 m$ de profundidad. Además, le asigna un valor de resistividad de $367 \Omega m$, lo cual lo convierte en un cuerpo ligeramente resistivo respecto al medio de $300 \Omega m$. Se concluye que la solución identifica el carácter resistivo del estrato y calcula casi de forma precisa sus parámetros verticales; esto lo convierte en la mejor solución de las cuatro.

Finalmente, la solución de la FP3 (Fig. 16c) devuelve un estrato de $4.38 m$ de grosor, lo cual es un poco más del doble del valor correcto; lo ubica entre los $1.55 m$ y $5.93 m$ y lo define como un cuerpo ligeramente conductivo respecto al medio, al igual que la FP1. Esto indica que no resuelve su carácter resistivo ni su grosor, pero no lo alarga hasta la superficie.

Modelo 1 - estrato. Parámetros correctos			
$\Delta z = 2.0 m \quad z = -3.0 m \quad \rho = 500 \Omega m$			
	FP1	FP2	FP3
Solución	$\Delta z = 4.02 m$ $z = -3.66 m$ $\rho = 237 \Omega m$	$\Delta z = 2.48 m$ $z = -3.11 m$ $\rho = 367 \Omega m$	$\Delta z = 4.38 m$ $z = -3.74 m$ $\rho = 222 \Omega m$
RMS	3.51%	2.24%	3.55%

Tabla 2. Parámetros solución de la inversión de datos DAP del modelo del estrato con cada FP.

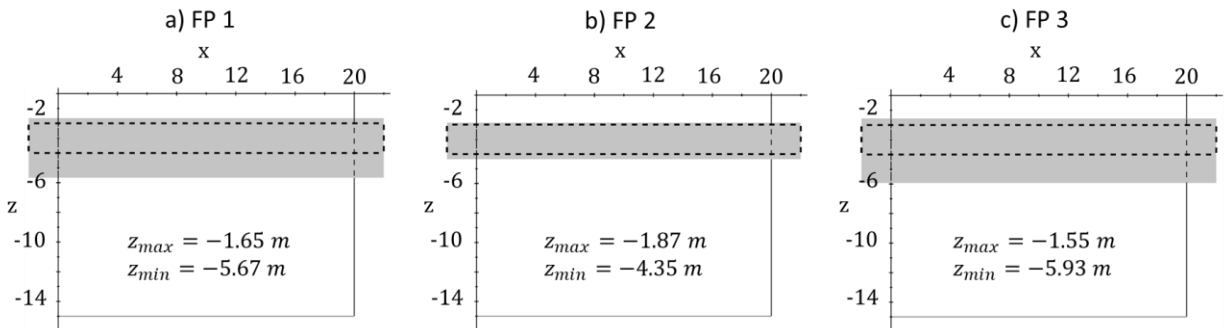


Fig. 16 Vista frontal de los modelos solución obtenidos de la inversión de los datos DAP con el algoritmo PSO-FP. En cada modelo se indican las coordenadas Z mínima y Z máxima del estrato; con esto se limita verticalmente el prisma.

3.4 Resultados modelo 2 (dos prismas enterrados)

Los resultados del modelo 2 también se dividen en dos tablas y dos figuras que corresponden a los resultados de las inversiones sin funciones de peso y las soluciones con cada FP.

La Tabla 3 contiene la solución de la inversión de los datos DAT y los datos DAP con el algoritmo PSO sin usar las funciones de peso. En la primera columna están los parámetros correctos, en la segunda columna los parámetros obtenidos en la inversión de datos DAP y en la tercera columna la solución de la inversión de los datos DAT, además del valor RMS. Por otro lado, la Fig. 17 presenta cuatro imágenes que corresponden a la visualización gráfica de los modelos solución obtenidos del algoritmo MC-EF y el algoritmo PSO.

La Fig. 17a corresponde al perfil ($y = 15 \text{ m}$) de la TRE-3D de los datos DAT obtenida con el algoritmo MC-EF. En ella se observa una variación de resistividades dentro del rango $[256 \Omega\text{m}, 425 \Omega\text{m}]$. En esta variación se identifica una anomalía resistiva $[\rho \geq 383 \Omega\text{m}]$ en color rojo ubicada entre los 2 m y 4 m de profundidad y limitada lateralmente entre los 2 m y 8 m en la dirección X. Con esta imagen tampoco es posible determinar la altura del cuerpo resistivo porque la profundidad máxima del estudio que resuelve el algoritmo son 4 m ; así que no hay más información a mayor profundidad. Comparando con el modelo correcto, se concluye que detecta la anomalía del prisma somero, calcula correctamente sus dimensiones y su carácter resistivo ya que obtiene un valor aproximado de su resistividad. Por el contrario, no detecta para nada el prisma profundo porque el estudio no llega a la profundidad donde se encuentra.

En la Fig. 17b se superpone la solución óptima del algoritmo PSO (rectángulo gris) y el modelo correcto (línea punteada). Esta solución calcula prácticamente de forma precisa los parámetros correctos del prisma somero, pero falla en resolver la dimensión y ubicación del prisma profundo, aunque sí lo define como un cuerpo

conductivo respecto al medio. Se concluye que el método PSO sin funciones de peso ofrece una solución precisa en los datos DAT para los cuerpos someros.

Aunado a lo anterior, en estos dos casos tampoco se presenta el efecto de afloramiento.

La Fig. 17c también corresponde al perfil $y = 15 \text{ m}$ de la TRE-3D obtenida de los datos DAP con el algoritmo MC-EF. En ella se observa una variación lateral de resistividad dentro del rango $[275 \Omega\text{m}, 363 \Omega\text{m}]$ predominando el rango $[300 \Omega\text{m}, 320 \Omega\text{m}]$, es decir, la resistividad del medio impera en los valores observados. La mayor variación se presenta con una anomalía de tipo conductiva en la zona somera entre los 10 m y 14 m en la dirección X , pero si se compara con el modelo correcto, esta anomalía no corresponde a ningún cuerpo del medio, por lo tanto, es un error en la TRE-3D. Por otro lado, se observa una ligera variación de resistividad en la parte izquierda superior de la imagen, entre los 2 m y 7 m en X con un valor aproximado de $330 \Omega\text{m}$ que podría deberse al prisma somero, pero es prácticamente indistinguible; aunque el contraste lateral de resistividad es indicio de la presencia de un cuerpo anómalo. Respecto al efecto de afloramiento, solo puede considerarse presente si se asocia la anomalía de $330 \Omega\text{m}$ con el prisma somero.

La Fig. 17d corresponde a la solución óptima de los datos DAP con el algoritmo PSO comparada con el modelo exacto. La solución calcula la altura del prisma somero con un error de casi 1 m y lo ubica entre 1.4 m y 4.3 m de profundidad; además, lo define como un cuerpo resistivo y obtiene un valor de resistividad bastante aproximado al exacto. En cambio, no logra definir la ubicación del prisma profundo, aunque si su carácter conductivo y su dimensión en Z con apenas un error de 0.19m . Por lo anterior, se puede concluir que no hay efecto de afloramiento.

Modelo 2 – Dos prismas enterrados: Parámetros correctos	DAP	DAT
$\Delta z_1 = 2.0 \text{ m}$	$\Delta z_1 = 2.93 \text{ m}$	$\Delta z_1 = 2.16 \text{ m}$
$z_1 = -3.0 \text{ m}$	$z_1 = -2.93 \text{ m}$	$z_1 = -3.11 \text{ m}$
$\rho_1 = 450 \Omega\text{m}$	$\rho_1 = 402 \Omega\text{m}$	$\rho_1 = 432 \Omega\text{m}$
$\Delta z_2 = 6.0 \text{ m}$	$\Delta z_2 = 6.19 \text{ m}$	$\Delta z_2 = 0.57 \text{ m}$
$z_2 = -7.0 \text{ m}$	$z_2 = -10.45 \text{ m}$	$z_2 = -17.09 \text{ m}$
$\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$	$\rho_2 = 158 \Omega\text{m}$	$\rho_2 = 169 \Omega\text{m}$
RMS	1.998%	1.998%

Tabla 3 Parámetros solución de la inversión de datos del modelo 2 sin FP. En la primera columna están los parámetros correctos del modelo; mientras en la segunda y tercera columna están los parámetros solución obtenidos de la inversión a los datos DAP y DAT, respectivamente, con el algoritmo PSO sin FP.

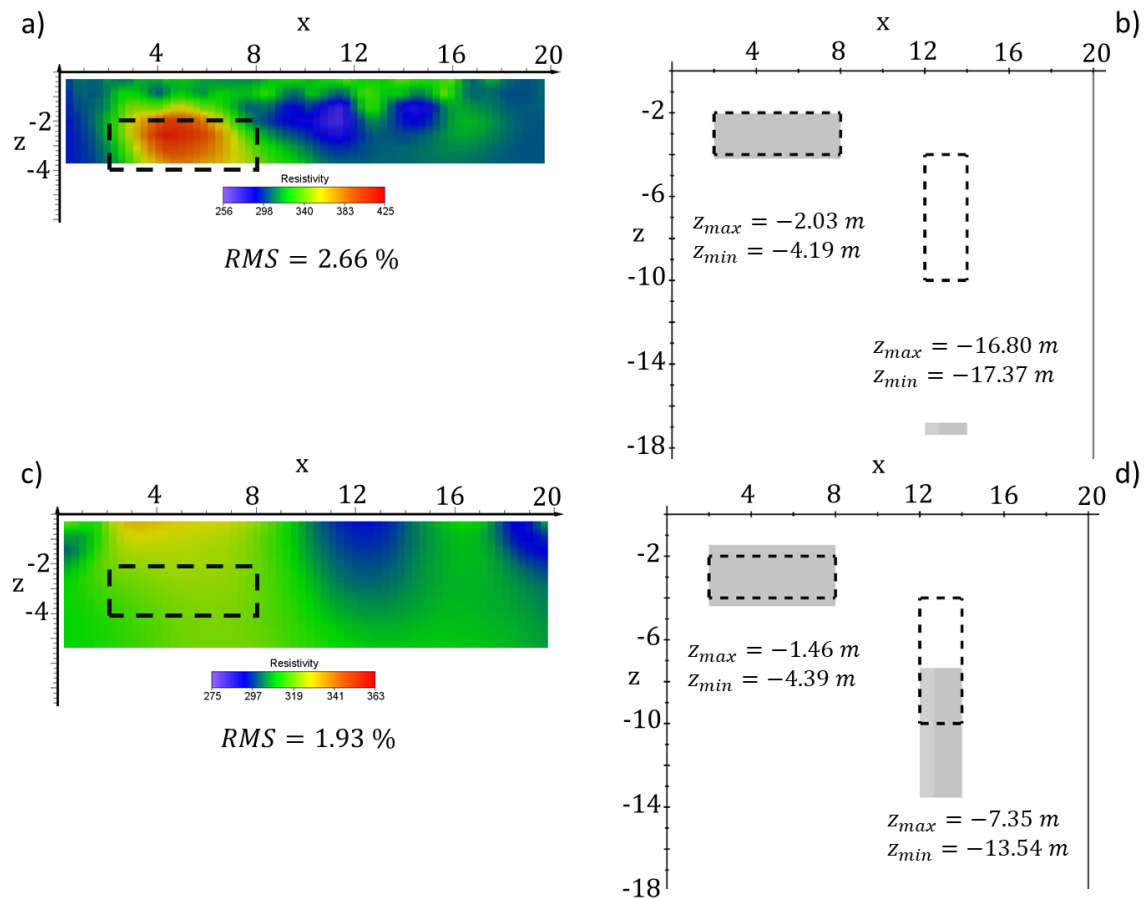


Fig. 17. Imágenes de las soluciones obtenidas para el modelo 2. a) Perfil en $y = 15 \text{ m}$ del modelo inverso de los datos DAT con MC-EF. b) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAT con PSO. c) Perfil en $y = 15 \text{ m}$ del modelo inverso de los datos DAP con MC-EF. d) Vista frontal del modelo inverso de los datos DAP con PSO.

A continuación, se presentan las soluciones de las inversiones de los datos DAP con el algoritmo PSO-FP.

La Tabla 4 contiene las soluciones obtenidas con cada función de peso. En este caso los valores se agrupan por función de peso y contienen los valores óptimos obtenidos y su valor RMS.

La Fig. 18 contiene las representaciones gráficas de los modelos solución obtenidos con cada FP (rectángulos sombreados en gris) y su comparación con el modelo correcto (rectángulos en línea punteada negra).

La solución de la FP1 (Fig. 18a) resuelve al prisma somero con un poco más del doble de su tamaño correcto ubicándolo entre los 1.2 *m* y 5.4 *m* de profundidad y calcula una resistividad de 364 Ωm que, aunque le asigna un carácter resistivo respecto al medio, está lejos de su valor correcto. Respecto al prisma profundo, sí determina su carácter conductivo respecto al medio, pero de nuevo este valor está lejos de ser el correcto. La dimensión que se obtiene es casi 2 *m* mayor que la correcta, pero su tamaño y ubicación son los mejores obtenidos en todas las inversiones por mucho. Respecto al efecto de afloramiento, se puede concluir que no ocurre, aunque ambos prismas están ubicados a menor profundidad que el modelo correcto.

La solución de la FP2 (Fig. 18b) presenta el mayor error. Tiene un error de 4.55 *m* en la altura del prisma somero y lo ubica a 1 *m* de profundidad, que es la menor profundidad obtenida en todas las inversiones; además, calcula el menor valor de resistividad. Respecto al prisma profundo, subestima su tamaño, lo coloca a una menor profundidad y calcula un valor completamente errado de resistividad. Se puede decir que, de todas las características del medio, solo resuelve el carácter levemente resistivo del prisma somero. En este caso, aunque los prismas no continúan hasta la superficie, si parecen ubicarse muy cerca de la superficie.

Finalmente, la solución de la FP3 (Fig. 18c) tiene la mejor solución del prisma somero incluyendo a la solución de la inversión sin FP. Por el contrario, presenta la peor solución del prisma profundo porque lo define como el cuerpo más resistivo, de mucho menor tamaño y lo ubica a una menor profundidad.

Modelo 2 – Dos prismas enterrados. Parámetros correctos			
Prisma somero: $\Delta z_1 = 2m$ $z_1 = -3m$ $\rho_1 = 450 \Omega m$			
Prisma profundo: $\Delta z_2 = 6m$ $z_2 = -7m$ $\rho_2 = 50 \Omega m$			
	FP1	FP2	FP3
Soluciones	$\Delta z_1 = 4.25m$ $z_1 = -3.35m$ $\rho_1 = 364 \Omega m$	$\Delta z_1 = 6.55m$ $z_1 = -4.28m$ $\rho_1 = 340 \Omega m$	$\Delta z_1 = 2.1m$ $z_1 = -2.84m$ $\rho_1 = 424 \Omega m$
	$\Delta z_2 = 7.74m$ $z_2 = -7.10m$ $\rho_2 = 261 \Omega m$	$\Delta z_2 = 3.95m$ $z_2 = -4.26m$ $\rho_2 = 761 \Omega m$	$\Delta z_2 = 3.55m$ $z_2 = -2.61m$ $\rho_2 = 667 \Omega m$
RMS	1.992%	1.998%	1.991%

Tabla 4 Parámetros solución de la inversión de datos DAP del modelo 2 con cada FP.

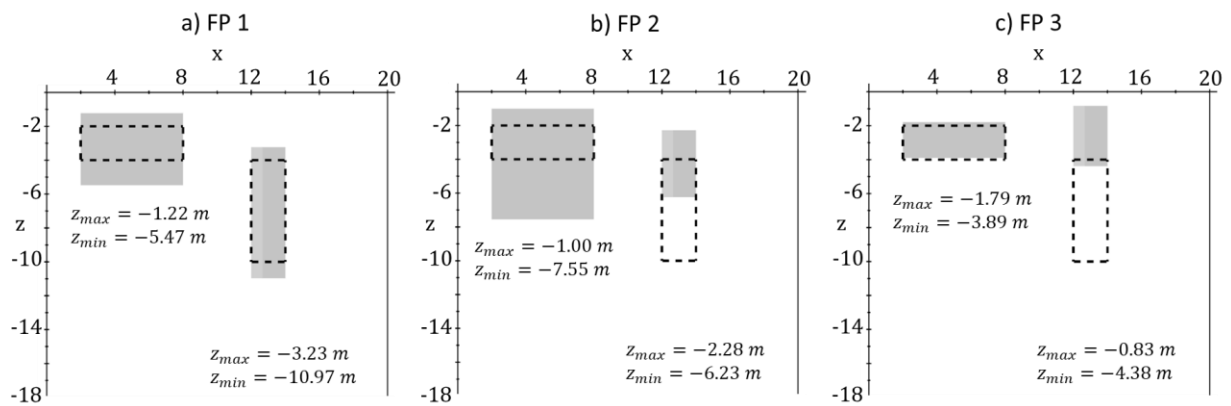


Fig. 18. Vista frontal de los modelos solución obtenidos de la inversión de los datos DAP con el algoritmo PSO-FP. En cada modelo se indican las coordenadas Z mínima y Z máxima de los prismas con el fin de limitarlos verticalmente.

4. Caso de estudio

En 2014, se llevó a cabo un estudio de TRE-3D en la zona arqueológica de Chichén Itzá, Yucatán México. El estudio, publicado en Chávez, et al., (2018), realizó dos TRE-3D con la técnica de adquisición perimetral para caracterizar el subsuelo debajo de dos pirámides mayas, la pirámide de Kukulcán y la pirámide del Osario. La tomografía hecha en la pirámide del Osario tuvo como objetivo probar la efectividad de la técnica perimetral para detectar una caverna conocida que fue explorada previamente. La caverna se encuentra en un estrato sedimentario calcáreo horizontal de origen marino que es parte de los primeros 120 m de roca caliza cavernosa masiva recristalizada con buena permeabilidad y que impera en la zona (Durán y Méndez, 2010).

En 1897, Edward H. Thompson, dueño de la Hacienda Chichén que incluía en aquel entonces la zona arqueológica de Chichén Itzá, realizó una exploración en la caverna debajo de la pirámide del Osario; sus hallazgos fueron escritos después en Thompson y Thompson (1938). El artículo contiene la descripción de la caverna, así como de los artefactos encontrados a lo largo de ella y una posible explicación del uso con enfoque religioso que se le atribuye los antiguos mayas. Respecto a la caverna, esta se puede describir en cuatro secciones (Fig. 19a). La primera, llamada sección A, indica que el descenso comienza en la cima de la pirámide donde inicia un túnel vertical que termina al nivel de la superficie del suelo; después le sigue la sección B, con una escalinata de aproximadamente 3 metros de profundidad que finaliza en la boca de la caverna. Los siguientes 15 metros de la caverna se describen con forma de botella, como se observa en la sección C, y después aumenta mucho su tamaño para tomar una forma más irregular como la mostrada en la sección D. De esta última sección no hay descripción de sus dimensiones. Aunque con el paso del tiempo la Hacienda Chichén se convirtió en la zona arqueológica de Chichén Itzá a cargo del Instituto Nacional de Antropología e Historia (INAH) y se han realizado diversas

exploraciones en la zona, la descripción más detallada de la caverna debajo de la pirámide del Osario sigue siendo la presentada en Thompson y Thompson en 1938; por ello, el estudio de 2014 utilizó esta información para cotejar los resultados de la TRE-3D.

La implementación de la técnica perimetral en el estudio de 2014 consistió en colocar 72 electrodos en el suelo alrededor de la pirámide dejando una distancia entre electrodos de 2.5 m; con ello se formó un cuadrado de 45 m × 45 m. Los arreglos que se adaptaron a esta geometría fueron el Wenner-Schlumberger-Perimetral (WSP), el arreglo Mínimo Acoplamiento (MA) y el Wenner-Schlumberger-Gradiente (WSG); con ellos se obtuvo un total de 3976 mediciones distribuidas irregularmente a lo largo de la región de estudio (Fig. 19b y c). De acuerdo con la profundidad teórica de cada arreglo, el dato más somero se encuentra a 3.7 m, mientras el más profundo está a 21.2 m.

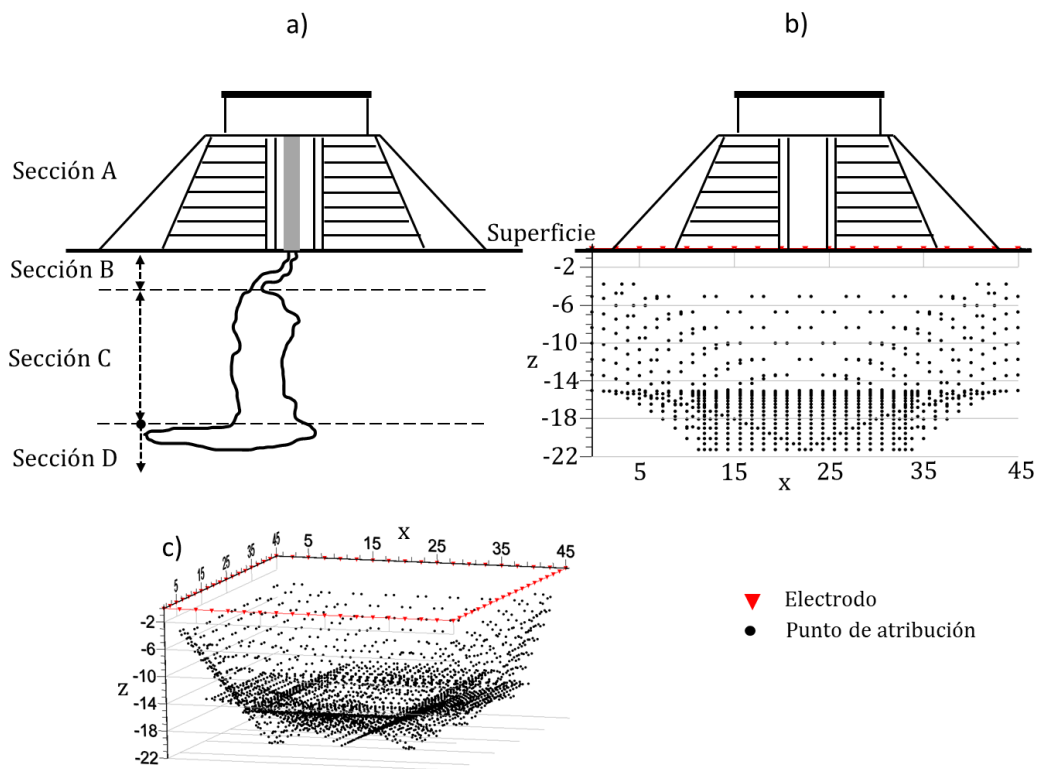


Fig. 19 a) Esquema de la caverna reportada por Thompson & Thompson (1938). B) Vista frontal y c) vista 3D de la distribución de los 3976 datos con los arreglos WSP, MA y WSG.

La Fig. 20 se compone de una TRE-3D y una iso-superficie de resistividad ($\rho = 190 \Omega m$) creada a partir del modelo solución de Chávez, et al., (2018) presentada en el estudio de 2014. En ella se aprecia con claridad el contraste de resistividad que corresponde a la caverna y el medio; por lo tanto, se concluyó que la técnica perimetral permite la identificación de anomalías resistivas en el subsuelo. Sin embargo, también se aprecia el efecto de afloramiento que hace parecer que la anomalía debida a la caverna continua hasta la superficie; esto imposibilita conocer de forma certera la dimensión y posición correcta de la caverna en la dirección vertical.

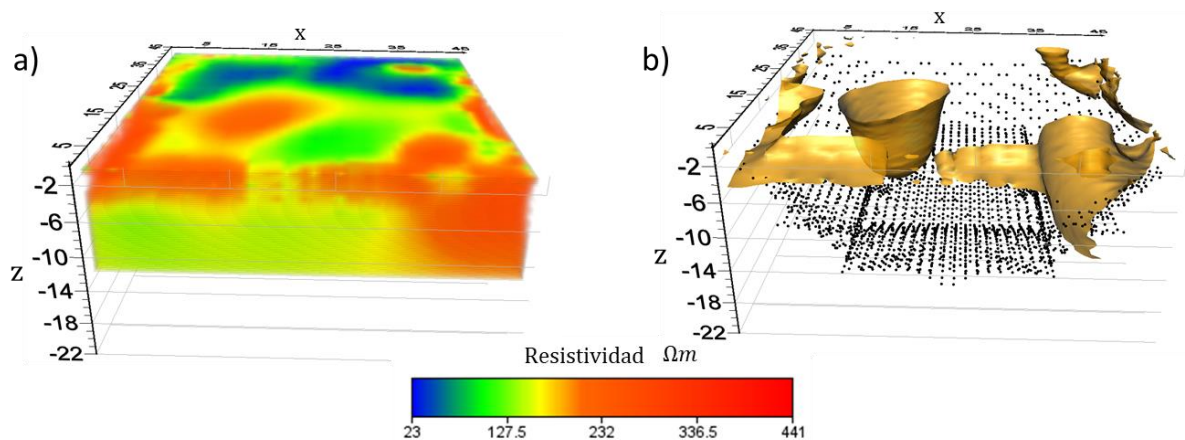


Fig. 20 TRE-3D e iso-superficie en $\rho=190 \Omega m$ del subsuelo de la pirámide del Osario, generada a partir de la solución obtenida en el estudio de 2014.

En este trabajo se utiliza como referencia el modelo del subsuelo obtenido en el estudio de 2014 para invertir nuevamente los datos reales con el algoritmo PSO y cada una de las opciones de función de peso con el fin de resolver con menor error los parámetros verticales de la caverna. Para ello se utilizó el modelo de un prisma enterrado en un medio homogéneo de resistividad $130 \Omega m$ que corresponde al valor promedio de resistividad aparente de los datos observados. Las dimensiones del prisma en las direcciones X y Y fueron determinadas a partir de las vistas laterales de

la TRE-3D (Fig. 21) que muestran un contraste de resistividad lateral; en la dirección X se estimó un ancho de 12 m, mientras en la dirección Y se estimó un valor de 15 m. Estos valores se dejaron fijos en el proceso de inversión para solo invertir Δz , z y ρ .

La Tabla 5 contiene los valores de los parámetros numéricos del algoritmo PSO que se usaron en las inversiones con cada función de peso.

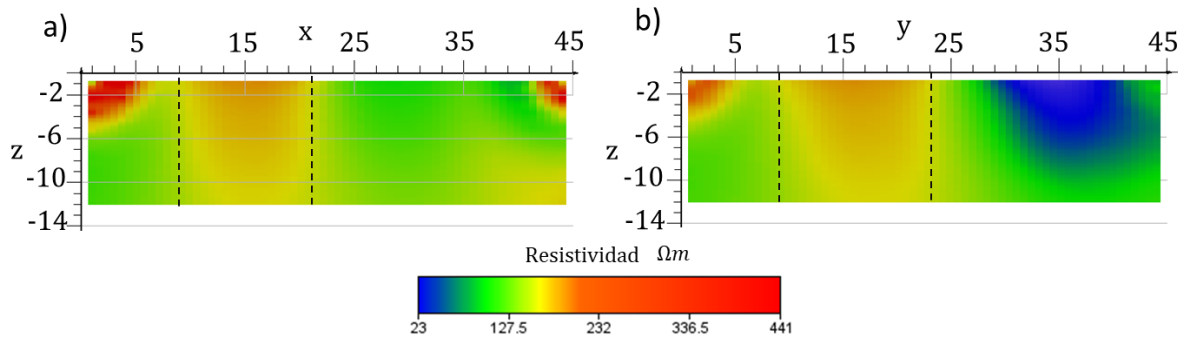


Fig. 21 Tomografía 2D tomada a partir de la TRE-3D en las cuales se observan los perfiles a) $y = 17$ m y b) $x = 15$ m.

Espacio solución			Partículas	Iteraciones máx	Valor inicial χ
Δz	z	ρ	50	100	0.7
[mín, máx]	[mín, máx]	[mín, máx]			
[0, 20 m]	[-20 m, -1.5m]	[1 Ωm , 1000 Ωm]			

Tabla 5 Parámetros de la inversión de los datos reales con el algoritmo PSO-FP.

Los resultados de cada inversión se presentan en la Tabla 6 y la Fig. 22. De las cuatro soluciones, la FP1 y la FP2 ubican la cara superior del prisma a una profundidad muy cercana a los 3 metros, la cual es la registrada por Thompson y Thompson (1938). Por otro lado, aunque la función FP3 y la inversión sin FP devuelven los valores más distantes a los registrados en por Thompson y Thompson (1938), la diferencia es menor a 1 metro. Respecto a la cara inferior del prisma que correspondería al límite

inferior de la caverna, prácticamente todas las soluciones la ubican a una profundidad de 20 m, teniendo solo una diferencia de 50 cm entre los valores mínimo (20.27 m) y máximo (20.77 m) calculados. Por último, todas las soluciones identifican una anomalía resistiva respecto al medio y le asignan valores entre los 737 Ωm y 914 Ωm ; lo cual es razonable, dado que el aire es un medio altamente resistivo.

Un aspecto importante por señalar es que en todas las soluciones se tiene un alto valor de RMS [34%-37%]. Estos valores serían inaceptables en otros contextos. Sin embargo, en este trabajo, al modelar únicamente la anomalía producida por la caverna con un solo prisma rectangular en un medio homogéneo para representar todo el subsuelo, es de esperarse valores altos de RMS porque un solo prisma no puede representar todas las variaciones que en realidad están presentes en el subsuelo. Aun así, al enfocarse únicamente en la anomalía más grande que corresponde a la caverna, se pudieron resolver las características geométricas en la dirección vertical con mayor aproximación a la realidad.

Osario. Parámetros correctos: $\Delta z = 15m \quad z = -10.5m \quad \rho = 1000 \Omega m$				
	Sin FP	FP1	FP2	FP3
Solución	$\Delta z = 18m$	$\Delta z = 17.4m$	$\Delta z = 17.7m$	$\Delta z = 18.2m$
	$z = -11.3m$	$z = -12m$	$z = -11.7m$	$z = -11.1m$
	$\rho = 798 \Omega m$	$\rho = 914 \Omega m$	$\rho = 830 \Omega m$	$\rho = 737 \Omega m$

Tabla 6 Parámetros solución de la inversión de los datos del Osario con el algoritmo PSO y cada FP.

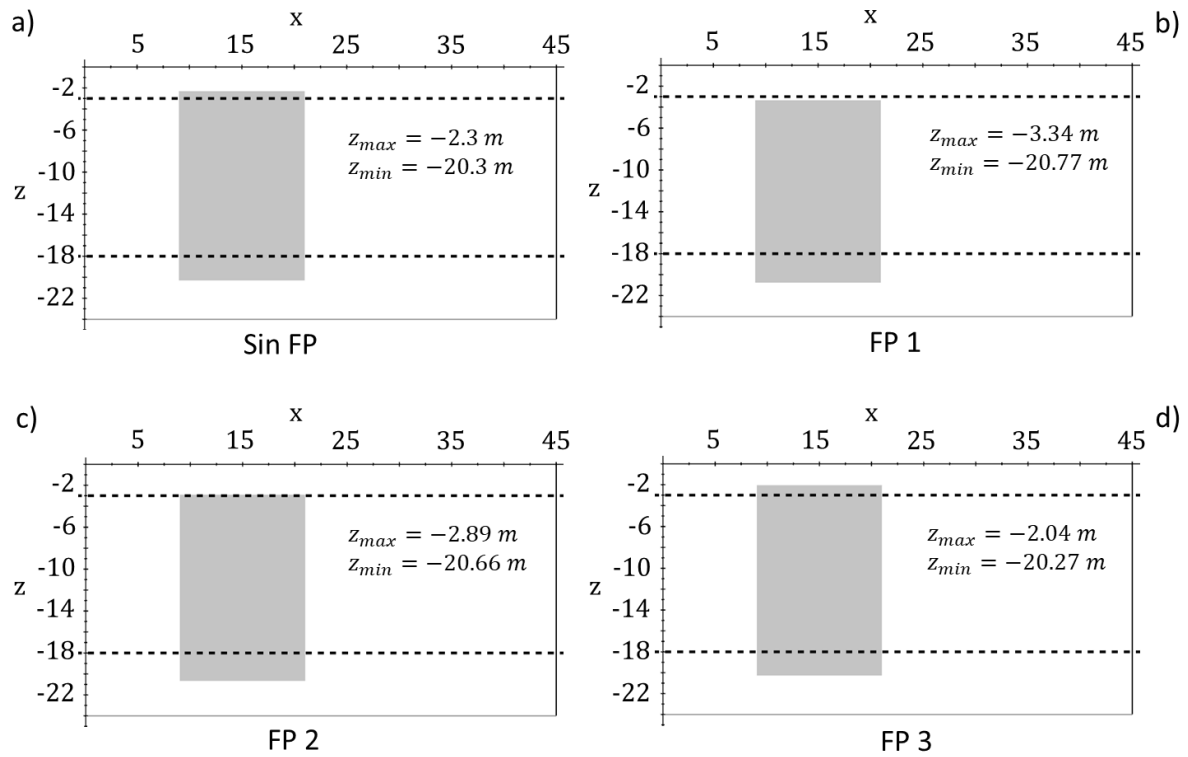


Fig. 22 Vista frontal de los modelos solución obtenidos de la inversión de los datos del Osario con el algoritmo PSO-FP. En cada modelo se indican las coordenadas Z mínima y Z máxima del prisma que representa la sección C de la caverna.

5. Conclusiones

Las inversiones de los datos adquiridos con la técnica tradicional de perfiles mostraron que con ambos algoritmos de inversión (MC-EF y PSO sin FP) se logra caracterizar de forma adecuada los cuerpos presentes en la región principal del estudio (zona donde se tiene la mayor cantidad de información).

Las inversiones con el algoritmo MC-EF sobre los datos adquiridos con la técnica perimetral y los estudios previos que han empleado esta técnica indican que el efecto de afloramiento es inherente a dicha técnica, debido a la distribución irregular de datos y la escasa información en algunas partes de la región de estudio. Este efecto puede notarse mucho más cuando se emplean algoritmos que dividen la región en celdas para resolver la resistividad en cada una de ellas debido a que el problema de por sí es complejo y la densidad irregular de datos puede aumentar su complejidad. En estos casos, se vuelve necesario considerar alguna herramienta durante el proceso de inversión para tratar de disminuir el efecto.

Las funciones de peso se pueden implementar en diversos métodos de inversión, pero presentan una gran facilidad de adaptación en métodos de optimización estocásticos ya que su construcción permite una sencilla modificación de la función de ajuste/objetivo para introducirlas.

El algoritmo de inversión PSO sin la opción de FP resultó proveer soluciones óptimas al invertir los datos DAP ya que determinó de forma óptima la dimensión, ubicación y resistividad de los cuerpos anómalos de la región principal. Incluso mejor que algunas soluciones obtenidas con FP.

En la prueba del modelo 1 se puede concluir que la FP2 devolvió la mejor solución al calcular de forma casi precisa los parámetros del estrato. En el caso del modelo 2 fue la FP1 la que devolvió el mejor resultado para ambos prismas.

Los resultados del caso de estudio confirman que por sí solo el algoritmo PSO resuelve de forma óptima la profundidad de los cuerpos anómalos, pero bajo la estricta condición de fijar los parámetros en las otras dos dimensiones (X y Y). Esto implica que la metodología es una herramienta de apoyo para determinar los parámetros verticales de cuerpos específicos en TRE-3D, mas no para resolver las características geométricas y resistivas de un medio heterogéneo en las tres dimensiones.

Respecto a la mejor función de peso, no se puede seleccionar solo una porque las tres permitieron resolver diversas características de los medios. La FP2 tiene la ventaja de definirse a través de los datos medidos y no de los valores teóricos de profundidad, lo cual hace que su asignación de pesos dependa de la variación del medio y tenga diferentes valores en cada medio. Las funciones FP1 y FP3 devuelven los mismos valores sobre todos los medios si se emplean los mismos arreglos, pero puede enfocarse en resolver la parte somera o profunda del volumen de estudio. Sin embargo, en la parte profunda no hay mucha información, por lo que la FP1 puede resultar mejor al querer definir la profundidad de los cuerpos someros.

5.1 Recomendaciones

El algoritmo de inversión PSO-FP permite la evaluación de otras funciones de peso, lo cual lo vuelve un algoritmo versátil para estudiar diversas características de las funciones de peso en el proceso de inversión.

Este trabajo abre la posibilidad de probar estas funciones de peso en otros algoritmos de inversión guiados por métodos determinísticos como Mínimos Cuadrados o estocásticos.

También se puede implementar este algoritmo con otro modelo directo que permita la solución de medios mucho más complejos.

Referencias

- Chávez, R. E., A. Tejero-Andrade, y G. Cifuentes. «Karst detection beneath the pyramid of El Castillo, Chichén Itzá. Mexico, by non-invasive ERT-3D methods.» *Scientific Reports* 8, nº 1 (2018): 15391.
- Chávez, R.E., G. Chávez-Hernández, A. Tejero, y M. Alcantara. *The "L-Array" a 3D tool to characterize a fracture pattern in an urban zone*. Leicester, UK: Conference Proceedings. Near Surface 2011-17th EAGE, 2011.
- Cifuentes-Nava, G., y otros. «Tomografía de resistividad eléctrica 3D en la catedral de Morelia, México.» *Arqueología Iberoamericana*, 2017: 29-35.
- Cruz-Alanís, Shamara Z. *Tomografías de resistividad eléctrica 3D en la pirámide del Castillo en Chichén Itzá, Yucatán, México*. Tesis, 2016.
- Cruz-Alanís, Shamara Z., E. Leticia Flores-Márquez, Andrés Tejero-Andrade, Adrián M. León-Sánchez, y René E. Chávez-Segura. «Inversion of ERT-3D data using PSO and weighting functions.» *Journal of Applied Geophysics*, 2023: 105091.
- Dahlin, T., y C. Bernstone. «A roll-along technique for 3D resistivity data acquisition with multi-electrode arrays.» *In 10th EEGS symposium on the application of geophysics to engineering and environmental problems.*, 1997: cp-04.
- Durán, R., y M. Méndez. *Biodiversidad y desarrollo humano en Yucatán*. Mérida: CONABIO, SEDUMA, 2010.
- Eskola, L. *Geophysical interpretation using integral equations*. London: Chapman and Hall, 1992.
- Evjen, H. M. «Depth factors and resolving power of electrical measurements.» *Geophysics* 3, nº 2 (1938): 78-95.
- Fernández-Martínez, J.L., E. García Gonzalo, J.P. Fernández Álvarez, H.A. Kuzma, y C.O. Menéndez Pérez. «PSO: A powerful algorithm to solve geophysical inverse problems. Application to a 1D-DC resistivity case.» *Journal of Applied Geophysics*, 2010: 13-25.
- Fischanger, F., G. Morelli, D. LaBrecque, y M. Occhi. «Monitoring resins injection with 3D electrical resistivity tomography (ERT) using surface and multi-borehole electrode arrays.» Denver, Colorado, 2007.
- Flores-Márquez, L., A. Tejero-Andrade, A. León-Sánchez, C. Arango-Galván, y R. Chávez-Segura. «Two algorithms to compute the electric resistivity response using Green's functions for 3D structures.» *Geofísica Internacional* 54, nº 1 (2015): 7-20.
- Geoestudi Aster and Multiphase Technologies LLC. «ERTLab64 (software).» Livorno-Italia, 2006.
- Göktürkler, G., y C. Balkaya. «Inversion of self-potential anomalies caused by simple-geometry bodies using global optimization algorithms.» *Journal of Geophysics and Engineering*, 2012: 498-507.
- Gómez-Treviño, E., y F. J. Esparza. «What is the depth of investigation of a resistivity measurement?» *Geophysics* 79, nº 2 (2014): W1-W10.
- Hernández-Contreras, H., y L. Flores-Márquez. «A computational package to compute the electrical resistivity tomography response for regular bodies immersed in a homogeneous half-space.» *Geophysics* 88 (2023): F39-F49.

- Kennedy, J., y R. Eberhart. «Particle Swarm Optimization.» *IEEE. International Conference on Neural Networks. Conference Proceedings*, 1995: 1942-1948.
- León Sánchez, A.M. *Modelación de la respuesta eléctrica de estructuras 3D en un semiespacio conductor*. Degree dissertation, National Autonomous University of Mexico, 2004.
- Loke, M. H. *Tutorial: 2D and 3D electrical imaging surveys*. Malasia: Geotomo Software, 1996-2022.
- Loke, M. H., y R. D. Barker. «Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion techniques.» *Geophysical Prospecting* 44 (1996): 499-524.
- McGillivray, P. R., y D. W. Oldenburg. «Methods for calculating Fréchet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: a comparative study1.» *Geophysical Prospecting* 38, nº 5 (1990): 499-524.
- Menke, William. *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Revised Edition. Academic Press, Inc., 1989.
- Monteiro Santos, F. A. «Inversion of self-potential of idealized bodies' anomalies using particle swarm optimization.» *Computers and Geosciences* 36, nº 9 (2010): 1185-1190.
- Orellana, Ernesto. *Prospección geoeléctrica en corriente continua. Parte 1. 2*. Paraninfo, 1982.
- Parker, Robert L. *Geophysical Inverse Theory*. 1. New Jersey: Princeton University Press, 1994.
- Poli, R., J. Kennedy, y T. Blackwell. «Particle swarm optimization. An overview. .» *Swarm Intell*, 2007: 33-57.
- Richardson, R. M., y G. Zandt. *Inverse problems in geophysics*. Arizona: University of Arizona, 2003.
- Roy, A., y A. Apparao. «Depth of investigation in direct current methods.» *Geophysics* 36, nº 5 (1971): 943-959.
- Tarantola, A. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Paris: siam, 2005.
- Tejero-Andrade, Andrés, Gerardo Cifuentes-Nava, René Chávez, Aidee López-González, y Cecilia Delgado-Solórzano. «L and corner arrays for 3D electric resistivity tomography: an alternative for geophysical surveys in urban zones.» *Near Surface Geophysics*, 2015.
- Thompson, E. H., y J. E. Thompson. «The High Priest's Grave: Chichén Itzá, Yucatán, México.» *Publications of the Field Museum of Natural History. Anthropological series* (Publications of the Field Museum of Natural History. Anthropological series) 27, nº 1 (1938): 1-64.
- Vargas García, Diana. *Arreglos no convencionales de tomografía de resistividad eléctrica 3D*. Cd.Mx.: FI UNAM, 2015.
- Yuan, S., S. Wang, y N. Tian. «Swarm intelligence optimization and its application in geophysical data inversion.» *Applied Geophysics* 6 (2009): 166-174.
- Zhdanov, M. *Inverse theory and applications in geophysics*. Elsevier, 2015.

Anexo 1. Implementación computacional del algoritmo de inversión

En esta sección se detalla la implementación computacional del algoritmo de inversión con funciones de peso descrito en la sección 2.4.

Todo el código fue programado en lenguaje FORTRAN 90 en el editor de texto Notepad++ y compilado con el software de licencia libre GCC para ser ejecutado por un sistema operativo de Windows de 64 bits. No tiene interfaz gráfica, por lo tanto, la ejecución se lleva a cabo desde la ventana Símbolo de sistema.

El código se dividió en tres archivos. El primero contiene el modelo directo de León-Sánchez (2004) adaptado como módulo. El segundo archivo es otro módulo que contiene las subrutinas y funciones que sustentan el método PSO. El tercero es el programa principal, en el cual se asigna memoria a las variables, se fijan las definiciones iniciales y se llama a las subrutinas y funciones de los módulos para realizar el proceso de inversión.

Respecto a la subrutina del modelo directo, la única modificación que se hizo del algoritmo original fue la adaptación de este un módulo para ser usado por el programa principal y por ende el cambio de tipo de algunas variables. Además, se modificó la entrada y salida de datos para optimizar este proceso; originalmente la entrada de datos era mediante un archivo de datos que contenía las coordenadas de los electrodos y un segundo archivo contenía los parámetros del modelo directo, pero en la adaptación, esta información se guardó en variables para evitar la lectura y escritura de datos en archivos de texto cada vez que se ejecutaba el modelo directo. Esto redujo el tiempo de ejecución considerablemente.

En el caso del segundo archivo que contiene el módulo de las subrutinas y funciones para construir el algoritmo PSO, ninguna proviene de alguna librería, sino que todas fueron hechas desde cero y probadas para demostrar su eficacia (no se

incluye en esta tesis dichas pruebas). Las subrutinas y funciones llevan a cabo la lectura y escritura de archivos, cálculo de la función de peso, cálculo de RMS, generación de números aleatorios y modificación de los modelos iniciales.

El programa principal comienza con la asignación de memoria para las variables globales, después hace llamado a la lectura de datos, esto es localización de los electrodos, valor de resistividad y profundidad teórica del punto de atribución; luego calcula los pesos de acuerdo con el tipo de función de peso seleccionado y después se ejecuta el algoritmo PSO.

Las definiciones iniciales que requiere el algoritmo (número de modelos iniciales, número de iteraciones máximas, límites del espacio solución, selección de función de peso y archivo de datos de lectura) se deben definir en el programa principal y en el módulo de la subrutina PSO. Desde la ventana de Símbolo de sistema únicamente se compila el programa y la salida se presenta en tres archivos de texto plano. El primer archivo contiene los datos calculados de resistividad aparente con la solución óptima, el segundo archivo contiene el historial de la mejor solución de la población a lo largo del proceso iterativo y el último archivo contiene el historial de todos los modelos iniciales y sus cambios durante el proceso iterativo. Además de estos archivos de salida, en la pantalla se observan las definiciones iniciales, el número de datos leídos, el mejor modelo inicial y los parámetros finales.

El tiempo de ejecución dependió de la cantidad de datos invertidos. En las inversiones de los 1197 datos adquiridos con la técnica tradicional, el tiempo fue menor a los 3 minutos. En las inversiones de los 3120 datos adquiridos con la técnica perimetral, el tiempo fue menor a los 8 minutos. Sin embargo, en varios casos, se obtuvo la solución en las primeras 20-30 iteraciones de 100 que hace el algoritmo. Esto indica que podría usarse un valor de tolerancia como parámetro para finalizar el algoritmo en lugar de un valor máximo de iteraciones para disminuir los tiempos de ejecución.

Anexo 2. Parámetros de inversión del algoritmo MC-EF

En las pruebas de validación del algoritmo PSO-FP con modelos sintéticos del capítulo 3, se invierten los datos con un software comercial basado en el método de inversión determinístico Mínimos Cuadrados (MC) para resolver el problema inverso y el método numérico Elemento Finito (EF) para resolver el problema directo. En este anexo se presentan los parámetros numéricos usados en dichas inversiones.

Los parámetros que se deben determinar son la dimensión de la región de estudio, el tamaño de la malla al discretizar la región de estudio, las condiciones de frontera, el modelo inicial, el coeficiente de rugosidad inicial y el porcentaje de ruido.

- La dimensión de la región de estudio. Las dimensiones en las direcciones X, Y quedan definidas por los electrodos en dichas direcciones. La dimensión en Z queda definida por el software. En el caso del uso de la técnica tradicional, el volumen de la región de estudio fue $20m \times 15m \times 7m$. Con la técnica perimetral, el volumen de la región de estudio fue $20m \times 20m \times 10m$.
También se debe definir la región de fondo, esta generalmente se define como el doble de la región de estudio.
- Malla. Para formar la malla se divide la región de estudio en partes iguales. En el caso de las direcciones X, Y , la malla se considerando la mitad de la separación entre los electrodos. En la adquisición tradicional esto fue $0.5m$ en X y $1.25m$ en Y . En la adquisición perimetral la división fue cada $0.5m$ en ambas direcciones. En la dirección Z fue de $0.5m$ en ambas adquisiciones.
- Condiciones de frontera. Se usaron condiciones mixtas en todas las direcciones, excepto en la dirección positiva de Z donde se usaron condiciones de Neumann.
- Modelo inicial. Se asume un medio homogéneo cuya resistividad es la media de los valores de resistividad aparente.

- Coeficiente de rugosidad. Controla el cambio que tiene el modelo inicial en cada iteración. El programa calcula el valor entre cada iteración, pero se debe fijar un valor inicial. El valor inicial en estas pruebas fue 10, el valor sugerido.
- Porcentaje de ruido. Controla el porcentaje de diferencia aceptable entre los datos observados y los datos calculados; por lo tanto, la inversión trata de converger a este valor. En este trabajo se fijó en 10% porque es el porcentaje añadido de ruido.



Inversion of ERT-3D data using PSO and weighting functions

Cruz-Alanís Shamara Z.^{a,b,*}, Flores-Márquez E. Leticia^b, Tejero-Andrade Andrés^c, León-Sánchez Adrián M.^c, Chávez-Segura René E.^b

^a Graduate Program in Earth Sciences, National Autonomous University of Mexico, Mexico

^b Geophysics Institute, National Autonomous University of Mexico, Circuito de la Investigación Científica s/n, C.U., Coyoacán, C.P. 04510 CDMX, Mexico

^c Engineering School, National Autonomous University of Mexico, Circuito Escolar s/n, C.U., Coyoacán, C.P. 04510 CDMX, Mexico

ARTICLE INFO

Keywords:

Perimeter Data Acquisition
Weighting functions
Particle Swarm Optimization
ERT-3D
Inversion

ABSTRACT

In the last decade, a new data acquisition technique has emerged in 3D electrical resistivity tomography studies, where the target to study is beneath a structure such as a building and it is not possible to use the traditional technique. This is a very common scenario when investigating urban areas or archaeological sites. The technique, called Perimeter Data Acquisition (PDA) in this paper, allows the acquisition of irregularly distributed data beneath structures. Although electrical anomalies can be detected, the solution does not correctly determine their vertical location because of the irregular distribution of the data and the lack of data towards the central portion of the survey region limited by the electrodes.

The methodology presented here aims to improve the calculation of the vertical location of the anomalous bodies in the subsoil using weighting functions in conjunction with a stochastic inversion method called Particle Swarm Optimization (PSO). Three weighting functions defined from the theoretical depth of the arrays and the resistivity standard deviation were tested by using synthetic models and comparing the solutions between them and with non-weighted solutions. Finally, the algorithm and weighting functions were applied on a case study to compute the vertical location of a cavern beneath a Mayan pyramid.

The results indicate that when using the PDA technique, it is necessary to employ a weighting function to obtain an acceptable and reasonable solution. It is found that the weighting function defined from the resistivity standard deviation allowed to determine with the least error the vertical characteristics of the anomalous bodies.

1. Introduction

Over the last 35 years, the development of electrical instrumentation has allowed the transition from two-dimensional electrical resistivity tomography (ERT—2D) to three-dimensional (ERT—3D) surveys, which should, in theory, provide the most accurate results as all geological structures in nature are in three dimensions (Loke, 2022). Also, with the development of instrumentation came the creation of new data acquisition techniques that adapt the arrays used in ERT-2D to three dimensions. For example, Loke and Barker (1996a) place the electrodes in such a way as to create a grid that spans the surface of the study region and adapt collinear arrays to obtain equidistant data profiles in both directions (X and Y). On the other hand, Dahlin and Bernstone (1997) also form a grid of electrodes but take measurements between lines by changing the assignment of current and potential lines until all possible combinations are carried out. The technique that creates an electrode

grid is the most frequently used in surface ERT-3D studies, therefore, we will refer to it as the traditional technique.

A different data acquisition technique for ERT-3D was presented in Tejero et al. (2015) and allows the characterization and detection of anomalies in regions where traditional technique cannot be carried out because there are physical impediments in the surface like buildings, ruins, or sculptures. This scenario is often presented in archaeological and geotechnical studies in which the objective is to characterize the subsoil beneath an archaeological or urban structure.

The technique, called in this paper Perimeter Data Acquisition (PDA), consists of placing the electrodes around the structure and adapting known arrays (Wenner, Wenner-Schlumberger, Dipole-Dipole, etc.) or new arrays (Corner or L-array) to obtain measurements associated with points under the structure. The studies carried out by Chávez et al. (2015) and Cifuentes-Nava et al. (2017) that adapted different arrays to the PDA technique in urban areas allowed to characterize

* Corresponding author at: Graduate Program in Earth Sciences, National Autonomous University of Mexico, Mexico.

E-mail address: samara92_312@comunidad.unam.mx (C.-A. Shamara Z.).

<https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2023.105091>

Received 1 August 2022; Received in revised form 29 April 2023; Accepted 30 May 2023

Available online 2 June 2023

0926-9851/© 2023 Elsevier B.V. All rights reserved.

fractures in a habitational complex and explore the subsoil beneath a cathedral respectively. They demonstrated that the PDA technique is efficient to obtain a 3D tomography of the resistivity distribution in the subsoil, but they presented a particular effect called in this paper outcropping effect, which cannot limit the geometry of the anomalous bodies and brings up them towards the surface. This means that the depth and height of the anomalous bodies is determined incorrectly. This effect can also be found in the studies done by Fischanger et al. (2007) and Chávez et al. (2011), who place the electrodes next to buildings to study their foundations, noting that the determination of the geometry of anomalous bodies (foundations) presents inaccuracies.

The outcropping effect is not observed in tomographies performed with the traditional acquisition, which can be attributed to the most obvious difference between the techniques: the data distribution. While traditional acquisition generates data profiles that cover almost the entire survey region, PDA generally creates a lower density of data in the central and shallow area of the survey region, and a higher density in the corners and deeper-central zones of the region. This irregular distribution of data could generate errors in the solution returned by the inversion process, because most of the inversion algorithms used in electrical resistivity studies assume a regular distribution of data (due to a traditional acquisition) and try to return a smooth model because, in theory, there is information in the entire region, which does not happen when PDA is employed.

On the other hand, Tejero's studies, where the L and Corner arrays were tested with synthetic models, conclude that lack of resolution in the vertical direction, especially the shallow central zone, does not allow to solve the vertical characteristics of the anomalous bodies correctly; even some small size bodies or shallow resistive objects located towards the central zone cannot be detected. However, they could detect the lateral variation of resistivity and solve the location and lateral dimension of the bodies with an efficiency like that obtained with the traditional technique. Therefore, the main problem with the PDA technique is the presence of the outcropping effect that distorts the geometry of the anomalous bodies, mainly in the vertical direction.

Special constraints can be added to the inversion process to better characterize the subsoil and eliminate, or at least, minimize the outcropping effect. There are several ways to add constraints to the inversion process, one of them is through a weighting function that introduces extra information or conditions that the solution must meet. The definition of the weighting function depends on the information or conditions the geophysicist wants to establish, and the way to introduce it depends on the kind of inversion method that is employed.

Deterministic inversion methods have been the most widely used to add constraints due to their early development. However, stochastic inversion methods have gained relevance in the last decades due to their versatility, scope and construction, which includes a random component in the solution search. The Particle Swarm Optimization (PSO) method is one of the most recent stochastic inversion methods and allows the easy introduction of constraints due to its simple but effective algorithm (Kennedy and Eberhart, 1995).

This article tests three different types of weighting functions on synthetic resistivity data (which represent the electrical response of one or more rectangular prisms buried in a homogeneous medium) acquired with the PDA technique to define which one solves the vertical location of anomalous bodies with less error. The data were inverted by the inversion algorithm developed in this work, which employs an adaptation of the PSO method, first without the weighting functions and then with each of them. On the other hand, and just to observe the outcropping effect, the data are also inverted with an algorithm that combines the Least Squares (LS) and Finite Element (FE) methods (the most frequent combination in ERT data inversion algorithms); in addition, we include the inversion with the PSO algorithm of data acquired with the traditional technique to confirm the null presence of the outcropping effect. According to the process carried out in this work, we divided this paper in five sections. The first section describes the

creation of the inversion algorithm led by the PSO method. In the second section, the three weighting functions and their introduction in the inversion algorithm are presented. Section 3 explains the synthetic models, the acquisition designs and tests that were carried out and analyzes the results. In Section 4, the resistivity data of a real case are inverted; were obtained from an archaeological study whose objective was to locate a cavern under a Mayan pyramid (Chávez et al., 2018). Finally, Section 5 contains the conclusions.

2. The inversion algorithm

The calculation of the electrical resistivity distribution in the subsoil from apparent resistivity data is an inverse problem whose solution involves determining the numerical parameters of a forward model that represent the electrical characteristics of the subsoil (Sen and Stoffa, 1995). The forward model is a mathematical expression that calculates the theoretical value of apparent resistivity in an ERT-3D survey. On the other hand, the inversion method and the objective function guides the search for the optimal solution of the inverse problem. Three of them are substantial parts of the inverse algorithm. This work selected a numerical approximation to calculate the apparent resistivity caused by rectangular prisms buried in a homogeneous half-space as forward model, the stochastic optimization method called Particle Swarm Optimization (PSO) as inverse method, and the RMS estimator as objective function and fitness.

2.1. The forward model

Although numerical methods such as Finite Difference and Finite Element have gained more use over the years to solve the forward problem, their implementation still require considerable computational resources and time machine because they divide the entire half-space into thousands of cells and calculate the apparent resistivity in each of them; also, the inversion problem is solved in the entire grid. On the other hand, there are models based on analytical solutions that solve the direct problem with numerical approximations for bodies with simple geometries buried in homogeneous half-spaces. These methods use only the needed number of parameters defining the geometry of the bodies, their resistivity and the resistivity of the medium to compute the apparent resistivity. This makes them useful and easy to adapt in inversion algorithms to study other aspects of the inversion process.

In this work we use the forward model presented by León Sánchez (2004) and Flores-Márquez et al. (2015) that calculates the apparent resistivity caused by one or more rectangular prisms buried in a homogeneous half-space for any electrode array. The algorithm employs the Surface Integral Method based on Green's theorem to solve the volume equation representing the forward problem. In addition, the Weak Scattering hypothesis (Hvozdara and Kaikkonen, 1998) is employed to simplify the interaction between bodies, since it does not consider the secondary charges generated by the main field.

The choice of this forward model over the well-known numerical methods was made because of its ease of adaptation to the inversion algorithm, its speed in performing the apparent resistivity computation, and because the resistive response of the model is practically the same as that obtained by the finite element method (Loke and Barker, 1996b). In addition, the model allows the design a heterogeneous subsoil by placing several rectangular prisms.

Since the objective of this work is focused on better solving the vertical parameters of the anomalous bodies with the inversion algorithm, it was decided to set the parameters that define the dimensions of the prism in the X and Y directions and the resistivity of the half-space to their correct values during the inversion process, so the algorithm will only invert three parameters for each rectangular prism: the length, depth and resistivity of the prism ($\Delta z, z, \rho$); the others parameters, although used in the voltage computation, are not inverted.

2.2. The inversion method

The inversion methods can be classified in two categories: deterministic and stochastic methods. The deterministic methods always return the same solution when the same entry is provided; some examples are direct, linear, or iterative-linear methods like Least Squares (LS) (Loke and Barker, 1996b) or the conjugate gradient method. On the other hand, stochastic are based on a semi-random search along the solution space to find the correct parameters and can return different solutions even when the same entry is provided because of the random component. Some examples are Monte Carlo (Dębski, 2010), Simulated Annealing (SA) (Sharma and Kaikkonen, 1999), Genetic Algorithms (GA) (Basokur et al., 2007) or Particle Swarm Optimization (PSO) (Essa and Elhussein, 2018). These algorithms are also optimization methods because they determine an optimal model solution close to the exact one according to a pre-set criterion called fitness function, objective function, or error function. However, the way to optimize this function is not through its gradient but through the evaluation of the models found through the iterative search process.

PSO was chosen in this work as the inversion method after the results of Göktürkler and Balkaya (2012), where the PSO method was compared with GA and SA methods to solve a problem with synthetic and real self-potential data. The PSO was the simplest method for adaptation, with the shortest execution time and it returned solutions equal or slightly different to the correct solutions. In addition, PSO allows the introduction of different types of weighting functions in an easily way due to the principle on which it is built.

The original and simplest PSO method presented by Kennedy and Eberhart (1995) follows the same search process as other optimization methods, that is, selecting a certain number of initial models within the solution space, evaluating them on an objective function and modifying them at each iteration until the model that best fits the observed data is found. The difference lies in making an analogy with the search for food done by certain groups of animals like swarms or flocks. In this analogy, the initial models are considered as the initial positions of particles/animals that will change their position (modify the models) in each iteration, considering each one's best individual position and the best position of the entire population throughout the search, in addition including a random perturbation.

The algorithm has been modified over the years and the most significant versions were compiled in Poli et al. (2007) and Wang et al. (2018). Also, adaptations of all these versions have been made in geophysical studies, for example, Fernández-Martínez et al. (2008) presented an application of the PSO algorithm to the analysis and solution of a vertical electrical sounding inverse problem associated to a seawater intrusion; Monteiro Santos (2010) inverted data of single and multiple self-potential observations; and Azevedo and Demyanov (2019) where the PSO method has a role in the methodology to quantify uncertainty of the large-scale geological parameters in geostatistical seismic inversion.

In this work we have coded, in Fortran 95 language, an adaptation of the PSO algorithm that combines the use of a dynamic inertia weight with the numerical parameters used by Göktürkler and Balkaya (2012).

The algorithm starts with the random selection of a population of NP initial models within the space of dimension M (number of parameters to be inverted), where the i -th model has the form $m_i = (m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{iM})$, and their use in the forward model to generate sets of apparent resistivity data named calculated data (d_c). The iterative process starts with the comparison between the calculated data of each model and the observed data (d_o) through the fitness function. Then, the model m_i is modified by the velocity value v_i (Eq. 1) that is calculated from the best parameters the population has had (m_{best}) and the best parameters the i -th model has had (m_i^{best}) until the actual iteration (k). The calculation of v_i also involves the weight value χ that add a dynamic inertia to the searching process and two uniformly distributed random functions U in

the interval of $(0, a)$ and $(0, b)$ respectively; they represent the contribution of individual and group learning to the modification of models and control the convergence towards the solution. The variable χ takes the initial value 0.9 and decreases in each iteration until it reaches the value 0.4, thus in the first iterations the search is wide along the space, but in the last iterations the search is local. Regarding the a and b values, we have chosen the Göktürkler's values (2.041 and 0.948 respectively), since they returned the best solutions in tests we performed comparing different values (such tests are not presented in this article).

The iterative process ends when the maximum number of iterations is reached ($k > k_{max}$) and the solution model is the last one in the m_{best} variable.

$$v_i^k = \chi v_i^{k-1} + U(0, a)(m_i^{best} - m_i^k) + U(0, b)(m_{best} - m_i^k)$$

$$m_i^{k+1} = m_i^k + v_i^k \quad (1)$$

2.3. The objective function

The PSO method bases the search for the solution model on the fitness function since the modification of the models at each iteration depends on the best individual and best group parameters (m_i^{best} and m_{best}) whose selection depends on the fitting values. In this inversion approach, the fitness function is at the same time the objective function to be optimized. Unlike deterministic methods whose optimization requires equating the derivative of the fitness function with respect to the inversion parameters to zero, the PSO method achieves the optimization of the fitness function through the model perturbations at each iteration if the constraints on the χ , a and b values are well established.

The L_2 norm and the RMS estimator (Eq. 2), whose difference lies only in the calculation of the average before the square root, are generally selected as fitness functions. In this case, we selected the RMS function, since it is the most common estimator of the differences between two sets of data (in this case, observed and calculated apparent resistivity data) based on the Euclidian distance between two points and is less sensitive to outliers in comparison with the L_2 norm (Menke, 1989).

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2} \times 100 \text{ where } e_i = \frac{d_i^o - d_i^c}{d_i^o} \text{ for } i = 1, \dots, N \quad (2)$$

Like deterministic inversion methods, *a priori* information can be added to the inversion process to ensure that the solution model meets the imposed constraints. In our case, the *a priori* information is given by a weighting function, which is a scalar-valued function that modifies the fitness function. The weights multiplies the differences between the observed and calculated data during the RMS calculation, so the fit value also depends on the values of the weighting function. As mentioned before, the fit value leads the search for the optimal solution model; therefore, the weighting function will be a leading factor in the search for the global minimum of the RMS function.

The flowchart in Fig. 1 shows the complete inversion algorithm that combines the adaptation and selection of the forward model, the PSO method, the RMS function, and the introduction of the weighting function.

3. The weighting functions

The three proposed weighting functions were designed considering the depth of investigation of the data, their distribution and the apparent resistivity standard deviation. The objective of each function is to focus on a part of the study region and find the solution that best characterizes it, in this way, it would be possible to limit with less error the upper or lower edges of the buried body and locate it better in depth.

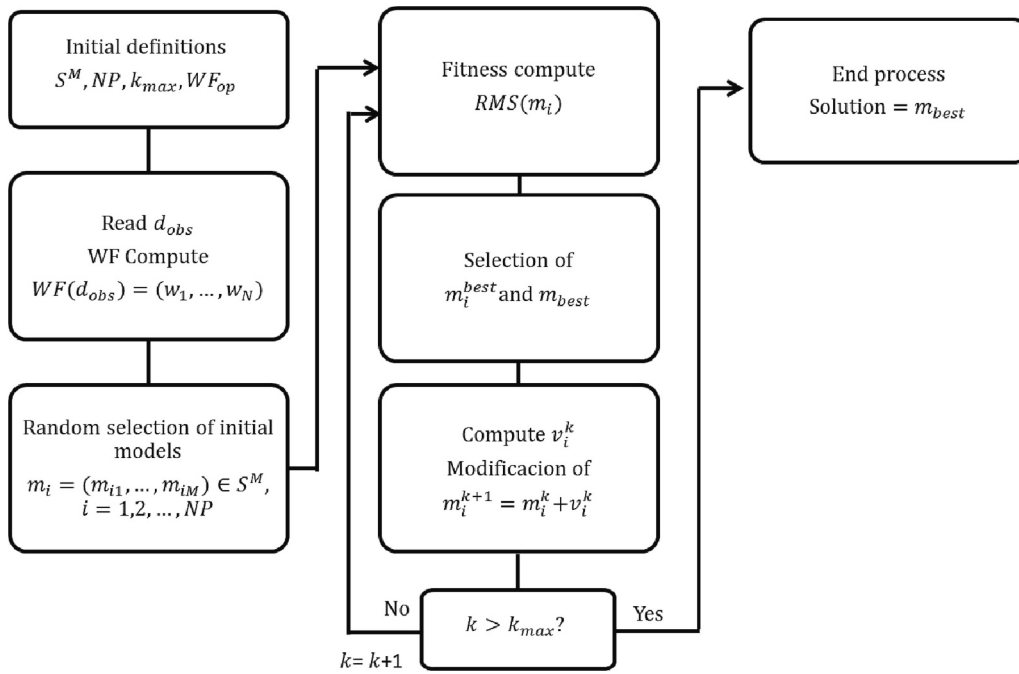


Fig. 1. Flowchart of inversion algorithm that includes the use of the weighting function WF according to the option selected by WF_{op} . The RMS calculation implies the previous generation of calculated data d_{cal} by evaluating m_i in the forward model.

3.1. Weighting Function 1 (WF 1)

It is based on the depth of investigation of the data. Firstly, the theoretical depth of each data (z_i), which depends on the separation of current and potential electrodes, is calculated according to the median depth expression provided by Tejero et al. (2015) that is derived from the definitions of median depth of Edwards (1977) and Loke (2010). The advantage of the Tejero's expression is that depth can be calculated for any array. Then the weight w_i is computed with Eq. 3 which normalizes the values so that the range of the function is (0,1]; in this way a higher weight will be assigned to a shallower data.

In addition, the data density is generally low in the deepest regions when the PDA technique is applied, so the WF 1 aims to obtain a better fit towards shallower portions of the model, according to the inverse-square law.

$$w_i = \frac{\frac{1}{z_i^2}}{\frac{1}{z_{min}^2}} = \frac{z_{min}^2}{z_i^2}, \text{ for } i = 1 \dots N \quad (3)$$

3.2. Weighting function 2 (WF 2)

This function depends on the observed apparent resistivity and its standard deviation. First, the mean resistivity ($\bar{\rho}_a$) and the standard deviation of the apparent resistivity data (σ_ρ) are calculated and the weights are assigned following Eq. 4. If a datum is in the range of the standard deviation, the weight is 1.0, in any other case, the weight is 0.5.

In the case of a body buried in a homogeneous half-space, the observed data taken far from the body are closer to the resistivity value of the half-space, while measurements taken closer to the body tend to the value of its resistivity. Thus, the mean value resistivity is in the range of the body's and the half space's resistivity and can be used as a limit to separate the data more influenced by the half-space and the data more influenced by the body. When the difference between the data and the mean value is less than the standard deviation, the data is in the contrast region between the body and the half-space, so the weight is equal to 1. Then, the inversion algorithm focuses on better fitting the data in this region.

$$w_i = \{1, |\rho_{a,i} - \bar{\rho}_a| \leq \sigma_\rho; 0.5, |\rho_{a,i} - \bar{\rho}_a| > \sigma_\rho \}$$

$$\text{where } \bar{\rho}_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_{a,i} \text{ and } \sigma_\rho = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho_{a,i} - \bar{\rho}_a)^2} \quad (4)$$

3.3. Weighting function 3 (WF 3)

The third weighting function aims to give greater weight to data related to greater depths. The resolution decreases with depth because the signal strength is weaker as the depth of investigation increases and there is less data at depth. Therefore, it is proposed to assign a larger weight to deeper data to obtain a better fit between the observed and compute data. The range of the function is normalized to assign values within the interval (0,1] according to Eq. 5.

$$w_i = \frac{z_i^2}{z_{max}^2}, \text{ for } i = 1 \dots N \quad (5)$$

4. Tests with synthetic models

To know the effectiveness and scope of the weighting functions under different scenarios, tests with two different synthetic models were performed. They consisted of inverting synthetic data with and without weighting functions to compare the solutions obtained from each case. Both synthetic models are rectangular prisms buried in a homogeneous half-space.

The first synthetic model (Model 1) represents a horizontal resistive layer with a thickness of 2 m that starts at a depth of 2 m. For this, we used a prism with dimensions $60m \times 60m \times 2m$, in the X, Y, Z directions respectively, with a resistivity value of $500 \Omega m$ and its center is located at point (10, 10, -3). The resistivity of the homogeneous half-space is $100 \Omega m$ (Fig. 2a). The second model (Model 2) is composed by two prisms of different sizes and locations; one has dimensions $6m \times 6m \times 2m$, a resistivity of $450 \Omega m$ and its center is located at point (5, 15, -3); the second prism has dimensions $2m \times 2m \times 6m$, a resistivity of $50 \Omega m$ and its centre is located at (13, 4, -7). Both are buried in a homogeneous half-space with resistivity of $300 \Omega m$ (Fig. 2b).

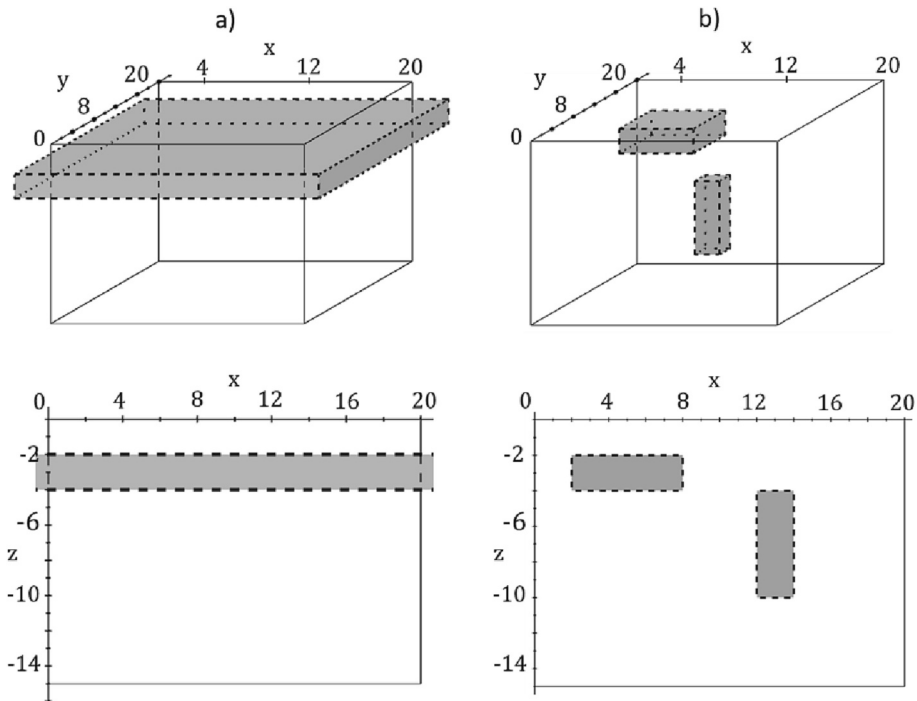


Fig. 2. 3D-view (up) and frontal view (down) of the three synthetic models. (a) Model 1 consists of an elongated near-surface rectangular prism that simulates a resistive layer. This figure focus on the main region, but the prism starts at -20 m and ends at 40 m in the X and Y directions. (b) Model 2 is a medium with two bodies (conductive and resistive) buried at different depths represented by two prisms of different sizes.

The data acquisition design with the PDA technique consisted of placing 80 electrodes separated every 1 m in the form of a square that covers an area of $20 \times 20 \text{ m}^2$; then, the Parallel Equatorial, Inverted Parallel Equatorial and Corner arrays were adapted obtaining a total of 3120 measurements. The first array can be found in Argote-espino et al.

(2013) and the second one in Vásquez Banda (2022). In this acquisition, the shallowest data are at 6.6 m depth and the deepest at 9.4 m (Fig. 3a). For the example with the traditional technique (TDA), 147 electrodes were placed forming 7 parallel lines separated every 2.5 m and the electrodes were separated 1 m, thus it covers an area of $20 \times 15 \text{ m}^2$. In

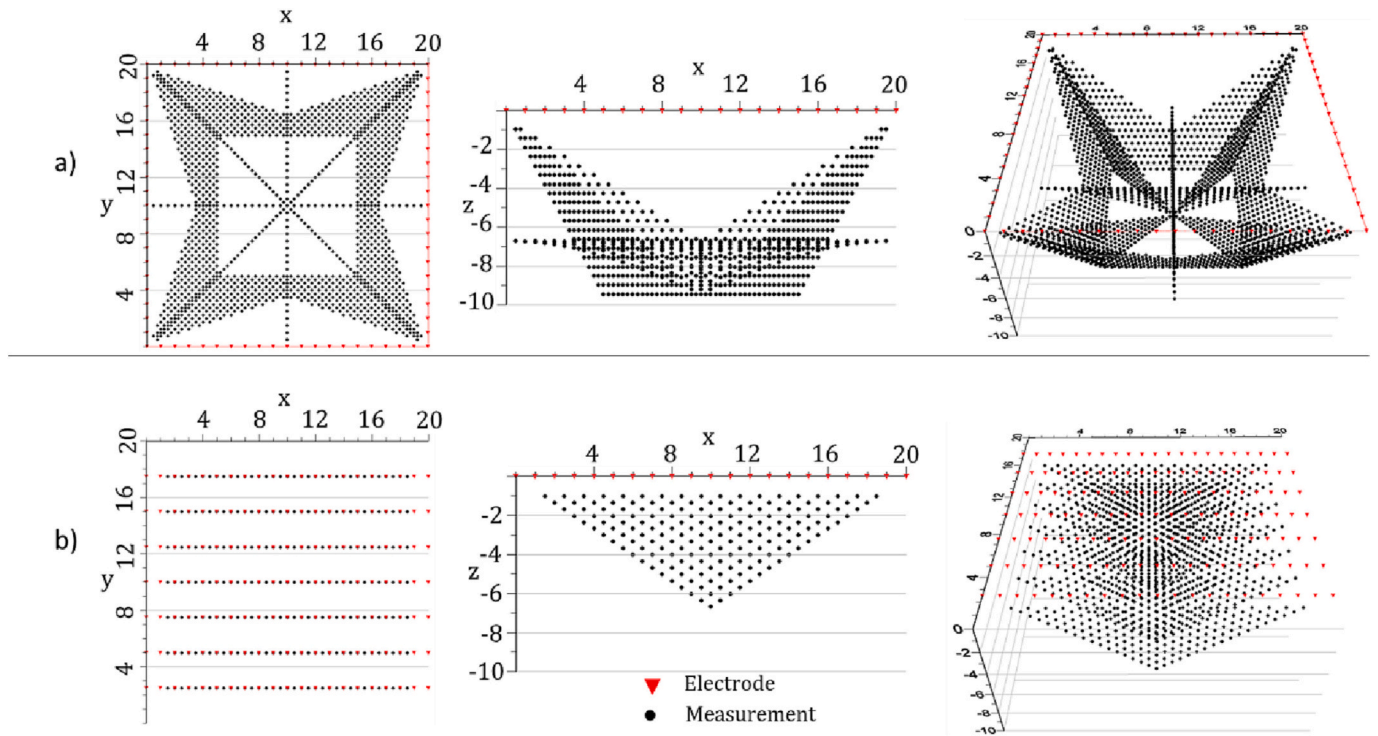


Fig. 3. From left to right, top view, front view and 3D-view of the electrodes and the measurements of the two acquisition designs. (a) PDA employs 80 electrodes and the Parallel Equatorial, Inverted Parallel Equatorial and Corner arrays to generate 3120 measurements. The coordinate origin was assigned to the position of the first electrode. (b) TDA employs 147 electrodes and the Dipole-Dipole array to generate 1197 measurements.

addition, the Dipole-Dipole array was used on each line with an “a” spacing of 1 m and the “n” factor from 1 to 18; this resulted in 1197 measurements forming 7 data profiles. According to the theoretical depth calculations, the shallowest data are at 1 m depth and the deepest at almost 7 m (Fig. 3b).

The PDA acquisition design was carried out on each synthetic model to calculate resistance data ($R = V/I$) sets to which random noise was added. Noisy data (R_{noisy}) were calculated according to Eq. 6 where L is a random function of standard normal distribution with standard deviation equal to $P/5$, where P is the percentage of noise to add.

$$R_{noisy} = R(1 + 0.01L) \tag{6}$$

The noisy synthetic data sets were subjected to the PSO algorithm with each WF option: without WF, WF1, WF2 and WF3. In all inversions with the PSO method, three parameters related to each prism were inverted: its height (Δz), the depth of its center (z) and its resistivity (ρ). The search range of the parameters was $[0.5 \text{ m}, 10 \text{ m}]$ for Δz , $[-10 \text{ m}, -0.5 \text{ m}]$ for z and $[1 \text{ } \Omega\text{m}, 1000 \text{ } \Omega\text{m}]$ for ρ ; the number of initial models (number of particles) was 8 and the maximum number of iterations was 100. The maximum execution times of the PSO algorithm were 5 and 12 min for Model 1 and Model 2 respectively.

With the aim to describe the outcropping effect that appears in the PDA data inversions and to have a reference of the target to be reached with the WF, the TDA technique was also carried out on both synthetic models and noise was added in the same way; then, data were inverted with the PSO algorithm without WF. The execution times in this case were 2 and 3 min for Model 1 and Model 2 respectively. For the same purpose, and just to show the distortion of the bodies in the vertical direction in the ERT-3D carried out with the most frequent inversion combination (LS-FE), we add the solution obtained with a commercial ERT-3D data inversion algorithm that uses this combination (Earth-Imager-3D®) (Advanced Geosciences Inc., 2022).

The inversion results are grouped by synthetic model in two tables. The first table contains the solutions of two sets of data (TDA and PDA) returned by the LS-FE algorithm and the PSO algorithm without using the WFs. The second table presents the solution parameters for the PDA data obtained with the PSO method with each WFs, the RMS values and a graphical comparison between the solution prism (shaded rectangle) and the correct prism (dotted line).

The results of Model 1 with the TDA acquisition (Table 1) indicate that both algorithms correctly found the depth at which the layer starts.

Table 1

Solutions obtained for Model 1 with the LS-FE algorithm and the PSO algorithm without WF. The image in the LS-FE column is taken at $y = 10 \text{ m}$, where is located the center of the correct resistive prism. The image in the PSO column is a graphical comparison between the solution prism (shaded rectangle) and the correct prism (dotted line). The correct parameters of the prism are indicated at the top of the table.

	LS-FE	PSO without WF
Model 1. Correct parameters: $\Delta z = 2.0 \text{ m}$ $z = -3.0 \text{ m}$ $\rho = 500.0 \text{ } \Omega\text{m}$		
TDA		
PDA		

The LS-FE algorithm calculates a depth of investigation of almost four meters and therefore did not define the height of the layer. In contrast, the PSO method accurately defined the depth and height and solved the resistivity much better. On the other hand, with the PDA acquisition, the LS-FE algorithm failed to define the shape and dimension of the layer and the outcropping effect is presented. The PSO solution also failed to define the height of the layer, but better determines the depth of its upper side. On the resistivity, both methods underestimate the value; however, the TDA-PSO solution does identify the prism as a resistive body with respect to the medium and has the smallest difference with the correct value.

Table 2 shows the results obtained with each WF. On the resistivity, the three values are underestimated but WF1 and WF3 returned a conductive body with respect of the medium. On the height, WF2 solved offered the best value because it is almost the correct one, while the WF1 and WF3 returned prisms of twice the height. Finally, on the outcropping effect, it is not present in any case because the top of the prisms is well solved.

The results of Model 2 present notable differences in comparison with results of Model 1. First, twice the number of parameters is inverted (three per prism). Then, the data distribution produced by the TDA acquisition is enough to detect the shallow resistive prism. However, the deep conductive prism is out of reach; therefore, both LS-FE and PSO without WFs cannot determine any of its characteristics (Table 3). In PDA acquisition, the data (theoretically) cover a larger depth range, but their distribution covers a small portion of the prisms making it difficult to solve them correctly. The LS-FE algorithm could identify a contrast of resistivities, but it is far from defining the shape and dimensions of the shallow prism, besides the fact that the deep body is not detected. On the other hand, the PSO without the WFs did correctly solve the three parameters of the shallow prism but fails with the deep prism.

Table 4 contains the results of Model 2 obtained with the WFs. On the resistivity, three solutions identify a resistive body for the shallow prism but the closest value is obtained with WF3. On the height, WF1 and WF2 attempted to resolve the deep prism, but distorted the shape of the shallow prism with it and made it bigger; WF3 solve the correct value. On the outcropping effect, WF1 and WF2 did not correct solve the vertical position of the shallow prisms so their top is at a shallower depth; WF3 did correctly solve the depth of the shallow prism. About the deep prism, no WF could solve any of its features. This model test confirms that no function can solve for bodies that are outside or in the limits of

Table 2

Solutions obtained with the PSO algorithm and the WFs for Model 1. Each solution indicates the height, depth and resistivity of the solution prism, the RMS value, and a graphical comparison between the solution prism (shaded rectangle) and the correct prism (dotted line). The correct parameters are indicated at the top of the table.

Model 1. Correct parameters: $\Delta z = 2.0\text{ m}$ $z = -3.0\text{ m}$ $\rho = 500.0\ \Omega\text{m}$			
	WF1	WF2	WF3
PDA	<p> $\Delta z = 4.02\text{ m}$ $z = -3.66\text{ m}$ $\rho = 237\ \Omega\text{m}$ $RMS = 3.51\%$ </p>	<p> $\Delta z = 2.48\text{ m}$ $z = -3.11\text{ m}$ $\rho = 367\ \Omega\text{m}$ $RMS = 2.24\%$ </p>	<p> $\Delta z = 4.38\text{ m}$ $z = -3.74\text{ m}$ $\rho = 222\ \Omega\text{m}$ $RMS = 3.55\%$ </p>

Table 3

Solutions obtained for Model 1 with the LS-FE algorithm and the PSO algorithm without WF. The image in the LS-FE column is taken at $y = 15\text{ m}$, where is located the center of the correct resistive prism. The image in the PSO column is a graphical comparison between the solution prism (shaded rectangle) and the correct prism (dotted line). The correct parameters of the prism are indicated at the top of the table.

Model 2. Correct parameters $\Delta z_1 = 2.0\text{ m}$ $z_1 = -3.0\text{ m}$ $\rho_1 = 450\ \Omega\text{m}$ $\Delta z_2 = 6.0\text{ m}$ $z_2 = -7.0\text{ m}$ $\rho_2 = 50\ \Omega\text{m}$		
	LS-FE	PSO without WF
TDA	<p>$RMS = 2.66\%$</p>	<p> $\Delta z_1 = 2.16\text{ m}$ $z_1 = -3.11\text{ m}$ $\rho_1 = 432\ \Omega\text{m}$ $\Delta z_2 = 0.57\text{ m}$ </p>
PDA	<p>$RMS = 1.93\%$</p>	<p> $\Delta z_1 = 2.93\text{ m}$ $z_1 = -2.93\text{ m}$ $\rho_1 = 402\ \Omega\text{m}$ $\Delta z_2 = 6.19\text{ m}$ $z_2 = -10.45\text{ m}$ $\rho_2 = 158\ \Omega\text{m}$ $RMS = 1.998\%$ </p>

Table 4

Solutions obtained with the PSO algorithm and the WFs for Model 2. Each solution indicates the height, depth and resistivity of the solution prisms, the RMS value, and a graphical comparison between the solution prism (shaded rectangle) and the correct prism (dotted line). The correct parameters are indicated at the top of the table.

Model 2. Correct parameters $\Delta z_1 = 2.0\text{ m}$ $z_1 = -3.0\text{ m}$ $\rho_1 = 450\ \Omega\text{m}$ $\Delta z_2 = 6.0\text{ m}$ $z_2 = -7.0\text{ m}$ $\rho_2 = 50\ \Omega\text{m}$			
	WF1	WF2	WF3
PDA	<p> $\Delta z_1 = 4.25\text{ m}$ $z_1 = -3.35\text{ m}$ $\rho_1 = 364\ \Omega\text{m}$ $\Delta z_2 = 7.74\text{ m}$ $z_2 = -7.10\text{ m}$ $\rho_2 = 261\ \Omega\text{m}$ $RMS = 1.992\%$ </p>	<p> $\Delta z_1 = 6.55\text{ m}$ $z_1 = -4.28\text{ m}$ $\rho_1 = 340\ \Omega\text{m}$ $\Delta z_2 = 3.95\text{ m}$ $z_2 = -4.26\text{ m}$ $\rho_2 = 761\ \Omega\text{m}$ $RMS = 1.998\%$ </p>	<p> $\Delta z_1 = 2.1\text{ m}$ $z_1 = -2.84\text{ m}$ $\rho_1 = 424\ \Omega\text{m}$ $\Delta z_2 = 3.55\text{ m}$ $z_2 = -2.61\text{ m}$ $\rho_2 = 667\ \Omega\text{m}$ $RMS = 1.991\%$ </p>

the main study region.

It is also important to note that the RMS value is small in all solutions, therefore, the main contribution to the potential value comes from the shallow body and the medium.

5. Study case

In 2014, an ERT-3D study was carried out at the Osario pyramid (Chávez et al., 2018), located in the archaeological zone of Chichén Itzá, Yucatán, Mexico. The purpose of that study was to test the efficiency of the PDA technique to characterize a natural cavern in a limestone

stratum under the Osario pyramid, which was probably used for ancient Maya ceremonies. The inversion process, carried out with the commercial software EarthImager-3D® (Advanced Geosciences Inc., 2022), confirmed the existence of the cavern. Unfortunately, the cavity outcrops distorting its shape and vertical location, making it appear that a part of the pyramid was seated on the top of the cavern, which is not possible. In this work we return to the survey carried out in 2014 and invert the field-measured data with our PSO algorithm employing the three options of weighting functions to estimate the correct depth at which the cavern is located and to compare the obtained solutions.

The cavern, located in the archaeological zone of Chichén Itzá, is found on a subsoil formed by horizontal calcareous sedimentary strata of marine origin; specifically, the first 120 m are composed of massive recrystallized cavernous limestone with good permeability (Durán and Méndez, 2010). In 1897 Edward. H. Thompson (owner at that time of the Chichén Hacienda that included the archaeological zone of Chichén Itzá) explored the cavern under the pyramid, as described by Thompson and Thompson (1938), by descending through a narrow tunnel that starts at the top of the pyramid and connects to the mouth of the cavern by a stairway 3 m deep. According to Thompson's description, the cavern is "bottle-shaped" along the next 15 m, after which its shape becomes larger and more irregular (Fig. 4a).

The survey design of the 2014 study placed 72 electrodes, separated every 2.5 m, forming a $45\text{ m} \times 45\text{ m}$ square centred on the pyramid; also, the arrays Wenner-Schlumberger-Perimeter (WSP), Minimum Coupling (MC) and Wenner-Schlumberger-Gradient (WSG) were adapted obtaining a total of 3976 measurements (Fig. 4b). The description of the arrays is found in Chávez et al. (2018). In this acquisition, the shallowest data are at 3.72 m depth and the deepest at 21.21 m.

Fig. 5a was generated from the solution model obtained in Chávez et al. (2018) study; the upper side shows the resistivity variation due to the cavern and the heterogeneity of the medium. Fig. 5b depicts the surface ($\rho = 190 \Omega\text{m}$) that limit the cavern and the theoretical location of data; this indicates that there is no data through the cavern region. Fig. 5c and d are two vertical sections at $y = 17\text{ m}$ and $x = 13\text{ m}$, respectively; they show the lateral resistivity contrast that limit the cavern.

To solve the ambiguity in the height and depth of the cavern, we employed a prism buried in a homogeneous medium to represent it and the PSO algorithm to solve the vertical parameters. The medium resistivity was set to the value $\rho = 130 \Omega\text{m}$. The width and length of the prism were determined from the contrast resistivity showed in Fig. 5c and d; thus, the prism is between 9 m and 21 m in the X-direction and between 9 m and 32 m in the Y-direction. Therefore, the inversion algorithm only inverts the height, depth and resistivity ($\Delta z, z, \rho$) of the prism.

The inversion algorithm was carried out using the three options already described of WFs and different values for the number of particles ($NP = 8, 10$ and 50), maximum iterations ($iter = 100$ and 200) and inertia weight ($\chi = 0.7$ and 0.9); in addition, the condition to stop the inversion process if one of the particles left the solution space was added to avoid unrealistic solution models.

Fig. 6 presents the solutions obtained with 50 particles, 100 iterations and $\chi = 0.7$ for each option of WF. The values found are consistent with the z_{max} depth value reported by Thompson and Thompson (1938), which is 3 m deep (upper dotted line); however, the z_{min} depth value is slightly bigger in all four cases. The resistivity of the prisms is high in four tests and close to the upper limit of its search range [$1 \Omega\text{m}, 1000 \Omega\text{m}$], which corresponds to the actual contrast of materials in the subsurface. The RMS value is in the range [34%, 37%] in all the tests; this high value is because a single prism is not sufficient to represent the heterogeneity of the real subsoil that has much more variation; however, we do not seek to solve all the anomalous bodies in the subsurface, but only the vertical parameters of the cavern.

6. Conclusions

The PSO algorithm proved to be a simple, fast, and efficient inversion method for inverting ERT-3D data whether it employs a traditional or perimeter data acquisition technique. On its own (without weighting functions) it offers an acceptable solution in simple models. On the other hand, the inversion algorithm allows a very simple introduction of any weighting function, which is necessary when the PDA technique is employed to minimize the outcropping effect.

The results of Model 2 indicate that deep bodies located at poor-data areas are not solved correctly with any inversion method or weighting function.

The results of the two synthetic models indicate that the PSO method solves with excellent approximation the depth of the upper part of the anomalous bodies either with or without weighting functions, regardless of the type of acquisition.

The depth of the bottom of the anomalous bodies was correctly defined in the traditional acquisition by all weighting functions. When using the PDA technique, the height is not well fitted; however, the WF3 offered the best solution. This is in agreement to the definition of the function as it assigns a higher weight to deeper data.

For a correct determination of the vertical parameters when field data are inverted, it is necessary to provide *a priori* information to fit the parameters related to the X and Y directions.

In all inversion algorithms, it is necessary to set numerical parameters appropriate to the type of data to be inverted. The PSO algorithm requires defining the number of particles, maximum number of itera-

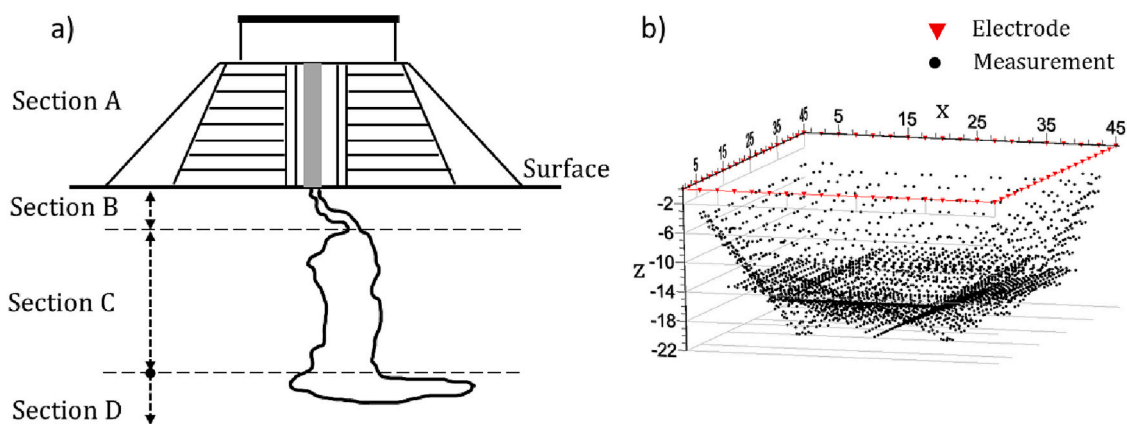


Fig. 4. (a) Drawing based on Thompson's sketch that shows the tunnel in the pyramid, the steps at the entrance of the cavern and the bottom of the latter indicated by sections A, B and D respectively. (b) 3D-view of the 3976 data measurements obtained with the 72 electrodes and the Wenner-Schlumberger-Perimeter (WSP), Minimum Coupling (MC) and Wenner-Schlumberger-Gradient arrays from the 2014 survey.

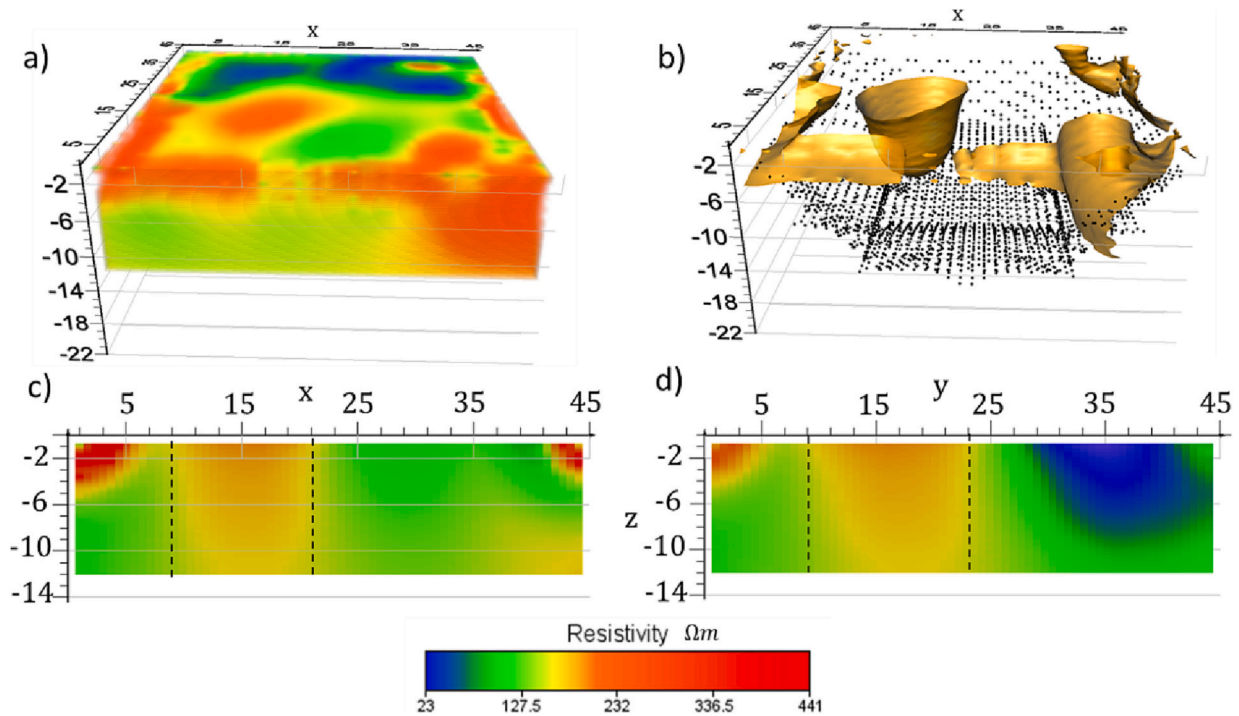


Fig. 5. Image generated from the model solution with LS from the 2014 survey. (a) Volume of resistivities. (b) Isosurface $\rho = 190 \Omega m$ and data measurements. (c) Vertical section at $y = 17$ m. (d) Vertical section at $x = 13$ m.

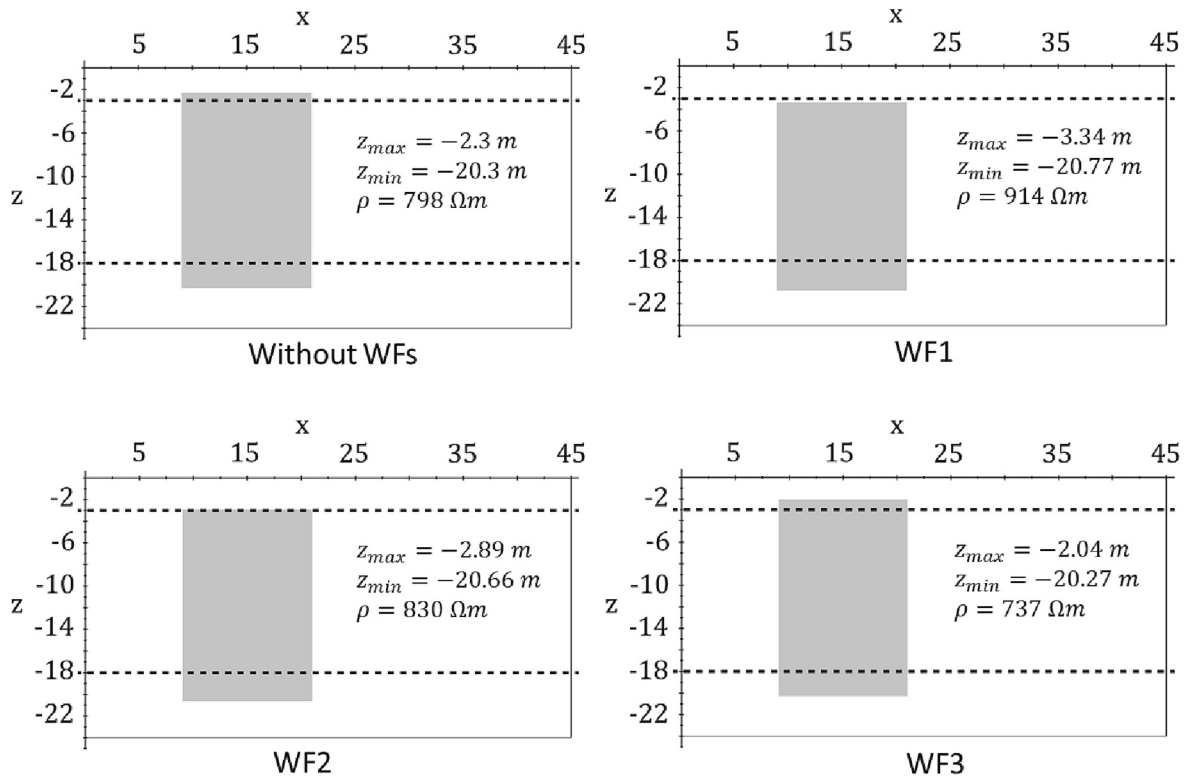


Fig. 6. Solutions obtained with the PSO algorithm with each Weighting Function. The dotted line indicates the depth range of the cavern reported by Thompson and Thompson (1938). The shaded rectangles correspond to the depth range of the solution prism. The depth of the upper (z_{max}) and lower (z_{min}) prism faces/sides, calculated from the model solution, are indicated.

tions, the inertia weight (γ) and the random adjustment coefficients for the search ranges (a and b), necessary for proper convergence.

Regarding the resistivity parameter, the PSO inversion algorithm

obtains values closer to the expected values of resistivity, both in the synthetic models and in the real case.

CRedit authorship contribution statement

Cruz-Alanís Shamara Z.: Conceptualization, Data curation, Formal analysis, Investigation, Methodology, Project administration, Software, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing. **Flores-Márquez E. Leticia:** Conceptualization, Formal analysis, Methodology, Project administration, Supervision, Validation, Writing – original draft, Writing – review & editing. **Tejero-Andrade Andrés:** Conceptualization, Formal analysis, Methodology, Project administration, Supervision, Validation. **León-Sánchez Adrián M.:** Software, Writing – review & editing. **Chávez-Segura René E.:** Conceptualization, Formal analysis, Methodology, Project administration, Resources, Supervision, Validation, Writing – review & editing.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

Data will be made available on request.

Acknowledgements

This work was partially funded by CONACYT through the “Becas Nacionales” program awarded to Shamara Z. Cruz-Alanís. The funding source is not involved in any decision related to this paper.

References

- Advanced Geosciences Inc., 2022. EarthImager 3D (v.1.5.3). AGI, Austin, Texas.
- Argote-espino, D., Tejero-Andrade, A., Cifuentes-Nava, G., Iriarte, L., Fariás, A., Chávez, R., López, F., 2013. 3D electrical prospecting in the archaeological site of El Pahñú, Hidalgo state, Central Mexico. *J. Archaeol. Sci.* 1213–1223.
- Azevedo, L., Demyanov, V., 2019. Multiscale uncertainty assessment in geostatistical seismic inversion. *GEOPHYSICS* 84, R355–R369.
- Basokur, A., Akca, I., Siyam, N., 2007. Hybrid genetic algorithms in view of the evolution theories with application for the electrical sounding method. *Geophys. Prospect.* 55, 393–406.
- Chávez, R.E., Chávez-Hernandez, G., Tejero, A., Alcantara, M., 2011. The “L-Array”: A 3D tool to characterize a fracture pattern in an urban zone. In: Leicester, UK: Conference Proceedings. Near Surface 2011-17th EAGE.
- Chávez, R.E., Cifuentes-Nava, G., Hernández-Quintero, E., Vargas, D., Tejero, A., 2015. Special 3D electric resistivity tomography array applied to detect buried fractures on urban areas: San Antonio Tecómitl, Milpa Alta, México. *Geofis. Int.* 425–434.
- Chávez, R., Tejero, A., Cifuentes, G., Argote-Espino, D., Hernández-Quintero, E., 2018. Karst detection beneath the pyramid of El Castillo, Chichén Itza, Mexico, by non-invasive ERT-3D methods. *Sci. Rep.* 8 (1), 15391.
- Cifuentes-Nava, G., Cabrer-Torres, R., Tejero, A., Hernández-Quintero, E., García-Serrano, A., Chávez, R.E., Cervantes-Solano, M., 2017. Tomografía de resistividad eléctrica 3D en la catedral de Morelia, México. *Arqueol. Iberoam.* 29–35.
- Dahlin, T., Bernstone, C., 1997. (s.f.). A roll-along technique for 3D resistivity data acquisition with multi-electrode arrays. In: Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems Proceedings, pp. 927–935. <https://doi.org/10.4133/1.2922474>.
- Debski, W., 2010. Seismic Tomography by Monte Carlo Sampling. *Pure Appl. Geophys.* 167, 131–152.
- Durán, R., Méndez, M., 2010. Biodiversidad y Desarrollo Humano en Yucatán. CICY. PPD-FMAM, CONABIO, SEDUMA, Mérida.
- Edwards, L., 1977. A modified pseudosection for resistivity and induced polarization. *Geophysics* 42, 1020–1036.
- Essa, K.S., Elhussein, M., 2018. PSO (Particle Swarm Optimization) for interpretation of magnetic anomalies caused by simple geometrical structures. *Pure Appl. Geophys.* 175, 3539–3553.
- Fernández-Martínez, J.L., Fernández-Alvarez, J.P., García-Gonzalo, M.E., Menéndez-Pérez, C.O., Kuzma, Heidi A., 2008. Particle Swarm Optimization (PSO): A simple and powerful algorithm family for geophysical inversion. In: SEG Annual Meeting, pp. 3568–3571. Las Vegas.
- Fischanger, F., Morelli, G., LaBrecque, D., Occhi, M., 2007. Monitoring resins injection with 3D electrical resistivity tomography (ERT) using surface and multi-borehole electrode arrays. In: SAGEEP 20th. Denver, Colorado.
- Flores-Márquez, E.L., Tejero-Andrade, A., León-Sánchez, A., Arango-Galván, C., Chávez-Segura, R., 2015. Two algorithms to compute the electric resistivity response using Green's functions for 3D structures. *Geofis. Int.* 54 (1), 7–20.
- Göktürkler, G., Balkaya, Ç., 2012. Inversion of self-potential anomalies caused by simple-geometry bodies using global optimization algorithms. *J. Geophys. Eng.* 9 (5), 498–507.
- Hvozdar, M., Kaikkonen, P., 1998. An integral equation solution of the forward D. C. geoelectrical problem for a 3-D body of inhomogeneous conductivity buried in a halfspace. *J. Appl. Geophys.* 39, 95–107.
- Kennedy, J., Eberhart, R., 1995. Particle Swarm Optimization. In: International Conference on Neural Networks. Conference Proceedings, 4. IEEE, pp. 1942–1948.
- León Sánchez, A.M., 2004. Modelación de la respuesta eléctrica de estructuras 3-D en un semiespacio conductor (Degree dissertation, National Autonomous University of Mexico, Mexico). Retrieved from: <https://repositorio.unam.mx/contenidos/3536137>.
- Loke, M., 2010. 2-D and 3-D Electrical Imaging Surveys. Tutorial. Obtenido de: <http://www.geotomosoft.com/>.
- Loke, M.H., 2022. Tutorial: 2D and 3D Electrical Imaging Surveys.
- Loke, M., Barker, R., 1996a. Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion. *Geophys. Prospect.* 44, 499–523.
- Loke, M., Barker, R., 1996b. Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-Newton method. *Geophys. Prospect.* 44 (1), 131–152.
- Menke, W., 1989. Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory, Revised Edition ed. Academic Press, Inc.
- Monteiro Santos, F.A., 2010. Inversion of self-potential of idealized bodies' anomalies using particle swarm optimization. *Comput. Geosci.* 36, 1185–1190.
- Poli, R., Kennedy, J., Blackwell, T., 2007. Particle swarm optimization. An overview. *Swarm Intell.* 1, 33–57.
- Sen, M.K., Stoffa, P.L., 1995. Global Optimization Methods in Geophysical Inversion. Elsevier Scientific Publishing Company.
- Sharma, S., Kaikkonen, P., 1999. Global optimization of time domain electromagnetic data using very fast simulated annealing. *Pure Appl. Geophys.* 155, 149–168.
- Tejero, A., Cifuentes, G., Chávez, R., López-Gonzalez, A., 2015. “L” and “Corner” arrays for 3D electrical resistivity tomography: An alternative for urban zones. *Near Surface Geophysics*.
- Thompson, E., Thompson, E., 1938. The Heigh Priest Grave. *Antropological Series, Field Museum of Natural History*, 27(1). Obtenido de: <https://www.fieldmuseum.org/>.
- Vásquez Banda, G., 2022. Analisis de arreglos no convencionales (Unpublished degree dissertation). National Autonomous University of Mexico, Mexico.
- Wang, D., Tan, D., Liu, L., 2018. Particle swarm optimization algorithm: an overview. *Soft. Comput.* 22, 387–408. <https://doi.org/10.1007/s00500-016-2474-6>.