



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

**ESTUDIO DEL EFECTO GRADIENTE DE PRESIÓN PULSÁTIL SOBRE EL FACTOR
DE FRICCIÓN EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS.**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

PRESENTA

SERRANO MARTÍNEZ DANIEL MIGUEL.

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA.

ASESORES

**DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA
M. en C. LUIS ANTONIO RAMIREZ TORRES**

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



AGRADECIMIENTOS

AGRADEZCO LA **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**, POR SER EL MEDIO POR EL CUAL COMPLETÉ MIS ESTUDIOS A NIVEL MEDIO SUPERIOR, Y SUPERIOR, POR TODAS LAS FACILIDADES Y BECAS OTORGADAS Y PORQUE EN SUS INSTALACIONES CONOCÍ COMPAÑEROS Y DOCENTES QUE CAMBIARON MI VIDA.

A LA **FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA** POR PERMITIRME DESARROLLARME Y CRECER DENTRO DE SUS INSTALACIONES, ASÍ COMO DARME LAS HERRAMIENTAS PARA PODER DESARROLLAR EL PRESENTE TRABAJO Y DEFENDERME EN EL CAMPO LABORAL.

A PROFESORES, MAESTROS Y DOCTORES DEL **LABORATORIO DE FENÓMENOS DE TRANSPORTE Y REOLOGÍA DE FLUIDOS COMPLEJOS (UMIEZ, L-7)**, POR QUE EN ELLOS ENCONTRE EL APOYO INCONDICIONAL Y LA GUÍA PARA PODER REALIZAR ESTE TRABAJO, ASÍ COMO LAS OPORTUNIDADES DE EXPONERME, Y RECIBIR COMENTARIOS Y CONSEJOS QUE ME AYUDARON A CRECER.

ESTE TRABAJO SE LLEVO A CABO GRACIAS AL PROGRAMA DE APOYO A PROYECTOS DE INVESTIGACION E INNOVACION TECNOLÓGICA <<**PAPIIT IN102823**>> AGRADEZCO A LA DGAPA-UNAM POR LA BECA RECIBIDA.





Dedicatorias

A mi madre, **Rosalba Martínez García**, por todo tu amor, comprensión, esfuerzo y apoyo incondicional, te agradezco hoy y siempre, porque gracias a tu disposición alcancé lo que jamás me pude imaginar, gracias a ti amada madre soy quien soy y espero poder durante mi vida llenarte de orgullo y felicidad, este trabajo es en tu nombre.

A mi segunda Madre, **Isabel García Velarde**. Abuelita, de ti aprendí muchas de las cosas más valiosas de la vida, entre ellas el amor, la paciencia y la misericordia, todo esto fue clave en mi formación, gracias por todo el cariño y el apoyo, este trabajo es en tu nombre.

A mi Abuelo, **Elfego Martínez vega**. Donde quiera que estés este trabajo te lo dedico con mucho cariño abuelito.

A mi hermana, **Brenda Dennise Serrano Martínez**. Que este trabajo y todo lo que he logrado te sirva punto de partida, sé que lo que yo pude lograr tú puedes superarlo con facilidad, eres una gran persona, una excelente estudiante y una profesional excepcional, todo el cariño y apoyo que me has brindado me han hecho la persona que soy, te agradezco mucho por llenarme de orgullo e inspiración.

A mi hermano, **B. Alfredo Serrano Martínez**. Hermano, espero que cumplas todo lo que te propongas. Hasta hoy día no deja de maravillarme el verte crecer y superarte, poder ser testigo de tu gran talento, sé que serás un hombre excepcional y ejemplar, eres mi orgullo.

Al **Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia**. Si me preguntaran como quién me gustaría ser, la respuesta sería que mi meta es parecerme a usted, claramente. Espero tenga siempre muy en cuenta todo el impacto positivo que el tener la oportunidad de aprender de usted dejó en mi vida. Le agradezco mucho la oportunidad de elaborar en conjunto esta tesis a pesar de mis deficiencias. Trabajo día a día para mejorar, y hacer valer todo el apoyo, y todo lo que aprendí como su alumno. Respetuosamente dedico usted y su familia este trabajo.

Al **Dr. Ricardo Mendoza Vizcaya**. Le agradezco por toda su paciencia desde que fui su alumno hasta ahora, por todo el apoyo durante la realización de este trabajo y por ser un ejemplo enorme de una persona, preparada, disciplinada, capaz, e inteligente, este trabajo es sin duda gracias a usted.

Al Profesor **César Ernesto Belmares Velázquez**. Es claro que las enseñanzas de un buen profesor duran para toda la vida, y no puedo pensar en que hubiera sido de mí de no haberte conocido, agradezco todas las herramientas, consejos y charlas contigo, aún más el hecho de que eres del grupo de maestros que sembró en mí el amor por las matemáticas y la física, estoy seguro de que todos tus alumnos nos sentimos orgullosos de ti, y del excelente trabajo que has hecho año con año en formar a los futuros científicos de este país, que este trabajo sea en tu nombre.



A la Q.F.B **Paula Aranda Lozada**. Gracias por enseñarme que no hay límites en lo que se puede alcanzar si uno se lo propone, por enseñarme la cara amable de la química, y por recomendarme estudiar esta carrera, que se volvió mi vida, a usted este trabajo.

A **F. Javier Moranchel Reyes**, Por ser mi hermano de otra madre, mi compañero durante ya media vida, te agradezco por todo tu cariño y apoyo incondicional, por estar ahí en los años más difíciles de mi vida, este trabajo significa mucho para mí y te lo dedico con mucho respeto y admiración.

A **Francisco A. Guzmán Guzmán**. Por siempre estar, por enseñarme tanto, eres una gran persona y se nota porque siempre estas rodeado de gente que te aprecia, tú y tu familia son y serán una parte importante en mi vida, sé que pronto podre tener la dicha de verte obtener tu título de ingeniero. A ti y tu familia este trabajo.

A **Adolfo Montoya Carrasco**. Increíble como la vida te permite conocer gente tan excepcional. Por ser mi compañero y amigo, por ayudarme tanto, por darme siempre tu opinión sincera, te agradezco infinitamente, espero pronto poder verte convertido en todo un ingeniero y estudiando tu siguiente carrera, con mucho afecto te dedico este trabajo.

Al Ingeniero químico, **Christian Jhasmany P. R. Montoya Méndez**. Querido amigo. Te agradezco por apoyarme tanto en los primeros años de la licenciatura, aprendí muchísimo. Aprovecho para externar mi orgullo y admiración, sé que vas a llegar tremendamente lejos. A ti este trabajo.

Finalmente, y no menos importante a mis familiares compañeros y amigos dentro y fuera de la licenciatura, quienes me apoyaron siempre e impulsaron a seguir adelante.

Panta-Rei



Abstract

In this work, a methodology for the obtention of pulsatile pressure gradient related friction factors for non-Newtonian fluids is proposed. A small cylinder of radius (R) and length (L) is studied as a first approximation. A pulsatile pressure gradient and lineal Navier slip conditions are applied thereafter. This phenomenon is reviewed through Ellis, Phan-Thien-Tanner & Reiner-Philippoff constitutive equations; Volumetric flow, apparent fluidity, and friction factor expressions are obtained, a pulsatile perturbation is introduced to obtain a desired mathematical expression of friction factors. Finally, biological rheologic data is plugged into the obtained expressions so a study is carried on for patients suffering hypercholesterolemia.

Keywords: Rheology, Hypercholesterolemia, Non-Newtonian Fluids, Pulsatile pressure gradient, Friction Factor, Ellis, Phan-Thien-Tanner, Reiner-Philippoff.





Contenido.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Definición de flujo pulsátil	2
1.2 Reología de la sangre humana	3
1.3 Flujo pulsátil en sistemas biológicos.	5
1.4 Objetivos:	6
1.4.1 Objetivo general:.....	6
1.4.2 Objetivos particulares:	7
1.5 Hipótesis:	7
1.6 Distribución del material:	7
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.....	9
2.1 Fluido Newtoniano.....	10
2.2 Ecuación de continuidad.....	11
2.3 Ecuación de movimiento.....	11
2.4 Perfil de velocidades mecanismos deslizantes (Deslizamiento lineal de Navier).	12
2.5 Flujo Volumétrico mecanismos deslizantes (Deslizamiento lineal de Navier).	13
2.6 Factor de fricción de Darcy (Deslizamiento lineal de Navier).	14
CAPÍTULO 3. FLUIDOS NO-NEWTONIANOS.	15
3.1 Modelos no newtonianos.	15
3.1.2 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia).....	16
3.1.3 Perfil de velocidades con deslizamiento (LDP-DLN).	17
3.1.4 Flujo Volumétrico con deslizamiento.....	18
3.1.5 Factor de Fricción de Darcy con deslizamiento.....	18
CAPÍTULO 4. MODELOS NO-NEWTONIANOS INELÁSTICOS Y ELÁSTICOS	20
4.1 Modelos No-Newtonianos inelásticos	21
4.1.1 Modelo de Ellis.....	21
4.1.1.1 Obtención de perfil de velocidad mecanismos deslizantes.....	21
4.1.1.2 Obtención del Caudal Volumétrico mecanismos deslizantes	22
4.1.2 Modelo de Reiner-Philippoff.....	22
4.1.2.1 Obtención del perfil de velocidades.....	23
4.1.2.2 Obtención del Caudal volumétrico:	23
4.1.2.3 Obtención de la fluidez aparente:	23
4.2 Modelos No-Newtonianos Elásticos.....	23
4.2.2 Phan-Thien-Tanner.	23
4.2.2.1 Obtención del perfil de velocidades.....	24
4.2.2.2 Flujo volumétrico:.....	24
4.2.2.3 Fluidez Aparente:.....	24
CAPITULO 5. VARIABLES Y ECUACIONES ADIMENSIONALES.....	25
5.1 Variables y Grupos adimensionales:.....	26
5.1.1 Fluidez Reducida:	26
5.1.2 Fluidez aparente reducida:	26
5.1.3 Mecanismos deslizantes:.....	26



5.1.4 Número de Deborah:.....	26
5.1.5 Factor de fricción:.....	27
5.2 Escalamiento de ecuaciones:.....	27
5.2.1 Obtención de los perfiles adimensionales para la ecuación constitutiva de Ellis:.....	27
5.2.2 Obtención de los perfiles adimensionales para la ecuación constitutiva de Reinner-Philippoff:.....	28
5.2.3 Obtención de los perfiles adimensionales para la ecuación constitutiva de Phan-Thien-Tanner:.....	29
CAPITULO 6. FACTOR DE FRICCIÓN DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS	31
6.1 Factor de Fricción de fluidos no newtonianos.	32
6.2 Introducción del gradiente de presión pulsátil:.....	33
6.3 Metodología para la obtención de factores de fricción de fluidos no newtonianos.....	37
CAPITULO 7. SIMULACIONES Y RESULTADOS	39
7.1 Predicciones teóricas.....	40
7.1.1 Fluidez aparente (Teoría a orden cero).	40
7.1.2 Factor de Fricción (Teoría a orden cero).	41
7.1.3 Factor de Fricción gradiente de presión pulsátil (Teoría a orden uno).	42
7.1.4 Comparativa del factor de fricción a orden cero y orden uno.....	43
7.2 Aplicaciones con datos de sangre en función del colesterol.....	44
7.3 Análisis de resultados.	47
CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	48
8.1 Conclusiones.....	49
8.2 Trabajo Futuro	50
9. BIBLIOGRAFÍA	51



Lista de tablas

Tabla 6.1 Escalamiento de ecuaciones del modelo Reiner-Philippoff	3
Tabla 7.1 Propiedades materiales del modelo Tanner-Reiner-Philippoff	4
Tabla 7.2 Números adimensionales del modelo Reiner-Philippoff	¡Error!
Marcador no definido.	





Lista de figuras

- Figura 1-1 Frotis de sangre de (a) colesterol alto y (b) bajo (L3 derecha) muestra de colesterol
- Figura 1-2 Organización del trabajo desarrollado en la tesis.
- Figura 2-1 Capilar horizontal de radio R.
- Figura 6-1 Metodología para la obtención de factores de fricción de fluidos no newtonianos.
- Figura 7-1 Simulaciones numéricas de fluidez aparente (Orden cero) efectos deslizantes.
- Figura 7-2 Factor de fricción vs del esfuerzo reducido.
- Figura 7-3 Factor de fricción vs del esfuerzo reducido en función del coeficiente de deslizamiento.
- Figura 7-4 Aplicaciones a un fluido biológico comparativa.
- Figure 7-5 Aplicaciones a un fluido biológico sangre con colesterol bajo, medio y alto.
-
-

**Nomenclatura:****Vectores y tensores:**

σ	Tensor de esfuerzos viscoso	[=] [Pa]
$\dot{\gamma}$	Tensor rapidez de deformación	[=] [1/s]
∇V	Tensor gradiente de velocidad	[=] [1/s]
∇V^T	Tensor gradiente de velocidad transpuesto	[=] [1/s]
V	Vector de velocidad	[=] [m/s]
g	Vector de aceleración gravitacional	[=] [1/s]

Operadores Matemáticos:

$\nabla = \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$	Operador nabla	[=] [1/m]
$\partial/\partial x^i$	Derivada parcial de la coordenada x^i	[=] [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia	[=] [1/m]
π	Constante Pi	[=] [1]

Variables Dimensionales:

r, θ, z	Coordenadas polares (Geometría cilíndrica).	[=] [m, 1, m]
R	Radio mayor del capilar.	[=] [m]
D	Diámetro del capilar.	[=] [m]
L	Longitud del capilar.	[=] [m]
V_z	Componente axial del vector de velocidad.	[=] [m/s]
V_r	Componente radial del vector de velocidad.	[=] [m/s]
V_θ	Componente angular del vector velocidad.	[=] [m/s]
Q	Flujo volumétrico.	[=] [m ³ /s]
∇P	Gradiente de presión.	[=] [Pa]
∇P_z	Gradiente de presión en dirección axial.	[=] [Pa]
f	Frecuencia senoidal	[=] [1/s]

Letras Griegas:

β	Coefficiente de deslizamiento (Lineal de Navier)	[=] [M/LT/L]
ϕ	Fluidez.	[=] [1/Pa]
ϕ_{app}	Fluidez aparente.	[=] [1/Pa]
ϕ_0	Fluidez a bajo corte.	[=] [1/Pa]
ϕ_∞	Fluidez a alto corte.	[=] [1/Pa]
ρ	Densidad.	[=] [Kg/m ³]



μ
 η

Viscosidad dinámica (Newtoniana).
Viscosidad dinámica (No-Newtoniana).

[=] [Pa s]
[=] [Pa s]



Nomenclatura (Continuación):

η_{app}

Viscosidad Aparente.

[=] [Pa s]

η_0

Viscosidad a bajo corte.

[=] [Pa s]

η_{∞}

Viscosidad a alto corte.

[=] [Pa s]

ω

Velocidad angular.

[=] [1/s]

ε

Parámetro de alargamiento P-T-T.

[=] [1]

λ

Tiempo de relajación.

[=] [s]

ζ

Longitud reducida.

[=] [1]

α

Parámetro de ajuste Ellis.

[=] [1]

σ_s

Parámetro de ajuste R-P.

[=] [Pa]

σ_w

Esfuerzo en la pared

[=] [Pa]





GLOSARIO

Deformación: Cambio de posición con respecto a otra.

Ecuación constitutiva: Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, esfuerzo, deformación).

Ecuación de continuidad: Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.

Ecuación de movimiento: Segunda ley newton aplicada a un medio continuo.

Esfuerzo en la pared: Esfuerzo evaluado en la pared.

Estado estacionario: Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema es dependiente del tiempo.

Fluido: Aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversible.

Flujo cortante: Flujo consecuente a la aplicación una fuerza tangencial que causa una deformación continua e irreversible.

Flujo homogéneo: Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.

Fluido incompresible: Fluido que tiene una densidad constante.

Fluido newtoniano: Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.

Fluido no-newtoniano: La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.

Fluido viscoelástico: Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.

Flujo oscilante: Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.

Flujo pulsátil: Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.

Flujo volumétrico: Volumen que entra o sale del sistema por unidad de tiempo.

Frecuencia Angular: Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.

Función estocástica: Función probabilística que evoluciona en el tiempo.

Rapidez de deformación: Rapidez con la que se deforma un fluido.

Tensor de Esfuerzo: Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.

Tiempo de relajación: Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.

Tiempo de retardo: Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.

Velocidad promedio: Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.

Viscoelasticidad lineal: Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.

Viscoelasticidad no lineal: Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.

Viscosidad: Es una medida de la resistencia a fluir de un sistema.



CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN





1.1 Definición de flujo pulsátil

El estudio de la reología de sistemas pulsátiles ha sido un tema recurrente en la investigación en fluidos newtonianos y no-newtonianos (Bird et al. 1977). La idea principal es la de modificar el gradiente de presión con el fin de obtener una modificación en el flujo volumétrico con respecto a aquel a gradiente de presión constante (Herrera-Valencia et al. 2017, 2019).

El efecto del flujo pulsátil ha sido utilizado para describir el flujo en sangre con bajo, medio y alto colesterol, debido al estilo de vida que se lleva actualmente. Si suponemos que las venas son aproximables por medio de capilares inextensibles y suponiendo que los mecanismos inerciales y gravitacionales son pequeños, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 + \varepsilon \nabla p_1 = \nabla p_0 + \varepsilon \nabla p_0 n(t) = \nabla p_0 (1 + \varepsilon n(t)) \quad (1-1)$$

En la Ec. (1-1), $\nabla p(t)$ es el gradiente de presión pulsátil, el cual puede descomponerse en dos contribuciones asociadas al gradiente de presión constante $\nabla p(t)_0$. El segundo término $\nabla p(t)_1$ se considera una perturbación del sistema. Para facilitar los cálculos, la contribución $\nabla p(t)_1$ se aproxima mediante el producto del gradiente de presión constante $\nabla p(t)_0$ y una función estocástica que describe las variaciones temporales del gradiente de presión constante. Note que ε es un parámetro de perturbación que puede considerarse como una amplitud de la función estocástica $n(t)$ (Lin et al. 2015; Herrera-Valencia et al. 2017, 2019).

El aumento en el flujo volumétrico puede ser expresado de la siguiente manera y se conoce también como mejora del flujo volumétrico.

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (1-2)$$

En donde $Q(t)$ es el flujo volumétrico pulsátil, $\langle Q(t) \rangle$ es el promedio del flujo volumétrico pulsátil el cuál se define como:

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} Q(t) dt \quad (1-3)$$

Y el flujo volumétrico se expresa mediante una doble integral volumétrica:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r,t) r dr d\theta \quad (1-4)$$

Al integrar la Ec. (1-4) con respecto a la coordenada radial r , se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(t) = \pi R_2^2 V_z(R_2,t) - \pi R_1^2 V_z(R_1,t) - \pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial V_z}{\partial r}(r,t) r^2 dr \quad (1-5)$$



La rapidez de deformación se puede expresar como el producto de la función fluidez y el esfuerzo cortante τ_z , respectivamente:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z}(r,t) = \varphi(r,t) \sigma_{zr}(r,t) \quad (1-6)$$

Del balance de momento, se tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{zr}(t) = \frac{1}{2} \nabla p(t) r + \frac{C_1}{r} \quad (1-7)$$

Combinando las Ecs. (1-5 y 1-7), se tiene la expresión final para el flujo volumétrico:

$$Q(t) = \pi R_2^2 V_z(R_2,t) - \pi R_1^2 V_z(R_1,t) - \pi \int_{R_1}^{R_2} \varphi(r,t) \left(\frac{1}{2} \nabla p(t) r^2 + C_1 \right) r dr \quad (1-8)$$

Asumiendo que el perfil de velocidades (Ec. 1-6) se puede calcular de la Ec. (1-6), por lo que, se tiene la siguiente expresión:

$$V_z(r,t) = V_z(R_1,t) + \int_{R_1}^r \varphi(\bar{r},t) \sigma_{zr}(\bar{r},t) d\bar{r} \quad (1-9)$$

Combinando la Ec. (1-7) y (1-9), se tiene lo siguiente:

$$V_z(r,t) = V_z(R_1,t) + \int_{R_1}^r \varphi(\bar{r},t) \left(\frac{1}{2} \nabla p(t) \bar{r} + \frac{C_1}{\bar{r}} \right) d\bar{r} \quad (1-10)$$

Para deducir la constante C_1 , se puede utilizar la condición de frontera $V_z(R_2)$, por lo que la Ec. (1-10) toma la forma:

$$C_1 = \frac{V_z(R_2,t) - V_z(R_1,t) - \frac{1}{2} \nabla p(t) \int_{R_1}^{R_2} \varphi(r,t) r dr}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{\varphi(r,t)}{r} dr} \quad (1-11)$$

En el caso de un tubo y no una corona circular, la constante C_1 es igual a cero, i.e., $C_1 = 0$. En este caso, se pueden obtener expresiones analíticas para el flujo volumétrico dado por la Ec. (1-2) en función de las propiedades materiales (Herrera-Valencia et al. 2016).

1.2 Reología de la sangre humana

La sangre es un fluido formado por eritrocitos (glóbulos rojos RCB), leucocitos (glóbulos blancos) y trombocitos (plaquetas), que son forzados por un gradiente de presión periódica a través del cuerpo circulante humano (Moreno et al. 2013, 2015). Los glóbulos rojos constituyen alrededor del 45% de la sangre total en volumen, el plasma alrededor del 54.3% y los glóbulos blancos alrededor del 0.7% (Moreno et al. 2013, 2015). Desde un punto de vista reológico, la sangre (plasma y células) es un fluido no newtoniano complejo, y la principal explicación de su comportamiento complejo (viscoelasticidad, adelgazamiento por corte, tixotropía y esfuerzo de cedencia) se encuentra en la capacidad de agregación,



desagregación, deformación, orientación y migración de los eritrocitos (Moyers-Gonzalez, y Owens 2010; Owen, 2009; Moyers-Gonzalez, et al., 2008 a-c; Herrera et al. 2017). En muchos casos, el flujo de sangre dentro de los vasos se ve fuertemente afectado por los niveles de colesterol y la hiperglucemia en las venas, después de muchos años de hipercolesterolemia que es un trastorno en el cuerpo humano debido a un exceso de colesterol (Apostolids et al. 2015, 2016; Moreno et al. 2013, 2015, Herrera-Valencia et al. 2017). Esta condición puede conducir a otras enfermedades como: la aterosclerosis acelerada, angina de pecho, infarto, estenosis, obesidad y diabetes tipo 2 debido a trastornos alimentarios y predisposiciones genéticas (Moreno et al. 2013, 2015, Herrera-Valencia et al. 2017; Sánchez-Villavicencio et al. 2017), que han alcanzado el estatus de epidemia en todo el mundo, y herramientas como el modelo matemático, simulación computacional (EL-Shahed 2003; Ghasemi et al. 2016; Kolbasov et al. 2016) y la medicina alternativa basada en la plantas tradicionales utilizadas por médicos y aborígenes son alternativas que permitirían encontrar soluciones a estos problemas (Sánchez-Villavicencio et al. 2016 y referencias ahí citadas).

El exceso de colesterol total en la sangre provoca que la repulsión electrostática natural entre las células disminuya, esto favorece que las células sanguíneas se aglomeren y formen una red más rígida que la que naturalmente se forma cuando el colesterol total está en menor cantidad. El hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre ~ 200 mg/d) tiene grandes repercusiones en la fisiología del sistema cardiovascular; la sangre con concentraciones aumentadas de colesterol total presenta características bioquímicas y mecánicas diferentes a las de sangre con concentraciones menores. Dichas características son las siguientes: presenta una mayor viscosidad que la sangre, tiende a formar estructuras más complejas y difíciles de desagregar además de que el carácter pseudoplástico de este fluido aumenta. Bioquímicamente hablando, al hipercolesterolemia se le atribuye una mayor producción de especies reactivas de oxígeno las cuales deterioran el sistema antioxidante del cuerpo humano. Las propiedades de agregación de las células sanguíneas en este caso los glóbulos rojos, obedecen a una teoría muy simple, la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electrostática natural entre dos células. Las propiedades de agregación de las células sanguíneas en este caso los glóbulos rojos, obedecen a una teoría muy simple la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electrostática natural entre dos células.



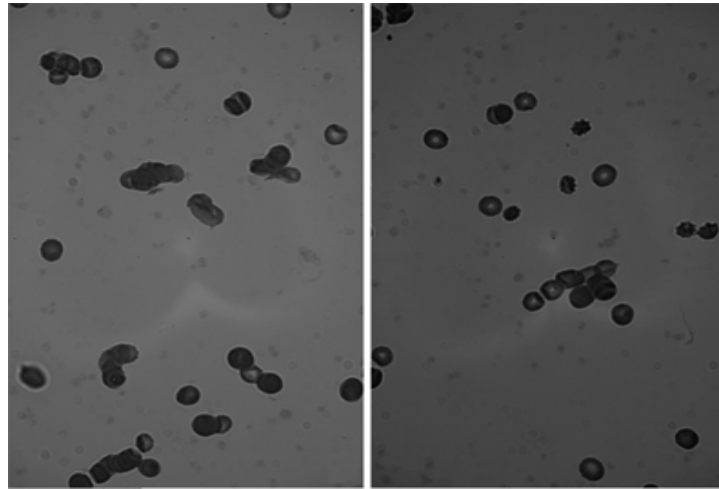


Figura 1-1. Frotis de sangre de (a) colesterol alto y (b) bajo (L3 derecha) muestra de colesterol (Herrera-Valencia et al. 2017, 2019).

La sangre, por otro lado, es un sistema que está formado por una fase dispersa (plasma), que en esencia es un fluido newtoniano, pero tiene partículas en suspensión (fase dispersa) que interactúan entre sí con el plasma. Esta fase dispersa está compuesta de células cuyas membranas tienen una carga eléctrica negativa y sustancias como el colesterol. Esto da lugar a un sistema complejo cuya respuesta reológica es muy variada dependiendo del sistema de flujo y las condiciones en las que se estudie. A bajas deformaciones de corte, la sangre muestra conglomerados de partículas y todas las estructuras están orientadas al azar (fase dispersa) y por lo tanto mayor resistencia al flujo. En la segunda etapa a esfuerzos moderados, los constituyentes de la sangre (eritrocitos, fase dispersa) se orientan más en la dirección de flujo, lo que da origen a estructuras que cada vez se oponen menos al flujo y por lo tanto la viscosidad disminuye. Estas estructuras no son estables pues al dejar de fluir, el sistema recobra su estructura original y la viscosidad se eleva. Dentro del cuerpo humano, la sangre está sometida a rapidez de deformación del orden de 1-100 s⁻¹ que corresponde a la parte central del reo-grama teórico.

1.3 Flujo pulsátil en sistemas biológicos.

Uno de los sistemas más estudiados es la sangre humana. Esta es una suspensión que básicamente es una solución de plasmática que puede ser descrita mediante un modelo simple como el newtoniano en donde su viscosidad es constante (Calderas et al. 2015). La contribución viscoelástica de la sangre está dada por el hematocrito el cual contiene los eritrocitos que son las estructuras en forma de discos oblicuos (Calderas et al. 2015; Moreno et al. 2015).

El flujo pulsátil sanguíneo ha sido estudiado mediante ecuaciones constitutivas viscoelásticas no lineales, que describen los cambios de la estructura en función de la fuerza cortante (Herrera-Valencia et al. 2016, 2017, 2019). En estas investigaciones se demostró



que el aumento en el flujo pulsátil se debe a que el pulso destruye, alinea y orienta los eritrocitos en dirección del flujo (Herrera-Valencia et al. 2019). Este mecanismo de adelgazamiento de la sangre permite suponer que el corazón representado por el gradiente de presión pulsátil tiene la capacidad de ajustar la frecuencia con el fin de disminuir la viscosidad de la sangre (Herrera-Valencia et al. 2019).

Recientemente, investigaciones en el flujo sanguíneo, se ha centrado en estudiar el flujo en oclusiones periféricas y centrales en venas inelásticas y elásticas en el régimen de viscoelasticidad lineal. En estos trabajos, el fluido de estudio ha sido caracterizado por medio de una ecuación constitutiva viscoelástica lineal tipo Maxwell (Colleparado-Guevara y Poiré 2007).

Estas investigaciones demostraron que cuando el fluido es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante obtuvieron una relación entre el flujo volumétrico y un gradiente de presión pulsátil en el espacio de Fourier (Colleparado-Guevara y Poiré 2007). La relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión la llamaron permeabilidad dinámica (Colleparado-Guevara y Poiré 2007; López de Haro et al. 1996; 2001).

En resumen, su investigación demostró que a bajas frecuencias; $\omega \rightarrow 0$, la permeabilidad dinámica es baja cuando hay una oclusión periférica y central. Este resultado puede ser entendido debido a que hay una reducción el área de sección transversal de flujo, sino que sucede a tiempos largos en la transición de estado no estacionario a estacionario.

El segundo punto, se debe al desplazamiento del máximo en las curvas resonantes hacia mayores valores en la frecuencia debido a la oclusiones centrales y periféricas (Colleparado-Guevara y Poiré 2017). Otro hecho importante, es que los máximos observados en las curvas resonantes son mayores, en las obstrucciones centrales que en las periféricas. Una posible explicación de esto, se debe de a la fricción que el fluido experimenta debido al flujo en las dos geometrías. Finalmente, Colleparado-Guevara y Poiré 2017 utilizan un gradiente de presión pulsátil y demuestran que, para ciertos valores de frecuencia, se puede obtener la misma respuesta entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión a través de la permeabilidad dinámica del sistema. Un hecho importante, es que este tipo de análisis se han analizado en geometrías capilares inextensibles, sin embargo, la mayoría de los sistemas biológicos de interés, se dan en capilares biológicos extensibles (Flores et al. 2016).

1.4 Objetivos:

A continuación, se presentan los objetivos generales y particulares del presente trabajo de licenciatura.

1.4.1 Objetivo general:





Contribuir al entendimiento de los factores de fricción para fluidos no newtonianos sometidos a un gradiente de presión constante y pulsátil tomando en cuenta los mecanismos deslizantes.

1.4.2 Objetivos particulares:

- Obtener las expresiones analíticas de velocidad, caudal volumétrico, fluidez aparente y factor de fricción en un sistema capilar sometido tanto a un gradiente de presión constante como a uno pulsátil considerando los mecanismos deslizantes del sistema de flujo. Empleando para ello las ecuaciones constitutivas de Ellis, Reiner-Philippoff y Phan-Thien-Tanner (fluido inelástico, elástico y viscoelástico).
- Escalar las expresiones obtenidas por medio de grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan el sistema estudiado.
- Analizar el efecto conjunto pulso-deslizamiento sobre el factor de fricción.
- Proponer una metodología estructurada para la obtención de factores de fricción en sistemas de flujo cilíndricos, no flexibles, sometidos a un gradiente de presión pulsátil en donde se toman en cuenta los mecanismos deslizantes.
- Aplicar lo anterior utilizando datos reológicos reales obtenidos de muestras sanguíneas de pacientes que sufren de hipercolesterolemia con el fin de analizar por medio de simulaciones numéricas el efecto que genera el pulso sobre el factor de fricción.

1.5 Hipótesis:

Si el efecto de la incorporación de un gradiente de presión pulsátil modifica el flujo volumétrico entonces, este podrá ser cuantificado a través del factor de fricción no-newtoniano

1.6 Distribución del material:

Este trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera: **El capítulo 1**, contiene definiciones generales relevantes, los objetivos e hipótesis, así como una introducción que revisita principalmente los trabajos precursores en materia de flujo pulsátil y fluidos biológicos; **El capítulo 2**, contiene el marco teórico en donde se presenta una primera aproximación general del sistema a estudiar y se explican a detalle los balances y ecuaciones necesarios para su resolución; **El capítulo 3**, presenta los modelos reológicos no newtonianos en específico, el modelo de Ostwald de Waele para el cual se obtienen los perfiles de velocidad, caudal volumétrico, y fluidez aparente; En el **capítulo 4**, presenta los

modelos no newtonianos inelásticos y elásticos (Ellis, Reinner-Philippoff, y Phan-Thien-Tanner) para los cuales se obtienen los perfiles de velocidad, caudal volumétrico, y fluidez aparente En el **capítulo 5**, se proponen variables adimensionales y se lleva a cabo el escalamiento de ecuaciones, se describe la física del sistema y se escalan las expresiones obtenidas en el capítulo 4; En el **capítulo 6**, Factor de fricción de fluidos no newtonianos se obtiene una expresión para el factor de fricción de fluidos no newtonianos sometidos a un gradiente de presión constante. Posteriormente se introduce un gradiente de presión pulsátil y se consolida la metodología para obtener los factores de fricción de fluidos no newtonianos; En el **capítulo 7** se muestran las simulaciones numéricas obtenidas a partir de las expresiones relevantes generadas a lo largo de la tesis, así como su aplicación a problemáticas reales de la rama de la hemorreología; Finalmente el **capítulo 8** contiene los resultados, conclusiones y contempla el trabajo futuro.

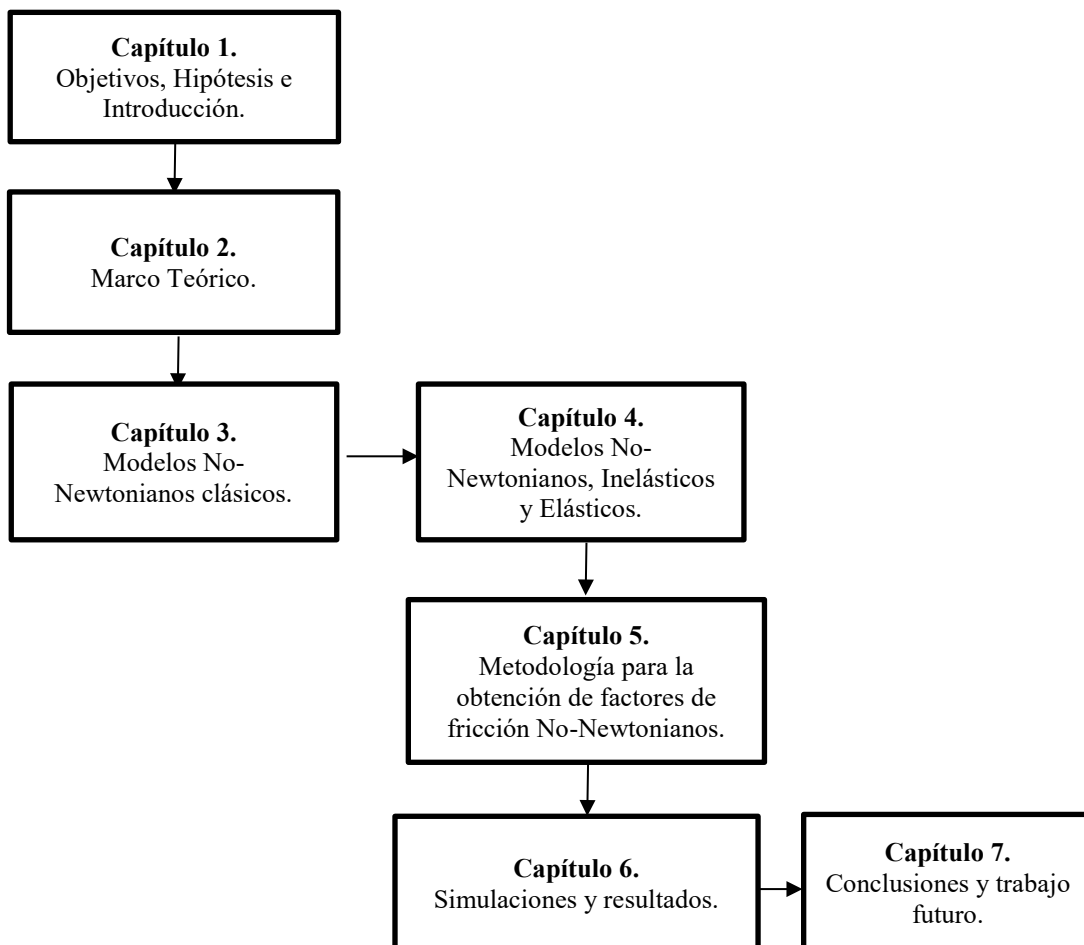


Figura 1-2. Organización del trabajo desarrollado en la tesis

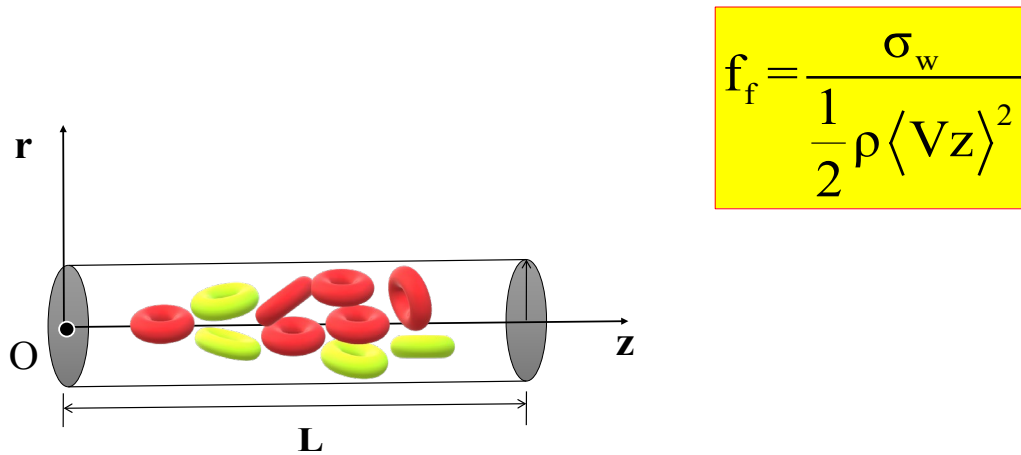


CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.



2.1 Fluido Newtoniano

El análisis inicia con una primera aproximación teórica, esto con el fin de establecer las generalidades del sistema, e ilustrar a detalle el procedimiento necesario para hallar las expresiones de velocidad, caudal volumétrico y factor de fricción para un fluido newtoniano. Se analiza un sistema de geometría cilíndrica. Un capilar horizontal de radio= R y longitud= L , que obedece la condición $L \gg R$. En el fluye un fluido newtoniano en estado estacionario, tal como se muestra en el diagrama 2-1.



$$\nabla_z \mathbf{p}(t) = \nabla_z \mathbf{p}_0 \left(1 + \varepsilon n_p(t) \right)$$

Figura 2-1 Capilar horizontal de radio R

Obedeciendo una lógica simple y de cara a una aproximación más compleja, por ahora se considerará que el flujo dentro del capilar es laminar y es impulsado por un gradiente de presión constante, este fenómeno es dominante, de modo que para fines analíticos será el que se tome en cuenta principalmente. A priori el lector puede darse cuenta de que se trata del análisis de un sistema de flujo de Hagen-Poiseuille clásico, no obstante, en las paredes internas del capilar la velocidad del fluido tiene un valor que se denominará como v_w de acuerdo con la definición del deslizamiento lineal de Navier.

Las condiciones físicas son las siguientes:



1. Coordenadas cilíndricas.
2. Estado estacionario.
3. Deslizamiento en la pared ($v_r = v_w$; $r = R$).
4. Flujo generado por gradiente de presión constante (Fenómeno dominante).
5. Flujo laminar.
6. Fluido newtoniano.
7. Fluido incompresible.
8. $v = v(r, \theta, z, t)$.

2.2 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad permite realizar un balance de materia. Consiste en la adición de las velocidades de incremento de materia por unidad de masa por unidad de volumen y la adición de materia por convección por unidad de volumen. Esta ecuación esta expresada como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2-1)$$

Para coordenadas cilíndricas la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-2)$$

Considerando las condiciones físicas acotadas (estado estacionario, fluido incompresible y dirección de flujo sobre el eje z). la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-3)$$

Lo cual indica que la velocidad en la dirección z no depende de este eje; Siendo el estado estacionario, y al ser theta un eje neutro para este caso se puede entonces asegurar que:

$$v = v_z(r) \quad (2-4)$$

El balance de materia puede ser muy útil, ya que permite simplificar y agilizar el uso de la ecuación para balance de momento.

2.3 Ecuación de movimiento

El balance con la ecuación de movimiento tiene la forma general:



$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (2-5)$$

Para coordenadas cilíndricas (2-5) toma la forma:

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g \quad (2-6)$$

De acuerdo con las acotaciones del problema y el balance de materia la expresión se reduce a:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \quad (2-7)$$

El análisis hasta la ecuación (2-7) muestra la ecuación de balance para un fluido newtoniano que es transportado en un cilindro bajo un gradiente de presión constante. Con base a esta expresión es posible obtener el perfil de velocidades para el caso particular propuesto. Dicho procedimiento se muestra con detenimiento en la siguiente sección.

2.4 Perfil de velocidades mecanismos deslizantes (Deslizamiento lineal de Navier).

Reordenando e integrando en ambos lados de la ecuación con respecto a la coordenada espacial r:

$$\frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (2-8)$$

Reordenando e integrando nuevamente:

$$\frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 = v_z \quad (2-9)$$

(2-9) es perfil general de velocidad en dirección (z) para un fluido newtoniano con ρ y μ constantes que fluye por un capilar horizontal de radio R. En este punto se introducen las condiciones límite, en este caso, se establece que la velocidad en las paredes internas del capilar tiene un valor v_w definido por el deslizamiento lineal de Navier, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{a. } & r = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \\ \text{b. } & r = R; \quad v_z = v_w. \\ \text{DLN: } & v_w = \sigma_w / \beta \end{aligned} \quad (2-10)$$



Evaluando el perfil general (2-9) con el par de condiciones (a) se encuentra C_1 de manera instantánea por consistencia física:

$$C_1 = 0$$

Evaluando el perfil general (2-9) con el par condiciones (b) se encuentra C_2 :

$$C_2 = v_w - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{R^2}{4\mu}$$

Sustituyendo los valores C_1 y C_2 en (2-9), simplificando y reordenando:

$$v_z = v_w + \frac{p_0 - p_L}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2-11)$$

Dónde: V_w obedece la definición del deslizamiento lineal de Navier (DLN 2-10).

Cabe aclarar que, si fuese necesario regresar a la condición clásica sin deslizamiento en la pared, es decir prescindir de los efectos deslizantes bastará con definir $\beta = 0$, de esta forma se obtiene el perfil de velocidades:

$$v_z = \frac{p_0 - p_L}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2-12)$$

2.5 Flujo Volumétrico mecanismos deslizantes (Deslizamiento lineal de Navier).

El caudal volumétrico está definido matemáticamente como la doble integral del perfil de velocidad respecto al área de flujo del capilar (sección transversal). Dado que la dirección que se está analizando es z , el área queda definida por los ejes r y θ tal que:

$$Q = \iint v_{(z)} r dr d\theta \quad (2-13)$$

Introduciendo el valor de $V_{(z)}$ y definiendo los límites de la integral:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{p_0 - p_L}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + v_w \right\} r dr d\theta \quad (2-14)$$

Resolviendo la ecuación (2-14) y reordenando se obtiene la expresión del caudal volumétrico.

$$Q = \pi \left[\frac{p_0 - p_L}{L} \frac{R^4}{8\mu} + v_w R^2 \right] \quad (2-15)$$

Reiterando que al definir $\beta = 0$ se obtiene la expresión del caudal volumétrico sin mecanismos deslizantes Q_N :



$$Q_N = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} (-\nabla_z P) \quad (2-16)$$

Tomando en cuenta que $\mu = \eta_0$, ambas se refieren a la viscosidad newtoniana.

2.6 Factor de fricción de Darcy (Deslizamiento lineal de Navier).

El factor de fricción puede calcularse con la definición del esfuerzo de la ecuación de Darcy-Weisbach al despejar para f_D queda definido como:

$$f_D = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2}; \quad (2-17)$$

La única particularidad en este caso es definir el esfuerzo cortante en la pared (σ_w) que considera $r=R$ de esta manera la expresión es:

$$\sigma_w = \frac{(p_0 - p_L)R}{2L} \quad (2-18)$$

A continuación, se aplica la definición del factor de fricción de Darcy sustituyendo los valores requeridos:

$$f_D = \frac{(p_0 - p_L)R}{2L \left[\frac{\rho}{2} \left[\frac{p_0 - p_L}{L} \frac{R^2}{8\mu} + v_w \frac{1}{2} \right]^2 \right]} \quad (2-18)$$

Esta es la expresión explícita del factor de fricción de Darcy con mecanismos deslizantes, se hace el recordatorio de que es posible volver al caso sin deslizamiento, solo habrá que definir $\beta = 0$.



CAPÍTULO 3. FLUIDOS NO-NEWTONIANOS.

3.1 Modelos no newtonianos.





Como es bien conocido, el hecho de que un fluido se considere o no newtoniano está relacionado directamente con la viscosidad y su respuesta a la rapidez de la deformación. Para un fluido newtoniano esta propiedad (viscosidad) permanece constante durante cualquier proceso de deformación, por el contrario, en el caso de los fluidos no newtonianos la viscosidad presentará una variación relacionada con varios factores, tales como, la posición, temperatura, la velocidad, u otras propiedades inherentes a cada material.

Existen varios modelos que describen la variación de la viscosidad respecto a los factores ya mencionados, (Byron-Bird et. al. 2002) los cataloga en tres grupos.

- 1.- Modelos Newtonianos generalizados.
- 2.- Modelos viscoelásticos lineales.
- 3.- Modelos viscoelásticos no lineales

Cada uno de los tipos de modelo es diferente, y cuenta con sus propios parámetros de ajuste además de que cada ecuación constitutiva o modelo describe la relación esfuerzo deformación con un alcance diferente.

3.1.2 Modelo de Ostwald de Waele (Ley de potencia).

El modelo de Ostwald de Waele está catalogado como un modelo newtoniano generalizado, su alcance, describe la zona intermedia en un reograma de función viscosidad vs rapidez de deformación, una zona que se asocia a los procesos adelgazantes y engrosantes consecuencia del flujo. Una de las particularidades de este modelo es que, si bien matemáticamente no es muy complejo, describe satisfactoriamente la viscosidad no newtoniana, dejando fuera los efectos elásticos, los efectos de esfuerzo normal, o los efectos que tienen relación con el tiempo. El modelo ley de potencia parte del empirismo de la ley de viscosidad de newton con una modificación y tiene la siguiente forma:

$$\sigma_{rz} = \eta \left(\frac{dv_z}{dr} \right) \quad (3-1)$$

Como puede observarse simplemente se sustituye el valor de la viscosidad newtoniana y se introduce η , esta variable describe la viscosidad no newtoniana. Para este modelo η está caracterizada como:

$$\eta = m \dot{\gamma}^{n-1} \quad (3-2)$$

Donde:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\dot{\gamma} : \dot{\gamma})} = \sqrt{\left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2} \quad (3-3)$$

La expresión anterior se denomina tensor rapidez de deformación.

Como se puede apreciar se introducen dos nuevos parámetros empíricos; “m” que tiene unidades de Pa · sⁿ y “n” cuyo valor es positivo y se encuentra entre cero y uno.



3.1.3 Perfil de velocidades con deslizamiento (LDP-DLN).

Para obtener el perfil de velocidad en este caso es necesario aplicar la definición de esfuerzo en dirección rz, y sustituir (η) de este modo se tiene:

$$\sigma_{rz} = m \dot{\gamma}^{n-1} \left(\frac{dv_z}{dr} \right) \quad (3-4)$$

Introduciendo el valor del tensor rapidez de deformación:

$$\sigma_{rz} = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^{n-1} \left(\frac{dv_z}{dr} \right) \quad (3-5)$$

Introduciendo el valor del esfuerzo, sumando los exponentes con misma base y para simplificar el proceso de integración se propone el siguiente cambio de variable:

$$a = \frac{(P_0 - P_L)}{2mL} ;$$
$$-\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{(P_0 - P_L)r}{2mL} \right)^{1/n} \quad (3-6)$$

Realizando el cambio de variable propuesto e integrando:

$$-v_z = \int (ar)^{1/n} dr \quad (3-7)$$

Integrando (3-7) respecto a r y multiplicando por -1:

$$v_z = -a^{1/n} \frac{r^{1/n+1}}{1/n+1} - C_1 \quad (3-8)$$

Este es el perfil general de velocidad para ley de potencia, geometría cilíndrica, el valor de la constante está sujeto a si hay condición de deslizamiento en la pared o no, en este caso el procedimiento se realizara de manera detallada solo para la condición de deslizamiento, sin embargo, como se mostró en la conclusión de la sección 2, el efecto del deslizamiento es un factor aditivo al caso general de no deslizamiento, con el criterio necesario es fácil obtener uno u otro según sea necesario.

Se aplica la condición de deslizamiento en el perfil general (3-8).

$$a. r = R ; v_z = v_w \quad v_w = \frac{\sigma_{rz}}{\beta}$$

Despejando C_1 :



$$-v_w - a^{1/n} \frac{R^{1/n+1}}{1/n+1} = C_1 \quad (3-9)$$

Sustituyendo de vuelta C_1 en (3-8), volviendo a las variables originales y reordenando:

$$v_z = \left(\frac{(P_0 - P_L)R}{2mL} \right)^{1/n} \frac{R}{1/n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1/n+1} \right] + v_w \quad (3-10)$$

La expresión anterior puede escribirse en función del esfuerzo en la pared:

$$v_z = \left(\frac{\sigma_w}{m} \right)^{1/n} \frac{R}{(1/n+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] + v_w \quad (3-11)$$

De esta manera se ha obtenido el perfil de velocidades de la ley de potencia para la condición con deslizamiento. Cabe resaltar que al tener un valor de parámetro $\beta=0$ se obtiene el caso sin deslizamiento clásico que se puede encontrar en la literatura.

3.1.4 Flujo Volumétrico con deslizamiento.

Aplicando la definición de caudal volumétrico ecuación (2-13).

Introduciendo la expresión (3-11) y definiendo los límites de la integral respecto al área:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \left(\frac{\sigma_w}{m} \right)^{1/n} \frac{R}{(1/n+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] + v_w \right\} r dr d\theta; \quad (3-12)$$

Se puede integrar la coordenada angular de manera inmediata, al integrar según lo indicado se obtiene:

$$Q = 2\pi \left\{ \left(\frac{\sigma_w}{m} \right)^{1/n} \frac{R^3}{(1/n+1)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1/n+3} \right] + v_w \frac{R^2}{2} \right\} \quad (3-13)$$

Simplificando y reordenando:

$$Q_{LDP} = \left(\frac{\sigma_w}{m} \right)^{1/n} \frac{\pi R^3}{(1/n+3)} + v_w \pi R^2 \quad (3-14)$$

3.1.5 Factor de Fricción de Darcy con deslizamiento.

Aplicando la definición (2-17):

$$f_{D-LDP} = \frac{2\pi R^2 \sigma_w}{\rho Q_{LDP}} \quad (3-15)$$



Donde Q_{LDP} es la ecuación (3-14) y recordando que la velocidad media puede obtenerse de manera inmediata utilizando la relación caudal volumétrico dividido por el área de flujo:

$$\langle v_z \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (3-16)$$





CAPÍTULO 4. MODELOS NO-NEWTONIANOS INELÁSTICOS Y ELÁSTICOS





4.1 Modelos No-Newtonianos inelásticos

Los modelos no newtonianos inelásticos en general tienen un alcance o abarcan desde la primera región no newtoniana, pasando por la zona de adelgazamiento hasta la segunda región no newtoniana de un reograma, ejemplos de este tipo de modelos son: el modelo de Ostwald de Waele, el modelo de Carreau, el modelo de Cross y el de Ellis por mencionar algunos. Dentro del alcance de este trabajo se hace el análisis con Ellis y Ostwald de Waele.

4.1.1 Modelo de Ellis

En la sección anterior se revisó el modelo ley de potencia, a pesar de que puede ser muy útil para aplicaciones de ingeniería de fluidos esta tiene un par de desventajas, por ejemplo, el hecho de que la constante “m” tenga unidades que dependan de n, o que estas a su vez sean características solo de un sistema de flujo, aunque el fluido que se analice sea el mismo (m y n cambiaran si se analiza el mismo fluido en diferentes sistemas de flujo).

Ellis parte del mismo principio básico que la ley de potencia sin embargo se añade un término extra, el cual describe el comportamiento newtoniano a bajos esfuerzos de corte, de este modo:

$$\sigma_{rz} = \eta \left(\frac{du_z}{dr} \right) \quad (4-1)$$

donde

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} \left(1 + \left| \frac{\sigma}{\sigma_{1/2}} \right|^{\alpha-1} \right) \quad (4-2)$$

Se puede apreciar que aparecen tres nuevas constantes en el modelo, η_0 , $\sigma_{1/2}$ y $\alpha-1$.

η_0 es el valor de la viscosidad del fluido sometido a un esfuerzo cero.

$\sigma_{1/2}$ es el valor del esfuerzo cortante para el que se cumple $\eta = \eta_0/2$

$\alpha-1$ es la pendiente obtenida cuando se grafica $(\eta_0/\eta)-1$ contra $(\sigma / \sigma_{1/2})$ en escala log-log.

Para la mayoría de los fluidos poliméricos y soluciones poliméricas $1 < \alpha < 2$.

4.1.1.1 Obtención de perfil de velocidad mecanismos deslizantes

Siguiendo la misma lógica de resolución que en la sección anterior, aplicando la condición de deslizamiento, y simplificando la expresión se obtiene el perfil de velocidades:

$$v_z = \frac{\sigma_w R}{2\eta_0} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_{1/2}} \right)^{\alpha-1} \frac{2}{(\alpha+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha+1} \right] \right\} + v_w \quad (4-3)$$



4.1.1.2 Obtención del Caudal Volumétrico mecanismos deslizantes

Aplicando la definición del caudal volumétrico se obtiene:

$$Q = \frac{\pi \sigma_w R^3}{4\eta_0} \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_{1/2}} \right)^{\alpha-1} \frac{4}{(\alpha+3)} \right\} + \pi R^2 v_w \quad (4-4)$$

Si se requiere calcular la fluidez aparente dimensional, basta con emplear la ley de viscosidad de newton y despejar para la fluidez esto es aplicable solo en geometrías cilíndricas que cumplen $L \gg \gg R$.

4.1.2 Modelo de Reiner-Philippoff

El modelo de Reiner Philippoff es un modelo reológico de tres constantes materiales, considera dos viscosidades una a bajo corte denominada η_0 y la segunda a alto corte denominada η_∞ , la tercera constante, tiene unidades de inverso de esfuerzo, la cual cuantifica la transición de estados de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo.

La rapidez de deformación se expresa:

$$\dot{\gamma} = \frac{\sigma_{rz}}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s} \right)^2}} \quad (4-5)$$

Por tanto, la ecuación escalar para la componente r-z del modelo de Reiner-Philippoff puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{dV_z(r)}{dr} = \frac{1}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\sigma_{zr}}{\sigma_s} \right)^2}} \sigma_{zr} \quad (4-6)$$

Se toman las siguientes consideraciones:

Se proponen las siguientes variables y grupos adimensionales:

$$\varphi = \frac{1}{\eta}; \quad \varphi_0 = \frac{1}{\eta_0}; \quad \varphi_\infty = \frac{1}{\eta_\infty}; \quad \varphi_r = \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty}; \quad \sigma_w^* = \frac{\sigma_w}{\sigma_s}; \quad V_z^* = \frac{v_z}{\sigma_s \varphi_0 R} \quad (4-a)$$



4.1.2.1 Obtención del perfil de velocidades

Siguiendo la misma lógica para encontrar el perfil de velocidades se obtiene:

$$V_z^* = \frac{1}{2\varphi_r \sigma_w^*} \left(\sigma_w^{*2} (1 - \zeta^2) + \frac{(1 - \varphi_r)}{\varphi_r} \ln \left| \frac{1 + \varphi_r (\sigma_w^* \zeta)^2}{1 + \varphi_r \sigma_w^{*2}} \right| \right) + V_w^* \quad (4-7)$$

4.1.2.2 Obtención del Caudal volumétrico:

Se parte de expresión adimensional del caudal volumétrico adimensional y se obtiene:

$$Q^* = \frac{\pi}{4\sigma_w^{*3}} \left\{ \frac{\sigma_w^{*2} \varphi_r \left((\sigma_w^{*2} + 2) \varphi_r - 2 \right) + 2 \ln \left(\varphi_r \sigma_w^{*2} + 1 \right) (1 - \varphi_r)}{\varphi_r^3} \right\} + \pi V_w^* \quad (4-8)$$

4.1.2.3 Obtención de la fluidez aparente:

La fluidez aparente puede calcularse a partir de la relación del caudal no-newtoniano y newtoniano de la siguiente forma:

$$\frac{Q^*}{Q_N^*} = \varphi_{app}^* \quad (4-9)$$

$$\varphi_{app}^* = \frac{1}{\sigma_w^{*4}} \left\{ \frac{\sigma_w^{*2} \varphi_r \left(\sigma_w^{*2} \varphi_r + 2\varphi_r - 2 \right) + 2 \ln \left(\varphi_r \sigma_w^{*2} + 1 \right) (1 - \varphi_r)}{\varphi_r^3} \right\} + 4\beta^*$$

4.2 Modelos No-Newtonianos Elásticos

Dentro de los fluidos newtonianos existe una clasificación interesante para aquellos fluidos que al ser sometidos a corte exhiben una respuesta combinación de viscosidad y elasticidad, dadas las propiedades de elásticas de las partículas que lo componen, esto es usual en soluciones poliméricas, o en fluidos que forman micelas, ejemplos de los modelos elásticos son el modelo de Maxwell, El modelo de Jeffreys, y el modelo de Phan-Thien-Tanner por mencionar algunos.

4.2.2 Phan-Thien-Tanner.

El modelo de Phan-Thien-Tanner es una ecuación constitutiva que puede emplearse en dos formas, su forma lineal o bien, su forma exponencial, ambas son utilizadas ampliamente en la simulación de flujos en soluciones poliméricas (Oliveira-Pinho, 1998). Este modelo toma en cuenta los efectos viscoelásticos introduciendo dos nuevas variables, ε denominada parámetro de estiramiento, en este caso el parámetro ajustable, y λ , denominada tiempo de relajación.

La forma lineal de la ecuación constitutiva de P-T-T es:



$$\dot{\gamma} = (1 + 2\varepsilon\lambda^2 \frac{\sigma^2}{\eta^2}) \frac{\sigma}{\eta} \quad (4-10)$$

4.2.2.1 Obtención del perfil de velocidades

De acuerdo a los procedimientos anteriores el perfil de velocidades obtenido es:

$$v_z = \frac{-\nabla_z P R^2}{4\eta} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] - \frac{(\nabla_z P)^2 \varepsilon \lambda^2 R^2}{4\eta^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] \right\} + v_w \quad (4-11)$$

4.2.2.2 Flujo volumétrico:

El caudal volumétrico con mecanismos deslizantes para P-T-T es:

$$Q = 2\pi \left\{ v_w \frac{R^2}{2} - \frac{\nabla_z P R^4}{4\eta} \left[\frac{1}{4} - \frac{(\nabla_z P)^2 \varepsilon \lambda^2 R^2}{12\eta^2} \right] \right\} \quad (4-12)$$

4.2.2.3 Fluidéz Aparente:

La fluidéz aparente en el caso particular de la geometría que se estudia en este trabajo puede obtenerse de la definición del esfuerzo de la siguiente manera:

$$\sigma_{rz} = \eta \dot{\gamma} ; \varphi \sigma_{rz} = \dot{\gamma} ; \varphi_{app} = \frac{\dot{\gamma}}{\sigma_{rz}} \quad (4-13)$$

Obedeciendo la definición (4-13) de fluidéz aparente:

$$\varphi_{app} = \frac{\frac{\nabla_z P R}{2\eta} + \frac{2\varepsilon\lambda^2}{\eta^3} \left(\frac{1}{2} \nabla_z P R \right)^3}{\sigma_{rz}} \quad (4-15)$$



CAPITULO 5. VARIABLES Y ECUACIONES ADIMENSIONALES





5.1 Variables y Grupos adimensionales:

En la presente sección se muestran las variables y grupos adimensionales utilizados para reducir los modelos, estos grupos y variables proporcionan información física sobre el sistema estudiado.

5.1.1 Fluidez Reducida:

La fluidez reducida proporciona información sobre el tipo de fluido que se está estudiando adelgazante, los límites se muestran a continuación:

$$\varphi_r = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} = \begin{cases} \varphi_r \gg 1; \text{Engrozantes} \\ \varphi_r = 1; \text{Engrozantes} \\ \varphi_r \ll 1; \text{Adelgazantes} \end{cases} \quad (5-1)$$

5.1.2 Fluidez aparente reducida:

Esta variable adimensional resulta de utilidad para encontrar el factor de fricción de fluidos no newtonianos en este caso se tienen dos variantes, el uso de cada uno dependerá si la ecuación constitutiva que se está utilizando cuenta o no con el parámetro $\varphi_\infty = 1/\eta_\infty$ que es la fluidez a alto corte, en caso de no contar con dicho parámetro el escalamiento será realizado con la fluidez a bajo corte:

$$\varphi_{app}^* = \frac{\varphi_{app}}{\varphi_0}; \quad \varphi_{app}^* = \frac{\varphi_{app}}{\varphi_\infty} \quad (5-2)$$

5.1.3 Mecanismos deslizantes:

Durante el desarrollo de este trabajo se mostró la relación (2-10) conocida como el deslizamiento lineal de Navier donde β [=] Pa-s/m. Su forma escalada se muestra a continuación:

$$\beta^* = \frac{\beta}{\varphi_0 R} = \begin{cases} \beta^* = 1; \text{Hay deslizamiento en la pared} \\ \beta^* = 0; \text{No hay deslizamiento en la pared} \end{cases} \quad (5-3)$$

5.1.4 Número de Deborah:

Este número permite describir el comportamiento viscoelástico, elástico o viscoso de los fluidos, y es una relación de un tiempo característico del proceso de deformación al que se ve sometido una determinada sustancia y un tiempo de relajación característico de dicha sustancia; El número de Deborah está caracterizado como:



$$De = \frac{\langle v \rangle_N \lambda}{R} = \begin{cases} De > 1; \text{Elástico} \\ De \cong 1; \text{Viscoelástico} \\ De < 1; \text{Viscoso} \end{cases} \quad (5-4)$$

5.1.5 Factor de fricción:

$$f_D^* = \frac{f}{f_N} = \frac{1}{(\varphi_{app} / \varphi_\infty)^2} = \begin{cases} f_D^* = 1; \text{Alto esfuerzo} \\ f_D^* \neq 1; \text{Bajo esfuerzo} \end{cases} \quad (5-5)$$

5.2 Escalamiento de ecuaciones:

En la presente sección se muestra brevemente la obtención de los modelos escalados que se emplearán para la simulación computacional; resaltando que durante la resolución de algunos modelos reológicos (Capítulo 4), fue necesario escalar de manera simultánea para simplificar la integración o derivación en casos específicos.

Cabe hacer mención que existe un número considerable de técnicas para escalar los modelos, no obstante, todas se basan en el principio de relacionar variables características del sistema, agrupando de modo que el grupo adimensional o variable adimensional entregue información sobre el proceso físico. La ventaja más notable es que en muchas ocasiones el escalamiento simplifica la resolución y aplicación de los modelos obtenidos, aunque no siempre es así.

5.2.1 Obtención de los perfiles adimensionales para la ecuación constitutiva de Ellis:

Se parte de la expresión (4-1); considerando los siguientes postulados y grupos adimensionales:

$$\sigma_{rz} = -\sigma_w \frac{r}{R}; \quad \zeta = \frac{r}{R}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma_w}{\sigma_{1/2}}; \quad \varphi_0 = \frac{1}{\eta_0}$$

La expresión toma la forma:

$$-\sigma_w \zeta \left[\varphi_0 \left(1 + |\sigma^* \zeta|^{\alpha-1} \right) \right] = \frac{dv_z}{dr} \quad (5-6)$$

Se puede definir una variable de velocidad adimensional que se obtiene de forma natural y está definida como:



$$v_z^* = \frac{v_z}{\sigma_w \varphi_0 R} \quad (5-7)$$

Obteniendo:

$$\left(\zeta + \left| \zeta^\alpha \sigma^{*\alpha-1} \right| \right) = - \frac{dv_z^*}{d\zeta} \quad (5-8)$$

Al integrar y resolver siguiendo la lógica de resolución mostrada en el capítulo (3) se obtiene

$$v_z^* = v_w^* + \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) + \frac{\sigma^{*\alpha-1}}{\alpha+1} (1^{\alpha+1} - \zeta^{\alpha+1}) \quad (5-9)$$

El flujo volumétrico puede obtenerse definiendo la expresión adimensional del caudal como:

$$Q^* = \frac{Q}{2\pi\sigma_w\varphi_0R^3} = \int_0^1 v_z^* \zeta d\zeta \quad (5-10)$$

Siguiendo la lógica del capítulo (3), la expresión adimensional del flujo volumétrico es:

$$Q^* = \frac{v_w^*}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\sigma^{*\alpha-1}}{\alpha+1} \left(\frac{1^{\alpha+1}}{2} - \frac{1^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right) \quad (5-11)$$

La fluidez aparente se obtiene considerando lo siguiente:

$$Q_N = \varphi_0 \frac{\pi R^3}{4} \sigma_w = \varphi_0 \sigma_1 \frac{R^3}{2} \frac{\pi \sigma_w^*}{4}; \quad Q_N^* = \frac{Q_N}{\varphi_0 \sigma_s R^3} = \frac{\pi}{4} \sigma_w^*; \quad \frac{Q^*}{Q_N^*} = \varphi_{app}^*$$

Obteniendo finalmente:

$$\varphi_{app} = \frac{2v_w^* + \frac{1}{2} + \frac{4\sigma^{*\alpha-1}}{\alpha+1} \left(\frac{1^{\alpha+1}}{2} - \frac{1^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right)}{\pi \sigma_w^*} \quad (5-12)$$

5.2.2 Obtención de los perfiles adimensionales para la ecuación constitutiva de Reinner-Philippoff:

En este caso la resolución y escalamiento se realizaron de forma simultánea

$$v_z^* = \frac{v_z}{\sigma_s \varphi_0 R} \quad (5-13)$$



Siendo el perfil de velocidades la ecuación ()

$$v_z^* = \frac{1}{2\varphi_r \sigma_w^*} \left(\sigma_w^{*2} (1 - \zeta^2) + \frac{(1 - \varphi_r)}{\varphi_r} \ln \left| \frac{1 + \varphi_r (\sigma_w^* \zeta)^2}{1 + \varphi_r \sigma_w^{*2}} \right| \right) + v_w^*$$

El caudal volumétrico se obtiene considerando:

$$Q^* = \frac{Q}{\sigma_s \varphi_0 R^3} = 2\pi \int_0^1 v_z^* \zeta d\zeta$$

$$Q^* = \frac{\pi}{4\sigma_w^{*3}} \left\{ \frac{\sigma_w^{*2} \varphi_r \left((\sigma_w^{*2} + 2) \varphi_r - 2 \right) + 2 \ln \left(\varphi_r \sigma_w^{*2} + 1 \right) (1 - \varphi_r)}{\varphi_r^3} \right\} + \pi v_w^*$$

Finalmente, la fluidez aparente es la relación de los flujos No-Newtoniano y Newtoniano ecuación (4-9):

$$\frac{Q^*}{Q_N^*} = \varphi_{app}^*$$

$$\varphi_{app}^* = \frac{1}{\sigma_w^{*4}} \left\{ \frac{\sigma_w^{*2} \varphi_r \left(\sigma_w^{*2} \varphi_r + 2\varphi_r - 2 \right) + 2 \ln \left(\varphi_r \sigma_w^{*2} + 1 \right) (1 - \varphi_r)}{\varphi_r^3} \right\} + 4\beta^*$$

5.2.3 Obtención de los perfiles adimensionales para la ecuación constitutiva de Phan-Thien-Tanner:

La técnica de escalamiento en el caso de Phan-Thien-Tanner se realizará de acuerdo con el método sugerido por Oliveira y Pinho que consiste en obtener una expresión escalada trabajando algebraicamente el perfil de velocidades dimensional; Considerando los siguientes postulados, variables y grupos adimensionales:

$$\langle v \rangle_N = \frac{\sigma_w R}{4\mu}; \quad D_e = \frac{\langle v \rangle \lambda}{R}; \quad \zeta = \frac{r}{R}; \quad v_z^* = \frac{v_z}{4\langle v \rangle_N}; \quad v_w^* = \sigma^* \beta^*$$

El perfil de velocidades adimensional es:

$$V_z^* = V_w^* + \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) + 8\epsilon De^2 (1 - \zeta^4) \quad (5-14)$$

Siguiendo la misma lógica empleada en (5.2.1) el flujo volumétrico puede obtenerse considerando:



$$Q^* = \frac{Q}{8\pi \langle V \rangle_N R^2} = \int_0^1 V_z^* \zeta d\zeta \quad (5-15)$$

El flujo volumétrico es:

$$Q^* = \frac{V_w^*}{2} + \frac{8\varepsilon De^2}{3} - \frac{1}{8} \quad (5-16)$$

Dada la geometría capilar del sistema se puede considerar que la fluidez aparente obedece el siguiente postulado:

$$\Phi_{app} = \frac{\dot{\gamma}}{\sigma_{rz}} \quad (5-17)$$

La fluidez aparente adimensional debe obedecer a la relación del tensor rapidez de deformación adimensional y el esfuerzo de corte escalado en la dirección rz:

$$\sigma_w^* = \frac{\sigma_w}{\eta/\lambda} \quad ; \quad \Phi_{app} = \frac{\dot{\gamma}}{\sigma_{rz}} \quad (5-18)$$

Así la fluidez aparente para P-T-T es:

$$\Phi_{app}^* = \frac{(\zeta + 32\varepsilon De^2 \zeta^3)}{\sigma_w^* \zeta} \quad (5-19)$$





CAPITULO 6. FACTOR DE FRICCIÓN DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS





6.1 Factor de Fricción de fluidos no newtonianos.

Como ya se mencionó en la sección 2.6 (ec. 2-17), factor de fricción en transferencia de momento se define como un cociente de dos mecanismos asociados a los procesos viscosos y cinéticos.

$$f_D = \frac{-\sigma_{rz}|_{r=R}}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2} = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2} \quad (6-1)$$

La Ec. (6-1) se puede expresar en términos del número de Reynolds y de la viscosidad aparente, i.e.

$$f_D = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2} = \frac{16}{\rho\langle v \rangle D} \cdot \frac{\sigma_w}{\dot{\gamma}_{app}} \quad (6-2)$$

El cociente definido entre el esfuerzo en la pared y la rapidez de deformación aparente es la viscosidad aparente:

$$\eta_{app} = \frac{\sigma_w}{\dot{\gamma}_{app}} \quad (6-3)$$

Al combinar las Ecs. (6-1) y (6-3) se tiene lo siguiente:

$$f_D = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2} = \frac{16}{\rho\langle v \rangle D} \cdot \eta_{app} \quad (6-4)$$

Mediante álgebra y con base en el análisis newtoniano la Ec. (6-4), puede describirse como:

$$f_D = \frac{16}{\rho\langle v \rangle_N D} \cdot \frac{\eta_{app}}{\langle v \rangle / \langle v \rangle_N} \quad (6-6)$$

En la Ec. (6-6), $\langle v \rangle_N$ es la velocidad promedio de un fluido newtoniano deformado continua e irreversiblemente mediante un gradiente de presión constante. Para esta velocidad promedio, se supuso estado estacionario, régimen laminar y proceso isotérmico, i.e.

$$\langle v \rangle_N = \frac{\varphi_\mu R^2}{8} (-\nabla_z p) \quad (6-7)$$

El factor de fricción para fluidos newtonianos, se define de la siguiente forma

$$f_N = \frac{16}{\rho\langle v \rangle_N D \varphi_\infty} \quad (6-8)$$

Aplicando (6-8) y reordenando:



$$f_D = f_N \frac{\varphi_\infty / \varphi_{app}}{\langle v \rangle / \langle v \rangle_N} \quad (6-9)$$

La relación entre las velocidades promedio, pueden ser expresadas en términos de las fluideces, i.e.

$$\frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle_N} = \frac{\varphi_{app}}{\varphi_\infty} \quad (6-10)$$

Al combinar las Ecs. (6-9) y (6-10) se tiene lo siguiente;

$$f_D = f_N \left(\varphi_\infty / \varphi_{app} \right)^2 \quad (6-11)$$

Definiendo la Ec. (6-11) en términos de las viscosidades:

$$\frac{f_D}{f_N} = \frac{1}{\left(\varphi_{app} / \varphi_\infty \right)^2} = \left(\eta_{app} / \eta_\infty \right)^2 \quad (6-12)$$

La Ec. (6-12) tiene los siguientes límites asintóticos:

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow 0} \frac{f_D}{f_N} = \lim_{\sigma_w \rightarrow 0} \left(\eta_{app} / \eta_\infty \right)^2 = \left(\eta_0 / \eta_\infty \right)^2 \neq 1 \quad (6-13)$$

y para esfuerzos en la pared elevados, se tiene lo siguiente:

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \frac{f_D}{f_N} = \lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \left(\eta_{app} / \eta_\infty \right)^2 = \lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \left(\eta_\infty / \eta_\infty \right)^2 = 1 \quad (6-14)$$

6.2 Introducción del gradiente de presión pulsátil:

En esta sección se introduce el efecto del flujo pulsátil sobre la fluidez. Suponemos que la función fluidez puede ser expandida en términos de un parámetro de pequeñez, o parámetro perturbativo i.e. partiendo de que el esfuerzo en la pared se puede expresar como un promedio y una perturbación estocástica:

$$\nabla_z P = \nabla_z P_0 + \nabla_z P_0 \varepsilon n(t) = \nabla_z P (1 + \varepsilon n(t)) \quad (6-15)$$

De este modo se obtiene el gradiente de presión perturbado y se introduce en la definición de esfuerzo:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \nabla_z p r (1 + \varepsilon n(t)) \quad (6-16)$$

Si se evalúa esta expresión en la pared del sistema, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_w(t) = \sigma_w (1 + \varepsilon n(t)) \quad (6-17)$$

Es necesario encontrar una ecuación de relación de fluideces en función del tiempo, así desarrollando función fluidez mediante una serie de Taylor, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi_\infty} = \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} + \varepsilon \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_\infty} + \varepsilon^2 \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_\infty} + O(\varepsilon^3) \quad (6-18)$$



Desarrollando la fluidez en términos de una vecindad del esfuerzo en la pared no estacionario, y sustituyendo la ecuación (6-17):

$$\frac{\varphi(\sigma_w(t))}{\varphi_\infty} = \frac{\varphi(\sigma_w)}{\varphi_\infty} + \frac{1}{1!}(\sigma_w(t) - \sigma_w) \left. \frac{\partial \varphi / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w(t)} \right|_{\sigma_w(t) \rightarrow \sigma_w} + \frac{1}{2!}(\sigma_w(t) - \sigma_w)^2 \left. \frac{\partial^2 \varphi / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w^2(t)} \right|_{\sigma_w(t) \rightarrow \sigma_w} \quad (6-19)$$

El método de la perturbación (Rice & Duong, 2012) indica que al ser épsilon un parámetro muy pequeño, potenciar dicho parámetro a medida que crece el exponente resulta en una aportación poco significativa, por esto se sugiere detener la expansión generalmente dentro de los primeros dos o tres términos.

Tomando la aproximación lineal de la serie de Taylor, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\varphi(\sigma_w(t))}{\varphi_\infty} = \varepsilon^0 \frac{\varphi(\sigma_w)}{\varphi_\infty} + \sigma_w \varepsilon^1 n(t) \left. \frac{\partial \varphi / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w(t)} \right|_{\sigma_w(t) \rightarrow \sigma_w} \quad (6-20)$$

Los límites considerados en la expansión se deben a que la perturbación del pulso es muy pequeña, en consecuencia, el esfuerzo en la pared que fluctúa con el tiempo tiene un valor aproximado al esfuerzo que no tiene esta perturbación (estado estacionario).

Para el presente trabajo se tomarán las aportaciones de orden cero y orden uno respectivamente igualando los coeficientes de la serie propuesta para la fluidez y la serie de Taylor, se tienen las siguientes relaciones:

$O(\varepsilon^0)$:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} = \frac{\varphi(\sigma_w)}{\varphi_\infty} \quad (6-21)$$

$O(\varepsilon^1)$:

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_\infty} = n(t) \sigma_w \left. \frac{\partial \varphi / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w(t)} \right|_{\sigma_w(t) \rightarrow \sigma_w} \quad (6-22)$$

Dada la geometría capilar que se estudia es posible asumir que:

$$\frac{\varphi(\sigma_w)}{\varphi_\infty} \rightarrow \frac{\varphi_{app}(\sigma_w)}{\varphi_\infty} \quad (6-23)$$

Y la derivada de (6-22) puede ser aproximada como:

$$\left. \frac{\partial \varphi / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w(t)} \right|_{\sigma_w(t) \rightarrow \sigma_w} \rightarrow \frac{\partial \varphi_{app}(\sigma_w) / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w} \quad (6-24)$$



Comparando nuevamente, se tiene que las contribuciones a orden cero están dadas por:

$$O(\varepsilon^0):$$

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} = \frac{\varphi_{\text{app}}(\sigma_w)}{\varphi_\infty} \quad (6-25)$$

Y a primer orden toma la forma:

$$O(\varepsilon^1):$$

$$\frac{\varphi_1(t, \sigma_w)}{\varphi_\infty} = n(t)\sigma_w \frac{\partial \varphi_{\text{app}} / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w} \quad (6-26)$$

En conclusión, introduciendo (6-24) y (6-25) a la ecuación (6-12) la fricción reducida puede tomar la forma:

$$O(\varepsilon^0):$$

$$\frac{f_{(NN)0}}{f_N} = \frac{1}{\left(\varphi_{\text{app}}(\sigma_w) / \varphi_\infty\right)^2} \quad (6-27)$$

$$O(\varepsilon^1):$$

$$\frac{f_{(NN)0}}{f_N} = \frac{1}{\left(n(t)\sigma_w \frac{\partial \varphi_{\text{app}} / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w}\right)^2} \quad (6-28)$$

Por inspección se puede notar que se tiene la expresión de factores de fricción asociados al flujo pulsátil, lo que resta ahora es introducir la función periódica del seno.

De la sección anterior se concluyó que la aportación a orden cero es análoga al estado estacionario y a orden uno el aporte es el de la perturbación pulsátil.

Así para el caso de deslizamiento lineal de Navier:

$$\varphi_{(0)}^{\text{pulsátil}} = \langle \varphi_{(0)\text{app}} \rangle = \varphi_{\text{app}} \text{ estado estacionario} \quad (6-29)$$

Por definición la aportación a primer orden es la suma de los promedios de orden cero y orden uno:

$$\varphi_{(1)}^{\text{pulsátil}} = \langle \varphi_{(0)\text{app}} + \varphi_{(1)\text{app}} \rangle = \langle \varphi_{(0)\text{app}} \rangle + \langle \varphi_{(1)\text{app}} \rangle \quad (6-30)$$



Esta última expresión es clave ya que permitirá introducir la función periódica dependiente del tiempo, esta función es:

$$n(t) = M_1 + M_2 (\text{sen}(\omega t)) \quad (6-31)$$

Las definiciones de los promedios anteriores nos permiten realizar una analogía con la relación de fluideces que se trabajó en la sección anterior, lo que resta es obtener el promedio para esta relación de fluideces a orden uno. La definición matemática del promedio es:

$$\left\langle \frac{\varphi_{(1)\text{app}}}{\varphi_\infty} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\varphi_{(1)}(t)}{\varphi_\infty} dt \quad (6-32)$$

Es un cálculo simple, sus límites tienen relación con el periodo y la velocidad angular de modo que se definen como sigue:

$$\omega = 2\pi f ; T = \frac{1}{f}$$

$$\left\langle \frac{\varphi_{(1)\text{app}}}{\varphi_\infty} \right\rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_w \frac{\partial \varphi_{\text{app}} / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w} n(t) dt ; \quad (6-33)$$

La aportación a orden uno es entonces:

$$\left\langle \frac{\varphi_{(1)\text{app}}}{\varphi_\infty} \right\rangle = \frac{\omega}{2\pi} \sigma_w \frac{\partial \varphi_{\text{app}} / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w} \left[M_1 \frac{2\pi}{\omega} \right] = M_1 \frac{\partial \varphi_{\text{app}} / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w} \sigma_w \quad (6-34)$$

Finalmente, la expresión que describe la perturbación pulsátil es la suma de la aportación del estado estacionario y la función periódica sinusoidal i.e.:

$$\frac{\varphi_1^{\text{pulsátil}}(t, \sigma_w)}{\varphi_\infty} = \frac{\varphi_{\text{app}}(\sigma_w)}{\varphi_\infty} + M_1 \frac{\partial \varphi_{\text{app}} / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w} \sigma_w \quad (6-35)$$

Finalmente, el factor de fricción toma la forma:

$$\frac{f}{f_N} = \frac{1}{\left(\frac{\varphi_{\text{app}}(\sigma_w)}{\varphi_\infty} + M_1 \frac{\partial \varphi_{\text{app}} / \varphi_\infty}{\partial \sigma_w} \sigma_w \right)^2} \quad (6-36)$$

Este es el factor de fricción asociado al pulso y podrá ser encontrado para cada ecuación constitutiva de acuerdo con la siguiente metodología.

6.3 Metodología para la obtención de factores de fricción de fluidos no newtonianos.

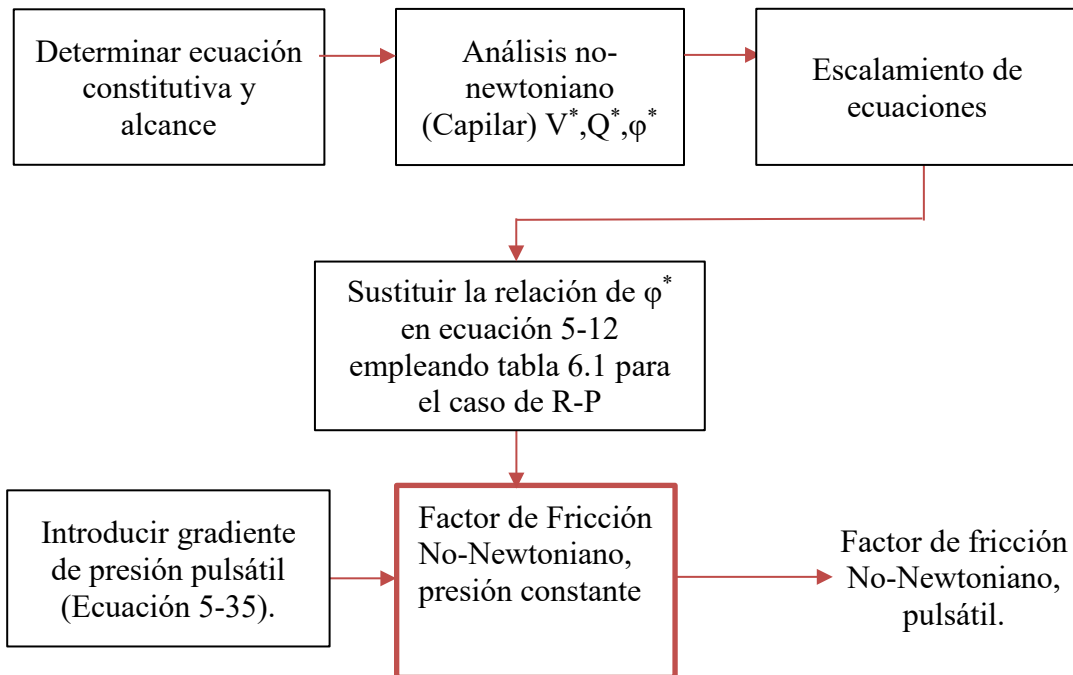


Figura 6-1 Diagrama de flujo para hallar los factores de fricción en fluidos no newtonianos

Las etapas de la figura 6-1 se explican a detalle a continuación:

1. Determinar la ecuación constitutiva que describe mejor el fluido de interés, sea inelástico, elástico o viscoelástico (se recomiendan las ecuaciones constitutivas de Ellis, Reinner-Philippoff y Phan-Thien-Tanner, aunque esta metodología no se limita exclusivamente a estas).

2. Obtener el perfil de velocidad, con el fin de generar las expresiones de caudal y fluidez aparente; Si los mecanismos deslizantes son un fenómeno relevante para el análisis de interés se recomienda por simplicidad utilizar la expresión del deslizamiento lineal de Navier, ecuación (2-10).

3. Escalar las expresiones obtenidas empleando grupos adimensionales que describan la física del sistema; algunas ecuaciones constitutivas requieren ser escaladas desde antes



de la primera integración por lo que el paso dos y tres pueden realizarse de manera conjunta en caso de ser necesario.

4. En el presente capítulo se concluyó que el factor de fricción de un fluido no-Newtoniano es una relación de fluideces, por lo que es necesario introducir la expresión de fluidez aparente propia de la ecuación constitutiva que se seleccionó en el paso 1 en la ecuación (5-12). Es preciso prestar atención al alcance (región del reograma) que describe cada ecuación constitutiva y escalar con un grupo adimensional que mantenga un sentido físico que se apegue a la realidad. En la tabla 6.1 se propone un par de grupos adimensionales para la ecuación de Reiner-Philippoff como ejemplo de cómo deben escalarse las ecuaciones constitutivas empleadas en este trabajo de licenciatura. En este punto el factor de fricción no-newtoniano sometido a un gradiente de presión constante ha sido encontrado.

5. Encontrar el factor de fricción sometido a un gradiente de presión pulsátil consiste en proponer que el esfuerzo en la pared se puede expresar como un promedio y una perturbación estocástica tal y como se mostró en la sección 6.2 del presente capítulo. Lo que resultó en la ecuación (6-36).

Tabla 6.1 Escalamiento de ecuaciones del modelo Reiner-Philippoff

PERFIL	EXPRESION ADIMENSIONAL
V_z^*	$v_z^* = \frac{1}{2\varphi_r\sigma} \left(\sigma^2(1-\zeta^2) + \frac{(1-\varphi_r)}{\varphi_r} \ln \left \frac{1+\varphi_r(\sigma\zeta)^2}{1+\varphi_r\sigma^2} \right \right) + v_w^*$
Q^*	$Q^* = \frac{\pi}{4\sigma^3} \left\{ \frac{\sigma^2\varphi_r(\sigma^2\varphi_r + 2\varphi_r - 2) + 2\ln(\varphi_r\sigma^2 + 1)(1-\varphi_r)}{\varphi_r^3} \right\} + \pi V_w^*$
φ_{app}	$\frac{1}{\sigma^4} \left\{ \frac{\sigma^2\varphi_r(\sigma^2\varphi_r + 2\varphi_r - 2) + 2\ln(\varphi_r\sigma^2 + 1)(1-\varphi_r)}{\varphi_r^3} \right\} + 4\beta^*$ φ_∞^*
f/f_N	$\frac{f}{f_N} = \frac{1}{(\varphi_{app} / \varphi_\infty)^2} = (\eta_{app} / \eta_\infty)^2$



CAPITULO 7. SIMULACIONES Y RESULTADOS



7.1 Predicciones teóricas

Con la intención de que el presente trabajo sea conciso las simulaciones numéricas que aquí se muestran se realizaron utilizando solo la ecuación constitutiva de Reiner-Philippoff y siguiendo la metodología establecida en el capítulo 6. Se escoge R-P sobre Ellis o P-T-T dado que esta ecuación constitutiva cuenta con la física necesaria para cubrir todo el alcance de un reograma, de modo que es más sencillo el dilucidar los diferentes efectos que aquí se estudian.

7.1.1 Fluides aparente (Teoría a orden cero).

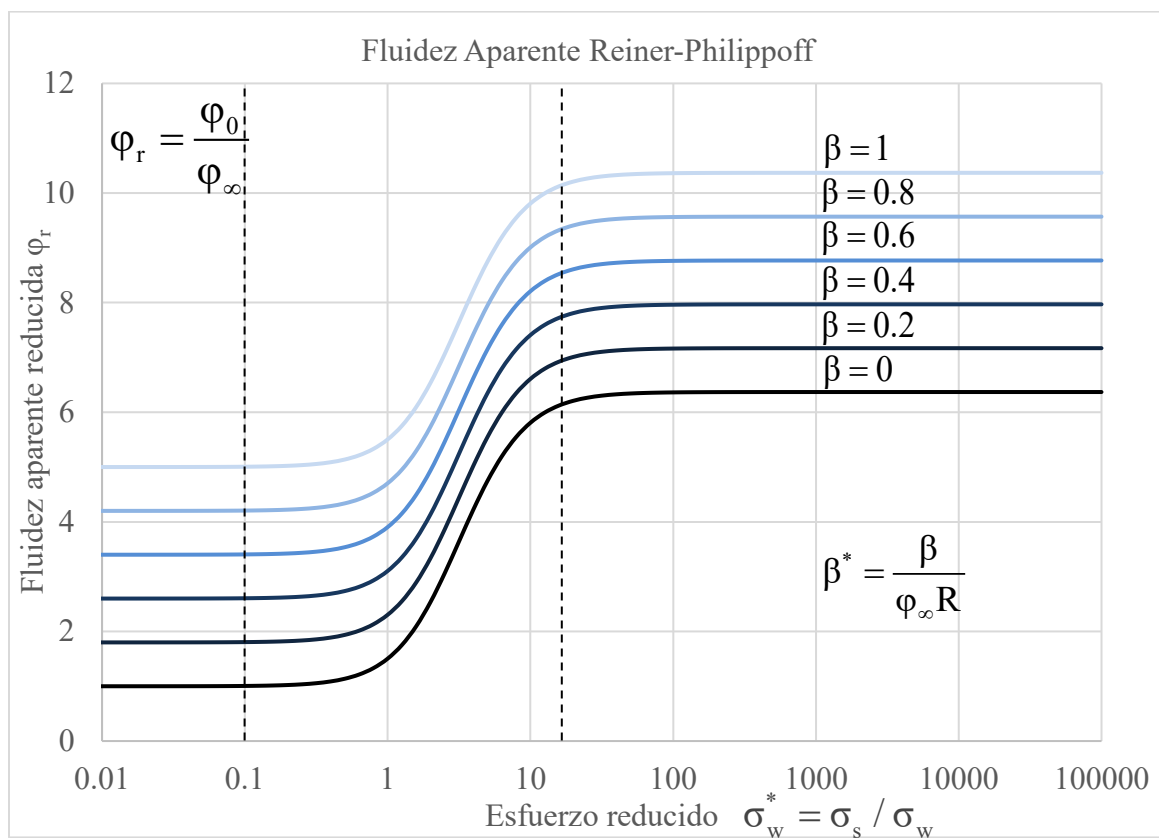


Figura 7-1 Simulaciones numéricas de fluides aparente (Orden cero) efectos deslizantes.

En la **Fig. 7.1** se grafica el esfuerzo reducido vs la fluides reducida propia de la ecuación constitutiva de Reiner-Philippoff variando el coeficiente de deslizamiento de cero hasta uno con un intervalo de 0.2. En general las curvas se comportan de manera similar de acuerdo con lo siguiente: **Matemáticamente** se observa una primera meseta que parte de 0.01 hasta 0.1 esta primera zona se conoce como “de comportamiento newtoniano” o de bajos esfuerzos; A partir de este primer valor crítico se presenta una tendencia monótono creciente que va desde 0.1 hasta 30, este comportamiento corresponde a la “zona ley de

potencia”, a partir de este segundo esfuerzo crítico 15 hasta 10^5 la pendiente vuelve a ser aproximada a cero esta zona es denominada “zona de alto corte”. Finalmente, el efecto del deslizamiento desplaza la curva de fluidez hacia arriba con respecto al eje de las ordenadas, de este modo para un mismo valor de esfuerzo se aprecia que la fluidez correspondiente es mayor conforme aumenta el coeficiente de deslizamiento. **Físicamente** después del primer esfuerzo crítico (0.1) se observa que la fluidez aumenta conforme incrementa el esfuerzo, esta respuesta corresponde a un fluido no newtoniano adelgazante. **Biológicamente** Se puede teorizar que la sangre sufre un reordenamiento al ser sometida al esfuerzo de modo que la fluidez aumenta como un resultado y que al llevar a la zona de altos esfuerzos la fluidez corresponde al solvente de la sangre.

7.1.2 Factor de Fricción (Teoría a orden cero).

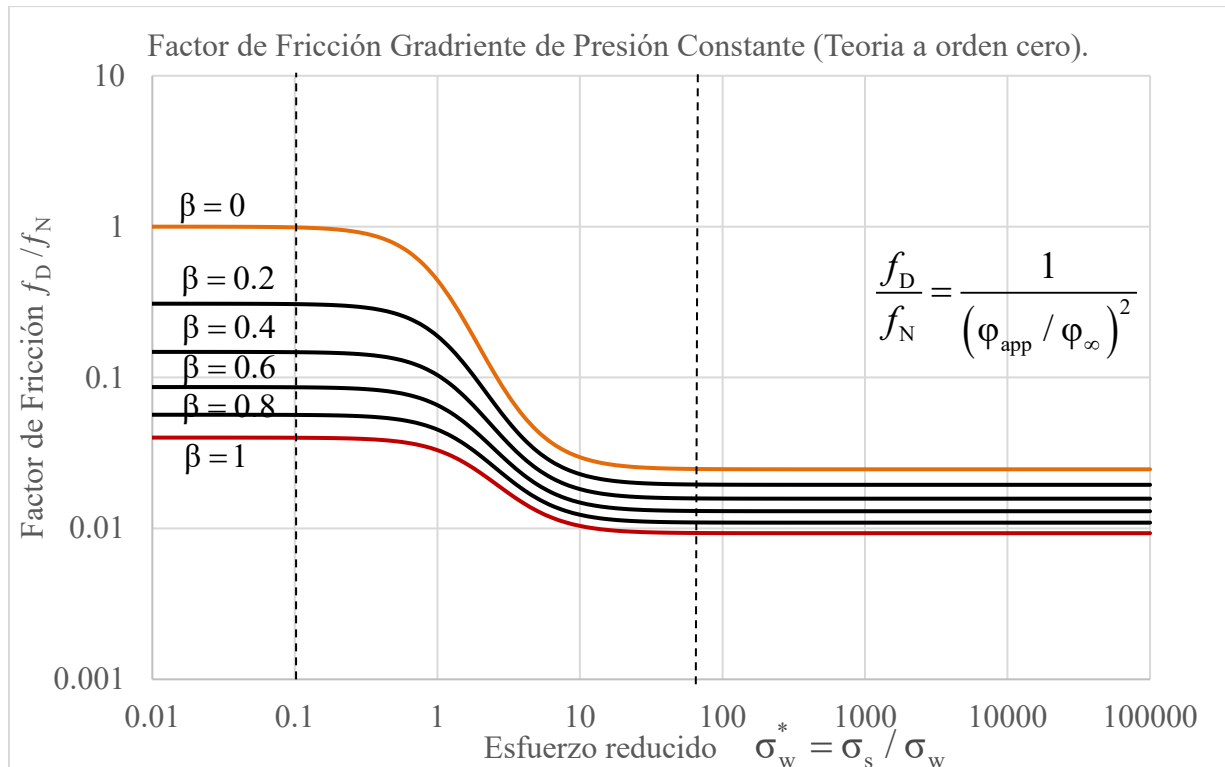


Fig. 7-2 se ilustra el factor de fricción vs del esfuerzo reducido $\sigma_w = \sigma_w / \sigma_s$ en función del coeficiente de deslizamiento β .

En esta gráfica ilustra el efecto que genera el deslizamiento sobre el factor de fricción de un fluido no newtoniano sometido a un gradiente de presión constante, empleando la ecuación constitutiva de Reiner-Philippoff. A priori puede notarse que las curvas se comportan de manera similar que en la Fig.7-1, es decir que se observan dos mesetas a bajo y alta rapidez de deformación y una zona intermedia debido a los procesos de adelgazamiento al corte inducidos por el gradiente de presión constante. Nótese, que el

efecto del deslizamiento reduce la zona de adelgazamiento al corte. Cuando el parámetro β tiende a valores muy grandes, el factor de fricción toma un valor constante e independiente del esfuerzo reducido σ_w/σ_s . En este punto, los mecanismos deslizantes decrecen los mecanismos viscosos debido a reduce la fricción entre las capas de fluido. En términos de estructura los mecanismos deslizantes compiten con los estructurales decreciendo el número de contactos físicos por lo tanto la viscosidad.

7.1.3 Factor de Fricción gradiente de presión pulsátil (Teoría a orden uno).

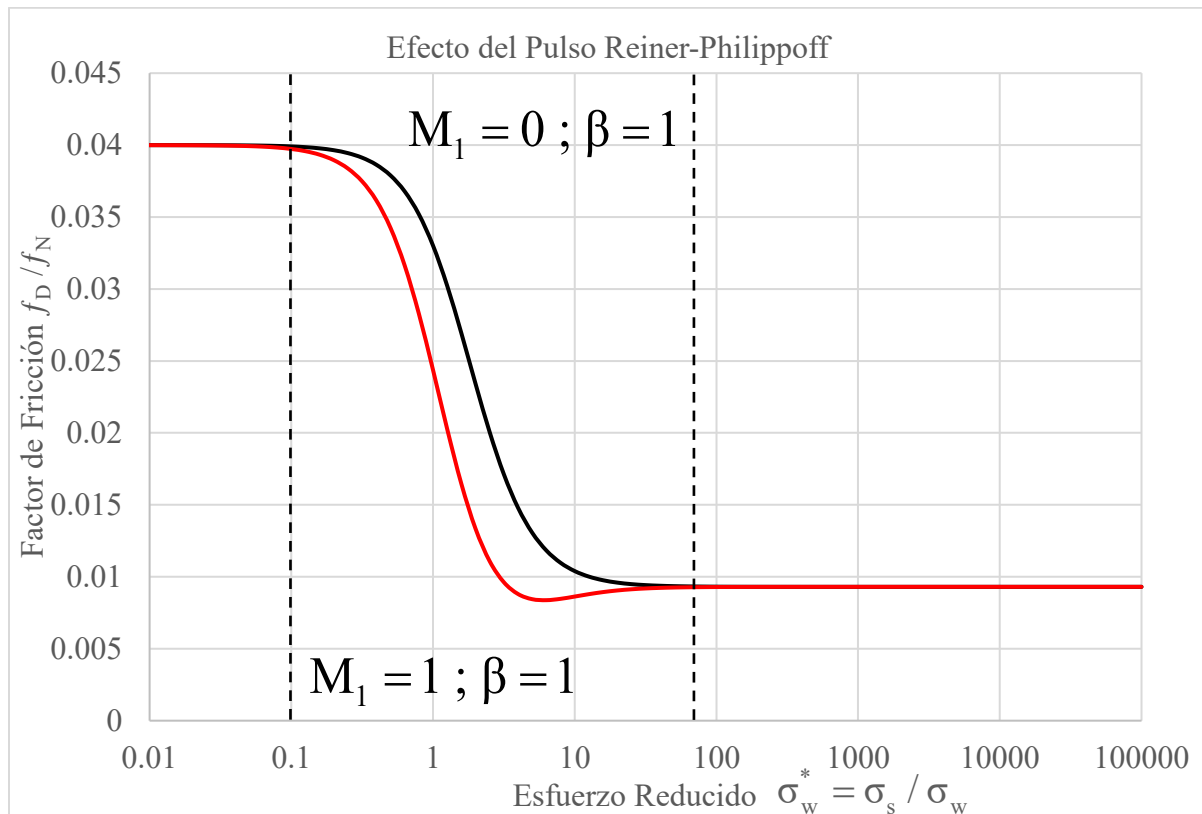


Fig. 7-3 se ilustra el factor de fricción vs del esfuerzo reducido $\sigma_w = \sigma_w/\sigma_s$ en función del coeficiente de deslizamiento β .

En la Fig. 7-3 se muestra el factor de fricción vs esfuerzo reducido en dos condiciones de proceso. La primera de ellas es cuando el sistema es deformado para un gradiente de presión constante. La segunda de ella es cuando el fluido se somete a un gradiente de presión pulsátil (rojo). En este caso las condiciones de proceso son (i) $M_1 = 0$ y $\beta = 1$, (ii) $M_1 = 0$ y $\beta = 1$. De la misma manera como en las figuras previas, se observan tres comportamientos: (i) A bajos esfuerzos reducidos el factor de fricción es proporcional es constante independiente del esfuerzo reducido. A un esfuerzo crítico, el factor de fricción decrece monótonamente hasta un segundo valor crítico, en donde el factor de fricción es

constante e independiente del esfuerzo reducido. Es importante resaltar los siguientes puntos:

- El efecto del gradiente de presión pulsátil provoca un cambio en los mecanismos adelgazantes debido al efecto del gradiente del efecto oscilatorio.
- Físicamente, de reducción en el factor de fricción se debe a un descenso en la viscosidad ocasionado por la desestructuración del fluido por efecto del gradiente de presión pulsátil. En otras palabras, el efecto del gradiente de presión oscilatorio destruye la estructura y por ende el factor de fricción disminuye.
- Este tipo de comportamiento has sido estudiados con modelos cinéticos estructurales como la ecuación reológica BMP (Herrera-Valencia et al. 2017, 2019)
- Desde un punto de vista biológico, quizá la reducción de un fluido corporal se deba a dos mecanismos: (i) El primero de ellos es debido a la temperatura $T = \text{cte}$, (ii) El segundo de ellos a un efecto de la reducción de la viscosidad de la sangre por efecto de la estructuración o desestructuración de los elementos corporales a través de la contracción de las paredes del corazón (Herrera-Valencia et al. 2017, 2019).

7.1.4 Comparativa del factor de fricción a orden cero y orden uno.

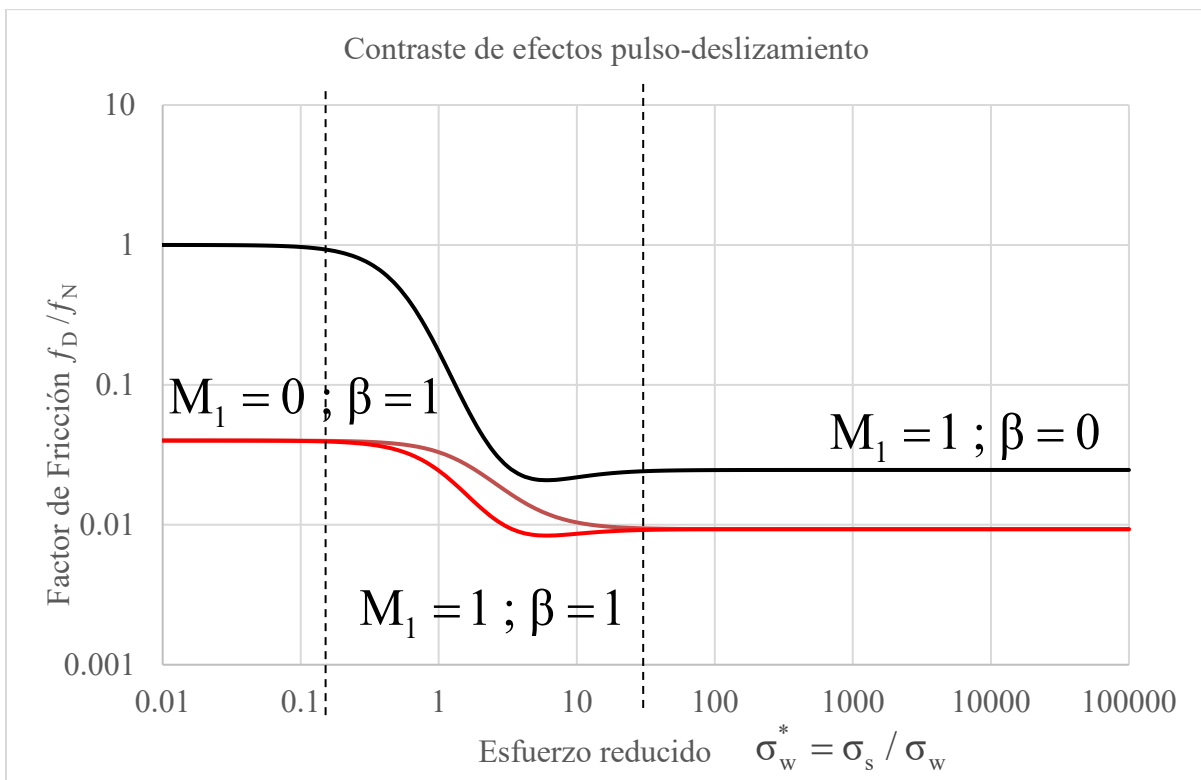


Figura 7-4 Aplicaciones a un fluido biológico comparativa.



En la Fig. 7-4 Se observa el factor de fricción en función del esfuerzo reducido para diferentes valores de condiciones de proceso. En la primera simulación (i) la amplitud de la perturbación tiene un valor $M = 1$ y un factor de deslizamiento de $\beta = 0$. Se observa que cuando el factor de fricción se somete a un gradiente de presión pulsátil sin deslizamiento, el factor de fricción muestra dos mesetas a bajo y alta esfuerzo reducido y una zona de adelgazamiento al corte. A esfuerzos reducidos en la pared, se presenta un mínimo en donde la derivada del factor de fricción con respecto al esfuerzo reducido, i.e.,

$$\frac{\partial f_D / f_N}{\partial (\sigma_w / \sigma_s)} = 0$$

Entonces al derivar el factor de fricción reducido con respecto al esfuerzo reducido, se obtiene una ecuación no lineal para el esfuerzo reducido y al substituir este valor en la segunda derivada del factor de fricción reducido con respecto al esfuerzo reducido, se tiene:

$$\frac{\partial^2 f_D / f_N}{\partial (\sigma_w / \sigma_s)^2} > 0$$

Las dos condiciones antes mencionadas se deben de cumplir para obtener el mínimo descrito en la Fig. 7-4. Este mínimo ya ha sido obtenido, con un modelo más complejo (Herrera-Valencia et al. 2017, 2019). Una de las aportaciones de este trabajo es que obtenemos resultados similares con un modelo más sencillo en corte, el cual, describe mecanismos adelgazantes y de tiempos de escala de flujo e internos del material. Las limitantes del mismo es el no tener la capacidad de reproducir el esfuerzo de cedencia de esta tesis el cual se ha dejado como una de líneas a continuar de este este trabajo de investigación.

7.2 Aplicaciones con datos de sangre en función del colesterol.

En esta sección, se calculan los factores de fricción en función del esfuerzo reducido para diferentes valores del colesterol. Los datos y protocolos experimentales fueron realizados bajo estrictos criterios de higiene y seguridad los cuales fueron descritos a detalle en el trabajo de Moreno et al. 2015 y utilizados por Herrera et al. (2017). A partir de un programa en Mathematica se realizó un código para el fluido inelástico de Reiner-philippoff y se ajustaron los datos reométricos con el modelo. A partir de esto, se obtiene los siguientes valores numéricos para las propiedades materiales del modelo RF en función del contenido de colesterol.

**Tabla 7.1 Propiedades materiales del modelo Tanner-Reiner-Philippoff**

Contenido de colesterol / Propiedades Materiales	Constante de normalización para el esfuerzo. Contraste de normalización Para el esfuerzo	Modulo Elástico	Viscosidad a bajo corte	Viscosidad a alto corte alto corte
	k [Pa ⁻¹]	G ₀ [Pa]	η ₀ [Pas]	η _∞ [Pas]
Colesterol Bajo 300 mg/dL	0.90	1.487	0.0113	0.009
Colesterol Medio 174 mg/dL	0.74	1.472	0.023	0.0042
Colesterol Alto 114 mg/dL	0.19	1.834	0.046	0.0047

Tabla 7.2 Números adimensionales del modelo RF

Números adimensionales	$C = \frac{\langle Vz \rangle / \varphi_0 a}{1/k}$	$B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$	$We_0 = \frac{1}{\varphi_0 G_0} \frac{\langle Vz \rangle}{a}$
Colesterol Bajo 300 mg/dL	0.0125	1.250	0.0061
Colesterol Medio Cholesterol 174 mg/dL	0.0170	5.476	0.0156
Colesterol Alto 114 mg/dL	0.0098	9.703	0.0222

A partir de las tablas 7.1 y 7.2 se obtiene la siguiente simulación para el factor de fricción normalizado.



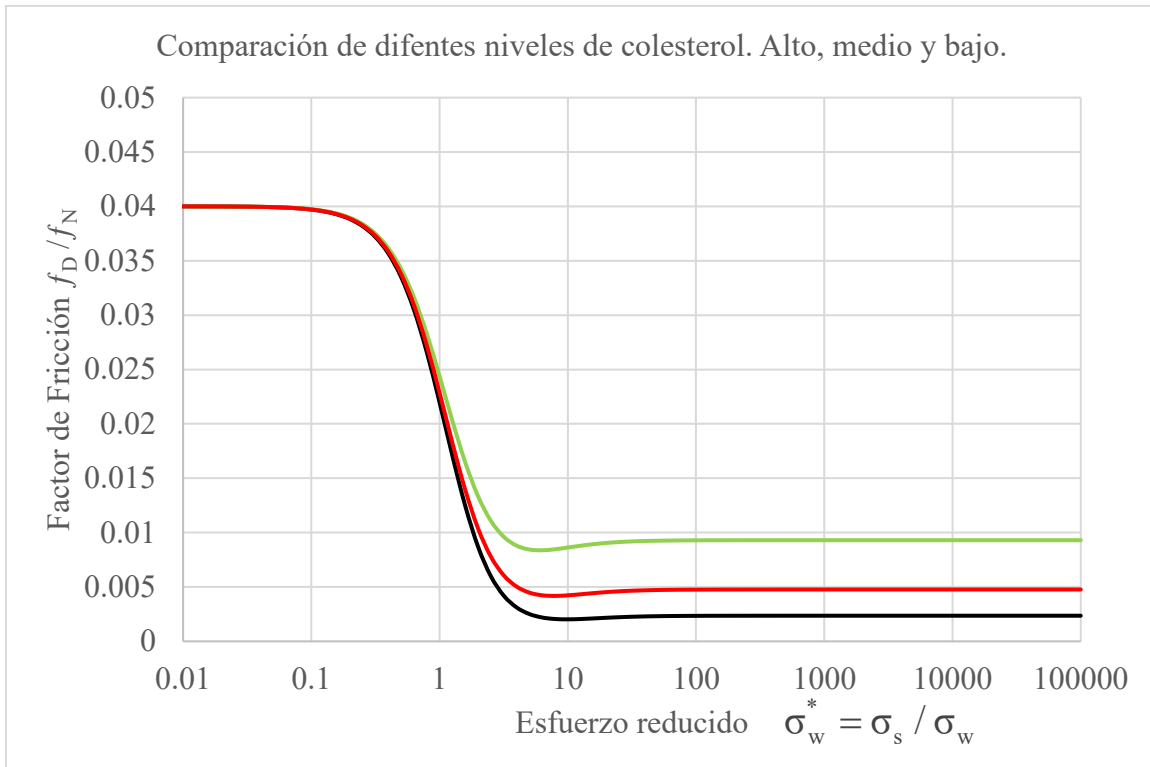


Figura 7-5 Aplicaciones a un fluido biológico sangre con colesterol bajo, medio y alto.

En la Fig. 7-5 se observa el factor de fricción en función del esfuerzo para diferentes contenidos de colesterol. La descripción de la gráfica se la misma que en las figuras previas por lo que nos centraremos en la discusión del mínimo con el colesterol.

En este punto se puede concluir que:

- A bajo y alta rapidezces de deformación en factor de fricción es constante e independiente del esfuerzo reducido.
- A esfuerzos moderados, se observa un decremento en el factor de fricción debido a los procesos de desestructuración del fluido.
- El mínimo dominante se obtiene con el mayor aumento de colesterol, esto se debe a que para estas condiciones materiales el fluido presenta una mayor desestructuración en su sistema.
- Se observa que en una ventana de observación de [1-10] hay un cambio de pendiente. Este se debe a las propiedades materiales del modelo de Reiner-Philippoff.
- El valor del mínimo es una función de las propiedades del contenido de colesterol y este es menor conforme se tiene mayor contenido de colesterol en la sangre.



- f) Esta simulación presenta una oportunidad para investigar este mínimo en función de las propiedades de la sangre como son el plasma y el contenido de hematocrito.

7.3 Análisis de resultados.

Los resultados muestran que el factor de fricción en un fluido newtoniano es completamente diferente a uno no-newtoniano. Esto se debe principalmente, a los mecanismos adelgazantes y los tiempos de escala internos del material y los externos asociados a las fuerzas macroscópicas.

Para las ecuaciones constitutivas empeladas, el líquido newtoniano muestra un comportamiento constante en función del esfuerzo reducido en toda la ventana de deformación.

Para el fluido de ley de potencia, el factor de fricción muestra un comportamiento decreciente o creciente de pendiente si el fluido es adelgazante o engrosantes al corte, este depende de las propiedades materiales del sistema.

Al incorporar el solvente y la contribución del fluido no newtoniano (polímero) se obtiene el modelo de Ellis. Este fluido presenta una primera zona newtoniana y un tipo ley de potencia.

Para el modelo de Reiner-Philippoff se observan dos zonas a baja y alta rapidez de deformación y una zona adelgazante al corte con respecto al esfuerzo en la pared. Este modelo nos permite obtener una descripción completa del factor de fricción.

Finalmente, para el modelo de Phan-Thien-Tanner (PTT) se incorporan los mecanismos elásticos a través de la primera diferencia de esfuerzos normales. La grafica del modelo PTT son parecidas al de Ellis, sin embargo, la interpretación física cambia por que en el PTT porque los mecanismos adelgazantes compiten con los elásticos por lo que es una de las ecuaciones que presenta adelgazamiento al corte combinado la elasticidad. Todos los modelos antes mencionados son analíticos y contiene expresiones cerradas para el flujo en geometrías simples (cilindros, coronas circulares y rendijas).



CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO





8.1 Conclusiones

En este trabajo se estudió el factor de fricción de flujos pulsátiles en fluidos newtonianos y no newtonianos inelásticos y elásticos. Este se define como el cociente entre los mecanismos cinéticos y los viscosos. Las principales conclusiones de este trabajo son resumidas a continuación:

- a) En el caso de un fluido newtoniano el factor de fricción se reduce al resultado clásico de Darcy, el cual se define como $16/Re$. El número de Reynolds relaciona los mecanismo inerciales y viscosos del sistema.
 - b) En el caso de un fluido no-newtoniano, el factor de fricción no-newtoniano se puede expresar como un múltiplo del factor de fricción newtoniano, multiplicado por el cuadrado de la función viscosidad normalizada con una viscosidad de referencia. En este caso, la fluidez de referencia es la fluidez reométrica, i.e., la fluidez a orden cero.
 - c) De acuerdo con el presente análisis, el factor de fricción no newtoniano sigue la curva de viscosidad elevada al cuadrado. A bajos esfuerzos, el factor de fricción normalizado no newtoniano, presenta una meseta a bajos esfuerzos y para un esfuerzo en la pared crítico, este disminuye debido y presenta un comportamiento monótono decreciente hasta un segundo valor crítico en el esfuerzo en la pared.
 - d) En el caso, de que la viscosidad aumente, i.e., cuando el fluido es engrosante al corte, el sistema presenta una meseta a bajos esfuerzos en la pared, y para un esfuerzo crítico, un comportamiento monótono creciente hasta un segundo esfuerzo en la pared crítico, en donde el comportamiento es constante.
 - e) En general, el factor de fricción no newtoniano tiene la forma: $f_{NN}/f_N = (\eta/\eta_0)^2$.
 - f) En el caso de un gradiente de presión pulsátil, el factor de fricción en el caso newtoniano, no presenta ningún cambio y su comportamiento es constante.
 - g) En el caso, de un gradiente de presión pulsátil y un fluido newtoniano, se muestra un mínimo en la zona de adelgazamiento. Este mínimo, se debe que los elementos materiales se desestructuran y orientan bajo flujo por efecto del flujo. Esto quiere decir que el pulso modifica la viscosidad y por ende se presenta un mínimo.
 - h) El mínimo puede representar una ventaja en sistemas biológicos debido a que las paredes del corazón se contraen y pueden modificar los eritrocitos con el fin de adelgazar la viscosidad de la sangre porque presentan menor resistencia a fluir.
 - i) Este tipo de aplicación puede ser función del contenido de colesterol y de las patologías en la sangre, por lo que puede ser punto de partida en aplicaciones médicas y biológicas.
 - j) La aportación de este trabajo es la de deducir expresiones analíticas para diferentes ecuaciones constitutivas.
-
-



8.2 Trabajo Futuro

Este trabajo puede extenderse añadiendo algunos factores al análisis como la flexibilidad del capilar; tomando en cuenta las variaciones del hematocrito diferentes tipos de enfermedades o realizando aplicaciones tecnológicas como anticoagulantes, o diseño específico de válvulas cardíacas o equipo médico.





9. BIBLIOGRAFÍA





Referencias

Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. New York: John Wiley & Sons.

Bird, R.B., Stewart E. & Lightfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Bravo-Gutierrez ME, Castro M, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2011). Controlling viscoelastic flow in microchannels with slip. Langmuir 27, 2075-2079.

Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Castrejón-Pita J, Del Rio. J, Castrejón-Pita A, Huelsz G (2003). Experimental observation of dramatic differences in the dynamic response of Newtonian and Maxwellian fluids. Phys. Rev. E 68, 046301 (2003).

Castro M, Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Corvera-Poire E, Hernández-Machado E (2010). Frequency-induced stratification in viscoelastic microfluidics. Langmuir 26, 15084-15086 (2010)

Cuevas S, del Rio JA (2001) Dynamic permeability of electrical conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. Phys. Rev. E 64, 016313.

Del Rio JA, De Haro ML, Castrejón-Pita JR (1998). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E 58 6323.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D. Soriano-Correa C. Nuñez-Ramirez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana. UNAM, FES Zaragoza, agosto 2022. ISBN: 978-607-30-6436-1.



Herrera-Valencia EE, Rey AD (2014). Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.

Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009). Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.

Herrera EE, Calderas F, Chávez AE, Manero O (2010). Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.

Herrera-Valencia, E. E., Sánchez-Villavicencio, M. L., Medina-Torres, L., Ramirez, D., Vicente Jesús Hernández-Abad, Calderas, F., & Manero, O. (2019). *New simple analytical method for flow enhancement predictions of pulsatile flow of a structured fluid.* 31(6), 063104–063104. <https://doi.org/10.1063/1.5097867>

Lombard J, Pagonabarraga I, Poiré EC (2020). Dynamic response of a compressible binary fluid mixture. *Phys. Rev. Fluids* 5, 064201.

Lopez de Haro M, del Rio JA, Whitaker S (1996). Flow of Maxwell fluids in a porous media. *Transp. Porous Media* 25, 167.

Macosko CW, *Rheology: Principles, Measurement and Applications* (Wiley, Germany 1994).

Moreno, L., Calderas, F., Sanchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sanchez-Solis, A., & Manero, O. (2015). Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. *Korea-Australia Rheology Journal*, 27(1), 1–10. <https://doi.org/10.1007/s13367-015-0001-4>

Muralevva L (2021). Viscoplastic flow in a pipe of a complex cross section with stick-slip at the wall. *Phys. Fluids* 33, 073107.

Pinho FT, Oliveira PJ, Miranda JP (2003). Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power law fluid across a sudden axisymmetric expansion. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 24, 747-761.

Pimenta TA, Campos JBLM (2012). Friction losses of Newtonian and non-Newtonian fluids flowing in laminar regime in a helical coil. 36, 194-204

Pinho FT, Whitelaw (1990). Flow of Non-Newtonian Fluids in a pipe 34, 129-144.



Rice, R. G., & Do, D. D. (1995). *Applied mathematics and modeling for chemical engineers*. New York [U.A.] Wiley.

Sadek Samir H, Pinho FT (2019). Electro-osmotic oscillatory flow of viscoelastic fluids in a microchannel, 266, 46-58.

Shah NA, Mahsud Y, Aziz M, Tlili I. Analytical solutions for unsteady electrohydrodynamics flows of a Maxwell fluids in microchannels with circular cross section. *Phys. Fluids* 32, 013107 (2020).

Sochi T (2015). Analytical solutions for the flow of Carreau and Cross fluids in circular pipes and thin slits. *Rheol. Acta* 54, 745-756.

Tozzi E, Hartt W (2022), non-Newtonian laminar flows in pipes using radius, stress, shear rate or velocity as the independent variable. *Phys. Fluids* 33, 103104.

Torres Herrera U (2021). Dynamic permeability of fluids in rectangular and square microchannels: Shift and coupling of viscoelastic bidimensional resonances. *Phys. Fluids* 33, 012016.

Torres-Herrera U, Corvea-Poiré E (2018). An analytical framework to determine flow velocities with nanotubes from their vibration frequencies. *Phys. Fluids* 30, 122001

Torres Rojas AM, Pagonabarraga, Corvera-Poiré (2017). Resonances of Non-Newtonian fluids in elastomeric microtubes. *Phys. Fluids* 29, 122003.

Tsiklauri D, Beresnev I (2006). Non-Newtonian effects in the peristaltic flow of a Maxwell fluid. *Phys. Rev.* 73, 029901.

Wolfram Research, Inc., *Mathematica* (Licencia UNAM) Version 13, Champaign, IL., 2020.