



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

La amplitud de distribución del pión: un
enfoque fenomenológico.

T E S I S

Que para obtener el título de:

Física

Presenta:

Danaheb Naomi Navarro Durán

Directores de tesis: Dra. Aurore Marie Pascale Nicole Courtoy

Ciudad Universitaria, CD. MX, 19 de agosto de 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres, a mi
familia y a mis dos abuelitos
que se adelantaron al cielo.*

Agradecimientos

Quiero agradecerle a mi familia, a mis padres primeramente por siempre estar y por aguantar los malos días, cuando no tenía el mejor carácter al regresar del Instituto y sólo me encerraba a seguir escribiendo esta tesis. Le agradezco a mis perritas, Burbuja y Cookie, sin ellas habría perdido la cordura desde el día uno.

A mis compañeros de cubículo, el bien llamado *gallinero*, por estar casi todos los días a las 9:00 am en punto para ir por café y hacer las primeras horas de trabajo más amenas. Por haberme abrazado cuando sólo podía llorar del estrés, y festejado hasta el más mínimo "muy bien" de mi asesora.

A la doctora Aurore Courtoy, mi asesora desde el servicio social, con quien conecte desde el día uno. Por siempre tenerme paciencia para explicarme las cosas más de tres veces y soportar el que siempre quería escribir de más. Por siempre hacer las juntas semanales agradables y por convertirse en una mujer a la que admiro desde la primer conferencia en la que la vi por allá del 2018 en mi primer Día de puertas abiertas.

Al profesor Hector Miguel Mejía, por inspirarme con sus clases a seguir en la física, por hacerme ver que, aunque pareciera difícil siempre se podían resolver hasta los problemas más difíciles.

Y por último, creo que no sería quien soy hoy si mis mejores amigos, Joan y Cecilia, no hubieran estado siempre, así desapareciera por días porque estaba demasiado concentrada en que esta tesis resultara perfecta. Gracias por quedarse, por quererme y por siempre apoyarme, no habría llegado hasta aquí sin ustedes.

De igual manera agradezco el apoyo de parte de la DGAPA a través del proyecto PAPIIT IN111222, así como de CONACyT con el proyecto de Ciencia de Frontera 2019 No. 51244 (FORDECYT-PRONACES).

Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	III
Introducción	1
1. El modelo quark.	3
1.1. ¿Otra partícula fundamental?: Quarks	3
1.1.1. ¿Patrones de quarks?; Multipletes y octetes.	4
1.1.2. ¿Combinaciones de quarks blancas?; SU(3) de color.	6
1.2. Quark + antiquark = Hadrón.	8
1.2.1. Gluones.	8
1.3. Un mesón particular; el pión.	10
1.4. ¿Elastico o inelástico?; Procesos para estudiar la estructura en términos de quarks.	11
1.4.1. Proceso inelástico.	11
1.4.2. Proceso elástico.	12
2. Amplitud de distribución de quarks en el pión.	14
2.1. ¿Simétrico o antisimétrico?; Funciones de onda.	14
2.2. Del factor de forma a la amplitud de distribución del pión.	15
2.3. ¿De donde viene el pión?; La rotura de la simetría quiral.	18
2.4. Más de una forma de estudiar la amplitud de distribución; Modelo quiral.	18
2.4.1. Interacción de contacto; modelo quiral.	19
2.4.2. El factor de forma en términos de la amplitud de distribución.	19
3. Polinomios de Gegenbauer y amplitud de distribución.	22
3.1. Definición	22
3.2. Coeficientes de Gegenbauer para la amplitud de distribución del pión.	24
3.2.1. Caso general; $\Phi(x, Q^2)$	27
3.2.2. Solución en el caso del modelo quiral.	27
3.2.3. Caso asintótico.	31
3.3. Dependencia de Q en $\Phi(x, Q)$	33
3.3.1. Momentos en ξ	35

3.4. Puntos finales en el gráfico (Endpoints)	36
3.5. Análisis comparativo; Retículo vs LO.	37
4. Conclusiones.	40

Introducción

Comprender la estructura interna de los hadrones, las partículas compuestas de quarks, sigue siendo un esfuerzo intrigante y desafiante en el campo de la física de partículas. Entre los hadrones de los que tenemos conocimiento que existen, tenemos al pión. Este, como el mesón más ligero, ha atraído una atención considerable debido a sus propiedades únicas y su papel fundamental en la aclaración de los principios subyacentes que rigen la interacción fuerte cómo lo es la rotura de la simetría quiral, el hecho de su definición cómo bosones de Goldstone, entre varias cosas más que lo hace un mesón bastante particular.

La amplitud de distribución, denotada por $\phi(x, Q^2)$, se define como la transformada de Fourier de la función de onda del pión sobre el cono de luz y representa la amplitud de probabilidad para encontrar un quark que lleve una fracción x del momento longitudinal del pión. La amplitud de la distribución del pión ofrece información vital sobre la distribución del momento interno de los quarks dentro del pión, proporcionando un vínculo crucial entre la descripción teórica del hadrón y lo que se ha logrado observar en técnicas experimentales dentro de los más famosos laboratorios. El modelo de quarks, propuesto por Gell-Mann y Zweig en la década de 1960, revolucionó nuestra comprensión de los hadrones al introducir el concepto de quarks como constituyentes fundamentales. De acuerdo con este modelo, el pión consta de dos quarks de valencia, un quark y un antiquark, unidos por la fuerza fuerte mediada por gluones. Si bien el modelo de quarks describe con éxito la estructura general y las propiedades de los hadrones, no logra capturar la dinámica detallada y los aspectos **no perturbativos** de la interacción fuerte.

La simetría quiral es una simetría fundamental que está rota. De sus rupturas emergen los tres piones con masa muy pequeña. Comprender la interacción entre la simetría quiral y el modelo de quarks es esencial para una comprensión integral de la estructura de los hadrones. En el capítulo 2 se encuentra la teoría necesaria para lograr comprender por que el entendimiento de estos conceptos nos lleva a poder estudiar con más profundidad al pión.

El modelo quiral proporciona información valiosa sobre la amplitud de distribución del pión, que refleja las probabilidades de encontrar diferentes fracciones de momento transportadas por los quarks dentro del pión. Para trabajar con la amplitud de distribución, se emplean los **polinomios de Gegenbauer** ($C_n^\alpha(x)$), que son un conjunto de polinomios ortogonales que se utilizan para expandir la amplitud de distribución en términos de una serie.

Investigar la amplitud de distribución dentro del contexto del modelo quiral y utilizar polinomios de Gegenbauer nos permite entender los aspectos no perturbativos de la interacción fuerte. El procedimiento que se sigue dentro del capítulo 3 es analizar los coeficientes de los polinomios de Gegenbauer y estudiar su evolución con respecto a la escala de energía, con ello se puede obtener información valiosa sobre la estructura interna del pión y la interacción entre los diversos componentes de su amplitud de distribución.

En esta tesis se compara el comportamiento de la amplitud de distribución obtenida en el modelo quiral con estudios semi-fenomenológicos y resultados recientes del modelo del retículo. De igual manera tiene como objetivo cerrar la brecha entre estos diversos conceptos teóricos ahondando en la amplitud de distribución del pión. Al combinar los conocimientos del modelo de quarks, la simetría quiral, así como los conceptos matemáticos tales como los polinomios que se presentaron anteriormente, buscamos profundizar nuestra comprensión de la estructura interna del pión. Los resultados de este estudio contribuirán a los esfuerzos en curso para desentrañar los misterios de la física de hadrones y la física de altas energías.

Capítulo 1

El modelo quark.

1.1. ¿Otra partícula fundamental?: Quarks

Para estudiar como se lleva a cabo la interacción fuerte por medio de altas energías, definiremos un *tipo de partícula* parecida a los electrones o los muones, los cuales pertenecen al **modelo estándar de partículas elementales**, en donde se encuentran aquellas que son consideradas partículas puntuales, es decir, no están constituidas de *algo* más pequeño. A los electrones, muones y a la partícula τ se les asignó el nombre de *leptones*. Por otro lado, siendo también puntuales están los **quarks**, partículas que tienen carga de sabor, carga de color, espín y masa, así cómo también un número bariónico.

Estas partículas que componen aproximadamente la mitad¹ del modelo estándar (los quarks y los leptones) son llamados **fermiones**. Para los intereses teóricos de esta tesis, se concentrará el estudio en los fermiones con carga de sabor y color; los quarks.

Los quarks son separados por 6 sabores; up, down, strange, charm, bottom y top, y se pueden reflejar por medio de **umbrales de energía** capturados en las colisiones e^-e^+, p^-p^+ o electrón-protón. El proceso para asignarle un sabor a cada quark se lleva a cabo cómo sigue; después de la colisión vamos a tener energía liberada, la cuál, para crear un par de quarks $u\bar{u}$ debe de ser de 3.3 MeV, nótese que la creación de quarks después de una colisión y con alguno de ellos del mar de quarks, tiene que ser estrictamente un par de quark antiquark del mismo sabor, esto debido a la propiedad de confinamiento de los

¹Aparte de los quarks y los leptones, al modelo estándar también lo componen los bosones.

quarks². Siguiendo el mismo procedimiento en las colisiones, pero ahora con una energía liberada de 5.8 MeV tendremos el quark down con su respectivo anti-down, mientras que para que se encontrara el quark strange fue necesario un umbral de energía de 101 MeV. Ahora, así como poseen cierta *masa*,³ los quarks también son partículas cargadas. Cada una de ellas tiene una carga diferente. Para mejor entendimiento, las características principales de los quarks se muestran en la tabla siguiente[1];

Quark	Carga eléctrica	Isoespín	Masa	Num. Bariónico	Hipercarga
u (up)	+2/3	+1/2	≈2.2 MeVs	+ 1/3	+1/3
d (down)	-1/3	-1/2	≈4.7 MeVs	+ 1/3	+1/3
s (strange)	-1/3	-1/2	≈ 80 MeVs	+ 1/3	-2/3
c (charm)	+2/3	+1/2	≈1.27 GeVs	+ 1/3	+1/3
b (bottom)	-1/3	-1/2	≈4.19 GeVs	+ 1/3	+1/3
t (top)	+2/3	+1/2	≈ 173 GeVs	+ 1/3	-2/3

Así, con los sabores y algunos de sus números cuánticos expuestos en la tabla anterior, podemos profundizar en otro número cuántico particular de estos fermiones.

1.1.1. ¿Patrones de quarks?; Multipletes y octetes.

La física de partículas, así como la física en general, tiene ciertas **simetrías** las cuales deben de cumplirse. Para el caso del número cuántico del sabor de los quarks existe una simetría en particular, SU(3), para la cuál existe una representación fundamental cómo una matriz de 3×3 . La simetría SU(3) posee 8 matrices generadoras λ_i con $i \in [1, 8]$, llamadas matrices de Gellmann, y en este conjunto de matrices existen 2 matrices diagonales (1.5) las cuales estarán relacionadas con una proyección del isoespín (\hat{I}_3) y con la hipercarga (\hat{Y}) respectivamente cómo se muestran en 1.1.

$$\hat{I}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8. \quad (1.1)$$

²El confinamiento de los quarks que depende de la constante de acoplamiento α_s se entiende como sigue; cuando los quarks están *muy cerca*, la constante α_s es muy pequeña, es decir, se comportan cómo *partículas libres* Mientras más se separan, la constante crece, por ello no podemos encontrar quarks *individuales*.

³El autor utiliza el concepto *masa* sin distinción de la *energía*

Podemos entender a la hipercarga \hat{Y} como:

$$\hat{Y} = S + B, \tag{1.2}$$

con B el número bariónico correspondiente a la combinación de quarks y S la extrañeza de estos. Recordemos que la carga eléctrica para estos fermiones tiene un valor fraccionario. Para los quarks que tienen isospín positivo es de $+2/3$ y para los quarks con isospín negativo $-1/3$, así, si sumamos las cargas de la combinación uud nos dará 1, el cuál corresponde con la carga conocida para el protón(uud). Para encontrar la proyección del isospín y la hipercarga correspondiente para cada sabor de quark, habrá que operar sobre alguno de los 3 eigenvectores simultáneos definidos concretamente cómo;

$$x' = \mu x. \tag{1.3}$$

Con μ cómo las matrices que van a definir en esta simetría a los sabores up, down y strange como sigue

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Así, después de aplicar un poco de álgebra vamos a obtener los **diagramas de peso**, los cuales se ven cómo la figura (1.1)

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

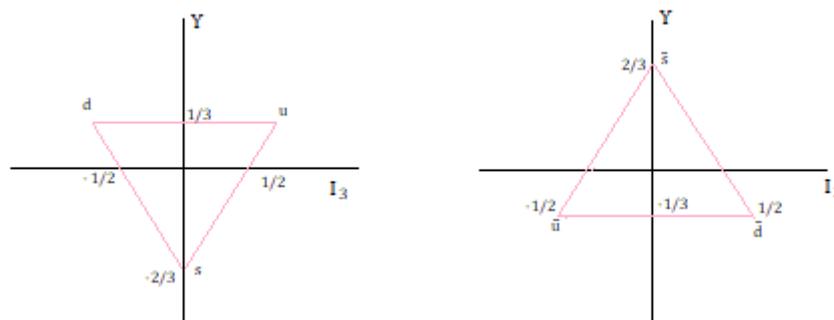


FIGURA 1.1: Diagrama de peso para los sabores uds con respecto a su hipercarga (Y) y a su proyección de isospín así como el diagrama correspondiente para $\bar{u}\bar{d}\bar{s}$

A los diagramas de (1.1) también se les conoce como un **multiplete** de quarks/anti-quarks [1]. Así como tenemos combinaciones representadas como un multiplete, el producto de dos de estos nos arrojará un arreglo geométrico para el cual todos sus vértices estarán compuestos por 2 quarks. A este arreglo lo llamaremos **octete de mesones** para el caso de mesones escalares.

El estudio de este último por medio de diagramas de peso se lleva a cabo con el producto de los multipletes de $uds/\bar{u}\bar{d}\bar{s}$ y con un concepto llamado *extrañeza*, el cual se encuentra dentro de la definición utilizada para la hipercarga (1.2).

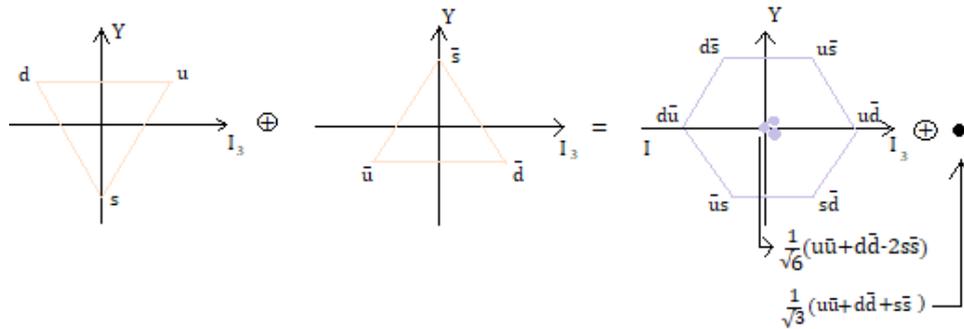


FIGURA 1.2: Producto de los multipletes $uds/\bar{u}\bar{d}\bar{s}$ para obtener el octete de mesones. El octavo estado en el octete es $1/\sqrt{2}(u\bar{u} - d\bar{d})$.

La proyección del isoespín (I_3) en el eje horizontal tiene posibles valores de $-1, 0, 1$ mientras que el eje vertical sobre el que está plasmado el octete es la extrañeza. Esto es debido a la relación que tiene con la hipercarga, al ser combinaciones de dos quarks (quark anti-quark), es decir, mesones, su número bariónico es cero. Por ello en este caso

$$\hat{Y} = S.$$

1.1.2. ¿Combinaciones de quarks blancas?; SU(3) de color.

Así como existen productos de multipletes para combinaciones de 2 quarks, también podemos estructurar un multiplete para combinaciones de 3 quarks ¿Cómo hacemos esto? Matemáticamente se verá cómo sigue;

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \tag{1.6}$$

Es decir, la combinación de 3 quarks nos va a arrojar un decuplete, dos octetes y un singulete. Para comprender mejor esta operación podemos observar la figura (1.3) en donde se aprecian las combinaciones de quarks posibles en estos multipletes

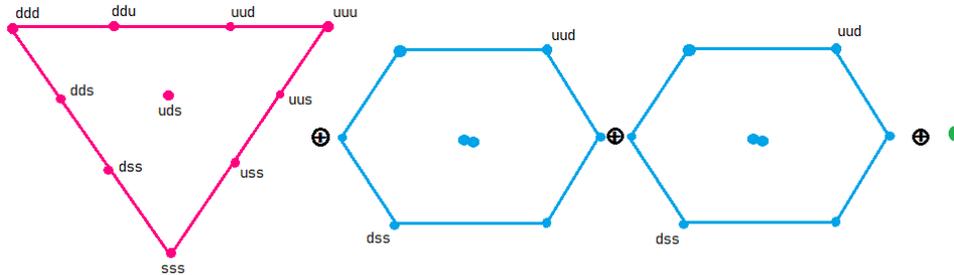


FIGURA 1.3: Operación gráfica para la combinación de 3 quarks.

Aquí se representan todas las posibles combinaciones para estos sabores de quarks, enfoquemos la atención en uno en particular, la combinación uuu .

Para detectar nuevas combinaciones de quarks se hacen experimentos de colisiones a muy altas energías para lograr dispersiones y así obtener **resonancias**, las cuales son los picos de energía que identifican a las partículas que se crean después de una colisión.

La resonancia Δ^{++} es aquella que cuenta con la combinación particular de quarks uuu , estos cuentan con un espín de $\frac{3}{2}$, ¡Tendríamos una partícula que viola el principio de exclusión de Pauli!. Recordemos que el **principio de exclusión de Pauli**, nos dice que no puede haber dos fermiones con los mismos números cuánticos dentro de un sistema. Por ello, para que no se violara ningún principio, se definió la **carga de color**, y así se conservaría el hecho de que las partículas que observamos son *neutras*; esto refiriéndose a la carga de color. Es decir, mantendríamos la conservación de la carga haciendo una combinación de colores que nos diera *blanco*. Cada quark tendrá un color primario (rojo, azul o verde) para que así, combinando los tres o dos (este último caso como combinación color/anticolor), nos de una partícula **sin color**. Dentro de estas posibles combinaciones de colores existe una muy particular a la que llamaremos **singulete**, la cual va a estar definida cómo antisimétrica, por ejemplo: $R\bar{R} + B\bar{B} + G\bar{G}$ para mesones. Las cargas de color serán $R(1,0,0)$, $G(0,1,0)$ y $B(0,0,1)$. Con toda esta teoría, la resonancia Δ^{++} sigue siendo aceptada y ahora podemos describir sus 3 quarks up cómo rgb , es decir[1];

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(RGB - RBG + BRG - BGR + GBR - GRB) \tag{1.7}$$

Claro que el concepto de *función de onda* es un poco más complejo (véase sección 2.1) Notemos que cuando nos referimos al *color*, estas variables estarán expresadas por un vector, esto debido a que la carga de color pertenece a la simetría SU(3) y con ello puede ser estudiada por medio de matrices.

1.2. Quark + antiquark = Hadrón.

Habiendo estudiado los quarks, desde sus números cuánticos hasta su alcance matemático por medio de las simetrías, pasemos a la pregunta; estos quarks ¿Qué forman? Los quark-antiquark creados por medio de las colisiones son capaces de **hadronizar** con otros, es decir, son capaces de unirse entre ellos para así formar una nueva **partícula**. Los **hadrones** están compuestos de **quarks**. Existen dos tipos de hadrones; los bariones (compuestos de 3 quarks) y los mesones (compuestos de 1 quark y 1 antiquark), ambos siguiendo el concepto del **confinamiento del color**, el cual nos indica que las partículas con carga de color no pueden estar *solas*, es decir, necesitan tener, ya sea una pareja de su anticolor, o 2 quarks más de los dos colores restantes (p.ej: si tenemos un quark **R**, no podríamos estudiarlo a simple vista, tendría que *hadronizar* con un quark \bar{R} o con 2 quarks **B**, **G**, entre otras).

Para los bariones se tendrá la combinación **RGB** de 3 colores que den “blanco”. Por otro lado para los mesones será una combinación de un color y un anticolor para, de igual manera, conservar una carga de color “neutra.” Los bariones rigen su comportamiento por la estadística de Fermi, es decir, partículas como el protón (compuesto por dos quarks up y uno down) y el neutrón (con combinación *udd*) cumplen el principio de exclusión de Pauli, mientras que los mesones se rigen por la estadística de Bose-Einstein, siendo mejor llamados bosones.

Sin embargo, los quarks no son los únicos que tienen carga de color.

1.2.1. Gluones.

Recordemos otra interacción en la cuál interactúa un tipo de leptón muy conocido. La interacción electromagnética podemos entenderla con electrones, los cuales liberan energía por medio de un *fotón*, el cuál es considerado parte de los **bosones**; el otro tipo de partículas que componen el modelo estándar de partículas elementales y las cuales fungen como *mediadoras de la interacción*.

Los bosones, los cuales siguen la estadística de Bose-Einstein y no cumplen el principio de exclusión de Pauli, pueden ser vistos como *energía liberada* de cualquier interacción entre partículas, como se muestra en la figura 1.4. Para la interacción fuerte, su partícula mensajera se llama **gluón**.

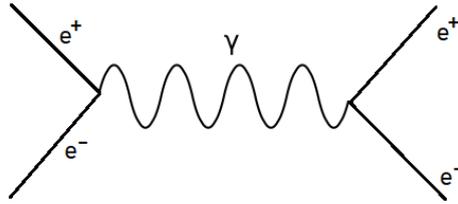


FIGURA 1.4: Diagrama de Feynman en el cuál se observa una dispersión $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, en ella se ve cómo existe un fotón el cuál funge cómo transmisor de información entre los dos procesos.

Los gluones, a diferencia de los fotones **sí tienen carga**, y es la misma que hace a los quarks especiales, la carga de color. Al ser la partícula mediadora de interacción entre quarks, el gluón va a tener el color de uno y el anticolor del otro.

En la física de partículas existen 8 tipos de gluones, esto es debido a las posibles combinaciones de color/anticolor $R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})$. Por otro lado, hay que tener en mente que en los nucleones del átomo no están solo los quarks con los que se describen a los nucleones (mejor llamados **quarks de valencia**) sino que vamos a tener un *mar* de quarks y gluones, dentro del cuál vamos a tener quarks *asintóticamente libres* (Véase sección 1.1), es decir, en el mar se encuentran pares quark-antiquark de un mismo sabor, los cuales pueden *unirse* con otro quark que llegue con la energía necesaria para hadronizar.

Es pertinente mencionar que no podemos estudiar a un quark y/o a un gluón suelto, esto debido a que ellos por si solos no son considerados estados ligados cómo lo son los hadrones, también se debe a que jamás se ha podido *observar* experimentalmente a un quark, más bien lo que se estudia es la energía de umbral con la que se crean, así se sabe que sí existen. Sin salir de contexto y cómo se vio con anterioridad, los quarks son de *un color* (R,G o B) y hasta ahora sólo se es capaz de observar partículas de color *blanco*, estas últimas sí somos capaces de estudiar a profundidad por medio de experimentos a altas energías para así observar que es lo que la compone.

1.3. Un mesón particular; el pión.

Como se dijo con anterioridad, los hadrones se dividen en dos tipos, para los intereses de esta tesis centraremos la atención en una partícula conocida como **pión** la cual es un mesón. Es decir, el pión consiste en un arreglo de quark y antiquark. El pión en el área de física nuclear es considerada una **partícula mediadora** que mantiene interactuando al protón y al neutrón. En esta rama de la física al pión lo podemos considerar como un *tripleto* que sigue la simetría $SU(2)$ de isospín [2] y lo expresamos cómo sigue;

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

con $\pi^0 = \pi_3$ y $\pi^\pm = \frac{1}{2}(\pi_1 \pm i\pi_2)$ siendo combinaciones de los piones $\pi_{1,2,3}$ por medio de las matrices τ (Véase sección 2.2). En otro orden de ideas y continuando con el estudio del pión, este es el más ligero de los mesones y se puede estudiar por medio de las 3 combinaciones ortogonales de sus tres posibles mezclas de *sabores*; π^+ definido como $u\bar{d}$, π^- que consta de una combinación $d\bar{u}$ y una *partícula neutra*, el π^0 , al cuál lo vamos a poder escribir por medio de sus 2 quarks cómo $u\bar{u}$ ó $d\bar{d}$. Este último va a poder ser escrito cómo sigue

$$\pi^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}. \quad (1.9)$$

La masa de los piones π^- y π^+ es de 139.57 MeV, mientras que la del pión π^0 es de 134.97 MeV. Para el pión tendremos $S = 0$ (extrañeza) e $I = 1$ (isospín). Los piones pueden ser, entre otras cosas, producto del decaimiento del kaón así como de colisiones entre partículas debido a que, al ser una partícula muy ligera, su *creación* es sencilla de lograr. El kaón tiene una masa de 496.667 MeV. Por otro lado, si un pión cargado (π^+ , π^-) decae, este quedará en un muón y un neutrino muónico con una energía de 105.66 MeV, siendo este el canal más probable. En la reacción anterior *faltan* ≈ 34 MeV para que se conserve la masa del pión. Esta energía faltante es aquella que se libera en la colisión.

La estructura de quarks que forman a los piones sigue la simetría $SU(2)$ de sabor debido a su arreglo de 2 sabores. Una **partícula sin color**, es decir, un singulete es aquella que, en la representación del grupo de color sólo tiene 3 posibles combinaciones de colores ($R\bar{R}$, $B\bar{B}$, $G\bar{G}$). Un color y un anticolor nos devuelven una combinación *neutra* (sin color). A esta partícula bautizada cómo pión (π) se le puede estudiar desde el punto de vista de su estructura en términos de quarks, así, se puede estudiar su comportamiento con

respecto a otras partículas. En la sección siguiente se descubrirá una de las herramientas para estudiar hadrones en términos de quarks.

1.4. ¿Elastico o inelástico?; Procesos para estudiar la estructura en términos de quarks.

Habiendo estudiado la teoría detrás de la estructura del pión en términos de quarks, concentremos ahora la atención en entender *cómo* es la estructura de esta partícula y en cómo llegamos a estudiar esos componentes. Para estudiar qué partículas pueden crearse después de una colisión inelástica o elástica, se puede estudiar qué tanto se dispersan o qué es lo que les pasa viendo el producto del choque estudiado.

1.4.1. Proceso inelástico.

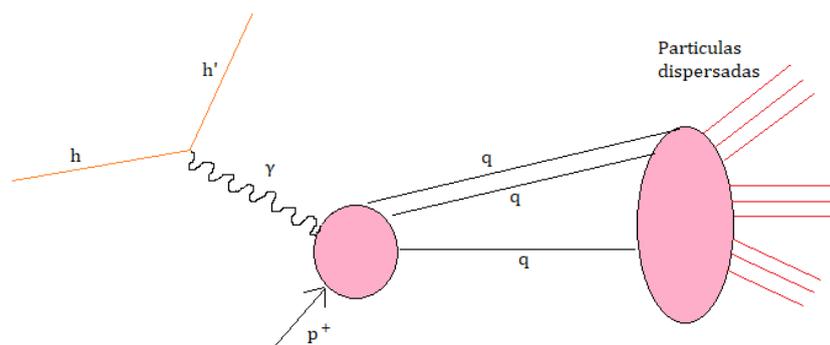


FIGURA 1.5: Diagrama de Feynman para la dispersión inelástica profunda.

En la figura 1.5 se aprecia cómo, después de que el leptón h dispersara una partícula h' y un fotón, este último choca con un protón y así provoca que este último se rompa en quarks. Para que suceda lo último descrito, la colisión tiene que estar dentro del rango de altas energías, es decir, la colisión debe de ser una **dispersión profundamente inelástica** (DIS). Para esta interacción inelástica se define un proceso *inclusivo* en el cuál se concentra en la estructura de la partícula objetivo, por ello, cobra suma importancia en los procesos de dispersiones profundamente inelásticas. Los quarks, a su vez, como no pueden estar solos por la *simetría de color*, hadronizan con otros quarks para crear nuevas partículas, que en el diagrama anterior serían las líneas rojas. El tipo de partículas creadas después de la colisión va a depender de la energía liberada por el choque, esto

debido a que la energía se debe de conservar para cualquier interacción, así que no se podría obtener una partícula que registrara mayor energía que la energía inicial de la interacción.

La colisión se lleva a cabo entre un fotón y los constituyentes del protón. Aquí se necesita que el fotón incidente tenga una longitud de onda pequeña para que así posea el suficiente momento para chocar con un solo quark del protón y no chocar con este último como hadrón. En esta interacción existe una gran “pérdida” de energía, es decir, la colisión libera grandes cantidades de energía la cual se *reparte* entre las partículas creadas. Seguido de esto, se trata el hecho de que, después de la colisión, se tiene una dispersión de partones, en la cual, cada quark liberado después de la colisión se llevará una **fracción de momento** del protón papá (o de la partícula en cuestión). Esta dispersión es estudiada a través de **funciones de estructura** $F_1(x, Q^2)$, las cuales dependen de una variable x , la cuál es la fracción de momento del momento total del nucleón golpeado y de Q^2 el cual se define como la transferencia de momento en la interacción.

1.4.2. Proceso elástico.

Por otro lado para una colisión elástica se define un **factor de forma** como la transformada de Fourier de la distribución de carga. Este objeto matemático juega un papel importante en los **procesos exclusivos** [3]. Estos se definen como un proceso en el cual se observa su estado final. Estos procesos que involucran a hadrones, son aquellos en los que, en las interacciones al menos una de las partículas ya no es considerada puntual y ahí es donde entra el factor de forma.

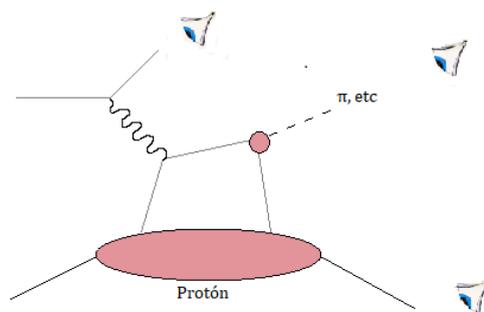


FIGURA 1.6: Diagrama para representar un proceso exclusivo.

Dentro del estudio de procesos exclusivos se definen modelos, los cuales utilizan, ya sea la interacción completa, es decir el factor de forma, o una parte de este proceso, llámese

sólo la amplitud de distribución (Φ). Para estos modelos se sigue la siguiente ecuación

$$\int_0^1 dx \Phi(x) = 1, \quad (1.10)$$

lo que nos dice que, en el estudio de una amplitud de distribución bajo un modelo, su integral siempre va a ser igual a 1. Por lo tanto, sabiendo ahora que existe algo más pequeño que un protón, que esto **más pequeño** compone a un cierto grupo de fermiones y con ello se estudia cuál es la estructura de quarks del pión, podemos pasar a conceptos más profundos que nos ayuden a estudiar ahora qué pasa con los quarks de valencia de un pión después de una colisión. Se concluye de igual manera que no se pueden ver experimentalmente partículas *de colores*, si no que las partículas detectadas son *blancas*, es decir, poseen quarks que hacen a la partícula **neutra** con la simetría de color aún en nuestro estudio.

Capítulo 2

Amplitud de distribución de quarks en el pión.

El propósito de este capítulo es introducir la noción de **amplitud de distribución** ($\Phi(x, Q^2)$) de quarks en el pión. Esto para estudiar en particular la dependencia en Q^2 de esta amplitud, es decir, cómo se comporta con respecto al cambio de Q^2 . Por otro lado, se va a ahondar en la estrecha relación que tiene este concepto con los factores de forma. Para estudiar a cualquier partícula se necesita la definición de alguna característica intrínseca sobre la que se pueda trabajar para poder describirla, ya sea por medio de entes matemáticos o simplemente estudiando si existe alguna probabilidad de que suceda alguna interacción en su interior o con alguna otra partícula. Con esta motivación se comienza este capítulo, así, se describe cómo va a ser la *función de onda* para la partícula que se está estudiando.

2.1. ¿Simétrico o antisimétrico?; Funciones de onda.

Cómo en mecánica cuántica, una **función de onda** [$\Psi(x, t)$] es aquella que describe cómo se comporta una partícula con respecto a un tiempo t y a una posición x . La función de onda va a cumplir con la característica de ser **simétrica o antisimétrica**. Para los fermiones vamos a tener una función antisimétrica, es decir;

$$\Psi(r_1, r_2) = -\Psi(r_2, r_1), \quad (2.1)$$

mientras que para los bosones la función de onda será simétrica. Como se dijo con anterioridad, la función de onda es de utilidad para entender cómo se comportan las partículas, sabiendo esto se podría suponer que le podemos asignar una función de onda Ψ_{sist} a los hadrones, en este caso a un pión. Así, se puede factorizar por números cuánticos cómo sigue;

$$\Psi_{sist} = \Psi_{espacio} \times \Psi_{sabor} \times \Psi_{espín} \times \Psi_{color}. \quad (2.2)$$

Por otro lado, lo que nos dice la ecuación (2.2) es que se puede describir a los hadrones por medio de funciones de onda dependientes de otras características, como lo son el *espacio*, *sabor*, *color* y su *espín*. Estas funciones deben hacer que Ψ_{sist} sea antisimétrica si es que se está describiendo a un fermión. Por otro lado, si Ψ_{sist} es simétrica, la partícula que se estaría describiendo sería un *bosón*, es decir, para describir a un pión todas las funciones de onda que componen a Ψ_{sist} tendrían que resultar en una función simétrica. Definimos a la función de onda del color como la que describe cómo se *distribuye* el color en un hadrón. Es pertinente mencionar que la función de onda de color es **única** para los mesones (que son las partículas de interés en este trabajo) y sigue que los hadrones son *blancos*, dicho esto, definimos la función de color de los mesones como sigue;

$$\Psi_{color} = (R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})/\sqrt{3}, \quad (2.3)$$

debido a que se trata de un singulete de color, la ecuación (2.3) es antisimétrica. De igual manera podemos definir una expresión para las funciones del espín y de la carga de sabor, viéndose cómo sigue;

$$\Psi_{sabor}\Psi_{espín} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(u \uparrow \bar{d} \downarrow - u \downarrow \bar{d} \uparrow) \quad (2.4)$$

Con esto ya se tiene que la función de onda total que describe a la partícula de nuestro interés, es decir, la ecuación (2.2) para bosones es simétrica debido a que el producto de (2.3) (función antisimétrica) y (2.4) (función antisimétrica) resulta ser simétrico.

2.2. Del factor de forma a la amplitud de distribución del pión.

Como se introdujo en el primer capítulo de esta tesis, nuestro enfoque está dirigido al mesón más ligero; el pión. Este, como cualquier hadrón va a poder escribirse por medio de su función de onda descrita en la ecuación (2.2), aunque en modelos para la estructura

piónica, la función de onda se pueda calcular mediante lagrangianos quirales cuyo estudio va más allá del tema central de esta tesis. Retomando la forma un tanto general para describir la función de onda del pión, vamos a poder formular ciertas expresiones para describir procesos en los cuales es crucial saber cómo se ve la función de onda. Así, se puede presentar la siguiente pregunta; ¿Qué sucede con la estructura de una partícula después de alguna interacción? Para estudiar esto, en particular para los piones, se define un ente matemático llamado **factor de forma electromagnético** ($F_\pi(Q^2)$). Este nos expone información sobre la estructura del pión en términos de quarks con la ecuación siguiente;

$$\langle \pi^+(p') | J_\mu^{elm}(0) | \pi^+(p) \rangle = (p + p')_\mu e F_\pi(q^2), \quad (2.5)$$

con $J_\mu^{elm}(0)$ la corriente electromagnética la cual opera sobre los dos estados de los piones y $q^2 = (p - p')^2$ como la variable que describe la transferencia de momento. Para entender con más claridad *qué* es lo que nos describe el factor de forma electromagnético (ecuación (2.5)) podemos entenderlo como el proceso descrito en la figura 2.1. En esta figura se encuentran dos burbujas rosas, siendo estas la interacción en donde se calcula la amplitud de distribución de la estructura del pión en términos de quarks. El factor de forma electromagnético depende de un fotón incidente y se encuentran gluones en el proceso. Ahora, con la definición del factor de forma, vamos a poder integrarlo al estudio de la estructura del pión como respuesta al fotón. Los procesos en los cuales los factores de forma juegan un papel protagónico los encontramos en la literatura como **procesos exclusivos** (véase sección 1.4.2). Ahora, sea el decaimiento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*$ se define un **factor de forma de transición** [2] $F_{\pi \rightarrow \gamma\gamma^*}(Q^2)$ como sigue;

$$Q^2 F_{\pi \rightarrow \gamma\gamma^*}(Q^2) = \frac{\sqrt{2} f_\pi}{3} \int_0^1 \frac{dx}{x} \Phi_\pi(x, Q^2), \quad (2.6)$$

con f_π la constante de decaimiento del pión, Q^2 la transferencia de momento como $-q^2$ y $\Phi_\pi(x, Q^2)$ la amplitud de distribución del pión. El factor de forma descrito en la ecuación anterior se puede representar gráficamente cómo se ve en la figura 2.4 [4].

La **amplitud de distribución del pión dependiente de su momento** Q^2 se define como la amplitud de probabilidad que posee cada quark de valencia de llevarse cierta fracción de momento después de una dispersión. Sea la figura 2.1, se puede factorizar y así estudiar solo una parte del diagrama, dígame solo una amplitud de distribución, como se aprecia en la figura 2.2 [5], este objeto se define como la transformada de Fourier de un operador definido en coordenadas específicas entre 2 campos de quarks, uno definido

en $(\frac{z}{2})$ y el otro en $-(\frac{z}{2})$ como;

$$\Phi_i(x, Q^2) = F.T \left\langle 0 \left| \bar{q}(\frac{z}{2}) \not{\epsilon} \gamma^5 \tau_i q(-\frac{z}{2}) \right| \pi_i \right\rangle, \quad (2.7)$$

siendo el subíndice de isoespín i el tipo de pión sobre el que va a operar el factor de forma y τ el vector;

$$\vec{\tau} = (\tau^+, \tau^3, \tau^-), \quad (2.8)$$

con él, vamos a poder describir las entradas de este vector en función de las matrices de Pauli conocidas cómo sigue;

$$\tau^+ = \frac{1}{2}(\tau^1 + i\tau^2), \quad \tau^- = \frac{1}{2}(\tau^1 - i\tau^2). \quad (2.9)$$

Así, se va a definir sobre que pión se está trabajando, por ejemplo, el π^+ se proyecta

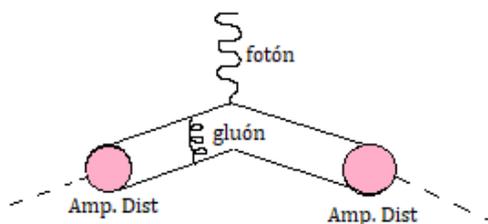


FIGURA 2.1: Diagrama para el factor de forma electromagnético del pión. Los círculos de color rosa representan la amplitud de distribución del pión.

mediante τ^- , el π^- se proyecta con τ^+ y el π^0 será τ^3 . τ define la función de onda del sabor (isoespín). Nótese que, sobre lo que operan ambos brackets en (2.7) es la expresión que se describió en el párrafo anterior, la cuál resulta de la corriente electromagnética que interactúa con los quarks, estos provenientes del pión. Notemos que para estudiar

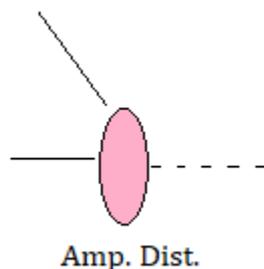


FIGURA 2.2: Amplitud de distribución del pión.

la amplitud de distribución no se le da importancia a que el pión esté o no cargado, a cualquiera de los 3 se les puede asignar una función de onda bajo la cual trabajar, sin embargo cuando hablamos de $F_\pi(q^2)$ se necesita excluir a π^0 . De igual manera se considera

pertinente mencionar que, en la expresión $\Phi_i(x, Q^2)$ el \bar{q} corresponde a la contribución de los antiquarks en la dispersión y q corresponde a los quarks.

2.3. ¿De donde viene el pión?; La rotura de la simetría quiral.

Para los mesones sigue habiendo conceptos que nos hacen profundizar más en su estudio. Un **modelo quiral** es aquel que describe las *interacciones efectivas* de los mesones en el *límite quiral*, es decir, en el límite en donde se considera la masa de los quarks como cero. La herramienta que nos ayuda a describir el modelo sirve como punto de partida para lograr estudiar los límites de comportamiento en ciertas interacciones de los quarks en los piones, como por ejemplo al estudiar su *amplitud de distribución* (véase sección 2.2). El modelo quiral con el que se trabaja para estudiar al pión posee una simetría de sabor;

$$SU(2)_L \times SU(2)_R. \quad (2.10)$$

La descripción de la simetría previamente mencionada, así como sus rotaciones, van más allá de los objetivos de este trabajo. En la literatura se conoce cómo **simetría quiral**. Bajo esta simetría los quarks **no poseen masa**. Además, la simetría quiral se rompe de manera dinámica, dando origen al triplete de piones — tema que va más allá del ámbito de esta tesis de licenciatura. Solo mencionamos que aquí es donde entra al juego la **rotura de la simetría quiral**, la cuál es considerada una **rotura dinámica de simetría** que rompe la ecuación (2.10) hasta $SU(2)$ de isoespín. Esta rotura hace que el valor esperado del condensado de quarks sea diferente de 0 y con esto asegura que los quarks posean una masa.

2.4. Más de una forma de estudiar la amplitud de distribución; Modelo quiral.

Como fue descrito en las secciones previas, para estudiar el concepto de la amplitud de distribución podemos utilizar **modelos**. Tendremos un **diagrama de triángulo** que nos dará el factor de forma y dentro del cual sólo van a ser relevantes el fotón, la transferencia de momento que exista en la interacción y la amplitud de distribución, aquí no se consideran gluones.

2.4.1. Interacción de contacto; modelo quirral.

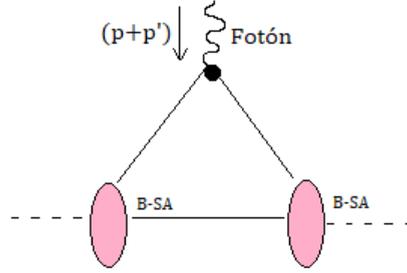


FIGURA 2.3: Diagrama de triángulo para describir una interacción bajo un modelo quirral en donde se observa la amplitud de estado ligado Bethe-Salpeter (B-SA).

Dentro del caso que se muestra en la imagen anterior se trabaja con una interacción del tipo **Nambu-Jona-Lasinio** (NJL) la cual es una teoría efectiva que se basa en la simetría quirral. Este modelo permite explicar cómo, a partir de quarks se pueden generar piones, sin embargo no da información de cómo se ligan los fermiones dentro del mesón. Por ello, se tiene una amplitud de estado ligado de *Bethe-Salpeter*, la cual proviene de considerar al pión como un estado ligado con su respectivo cuadrimomento. La amplitud de estado ligado de Bethe-Salpeter se encuentra con más detalle en [5]. En este modelo retomamos la expresión escrita en (1.10) y la aplicamos sobre la amplitud de distribución del modelo quirral que se ve como sigue

$$\Phi^x(x, Q_0^2) = 1, \tag{2.11}$$

donde Q_0 se define como la transferencia de momento definido gracias al modelo quirral en el que se está trabajando y se discutirá en la sección 3.2.

2.4.2. El factor de forma en términos de la amplitud de distribución.

Consideremos ahora el caso que describe el diagrama 2.1, es decir, en el que se considera la interacción entre los fermiones via gluones. Bajo este razonamiento vamos a poder dividir la interacción en tres partes; la amplitud de distribución (Φ), la amplitud de distribución conjugada (Φ^*) y la parte de la interacción entre estas (T_H). Los tres convolucionados arrojan un factor de forma, el cual, perturbativamente, se puede calcular mediante un factor de forma definido por Brodsky y Lepage como sigue;

$$F_\pi(Q^2) = \int_0^1 dx_i dy_i \delta\left(1 - \sum_i x_i\right) \delta\left(1 - \sum_i y_i\right) \Phi^*(y_i, Q) T_H(x_i, y_i, Q) \Phi(x_i, Q). \quad (2.12)$$

Nótese que aquí tenemos dos variables; x y y y sobre estas se definen las amplitudes de distribución de un pión entrante ($\Phi(x_i, Q^2)$) y de un pión que resulta ($\Phi^*(y_i, Q^2)$). Este factor de forma electromagnético nos describe la probabilidad de encontrar un estado de dos quarks en el pión que resulta, esto considerando un pión entrante, los gluones que existan en el proceso y una *amplitud perturbativa* la cual, si la queremos encontrar en el diagrama (figura 2.1), es todo lo que está entre las dos amplitudes de distribución.

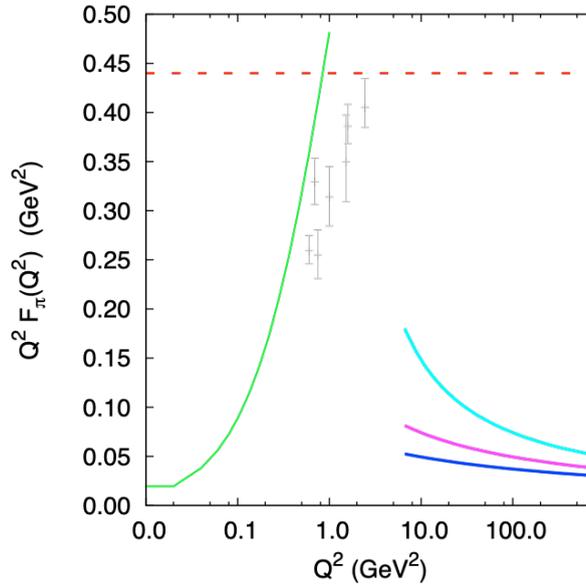


FIGURA 2.4: Puntos grises: Datos experimentales. Línea verde: El factor de forma dentro del marco NJL. Líneas cyan, morada y azul: Factor de forma asintótico $Q^2 F_\pi(Q^2) \rightarrow 16\pi\alpha_s(Q^2)f_\pi^2$ para $\Lambda_{QCD}^2 = 0.01, 0.1, 1 \text{ GeV}^2$. Línea punteada roja: Factor de forma en el marco de Brodsky-Lepage con $\alpha_s = 1$. Esta figura fue presentada en la tesis de A. Courtoy [5].

Se puede comparar lo que nos arroja el diagrama 2.1 con el 2.3 en el modelo quiral de NJL con el fin de entender el papel de la simetría quiral conforme incrementa Q^2 , es decir, la transferencia de momento. El análisis de la ecuación (2.12), en la teoría de Brodsky-Lepage, involucra la amplitud de distribución. En el gráfico expuesto en 2.4 [cortesía de Aurore Courtoy [5]] se muestran los resultados obtenidos dentro del modelo NJL. En verde se muestra el resultado del diagrama 2.3 y en la gama de azules el resultado de 2.1 de los cuales su estudio se ahonda en la sección 2.4. El factor de forma dentro del marco

NJL alcanza al factor de forma definido por Brodsky-Lepage señalado por una línea roja punteada, mientras que el factor de forma de la gama azul no logra alcanzar a su igual en el marco de Brodsky-Lepage.

Se puede concluir de este capítulo que ahora el lector tiene mejor noción del concepto de amplitud de distribución, así como de los diferentes modelos bajo los que se puede estudiar esta interacción. Habiendo estudiado todos estos conceptos se puede comenzar a repasar los atajos matemáticos útiles para atacar las amplitudes de distribución que son el objetivo principal de este trabajo como por ejemplo la expresión a cargo de Brodsky-Lepage. En esta se observa la dependencia en Q^2 de $\Phi(x, Q^2)$ la cual se escribe en términos de los polinomios de Gegenbauer, como se estudia en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Polinomios de Gegenbauer y amplitud de distribución.

En este capítulo llevamos a cabo el estudio del comportamiento de la amplitud de distribución de quarks dentro de un pión, lo cual es función de x y del cuadrimomento Q , siendo llamado a este comportamiento la **evolución del pión**. Este se describe por medio de los polinomios de Gegenbauer como resuelto por Brodsky-Lepage (Véase sección 2.4.2). Aquí se desarrollará bajo un modelo quiral. Para esto se necesita ahondar en un concepto particular que depende de variables relacionadas con el momento transferido.

3.1. Definición

Definimos los **polinomios de Gegenbauer** $\{C_n^{(\alpha)}(x)\}$, $\alpha > \frac{1}{2}$ como polinomios ortogonales en $[-1, 1]$ con $n, \alpha \in \mathbb{N}$. Estos son un caso especial de los *polinomios de Jacobi*, también definidos como polinomios ortogonales que operan sobre la función $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Estos polinomios son importantes para el estudio de funciones con dependencia en Q . De los polinomios sobre los que vamos a trabajar; los polinomios de Gegenbauer, estos van a cumplir la siguiente propiedad;

$$\int_{-1}^1 C_n^\alpha(x) C_m^\alpha(x) (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)(\Gamma(\alpha))^2} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (3.1)$$

con Γ una extensión de la función que sea su argumento, definida como sigue;

$$\Gamma(n) = (n - 1)!. \quad (3.2)$$

Notemos que en la ecuación (3.1) aparece el término $(1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ el cual está definido como una **función de peso**, es decir, una herramienta matemática utilizada en las **sumas** y/o en **integrales** la cual le da más influencia a ciertos elementos de la suma en el resultado. Así, decimos que los polinomios de Gegenbauer trabajan respecto al peso. Por otro lado, estos polinomios cumplen con una *relación de recurrencia* como sigue;

$$C_0^\alpha(x) = 1 \quad (3.3)$$

$$C_1^\alpha(x) = 2\alpha x \quad (3.4)$$

$$C_n^\alpha(x) = \frac{1}{n} [2x(n + \alpha - 1)C_{n-1}^\alpha(x) - (n + 2\alpha - 2)C_{n-2}^\alpha(x)] \quad (3.5)$$

De igual manera es pertinente mencionar que los polinomios de Gegenbauer en particular cumplen con la siguiente normalización; sea $n \in \text{pares}$ se utiliza como argumento a la función $(2x - 1)$ y se obtiene que

$$\int_0^1 C_n^{3/2}(2x - 1) dx = 1 \quad \text{con } n \text{ par}. \quad (3.6)$$

En la figura 3.1 se puede observar el comportamiento de los polinomios de Gegenbauer gráficamente para n el grado del polinomio entre $[0, 4]$ y con argumento $(2x - 1)$. Es importante notar cómo se comportan las funciones para cada n ; cuando n es **par**, se tiene una función simétrica con respecto a $x = 0.5$ para un α dado, que en este caso se definió como $3/2$. Por otro lado, cuando n toma valores **impares**, la función va a ser antisimétrica, siendo estos valores no útiles para nuestros cálculos.

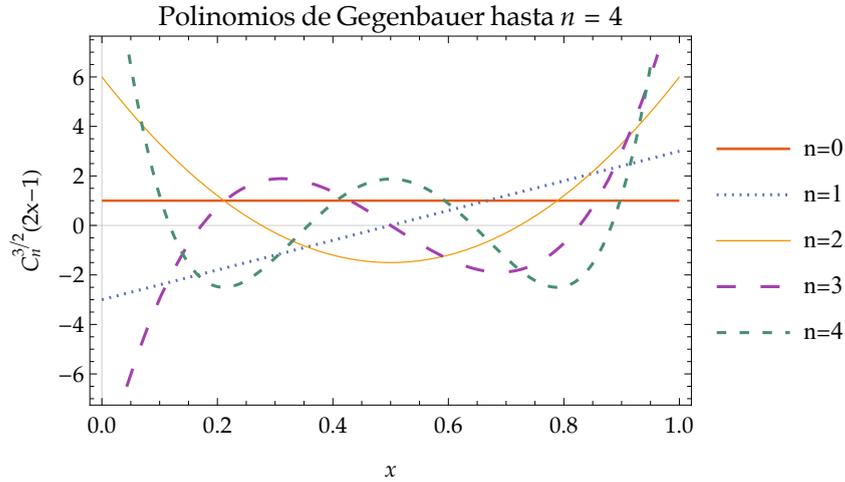


FIGURA 3.1: Caracterización de los polinomios de Gegenbauer para $n=0,1,2,3,4$ respectivamente.

3.2. Coeficientes de Gegenbauer para la amplitud de distribución del pión.

La solución de la ecuación de evolución en Q^2 , dada por Brodsky-Lepage, es la amplitud de distribución $\Phi(x, Q)$. Se puede expresar en términos de los polinomios de Gegenbauer. Así nos va a describir el *comportamiento* de dispersión siguiendo la expresión definida por Brodsky y Lepage (Véase sección 2.4.2)

$$\Phi(x, Q^2) = x(1-x) \sum_{n=0, \text{par}}^{\infty} A_n C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \left(\log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n}, \quad (3.7)$$

donde Λ es una escala de referencia que se define posteriormente. Vamos a estudiar la ecuación descrita en (3.7)¹. Esta será considerada el caso general de $\Phi(x, Q)$, el cual, por medio de los polinomios de Gegenbauer representa el comportamiento de las variables Q y x con el índice n . Este último nos va a indicar el número de términos de los que se compone la suma bajo la cual trabaja la función Φ . Presentes en esta ecuación tenemos también los **coeficientes de Gegenbauer** expresados como A_n , los cuales serán los coeficientes a resolver del polinomio con un valor de n par definido. Adicionalmente tenemos también

¹Se refiere al polinomio $(2x-1)$ como el argumento del polinomio definido por C_n

un exponente negativo el cual definimos como sigue;

$$\gamma_n^0 = -2 \frac{C_F}{\beta} \left[3 + \frac{2}{(n+1)(n+2)} - 4 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right]. \quad (3.8)$$

A este ente matemático lo llamamos *dimensión anómala*. Aquí vamos a definir a las constantes constante de color como $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$ y a β cómo $\beta = 11/3N_c - 2/3N_s$ con N_c y N_s los números correspondientes al color y sabor de los quarks que constituyan la partícula en cuestión respectivamente. Para el caso particular de un pión, vamos a tener que $N_c = 3$ y $N_s = 2$, siendo esto válido hasta un cierto umbral. Los polinomios de Gegenbauer en (3.7) van a satisfacer la relación de recurrencia descrita en la ecuación (3.3).

Ahora, para la ecuación (3.8) si se sustituye $n = 0$ tenemos que;

$$\gamma_0 = \frac{4}{29} \left[3 + \frac{2}{2} - 4 \sum_1^1 \frac{1}{k} \right] = 0. \quad (3.9)$$

Veamos ahora cómo podemos escribir dichos coeficientes (A_n) dada la normalización descrita en la ecuación (3.1) para $n = m$.

Se procede a desarrollar esta expresión con $\alpha = \frac{3}{2}$ y $x = 2u - 1$, así, el polinomio a resolver derivado de la ecuación (3.1) se ve como sigue;

$$- \int_0^1 [C_n^{\frac{3}{2}}(2u-1)]^2 (1 - (2u-1)^2) 2 du = \frac{\pi 2^{-2} \Gamma(n+3)}{n!(n+\frac{3}{2})(\Gamma(\frac{3}{2}))^2}. \quad (3.10)$$

Aplicamos la función (3.2) para resolver las Γ que aparecen y seguimos el cambio de variable u como sigue;

$$1 - x^2 = 1 - (2u - 1)^2 = 1 - (4u^2 + 1 - 4u) = 4u(1 - u); dx = 2du,$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(C_n^{\frac{3}{2}}(2u-1) \right)^2 (4u(1-u)) 2 du &= \frac{\pi}{n!} \left[\frac{2^{-2}(n+2)(n+1)}{\frac{\pi}{4}(n+\frac{3}{2})} \right] \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{\frac{1}{2}(2n+3)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Realizando el álgebra correspondiente;

$$\begin{aligned} 8 \int_0^1 \left(C_n^{\frac{3}{2}}(2u-1) \right)^2 (u(1-u)) du &= \frac{(n+2)(n+1)}{\frac{1}{2}(2n+3)} \\ &= \frac{2(n+2)(n+1)}{(2n+3)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Volviendo a x conseguimos la siguiente ecuación;

$$\int_0^1 \left(C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \right)^2 x(1-x) dx = \frac{(n+2)(n+1)}{4(2n+3)}. \quad (3.13)$$

Ahora, con la ecuación (3.7), es decir, la amplitud de distribución $\Phi(x, Q^2)$ y con el cambio de variable utilizado arriba, se usa la condición de ortonormalidad para despejar A_n

$$\int_0^1 \sum_{n=0, \text{par}}^{\infty} A_n \left(C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \right)^2 \delta_{nm} \left(\log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n} x(1-x) dx \quad (3.14)$$

$$= \int_0^1 C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \Phi(x, Q^2) dx. \quad (3.15)$$

Recordando que $n = m$, esto por la propiedad de ortonormalidad de los polinomios que se utilizó al inicio de este procedimiento (ecuación (3.10)), vamos a poder *cancelar* la suma con la delta (δ_{mn}) que obtenemos de aplicar el cuadrado a los polinomios en (3.14)

$$\int_0^1 x(1-x) A_n \left(C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \right)^2 \left(\log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n} dx = \int_0^1 C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \Phi(x, Q^2) dx, \quad (3.16)$$

nos arroja un A_n cómo sigue

$$A_n \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n} = 4 \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} \int_0^1 C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \Phi(x, Q^2) dx. \quad (3.17)$$

Por último, suponiendo un Q_0 el cuál corresponde a un modelo de bajas energías y recordando lo que se había obtenido de la ecuación (3.13), se despeja A_n en función del logaritmo para obtener la siguiente expresión

$$A_n \left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_n} = 4 \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} \int_0^1 C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \Phi(x, Q_0) dx. \quad (3.18)$$

Es decir, el valor de los coeficientes de los polinomios de Gegenbauer descrito en (3.18) va a depender directamente de la integral de estos últimos mencionados y de la expresión

para la amplitud de distribución de la estructura de quarks del modelo. Esta ecuación se puede atacar de distintas maneras. Se procede primero con un caso general.

3.2.1. Caso general; $\Phi(x, Q^2)$

Sea la ecuación (3.7), se sustituye la expresión obtenida para los coeficientes A_n como sigue

$$\Phi(x, Q^2) = 4x(1-x) \times \sum_{n=0, \text{par}}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} \left(\int_0^1 C_n^{\frac{3}{2}}(2y-1) \Phi(y, Q_0) dy \right) C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \left(\frac{\left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}{\left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right)} \right)^{-\gamma_n}. \quad (3.19)$$

Así, se tiene una expresión que describe a los polinomios de Gegenbauer en función de la ecuación que encontramos para describir a sus respectivos coeficientes. No se utiliza aún ningún modelo sobre el cual trabajar, siendo así un **caso general** de la amplitud de distribución del pión en términos de su estructura de quarks. En la sección siguiente se ahonda en la interpretación de $\Phi(x, Q^2)$ bajo un modelo quiral.

3.2.2. Solución en el caso del modelo quiral.

Seguido del modelo quiral (Véase sección 2.4.1), se considera que bajo este modelo se cumple que

$$\Phi^X(x, Q_0) = 1, \quad (3.20)$$

en donde Q_0 corresponde a bajas energías, considerándose el límite inferior $Q = Q_0$. Así vamos a tener una ecuación para describir a la amplitud de distribución bajo un modelo quiral;

$$\Phi^X(x, Q^2) = 6x(1-x) \sum_{n=0, \text{par}}^{\infty} C_n^{\frac{3}{2}} A'_n \quad (3.21)$$

Entonces podemos desarrollar la ecuación anterior como;

$$\Phi^X(x, Q^2) = 4x(1-x) \sum_{n=0, \text{par}}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1) \left(\frac{\left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}{\left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right)} \right)^{-\gamma_n}. \quad (3.22)$$

Con ello y el hecho que tenemos de los polinomios de Gegenbauer que señala que la integral descrita en (3.6) es 1 cuando n es un número par, se tiene que la expresión para los coeficientes dependiente de Q_0 encontrada en (3.21) se ve como sigue

$$A'_n(Q_0) = 4 \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} \left(\frac{\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{Q_0^2}{\Lambda^2}\right)} \right)^{-\gamma_n}. \quad (3.23)$$

Nótese que la expresión que queda para los coeficientes A_n en función de Q_0 depende del cociente de los logaritmos para cada transferencia de momento (Q^2 y Q_0^2). En otro orden de ideas, para estudiar el comportamiento de los polinomios de Gegenbauer utilizando la expresión calculada para A'_n en (3.23) y con distintos valores de n , se procede a sustituir dicha ecuación en la forma general de la ecuación de evolución (3.7) para recuperar la ecuación que va a describir a $\Phi^x(x, Q^2)$, es decir (3.22).

A partir de aquí se utiliza $A'_n = A_n$ sin distinción.

La representación gráfica de $\Phi^x(x, Q^2)$ se muestra en la figura 3.2, para $\Lambda = 0.174$ GeV y $Q_0 = 0.29$ GeV. Notemos que en la ecuación anterior ya tenemos, aparte del cuadrimomento Q , otro cuadrimomento que se definió por medio del modelo quiral que es Q_0 , el que será un valor fijo definido por el modelo que hasta ahora no hemos aplicado. Ahora, teniendo en mente la ecuación (3.22), nos interesa reconstruir $\Phi^x(x, Q^2)$ para un n dado. Con esta hipótesis, la cual solo da dependencia en x debido a que $Q = Q_0$, se sigue que

$$\left(\frac{\left(\ln \frac{Q^2=Q_0^2}{\Lambda^2} \right)}{\left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right)} \right)^{-\gamma_n} = 1. \quad (3.24)$$

Y así, (3.22) se ve cómo

$$\Phi^x(x, Q_0^2) = 4x(1-x) \sum_{n=0, par}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} C_n^{\frac{3}{2}}(2x-1). \quad (3.25)$$

La ecuación previa se puede representar graficamente. Esto va a servir para poder observar como se aproxima $\Phi^x(x, Q_0)$ a los puntos en donde x toma su máximo/mínimo (end-points), así como el comportamiento de $\Phi^x(x, Q^2)$ cuando se le da dependencia estrictamente en x .

El comportamiento de la función antes descrita (3.25) con valores de n dados y con x acotada entre $[0,1]$, se ve en la figura 3.3. Se quiere ver si la función descrita por los polinomios de Gegenbauer tiende a la solución quiral [4]. Notemos que para un valor

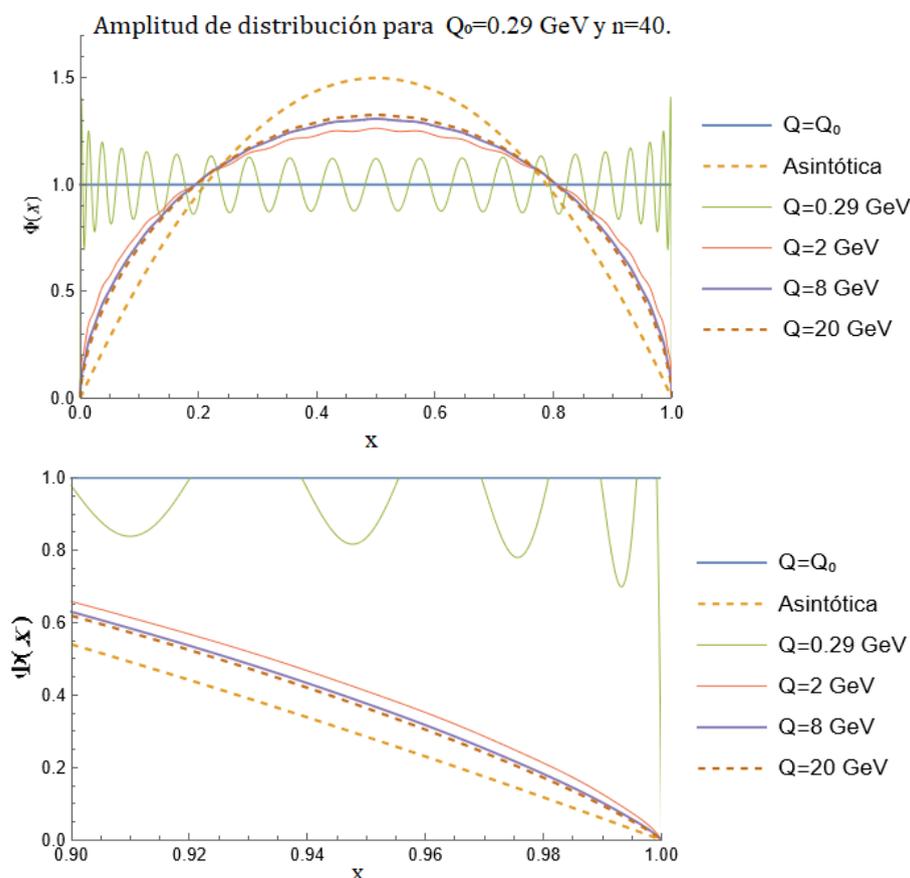


FIGURA 3.2: Arriba: Gráfico en el que se observa cómo se comporta la ecuación 3.22 para los valores de Q previamente definidos así como el comportamiento de cuando $Q = Q_0$. Abajo: Zoom en la zona $x = [0.9 - 1]$ para así, observar mejor la pendiente para cada Q , es decir, el comportamiento convergente correspondiente a cada valor de Q .

de n pequeño, sea $n = 8$, la función tiene períodos de onda grandes junto con una amplitud grande. De igual manera si fijamos nuestra atención en el segundo gráfico de la figura, cuando n es pequeña (línea naranja), la pendiente con la que cae a 0 no es tan pronunciada como para valores de n mayores. Al ir aumentando el valor de n , pasando por $n = 20, 100, 350$ (número que se usó como cota para este ejemplo gráfico), la función oscila más y su amplitud es menor. Con esto, al estudiar la pendiente con la que la función $\Phi(x, Q)$ cae a 0 con $x = 1$, se observa que con un $n > 20$ la pendiente es más abrupta. De esto se puede concluir que **el comportamiento de la ecuación (3.25) se aproxima a $\Phi^x(x, Q_0) = 1$ conforme n crece**. Es importante recalcar que sí se aproxima conforme el valor de n crece, pero siempre va a tender a 0 cuando $x \rightarrow 1$.

Para cuantificar esta característica se estudia la derivada de $\Phi(x, Q)$ cuando $x \rightarrow 1$ y $x \rightarrow 0$. Consideremos el caso en el que x tiende a uno. La amplitud de distribución se

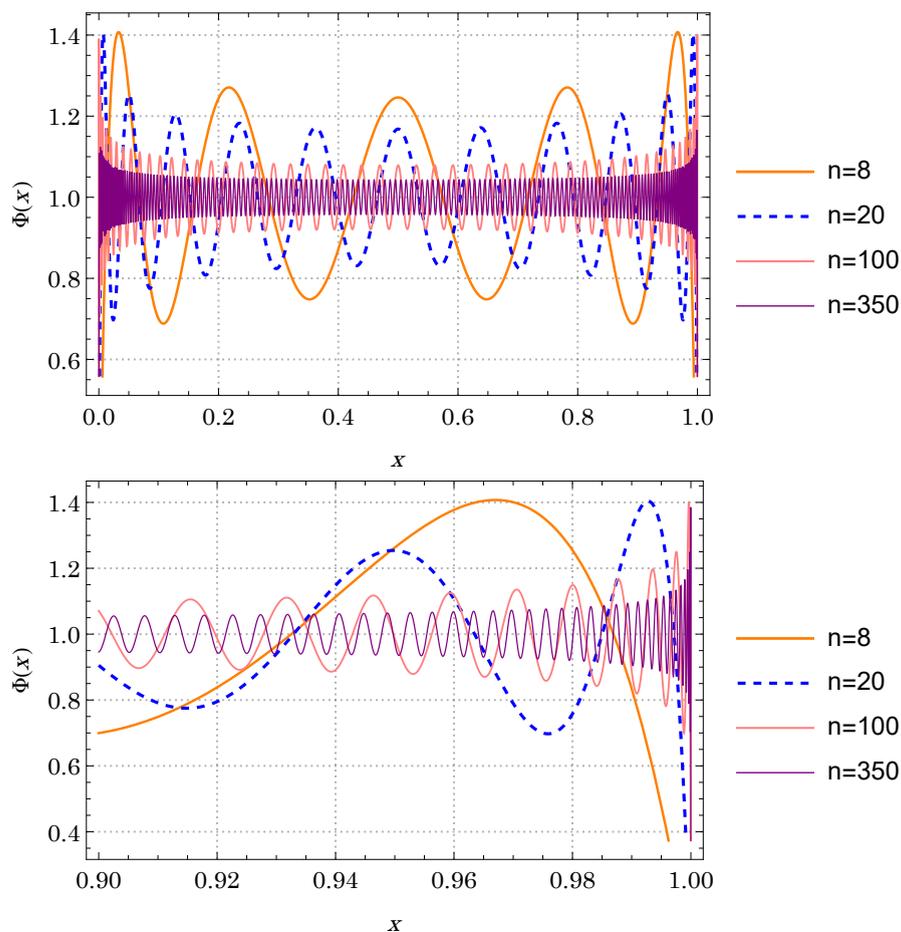


FIGURA 3.3: Arriba: Se muestra la representación de la ecuación (3.25) para los valores de n expuestos. Abajo: Aumento a la sección de $x = [0.9 - 1.]$ en donde se aprecia el límite hacia 1 para cada valor de n .

puede escribir cómo sigue en base a (3.22)

$$\Phi(x \rightarrow 1, Q^2) = x^\alpha(1-x)^\beta \times P(1-x), \quad (3.26)$$

con β la potencia asintótica líder y $P(1-x)$ un polinomio genérico. Para (3.22) el valor de α , β es igual a uno, siguiendo la siguiente relación;

$$x^\alpha(1-x)^\beta, \quad (3.27)$$

y $P(x)$ queda cómo

$$P(x) = 4 \sum_n \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} C_n^{\frac{3}{2}} (2x-1) \left(\frac{\left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}{\left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right)} \right)^{-\gamma_n}. \quad (3.28)$$

En la figura 3.3 se observa que la pendiente no cae como $(1-x)$ cuando $x \rightarrow 1$ y depende

del valor de n . Por ello se obtiene un valor de β_{eff} por medio de aplicar un logaritmo a (3.26) cómo sigue;

$$\Phi(x \rightarrow 1, Q^2) = \exp[\beta_{eff}(\ln(1 - x))]. \quad (3.29)$$

Aplicamos un logaritmo de ambos lados de la ecuación

$$\ln \Phi(x \rightarrow 1, Q^2) = \ln[\exp[\beta_{eff}(\ln(1 - x))]]. \quad (3.30)$$

Así, se obtiene lo siguiente;

$$\frac{\partial \ln \Phi(x \rightarrow 1, Q^2)}{\partial \ln(1 - x)} = \beta_{eff}. \quad (3.31)$$

Por lo tanto, tenemos una expresión para describir al comportamiento de $\phi(x, Q^2)$ cuando x tiende a 1. El procedimiento es análogo para obtener el comportamiento del límite $x \rightarrow 0$ pero ahora utilizando x . A la expresión en (3.27) se le conoce cómo el **carrier** de la amplitud de distribución. Con el procedimiento previo se define a β_{eff} y a α_{eff} cómo sigue [6];

$$\beta_{eff} = \frac{\partial \ln \Phi^x(x, Q^2)}{\partial \ln(1 - x)} \quad x \rightarrow 1, \quad (3.32)$$

y

$$\alpha_{eff} = \frac{\partial \ln \Phi^x(x, Q^2)}{\partial \ln(x)} \quad x \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

Las ecuaciones que señalan la derivada de $\Phi^x(x, Q^2)$ con respecto a la del logaritmo de $(1 - x)$ y x respectivamente se representan en la figura 3.4, en ella se puede observar que para ninguna energía Q se logra igualar el comportamiento de la amplitud de distribución asintótica. Esta conclusión se estudiará más a fondo en la sección consecuyente.

3.2.3. Caso asintótico.

Este caso es considerado un caso límite del cuadrimento ($Q \rightarrow \infty$) para estudiar un comportamiento asintótico. Con este límite definido se le puede dar a Q_0 el valor que sea. Así, vamos a tener que el cociente de logaritmos del caso general se reduce a una delta ya que, al estar sustituyendo $Q \rightarrow \infty$, solo va a sobrevivir el término con $\gamma_0 = 0$ ya que

los demás van a 0. Así, el cociente de logaritmos en (3.19) se ve como sigue;

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}{\left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right)} \right)^{-\gamma_n} = \delta_{n0}, \quad (3.34)$$

se sustituye $n = 0$ en (3.18) que es la que se definió para los A_n y tomando en cuenta sólo el primer término de los polinomios de Gegenbauer se tiene que;

$$A_0 \left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_0} = 4 \frac{2(0) + 3}{(0+2)(0+1)} \int_0^1 \Phi(x, Q_0) dx. \quad (3.35)$$

Luego, con (1.10) la ecuación (3.35) queda como sigue;

$$A_0 = 1 \cdot 4 \frac{3}{2} = 6.$$

Sustituyendo (3.34) y (3.2.3) en la ecuación general se obtiene lo siguiente;

$$\Phi^{asin}(x, Q^2) = 4x(1-x) \frac{3}{2} \left(\int_0^1 dy C_0^{\frac{3}{2}}(2y-1) \right) C_0^{\frac{3}{2}}(2x-1) = 6x(1-x). \quad (3.36)$$

Nótese que la integral dentro de los parentesis es igual a 1, esto debido a (3.6). Así, cuando estudiamos el **primer valor** con $Q \rightarrow \infty$ de los coeficientes de Gegenbauer, vamos a tener una expresión *tan sencilla* como $6x(1-x)$. De esta representación con base en la función general para $\Phi(x, Q)$ obtenemos entonces el **comportamiento asintótico**, sustituyendo el A_0 , cuando solo se estudia bajo el primer coeficiente de la serie de los polinomios de Gegenbauer. En la interpretación que se sigue, x es la fracción de momento de un quark y $(1-x)$ es la fracción para un antiquark. Recordando la ecuación (2.12), la expresión expuesta ahí nos indica que, en un **límite asintótico** las amplitudes de distribución (las burbujas rosas en 2.1) son iguales a $6x(1-x)$ y así se le da la interpretación física a la representación de $\Phi^{asin}(x, Q^2)$. Por otro lado, si a la ecuación anterior le agregamos la suma de los polinomios de Gegenbauer, se puede reexpresar la ecuación basándonos en (3.22) en el resultado asintótico. Si se aumenta el valor que funge como cota de la suma sobre valores para n pares hasta un valor dado, es decir, para valores de Q^2 lo suficientemente grandes, se puede intentar comparar con el comportamiento asintótico. Así, se espera que el comportamiento de la función de evolución con distintos valores de Q tales que $Q \rightarrow \infty$ arroje una representación de $\Phi(x, Q)$ muy cercana a la que tiene el comportamiento asintótico de esa función.

3.3. Dependencia de Q en $\Phi(x, Q)$

Sea la ecuación de evolución (3.22), estudiemos el caso particular en el que $Q^2 > Q_0^2$ sin llegar a $Q^2 \rightarrow \infty$ y asignándole un valor específico a Q_0 , es decir, veamos qué pasa cuando el cuadrimomento transferido después de la interacción (Q^2) es mayor² que el designado por el modelo bajo el que estamos trabajando (Q_0^2). En este trabajo se sigue el estudio de 4 valores de Q para observar el comportamiento de $\Phi(x, Q)$. Sea $Q = 8\text{ GeV}$, 20 GeV , 40 GeV , 100 GeV , $Q_0 = 0.29\text{ GeV}$ y $\Lambda = 0.174\text{ GeV}$ [5]. Se ve reflejado en la figura (3.2) el comportamiento de la ecuación de evolución y cómo la pendiente de las curvas depende del valor que se le asigne a Q .

Ahora, si retomamos la ecuación para obtener los coeficientes de los polinomios de Gegenbauer (ecuación 3.23), podemos obtener los valores de los primeros coeficientes de Gegenbauer con $n = (2, 10)$ de 2 en 2 para un valor de Q dado. Primero, queremos obtener los números de la referencia [7] en el que se usa que $Q_0 = 0.47\text{ GeV}$ y $\Lambda = 0.260\text{ GeV}$. Para el cálculo de los coeficientes se utiliza la siguiente expresión

$$\frac{\alpha(Q)}{\alpha(Q_0)} \propto \frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{Q_0^2}{\Lambda^2}\right)}}, \quad (3.37)$$

donde α es la constante de acoplamiento de la QCD. Así, utilizando $A_2 = 0.12 \pm 0.03$ con $Q = 2.4\text{ GeV}$, se obtienen los valores expuestos a continuación;

$$\begin{aligned} A_4^{[7]}(Q = 2.4\text{ GeV}) &= 0.044 \pm 0.016, \\ A_6^{[7]}(Q = 2.4\text{ GeV}) &= 0.023 \pm 0.010, \\ A_8^{[7]}(Q = 2.4\text{ GeV}) &= 0.014 \pm 0.006, \\ A_{10}^{[7]}(Q = 2.4\text{ GeV}) &= 0.009 \pm 0.005, \end{aligned}$$

los cuales coinciden con los que se obtienen en [7]. De igual manera se tomó que $A_{2MAX} = 0.15$ y $A_{2MIN} = 0.09$.

Ese intervalo de valores máximos y mínimos para A_2 nos permitió determinar un valor de Q_0 para ser usado bajo nuestro modelo, es decir con el valor de $\Lambda_{QCD} = 0.174\text{ GeV}$. La

²Recordemos que cuando $Q = Q_0$ el comportamiento de la ecuación de evolución da $\Phi(x) = 1$.

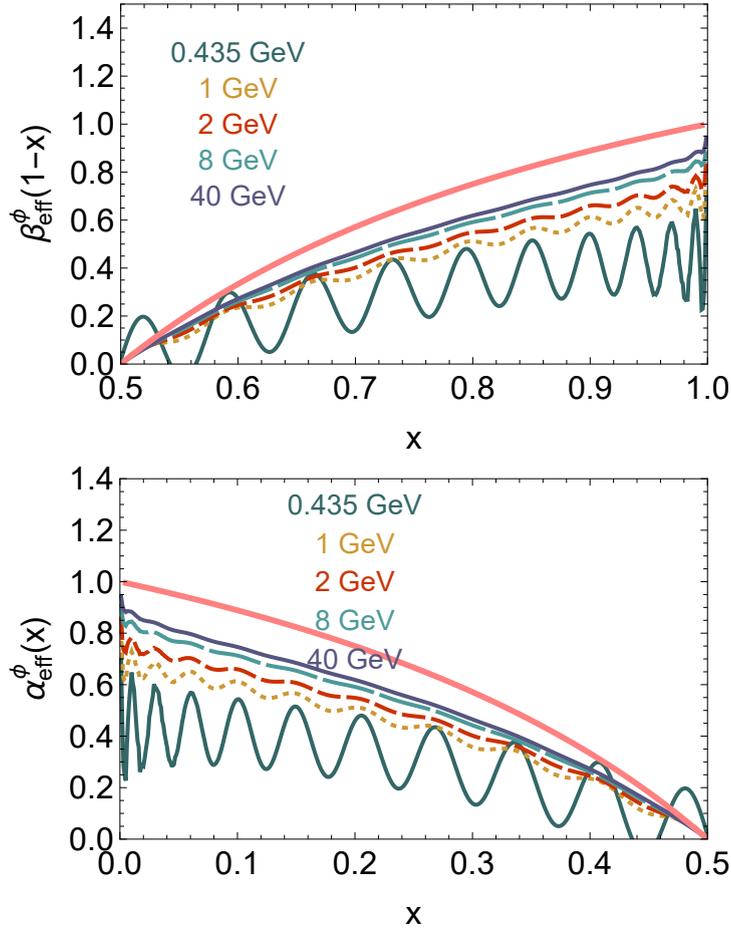


FIGURA 3.4: Representación gráfica de las ecuaciones (3.32) y (3.33) con la línea continua rosa la función asintótica, y los demás resultados dependiendo de $Q_0 = 0.26$ GeV [7] y $n = 40$.

conclusión del análisis fue que³ $Q_0^x = 0.245$ GeV. Para lograrlo, (3.37) se considera una relación entre el cociente de evolución y el cociente de los logaritmos de los momentos. En esta se sustituyeron valores de Q_0 hasta que, en la ecuación (3.23) nos diera los valores que se tenían de referencia para A_2 así como para sus cotas superior e inferior. El valor obtenido es muy cercano al obtenido bajo el modelo NJL con $Q_0^{NJL} = 0.29$ GeV [5]. Para hacer los cálculos analíticos que siguen se opta por cambiar este valor por el que se utilizó con anterioridad, es decir, $Q_0^{NJL} = 0.29$ GeV debido a que con el se realizó un acercamiento gráfico a su comportamiento (figura 3.2). Se considera pertinente mencionar que dentro de otras referencias, cómo por ejemplo en [8], el valor para Q_0 llega a variar con respecto al que se utiliza en esta tesis. El valor de Q va a mantenerse como $Q = 2.4$ GeV, $\Lambda = 0.174$ GeV y $Q_0 = 0.29$ GeV, estos valores debido a que estamos trabajando bajo

³Nótese que aquí existe una diferencia entre el valor previamente definido para Q_0 , es decir $Q_0 = 0.29$ GeV para estudiar el comportamiento en el gráfico y el que se obtuvo en este análisis. Esto es debido a que, con el Q_0 obtenido por medio del análisis, se usan valores dados de un A_2 específico, mientras que el otro Q_0 es sin considerar algún parámetro.

el orden principal (LO en la literatura existente) en el modelo NJL. Así, se obtienen los valores con respecto al modelo quiral, es decir utilizando, sin alterar, la ecuación (3.23)⁴;

$$\begin{aligned} A_4^X(Q = 2.4\text{GeV}) &= 0.0621, \\ A_6^X(Q = 2.4\text{GeV}) &= 0.0340, \\ A_8^X(Q = 2.4\text{GeV}) &= 0.0216, \\ A_{10}^X(Q = 2.4\text{GeV}) &= 0.0150. \end{aligned}$$

Los resultados de los coeficientes resultan ser muy similares, esto gracias a la relación de proporcionalidad descrita en (3.37). Nótese que en los valores para A_n reflejados en [7] son obtenidos con base en la ecuación que describe el cociente de α (ecuación 3.37) mientras que en este trabajo se utilizó la ecuación dependiente del cociente de los logaritmos (ecuación 3.23). Lo descrito como el procedimiento que se llevó a cabo para obtener los A_n puede hacerse sin más preocupación debido a que, en el orden principal (LO), el cociente de los logaritmos es igual a la relación expresada en (3.37).

3.3.1. Momentos en ξ

Habiendo ya definido qué valores van a tomar los coeficientes A_n , se introduce otro concepto; ξ será una variable definida por la interacción quark-antiquark descrita en la función de evolución del pión (sea en este caso $x(1-x)$) sobre la cuál la integral de (3.22) va a trabajar. Se puede describir a la *información global de la amplitud de distribución* como los momentos de Mellin⁵ (ξ) como sigue;

$$\langle \xi^n \rangle = \int_0^1 d\xi \xi^n \Phi(\xi, \phi), \quad (3.38)$$

con $\xi = 2x - 1$ en este caso en particular y $n \in \mathbb{N}$. También se define a $\langle \xi^2 \rangle$ como el segundo momento, dependiendo de la función que describe al proceso que se esté llevando a cabo, en este caso, una amplitud de distribución. (Véase sección 2.2). El estudio de los momentos ξ ha estado bajo los reflectores de varios investigadores [7, 9] debido a su

⁴Es importante mencionar que en la literatura se pueden encontrar dichos coeficientes A_n con el título de *momentos de Gegenbauer*.

⁵Cuando se refiera a los momentos de Gegenbauer van a ser llamados *coeficientes* A_n , lo que llamaremos momentos a partir de ahora será el valor de ξ

utilidad sobre la definición de amplitud de distribución.

Ahora, recapitulando en el tema de los coeficientes de Gegenbauer, la importancia de haber obtenido estos coeficientes por medio de la ecuación (3.23), es decir, por medio de los logaritmos dependientes del cuadrimento y de la escala de la cromodinámica cuántica (Λ), es que con estos valores se puede comprender mejor el comportamiento de la función $\Phi(x, Q)$ en el rango de Λ sobre la cromodinámica cuántica que se estudia en esta tesis, es decir, utilizando Λ_{QCD} como una variable en los cálculos. Se toma el rango de esta variable definido sobre el límite que comprende *cuanta* fracción de momento conservan los quarks, es decir, $(1 - x)$ y x . Estas expresiones son relacionadas con los puntos $x = 0$ y $x = 1$ (con $x = 0$ el caso en que el quark no se lleve nada de momento del pión papá y $x = 1$ el caso en que se lleve todo el momento). Lo anterior es debido a que, estudiando $\Phi(x, Q)$ bajo el modelo quiral, se tiene un mejor acercamiento a lo expuesto en la gráfica (figura 3.2), es decir, a la convergencia de los comportamientos de las distintas Q . Esto por medio del cálculo de los coeficientes de Gegenbauer.

3.4. Puntos finales en el gráfico (Endpoints).

El eje x de nuestros gráficos representa la fracción de momento que los quarks de valencia se llevan posterior a la colisión. Sabiendo esto, uno puede llegar a la conclusión de que, estudiando el comportamiento de la ecuación $\Phi(x, Q)$ (3.22) representado en la figura (3.2), la curva para los diferentes valores de Q jamás llega a ser igual a la curva que representa a la ecuación asintótica. Por ejemplo, se observa que para la curva con el mayor valor de Q ($1.5Q_0 = 0.435$ GeV) en 3.4, la convergencia a 1 es aún más *recta* si la comparamos con la curva del momento más alto ($Q = 40$ GeV). Se nota que β_{eff} crece en $x=1$. Sin embargo, se observó que por mucho que se aumente el valor de Q en la amplitud de distribución, jamás se obtiene el comportamiento asintótico $6x(1 - x)$. Observamos que, desde que se utiliza $Q^2 \neq Q_0^2$, el resultado inicial con $\phi(x = 1) \neq 0$ cambia inmediatamente. Eso se debe a la expresión a través de los polinomios de Gegenbauer. Por ello la pendiente que tiene $\Phi(x, Q)$ con valores de Q distintos a Q_0 (es decir $Q = 8$ GeV, $Q = 20$ GeV, $Q = 40$ GeV, $Q = 100$ GeV) que se ve en la figura 3.2 no converge de una manera tan pronunciada a $\Phi(x) = 1$. Este comportamiento convergente se confirma mediante el estudio de la derivada con respecto a los logaritmos de x y $(1 - x)$ respectivamente (figura 3.4). Se observa que conforme el valor de la energía aumenta, el comportamiento de la derivada se vuelve menos oscilatorio, casi igualando el comportamiento de la curva

asintótica. No obstante, uno puede estudiar el límite cuando $Q^2 \rightarrow Q_0^2$ y se concluye que, mientras más cerca esté el valor del cuadrimomento transferido del cuadrimomento del modelo, la pendiente de la amplitud de distribución evolucionada se volverá cada vez más inclinada en los *endpoints* (véase figura 3.2). Este comportamiento se analizará cerca de los puntos finales $[0, 1]$ en la sección que sigue.

3.5. Análisis comparativo; Retículo vs LO.

Para un estudio más completo de la amplitud de distribución del pión, se compararán los resultados obtenidos bajo este modelo con resultados obtenidos por otro método.

Se define la **cromodinámica cuántica en el retículo** como la que describe a los campos asociados de los quarks como una red en la que los *nodos* son los quarks y los enlaces entre estos, es decir, los gluones. Así se tiene una red en la que se encuentran a las partículas de la interacción fuerte (quarks y gluones). Un esbozo gráfico de este método se presenta en la figura 3.5. Este método se ha convertido en uno de los más populares gracias a que pueden estudiarse teorías hasta de carácter no perturbativo, es decir, como QCD a bajas energías.

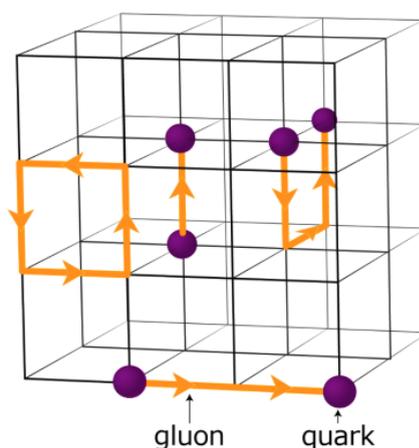


FIGURA 3.5: Representación de un retículo en donde los quarks (puntos morados) se encuentran en los nodos de la red, mientras que los gluones se encuentran en las aristas (líneas naranjas). Imagen extraída de: [https://indico.jlab.org/event/713/contributions/12653/attachments/9837/14460/0612\\$_XG.pdf](https://indico.jlab.org/event/713/contributions/12653/attachments/9837/14460/0612$_XG.pdf).

Se han encontrado resultados que nos son de interés. Se estudia el segundo momento de la amplitud de distribución del pión para así poder comparar dicho resultado con lo que se obtenga bajo el modelo quiral de la amplitud de distribución del pión. De acuerdo

con los resultados obtenidos en la referencia [10] se observa que, para un $Q_{lat}^2 = 2 \text{ GeV}^2$ se obtiene el siguiente valor esperado de los momentos ξ siguiendo la ecuación (3.38);

$$\langle \xi_{lat}^2 \rangle [Q^2 = 2\text{GeV}^2] = 0.302. \quad (3.39)$$

Luego, veamos cuanto da el segundo momento en el modelo quiral sustituyendo (3.38). En el modelo quiral se trabaja con 2 valores del cuadrimomento; el designado por el modelo quiral (Q_0^2) y (Q^2), así, se define el valor esperado de ξ como sigue;

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_0^1 dx (2x - 1)^2 \Phi^\chi(x, Q). \quad (3.40)$$

Se sustituye $\Phi^\chi(\xi, \phi)$ con la ecuación (3.22) en la ecuación anterior y se considera un $Q_0^2 = 0.29^2 \text{ GeV}^2$. Así se obtiene el resultado que sigue;

$$\langle \xi_\chi^2 \rangle [Q^2 = 2\text{GeV}^2] = 0.244. \quad (3.41)$$

Por otro lado, aún siguiendo la ecuación (3.38) se resuelve el segundo momento ahora utilizando (3.20), es decir resolvemos que

$$\int_0^1 dx (2x - 1)^2. \quad (3.42)$$

Así, se obtiene lo siguiente;

$$\langle \xi_\chi^2 \rangle (Q_0^2) = \frac{1}{3}. \quad (3.43)$$

Nótese que la diferencia entre el resultado de los modelos con $Q = \sqrt{2}\text{GeV}$ [(3.39) y (3.41)] es de $\pm 11\%$. Por otro lado, suponiendo que los quarks son solo 2 en el mesón, teóricamente se creería que después de la colisión profundamente inelástica y del estudio de $\langle \xi^2 \rangle$, la proyección de las fracciones de momento asociadas a cada quark dentro del pión sería de un 25% del momento del *pión papá*. Siendo más cercano a ese valor porcentual el resultado que se obtiene bajo el modelo quiral, es decir $0.244 \approx 24\%$. Por otro lado, fijando nuestra atención en ambos modelos, es decir, (3.39) y (3.43), se observa que los dos describen el comportamiento a segundo orden de la amplitud de distribución de tal manera que concluyen que la proyección de fracción de momento que se va a llevar el par de quarks inmersos en el mesón (en este caso un pión) será aproximadamente una tercera parte de la información total de la interacción. El valor de Q_0 para el cual, en base a la ecuación del segundo momento para el modelo χ se iguala el resultado de (3.39) es $Q_0 = 0.82 \text{ GeV}$. Sustituido este valor en (3.40) se logra rescatar el valor obtenido en

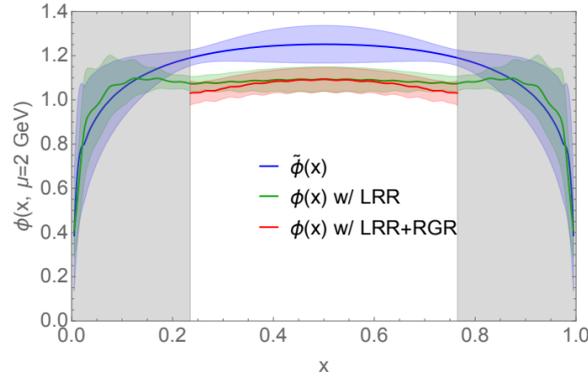


FIGURA 3.6: Gráfico extraído de [10] en donde se puede observar el comportamiento de $\Phi(x, Q^2)$ con $\mu = 2$ GeV.

el retículo, pero sin considerar a las interacciones cómo una red de nodos. Es pertinente notar que el valor con el que se recupera el resultado bajo el método del retículo es más grande que el que se usa en el modelo quiral, $Q_0^{N_{JJ}} = 0.29$ GeV.

Esta diferencia entre los Q_0 obtenidos puede estar justificada en base a la teoría utilizada en ambos modelos o también en el hecho que para el modelo quiral se tiene más de un parámetro que podemos modificar, como lo son los cuadrimentos y los coeficientes de Gegenbauer y en el modelo del retículo no entran a juego la evolución en Q^2 , al menos no para los ordenes sobre los que realizamos la comparación de ambos modelos. Nótese que la amplitud de distribución en el modelo de retículo mostrada en la figura 3.6 es plana en valores de x medianos ($0.25 \lesssim x \lesssim 0.75$), lo cual está de acuerdo con el modelo quiral en $Q_0^{N_{JJ}}$. En el siguiente capítulo se ahonda en las conclusiones a las que se llega con esta comparación entre métodos y se repara en cuál es el que aproxima más la curva que se tiene como referencia para el estudio de la convergencia de la amplitud de distribución.

Capítulo 4

Conclusiones.

En esta tesis, hemos estudiado el comportamiento de la amplitud de distribución del pión en términos de sus quarks. En particular se han estudiado las ecuaciones de evolución en Q^2 , descritas en términos cuya solución está descrita en términos de los polinomios de Gegenbauer. Se ha podido estudiar su comportamiento en **Mathematica** así como analíticamente. Usando un modelo para estudiar la amplitud de distribución cómo lo es el de Nambu–Jona-Lasinio, se estudió la convergencia de esas en los puntos límites que son $x = 0$ y $x = 1$. Por otro lado, se obtuvo la escala de Q_0 correspondiente a este modelo comparando con un dato fenomenológico (A_2) y con el retículo.

En este capítulo se presenta la conclusión de este trabajo. Esto se hace por medio de la comparación de los resultados obtenidos para el comportamiento de la amplitud de distribución del pión bajo el modelo quiral a $Q_0^{NJL} = 0.29$ GeV con respecto a los que se obtienen con el modelo de retículo con $Q_0 = 0.85$ GeV. Estos dos utilizan el valor de $\Lambda_{QCD} = 0.174$ GeV. Por otro lado, se compara con el modelo con valores definidos por $Q_0 = 0.47$ GeV y $\Lambda_{QCD} = 0.26$ GeV. Se hace un análisis gráfico de la convergencia a 1 de la amplitud de distribución de estos tres modelos con un valor de Q constante; $Q = 2.4$ GeV.

En la figura 4.1, se dibuja la amplitud de distribución del pión del modelo inicial (NJL), luego la asintótica, así como dos amplitudes de distribución evolucionadas a $Q = 2.4$ GeV partiendo de dos escalas de Q_0 diferentes (Q_0^{NJL} y $Q_0^{[7]}$). Se observa que, en nuestro modelo $\Phi^x(x)$, la pendiente cuando $x \rightarrow 1$ es más grande que el que tiene un valor de $Q_0^{[7]} = 0.47$ GeV. Este comportamiento puede explicarse por medio de que, aunque en las dos aproximaciones se ocupan los polinomios de Gegenbauer, en una de ellas, el modelo quiral (χ) el cociente de los logaritmos es más grande que el cociente expresado en el

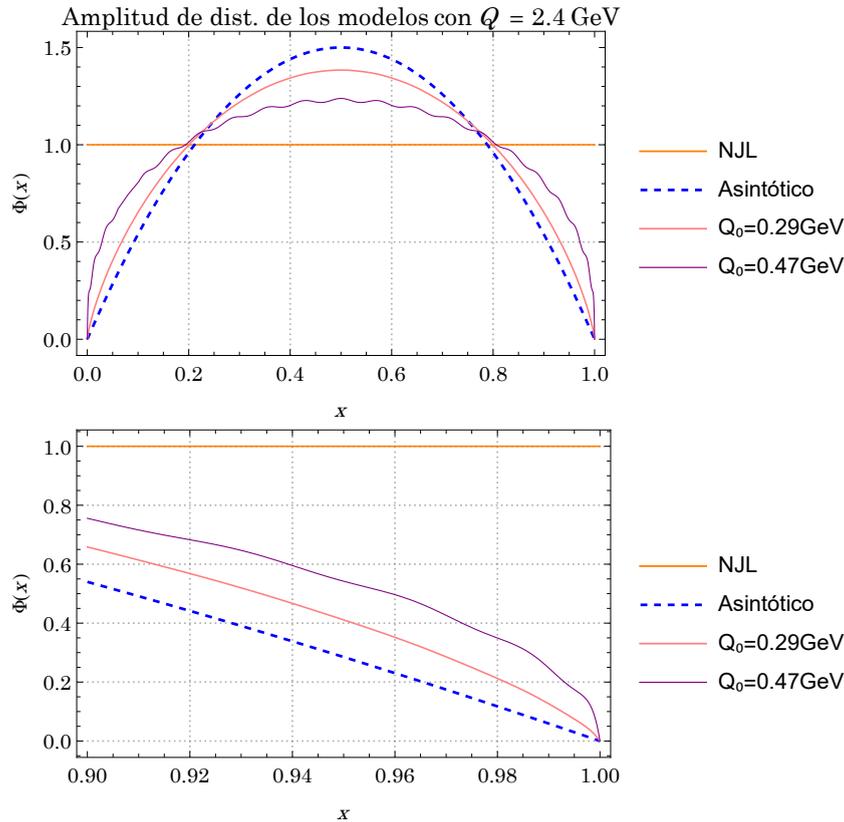


FIGURA 4.1: Arriba: Gráfico en el que se comparan los resultados obtenidos para el caso asintótico (ecuación (3.36)), el caso del modelo quiral y el caso que se utiliza en la referencia [7]. Abajo: Acercamiento a $x = 1$ en donde se nota cómo la que cae más rápido, seguido del caso asintótico es el que se trabaja con el modelo quiral χ

modelo que trabaja con $Q_0^{[7]}$. De igual manera se puede comparar la convergencia de la amplitud de distribución $\Phi(x, Q^2)$ con los resultados obtenidos en el modelo del retículo (referencia [10]). En esta se estudia la convergencia por medio de los momentos de Mellin, como se explicó en la sección 3.5, mientras que en el modelo quiral se utiliza la expresión que depende del cociente de los logaritmos por medio de los polinomios de Gegenbauer. Se puede observar una mejor comparativa si se muestran dos gráficas de estos modelos cómo se hace en la figura 4.1. En cuanto al segundo momento de Mellin, el resultado obtenido en el retículo se puede recuperar a partir del resultado en el modelo quiral por medio de la evaluación de la constante de renormalización variando Q_0 . Mientras que en el límite Q_0 el resultado del modelo quiral χ se recupera el valor de 1 por medio de la variación del valor de n en la ecuación de la amplitud de distribución. Se puede ahondar más en la comparación de esta ecuación de evolución con respecto al modelo del retículo.

Bibliografía

- [1] F. Halzen and A. D. Martin, *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. 1984. [4](#), [6](#), [7](#)
- [2] I. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge theories in particle physics* .: Bristol :: Adam Hilger, 2nd ed. ed., 1989. Includes bibliographical references and index. [10](#), [16](#)
- [3] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3 2014. [12](#)
- [4] M. V. Polyakov, “On the Pion Distribution Amplitude Shape,” *JETP Lett.*, vol. 90, pp. 228–231, 2009. [16](#), [28](#)
- [5] A. Courtoy, “Generalized Parton Distributions of Pions. Spin Structure of Hadrons,” other thesis, 10 2010. [16](#), [19](#), [20](#), [33](#), [34](#)
- [6] A. Courtoy and P. M. Nadolsky, “Testing momentum dependence of the nonperturbative hadron structure in a global QCD analysis,” *Phys. Rev. D*, vol. 103, no. 5, p. 054029, 2021. [31](#)
- [7] E. Ruiz Arriola and W. Broniowski, “Pion light cone wave function and pion distribution amplitude in the Nambu-Jona-Lasinio model,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 094016, 2002. [33](#), [34](#), [35](#), [40](#), [41](#)
- [8] E. Ruiz Arriola, “Pion structure at high-energies and low-energies in chiral quark models,” *Acta Phys. Polon. B*, vol. 33, pp. 4443–4479, 2002. [34](#)
- [9] X. Gao, A. D. Hanlon, N. Karthik, S. Mukherjee, P. Petreczky, P. Scior, S. Syritsyn, and Y. Zhao, “Pion distribution amplitude at the physical point using the leading-twist expansion of the quasi-distribution-amplitude matrix element,” *Phys. Rev. D*, vol. 106, no. 7, p. 074505, 2022. [35](#)
- [10] J. Holligan, X. Ji, H.-W. Lin, Y. Su, and R. Zhang, “Precision Control in Lattice Calculation of x -dependent Pion Distribution Amplitude,” 1 2023. [38](#), [39](#), [41](#)