Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Espacios monótonamente monolíticos y su relación con la propiedad D

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Juan Carlos Preisser González

TUTOR

Dr. Fidel Casarrubias Segura

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2023

1. Datos del alumno
Preisser
González
Juan Carlos
5561725646
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
315302673

2. Datos del tutor
Dr
Fidel
Casarrubias
Segura

3. Datos del sinodal 1
Dr
Ángel
Tamariz
Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
Dr
Sergey
Antonyan

5. Datos del sinodal 3
Dr
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

6. Datos del sinodal 4
Dra
Elsa
Puente
Vázquez

7. Datos del trabajo escrito
Espacios monótonamente monolíticos y su relación con la propiedad D
72 p
2023

A Carlos Preisser Mercado, mi padre,
quien me enseñó a amar la vida,
disfrutar las matemáticas
y sonreír al final de cada día.

Agradecimientos

"...How happy is a blameless vestal's lot!
The world forgetting, by the world forgot.
Eternal sunshine of the spotless mind!
Each pray'r accepted, and each wish resign'd..."
-Alexander Pope.

A lo largo de la realización del presente trabajo no deje de pensar en el gran privilegio que es tener la oportunidad de haber estudiado la carrera de mi elección y, más aún, poder optar por una forma de titulación como es la elaboración de una tesis. Llegar a este momento de mi formación académica no es un logro que me compete únicamente a mí, hay muchas personas tras de ello y quiero dedicar estas palabras para agradecerles con todo mi corazón.

Quiero agradecer a mi padre por mostrarme qué clase de hombre quiero ser así como por introducirme al bello mundo de las matemáticas. Agradezco a mi madre por su infinito amor, cariño, paciencia y sobre todo por su fuerza para guiarme hacia adelante. Agradezco a mis hermanos Miguel y Elena por las risas, los juegos y por ser mis compañeros y amigos de toda la vida. Agradezco a mis hermanos mayores Alejandro y Arelí por todo su cariño incondicional. Agradezco a mi tía Socorro por su cariño, atenciones, así como por su increíble sazón. Agradezco a mi tía Alejandra, mi tío Noé y a mis primos Gerardo y Noé por todo su apoyo, afecto, guía y atenciones. De igual manera, quiero agradecer a mi tía Guille, mi tío José Luis, mi tía Vero y mi tío Alfonso por todo su apoyo brindado. Agradezco a Apolonio por siempre acompañarme en las noches de desvelo y alegrar mi vida.

Agradezco a mis amigos Alonso, Andrea, Aurelio, Belem, Paty y Víctor por acompañarme desde la preparatoria y permitirme contar con su amistad hoy en día. Agradezco a Arturo y Enrique por hacer divertidas todas las horas libres en la Facultad. Particularmente, quiero agradecerle a Enrique por todo su apoyo, todas esas dudas resueltas, esas tardes de estudio, esas noches de juegos y por su cálida amistad. Agradezco a Bruno, Fernanda, Israel, Paloma, Raúl y Xiro por hacer inigualable mi paso por UNIVERSUM y brindarme tantas risas.

Doy gracias a todos esos profesores y profesores adjuntos que me transmitieron su conocimiento y pasión por las matemáticas. En especial, agradezco al Dr. Fidel por adentrarme en esta hermosa rama de las matemáticas que es la Topología, por su atenta y paciente dirección de este trabajo, así como todas las correcciones y comentarios. Así mismo, agradezco a mis sinodales, cuyos comentarios me ayudaron a obtener la mejor versión de este trabajo.

Finalmente, agradezco a la vida por darme tantas emociones, conocimientos, personas, experiencias y tantas oportunidades

Juan Carlos Preisser González.

Índice general

Introducción

En palabras de Gruenhage ([19]), el concepto de *espacio D* nació a mediados de la década de los años 1970 en un intercambio de cartas entre E. Michael y Eric Karel van Douwen. Michael le envió a van Douwen una prueba de que todo espacio semiestratificable es un espacio[1] D, a lo cual este último le respondió con otra demostración del mismo hecho. En otra carta sin fechar, van Douwen demostró que los espacios $\Sigma-$fuertes son espacios D. Curiosamente, estos dos hechos no aparecerían publicados sino hasta 1991 y 2002 (por Carlos R. Borges y Albert C. Wehrly en [6], y por Raushan Buzyakova en [7], respectivamente).

En 1979, van Douwen y Washek F. Pfeffer publicaron por primera vez la definición de *espacio D* en [13]. En dicho artículo, centrado en la recta de Sorgenfrey S y la recta irracional de Sorgenfrey T, se demostró que S es un espacio hereditariamente D (y por tanto T también lo es), se demostró también que cualquier potencia finita de S es un espacio D, se definió a los *espacios separados por la izquierda generalizados* ($GLS - space$ en inglés) y se demostró que esta clase de espacios está contenida en la clase de los espacios D. Van Douwen originalmente buscaba un ejemplo *satisfactorio* de un espacio topológico que no fuera un espacio D, donde por "satisfactorio" se entendía que tuviera una propiedad de cubierta al menos tan fuerte como metacompacidad o paracompacidad, y puesto que S es un espacio subparacompacto, la recta de Sorgenfrey S era un candidato ideal.

En [6], además de demostrarse que todo espacio semiestratificable es un espacio D, se establecieron algunos de los resultados básicos más conocidos acerca de la propiedad D; particularmente, se probó que la unión numerable de subespacios D cerrados es un espacio D. A lo largo de los años este resultado ha sido generalizado hasta llegar a una de sus versiones más generales (Teorema 2.27) demostrada por H. Guo y H. Junnila ([20]) en el año 2011. A pesar de que se conocen ejemplos en los cuales la unión arbitraria infinita de subespacios D no es un espacio D, hoy en día sigue abierta la pregunta (planteada por Arkhangel'skii) para el caso de uniones arbitrarias finitas.

A principios de los años 2000 comenzó de manera intensiva el estudio de los espacios D. La principal motivación de muchas de las publicaciones, además de clasificar qué clases de espacios topológicos satisfacen la propiedad D y cómo generar espacios D a partir de un espacio D, fue resolver una pregunta planteada por van Douwen desde 1979: *¿es todo espacio Lindelöf un espacio D?* Actualmente permanece abierta esta pregunta y también su versión con la condición más fuerte en la que el espacio es hereditariamente Lindelöf.

[1] Hoy día llamamos espacio D, en honor a Eric van Douwen, a los espacios que tienen la propiedad enunciada en la Definición 2.1. El término espacio D se debe a la primera letra de la palabra Douwen.

La búsqueda de una respuesta (ya sea positiva o negativa) a la pregunta de van Douwen ha causado gran interés ya que la propiedad D, al igual que la propiedad de Lindelöf, es una propiedad de cubierta y más allá del hecho de que todo espacio compacto (T_1) es un espacio D y que todo espacio D numerablemente compacto es un espacio compacto, sabemos en realidad muy poco acerca de cómo se comporta la propiedad D con otras propiedades de cubierta. Algunas otras preguntas abiertas que relacionan a los espacios D y a los espacios definidos a través de cubiertas son: *¿es todo espacio paracompacto un espacio D?*, *¿existe un espacio subparacompacto o metacompacto que no sea un espacio D?*

En los últimos años se ha estudiado a la propiedad D en el contexto de la C_p-teoría. La principal pregunta que gira en torno a esta área es ¿para cuáles espacios topológicos X el espacio de funciones $C_p(X)$ tiene la propiedad D? En esta línea de estudios, Buzyakova probó que si X es un espacio compacto entonces $C_p(X)$ es un espacio D ([8]), lo cual fue generalizado por Gruenhage en 2006 al establecer que si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ entonces $C_p(X)$ es un espacio hereditariamente D ([18][2]). Ambos resultados tienen como principales consecuencias el teorema de Baturov (Corolario 3.37) y el teorema de Grothendieck (Corolario 3.38), los cuales fueron establecidos en 1987 y 1952, respectivamente.

En el año 2009, Tkachuk introdujo la noción de espacio *monótonamente monolítico* en su artículo [27]. Tkachuk probó que dicha noción es hereditaria, que todo espacio monótonamente monolítico es un espacio D, y que si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ entonces $C_p(X)$ es un espacio monótonamente monolítico, lo cual generaliza tanto el teorema de Gruenhage como el de Arkhangel'skii (para espacios Lindelöf$-\Sigma$).

Según Todd Eisworth ([15]), el estado actual del conocimiento acerca de los espacios D está lleno de asimetrías. Por un lado, abundan los resultados que establecen que ciertas clases de espacios topológicos son espacios D mientras que hay pocos teoremas del tipo "Si X es un espacio D, entonces...". De igual manera, hay varios resultados que establecen cómo comprobar que un espacio topológico es un espacio D, pero falta el desarrollo de técnicas para construir espacios que no sean espacios D. Así pues, el estudio de los espacios D es un terreno fértil en el cual hay mucho por hacer.

Los objetivos principales de esta tesis son introducir a los espacios monótonamente monolíticos, probar que todo espacio monótonamente monolítico es un espacio D y, finalmente, probar el teorema de Tkachuk (el cual es el avance más importante en la temática de los espacios D en el contexto de la C_p-teoría) que afirma que si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$, entonces $C_p(X)$ es un espacio monótonamente monolítico.

La presente tesis está dividida en 3 capítulos. En el primer capítulo se presentan definiciones y resultados preliminares de la Topología General, esto con el fin de que la tesis sea lo más autocontenida posible. Usaremos como referencia a [16] y [9].

El segundo capítulo se divide en 3 secciones. En la Sección 2.1 se dan demostraciones completas acerca de las propiedades básicas de los espacios D y se presentan ejemplos importantes de espacios topológicos que no son espacios D. En la Sección 2.2 se presenta de

[2] En este mismo artículo, Gruenhage demostró además que los espacios Corson compactos son hereditariamente D y que los espacios que satisfacen la propiedad *abierto (G)* (open (G)) son espacios D.

manera breve a los espacios semiestratificables con el fin de demostrar que estos espacios son espacios D, y que por consiguiente los espacios métricos son espacios D. En la última sección de este capítulo se introducen a los espacios Lindelöf$-\Sigma$, se demuestran sus propiedades más básicas y se prueba que todo espacio Lindelöf$-\Sigma$ es un espacio D. Este capítulo se basa principalmente en [6], [15], [19], [20], [12] y [1].

Finalmente, el tercer capítulo se divide en 3 secciones. En la primera sección se introducen a los espacios $C_p(X)$, se calculan ciertos números cardinales de $C_p(X)$ a partir de propiedades de X y se prueba que $nw(X) = nw(C_p(X))$ para todo espacio Tychonoff infinito. En la segunda sección se introducen a los espacios monótonamente monolíticos, se dan demostraciones completas de sus propiedades básicas y se demuestra que esta clase de espacios satisface la propiedad D. En la tercera sección se da una demostración completa de el teorema de Tkachuk y se presentan algunos corolarios importantes. Los materiales de este capítulo son tomados de [28], [27], [18], [4] y [8].

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es introducir las nociones y resultados básicos de Topología General necesarios para la lectura de este trabajo. Si el lector desea encontrar demostraciones completas de estos hechos, así como una exposición más detallada de los mismos, lo remitimos a [16] y [9].

Se presupone que el lector está familiarizado con la notación, los conceptos y los resultados referentes a la Teoría de Conjuntos, a saber: operaciones entre conjuntos, funciones, conjuntos bien ordenados, el Principio de Inducción Matemática (para números naturales), números ordinales y cardinales, aritmética ordinal y cardinal y el Principio de Inducción Transfinita. Recomendamos al lector utilizar [23] y [21] para consultar estos temas. De igual manera, se presupone que el lector esta familiarizado con conceptos y resultados de análisis matemático (recomendamos consultar [11]).

A lo largo del texto, $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales y se convendrá en que $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ denota al conjunto de los números naturales sin el 0. Dado un conjunto A, $|A|$ denota a la cardinalidad de A. Usaremos el símbolo ω para referirnos al primer ordinal infinito y utilizaremos a ω_0 para denotar a $|\mathbb{N}|$. Diremos que un conjunto A es numerable si $|A| \leq \omega_0$. Al primer ordinal no numerable lo denotaremos por ω_1.

En todo este trabajo suponemos válido el Axioma de Elección (ver Sección 1.6).

1.1 Espacios topológicos, bases y subbases

Definición 1.1. Sea X un conjunto cualquiera y $\emptyset$ el conjunto vacío. Una *topología* en el conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades:

1. Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a τ

2. Si $A_1, ..., A_n \in \tau$, entonces $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$.

3. Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

A la pareja (X, τ) la llamaremos *espacio topológico*, a los elementos de τ los llamaremos *conjuntos abiertos* en (X, τ) (o simplemente conjuntos abiertos en X, cuando sea clara la topología con la que se trabaja), y los complementos de los conjuntos abiertos se llamarán *conjuntos cerrados*.

Proposición 1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces:

1. Los conjuntos $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados en (X, τ).
2. Si $A_1, ..., A_n \in \tau$ son conjuntos cerrados en (X, τ), entonces $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \tau$ también es un conjunto cerrado en (X, τ).
3. Si $\mathcal{C}$ es una familia no vacía de conjuntos cerrados en (X, τ), entonces $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ también es un conjunto cerrado.

Definimos a $\tau(A, X) := \{U \in \tau : A \subseteq U\}$ para todo $A \subseteq X$ y, en caso de que $A = \{x\}$ sea un subconjunto unitario, escribiremos $\tau(x, X)$ en lugar de $\tau(\{x\}, X)$.

Sea X un conjunto cualquiera. Es claro que la familia de todos los subconjuntos de X, denotada por $\mathcal{P}(X)$, es una topología en X. A la topología $\mathcal{P}(X)$ se le llama la *topología discreta en* X y al espacio topológico $(X, \mathcal{P}(X))$ se le llama *espacio discreto* (o simplemento *discreto*). De esta manera, podemos dotar de al menos una topología a cualquier conjunto X.

Podemos definir a una única topología en el conjunto $\emptyset$, a saber $\{\emptyset\}$. El espacio topológico $(\emptyset, \{\emptyset\})$ es sumamente trivial, razón por la cual podemos suponer, a menos que se diga lo contrario, que todos los espacios topológicos son espacios diferentes del vacío.

Definiciones 1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subcolección $\mathcal{B}$ de τ es una *base* de τ si para cada $A \in \tau$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \cup \mathcal{A}$. Equivalentemente, una subcolección $\mathcal{B}$ de τ es una base de τ si y sólo si para cada $A \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ con la propiedad de que $x \in B \subseteq A$.

Una subcolección $\mathcal{S}$ de τ es una *subbase* de (X, τ) si $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } 0 < |\mathcal{A}| < \omega_0\}$ es una base para τ. Es decir, $\mathcal{S} \subseteq \tau$ es una subbase para τ si y sólo si para cada $A \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ finito no vacío tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.

Dado un conjunto X y una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X nos podemos preguntar si $\mathcal{A}$ puede ser una base o subbase para alguna topología en X. Los siguientes teoremas establecen las condiciones para que esto suceda.

Teorema 1.4. Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es base de una única topología para X si y sólo si $\mathcal{B}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

2. Para cada $U, V \in \mathcal{B}$ y para cada $x \in U \cap V$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U \cap V$.

Teorema 1.5. Sea X un conjunto diferente del vacío. Si $\mathcal{S}$ es una colección no vacía de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{S}$ es subbase de una única topología en X si y sólo si $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Ejemplo 1.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$, definimos a la bola abierta con centro en x y radio r como el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

La colección

$$\tau_d = \{A \subseteq X : (\forall a \in A)(\exists r_a > 0)(B(a, r_a) \subseteq A)\}$$

es una topología en X.

Diremos que un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* si existe una métrica θ en X de modo que $\tau = \tau_\theta$.

Ejemplo 1.7. Sea $(X, <)$ un conjunto linealmente ordenado con al menos dos elementos diferentes. Para $a, b \in X$ tales que $a < b$ definimos:

- $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$,
- $(\leftarrow, b) = \{x \in X : x < b\}$,
- $(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}$.

Estos conjuntos se llamarán intervalos abiertos. Sea $\mathcal{B}$ la familia de los intervalos abiertos en X. La topología inducida sobre X por el orden lineal $<$ es la topología generada sobre X por la base $\mathcal{B}$.

Definición 1.8. Sea x un elemento de un espacio topológico (X, τ). Un subconjunto V de X es una *vecindad de* x en el espacio (X, τ) si podemos encontrar un conjunto abierto $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq V$. A la colección de todas las vecindades de x en (X, τ) le llamaremos *conjunto de vecindades del punto* x y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.

Proposición 1.9. Un subconjunto A de un espacio (X, τ) es abierto si y sólo si para cada $x \in A$ sucede que $A \in \mathcal{V}(x)$.

Definición 1.10. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Una colección $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ es una *base de vecindades de* x en (X, τ) si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ podemos encontrar $W \in \mathcal{B}(x)$ tal que $W \subseteq V$. Cuando una base de vecindades $\mathcal{B}(x)$ está formada exclusivamente de subconjuntos abiertos se le da el nombre de *base local de* x en (X, τ).

1.2 Subespacios topológicos y la clausura de un conjunto

Proposición 1.11. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, para todo $Y \subseteq X$, la colección $\tau \restriction_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$ es una topología en Y.

Definición 1.12. Sean (X,τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. A $\tau \restriction_Y$ le llamaremos *topología relativa en* Y o *topología de subespacio* con respecto a (X,τ), y diremos que $(Y, \tau \restriction_Y)$ es un *subespacio topológico* de (X,τ).

Proposición 1.13. Sean (X,τ) un espacio topológico, $Y \subseteq X$ y $y \in X$.

1. Si $\mathcal{B}$ es una base (subbase) para (X,τ), entonces $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base (subbase) para $(Y, \tau \restriction_Y)$.
2. Si $\mathcal{B}(y)$ es una base de vecindades (base local) de y en (X,τ), entonces la colección $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}(y)\}$ es una base de vecindades (base local) de y en $(Y, \tau \restriction_Y)$.

Proposición 1.14. Sean (X,τ) un espacio topológico y $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

1. Las siguientes condiciones son lógicamente equivalentes:
   (a) Y es un subconjunto abierto en (X,τ).
   (b) Todo subconjunto abierto U de Y en $(Y, \tau \restriction_Y)$ es abierto en (X,τ).
2. $F \subseteq Y$ es cerrado en $(Y, \tau \restriction_Y)$ si y sólo si existe G subconjunto cerrado en (X,τ) de modo que $F = Y \cap G$.
3. Las siguientes condiciones son lógicamente equivalentes:
   (a) Y es un subconjunto cerrado en (X,τ).
   (b) Todo subconjunto cerrado F de $(Y, \tau \restriction_Y)$ es un subconjunto cerrado en (X,τ).

Proposición 1.15. Sean (X,τ) un espacio topológico y Y un subespacio de X. Entonces Y es un subespacio discreto si y sólo si para todo $y \in Y$ existe $U \in \tau$ tal que $Y \cap U = \{y\}$.

Definiciones 1.16. Sean (X,τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$ cualesquiera.

1. Diremos que x es un *punto de acumulación de* A en (X,τ) si $(W \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para toda vecindad W de x en (X,τ).
2. Definimos al *conjunto derivado de* A como el conjunto

$$der(A) = A' := \{y \in X : \text{ y es punto de acumulación de } A \text{ en } (X,\tau)\}.$$

Así mismo, definimos a la *cerradura de* A en (X,τ) como el conjunto $cl(A) := A \cup der(A)$. También utilizamos las notaciones $cl_X(A)$ y $\overline{A}$, donde esta última se utiliza cuando es claro el espacio topológico en el que se trabaja.

Proposición 1.17. Sean (X,τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ cualesquiera subconjuntos. Supongamos que $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de $x \in X$. Entonces:

1. $cl(A)$ es un subconjunto cerrado de X y $A \subseteq cl(A)$.

2. A es un subconjunto cerrado de X si y sólo si $cl(A) = A$.

3. $x \in cl(A)$ si y sólo si $B \cap A \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}(x)$.

4. Si $A \subseteq B$ entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.

5. Si F es un subconjunto cerrado en X tal que $A \subseteq F$, entonces $cl(A) \subseteq F$.

6. Si $\{A_j : j \in J\}$ es una colección no vacía de subconjuntos de X, entonces

$$cl\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \subseteq \bigcap_{j\in J} cl(A_j).$$

En particular, si $A_1, ..., A_n \subseteq X$ es una colección finita de subconjuntos de X entonces

$$cl\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} cl(A_j).$$

La contención puede ser estricta incluso si J es un conjunto finito.

7. Si $\{A_j : j \in J\}$ es una colección no vacía de subconjuntos de X, entonces

$$\bigcup_{j\in J} cl(A_j) \subseteq cl\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right).$$

Además, si $A_1, ..., A_n \subseteq X$ es una colección finita de subconjuntos de X entonces se satisface la igualdad

$$\bigcup_{j=1}^{n} cl(A_j) = cl\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right).$$

Proposición 1.18. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio topológico de X. Entonces $cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y$.

1.3 Axiomas de separación y numerabilidad

Definiciones 1.19. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Diremos que (X, τ) es un *espacio* T_0 si para todo $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existe $U \in \tau$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.

2. Diremos que (X, τ) es un *espacio* T_1 si para todo par de elementos diferentes $x, y \in X$ existe un conjunto abierto $U \in \tau$ de modo que $\{x, y\} \cap U = \{x\}$.

3. Diremos que (X, τ) es un *espacio* T_2, o que es un *espacio Hausdorff*, si para todos los elementos diferentes $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos y ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$.

4. Diremos que un espacio (X, τ) es *regular* si para todo subconjunto cerrado F y todo elemento $x \in X \setminus F$, existen subconjuntos abiertos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

5. Diremos que (X, τ) es T_3 si es un espacio regular y T_0.

6. Diremos que (X, τ) es *completamente regular* si para cualquier subconjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \notin F$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[F] \subseteq \{1\}$[1].

7. Diremos que(X, τ) es un *espacio Tychonoff*, o un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, si X es completamente regular y T_0.

Proposición 1.20. Si $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces todo espacio topológico T_i es un espacio T_{i-1}. Además, todo espacio Tychonoff es un espacio T_3. De esta manera, tenemos que:

$$T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Proposición 1.21. Un espacio topológico (X, τ) es un espacio T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es cerrado en (X, τ).

Algunos ejemplos de espacios de Tychonoff son los espacios metrizables y los espacios totalmente ordenados (con la topología del orden).

Definiciones 1.22. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es un espacio *primero numerable* (lo denotamos como **1AN**) si todo elemento $x \in X$ tiene una base de vecindades numerable. Diremos que X es un espacio *segundo numerable* (lo denotamos como **2AN**) si y sólo si τ tiene una base a lo más numerable.

Proposición 1.23. Todo espacio topológico **2AN** es un espacio **1AN**.

1.4 Funciones continuas y sucesiones

Definición 1.24. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es *continua en* $x \in X$ si para toda V vecindad de $f(x)$ en Y existe una vecindad U de x en X tal que $f[U] \subseteq V$.

Proposición 1.25. Sean X y Y espacios topológicos. Las siguientes condiciones son lógicamente equivalentes para cualquier función $f : X \longrightarrow Y$.

1. f es continua en x.

2. Para cada $V \in \mathcal{V}(f(x))$ en Y, $f^{-1}[V] \in \mathcal{V}(x)$ en X.

3. Para cada V subconjunto abierto en Y tal que $f(x) \in V$, $f^{-1}[V] \in \mathcal{V}(x)$.

[1]Se pide que $f[F] \subseteq \{1\}$ pues podría ocurrir el caso en que $F = \emptyset$ y por tanto $f[F] = \emptyset \subseteq \{1\}$. Sin embargo, para un subconjunto cerrado $F \neq \emptyset$, la definción de espacio completamente regular implica que $f[F] = \{1\}$.

4. Para todo V subconjunto abierto en Y con $f(x) \in V$, existe U subconjunto abierto en X con $x \in U$ tal que $f[U] \subseteq V$.

Definición 1.26. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos X y Y es *continua* si f es continua en cada elemento $x \in X$.

Teorema 1.27. Sean X y Y espacios topológicos. Las siguientes condiciones son equivalentes para toda función $f : X \longrightarrow Y$.

1. f es continua.
2. Para cualquier subconjunto abierto U de Y, $f^{-1}[U]$ es un subconjunto abierto en X.
3. $f^{-1}[F]$ es un subconjunto cerrado en X para cualquier subconjunto cerrado F de Y.

Proposición 1.28. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función entre espacios topológicos y Z es un espacio topológico tal que Y es un subespacio de Z, entonces las siguientes afirmaciones son lógicamente equivalentes:

1. $f : X \longrightarrow Y$ es continua.
2. $\overline{f} : X \longrightarrow Z$ es continua, donde $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Definiciones 1.29. Sean X y Y espacios topológicos . Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es *abierta* (respectivamente *cerrada*) si $f[U]$ es un subconjunto abierto (cerrado) en Y para todo U subconjunto abierto (cerrado) en X.

Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si es continua, biyectiva y su función inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es continua. Diremos que X es *homeomorfo* a Y si existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Proposición 1.30. Sean X y Y espacios topológicos. Las siguientes condiciones son lógicamente equivalentes para cualquier función $f : X \longrightarrow Y$.

1. $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo.
2. $f : X \longrightarrow Y$ es continua, biyectiva y abierta (respectivamente, cerrada).

Definición 1.31 (Función perfecta).

1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que $A \subseteq X$ es una *fibra* de f si existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}[\{y\}] = A$.
2. Una función suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos X y Y es *perfecta* si es continua, cerrada y sus fibras son compactas (vea Definición 1.35).

De ahora en adelante escribiremos $f^{-1}[y]$ en lugar de $f^{-1}[\{y\}]$ para denotar a una fibra.

Definiciones 1.32. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Una *sucesión de elementos* en A es cualquier función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ tal que $f(n) \in A$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Si f es una sucesión, entonces usaremos la notación $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n := f(n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a $x \in X$ si para toda vecindad V de x en X existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq m\} \subseteq V$. Utilizaremos los símbolos $x_n \to x$ para denotar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Proposición 1.33. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ cualquier subconjunto. Si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x_n \to x$, entonces $x \in \overline{A}$.

Proposición 1.34. Sea X un espacio topológico primero numerable y sea $\emptyset \neq A \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x_n \to x$.

1.5 Propiedades de cubiertas

Definición 1.35. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un *recubrimiento* o *cubierta* de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$ y diremos que $\mathcal{U}$ *cubre* a X. Si además, para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $U \in \tau$, diremos que $\mathcal{U}$ es un *recubrimiento abierto* o *una cubierta abierta* de X. Si $\mathcal{V}$ es una subcolección de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{V}$ entonces diremos que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta* de U.

Diremos que un espacio topológico X es un espacio *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Diremos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es compacto si es un espacio compacto con la topología de subespacio.

Proposición 1.36. Sean X un espacio compacto, Y un espacio topológico, $K \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

1. Si K es un subconjunto cerrado, entonces K es un subconjunto compacto.

2. Si f es una función continua, entonces $f[X]$ es un subconjunto compacto de Y.

Ejemplo 1.37. El espacio de ordinales $[0, \omega_1]$, con la topología inducida por su orden lineal, es compacto. En efecto: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0, \omega_1]$. Para algún $U_1 \in \mathcal{U}$, $\omega_1 \in U_1$. Entonces, existe $\alpha_1 < \omega_1$ tal que $(\alpha_1, \omega_1] \subseteq U_1$. Sea $U_2 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha_1 \in U_2$. Si $\alpha_1 > 0$, entonces podemos encontrar $\alpha_2 < \alpha_1$ tal que $(\alpha_2, \alpha_1] \subseteq U_2$. Tomemos ahora $U_3 \in \mathcal{U}$ que contiene a α_2. Si $\alpha_2 > 0$, existe $\alpha_3 < \alpha_2$ tal que $(\alpha_3, \alpha_2] \subseteq U_3$. De esta manera , procediendo de manera inductiva, siempre que $\alpha_n > 0$ podemos encontrar $U_{n+1} \in \mathcal{U}$ y $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ tales que $(\alpha_{n+1}, \alpha_n] \subseteq U_{n+1}$. Observemos que debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = 0$, pues de lo contrario $\{\alpha_m : m \in \mathbb{N}\}$ sería una sucesión estrictamente decreciente que no tiene un elemento mínimo, lo cual contradice la buena ordenabilidad de $[0, \omega_1]$. Entonces si $\alpha_n = 0$ se sigue que la colección $\{U_m : 1 \leq m \leq n + 1\}$ es una subcubierta finita de $[0, \omega_1]$.

Por otro lado, el espacio de ordinales $[0, \omega_1)$ no es un espacio compacto pues la cubierta $\mathcal{U} = \{[0, \beta) : \beta < \omega_1\}$ no admite niguna subcubierta finita.

Definiciones 1.38. Un espacio topológico X es un espacio *numerablemente compacto* si toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.

Un espacio topológico X es un *espacio Lindelöf* (o *tiene la propiedad de Lindelöf*) si de toda cubierta abierta es posible extraer una subcubierta numerable.

Proposición 1.39. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y $K \subseteq X$ cerrado. Entonces, se cumple lo siguiente:

1. Si X es numerablemente compacto, entonces el subespacio K es numerablemente compacto y $f[X] \subseteq Y$ es un subespacio numerablemente compacto.

2. Si X es un espacio Lindelöf, entonces K es un subespacio Lindelöf y $f[X] \subseteq Y$ es un subespacio Lindelöf.

Proposición 1.40. Sea X un espacio topológico T_1. Las siguientes condiciones son lógicamente equivalentes:

1. X es numerablemente compacto.

2. Cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

3. Cada subconjunto numerable (infinito) de X tiene un punto de acumulación.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que G es un subconjunto infinito de X que no tiene puntos de acumulación. Sea F un subconjunto numerable infinito de G. Como G no tiene puntos de acumulación entonces F tampoco los tiene por lo cual F es un subconjunto cerrado de X y además, para cada $x \in F$, existe una vecindad abierta V_x de x tal que $V_x \cap F = \{x\}$. Entonces, la colección $\{V_x : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta numerable infinita de X que no tiene subcubiertas finitas. Por lo tanto X, no es numerablemente compacto.

Así, hemos probado que si un espacio X contiene un subconjunto infinito G que no tiene puntos de acumulación entonces X no es numerablemente compacto. Esto es lógicamente equivalente a demostrar que si X es numerablemente compacto entonces todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

(2) $\Rightarrow$ (3). Es trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X no es un espacio numerablemente compacto. Entonces existe $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ cubierta abierta numerable de X que no tiene subcubiertas finitas.

Elijamos $x_1 \in X$ y un elemento $U_{n_1} \in \mathcal{U}$ tal que $x_1 \in U_{n_1}$. Por hipótesis sobre la cubierta $\mathcal{U}$, $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i \neq \emptyset$. Sea $x_2 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i$, entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_2 \in U_{n_2}$ (obsérvese que $n_1 < n_2$). Supongamos que hemos construido $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_k \in X$ tales que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, $x_1 \in U_{n_1}$ y $x_j \in U_{n_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_{j-1}} U_i$ para cada $j \in \{2, ..., k\}$. Como $\bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$ no es igual a X, existen $x_{n_{k+1}} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$ y $n_{k+1} \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, ..., n_k\}$ tales que $x_{n_{k+1}} \in U_{n_{k+1}}$. De esta manera hemos construido recursivamente al punto $x_{k+1} \in U_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$.

El anterior proceso recursivo nos permite definir un conjunto infinito $F = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ y una sucesión $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathcal{U}$. Probaremos ahora que el conjunto F no tiene puntos de acumulación en X. En efecto, para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$ y U_n contiene a lo más una colección finita G de puntos de F. Así. $(U_n \setminus G) \cup \{x\}$ es una vecindad de x que no tiene puntos de F, a excepción posiblemente de x.

De esta manera, hemos demostrado que si un espacio X no es numerablemente compacto, entonces existe $F \subseteq X$ subespacio numerable infinitio que no tiene puntos de acumulación en X. Lo anterior es lógicamente equivalente a demostrar que si cada subconjunto numerable infinito de X tiene un punto de acumulación, entonces X es numerablemente compacto. ■

Ejemplo 1.41. El espacio topológico de ordinales $[0, \omega_1)$ es numerablemente compacto pues si $F \subseteq [0, \omega_1)$ es infinito y numerable, entonces el supremo de F pertenece a $[0, \omega_1)$ y es un punto de acumulación de F. Observe que $[0, \omega_1)$ no es Lindelöf pues la colección de abiertos $\{[0, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$ no tiene subcubierta numerable.

1.6 Topología producto

Definición 1.42. Supongamos que X es cualquier conjunto no vacío y consideremos a una familia no vacía de funciones $\mathcal{F} = \{f_j : X \longrightarrow Y_j \ , \ j \in J\}$, donde (Y_j, τ_j) es un espacio topológico para toda $j \in J$. La *topología inicial en X inducida por la familia de funciones $\mathcal{F}$* es la única topología τ en X que tiene como subbase a la colección

$$\mathcal{S} = \{f_j^{-1}[U] : U \in \tau_j \text{ y } j \in J\}.$$

Proposición 1.43. Sea (X, τ) un espacio donde τ es la topología inicial inducida por la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_j : X \longrightarrow Y_j \ , \ j \in J\}$. Entonces la función $f_j : X \longrightarrow Y_j$ es una función continua para toda $j \in J$.

Si $\{(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)\}$ es una colección finita de espacios topológicos, entonces el conjunto $X_1 \times \cdots \times X_n$ se define de manera recursiva como sigue:

- $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1 \ , \ x_2 \in X_2\}$, y
- $X_1 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ para $n \geq 3$.

En el conjunto $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_j \in X_j \text{ para cada } 1 \leq j \leq n\}$ definimos a las *funciones proyección* $q_i : X \longrightarrow X_i$, donde $q_i((x_1, ..., x_n)) = x_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Definición 1.44. Sea $\{(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)\}$ una colección finita de espacios topológicos. Definimos al *producto topológico* de los espacios $(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)$ como el espacio topológico $(X = X_1 \times \cdots \times X_n, \theta)$, donde θ es la topología inicial en X inducida por la familia de funciones proyección $\{q_i : X \longrightarrow X_i ; 1 \leq i \leq n\}$.

Proposición 1.45. En el espacio $\mathbb{R}^n$, la topología euclidiana τ_e inducida por la métrica euclidiana e coincide con la topología producto τ, inducida por la familia de funciones proyección $\{q_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}$ donde $q_i(x_1, ..., x_n) = x_i$.

Proposición 1.46. Sean X y Y dos espacios topológicos tales que Y es compacto. Entonces la función proyección $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ es una función perfecta.

Demostración. Sea $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ la función proyección de $X \times Y$ en X. Entonces π_X es continua y suprayectiva.

Sea $C \subset X \times Y$ cerrado. Si $\pi_X[C] = X$ entonces $\pi_X[C]$ es cerrado en X.

Supongamos que $\pi_X[C] \neq X$, entonces existe $x_0 \in X \backslash \pi_X[C]$ por lo que

$$(x_0, y) \in (X \times Y) \backslash C$$

para todo $y \in Y$ y entonces, puesto que C es cerrado, existen U_y abierto en X y V_y abierto en Y tales que $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset (X \times Y) \backslash C$ para todo $y \in Y$. Dado que $\{V_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y y Y es compacto, existen $y_1, ...y_n \in Y$, para algún $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} = Y.$$

Definamos a $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, entonces U es abierto en X y $x_0 \in U$. Observemos además que $U \subset X \backslash \pi_X[C]$, pues si existiera $x \in U$ tal que $x \in \pi_X[C]$, entonces existiría $y \in Y$ tal que $(x, y) \in C$ y $\pi_X(x, y) = x$. Entonces existiría $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $y \in V_{y_i}$ y puesto que $x \in U \subset U_{y_i}$, entonces $(x, y) \in (U_{y_i} \times V_{y_i}) \cap C$ lo cual contradice que $U_{y_i} \times V_{y_i} \subset (X \times Y) \backslash C$. De lo anterior, concluimos que para toda $x \in X \backslash \pi_X[C]$ se tiene que $X \backslash \pi_X[C]$ es una vecindad de x, por lo cual $X \backslash \pi_X[C]$ es abierto en X y por consiguiente $\pi_X[C]$ es cerrado en X. De esta manera, π_X es una función cerrada.

Notemos que $\pi_X^{-1}[x]$ es compacto en $X \times Y$ para todo $x \in X$. En efecto: Sea $x \in X$ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\pi_X^{-1}[x] = \{(x, y) : y \in Y\} = \{x\} \times Y$ (con la topología de subespacio). Para cada $y \in Y$ existe $U_y \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \in U_y$, por lo que existe B_y abierto en Y tal que

$$(x, y) \in (\{x\} \times B_y) \subset U_y.$$

Puesto que $\{B_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y, el cual es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, ..., y_n \in Y$ tales que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}.$$

Sea $(x, y) \in \pi_X^{-1}[x]$, entonces existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $y \in B_{y_i}$ por lo cual se tiene que

$$(x, y) \in (\{x\} \times B_{y_i}) \subseteq U_{y_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

Así

$$\pi_X^{-1}[x] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i},$$

y puesto que U_{y_i} es abierto en $\pi_X^{-1}[x]$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, concluimos que

$$\pi_X^{-1}[x] = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

Por lo tanto $\pi_X^{-1}[x]$ es compacto para todo $x \in X$.

De todo lo anterior, concluimos que π_X es continua, suprayectiva, cerrada y cada fibra de π_X es compacta, por lo cual π_X es una función perfecta. ■

Lema 1.47 (Lema del tubo generalizado). Sean A y B subespacios de X y Y respectivamente; sea N un abierto en $X \times Y$ que contiene a $A \times B$. Si A y B son compactos, entonces existen abiertos U y V en X y Y, respectivamente, tales que $A \times B \subseteq U \times V \subseteq N$.

Definiciones 1.48. Sea $\{X_j : j \in J\}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos. Diremos que $f : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} X_j$ es una *función de elección* si $f(j) \in X_j$ para toda $j \in J$. Al conjunto

$$\prod_{j \in J} X_j := \left\{ f : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} X_j : f \text{ es una función de elección} \right\}$$

se le llama *producto cartesiano* de los conjuntos X_j.

Además, para cada $i \in J$ definimos a la función *proyección a la i-ésima coordenada* (o simplemente $i-$ésima proyección) del producto cartesiano $\prod_{j \in J} X_j$ como la función

$$\pi_i : \prod_{j \in J} X_j \longrightarrow X_i$$

tal que $\pi(f) = f(i) \in X_i$ para toda $f \in \prod_{j \in J} X_j$.

Proposición 1.49. Si el producto cartesiano $\prod_{j \in J} X_j$ es no vacío, entonces la función $i-$ésima proyección es suprayectiva para cada $i \in J$.

Demostración. Sea $\{X_j : j \in J\}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos y $\prod_{j \in J} X_j$ su producto cartesiano. Sean $i \in J$ y $x \in X_i$. Por hipótesis, existe $f : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} X_j$ tal que $f(j) \in X_j$ para toda $j \in J$. Definamos a la función $g : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} X_j$ como

$$g(j) = \begin{cases} f(j), & si \quad j \neq i, \\ x, & si \quad j = i. \end{cases}$$

Entonces $\pi_i(g) = g(i) = x$. Por lo tanto, π_i es una función suprayectiva. ■

Suponer que para cualquier colección no vacía $\{X_j : j \in J\}$ de conjuntos no vacíos, la colección $\prod_{j \in J} X_j$ es no vacía es lógicamente equivalente a suponer lo siguiente:

Axioma de Elección. Para toda colección no vacía $\{X_j : j \in J\}$ de conjuntos no vacíos, existe una función de elección asociada a la colección $\{X_j : j \in J\}$.

En todo este trabajo supondremos cierto el Axioma de Elección.

Definición 1.50. Supongamos que $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ es una colección no vacía de espacios topológicos. La topología inicial τ inducida en el producto cartesiano $\prod_{j\in J} X_j$ por la familia de todas las funciones proyección $\mathcal{F} = \{\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \longrightarrow X_i : i \in J\}$, se conoce como *topología producto* (o topología de Tychonoff).

Proposición 1.51. Sea $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos, $X = \prod_{j\in J} X_j$ su producto cartesiano y τ su topología producto. Entonces:

1. La colección $S = \{\pi_j^{-1}[W] : (W \in \tau_j) \text{ y } (j \in J)\}$ es subbase de τ.
2. Cada función $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ es continua y suprayectiva.
3. Cada función $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ es una función abierta.

Observemos que si $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos y J es finito de cardinalidad n, entonces el producto topológico se puede definir, en base a la Definición 1.44, como $(X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_n}, \theta)$ o, en base a la Definición 1.50, como $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$. En principio, ambos espacios son diferentes porque el primero se forma de n-adas y el segundo está formado por funciones de elección. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que ambos espacios son topológicamente equivalentes, por lo cual podemos decir que el espacio $(X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_n}, \theta)$ es el producto topológico de los espacios $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$.

Proposición 1.52. Sea $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos donde J es un conjunto finito de cardinalidad n. Entonces el espacio $(X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_n}, \theta)$ (donde θ es la topología dada en la Definición 1.44) es homeomorfo al espacio $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ (donde τ es la topología dada en la Definición 1.50).

Proposición 1.53. Sean $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos e $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Entonces el producto topológico $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ es T_i si y sólo si (X_j, τ_j) es un espacio T_i para cada $j \in J$.

Capítulo 2

Espacios D

En este capítulo presentaremos resultados bien conocidos respecto a la propiedad D y cómo se comporta bajo subespacios, imágenes continuas, uniones numerables así como algunos ejemplos de espacios que no son D. De igual manera, se demostrará que los espacios semi-estratificables y los espacios Lindelöf$-\Sigma$ son espacios D. A menos que se diga lo contrario, supondremos que todos los espacios topológicos con los que se trabaja en este capítulo son espacios T_1.

2.1 Propiedades básicas de los espacios D

Definiciones 2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que una función $\varphi : X \longrightarrow \tau$ es una *asignación de vecindades* si $x \in \varphi(x)$ para cualquier $x \in X$.

Decimos que (X, τ) es un *espacio D* (o que *tiene la propiedad D*) si para cualquier asignación de vecindades φ existe un subespacio cerrado, discreto y no vacío $D \subseteq X$ tal que $\{\varphi(x) : x \in D\}$ cubre a X. Dado $Y \subseteq X$, decimos que Y es un subespacio D de X si Y es un espacio D con la topología de subespacio.

En ocasiones escribiremos $\{U_x : x \in X\} \subseteq \tau$ para denotar a las asignaciones de vecindades bajo la asunción de que existe una función $\varphi : X \longrightarrow \tau$ tal que $\varphi(x) = U_x$ y $x \in U_x$ para todo $x \in X$. Las asignaciones de vecindades, como su nombre lo indica, son formas de asociar a cada elemento del conjunto X una vecindad abierta y puesto que para cualquier asignación de vecindades φ se satisface que $x \in \varphi(x)$ entonces la imagen directa $\varphi[X]$ de toda asignación de vecindades es una cubierta abierta de X. Por otro lado, dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X y $x \in X$ existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ por lo cual la función $\varphi(x) = U_x$ es una asignación de vecindades[1]. De esta manera, de toda asignación de vecindades se obtiene una cubierta abierta y de toda cubierta abierta se puede obtener una asignación de vecindades.

[1]Obsérvese que aquí se hace uso del Axioma de Elección.

Proposición 2.2. Todo espacio compacto es un espacio D.

Demostración. Sean (K, θ) un espacio topológico compacto y φ una asignación de vecindades. Puesto que $\varphi[K]$ cubre a K entonces existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(x_i).$$

Sea $D = \{x_1, ..., x_n\}$. Como D es finito, entonces D es un subconjunto cerrado, discreto y no vacío de K tal que $\{\varphi(x) : x \in D\}$ cubre a K . Por lo tanto K es un espacio D. ■

Proposición 2.3. Todo espacio discreto es un espacio D.

Demostración. Sea X un espacio discreto. Puesto que para cualquier asignación de vecindades φ se satisface que

$$X = \bigcup_{x \in X} \varphi(x),$$

y X es cerrado, discreto y no vacío, entonces X es un espacio D. ■

Como $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ es un espacio topológico discreto entonces es un espacio D. Sin embargo, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ no es un espacio compacto por lo cual el espacio discreto $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ es un ejemplo de un espacio D que no es un espacio compacto. De igual manera, puesto que $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ es un espacio discreto, entonces este es un ejemplo de un espacio D que no es un espacio Lindelöf.

Proposición 2.4. Todo subespacio cerrado de un espacio D es un subespacio D.

Demostración. Sean X un espacio D, Y un subconjunto propio, cerrado y diferente del vacío de X y sea $\theta = \tau \upharpoonright_Y$ la topología de subespacio en Y. Sea $\varphi : Y \longrightarrow \theta$ una asignación de vecindades en Y, entonces para todo $y \in Y$ existe $U_y \in \tau$ tal que $\varphi(y) = Y \cap U_y$. Definamos $\psi : X \longrightarrow \tau$ como

$$\psi(x) = \begin{cases} U_x, & si \quad x \in Y. \\ X \backslash Y, & si \quad x \notin Y. \end{cases}$$

Entonces $x \in \psi(x)$ para cualquier $x \in X$ y $\psi[X] \subseteq \tau$, por lo cual ψ es una asignación de vecindades en (X, τ) y como X es un espacio D, entonces existe $D \subseteq X$ cerrado, discreto y no vacío tal que

$$X = \bigcup_{x \in D} \psi(x).$$

Afirmamos que $D \cap Y$ es un subespacio cerrado, discreto y no vacío de Y tal que

$$Y = \bigcup_{y \in D \cap Y} \varphi(y).$$

En efecto: si $D \cap Y = \emptyset$ entonces $D \subseteq X \backslash Y$ por lo cual

$$X = \bigcup_{x \in D} \psi(x) = \bigcup_{x \in D} X \backslash Y = X \backslash Y,$$

lo cual contradice que Y es diferente del vacío. Así, $D \cap Y$ es diferente del vacío.

Por otro lado, sea $y \in D \cap Y$. Como D es discreto en X, entonces $\{y\} = \{y\} \cap D$ es abierto en D de donde se sigue que $\{y\} = \{y\} \cap D \cap Y$ es abierto en $D \cap Y$. Por lo tanto, $D \cap Y$ es un subespacio discreto de Y.

Como D y Y son cerrados en X, entonces $D \cap Y$ es cerrado en Y y por lo tanto podemos concluir que $D \cap Y$ es un subespacio cerrado, discreto y no vacío de Y.

Finalmente,

$$Y = X \cap Y = \left(\bigcup_{x \in D} \psi(x) \right) \cap Y = \bigcup_{x \in D} (\psi(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in D \cap Y} (U_x \cap Y) = \bigcup_{x \in D \cap Y} \varphi(x).$$

Por lo tanto, Y es un subespacio D de X. ■

Los siguientes resultados son interesantes porque, además de mostrar una relación entre la propiedad D y ciertos números cardinales asociados a un espacio topológico, nos proporcionan ejemplos de espacios topológicos que no son espacios D.

Definición 2.5. Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos a los números cardinales

$$e(X) = sup\{|A| : A \subseteq X \text{ tal que } A \text{ es cerrado y discreto}\},$$

$$l(X) = mín\{\kappa : \text{toda cubierta abierta } \mathcal{U} \text{ de } X \text{ tiene una subcubierta } \mathcal{V} \text{ tal que } |\mathcal{V}| \leq \kappa\}$$

como la *extensión* (*extent* en inglés) y el *número de Lindelöf* de X respectivamente.

Lema 2.6. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si A es un subconjunto cerrado de X, entonces $l(A) \leq l(X)$.
2. Si X es un espacio discreto, entonces $|X| \leq l(X)$.

Demostración.

1. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $(A, \tau \restriction_A)$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, fijamos un único $V(U) \in \tau$ tal que $U = V(U) \cap A$. Entonces $\mathcal{C} = \{V(U) : U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de X. Luego, existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\bigcup \mathcal{D} = X$ y $|\mathcal{D}| \leq l(X)$.

   Sea $\mathcal{W} = \mathcal{D} \setminus \{X \setminus A\}$ y sea $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : V(U) \in \mathcal{W}\}$. Entonces $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{W}| \leq l(X)$. Además, $\mathcal{V}$ es cubierta de A: si $a \in A$ es arbitrario, entonces existe $W \in \mathcal{D}$ tal que $a \in W$. Claramente $W \neq X \setminus A$. Así, $W \in \mathcal{W}$. Consideremos a $U \in \mathcal{U}$ tal que $W = V(U)$. Entonces
   $$a \in V(U) \cap A = U.$$
   Además, como $V(U) = W \in \mathcal{W}$, tenemos que $U \in \mathcal{V}$. Así, $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Como es claro que $\bigcup V \subseteq A$, tenemos que $\bigcup V = A$. Así, $l(A) \leq l(X)$.

2. Si X es discreto, entonces $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Luego, existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\bigcup \mathcal{D} = X$ y $|\mathcal{D}| \leq l(X)$. Observe que necesariamente $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ porque si ocurirera que existe $\{z\} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$, entonces $z \in X \setminus \bigcup \mathcal{D}$. Así, $|X| = |\mathcal{D}| \leq l(X)$.

■

Corolario 2.7. Para todo espacio X, $e(X) \leq l(X)$.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ discreto y cerrado cualquiera. Entonces $|A| \leq l(A) \leq l(X)$. Así,

$$e(X) = sup\{|A| : A \subseteq X \text{ es cerrado y discreto}\} \leq l(X).$$

■

Proposición 2.8. Sea X un espacio D. Entonces $e(Y) = l(Y)$ para cualquier subespacio cerrado Y de X.

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado de X. Entonces Y es un subespacio D y además, por el Corolario 2.7, $e(Y) \leq l(Y)$. De esta manera, basta probar que $l(Y) \leq e(Y)$. Sea τ la topología de subespacio de Y.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Para todo $y \in Y$ existe $U_y \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U_y$. Definamos a $\varphi : Y \longrightarrow \tau$ tal que $\varphi(y) = U_y$, entonces φ es una asignación de vecindades en Y por lo cual existe $D \subseteq Y$ cerrado, discreto y no vacío tal que $Y = \bigcup_{y \in D} \varphi(y)$ y así $\{\varphi(y) : y \in D\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U}$ tal que $|\{\varphi(y) : y \in D\}| \leq |D| \leq e(Y)$. Por lo tanto, para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y existe una subcubierta abierta $\mathcal{U}^*$ tal que $|\mathcal{U}^*| \leq e(Y)$ de donde se sigue que $l(Y) \leq e(Y)$. De esta manera $e(Y) = l(Y)$. ■

Corolario 2.9. Todo espacio D numerablemente compacto es compacto.

Demostración. Sea X un espacio D numerablemente compacto. Sea $A \subseteq X$ cerrado y discreto, entonces A es un subespacio numerablemente compacto y discreto por lo que es finito. Así, $|A| < \omega_0$ para todo subconjunto cerrado y discreto de X y por lo tanto $e(X) \leq \omega_0$. Puesto que X es un espacio D, entonces $e(X) = l(X)$ por lo cual $l(X) \leq \omega_0$, es decir que toda cubierta abierta en X tiene una subcubierta a lo más numerable, y así X es un espacio Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ cualquier cubierta abierta de X; entonces, por ser X Lindelöf, existe $\mathcal{U}_1$ subcubierta a lo más numerable de $\mathcal{U}$ y así, por ser X numerablemente compacto, existe $\mathcal{U}_2$ subcubierta finita de $\mathcal{U}_1$ (y por tanto de $\mathcal{U}$). Por lo tanto toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene una subcubierta finitia y en consecuencia X es compacto. ■

Ejemplo 2.10. En [14] van Douwen y Wicke construyeron (utilizando como conjunto base a los números reales) un espacio topológico Γ que no es Lindelöf, es Hausdorff, localmente compacto, separable, primero numerable, σ-discreto y real-compacto. Γ no es un espacio D porque $e(\Gamma) < l(\Gamma)$.

Ejemplo 2.11. El espacio topológico $[0, \omega_1)$ es un espacio numerablemente compacto (vea Ejemplo 1.41) que no es compacto, por lo cual no puede ser un espacio D.

La Proposición 2.8 nos dice que si un espacio topológico X es tal que $e(Y) < l(Y)$ para algún subespacio cerrado Y de X, entonces X no puede ser un espacio D. Durante un tiempo todos los ejemplos conocidos de espacios topológicos que no son espacios D satisfacían que existía un subespacio cerrado Y tal que $e(Y) < l(Y)$, lo cual motivó a Buzyakova a realizar la siguiente pregunta: Supongamos que $l(Y) = e(Y)$ para cualquier subespacio Y de un espacio X. ¿Es X un espacio hereditariamente D? Esta pregunta fue respondida de manera negativa por Nyikos [25], quien demostró la existencia de un espacio X en el cual $e(Y) = l(Y)$ para cualquier subespacio Y de X pero no es un espacio D.

Recordemos que si un espacio X es compacto, numerablemente compacto o Lindelöf, Y es un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces $f[X]$ es un subespacio compacto, numerablemente compacto o Lindelöf, respectivamente. Es natural preguntarse si cualquier imagen continua de un espacio D es un espacio D y de hecho resulta que, en general, la respuesta es negativa.

Ejemplo 2.12. El espacio topológico $[0, \omega_1)$ es primero numerable. Como un espacio topológico X es primero numerable si y sólo si X es la imagen abierta continua de un espacio metrizable (vea [16, página 265]), resulta que existe un espacio metrizable Y y una función abierta, continua y suprayectiva $f : Y \longrightarrow [0, \omega_1)$. Como veremos más adelante (Corolario 2.42), los espacios metrizables son espacios D, pero $[0, \omega_1)$ no lo es.

Como ilustra el Ejemplo 2.12, la propiedad D no se preserva ni siquiera bajo imágenes abiertas continuas, sin embargo el siguiente teorema establece que la propiedad D sí se preserva bajo imágenes continuas cerradas.

Teorema 2.13. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Si X es un espacio D entonces Y también es un espacio D.

Demostración. Sea $\{U_y : y \in Y\}$ una asignación de vecindades en Y.

Para cada $y \in Y$ y $x \in f^{-1}[y]$ sea $V_x = f^{-1}[U_y]$. Por continuidad de f, V_x es un subconjunto abierto de X tal que $x \in V_x$ para toda $x \in X$ por lo cual $\{V_x : x \in X\}$ es una asignación de vecindades en X. Como X es un espacio D, existe $D \subseteq X$ cerrado, discreto y no vacío tal que

$$X = \bigcup_{x \in D} V_x.$$

Sea $\varphi : f[D] \longrightarrow D$ una función, no necesariamente continua, tal que $\varphi(y) \in D \cap f^{-1}[y]$ para toda $y \in f[D]$. Definamos a

$$D' = \varphi[f[D]],$$

entonces $D' \subseteq D$ y además, puesto que D es cerrado y discreto en X, $D' \subseteq X$ es cerrado y discreto en X.

Sea $x \in X$. Entonces existe $z \in D$ tal que $x \in V_z$. Como $z \in D$ entonces $f(z) \in f[D]$ y por tanto $\varphi(f(z)) \in D'$. Sea $y = f(z)$, entonces z y $\varphi(f(z))$ pertenecen a $f^{-1}[y]$ por lo que

$$V_z = f^{-1}[U_y] = V_{\varphi(f(z))}$$

y así $x \in V_{\varphi(f(z))}$. Como $\varphi(f(z)) \in D'$ concluimos que $x \in \bigcup_{w \in D'} V_w$ por lo que

$$X = \bigcup_{x \in D'} V_x.$$

Observemos además que $|D' \cap f^{-1}[y]| \leq 1$ para todo $y \in Y$. En efecto: para generar una contradicción, supongamos que existe $y \in Y$ tal que $|D' \cap f^{-1}[y]| > 1$. Entonces existen $u, v \in D' \cap f^{-1}[y]$ tales que $u \neq v$ por lo que existen x_1 y x_2 en D tales que $\varphi(f(x_1)) = u$ y $\varphi(f(x_2)) = v$. Por construcción, $\varphi(f(x_1)) \in f^{-1}[f(x_1)]$ y $\varphi(f(x_2)) \in f^{-1}[f(x_2)]$ de donde $f(\varphi(f(x_1))) = f(x_1)$ y $f(\varphi(f(x_2))) = f(x_2)$, y por consiguiente $f(u) = f(x_1)$ y $f(v) = f(x_2)$. Como $u, v \in f^{-1}[y]$ entonces

$$f(u) = y = f(v),$$

por lo que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Por consiguiente $u = \varphi(f(x_1)) = \varphi(f(x_2)) = v$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, para toda $y \in Y$, $|D' \cap f^{-1}[y]| \leq 1$.

Definamos a $D'' = f[D']$. Consideremos a la restricción $f\restriction_{D'} : D' \longrightarrow D''$. Por construcción, $f\restriction_{D'}$ es una función inyectiva y por tanto $f\restriction_{D'}$ es una función biyectiva y como además es la restricción de una función continua, entonces $f\restriction_{D'}$ es una biyección continua.

Sea $C \subseteq D'$ cerrado en D'. Como D' es cerrado en X entonces C es cerrado en X y puesto que f es una función cerrada entonces $f[C] \subseteq D''$ es cerrado en Y. Puesto que $f[D'] = D''$ es cerrado en Y y $f[C] \subseteq D''$ es cerrado en Y, entonces $f[C] = f\restriction_{D'}[C]$ es cerrado en D''. Así, $f\restriction_{D'}$ es una función cerrada.

Como $f\restriction_{D'}$ es una biyección continua y cerrada, entonces $f\restriction_{D'}$ es un homeomorfismo y puesto que D' es discreto entonces D'' es discreto. Entonces D'' es un subespacio cerrado y discreto de Y.

Finalmente, observemos que

$$Y = f[X] = f\left[\bigcup_{x \in D'} V_x\right] = \bigcup_{y \in D''} f[f^{-1}[U_y]] = \bigcup_{y \in D''} U_y,$$

por lo que para la asignación de vecindades $\{U_y : y \in Y\}$ existe D'' subconjunto no vacío, cerrado y discreto en Y tal que

$$Y = \bigcup_{y \in D''} U_y.$$

Por lo tanto Y es un espacio D. ■

Corolario 2.14. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Si X es un espacio D entonces Y es un espacio D.

Demostración. Puesto que un homeomorfismo es una función continua, cerrada y biyectiva se sigue inmediatamente el resultado. ■

Como es de esperarse, en general la propiedad D no se preserva bajo imágenes inversas (basta tomar cualquier función constante $f : [0, \omega_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ para convencerse de ello). Sin embargo la propiedad D sí se preserva bajo imágenes inversas de funciones perfectas. Para demostrar ese hecho necesitamos las siguientes definiciones y resultados de Topología General.

Definiciones 2.15. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe una vecindad de x, V_x, tal que el conjunto
$$\{A \in \mathcal{A} : V_x \cap A \neq \emptyset\}$$
es finito.

2. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es *discreta* si y sólo si para cada $x \in X$ existe una vecindad de x que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{U}$.

Se sigue inmediatamente de estas definiciones que cualquier colección discreta de subconjuntos de X es una colección localmente finita de subconjuntos de X.

Proposición 2.16. Toda familia $\mathcal{U}$ localmente finita es una familia conservativa (o preservadora de cerradura). Esto es, para todo $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ se tiene que:
$$\overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}} = \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}\}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Bastará demostrar que
$$\overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}} \subseteq \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}\}$$
pues la otra contención siempre se satisface. Sea $x \in \overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}}$. Dado que $\mathcal{U}$ es una familia localmente finita de subconjuntos de X, existe W vecindad de x tal que W intersecta solamente a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ y puesto que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ entonces W intersecta solamente a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$, por lo cual $\{U \in \mathcal{V} : W \cap U \neq \emptyset\} = \{U_1, ..., U_n\}$. Así
$$W \cap \left(\bigcup\{U \in \mathcal{V} : U \neq U_i, i = 1, ..., n\}\right) = \emptyset$$
y por tanto
$$x \in \overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}} = \overline{(\bigcup\{U \in \mathcal{V} : U \neq U_i, i = 1, ..., n\})} \cup \overline{(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i},$$

de donde se sigue que existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in \overline{U_i}$, por lo que $x \in \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}\}$. Por lo tanto $\overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}} = \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}\}$. ■

Corolario 2.17. Si $\mathcal{U}$ es una colección localmente finita de subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcup\mathcal{U}$ es un subconjunto cerrado de X.

Demostración. Por la Proposición 2.16 se tiene que

$$\overline{\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}} = \bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\} = \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\},$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 2.18. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Sea $D \subseteq Y$ cerrado y discreto. Entonces la colección $\{f^{-1}[y] : y \in D\}$ es una familia discreta en X.

Demostración. Sea $x \in X$. Entonces existen 2 posibilidades:

1. $x \in f^{-1}[D]$. En este caso tenemos que $f(x) \in D$. Como D es cerrado y discreto, el conjunto $D \backslash \{f(x)\}$ es cerrado en Y y por consiguiente

$$f^{-1}[Y \backslash (D \backslash \{f(x)\})] = X \backslash f^{-1}[D] \cup f^{-1}[f(x)]$$

es abierto en X. Puesto que

$$x \in f^{-1}[f(x)] \subseteq X \backslash f^{-1}[D] \cup f^{-1}[f(x)],$$

entonces $X \backslash f^{-1}[D] \cup f^{-1}[f(x)]$ es una vecindad abierta de x. Si $v \in D$ es tal que $v \neq f(x)$, entonces

$$(X \backslash f^{-1}[D]) \cap f^{-1}[v] \subseteq (X \backslash f^{-1}[v]) \cap f^{-1}[v] = \emptyset,$$

y

$$f^{-1}[v] \cap f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[\{v\} \cap \{f(x)\}] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

por lo que

$$|\{f^{-1}[y] : y \in D \text{ y } (X \backslash f^{-1}[D] \cup f^{-1}[f(x)]) \cap f^{-1}[y] \neq \emptyset\}| = |\{f^{-1}[f(x)]\}| = 1.$$

2. $x \notin f^{-1}[D]$. En este caso tenemos que $x \in X \backslash f^{-1}[D]$ el cual es una vecindad abierta de x. Además, para todo $y \in D$ se tiene que

$$(X \backslash f^{-1}[D]) \cap f^{-1}[y] \subseteq (X \backslash f^{-1}[y]) \cap f^{-1}[y] = \emptyset,$$

por lo que

$$|\{f^{-1}[y] : y \in D \text{y} (X \backslash f^{-1}[D]) \cap f^{-1}[y] \neq \emptyset\}| = |\emptyset| = 0.$$

De esta manera concluimos que $\{f^{-1}[y] : y \in D\}$ es una familia discreta de subconjuntos de X. ■

Teorema 2.19. Sean X un espacio topológico, Y un espacio D y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, suprayectiva, cerrada tal que cada fibra de f es un espacio D. Entonces $f^{-1}[Y] = X$ es un espacio D.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ una asignación de vecindades en X. Sea $x \in X$. Puesto que $\mathcal{U}$ es una asignación de vecindades de X y $f^{-1}[f(x)]$ es un espacio D, entonces existe $D_x \subseteq f^{-1}[f(x)]$ subespacio cerrado y discreto de $f^{-1}[f(x)]$ tal que

$$f^{-1}[f(x)] \subseteq \bigcup_{d \in D_x} U_d.$$

Sea $A_x = \bigcup_{d \in D_x} U_d$. Puesto que $X \backslash A_x$ es cerrado en X y f es una función cerrada, el conjunto $f\left[X \backslash A_x\right]$ es cerrado en Y y en consecuencia $Y \backslash \left(f\left[X \backslash A_x\right]\right)$ es un abierto en Y. Definiendo al conjunto

$$U_x^* := f^{-1}\left[Y \backslash \left(f\left[X \backslash A_x\right]\right)\right] = X \backslash f^{-1}\left[f\left[X \backslash A_x\right]\right],$$

concluimos que U_x^* es un abierto en X. Si $f(x) \in f\left[X \backslash A_x\right]$ entonces existe $y \in X \backslash A_x$ tal que $f(x) = f(y)$ por lo cual $y \in f^{-1}\left[f(x)\right] \subseteq A_x$ lo cual es imposible. Así $\{f(x)\} \subseteq Y \backslash f\left[X \backslash A_x\right]$ por lo cual

$$f^{-1}\left[f(x)\right] \subseteq U_x^*. \tag{2.1}$$

Por otro lado, tenemos que

$$U_x^* = f^{-1}\left[Y \backslash f\left[X \backslash A_x\right]\right] \subseteq X \backslash \left(X \backslash A_x\right) = A_x. \tag{2.2}$$

De 2.1 y 2.2 concluimos que $f^{-1}[f(x)] \subseteq U_x^* \subseteq A_x$ para toda $x \in X$. Sea $\varphi : Y \longrightarrow X$ una función (no necesariamente continua) tal que $\varphi(y) \in f^{-1}[y]$. Definamos $\mathcal{V} := \{V_y : y \in Y\}$ donde $V_y = f[U^*_{\varphi(y)}]$ para toda $y \in Y$. Observemos que, dado $y \in Y$, se tiene que

$$V_y = f[U^*_{\varphi(y)}] = f\left[f^{-1}\left[Y \backslash f\left[X \backslash A_{\varphi(y)}\right]\right]\right] = Y \backslash f\left[X \backslash A_{\varphi(y)}\right],$$

donde la última igualdad se satisface porque f es suprayectiva. De esta manera hemos probado que V_y es abierto en Y para toda $y \in Y$. Además, puesto que para cualquier $y \in Y$ se cumple que $\varphi(y) \in f^{-1}[f(\varphi(y))] \subset U^*_{\varphi(y)}$, se tiene que $f(\varphi(y)) \in f[U^*_{\varphi(y)}] = V_y$ y dado que $f(\varphi(y)) = y$ (pues $\varphi(y) \in f^{-1}[y]$), concluimos que $y \in V_y$ para toda $y \in Y$. Por lo tanto, $\{V_y : y \in Y\}$ es una asignación de vecindades en Y. Como Y es un espacio D, entonces existe D subconjunto cerrado, discreto y no vacío de Y tal que $\{V_y : y \in D\}$ cubre a Y. Definamos al conjunto

$$D^* = \bigcup_{y \in D} D_{\varphi(y)}.$$

Observemos que si $y \in D$ entonces $D^* \cap f^{-1}\left[y\right] = D_{\varphi(y)}$ es cerrado en X. En efecto: Sea $x \in D^* \cap f^{-1}[y]$, entonces existe $d \in D$ tal que

$$x \in D_{\varphi(d)} \subseteq f^{-1}[f(\varphi(d))].$$

De esta manera, $x \in f^{-1}[f(\varphi(d))] \cap f^{-1}[y]$ por lo que $f(x) = f(\varphi(d)) = y$, y puesto que $\varphi(d) \in f^{-1}[d]$ se sigue que $d = y$. Asi, $x \in D_{\varphi(y)}$ y concluimos que $D^* \cap f^{-1}[y] \subseteq D_{\varphi(y)}$. Finalmente, como $f(\varphi(y)) = y$ entonces $f^{-1}[f(\varphi(y))] = f^{-1}[y]$ y así $D_{\varphi(y)} \subseteq D^* \cap f^{-1}[y]$. Por lo tanto, concluimos que $D^* \cap f^{-1}[y] = D_{\varphi(y)}$.

Como D es cerrado en Y y $\{y\}$ es cerrado en D, entonces $\{y\}$ es cerrado en Y por lo cual $f^{-1}[y]$ es cerrado en X, y puesto que $D_{\varphi(y)}$ es cerrado en $f^{-1}[f(\varphi(y))] = f^{-1}[y]$ concluimos que $D^* \cap f^{-1}[y] = D_{\varphi(y)}$ es cerrado en X para toda $y \in D$.

Por el Lema 2.18, $\{f^{-1}[y] : y \in D\}$ es una familia discreta de subconjuntos de X y como $D^* \cap f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[y]$ para toda $y \in D$, se sigue que la colección de subconjuntos cerrados $\{D^* \cap f^{-1}[y] : y \in D\}$ es discreta y entonces, por el Corolario 2.17, concluimos que

$$\bigcup_{y \in D} D^* \cap f^{-1}[y] = \bigcup_{y \in D} D_{\varphi(y)} = D^* \text{ es cerrado.}$$

Sea $x \in D^*$, entonces existe $y \in D$ tal que $x \in D_{\varphi(y)} \subseteq f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[D]$. Por el Caso 1 del Lema 2.18, sabemos que existe A vecindad abierta de x en X tal que para todo $z \in D$ se satisface que $A \cap f^{-1}[z] \neq \emptyset$ si y sólo si $z = y$. Por otro lado, como $D_{\varphi(y)}$ es un subconjunto discreto de $f^{-1}[f(\varphi(y))] = f^{-1}[y]$, existe B abierto en X tal que

$$\{x\} = (f^{-1}[y] \cap B) \cap D_{\varphi(y)} = B \cap D_{\varphi(y)}.$$

De esta manera, se tiene que

$$(B \cap A) \cap D^* = (B \cap A) \cap \bigcup_{y \in D} D_{\varphi(y)} \subseteq B \cap D_{\varphi(y)} = \{x\},$$

por lo que concluimos que D^* es un subconjunto discreto.

Finalmente, sea $x \in X$. Entonces existe $y \in D$ tal que $f(x) \in V_y$ y por consiguiente $x \in f^{-1}[V_y]$. Observemos que por definición de $U^*_{\varphi(y)}$ se cumple que

$$f^{-1}[V_y] = f^{-1}[f[U^*_{\varphi(y)}]] = U^*_{\varphi(y)},$$

y dado que

$$U^*_{\varphi(y)} \subseteq \bigcup_{d \in D_{\varphi(y)}} U_d \subseteq \bigcup_{z \in D^*} U_z,$$

concluimos que $x \in \bigcup_{z \in D^*} U_z$. Así la colección $\{U_x : x \in D^*\}$ cubre a X y D^* es un subconjunto cerrado, discreto y no vacío de X. Por lo tanto, X es un espacio D. ■

Corolario 2.20. Sean X un espacio topológico, Y un espacio D y $f : X \longrightarrow Y$ una función perfecta. Entonces $f^{-1}[Y] = X$ es un espacio D.

Demostración. Como f es una función perfecta, entonces f es suprayectiva, continua, cerrada y las fibras de f son compactas. Como las fibras de f son compactas entonces las fibras de f son espacios D, luego por el Teorema 2.19 se sigue el resultado. ■

Corolario 2.21. Si X es un espacio D y Y es un espacio compacto, entonces $X \times Y$ es un espacio D.

Demostración. Por la Proposición 1.46 la funcion proyección $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ es una función perfecta, y puesto que X es un espacio D concluimos por el Corolario 2.20 que $X \times Y$ es un espacio D. ■

El Corolario 2.21 motiva a preguntar si la propiedad D es en general una propiedad topológica finito-productiva. El siguiente ejemplo responde de manera negativa esta pregunta.

Ejemplo 2.22. Existen un espacio D Tychonoff y un espacio metrizable separable tales que su producto topológico no es un espacio D (ver [2]).

La siguiente pregunta natural se centra en saber cuándo la unión de una cantidad finita o infinita de espacios D es un espacio D. No es cierto en general que la unión infinita numerable de espacios D es un espacio D (el espacio del Ejemplo 2.10 es la unión numerable de subespacios D por ser σ-discreto), pero aún permanece abierta la pregunta de si en general la unión finita de espacios D es un espacio D. Los siguientes resultados muestran bajo qué condiciones sí sabemos que la unión de espacios D es un espacio D.

Proposición 2.23. Si $X = Y \cup Z$, donde Y es un subespacio cerrado D, y además cualquier subespacio de Z cerrado en X es un espacio D, entonces X es un espacio D.

Demostración. Sean $X = Y \cup Z$ como en las hipótesis del enunciado, $\tau(X)$ la topología de X, y para cada $A \subseteq X$ sea $\tau(A)$ la topología de subespacio de A respecto a X.

Sea $\varphi : X \longrightarrow \tau(X)$ una asignación de vecindades en X. Sea $\varphi_Y : Y \longrightarrow \tau(Y)$ la restricción de φ a Y (donde $\varphi_Y(x) = \varphi(x) \cap Y$). Entonces φ_Y es una asignación de vecindades en Y y como Y es un espacio D, sabemos que existe $D_1 \subseteq Y$ cerrado, discreto y no vacío en Y tal que

$$Y = \bigcup_{x \in D_1} \varphi_Y(x).$$

Puesto que Y es cerrado en X, entonces D_1 es un subespacio cerrado, discreto y no vacío de X. Si $X = \bigcup_{x \in D_1} \varphi(x)$, hemos terminado de probar que X es un espacio D. En caso contrario, sea

$$W := X \setminus \left(\bigcup_{x \in D_1} \varphi(x) \right).$$

Es claro que W es cerrado en X y que $W \subseteq Z$. Usando la hipótesis del enunciado, resulta que W es un espacio D. Sea $\varphi_W : W \longrightarrow \tau(W)$ la restricción de φ a W. Entonces φ_W es una asignación de vecindades en W por lo cual existe $D_2 \subseteq W$ cerrado, discreto y no vacío en W tal que

$$W = \bigcup_{x \in D_2} \varphi_W(x).$$

Como W es cerrado en X, resulta entonces que D_2 es cerrado, discreto y no vacío en X.

Sea $D = D_1 \cup D_2$. Sea $x \in D$. Supongamos que $x \in D_1$. Entonces existe A_x abierto en X tal que $A_x \cap D_1 = \{x\}$. Puesto que, por construcción, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ y D_2 es cerrado en X se tiene que

$$(A_x \cap (X \setminus D_2)) \cap D = (A_x \cap (X \setminus D_2)) \cap (D_1 \cup D_2) = (A_x \cap (X \setminus D_2)) \cap D_1 = A_x \cap D_1 = \{x\},$$

por lo cual $\{x\}$ es abierto en D. El caso en el que $x \in D_2$ es completamente análogo invirtiendo los papeles de D_1 y D_2.

Por lo tanto, D es un subconjunto cerrado, discreto y no vacío de X tal que $\{\varphi(x) : x \in D\}$ cubre a X. Así, X es un espacio D. ■

Corolario 2.24. Si $X = Y \cup Z$, donde Y y Z son espacios D y Y es cerrado en X, entonces X es un espacio D.

Demostración. Sea $X = Y \cup Z$ con Y y Z como en las hipótesis del enunciado. Sea $W \subseteq Z$ cerrado en X. Entonces $W \cap Z = W$ es cerrado en Z y, puesto que Z es un espacio D, W es un espacio D también. Así, como todo subespacio de Z cerrado en X es un espacio D, por la Proposición 2.23 se sigue que X es un espacio D. ■

Corolario 2.25. Si $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 2$, donde X_i es un subespacio cerrado D de X para $1 \leq i \leq n$, entonces X es un espacio D.

Demostración. Supongamos que $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1, X_2 son subespacios cerrados D de X. Por el Corolario 2.24 se sigue que X es un espacio D.

Supongamos que para $n \geq 2$ se satisface que si $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ con Y_i un subespacio cerrado D de Y para toda $1 \leq i \leq n$, entonces Y es un espacio D.

Sean $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ subespacios cerrados D de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i$. Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Como cada X_i es un subespacio cerrado D de Y, utilizando la hipótesis de inducción, se tiene que Y es un espacio D. Como $X = Y \cup X_{n+1}$ con Y y X_{n+1} subespacios cerrados D de X, concluimos que X es un espacio D.

Por el principio de inducción finita se sigue el resultado. ■

Lema 2.26. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ una asignación de vecindades en X y $\mathcal{L} = \{L_\alpha : \alpha < \Lambda\}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Definamos $\mathcal{D}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ para todo $\alpha \leq \Lambda$. Si $L_\alpha \subseteq X \setminus \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$ para cada $\alpha < \Lambda$ y $\overline{\mathcal{D}_\gamma} \subseteq \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\gamma\}$ para cada $\gamma \leq \Lambda$, entonces $\mathcal{L}$ es una familia discreta.

Demostración. Sea $x \in X$. Mostraremos que existe una vecindad abierta V_x de x tal que $|\{L_\alpha : V_x \cap L_\alpha \neq \emptyset, \alpha < \Lambda\}| = 1$.

Si $x \notin \overline{\mathcal{D}_\Lambda}$, definamos $V_x := X \setminus \overline{\mathcal{D}_\Lambda}$. Entonces es claro que V_x intersecta de manera vacía a L_α para todo $\alpha < \Lambda$.

Supongamos que $x \in \overline{\mathcal{D}_\Lambda}$ y sea $\gamma = mín\{\delta \leq \Lambda : x \in \overline{\mathcal{D}_\delta}\}$. Como $\overline{\mathcal{D}_\gamma} \subseteq \bigcup\{U_z : z \in \mathcal{D}_\gamma\}$, entonces existen $\gamma_1 < \gamma$ y $z \in L_{\gamma_1}$ tales que $x \in U_z \subseteq \bigcup\{U_z : z \in L_{\gamma_1}\}$. Por minimalidad de γ, $x \notin \overline{\mathcal{D}_{\gamma_1}}$. Sean $A = \bigcup\{U_z : z \in L_{\gamma_1}\}$ y $V_x = A \setminus \overline{\mathcal{D}_{\gamma_1}}$. Es claro que V_x es una vecindad abierta de x.

Sea $\alpha < \Lambda$ tal que $\alpha \neq \gamma_1$. Si $\alpha < \gamma_1$ entonces $L_\alpha \subseteq \mathcal{D}_{\gamma_1} \subseteq \overline{\mathcal{D}_{\gamma_1}}$, por lo cual $V_x \cap L_\alpha = \emptyset$. Si $\gamma_1 < \alpha$ entonces

$$L_\alpha \subseteq X \setminus \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\} \subseteq X \setminus A,$$

por lo cual $V_x \cap L_\alpha = \emptyset$. De esta manera, V_x intersecta de manera no vacía a lo más a L_{γ_1}. Por lo tanto $\mathcal{L}$ es una familia discreta. ■

Teorema 2.27. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\Lambda \geq 2$ un ordinal y sea $\{F_\beta : \beta < \Lambda\}$ una familia de subespacios D de X tales que $X = \bigcup_{\beta<\Lambda} F_\beta$ y, para cada $\alpha < \Lambda$, el conjunto $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ es cerrado. Entonces X es un espacio D.

Demostración. Sean X un espacio topológico, $\Lambda \geq 2$ un ordinal y $\{F_\alpha : \alpha < \Lambda\}$ una familia de subespacios D de X como en el enunciado del teorema. Sea $\{U_x : x \in X\}$ una asignación de vecindades de X. Usaremos inducción transfinita para construir una familia de subespacios cerrados y discretos (en X) $\{D_\alpha : \alpha < \Lambda\}$ y $\mathcal{D}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ para cada $\alpha < \Lambda$, tales que

$$D_\alpha \subseteq F_\alpha \setminus \left(\bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}\right) \subseteq \bigcup\{U_x : x \in D_\alpha\},$$

para cada $\alpha < \Lambda$.

Definimos $\mathcal{D}_0 := \emptyset$. Como $F_0 = \bigcup_{\beta<1} F_\beta$ es un subespacio D cerrado de X y la colección $\{U_x \cap F_0 : x \in F_0\}$ es una asignación de vecindades en F_0, existe $D_0 \subseteq F_0$ cerrado, discreto y no vacío tal que

$$D_0 \subseteq F_0 \setminus \left(\bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_0\}\right) = F_0 = \bigcup\{U_x \cap F_0 : x \in D_0\} \subseteq \bigcup\{U_x : x \in D_0\}.$$

Observemos que como F_0 es cerrado en X, entonces D_0 es cerrado y discreto en X.

Supongamos que $0 < \alpha < \Lambda$ es tal que D_β ha sido definido para todo $\beta < \alpha$. Sea $\mathcal{D}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$. Si $F_\alpha \subseteq \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$ definamos a $D_\alpha := \emptyset$. Es claro entonces que

$$\emptyset = D_\alpha \subseteq F_\alpha \setminus \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\} \subseteq \bigcup\{U_x : x \in D_\alpha\} = \emptyset,$$

y que D_α es cerrado y discreto en X.

Supongamos que $F_\alpha \nsubseteq \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$. Sea $A := \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$. Entonces $F_\alpha \setminus A$ es un subespacio cerrado de F_α y por tanto es un subespacio D de F_α. Puesto que la colección $\{U_x \cap (F_\alpha \setminus A) : x \in F_\alpha \setminus A\}$ es una asignación de vecindades en $F_\alpha \setminus A$, existe D_α cerrado, discreto y no vacío tal que

$$D_\alpha \subseteq F_\alpha \setminus A = \bigcup\{U_x \cap (F_\alpha \setminus A) : x \in D_\alpha\} \subseteq \bigcup\{U_x : x \in D_\alpha\}.$$

Definamos $B := \bigcup_{\beta\leq\alpha} F_\beta$. Observemos que $F_\alpha \setminus A = B \setminus A$. En efecto: Es claro que $F_\alpha \setminus A \subseteq B \setminus A$. Sea $x \in B \setminus A \subseteq B$. Entonces existe $\beta \leq \alpha$ tal que $x \in F_\beta$. Supongamos, para generar una contradicción, que $\beta < \alpha$. Puesto que

$$F_\beta = \Big(F_\beta \setminus \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\beta\}\Big) \cup \Big(F_\beta \cap \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\beta\}\Big) \subseteq \bigcup\{U_x : x \in B\},$$

entonces

$$x \in X \setminus A \subseteq X \setminus \bigcup\{U_x : x \in B\} \subseteq X \setminus F_\beta,$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, $x \in F_\alpha$ de donde se sigue que $B \setminus A \subseteq F_\alpha \setminus A$.

Si $\alpha+1 < \Lambda$ entonces $B = \bigcup_{\beta<\alpha+1} F_\beta$ es un conjunto cerrado en X. Si $\alpha+1 = \Lambda$ entonces $B = X$ el cual nuevamente es un conjunto cerrado de X. Así, $F_\alpha \setminus A = B \setminus A$ es cerrado en X lo cual implica que D_α es cerrado y discreto en X.

Por el principio de inducción transfinita, hemos definido a la colección $\{D_\alpha : \alpha < \Lambda\}$ con las propiedades deseadas. Definamos $D := \bigcup_{\alpha<\Lambda} D_\alpha$ y $\mathcal{D} = \{U_x : x \in D\}$.

Sean $x \in X$ y $\alpha < \Lambda$ tal que $x \in F_\alpha$. Como $F_\alpha \subseteq \bigcup\{U_x : x \in \bigcup_{\beta\leq\alpha} D_\beta\} \subseteq \bigcup\mathcal{D}$, concluimos que $\mathcal{D}$ cubre a X. Es claro además que $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\alpha \subseteq \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$ para cualquier $\alpha < \Lambda$. Observemos entonces que

$$\overline{\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta} \subseteq \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta} = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \subseteq \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$$

para cualquier $\alpha \leq \Lambda$. Puesto que $D_\alpha \subseteq X \setminus \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\alpha\}$ para cada $\alpha < \Lambda$ y además $\overline{\mathcal{D}_\gamma} \subseteq \bigcup\{U_x : x \in \mathcal{D}_\gamma\}$, entonces por el Lema 2.26 se sigue que $\{D_\alpha : \alpha < \Lambda\}$ es una familia discreta en X.

Puesto que D_α es un subconjunto cerrado en X para cualquier $\alpha < \Lambda$, y $\{D_\alpha : \alpha < \Lambda\}$ es una familia discreta en X, entonces, por el Corolario 2.17, se sigue que D es un subconjunto cerrado de X.

Sea $x \in D$. Entonces existe $\alpha < \Lambda$ tal que $x \in D_\alpha$. Como $\{D_\alpha : \alpha < \Lambda\}$ es una familia discreta, existe V vecindad abierta de x en X tal que $V \cap D_\beta = \emptyset$ si $\beta \neq \alpha$. Por otro lado, como D_α es discreto en X, existe U abierto tal que $U \cap D_\alpha = \{x\}$. Entonces

$$\{x\} \subseteq (U \cap V) \cap D \subseteq U \cap D_\alpha = \{x\}$$

por lo cual $\{x\}$ es un conjunto abierto en D.

Por lo tanto, D es un subconjunto cerrado, discreto y no vacío de X tal que $\mathcal{D}$ cubre a X. Entonces X es un espacio D. ■

Corolario 2.28. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\Lambda \geq 2$ un ordinal y sea $\{F_\beta : \beta < \Lambda\}$ una familia de subespacios D cerrados de X tales que $X = \bigcup_{\beta<\Lambda} F_\beta$ y para cada $\alpha < \Lambda$ el conjunto $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ es cerrado. Entonces X es un espacio D.

Corolario 2.29. Si X es la unión numerable infinita de subespacios D cerrados, entonces X es un espacio D.

Demostración. Sea $\{F_n : n < \omega\}$ una familia numerable infinita de subespacios D cerrados de X tal que $X = \bigcup_{n<\omega} F_n$. Como para todo $n < \omega$ resulta que la unión $\bigcup_{m<n} F_m$ es cerrado (pues la unión finita de subconjuntos cerrados es cerrado), entonces por el Corolario 2.28 se sigue que X es un espacio D. ■

Sea X un espacio topológico. Decimos que $F \subseteq X$ es un *subconjunto* F_σ de X si existe una familia numerable de subconjuntos cerrados de X, $\{F_n : n < \omega\}$, tal que

$$F = \bigcup_{n<\omega} F_n.$$

Corolario 2.30. Todo subconjunto F_σ de un espacio D es un subespacio D.

Demostración. Sean X un espacio D y F un subconjunto F_σ de X. Entonces existe una familia numerable de subconjuntos cerrados de X, $\{F_n : n < \omega\}$, tal que $F = \bigcup_{n<\omega} F_n$.

Como X es un espacio D, cada F_n es un subespacio D de X (y por tanto de F). Por lo tanto, en virtud del Corolario 2.29, se sigue que F es un subespacio D de X. ■

Corolario 2.31. Todo espacio topológico numerable es un espacio D

Demostración. Sea X un espacio topológico numerable. Sea $x \in X$. Puesto que todo espacio discreto es un espacio D y todo subconjunto finito de un espacio T_1 es un subconjunto cerrado, entonces $\{x\}$ es un espacio D. De esta manera, $\{x\}$ es un subespacio D de X para todo $x \in X$. Si $X = \{x_n : n < \omega\}$ es una enumeración de X, entonces

$$X = \bigcup_{n<\omega} \{x_n\},$$

por lo que usando el Corolario 2.29 concluimos que X es un espacio D. ■

Un espacio topológico X está *dominado* por la familia $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha<\Lambda}$ de subconjuntos de X si $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si existe una familia $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$ que cubre a A y además A tiene intersección cerrada con cada elemento de $\mathcal{K}_1$.

Corolario 2.32. Si un espacio X está dominado por una colección $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha<\Lambda}$ de subespacios D cerrados, entonces X es un espacio D.

Demostración. Sea X un espacio topológico dominado por una colección $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha<\Lambda}$ de subespacios D cerrados. Puesto que X es cerrado, existe $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{K}$ que cubre a X, lo cual implica que $\mathcal{K}$ cubre a X.

Sea $\alpha < \Lambda$ y consideremos al conjunto $\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$. Si $\mathcal{K}_\alpha := \{K_\beta : \beta < \alpha\}$ entonces es claro que $\mathcal{K}_\alpha \subset \mathcal{K}$ cubre a $\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$. Dado $\gamma < \alpha$ resulta que

$$\left(\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta\right) \cap K_\gamma \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta \cap K_\gamma = K_\gamma,$$

por lo cual la intersección de $\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ con cualquier elemento de $\mathcal{K}_\alpha$ es cerrado. Así $\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ es cerrado en X.

Como $\mathcal{K}$ es una colección de subespacios D cerrados que cubre a X y además $\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ es cerrado para todo $\alpha < \Lambda$, entonces por el Corolario 2.28 se sigue que X es un espacio D. ■

Sea X un espacio topológico. Una colección $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X es *hereditariamente preservadora de cerradura* si, cada que $K_H \subseteq H$ es escogido para cada $H \in \mathcal{H}$, la colección resultante $\mathcal{K} = \{K_H : H \in \mathcal{H}\}$ es preservadora de cerradura.

Corolario 2.33. Si $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha<\Lambda}$ es una colección hereditariamente preservadora de cerradura de X, donde cada H_α es un subespacio D cerrado de X, y $X = \bigcup_{\alpha<\Lambda} H_\alpha$, entonces X es un espacio D.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ cerrado. Entonces $\mathcal{H}$ cubre a A y además $A \cap H$ es un subconjunto cerrado de X para cualquier $H \in \mathcal{H}$.

Supongamos que existe $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ que cubre a A y además $A \cap H$ es cerrado para cualquier $H \in \mathcal{H}_1$. Definamos la colección $\mathcal{K} := \{K_H : H \in \mathcal{H}\}$ como

$$K_H = \begin{cases} A \cap H, & \text{si } H \in \mathcal{H}_1, \\ \emptyset, & \text{si } H \notin \mathcal{H}_1. \end{cases}$$

Como $\mathcal{H}$ es una colección hereditariamente preservadora de cerradura, entonces $\mathcal{K}$ es preservadora de cerradura, por lo cual el conjunto

$$A = \bigcup_{H\in\mathcal{H}_1} A \cap H = \bigcup \mathcal{K}$$

es cerrado en X.

Así, resulta que X está dominado por la familia $\mathcal{H}$ de subespacios D cerrados y por tanto, usando el Corolario 2.32, se sigue que X es un espacio D. ■

Ejemplo 2.34. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ donde τ_e es la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Para toda $k \in \mathbb{N}$ sea $\overline{B_k}$ la bola cerrada centrada en $\overline{0}$ y radio k. Entonces $\overline{B_k}$ es un subespacio compacto y T_1 de $\mathbb{R}^n$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y por tanto $\overline{B_k}$ es un subespacio D cerrado de $\mathbb{R}^n$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B_n},$$

por el Corolario 2.29 se tiene que $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ es un espacio D.

2.2 Espacios semiestratificables y la propiedad D

El Ejemplo 2.34 muestra que todo espacio vectorial normado de dimensión finita equipado con la métrica provista por la norma es un espacio D. Como hemos venido adelantando, este resultado se puede generalizar al hecho de que todo espacio topológico metrizable es un espacio D, y una de las maneras para demostrar este hecho es utilizando la noción de espacio semiestratificable y espacio semimétrico.

Un espacio semimétrico X es un espacio topológico en el cual se puede definir una semimétrica, la cual es una función que generaliza la noción de métrica, pero en lugar de pedir que se satisfaga la desigualdad del triángulo pedimos que los elementos x de la clausura de cualquier conjunto $M \subseteq X$ se caractericen a través de la igualdad $\text{\it ínf}\{d(x,y) : y \in M\} = 0$.

La noción de espacio semiestratificable fue introducida por E. A. Michael como una generalización de los espacios semimétricos. En [12], G. D. Creede demostró, entre varias cosas, que los espacios semiestratificables se pueden caracterizar a través de una familia numerable de funciones, que todo subconjunto de un espacio semiestratificable es semiestratificable, que la unión finita de subconjuntos cerrados semiestratificables es semiestratificable, que la imagen cerrada de un espacio semiestratificable es semiestratificable, que el producto numerable de espacios semiestratificables es semiestratificable y que un espacio topológico T_1 es un espacio semimétrico si y sólo si es un espacio semiestratificable y primero numerable.

En [6] se demuestra que todo espacio semiestratificable es un espacio D, de donde se sigue que cualquier espacio métrico es un espacio D. A continuación presentaremos las definiciones y resultados necesarios para probar este interesante hecho.

Definición 2.35. Un espacio topológico X se llama *espacio semiestratificable* si, para cualquier $U \subseteq X$ subconjunto abierto de X, existe una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de X tales que se cumple lo siguiente:

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$.

(b) $U_n \subseteq V_n$ siempre que $U \subseteq V$, donde $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión asignada al abierto V.

A la asignación $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ la llamaremos una *semiestratificación* del espacio X siempre que satisfaga las condiciones (a) y (b) para cualquier subconjunto abierto de X.

Observación 2.36. Si (X, τ) es un espacio topológico semiestratificable, entonces existe una semiestratificación $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Resulta entonces que la asignación $U \mapsto \{U_n'\}_{n=1}^{\infty}$, con $U_n' = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, también es una semiestratificación del espacio X. Por lo tanto, si X es un espacio semiestratificable, siempre podemos suponer que existe una semiestratificación $U \mapsto \{U_n'\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $U_i' \subseteq U_j'$ para $i \leq j$.

Teorema 2.37. Un espacio topológico (X, τ) es un espacio semiestratificable si y sólo si existe una colección de funciones $\{g_i : X \longrightarrow \tau : i \in \mathbb{N}\}$ tales que

1) $\bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x) = \overline{\{x\}}$ para cada $x \in X$.

2) Si $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ es tal que $y \in g_i(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que X es un espacio semiestratificable y que $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una semiestratificación tal que, para todo $U \in \tau$, $U_i \subseteq U_j$ siempre que $i \leq j$.

Sea $x \in X$. Como X es semiestratificable y $X \setminus \overline{\{x\}}$ es un conjunto abierto, entonces tiene una asignación $X \setminus \overline{\{x\}} \mapsto \{(X \setminus \overline{\{x\}})_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos cerrados como en la Defindción 2.35. Puesto que lo anterior ocurre para todo $x \in X$, definamos a la familia de funciones $\{g_i : X \longrightarrow \tau : i \in \mathbb{N}\}$ tales que $g_i(x) = X \setminus (X \setminus \overline{\{x\}})_i$ para todo $x \in X$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Observemos que, si $x \in X$, se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus (X \setminus \overline{\{x\}})_i = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus \overline{\{x\}})_i \right) = X \setminus (X \setminus \overline{\{x\}}) = \overline{\{x\}},$$

por lo cual se cumple la propiedad 1) del enunciado del teorema.

Para verificar que se cumple la propiedad 2), sean $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que $y \in g_i(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Supongamos, para generar una contradicción, que la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ no converge a y. Entonces, existe U vecindad abierta de y tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que $x_m \notin U$. Sea $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ la asignación de conjuntos cerrados dada por la definición de espacio semiestratificable. Puesto que $y \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in U_n$. Sea $m \geq n$ tal que $x_m \notin U$, entonces $U \subseteq X \setminus \overline{\{x_m\}}$. De esta manera

$$y \in U_n \subseteq U_m \subseteq (X \setminus \overline{\{x_m\}})_m,$$

pero por hipótesis $y \in g_m(x_m) = X \setminus (X \setminus \overline{\{x_m\}})_m$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que existe una colección de funciones $\{g_i : X \longrightarrow \tau : i \in \mathbb{N}\}$ que satisfacen las propiedades 1) y 2) del enunciado del teorema. Para cada conjunto abierto U y cada $n \in \mathbb{N}$ definamos al conjunto

$$U_n := X \setminus \left(\bigcup_{x \in X \setminus U} g_n(x) \right) \subseteq X \setminus \left(\bigcup_{x \in X \setminus U} \{x\} \right) = U.$$

Sea U un subconjunto abierto de X. Es claro que U_n es un subconjunto cerrado de X contenido en U para toda $n \in \mathbb{N}$. Observemos que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(X \setminus \left(\bigcup_{x \in X \setminus U} g_i(x) \right) \right) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{x \in X \setminus U} g_i(x) \right).$$

Sea $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{x \in X \setminus U} g_i(x) \right)$. Entonces $y \in \bigcup_{x \in X \setminus U} g_i(x)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ por lo cual, para toda $i \in \mathbb{N}$, existe $x_i \in X \setminus U$ tal que $y \in g_i(x_i)$. De esta manera la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es tal que

$y \in g_i(x_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ por lo cual, usando 2), se sigue que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y. Como $X \setminus U$ es un subconjunto cerrado, entonces $y \in X \setminus U$ por lo cual $y \in \overline{\{y\}} \subseteq \bigcup_{x \in X \setminus U} \overline{\{x\}}$. Por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{x \in X \setminus U} g_i(x)\right) \subseteq \bigcup_{x \in X \setminus U} \overline{\{x\}}$. Así

$$U = X \setminus (X \setminus U) = X \setminus \overline{\bigcup_{x \in X \setminus U} \{x\}} \subseteq X \setminus \bigcup_{x \in X \setminus U} \overline{\{x\}} \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{x \in X \setminus U} g_i(x) \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

por lo cual concluimos que $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Así, $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ para todo $U \in \tau$.

Sean U y V dos subconjuntos abiertos en X tales que $U \subseteq V$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que $\bigcup_{x \in X \setminus V} g_n(x) \subseteq \bigcup_{x \in X \setminus U} g_n(x)$ de donde se sigue que $U_n \subseteq V_n$.

De esta manera, la asignación $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una semiestratificación del espacio X y por tanto X es un espacio semiestratificable. ■

Definición 2.38. Un espacio topológico X se llama *semimétrico* si existe una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en X tal que, para todo $x, y \in X$, se cumple que

1. $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. Si $M \subseteq X$, entonces $x \in \overline{M}$ si y sólo si *ínf*$\{d(x, y) : y \in M\} = 0$.

A la función d se le llama *semimétrica*.

Teorema 2.39. Sea (X, τ) un espacio T_1. Entonces X es un espacio semimétrico si y sólo si es un espacio primero numerable y semiestratificable.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio T_1.

$\Rightarrow \rfloor$ Supongamos que X es un espacio semimétrico y sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una semimétrica asociada a X. Para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ definamos a los conjuntos

1. $A_n(x) = \{y \in X : d(y, x) \geq \frac{1}{n}\}$.
2. $B_{\frac{1}{n}}(x) = X \setminus A_n(x)$.

Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \notin \overline{A_n(x)}$ (pues $\frac{1}{n} \leq$ *ínf*$\{d(x, y) : y \in A_n(x)\}$) por lo cual existe $U_n(x)$ vecindad abierta de x tal que $U_n(x) \cap A_n(x) = \emptyset$. De esta manera, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n(x)$ vecindad abierta de x tal que $U_n(x) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x)$. Sea U un conjunto abierto tal que $x \in U$. Entonces $x \notin X \setminus U$ por lo cual $0 < r = inf\{d(x, y) : y \in X \setminus U\}$ de donde se sigue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < r$ y por tanto $B_{\frac{1}{m}}(x) \subseteq U$. Así, $U_m(x) \subseteq B_{\frac{1}{m}}(x) \subseteq U$. Por lo tanto $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local numerable de x y como x es arbitrario concluimos que X es un espacio primero numerable.

Sea C un subconjunto cerrado de X. Definamos a $C_n = \bigcup_{x\in C} U_n(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in C$ entonces $z \in U_n(z) \subseteq C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo cual $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. De esta manera, $C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Entonces existe $x_i \in C$ tal que $x \in U_i(x_i) \subseteq B_{\frac{1}{i}}(x_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ por lo cual $d(x, x_i) < \frac{1}{i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$0 \leq \acute{\imath}nf\{d(x,y) : y \in C\} \leq \acute{\imath}nf\{d(x,x_i) : i \in \mathbb{N}\} = 0,$$

de donde concluimos que $x \in C$. Así, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C$.

Entonces, a todo subconjunto cerrado C le podemos asociar una colección $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos tales que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ y además, si $B \subseteq C$ es cerrado, entonces

$$B_n = \bigcup_{x\in B} U_n(x) \subseteq \bigcup_{x\in C} U_n(x) = C_n.$$

Tomando complementos, resulta que la asignación $U \mapsto \{X \setminus (X \setminus U)_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una semiestratificación. Por lo tanto X es un espacio semiestratificable.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que X es un espacio primero numerable y semiestratificable. Entonces, para toda $x \in X$ existe $\mathcal{B}(x) = \{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ base local numerable de x decreciente. Como X es semiestratificable, existe una colección de funciones $\{f_i : X \longrightarrow \tau : i \in \mathbb{N}\}$ tales que

1. $\bigcap_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \overline{\{x\}} = \{x\}$ para cada $x \in X$.
2. Si $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ es tal que $y \in f_i(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces la sucesion $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y.

Definamos a $g_i : X \longrightarrow \tau$ como $g_i(x) = \bigcap_{j=1}^{i} (f_j(x) \cap B_i(x))$ para todo $x \in X$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Observemos que la colección $\{g_i : X \longrightarrow \tau : i \in \mathbb{N}\}$ satisface las siguientes propiedades:

(a) $\{g_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es una base local numerable decreciente de x para toda $x \in X$. En efecto: Sea $x \in X$ y U subconjunto abierto de X tales que $x \in U$. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_i(x) \subseteq U$ por lo cual $x \in g_i(x) \subseteq B_i(x) \subseteq U$. Así, concluimos que $\{g_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es una base local numerable. Sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i < j$. Entonces $g_j(x) = \bigcap_{k=1}^{j} (f_k(x) \cap B_j(x)) \subseteq \bigcap_{k=1}^{i} (f_k(x) \cap B_i(x)) = g_i(x)$ por lo cual $\{g_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es no creciente.

(b) Sea $x \in X$. Entonces $\{x\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \{x\}$. En particular, si $y \neq x$ entonces $y \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} g_i(x)$.

(c) Sean $y \in X$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ tales que $y \in g_i(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $y \in f_i(x_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ por lo cual $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y.

Definamos a $\Delta X := \{(x,x) : x \in X\}$ como la diagonal de X. Sea $m : (X \times X) \setminus \Delta X \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $m(x,y) = min\{n \in \mathbb{N} : y \notin g_n(x)\}$. Observemos que por (b) la función m está bien definida y además $m(x,y) \geq 1$ para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$. Sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d(x,y) = \begin{cases} m\acute{\imath}n\left\{\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)}\right\}, & si \quad x \neq y; \\ 0, & si \quad x = y. \end{cases}$$

Probaremos que d es una semimétrica en X. Es claro que $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$. Por definición $d(x,y) = 0$ siempre que $x = y$. Si $d(x,y) = 0$ y suponemos, para generar una contradicción, que $x \neq y$ entonces $mín\left\{\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)}\right\} = 0$ lo cual es imposible pues $\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)} > 0$. Entonces $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Sea $A \subseteq X$. Probaremos que $x \in \overline{A}$ si y sólo si $ínf\{d(x,y) : y \in A\} = 0$.

Supongamos que $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$ entonces es claro que $ínf\{d(x,y) : y \in A\} = 0$. Supongamos que $x \in der(A) \setminus A$. Como X es primero numerable, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ una sucesión tal que $x_n \to x$. Sea $M > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M < n$. Puesto que $g_n(x)$ es una vecindad abierta de x entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $m \geq k$, $x_m \in g_n(x)$. Como $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es no creciente, se tiene que $m(x, x_m) > n > M$ para toda $m \geq k$. Como $M > 0$ era arbitrario, concluimos que $m(x, x_n) \to \infty$ y como $0 \leq d(x, x_n) \leq \frac{1}{m(x,x_n)}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ concluimos que $d(x, x_n) \to 0$ por lo cual $ínf\{d(x,y) : y \in A\} = 0$.

Supongamos ahora que $x \in X$ es tal que $ínf\{d(x,y) : y \in A\} = 0$ y supongamos, para generar una contradicción, que $x \notin \overline{A}$. Entonces existe V vecindad abierta de x tal que $V \cap A = \emptyset$. Puesto que $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local decreciente de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g_N(x) \cap A = \emptyset$ por lo cual $y \notin g_n(x)$ para toda $n \geq N$, $y \in A$, y por tanto $m(x,y) \leq N$ para toda $y \in A$. De esta manera $0 < \frac{1}{N+m} \leq m(x,y)$ para toda $y \in A$ y $m \in \mathbb{N}$ por lo cual, para toda $m \in \mathbb{N}$, existe $y_m \in A$ tal que $0 < \frac{1}{m(y_m,x)} < \frac{1}{N+m}$. Puesto que $m < N + m < m(y_m, x)$, entonces $x \in g_m(y_m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$ por lo que, usando (c), $y_m \to x$ lo cual es imposible pues estamos suponiendo que $x \notin \overline{A}$. De esta manera $x \in \overline{A}$.

Por lo tanto, la función d es una semimétrica y así X es un espacio semimétrico. ■

Corolario 2.40. Todo espacio metrizable es un espacio semiestratificable.

Demostración. Sea X un espacio metrizable y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una métrica que genera su topología. Entonces X es un espacio T_1 y, puesto que la métrica d es una semimétrica, entonces X es un espacio T_1 semimétrico y por tanto es semiestratificable ■

Teorema 2.41. Si (X, τ) es un espacio semiestratificable entonces X es un espacio D.

Demostración. Dado (X, τ) un espacio semiestratificable, sea $U \to \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una semiestratificación de X tal que $U_i \subseteq U_j$ si $i < j$ para todo $U \in \tau$.

Sea $\varphi : X \longrightarrow \tau$ una asignación de vecindades en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos a los conjuntos $\mathcal{U}_n := \{\varphi(x) : x \in \varphi(x)_n\}$ y $X_n := \{x \in X : \varphi(x) \in \mathcal{U}_n\}$. Es claro que $X_i \subseteq X_j$ siempre que $i < j$ y que además $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Sea $j_0 = mín\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{U}_n \neq \emptyset\}$. Construiremos un ordinal γ_0 y una sucesión $\{\varphi(x_\alpha)\}_{\alpha<\gamma_0}$ tal que para cada $\alpha < \gamma_0$ se tiene que $\varphi(x_\alpha) \in \mathcal{U}_{j_0}$ (de donde se sigue que $x_\alpha \in X_{j_0}$) y

1) $\alpha < \beta < \gamma_0$ implica que $x_\beta \notin \varphi(x_\alpha)$,

2) $X_{j_0} \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma_0} \varphi(x_\alpha)$.

Sea $x_0 \in X_{j_0}$. Entonces $\varphi(x_0) \in \mathcal{U}_{j_0}$ y 1) se cumple de manera trivial. Si $X_{j_0} \subseteq \varphi(x_0)$, entonces terminamos haciendo $\gamma_0 = 1$. En caso contrario, tomemos $x_1 \in X_{j_0} \setminus \varphi(x_0)$. Supongamos que para un ordinal γ hemos construido a la sucesión $\{\varphi(x_\alpha)\}_{\alpha<\gamma}$ tal que $\varphi(x_\alpha) \in \mathcal{U}_{j_0}$ para todo $\alpha < \gamma$ y además $\alpha < \beta < \gamma$ implica que $x_\beta \notin \varphi(x_\alpha)$. Si $X_{j_0} \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} \varphi(x_\alpha)$, entonces $\gamma_0 = \gamma$ y terminamos la constucción. En caso contrario, sea $x_\gamma \in X_{j_0} \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma} \varphi(x_\alpha)$. Como $x_\gamma \in X_{j_0}$, entonces $\varphi(x_\gamma) \in \mathcal{U}_{j_0}$. Así, $x_\gamma \in \bigcup_{\alpha<\gamma+1} \varphi(x_\alpha)$. Siguiendo de esta forma, en algún momento debemos encontrar un ordinal γ_0 que satisfaga 1) y 2), con $\gamma_0 < |X_{j_0}|^+$, donde $|X_{j_0}|^+$ es el número cardinal sucesor de $|X_{j_0}|$.

Observemos que la construcción anterior nos proporciona un conjunto $D_0 = \{x_\alpha : \alpha < \gamma_0\}$. Observemos también que este es un conjunto cerrado, discreto y no vacío. En efecto: sea $z \in \overline{D_0}$. Puesto que

$$D_0 \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma_0} \varphi(x_\alpha)_{j_0} \subseteq \left(\bigcup_{\alpha<\gamma_0} \varphi(x_\alpha) \right)_{j_0} \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma_0} \varphi(x_\alpha),$$

entonces $\overline{D_0} \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma_0} \varphi(x_\alpha)$. Sea $\alpha_0 = \textit{mín}\{\alpha < \gamma_0 : z \in \varphi(x_\alpha)\}$. Definamos al conjunto

$$V := \varphi(x_{\alpha_0}) \setminus \left(\bigcup_{\alpha<\alpha_0} \varphi(x_\alpha) \right)_{j_0}.$$

Por la propiedad 1) y el hecho de que α_0 es un mínimo, se sigue que V es una vecindad abierta de z tal que $V \cap D_0 = \{x_{\alpha_0}\}$. Si sucediera que $z \notin D_0$, entonces $V \setminus \{x_{\alpha_0}\}$ es una vecindad abierta de z que tiene intersección vacía con D_0 lo cual contradice que $z \in \overline{D_0}$, por lo que $z \in D_0$. Por lo tanto $z \in D_0$ implicando que $D_0 = \overline{D_0}$ y además la vecindad V de z construida en este párrafo muestra que D_0 es discreto.

Definamos a $X_0^\# = \bigcup_{\alpha<\gamma_0} \varphi(x_\alpha)$. Sea $j_1 = \textit{mín}\{n \in \mathbb{N} : X_{j_1} \setminus X_0^\# \neq \emptyset\}$ y consideremos a la familia de subconjuntos $\mathcal{U}_1^\# = \{\varphi(x) \in \mathcal{U}_{j_1} : x \in X_{j_1} \setminus X_0^\#\}$. Nuevamente, utilizando inducción transfinita, podemos encontrar un ordinal γ_1 y una sucesión $\{\varphi(x_\alpha)\}_{\alpha<\gamma_1}$ tal que $\varphi(x_\alpha) \in \mathcal{U}_1^\#$ para toda $\alpha < \gamma_1$ y además

1. $\alpha < \beta < \gamma_1$ implica que $x_\beta \notin \varphi(x_\alpha)$.
2. $X_{j_1} \setminus X_0^\# \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma_1} \varphi(x_\alpha)$.

Observemos que el conjunto $D_1 = \{x_\alpha : \alpha < \gamma_1\}$ es un subconjunto cerrado, discreto y no vacío de X y que si $X_1^\# = \bigcup_{\alpha<\gamma_1} \varphi(x_\alpha)$ entonces $X_{j_1} \subseteq X_0^\# \cup X_1^\#$.

Luego, utilizando inducción finita, para cada $i < \omega$ existe $j_i < \omega$ y D_i subconjunto cerrado, discreto y no vacío de X, tales que:

(a) $D_i \subseteq X_{j_i}$ para toda $i < \omega$.

(b) $X_{j_i} \subseteq \bigcup \{\varphi(x) : x \in \bigcup_{k=0}^{i} D_k\}$ para toda $i < \omega$.

(c) $D_{i+1} \cap \left(\bigcup \{\varphi(x) : x \in \bigcup_{k=0}^{i} D_k\}\right) = \emptyset$ para toda $i < \omega$.

Sean $D = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i$, $x \in X$, $n_0 = mín\{n < \omega : x \in X_n\}$ y $j_i = mín\{n < \omega : X_{n_0} \subseteq X_{j_n}\}$. Entonces $x \in X_{j_i}$ por lo cual $x \in \varphi(x_\alpha)$ para algún $x_\alpha \in \bigcup_{k=0}^{i} D_k \subseteq D$. Así, $\{\varphi(x) : x \in D\}$ cubre a X.

Mostraremos que $\{D_n : n < \omega\}$ es una familia discreta.

Sean $z \in X$ y n el mínimo ordinal tal que z pertenece a algún $\varphi(x_\beta)$ con $x_\beta \in D_n$, y sea $x_\alpha \in D_n$ el menor elemento de D_n tal que $z \in \varphi(x_\alpha)$. Definamos al subconjunto $V = (\varphi(x_\alpha) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} D_k) \cup \{x_\alpha\}$. Como D_k es cerrado y discreto para toda $k \leq n$ entonces $D_k \setminus \{x_\alpha\}$ es cerrado en X para toda $k \leq n$, y por tanto $X \setminus (D_k \setminus \{x_\alpha\}) = (X \setminus D_k) \cup \{x_\alpha\}$ es abierto para toda $k \leq n$. Así

$$\bigcap_{k=0}^{n} \varphi(x_\alpha) \cap ((X \setminus D_k) \cup \{x_\alpha\}) = \left(\bigcap_{k=0}^{n} \varphi(x_\alpha) \setminus D_k\right) \cup \{x_\alpha\} = \left(\varphi(x_\alpha) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} D_k\right) \cup \{x_\alpha\},$$

por lo cual V es un conjunto abierto. Además $z \in V$. En efecto: Por construcción resulta que $z \in \varphi(x_\alpha)$ y $z \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$. Si $z \notin D_n$ entonces $z \in V$; si sucediera que $z \in D_n$ entonces $z \in \varphi(z)$ por lo cual necesariamente $z = x_\alpha \in V$ (pues en caso contrario, existiría $\beta > \alpha$ tal que $z = x_\beta$ por lo cual $z = x_\beta \notin \varphi(x_\alpha)$ lo cual es una contradicción). Así, concluimos que V es una vecindad abierta de z.

Por construcción, $V \cap \bigcup_{k=0}^{n} D_k = \{x_\alpha\}$. Además $V \subseteq \varphi(x_\alpha) \subseteq \bigcup \{\varphi(x) : x \in \bigcup_{k=0}^{n} D_k\}$ por lo que, utilizando la propiedad c), se sigue que $V \cap \left(\bigcup_{n<m} D_m\right) = \emptyset$ implicando que $V \cap D = \{x_\alpha\}$. Esto muestra que D es la unión de una familia discreta de subconjuntos cerrados de X y por tanto D es cerrado. Asimismo, para todo $x \in D$ la vecindad abierta $V_x = (\varphi(x) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} D_k) \cup \{x\}$ es tal que $V \cap D = \{x\}$ por lo cual concluimos que D es discreto.

Por lo tanto, D es un subconjunto cerrado, discreto y no vacío de X tal que $\{\varphi(x) : x \in D\}$ cubre a X, por lo que X es un espacio D. ■

Corolario 2.42. Si X es un espacio metrizable entonces X es un espacio D.

2.3 Espacios Lindelöf$-\Sigma$ y la propiedad D

Como indica la Proposición 2.2, la propiedad D es una generalización del concepto de espacio compacto en los espacios topológicos T_1. Otra generalización, bien conocida, de espacio compacto es la noción de espacio Lindelöf la cual, en un principio, no necesita de ningún axioma de separación. Como es bien sabido, en general, el producto finito de espacios Lindelöf no siempre es un espacio Lindelöf (considérese por ejemplo a la recta de Sorgenfrey S y el plano de Sorgenfrey $S \times S$) lo cual, como hemos visto, tiene similitud con el caso de los espacios

D. Sin embargo, hay ciertas clases de espacios topológicos Lindelöf que sí son cerradas bajo el producto numerable y una de ellas es la clase de los espacios Lindelöf$-\Sigma$.

En [24], K. Nagami introdujo a la clase de los espacios topológicos Σ[2]. En el caso de los espacios topológicos Hausdorff, la noción de ser a la vez un espacio Σ y Lindelöf y la noción de ser un espacio Lindelöf$-\Sigma$ coinciden. Resulta que el producto numerable de espacios Lindelöf$-\Sigma$ es un espacio Lindelöf$-\Sigma$, y además la clase de espacios Lindelöf$-\Sigma$ se puede caracterizar como la clase más pequeña de espacios topológicos que contiene a todos los espacios compactos Hausdorff, a todos los espacios Tychonoff segundo numerables y que es cerrada bajo imágenes continuas T_3, subespacios cerrados y productos finitos ([10]).

En esta sección demostraremos que si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ entonces X es un espacio D. La noción de espacio Lindelöf$-\Sigma$ también tomará importancia en el Capítulo 3, pues se demuestra en el Corolario 3.35 que si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ entonces $C_p(X)$ es un espacio hereditariamente D.

A lo largo de esta sección suponemos que todos los espacios topológicos son espacios Tychonoff .

Definiciones 2.43. Sean A un conjunto y κ un número cardinal. Definimos a las siguientes familias de subconjuntos de A:

- $[A]^{\kappa} = \{B \subseteq A : |B| = \kappa\}$.
- $[A]^{<\kappa} = \{B \subseteq A : |B| < \kappa\}$.
- $[A]^{\leq\kappa} = [A]^{\kappa} \cup [A]^{<\kappa}$.

Definiciones 2.44. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *red* $\mathcal{N}$ para X es una familia de subconjuntos de X tal que para cada $x \in X$ y U vecindad abierta de x, existe $N \in \mathcal{N}$ para el cual $x \in N \subseteq U$. El *peso de red* de X lo definimos como el número cardinal

$$nw(X) := \textit{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red para } X\}.$$

Por otro lado, definimos al *peso* de X como el número cardinal

$$w(X) = \textit{mín}\{|B| : B \text{ es base de } X\}.$$

Es claro entonces que un espacio topológico X es segundo numerable si y solo si $w(X) \leq \omega_0$.

Como para todo espacio topológio X la colección $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una red para X entonces el conjunto $\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red para } X\}$ es no vacío por lo cual el peso de red está bien definido. Asimismo, la colección $\mathcal{C}$ muestra que $nw(X) \leq |X|$. Por otro lado, como toda base de X es también una red para X, se satisface que $nw(X) \leq w(X)$.

[2]Decímos que una familia de subconjuntos de un espacio topológico X es $\sigma-$discreta si es la unión numerable de familias discretas. Un espacio Hausdorff X es llamado *espacio* Σ si existe una cubierta cerrada $\mathcal{C}$ formada de subespacios numerablemente compactos y una familia $\sigma-$discreta de subconjuntos de X, la cual es una red para X con respecto a la cubierta $\mathcal{C}$ (vea Definiciones 2.46).

Proposición 2.45. Sean X y Z espacios topológicos topológicos.

1. Si $Y \subseteq X$ entonces $nw(Y) \leq nw(X)$.
2. Si $f : X \longrightarrow Z$ es una función continua y suprayectiva entonces $nw(Z) \leq nw(X)$. En particular, si f es un homeomorfismo entonces $nw(Z) = nw(X)$.

Demostración. Dados X y Z espacios topológicos.

1. Sea $\mathcal{N}_X$ una red en X de cardinalidad $nw(X)$. Sea Y un subespacio de X. Definamos a $\mathcal{N}_Y = \{N \cap Y : N \in \mathcal{N}_X\}$, mostraremos que $\mathcal{N}_Y$ es una red en Y. Sean $y \in Y$ y U vecindad abierta de y en Y. Entonces existe V subconjunto abierto en X tal que $y \in U = V \cap Y \subseteq V$. Como $\mathcal{N}_X$ es una red para X, entonces existe $N \in \mathcal{N}_X$ tal que $y \in N \subseteq V$ por lo cual $y \in N \cap Y \subseteq U$. Así, concluímos que $\mathcal{N}_Y$ es una red en Y por lo cual $nw(Y) \leq |\mathcal{N}_Y| \leq |\mathcal{N}_X| = nw(X)$.

2. Sea $f : X \longrightarrow Z$ una función continua y suprayectiva. Sea $\mathcal{N}_Z = \{f[N] : N \in \mathcal{N}_X\}$. Veamos que $\mathcal{N}_Z$ es una red en Z. Para ello sean $z \in Z$, $x \in X$ tales que $f(x) = z$ y V vecindad abierta de z en Z. Entonces $x \in f^{-1}[V]$ y por continuidad se sigue que existe $N \in \mathcal{N}_X$ tal que $x \in N \subseteq f^{-1}[V]$, por lo cual $z \in f[N] \subseteq V$. Así, $\mathcal{N}_Z$ es una red en Z por lo cual $nw(Z) \leq |\mathcal{N}_Z| \leq |\mathcal{N}_X| = nw(X)$. ■

Definiciones 2.46. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- Dadas dos familias $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, diremos que $\mathcal{A}$ es una *red de subconjuntos (o simplemente red) con respecto a* $\mathcal{B}$ si para cada $B \in \mathcal{B}$ y $U \in \tau(B, X)$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A \subseteq U$ (donde $\tau(B, X) = \{V \in \tau : B \subseteq V\}$).
- Una familia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *cubierta compacta* de X si cada elemento de $\mathcal{K}$ es un conjunto compacto y $X = \bigcup \mathcal{K}$.
- X se llama *Lindelöf*$-\Sigma$ si posee una red numerable con respecto a una cubierta compacta.
- X se llama $\sigma-$*compacto* si existe una familia numerable de subespacios compactos de X que cubre a X.

Proposición 2.47. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si X es un espacio $\sigma-$compacto entonces X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$.
2. Si X es un espacio con peso de red numerable entonces X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$.

Demostración.

1. Sea X un espacio $\sigma-$compacto. Entonces existe una colección numerable de subespacios compactos $\mathcal{K} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Puesto que $\mathcal{K}$ es una cubierta compacta

de X y es una red numerable con respecto a sí misma, concluimos que X es un espacio Lindelöf−Σ.

2. Sea X un espacio con peso de red numerable. Entonces existe $\mathcal{N}$ red numerable de X. La familia $\mathcal{K} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta compacta de X y además $\mathcal{N}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{K}$. Por lo tanto X es un espacio Lindelöf−Σ. ■

Puesto que todo espacio compacto es un espacio $\sigma-$compacto y $nw(X) \leq w(X)$ para cualquier espacio X, se sigue de manera inmediata el siguiente corolario.

Corolario 2.48. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si X es compacto, entonces X es un espacio Lindelöf−Σ.
2. Si X es un espacio segundo numerable, entonces X es un espacio Lindelöf−Σ.

Proposición 2.49. Todo espacio Lindelöf−Σ es un espacio Lindelöf.

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf−Σ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por ser X un espacio Lindelöf−Σ, existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Definamos a

$$\mathcal{F} := \left\{F \in \mathcal{R} : \exists \mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega} \text{ tal que } F \subseteq \bigcup \mathcal{V}\right\}$$

Sea $C \in \mathcal{C}$ arbitrario pero fijo. Como C es compacto, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ finito tal que $C \subseteq \bigcup \mathcal{V}$, y como $\mathcal{R}$ es red con respecto a $\mathcal{C}$ entonces existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. De esta manera, $R \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathcal{F}$ es no vacío.

Para cada $F \in \mathcal{F}$ sea U_F tal que $U_F \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ y $F \subseteq \bigcup U_F$. Definamos $\mathcal{G} := \{U_F : F \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{U}^* := \bigcup \mathcal{G}$. Es claro que $\mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{U}$ y que $|\mathcal{U}^*| \leq \omega$, por lo que basta demostrar que $\mathcal{U}^*$ es una cubierta abierta de X.

Sea $x \in X$, entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Por la compacidad de C existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ finitio tal que $C \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Sea $F \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Entonces $F \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $x \in C \subseteq F \subseteq U_F \subseteq \bigcup \mathcal{U}^*$. Esto demuestra que $\mathcal{U}^*$ es una cubierta abierta de X.

Por lo tanto, X es un espacio Lindelöf. ■

Proposición 2.50. La imagen continua de un espacio Lindelöf−Σ es un espacio Lindelöf−Σ.

Demostración. Sean (X, τ) y (Y, θ) espacios topológicos, X un espacio Lindelöf−Σ y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces existe una cubierta compacta $\mathcal{C}_X$ de X y una red numerable $\mathcal{R}_X$ con respecto de $\mathcal{C}_X$. Por la continuidad y suprayectividad de f, la familia $\mathcal{C}_Y = \{f[C] : C \in \mathcal{C}_X\}$ es una cubierta compacta de Y. Para demostrar que Y es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ bastará comprobar que la familia numerable $\mathcal{R}_Y = \{f[R] : R \in \mathcal{R}_X\}$ es una red con respecto de $\mathcal{C}_Y$.

Sean $K \in \mathcal{C}_Y$ y $W \in \theta(K, Y)$. Entonces existe $C \in \mathcal{C}_X$ tal que $f[C] = K \subseteq W$. Como f es una función continua, $f^{-1}[W] \in \tau(C, X)$ por lo cual existe $R \in \mathcal{R}_X$ tal que $C \subseteq R \subseteq f^{-1}[W]$. Así,

$$K \subseteq f[R] \subseteq W,$$

y $f[R] \in \mathcal{R}_Y$. Por lo tanto $\mathcal{R}_Y$ es una red con respecto a $\mathcal{C}_Y$. De esta manera, concluimos que Y es un espacio Lindelöf$-\Sigma$. ■

Proposición 2.51. Los subconjuntos cerrados de espacios Lindelöf$-\Sigma$ son subespacios Lindelöf$-\Sigma$.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico Lindelöf$-\Sigma$ y F un subespacio cerrado de X. Por ser X un espacio Lindelöf$-\Sigma$, existe una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X. Sean $\mathcal{C}_F = \{C \cap F : C \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{R}_F = \{R \cap F : R \in \mathcal{R}\}$. Es claro que $\mathcal{R}_F$ es una familia numerable de subconjuntos de F. Puesto que F es un subconjunto cerrado, entonces $C \cap F$ es un subespacio cerrado de F para toda $C \in \mathcal{C}$ y por tanto $C \cap F$ es un subespacio compacto para toda $C \in \mathcal{C}$. Además

$$F = X \cap F = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap F = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \cap F,$$

por lo cual $\mathcal{C}_F$ es una cubierta compacta de F.

Sean $C \cap F \in \mathcal{C}_F$ y $U \in \tau\restriction_F (C \cap F, F)$ Entonces existe V abierto en X tal que $U = V \cap F$ de donde se sigue que

$$C = (C \cap F) \cup (C \cap (X \backslash F)) \subseteq V \cup (X \backslash F).$$

Como $V \cup (X \backslash F) \in \tau(C, X)$, existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq V \cup (X \backslash F)$ por lo cual

$$C \cap F \subseteq R \cap F \subseteq V \cap F = U,$$

donde $R \cap F \in \mathcal{R}_F$. Así, $\mathcal{R}_F$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{C}_F$ por lo cual F es un espacio Lindelöf$-\Sigma$. ■

Proposición 2.52. Si X y Y son espacios Lindelöf$-\Sigma$ entonces el producto topológico $X \times Y$ es un espacio Lindelöf$-\Sigma$.

Demostración. Sean (X, τ) y (Y, θ) espacios Lindelöf$-\Sigma$. Entonces existen una red numerable $\mathcal{R}_X$ respecto a una cubierta compacta $\mathcal{C}_X$ de X y una red numerable $\mathcal{R}_Y$ respecto a una cubierta compacta $\mathcal{C}_Y$ de Y. Definamos a las familias

- $\mathcal{R} = \{R_1 \times R_2 : R_1 \in \mathcal{R}_X \text{ y } R_2 \in \mathcal{R}_Y\}$, y

- $\mathcal{C} = \{C_1 \times C_2 : C_1 \in \mathcal{C}_X \text{ y } C_2 \in \mathcal{C}_Y\}$.

Sea $(x, y) \in X \times Y$. Entonces existe $C_1 \in \mathcal{C}_X$ y $C_2 \in \mathcal{C}_Y$ tales que $x \in C_1$ y $y \in C_2$, razón por la cual $(x, y) \in C_1 \times C_2 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. De esta manera hemos probado que $\mathcal{C}$ cubre a $X \times Y$ y así, como el producto de espacios topológicos compactos es compacto, $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta de $X \times Y$.

Sean $C_1 \times C_2 \in \mathcal{C}$ y W un conjunto abierto en $X \times Y$ tales que $C_1 \times C_2 \subseteq W$. Como C_1 y C_2 son compactos entonces, por el Lema 1.47, existen $U \in \tau(C_1, X)$ y $V \in \theta(C_2, Y)$ tales que $C_1 \times C_2 \subseteq U \times V \subseteq W$. Entonces, existen $R_1 \in \mathcal{R}_X$ y $R_2 \in \mathcal{R}_Y$ tales que $C_1 \subseteq R_1 \subseteq U$ y $C_2 \subseteq R_2 \subseteq V$, y en consecuencia

$$C_1 \times C_2 \subseteq R_1 \times R_2 \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Así, concluimos que $\mathcal{R}$ es una red numerable respecto a la cubierta compacta $\mathcal{C}$ de $X \times Y$. Por lo tanto $X \times Y$ es un espacio Lindelöf$-\Sigma$. ■

Teorema 2.53. Todo espacio Lindelöf$-\Sigma$ es un espacio D.

Demostración. Sean (X, τ) un espacio Lindelöf$-\Sigma$ y $\varphi : X \longrightarrow \tau$ una asignación de vecindades. Sea $\varphi(A) := \bigcup_{x \in A} \varphi(x)$ para todo $A \subseteq X$. Definamos a

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq X : (\exists B \in [A]^{<\omega})(A \subseteq \varphi(B))\}$$

Dado $K \subseteq X$ subespacio compacto de X, tenemos que $\{\varphi(x) : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K por lo cual existe $B \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \varphi(B)$ lo cual implica que $K \in \mathcal{F}$. De esta manera hemos probado que todos los subconjuntos compactos de X pertenecen a la familia $\mathcal{F}$. En particular $\{x\} \in \mathcal{F}$ para cualquier elemento $x \in X$ por lo cual $\mathcal{F}$ es una familia no vacía. Para cada $A \in \mathcal{F}$ sea $F_A \in [A]^{<\omega}$ tal que $A \subseteq \varphi(F_A)$.

Como X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$, existe $\mathcal{R} = \{R_n : n < \omega\}$ una red numerable con respecto a una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X de manera que cada $R \in \mathcal{R}$ ocurre una cantidad infinita de veces en esta enumeración. Si $R_0 \in \mathcal{F}$, sea $D_0 := F_{R_0}$; en caso contrario, sea $D_0 = \emptyset$. Para $n \geq 1$ definamos de manera recursiva al conjunto D_n como

$$D_n = \begin{cases} F_{R_n \setminus \varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{n-1})}, & si \quad R_n \setminus \varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{n-1}) \in \mathcal{F}, \\ \emptyset, & si \quad R_n \setminus \varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{n-1}) \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Sea $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$. Supongamos, para generar una contradicción, que $\varphi(D) \neq X$. Entonces existe $x \in X \setminus \varphi(D)$ por lo cual existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Como $C \setminus \varphi(D)$ es un subconjunto cerrado de C, entonces es compacto, implicando que $C \setminus \varphi(D) \in \mathcal{F}$ y por consiguiente existe $F_{C \setminus \varphi(D)} \in [C \setminus \varphi(D)]^{<\omega}$ tal que $F_{C \setminus \varphi(D)} \subseteq C \setminus \varphi(D) \subseteq \varphi(F_{C \setminus \varphi(D)})$.

Puesto que $C \subseteq \varphi(F_{C \setminus \varphi(D)}) \cup \varphi(D)$ entonces $\{\varphi(x) : x \in F_{C \setminus \varphi(D)}\} \cup \{\varphi(x) : x \in D\}$ es una cubierta abierta de C y así, por compacidad de C, existe $n < \omega$ tal que

$$C \subseteq \varphi(F_{C \setminus \varphi(D)}) \cup \varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_n).$$

Como $\mathcal{R}$ es una red respecto a $\mathcal{C}$, existe $R \in \mathcal{R}$ tal que

$$C \subseteq R \subseteq \varphi(F_{C\setminus\varphi(D)}) \cup \varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_n).$$

Por la elección de la numeración de $\mathcal{R}$, existe $k > n$ tal que $R = R_k$. Entonces

$$C\setminus\varphi(D) \subseteq R_k\setminus\varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{k-1}) \subseteq R_k\setminus\varphi(D_0 \cup \cdots D_n) \subseteq \varphi(F_{C\setminus\varphi(D)}),$$

por lo cual $R_k\setminus\varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{k-1}) \in \mathcal{F}$. Entonces $R_k \subseteq \varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{k-1}) \cup \varphi(D_k)$ (pues por construcción $D_k = F_{R_n\setminus\varphi(D_0\cup\cdots\cup D_{n-1})}$) de donde se sigue que

$$x \in R \subseteq \varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_k) \subseteq \varphi(D),$$

lo cual es una contradicción. Así,

$$\varphi(D) = \bigcup_{x\in D} \varphi(x) = X.$$

Observemos ahora que $\{D_n : n < \omega\}$ es una familia localmente finita en X. En efecto: Sea $x \in X$, entonces existe $d \in D$ tal que $x \in \varphi(d)$. Como $d \in D$, existe $n < \omega$ tal que $d \in D_n$ por lo cual $\varphi(d) \subseteq \varphi(D_n)$, y así $x \in \varphi(D_n)$. Sea $m < \omega$ tal que $m > n$ entonces

$$D_m \subseteq R_m\setminus\varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{m-1}) \subseteq X\setminus\varphi(D_n)$$

por lo cual $D_m \cap \varphi(D_n) = \emptyset$. De esta manera

$$\{D_k : k < \omega \ \&\ D_k \cap \varphi(D_n) \neq \emptyset\} \subseteq \{D_0, ..., D_n\}$$

y así concluimos que $\{D_n : n < \omega\}$ es una familia localmente finita. Puesto que D_n es un subconjunto cerrado de X (por ser finito) para toda $n < \omega$, por el Corolario 2.17 tenemos que D es un subconjunto cerrado de X.

Finalmente, sea $x \in D$. Entonces existen $n < \omega$ tal que $x \in D_n$ y por tanto $x \in \varphi(D_n)$. Supongamos que $n > 0$. Sea $m < \omega$ tal que $m < n$. Entonces

$$D_n \subseteq R_n\setminus\varphi(D_0 \cup \cdots \cup D_{n-1}) \subseteq X\setminus\varphi(D_m) \subseteq X\setminus D_m,$$

por lo cual $D_n \cap D_m = \emptyset$ para todo $m < n$. Puesto que $\bigcup_{i=0}^{n-1} D_i$ y $D_n\setminus\{x\}$ son subconjuntos cerrados de X entonces el conjunto

$$V_n = \varphi(D_n) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n-1}(X\setminus D_i)\right) \cap (X\setminus(D_n\setminus\{x\}))$$

es una vecindad abierta de x. Observemos entonces que, como $\varphi(D_n) \cap D_m = \emptyset$ para $m > n$, se tiene que

$$\{x\} \subseteq D \cap V_n = \bigcup_{i<\omega}(D_i \cap V_n) \subseteq D_n \cap V_n \subseteq D_n\setminus(D_n\setminus\{x\}) \subseteq \{x\},$$

por lo cual $\{x\}$ es un subconjunto abierto en D. Si $n = 0$, definiendo al subconjunto abierto $V_0 = \varphi(D_0) \cap (X\setminus(D_0\setminus\{x\}))$ se tiene que

$$\{x\} \subseteq D \cap V_0 \subseteq \bigcup_{i<\omega}(D_i \cap V_0) \subseteq D_0 \cap V_0 \subseteq D_0 \cap (D_0\setminus\{x\}) \subseteq \{x\},$$

por lo cual $\{x\}$ es un subconjunto abierto en D.

De esta manera, hemos probado que D es un subespacio cerrado, discreto y no vacío de X tal que $X = \bigcup_{x \in D} \varphi(x)$. Por lo tanto X es un espacio D. ■

Corolario 2.54. Los espacios $\sigma-$compactos y los espacios con peso de red numerable son espacios D.

Capítulo 3

La propiedad D en los espacios de funciones $C_p(X)$

Dado un espacio topológico X, podemos considerar al conjunto de las funciones continuas definidas en X y de valor real $C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y equiparlo con la topología τ de subespacio respecto de $\mathbb{R}^X$, a la cual llamaremos la *"topología de la convergencia puntual"*. Al espacio topológico $(C(X), \tau)$ lo denotaremos simplemente como $C_p(X)$. El término C_p-teoría hace referencia a la teoría de los espacios de funciones continuas equipados con la topología de la convergencia puntual. La topología τ recibe su nombre por el siguiente hecho:

> Sea $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red de elementos en $C_p(X)$. Entonces, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a f en $C_p(X)$ si y sólo si la red de elementos $(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(x)$, para cada $x \in X$.

De acuerdo a Tkachuk ([28]) el crédito por la invención de la C_p-teoría debe darse a Alexander Vladimirovich Arkhangel'skii. Uno de los resultados más interesantes de Arkhangel'skii es su teorema sobre el peso de red de $C_p(X)$ (Teorema 3.17) pues demuestra que, en el caso de espacios topológicos infinitos X, se da la igualdad $nw(X) = nw(C_p(X))$. Como veremos más adelante, también otros números cardinales asociados a $C_p(X)$ se pueden calcular utilizando propiedades relacionadas al espacio X y viceversa.

Bajo este contexto, es natural preguntarnos bajo qué condiciones sobre X resulta que $C_p(X)$ es un espacio D y viceversa. Buzyakova demostró en [8] que si X es un espacio Hausdorff compacto entonces $C_p(X)$ es un espacio hereditariamente D. Más tarde, Gruenhage logró generalizar el resultado de Buzyakova para los espacios Lindelöf$-\Sigma$ en [18]. Intentando generalizar aún más el resultado de Gruenhage, Vladimir Tkachuk introdujo en [27] la noción de *espacio monótonamente monolítico* y demostró que esta clase de espacios son espacios hereditariamente D, y además probó que si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ entonces $C_p(X)$ es un espacio monótonamente monolítico.

El propósito de este capítulo es introducir de manera breve a los espacios $C_p(X)$, las relaciones básicas que tienen con la propiedad D, así como las propiedades que necesitaremos para demostar el mencionado resultado de Tkachuk (Teorema 3.32). Introduciremos las nociones y propiedades básicas de los espacios monótonamente monolíticos, y en la última sección presentaremos una demostración del teorema de Tkachuk y algunos corolarios importantes que se desprenden de él.

A menos que se diga lo contrario, en este capítulo se supondra que espacio topológico significa espacio Tychonoff.

3.1 Definición de los espacios $C_p(X)$ y propiedades básicas

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico. El conjunto

$$C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$$

de todas las funciones continuas definidas en X y de valor real, es naturalmente un subconjunto del producto topológico ($\mathbb{R}^X = \prod_{x \in X} R_x, \tau$), donde definimos a $R_x := \mathbb{R}$ para toda $x \in X$ y τ es la topología producto. De esta manera, el conjunto $C(X)$ puede ser dotado de la topología de subespacio respecto al producto topológico $\mathbb{R}^X$. El espacio $(C(X), \tau \restriction_{C(X)})$ se denota con el símbolo $C_p(X)$. La topología de $C_p(X)$ es llamada *topología de la convergencia puntual.*

Observación 3.2. Puesto que $\mathcal{S} = \{\pi_x^{-1}[U] : x \in X \text{ y } U \in \tau_e\}$ es subbase del espacio $(\mathbb{R}^X, \tau)$, entonces la colección

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{x \in F} \pi_x^{-1}[U_x] : F \in [X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \text{ y } (\forall x \in F)(U_x \in \tau_e) \right\}$$

se llama *base canónica* de $\mathbb{R}^X$ y a los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama *abiertos canónicos.*

Si $F = \{x_1, ..., x_n\} \in [X]^{<\omega} \setminus \emptyset$ y $U_1, ..., U_n \in \tau_e$ definimos al conjunto

$$(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) := \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}[U_i] = \{g \in \mathbb{R}^X : (\forall i \in \{1, ..., n\})(g(x_i) \in U_i)\}.$$

Entonces, podemos reescribir a $\mathcal{B}$ como

$$\mathcal{B} = \{(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X, U_1, ..., U_n \in \tau_e\}.$$

Puesto que $C_p(X)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^X$, resulta que la colección

$$\mathcal{C} = \{C(X) \cap (x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) : (x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) \in \mathcal{B}\}$$

es una base para el espacio topológico $C_p(X)$ (llamada también base canónica de $C_p(X)$). Para cada $C(X) \cap (x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) \in \mathcal{C}$ definimos

$$[x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n] = \{g \in C(X) : (\forall i \in \{1, ..., n\})(g(x_i) \in U_i)\}.$$

Proposición 3.3. Sea $\mathcal{D}$ una base del espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_e)$. Entonces la familia

$$\{(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X, U_1, ..., U_n \in \mathcal{D}\}$$

es una base para la topología en $\mathbb{R}^X$. En particular, la familia

$$\{[x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n] : n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X, U_1, ..., U_n \in \mathcal{D}\}$$

es una base para la topología en $C_p(X)$.

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ una base de $(\mathbb{R}, \tau_e)$. Sea $f \in \mathbb{R}^X$ y U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^X$ tal que $f \in U$. Sea $(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n)$ un elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^X$ tal que $f \in (x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) \subseteq U$. Sea $i \in \{1, ..., n\}$. Puesto que $f(x_i) \in U_i$, y U_i es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, existe $D_i \in \mathcal{D}$ tal que $f(x_i) \in D_i \subseteq U_i$. De esta manera, se sigue que $f \in (x_1, ..., x_n; D_1, ..., D_n) \subseteq (x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) \subseteq U$.

Por lo tanto, para toda $f \in \mathbb{R}^X$ y U conjunto abierto en $\mathbb{R}^X$ tal que $f \in U$, existe $D \in \{(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X, U_1, ..., U_n \in \mathcal{D}\}$ tal que $f \in D \subseteq U$, por lo que concluimos que $\{(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X, U_1, ..., U_n \in \mathcal{D}\}$ es una base en $\mathbb{R}^X$. ■

Proposición 3.4. Sea X un espacio topológico. Entonces, el espacio $(\mathbb{R}, \tau_e)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $C_p(X)$.

Demostración. Sea X un espacio topológico. Definamos a $\xi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow C_p(X)$ como la función que a cada $y \in \mathbb{R}$ le asigna la función constante $\overline{y} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con valor y.

Claramente $\xi_{\mathbb{R}}$ es una función inyectiva, pues si $\xi_{\mathbb{R}}(x_1) = \xi_{\mathbb{R}}(x_2)$ entonces $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ y por lo tanto $x_1 = \overline{x_1}(x) = \overline{x_2}(x) = x_2$ para todo $x \in X$.

Sean $y \in \mathbb{R}$ y $W = [x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n]$ un abierto canónico en $C_p(X)$ tal que $\xi_{\mathbb{R}}(y) \in W$. Entonces $\overline{y} \in W$ por lo cual $y = \overline{y}(x_i) \in B_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sea $B = \bigcap_{i=1}^n B_i$, entonces $y \in B$ y además, para todo $x \in B$, se tiene que

$$\overline{x}(x_i) = x \in B \subseteq B_i$$

para todo $1 \leq i \leq n$, por lo cual $\overline{x} \in W$. De esta manera $\xi_{\mathbb{R}}[B] \subseteq W$. Como existe un subconjunto abierto $B \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a y tal que $\xi_{\mathbb{R}}[B] \subseteq W$, concluimos que $\xi_{\mathbb{R}}$ es continua en y.

Como $\xi_{\mathbb{R}}$ es una función continua e inyectiva, entonces su restricción a $\xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ es una biyección continua.

Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto abierto. Afirmamos que

$$\xi_{\mathbb{R}}[B] = \bigcup_{x \in X} ([x; B] \cap \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]).$$

En efecto: Sea $\overline{y} \in \xi_{\mathbb{R}}[B]$. Puesto que $\overline{y}(z) = y \in B$ para cualquier $z \in X$, entonces

$$\overline{y} \in [z; B] \subseteq \bigcup_{x \in X} [x; B]$$

para cualquier $z \in X$. Además, es claro que $\overline{y} \in \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ por lo que se sigue que

$$\overline{y} \in \bigcup_{x \in X} [x; B] \cap \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}].$$

Así,

$$\xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}] \subseteq \bigcup_{x \in X} [x; B] \cap \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}].$$

Por otro lado, sea $y \in \bigcup_{x \in X} [x; B] \cap \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$. Entonces existen $z \in \mathbb{R}$ y $x \in X$ tales que $y = \overline{z}$ y $\overline{z} \in [x; B]$, por lo tanto $\overline{z}(x) = z \in B$ lo cual implica que $y = \overline{z} \in \xi_{\mathbb{R}}[B]$. De esta manera, hemos probado que

$$\bigcup_{x \in X} [x; B] \cap \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}] \subseteq \xi_{\mathbb{R}}[B].$$

Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Como $\bigcup_{x \in X} [x; B]$ es un conjunto abierto en $C_p(X)$ entonces $\xi_{\mathbb{R}}[B] = \bigcup_{x \in X} [x; B] \cap \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ es un conjunto abierto en $\xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$. Por lo tanto, la restricción de $\xi_{\mathbb{R}}$ a $\xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ es una biyección continua y abierta por lo cual $\xi_{\mathbb{R}}$ es un encaje.

Veamos ahora que $\xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$. Para ello, supongamos que $f \in C_p(X) \setminus \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos abiertos ajenos tales que $f(x_1) \in U_1$ y $f(x_2) \in U_2$. Entonces $f \in [x_1, x_2; U_1, U_2] \subseteq C_p(X) \setminus \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$. Así, para toda $f \in C_p(X) \setminus \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ se tiene que $C_p(X) \setminus \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ es una vecindad de f por lo cual $C_p(X) \setminus \xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ es abierto.

Por lo tanto $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $\xi_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ el cual es un subespacio cerrado de $C_p(X)$. ■

Como la compacidad y la compacidad numerable se heredan a subespacios cerrados, $C_p(X)$ nunca es compacto ni numerablemente compacto (porque $\mathbb{R}$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $C_p(X)$). Esto mismo se puede obtener como consecuencia de que $C_p(X)$ nunca es un espacio pseudocompacto. Recuerde que un espacio topológico es *pseudocompacto* si toda función continua de valor real es acotada.

Corolario 3.5. Sea X un espacio topológico. Entonces:

- $C_p(X)$ no es un espacio compacto;
- $C_p(X)$ no es un espacio numerablemente compacto;
- $C_p(X)$ no es un espacio pseudocompacto.

Demostración. Es suficiente probar que $C_p(X)$ no es pseudocompacto. Como X es no vacío, podemos fijar $x_1 \in X$. La función proyección $\pi_{x_1} : \mathbb{R}^X :\longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, por lo cual la función $e_{x_1} = \pi_{x_1} \restriction_{C_p(X)}$ también es continua. Para cada $r \in \mathbb{R}$ sucede que

$$e_{x_1}(\overline{r}) = \overline{r}(x_1) = r,$$

por lo cual la función $e_{x_1} : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua pero no acotada. Por lo tanto $C_p(X)$ no es pseudocompacto. ■

Observemos que la Proposición 3.4 implica que $(\mathbb{R}, \tau_e)$ es homeomorfo al subconjunto de $C_p(X)$ formado por todas las funciones constantes de X en $\mathbb{R}$, para todo espacio topológico X, sin importar si X es o no es un espacio Tychonoff. Existen espacios topológicos que satisfacen hasta el axioma de separación T_3 en los cuales las únicas funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ son las funciones constantes; por lo cual, en estos casos, $C_p(X)$ es esencialmente $\mathbb{R}$. La ventaja de pedir que X sea un espacio Tychonoff es que podemos garantizar que haya funciones continuas que no sean constantes, y de esta manera $C_p(X)$ es esencialmente un espacio topológico diferente del bien estudiado espacio de los números reales.

Definiciones 3.6. Sea X un espacio topológico. Definimos entonces a los siguientes números cardinales asociados a X:

- El *carácter* de $x \in X$ es el número cardinal
$$\chi(x, X) := \textit{mín}\{|B(x)| : B(x) \text{ es base de vecindades de } x \text{ en } X\};$$
- El *carácter* de X es el número cardinal $\chi(X) := \textit{sup}\{\chi(x, X) : x \in X\}$.

Lema 3.7. Sea X un espacio topológico. Se cumple lo siguiente:

1. $\chi(X) \leq w(X)$.
2. Si Y es un subespacio de X, entonces $w(Y) \leq w(X)$.

Demostración.

1. Puesto que el peso de X es un mínimo, sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Sea $x \in X$ y definamos $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Entonces $\mathcal{B}_x$ es una base local para x. Por lo tanto, para todo $x \in X$ existe $\mathcal{B}_x$ base local de x tal que
$$\chi(x, X) \leq |\mathcal{B}_x| \leq w(X).$$
De esta manera, se sigue que $\chi(X) \leq w(X)$.
2. Sea $\mathcal{B}$ una base en X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Puesto que la familia $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base en Y, se sigue que
$$w(Y) \leq |\mathcal{B}_Y| \leq |\mathcal{B}| = w(X).$$
Por lo tanto, $w(Y) \leq w(X)$.

■

Proposición 3.8. Si X es un espacio finito entonces $\chi(C_p(X)) = w(C_p(X)) = \omega$.

Demostración. Sea X un espacio topológico finito. Entonces X es un espacio discreto finito (pues X es T_1), por lo que cualquier función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y así $C_p(X) = \mathbb{R}^X = \prod_{x\in X} R_x$. Puesto que X es un conjunto finito, entonces por la Proposición 1.52 se tiene que $\prod_{x\in X} R_x$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ donde $n = |X|$.

Como $w(\mathbb{R}^n) = \omega$, $\chi(x; \mathbb{R}^n) = \omega$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y el peso y carácter de un espacio topológico son invariantes bajo homeomorfismos, entonces concluimos que

$$\chi(C_p(X)) = \omega = w(C_p(X)).$$

■

Proposición 3.9. Si X es un espacio infinito entonces

$$\chi(C_p(X)) = w(C_p(X)) = w(\mathbb{R}^X) = |X|.$$

Demostración. Primero probaremos que $\chi(C_p(X)) \leq w(C_p(X)) \leq w(\mathbb{R}^X) \leq |X|$. Por el Lema 3.7, se sigue de manera inmediata que $\chi(C_p(X)) \leq w(C_p(X)) \leq w(\mathbb{R}^X)$, por lo que basta demostrar que $w(\mathbb{R}^X) \leq |X|$.

Sea $\mathcal{D}$ una base numerable de $(\mathbb{R}, \tau_e)$. Definamos a la colección

$$\mathcal{B}_0 := \{(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X, U_1, ..., U_n \in \mathcal{D}\}.$$

Por la Proposición 3.3 se sigue que $\mathcal{B}_0$ es una base de $\mathbb{R}^X$ por lo cual $w(\mathbb{R}^X) \leq |\mathcal{B}_0|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos al conjunto

$$\mathcal{B}_0^n := \{(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) : x_1, ..., x_n \in X, U_1, ..., U_n \in \mathcal{D}\},$$

y a la función $\varphi_n : X^n \times \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{B}_0^n$ tal que $\varphi_n((x_1, ..., x_n), (U_1, ..., U_n)) = (x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n)$. Entonces φ_n es una función suprayectiva por lo cual

$$|\mathcal{B}_0^n| \leq |X^n \times \mathcal{D}| \leq |X^n| \cdot |\mathcal{D}^n| = |X| \cdot \omega.$$

Puesto que $\mathcal{B}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_0^n$, entonces

$$|\mathcal{B}_0| \leq \omega \cdot sup\{|\mathcal{B}_0^n| : n \in \mathbb{N}\} \leq \omega \cdot |X| \cdot \omega = |X|.$$

donde la última igualdad se da porque X es infinito. Por lo tanto $w(\mathbb{R}^X) \leq |\mathcal{B}_0| \leq |X|$. Así,

$$\chi(C_p(X)) \leq w(C_p(X)) \leq w(\mathbb{R}^X) \leq |X|.$$

Para finalizar, basta demostrar que $|X| \leq \chi(C_p(X))$.

Supongamos, para generar una contradicción, que $\chi(C_p(X)) < |X|$. Entonces para la función constante $\overline{0} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ existe ξ base local de $\overline{0}$ en $C_p(X)$ tal que

$$|\xi| \leq \chi(C_p(X)) < |X|.$$

Sea $E \in \xi$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ y $U_1, ..., U_n \in \tau_e$ tales que

$$\overline{0} \in [x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n] \subseteq E,$$

por lo cual $0 \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Como $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es una vecindad abierta de 0, existe $n_E \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \in \left(-\tfrac{1}{n_E}, \tfrac{1}{n_E}\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_i$$

para todo $i \in \{1, ..., n\}$, por lo cual

$$\overline{0} \in \bigcap_{i=1}^{n} \left[x_i; \left(-\tfrac{1}{n_E}, \tfrac{1}{n_E}\right)\right] \subseteq [x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n] \subseteq E.$$

Por lo tanto, para todo $E \in \xi$ existen $F_E \subseteq X$ finito y $n_E \in \mathbb{N}$ tales que

$$\overline{0} \in \bigcap_{x \in F_E} \left[x; \left(-\tfrac{1}{n_E}, \tfrac{1}{n_E}\right)\right] \subseteq E.$$

Sea $Y = \bigcup_{E \in \xi} F_E \subseteq X$. Si $|\xi| < \omega$ entonces $|Y| < \omega$, por lo cual $|Y| < |X|$. Si $\omega \leq |\xi|$, como los conjuntos F_E son finitos, se tiene que

$$|Y| = \left|\bigcup_{E \in \xi} F_E\right| \leq |\xi| < |X|,$$

por lo cual $|Y| < |X|$. De esta manera, podemos fijar a un elemento $y \in X \setminus Y$. Consideremos a $U = [y; (-1, 1)]$ vecindad abierta de $\overline{0}$. Sea $E \in \xi$ cualquier elemento. Es claro entonces que $y \notin F_E \subseteq Y$ y que F_E es un subconjunto cerrado en X. Por ser X un espacio Tychonoff, existe $h : X \longrightarrow [0, 1]$ función continua tal que $h(y) = 1$ y $h(x) = 0$ para todo $x \in F_E$. Entonces $h \notin U$ (pues $h(y) \notin (-1, 1)$) y como $h(x) = 0 \in \left(-\tfrac{1}{n_E}, \tfrac{1}{n_E}\right)$, para todo $x \in F_E$ se sigue que

$$h \in \bigcap_{x \in F_E} \left[x; \left(-\tfrac{1}{n_E}, \tfrac{1}{n_E}\right)\right] \subseteq E.$$

Así, $h \in E \setminus U$. Por lo anterior, concluimos que para todo $E \in \xi$, $E \setminus U \neq \emptyset$ lo cual contradice que ξ es una base local de $\overline{0}$ en $C_p(X)$.

Por lo tanto, debe ocurrir que $|X| \leq \chi(C_p(X))$, por lo cual tenemos que

$$\chi(C_p(X)) = w(C_p(X)) = w(\mathbb{R}^X) = |X|.$$

■

Corolario 3.10. Si X es un espacio numerable entonces $C_p(X)$ es un espacio D.

Corolario 3.11. Si $C_p(X)$ es segundo numerable entonces X es un espacio D.

Finalizaremos esta sección demostrando un teorema de Arkhangel'skii que asegura que $nw(X) = nw(C_p(X))$ para espacios infinitos. Antes de llegar a dicho resultado, necesitamos dos lemas.

Lema 3.12. Sea X un espacio topológico. Entonces, para cada $x \in X$, la función $\overline{x} : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\overline{x}(f) = f(x)$ para todo $f \in C_p(X)$ es una función continua.

Demostración. Sean $x \in X$ y $\overline{x} : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\overline{x}(f) = f(x)$ para toda $f \in C_p(X)$. Recordemos que la topología en $\mathbb{R}^X$ es la topología inicial con respecto a la familia de funciones $\{\pi_y : \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R} : y \in X\}$, donde $\pi_y(f) = f(y)$ para toda $f \in \mathbb{R}^X$. Entonces $\pi_x : \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Sea $f \in C_p(X)$. Entonces $\pi_x \restriction_{C_p(X)} (f) = f(x) = \overline{x}(f)$ por lo cual $\pi_x \restriction_{C_p(X)} = \overline{x}$ implicando que $\overline{x}$ es una función continua. ■

Lema 3.13. Si (X, τ) es un espacio Tychonoff, entonces τ es la topología inicial generada por $C(X)$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $U \subseteq X$ abierto en (X, τ) tales que $x \in U$. Como X es un espacio Tychonoff, existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua tal que $f[X \setminus U] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. Entonces $x \in f^{-1}[(-\infty, 1)] \subseteq U$ (pues si existiera $y \in f^{-1}[(-\infty, 1)]$ tal que $y \notin U$ entonces $y \in X \setminus U$ por lo cual $f(y) = 1$ contradiciendo que $f(y) \in (-\infty, 1)$).

Entonces la colección $\mathcal{H} = \{g^{-1}[(-\infty, 1)] : g \in C(X)\}$ es una base para τ, por lo cual $\mathcal{B} := \{g^{-1}[W] : g \in C(X)$ y $W \in \tau_e\}$ es una subbase de τ. ■

Proposición 3.14. Sea X un espacio topológico. Entonces X es homeomorfo a algún subespacio de $C_p(C_p(X))$.

Demostración. Sea $\Phi : X \longrightarrow C_p(C_p(X))$ dada por $\Phi(x) = \overline{x}$ para cada $x \in X$, donde $\overline{x} : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $\overline{x}(f) = f(x)$ para toda $f \in C_p(X)$.

Sean $x \in X$ y $U = [f_1, ..., f_n; U_1, ..., U_n]$ un abierto canónico en $C_p(C_p(X))$ tal que $\overline{x} \in U$. Entonces $\overline{x}(f_i) = f_i(x) \in U_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Como $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua para toda $1 \leq i \leq n$, entonces el conjunto $V = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[U_i]$ es un conjunto abierto en X y además $x \in V$ (pues $f_i(x) \in U_i$ implica que $x \in f_i^{-1}[U_i]$ para toda $1 \leq i \leq n$). De esta manera, $\Phi(x) = \overline{x} \in \Phi[V]$.

Sea $y \in \Phi[V]$. Entonces existe $z \in V$ tal que $y = \overline{z}$. Observemos que

$$y(f_i) = \overline{z}(f_i) = f_i(z) \in \bigcap_{j=1}^n U_j \subseteq U_i$$

para cualquier $i \in \{1, ..., n\}$ por lo cual $y \in [f_1, ..., f_n; U_1, ..., U_n]$. Por lo tanto $\Phi[V] \subseteq U$. Como para cualquier abierto canónico U en $C_p(C_p(X))$ tal que $\Phi(x) \in U$ existe V vecindad abierta de x en X tal que $\Phi(x) \in \Phi[V] \subseteq U$, concluimos que Φ es continua en x. Como $x \in X$ era arbitrario, se sigue que Φ es una función continua.

Veamos ahora que la función Φ es inyectiva: Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$. Como X es un espacio de Tychonoff, existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua tal que $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 1$, por lo cual $\overline{x_1}(f) = f(x_1) = 0 \neq 1 = f(x_2) = \overline{x_2}(f)$ implicando que $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$. Entonces la restricción de Φ a $\Phi[X]$ es una biyección continua.

Sea B un subconjunto abierto en X. Entonces existen $f_1, ..., f_n \in C_p(X)$ y $U_1, ..., U_n$ abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $B := \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[U_i]$. Sea $W = [f_1, ..., f_n; U_1, ..., U_n] \cap \Phi[X]$. Si $x \in \Phi[B]$ entonces existe $y \in B$ tal que $\overline{y} = x$. Puesto que $y \in B$, entonces $\overline{y}(f_i) = f_i(y) \in \bigcap_{j=1}^n U_j \subseteq U_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, por lo cual $x = \overline{y} \in W$ implicando que $\Phi[B] \subseteq W$. Si $x \in W$, existe $y \in X$ tal que $x = \overline{y}$. Entonces $\overline{y}(f_i) = f_i(y) \in U_i$ para cualquier $i \in \{1, ..., n\}$, de donde se sigue que $y \in \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}[U_j] = B$ por lo que $x = \overline{y} \in \Phi[B]$. De esta manera, $W \subseteq \Phi[B]$ por lo que concluimos que $\Phi[B] = W$ es un conjunto abierto en $\Phi[X]$.

Por lo tanto, la restricción de Φ a $\Phi[X]$ es una biyección continua y abierta, por lo que X es homeomorfo a $\Phi[X]$. ■

Corolario 3.15. Sea X un espacio topológico. Entonces $nw(X) \leq nw(C_p(C_p(X)))$.

Demostración. Sea X un espacio topológico. Por la Proposición 3.14, existe un subespacio $Y \subseteq C_p(C_p(X))$ tal que X es homeomorfo a Y, por lo que

$$nw(X) = nw(Y) \leq nw(C_p(C_p(X))).$$

■

Lema 3.16. Si X es un espacio T_0 con peso de red finito, entonces X es un espacio finito.

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una red de X tal que $nw(X) = |\mathcal{N}| = n \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in X$, definamos al conjunto $\mathcal{N}_x = \{N \in \mathcal{N} : x \in N\}$.

Claramente $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$ para cualquier $x \in X$. Observemos que si $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$ entonces, por ser X un espacio T_0, existe $U \subseteq X$ subconjunto abierto tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.

Si $x \in U$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$. Como $y \notin U$, entonces $y \notin N$ por lo cual $N \in \mathcal{N}_x \setminus \mathcal{N}_y$ y así $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$. De manera análoga, si $y \in U$ concluimos que $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$.

Definamos a $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(N)$ por medio de $\varphi(x) = \mathcal{N}_x$ para toda $x \in X$. Lo hecho anteriormente muestra que φ es una función inyectiva, por lo cual

$$|X| \leq |\mathcal{P}(N)| = 2^n,$$

de donde se sigue que X es un espacio finito. ■

Teorema 3.17 (Arkhangel'skii)**.** Para todo espacio topológico infinito X, se satisface que $nw(C_p(X)) = nw(X)$.

Demostración. Sea X un espacio topológico infinito y sea $\mathcal{N}_X$ una red en X tal que $|\mathcal{N}_X| = nw(X)$. Observemos que, por el Lema 3.16, puesto que X es un espacio Tychonoff se sigue que $|\mathcal{N}_X| = nw(X) \geq \omega$.

Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $N_1, ..., N_n \in \mathcal{N}_X$ y $U_1, ..., U_n \in \mathcal{B}$ definamos a

$$[N_1, ..., N_n; U_1, ..., U_n] = \{g \in C_p(X) : g[N_i] \subseteq U_i \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}\}$$

y a la colección

$$\mathcal{N}_{C_p(X)} = \{[N_1, ..., N_n; U_1, ..., U_n] : n \in \mathbb{N}, N_1, ..., N_n \in \mathcal{N}_X, U_1, ..., U_n \in \mathcal{B}\}.$$

Probaremos que $\mathcal{N}_{C_p(X)}$ es una red en $C_p(X)$. Sean $f \in C_p(X)$ y $[x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n]$ un abierto canónico que contiene a f (donde $B_i \in \mathcal{B}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$). Observemos que entonces $x_i \in f^{-1}[B_i]$, el cual es un subconjunto abierto para toda $1 \leq i \leq n$, por lo que existe $N_i \in \mathcal{N}_X$ tal que $x_i \in N_i \subseteq f^{-1}[B_i]$ para toda $1 \leq i \leq n$. Consideremos al conjunto $[N_1, ...N_n; B_1, ..., B_n]$. Puesto que $f[N_i] \subseteq f[f^{-1}[B_i]] \subseteq B_i$ para toda $1 \leq i \leq n$, entonces $f \in [N_1, ...N_n; B_1, ..., B_n]$. Si $g \in [N_1, ...N_n; B_1, ..., B_n]$ entonces $g[N_i] \subseteq B_i$ para toda $1 \leq i \leq n$ y, puesto que $x_i \in N_i$ para toda $1 \leq i \leq n$, se sigue que $g \in [x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n]$. Por lo tanto $[N_1, ...N_n; B_1, ..., B_n] \subseteq [x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n]$.

Puesto que $\mathcal{B}_0 = \{[x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n] : x_1, ...; x_n \in X, B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}\}$ es una base de $C_p(X)$, y para todo $f \in C_p(X)$ y $[x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n] \in \mathcal{B}_0$ tal que $f \in [x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n]$ existe $[N_1, ...N_n; U_1, ..., U_n] \in \mathcal{N}_{C_p(X)}$ tal que

$$f \in [N_1, ...N_n; U_1, ..., U_n] \subseteq [x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n],$$

concluimos que $\mathcal{N}_{C_p(X)}$ es una red en $C_p(X)$.

Observemos que la función $H : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_X^k \times \mathcal{B}^k \longrightarrow \mathcal{N}_{C_p(X)}$ dada por

$$H((N_1, ..., N_k), (U_1, ..., U_k)) = [N_1, ..., N_n; U_1, ..., U_n]$$

es una función suprayectiva, de donde se sigue que

$$nw(C_p(X)) \leq |\mathcal{N}_{C_p(X)}| \leq \left| \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_X^k \times \mathcal{B}^k \right| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathcal{N}_X^k \times \mathcal{B}^k| = \omega \cdot |\mathcal{N}_X^k| = nw(X),$$

donde la última igualdad se da porque $nw(X)$ es infinito.

De esta manera, para cualquier espacio infinito X se tiene que $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$. Utilizando el Corolario 3.15 se sigue que

$$nw(X) \leq nw(C_p(C_p(X))) \leq nw(C_p(X)) \leq nw(X),$$

por lo que $nw(X) = nw(C_p(X))$. ■

Corolario 3.18. Sea X un espacio topológico. Si X tiene peso de red numerable entonces $C_p(X)$ es un espacio D.

3.2 Espacios monótonamente monolíticos y la propiedad D

Arkhangel'skii introdujo en [3] la noción de *espacio monolítico*. Esta clase de espacios es considerablemente grande pues incluye a los espacios metrizables, a los espacios con peso de red numerable y a la clase de los compactos de Corson[1] (estos últimos juegan un papel fundamental en análisis funcional).

Entre los resultados concernientes a espacios monolíticos, Arkhangel'skii demostró que, para un espacio topológico X, $C_p(X)$ es monolítico si y sólo si X es estable[2] y, además, que X es monolítico si y sólo si $C_p(X)$ es estable. Puesto que todo espacio Lindelof$-\Sigma$ es estable, entonces $C_p(X)$ es monolítico siempre que X sea un espacio Lindelof$-\Sigma$.

Al igual que hemos hecho con otras clases de espacios, podemos preguntarnos cuándo los espacios monolíticos son espacios D. Tkachuk definió en [27] a una subclase de los espacios monolíticos a los cuales llamó espacios *monótonamente monolíticos*. Entre varias cosas, demostró que si X es un espacio con una base puntualmente numerable, entonces X es un espacio monótonamente monolítico, y también probó que los espacios monótonamente monolíticos son espacios D. A continuación definiremos a estos espacios y daremos pruebas completas de estos dos últimos hechos mencionados.

Definiciones 3.19. Un espacio topológico (X, τ) se llama *monolítico* si $nw(\overline{A}) \leq max\{|A|, \omega\}$ para cualquier $A \subseteq X$.

Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X es una *red externa* de A en X si, para cualquier $x \in A$ y $U \in \tau(x, X)$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.

Definición 3.20. Decimos que un espacio topológico (X, τ) es *monótonamente monolítico* si, para cualquier $A \subseteq X$, podemos asignar una red externa $\mathcal{O}(A)$ al conjunto $\overline{A}$ de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

(a) $|\mathcal{O}(A)| \leq m\acute{a}x\{|A|, \omega\}$.

(b) Si $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $\mathcal{O}(A) \subseteq \mathcal{O}(B)$.

(c) Si α es un ordinal y tenemos una familia $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ de subconjuntos de X tales que $\beta < \beta' < \alpha$ implica $A_\beta \subseteq A_{\beta'}$, entonces $\mathcal{O}(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(A_\beta)$.

[1] Un $\Sigma-$producto de rectas reales es un subconjunto de un producto topológico $\mathbb{R}^\kappa$ de tipo $\Sigma\mathbb{R}^\kappa := \{x \in \mathbb{R}^\kappa : |\{\alpha \in \kappa : x(\alpha) \neq 0\}| \leq \omega\}$ dotado de la topología de subespacio, con κ un número cardinal infinito. Un espacio X es un *compacto de Corson* si es homeomorfo a un subespacio compacto de un $\Sigma-$producto de rectas reales

[2] Un espacio X es *estable* si, para cada imagen continua Y de X, tenemos que $iw(Y) = nw(Y)$, donde $iw(Y)$ denota al mínimo cardinal κ tal que existe un espacio Z y una biyección continua $f : Y \longrightarrow Z$ con $w(Z) = \kappa$.

En el caso de que (X,τ) sea un espacio monótonamente monolítico tal que $\mathcal{O}(A) \subseteq \tau$ para todo $A \subseteq X$, diremos que el espacio X es *fuertemente monótonamente monolítico*.

Se sigue inmediatamente de la definición que todo espacio fuertemente monótonamente monolítico es monótonamente monolítico. Además, si X es un espacio monótonamente monolítico y $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ es una colección de subconjuntos de X entonces, por la propiedad (b) de la anterior definición, siempre se satisface que $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(A_\beta) \subseteq \mathcal{O}(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)$. Las siguientes son propiedades que se desprenden inmediatamente de la definición de espacio monótonamente monolítico.

Proposición 3.21. Todo espacio topológico monótonamente monolítico es un espacio monolítico.

Demostración. Sea (X,τ) un espacio monótonamente monolítico y $A \subseteq X$. Sea $\mathcal{O}(A)$ una red externa de $\overline{A}$ que satisface las propiedades de la Definición 3.20. Definamos a la familia de subconjuntos $\mathcal{N}_A = \{N \cap \overline{A} : N \in \mathcal{O}(A)\}$.

Sea $x \in \overline{A}$ y $U \in \tau(x, \overline{A})$. Entonces existe $V \in \tau$ tal que $U = V \cap \overline{A}$ por lo cual $x \in V$. Como $\mathcal{O}(A)$ es una red externa de $\overline{A}$, existe $N \in \mathcal{O}(A)$ tal que $x \in N \subseteq V$ lo que implica que $x \in N \cap \overline{A} \subseteq V \cap \overline{A} = U$. Puesto que $N \cap \overline{A} \in \mathcal{N}_A$, entonces concluimos que $\mathcal{N}_A$ es una red para $\overline{A}$ que satisface
$$|\mathcal{N}_A| \leq |\mathcal{O}(A)| \leq \textit{máx}\{|A|, \omega|\}.$$

Así, para cualquier $A \subseteq X$, $nw(\overline{A}) \leq \textit{máx}\{|A|, \omega\}$, por lo cual X es monolítico. ■

Proposición 3.22. Todo subespacio de un espacio monótonamente monolítico es monótonamente monolítico.

Demostración. Sean (X,τ) un espacio monótonamente monolítico y C un subespacio de X.

Sea $A \subseteq C$. Entonces existe $\mathcal{O}_X(A)$ red externa de $cl_X(A)$ en X que satisface las propiedades (a)-(c) de la Definición 3.20. Definamos a
$$\mathcal{O}_C(A) = \{O \cap C : O \in \mathcal{O}_X(A)\}.$$
Sean $x \in cl_C(A) = cl_X(A) \cap C$, $x \in U$ un conjunto abierto en C y $V \in \tau$ tal que $U = V \cap C$. Como $\mathcal{O}_X(A)$ es red externa de $cl_X(A)$ en X y $x \in V$, existe $O \in \mathcal{O}_X(A)$ tal que $x \in O \subseteq V$ por lo cual $x \in O \cap C \subseteq U$. De esta manera $\mathcal{O}_C(A)$ es red externa de $cl_C(A)$ en C. Entonces la colección $\mathcal{O}_C(A)$ es una red externa en C para $cl_C(A)$ para todo $A \subseteq C$.

Por construcción, $|\mathcal{O}_C(A)| \leq |\mathcal{O}_X(A)| \leq \textit{máx}\{|A|, \omega\}$ para todo $A \subseteq C$. Sean $A, B \subseteq C$ tales que $A \subseteq B$; entonces $\mathcal{O}_X(A) \subseteq \mathcal{O}_X(B)$ por lo cual
$$\mathcal{O}_C(A) = \{O \cap C : O \in \mathcal{O}_X(A)\} \subseteq \{O \cap C : O \in \mathcal{O}_X(B)\} = \mathcal{O}_C(B);$$

así, $\mathcal{O}_C(A) \subseteq \mathcal{O}_C(B)$ para todo $A, B \subseteq C$ tales que $A \subseteq B$.

Finalmente, sean α un ordinal y $\{A_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathcal{P}(C)$ una familia de subconjuntos de C tales que $\beta < \beta' < \alpha$ implica que $A_\beta \subseteq A_{\beta'}$. Sea $E \in \mathcal{O}_C(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)$. Entonces, existe $O \in \mathcal{O}_X(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}_X(A_\beta)$ tal que $E = O \cap C$. De esta manera, existe $\gamma < \alpha$ tal que $O \in \mathcal{O}_X(A_\gamma)$ por lo cual $E \cap O \in \mathcal{O}_C(A_\gamma) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}_C(A_\beta)$. Por lo tanto,

$$\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}_C(A_\beta) = \mathcal{O}_C\left(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\right).$$

Así, $\mathcal{O}_C(A)$ satisface las propiedades (a)-(c) de la Definición 3.20 y por tanto C es un espacio monótonamente monolítico. ■

Proposición 3.23. Sean X y Y espacios topológicos, y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Si X es un espacio monótonamente monolítico, entonces Y es un espacio monótonamente monolítico.

Demostración. Para cada $y \in Y$, sea $x_y \in f^{-1}[y]$. Para cada $A \subseteq X$, sea $\mathcal{O}(A)$ la red externa de $\overline{A}$ que satisface la Definición 3.20.

Dado $B \subseteq Y$, sean $A(B) = \{x_y : y \in B\} \subseteq X$ y $\mathcal{N}(B) = \{f[P] : P \in \mathcal{O}(A(B))\}$. Veamos que, para cada $B \subseteq Y$, $\mathcal{N}(B)$ es una red externa para $\overline{B}$ que satisface la Definición 3.20.

a) Sea $B \subseteq Y$. Entonces:

$$|\mathcal{N}(B)| \leq |\mathcal{O}(A(B))| \leq \text{máx}\{\omega, |A(B)|\} \leq \text{máx}\{\omega, |B|\}.$$

b) Sean $B \subseteq C \subseteq Y$ y $N \in \mathcal{N}(B)$. Entonces, existe $P \in \mathcal{O}(A(B))$ tal que $f[P] = N$. Puesto que $A(B) \subseteq A(C)$, entonces $\mathcal{O}(A(B)) \subseteq \mathcal{O}(A(C))$ por lo que $P \in \mathcal{O}(A(C))$ y por lo tanto $f[P] = N \in \mathcal{N}(C)$. Así, $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(C)$.

c) Sea $\{B_\beta : \beta < \alpha\}$ una familia de subconjuntos de Y tales que $\beta < \beta' < \alpha$ implica que $B_\beta \subseteq B_{\beta'}$. Sea $N \in \mathcal{N}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$. Entonces, existe $P \in \mathcal{O}(A(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta))$ tal que $f[P] = N$. Puesto que $A(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} A(B_\beta)$ y $\beta < \beta' < \alpha$ implica que $A(B_\beta) \subseteq A(B_{\beta'})$, entonces

$$\mathcal{O}\left(A\left(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta\right)\right) = \mathcal{O}\left(\bigcup_{\beta<\alpha} A(B_\beta)\right) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(A(B_\beta)).$$

Así, existe $\beta < \alpha$ tal que $P \in \mathcal{O}(A(B_\beta))$ y por lo tanto

$$f[P] = N \in \mathcal{N}(B_\beta) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}(B_\beta).$$

De esta manera, $\mathcal{N}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}(B_\beta)$. Como $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}(B_\beta) \subseteq \mathcal{N}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$ siempre se satisface, concluímos que $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}(B_\beta) = \mathcal{N}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$.

Finalmente, sean $B \subseteq Y$, $y \in \overline{B}$ y U una vecindad abierta de y en Y. Como f es una función continua y cerrada, y $f[A(B)] = B$, entonces $f[\overline{A(B)}] = \overline{B}$ por lo que existe $x \in \overline{A(B)}$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in f^{-1}[U]$, entonces existe $P \in \mathcal{O}(A(B))$ tal que $x \in P \subseteq f^{-1}[U]$ y por lo tanto $Y = f(x) \in f[P] \subseteq U$, con $f[P] \in \mathcal{N}(B)$. Así, $\mathcal{N}(B)$ es una red externa de $\overline{B}$.

Por lo tanto, Y es un espacio monótonamente monolítico. ■

Proposición 3.24. Supóngase que X es un espacio fuertemente monótonamente monolítico y que $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta tal que $f^{-1}[y]$ es un subespacio separable para cada $y \in Y$. Entonces Y es fuertemente monótonamente monolítico.

Demostración. Para cada $y \in Y$, sea A_y un subconjunto denso y numerable de $f^{-1}[y]$. Sea $\mathcal{O}$ el operador fuertemente monótonamente monolítico de X.

Si $B \subseteq Y$, sean $Q(B) = \bigcup_{y \in B} A_y$ y $\mathcal{N}(B) = \{f[E] : E \in \mathcal{O}(Q(B))\}$. Demostraremos que $\mathcal{N}$ es un operador fuertemente monótonamente monolítico en Y.

a) Sea $B \subseteq Y$. Entonces:

$$|\mathcal{N}(B)| \leq |\mathcal{O}(Q(B))| \leq \textit{máx}\{\omega, |Q(B)|\}.$$

Puesto que A_y es un conjunto numerable para todo $y \in B$, entonces $|Q(B)| \leq \textit{máx}\{\omega, |B|\}$ y por tanto

$$|\mathcal{N}(B)| \leq \textit{máx}\{\omega, |Q(B)|\} \leq \textit{máx}\{\omega, |B|\}.$$

b) Sean $B \subseteq C \subseteq Y$ y $N \in \mathcal{N}(B)$. Entonces, existe $E \in \mathcal{O}(Q(B))$ tal que $f[E] = N$. Puesto que $Q(B) \subseteq Q(C)$, entonces $E \in Q(C)$ por lo cual $N = f[E] \in \mathcal{N}(C)$. Así, $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(C)$.

c) Sea $\{B_\beta : \beta < \alpha\}$ una familia de subconjuntos de X tales que $\beta < \beta' < \alpha$ implica que $B_\beta \subseteq B_{\beta'}$. Sea $N \in \mathcal{N}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$. Entonces, existe $E \in \mathcal{O}(Q(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta))$ tal que $f[E] = N$. Puesto que $Q(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} Q(B_\beta)$ y $\beta < \beta' < \alpha$ implica que $Q(B_\beta) \subseteq Q(B_{\beta'})$, entonces

$$\mathcal{O}\left(Q\left(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta\right)\right) = \mathcal{O}\left(\bigcup_{\beta<\alpha} Q(B_\beta)\right) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(Q(B_\beta))$$

por lo que existe $\beta < \alpha$ tal que $E \in \mathcal{O}(Q(B_\beta))$ y, por lo tanto,

$$N = f[E] \in \mathcal{N}(B_\beta) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}(B_\beta).$$

Así, $\mathcal{N}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}(B_\beta)$. De esta manera, concluímos que

$$\mathcal{N}\left(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}(B_\beta).$$

Finalmente, sean $B \subseteq Y$, $y \in \overline{B}$ y U vecindad abierta de y en Y. Como f es una función abierta, entonces $f^{-1}[\overline{B}] = \overline{f^{-1}[B]}$ por lo cual $\overline{f^{-1}[B]} \cap f^{-1}[y] \neq \emptyset$. Puesto que $Q(B)$ es denso en $f^{-1}[B]$, existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que $x \in \overline{Q(B)}$. Sea $V \in \mathcal{O}(Q(B))$ tal que $x \in V \subseteq f^{-1}[U]$. Entonces, $W = f[V] \in \mathcal{N}(B)$ y además $y \in W \subseteq U$. Así, $\mathcal{N}(B)$ es una base externa de $\overline{B}$.

Por lo tanto, Y es un espacio fuertemente monótonamente monolítico. ■

Definición 3.25. Sea X un espacio topológico. Una base $\mathcal{B}$ de X es una *base puntualmente numerable* si $|\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}| \leq \omega$ para todo $x \in X$.

Proposición 3.26. Si un espacio topológico X tiene una base puntualmente numerable entonces X es fuertemente monótonamente monolítico.

Demostración. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de X puntualmente numerable. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ y para cada $A \subseteq X$ sea $\mathcal{O}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}_x$. Por construcción, es claro que $\mathcal{O}(A) \subseteq \tau$ y además $|\mathcal{O}(A)| \leq \textit{máx}\{|A|, \omega\}$ para todo $A \subseteq X$.

Sean U, V subconjuntos de X tales que $U \subseteq V$. Entonces

$$\mathcal{O}(U) = \bigcup_{x \in U} \mathcal{B}_x \subseteq \bigcup_{x \in V} \mathcal{B}_x = \mathcal{O}(V).$$

Sean α un ordinal y $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ una colección de subconjuntos de X tales que $\beta < \beta' < \alpha$ implica que $A_\beta \subseteq A_{\beta'}$. Sean $A := \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ y $B \in \mathcal{O}(A)$. Entonces $B \in \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}_x$, por lo cual existe $x \in A$ tal que $B \in \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Como $x \in A$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in A_\beta$ por lo cual $B \in \mathcal{B}_x \subseteq \bigcup_{x \in A_\beta} \mathcal{B}_x = \mathcal{O}(A_\beta) \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{O}(A_\beta)$. Así concluimos que $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{O}(A_\beta) = \mathcal{O}(A)$.

Sean $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ es una base de X, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq U$; además $B \cap A \neq \emptyset$ (pues x esta en la clausura de A), por lo cual existe $y \in A \cap B$ de donde se sigue que $B \in \mathcal{B}_y \subseteq \mathcal{O}(A)$. De esta manera, para todo $x \in \overline{A}$ y U tal que $x \in U$, existe $B \in \mathcal{O}(A)$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Así $\mathcal{O}(A) \subseteq \tau$ es una red externa de $\overline{A}$ que satisface las propiedades $(a) - (c)$ de la Definición 3.20, por lo que X es un espacio fuertemente monótonamente monolítico. ■

Dado un espacio topológico (X, τ) y $N : X \longrightarrow \tau$ una asignación de vecindades en X, denotaremos por $N(A) := \bigcup_{x \in A} N(x)$ para todo $A \subseteq X$.

Definición 3.27. Sea (X, τ) un espacio monótonamente monolítico. Para cada $A \subseteq X$ sea $\mathcal{O}(A)$ la red externa de $\overline{A}$ que satisface las propiedades de la Definición 3.20. Sea $\mathcal{N} : X \longrightarrow \tau$ una asignación de vecindades en X. Para todo $P \subseteq X$ decimos que $x \in P$ es *punto central* de P si $P \subseteq N(x)$. Denotamos por $K(P)$ al conjunto de puntos centrales de P.

Para un conjunto abierto $U \subseteq X$ decimos que $A \subseteq X$ es *U-saturado* si $K(P) \subseteq N(A) \cup U$ para cualquier $P \in \mathcal{O}(A)$. Si $U = \emptyset$, entonces a los conjuntos *U-saturados* se les llamará *saturados.*

Lema 3.28. Sean (X, τ) un espacio monótonamente monolítico, N una asignación de vecindades en X y fijemos $U \in \tau$. Supongamos que β es un ordinal y sea $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ una familia de conjuntos U-*saturados* tales que $\alpha < \alpha' < \beta$ implica que $A_\alpha \subseteq A_{\alpha'}$. Entonces el conjunto

$$A = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$$

es U-*saturado.*

Demostración. Sean (x, τ) un espacio monótonamente monolítico, $V \to \mathcal{O}(V)$ su operador asociado, $U \in \tau$ arbitrario pero fijo y $N : X \longrightarrow \tau$ una asignación de vecindades. Sean β un ordinal y $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ una colección de subconjuntos $U-$saturados tales que $\alpha < \alpha' < \beta$ implica que $A_\alpha \subseteq A_{\alpha'}$.

Sean $A := \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ y $P \in \mathcal{O}(A)$. Puesto que $\mathcal{O}(A) = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{O}(A_\alpha)$, entonces existe $\alpha < \beta$ tal que $P \in \mathcal{O}(A_\alpha)$ por lo cual, por ser A_α un conjunto $U-$saturado, se tiene que

$$K(P) \subseteq N(A_\alpha) \cup U \subseteq N(A) \cup U.$$

Por lo tanto, para todo $P \in \mathcal{O}(A)$ se tiene que $K(P) \subseteq N(A) \cup U$, de donde se sigue que $A := \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ es un conjunto $U-$saturado. ■

Lema 3.29. Sean (X, τ) un espacio monótonamente monolítco y N una asignación de vecindades en X. Entonces, para todo $A \subseteq X$ y $U \in \tau$ tal que $N(A) \subseteq U$, existe un conjunto cerrado y discreto $D \subseteq X \backslash U$ tal que $|D| \leq \textit{máx}\{|A|, \omega\}$ y el conjunto $A \cup D$ es U-*saturado.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio monótonamente monolítico, $V \to \mathcal{O}(V)$ su operador asociado y $N : X \longrightarrow \tau$ una asignación de vecindades. Sean $A \subseteq X$ y $U \in \tau$ tal que $N(A) \subseteq U$.

Procederemos utilizando inducción transfinita sobre el cardinal $\kappa = |A|$. Supongamos que $|A| \leq \omega$ y sea $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos ajenos e infinitos de $\mathbb{N}$ tales que $\bigcup\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ y $\{0, ..., n\} \subseteq \Omega_0 \cup \cdots \cup \Omega_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Puesto que se tiene que $|\mathcal{O}(A)| \leq \textit{máx}\{|A|, \omega\} = \omega$, podemos denotar $\mathcal{O}(A) = \{P_n : n \in \Omega_0\}$ y sea $B_0 := A$. Procediendo de manera inductiva, supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ existen los conjuntos $B_0, ..., B_k$ tales que se cumple lo siguiente:

1) $B_i \subseteq B_{i+1}$ y $|B_{i+1} \setminus B_i| \leq 1$ para cualquier $i < k$.

2) Una enumeración $\{P_n : n \in \Omega_j\}$ para la familia $\mathcal{O}(B_j)$ ha sido escogida para cada $j \leq k$.

3) Si $i < k$, $i \in \Omega_j$ y $\bigcup\{K(P_n) : n \in \Omega_j\} \setminus (N(B_i) \cup U) \neq \emptyset$ entonces, para $m = \textit{mín}\{n \in \Omega_j : K(P_n) \setminus (N(B_i) \cup U) \neq \emptyset\}$, se tiene que $B_{i+1} = B_i \cup \{d\}$ para algún $d \in K(P_m) \setminus (N(B_i) \cup U)$.

Como $k \in \mathbb{N}$, entonces existe un único $j \in \mathbb{N}$ tal que $k \in \Omega_j$ y por lo tanto $j \leq k$. Si tenemos la inclusión $\bigcup\{K(P_n) : n \in \Omega_j\} \subseteq N(B_k) \cup U$, entonces sea $B_{k+1} := B_k$; si no, entonces sea $m = mín\{n \in \Omega_j : K(P_n) \setminus (N(B_k) \cup U) \neq \emptyset\}$. Sean $d \in K(P_m) \setminus (N(B_k) \cup U)$ y $B_{k+1} := B_k \cup \{d\}$. Sea $\{P_n : n \in \Omega_{k+1}\}$ una enumeración de la familia $\mathcal{O}(B_{k+1})$. Observemos que ahora las condiciones $1) - 3)$ se satisfacen si remplazamos a k con $k+1$. De esta manera, nuestro procedimiento inductivo puede continuar hasta construir a la familia $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que las propiedades $1) - 3)$ se satisfacen para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Sea $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ y consideremos al conjunto $D := B \setminus A$. Se sigue de 1) que $|D| \leq \omega$ y la condición 3) muestra que $D \subseteq X \setminus U$. Para observar que el conjunto $A \cup D = B$ es $U-$saturado, sea $P \in \mathcal{O}(B)$. Por 1), se sigue que $\mathcal{O}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(B_n)$ por lo cual existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $P \in \mathcal{O}(B_j)$ y por lo tanto $P = P_n$ para algún $n \in \Omega_j$. Si $K(P) \setminus (N(B) \cup U) \neq \emptyset$ entonces $K(P_n) \setminus (N(B_i) \cup U) \neq \emptyset$ para toda $i \in \Omega_j$ lo cual es imposible pues la condición 3) implica que, después de a lo más n pasos inductivos, un punto $d \in K(P_n) \setminus (N(B_i) \cup U)$ debe ser escogido para algún $i \in \Omega_j$ y por tanto $P_n \subseteq N(d) \subseteq B$. Esta contradicción muestra que $A \cup D$ es $U-$saturado.

Ahora fijemos cualquier punto $x \in X$. Si $x \in U$ entonces U es una vecindad abierta de x tal que $U \cap D = \emptyset$. Si $x \notin N(B) \cup U$ y $x \in \overline{D}$ entonces existe $P \in \mathcal{O}(D)$ tal que $x \in P \subseteq N(x)$ y por lo tanto $x \in K(P) \setminus (N(B) \cup U)$. Tenemos que $\mathcal{O}(D) \subseteq \mathcal{O}(B)$, por lo cual $P \in \mathcal{O}(B)$ lo que contradice que B es $U-$saturado. Entonces $x \notin \overline{D}$ para cualquier $x \notin N(B) \cup U$.

Finalmente, si $x \in N(B) \setminus U$ entonces sea $m = mín\{i \in \mathbb{N} : x \in N(B_i)\}$. Se sigue de 3) que $N(B_i)$ es una vecindad abierta de x que tiene intersección vacía con el conjunto $D \setminus B_i$; esto, junto con 1), muestra que $N(B_i) \cap D$ es finito. Entonces todo $x \in X$ tiene una vecindad abierta cuya intersección con D es finita y por tanto D es cerrado y discreto. Esto completa la prueba para subconjuntos numerables A.

Supongamos ahora que κ es un cardinal no numerable y que el lema está demostrado para $A \subseteq X$ siempre que $|A| < \kappa$ y para cualquier U conjunto abierto tal que $N(A) \subseteq U$. Sean $A \subseteq X$ tal que $|A| = \kappa$, $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una enumeración de A y U subconjunto abierto cualquiera tal que $N(A) \subseteq U$. Definamos al conjunto $A_\alpha = \{a_\beta : \beta < \alpha\}$ para todo $\alpha < \kappa$.

Por hipótesis de inducción, existe un conjunto numerable, cerrado y discreto $D_\omega \subseteq X \setminus U$ tal que el conjunto $A_\omega \cup D_\omega$ es $U-$saturado. Procediendo de manera inductiva, supongamos que $\omega < \alpha < \kappa$ y que existe la familia $\{D_\beta : \omega \leq \beta < \alpha\}$ que tiene las siguientes propiedades:

(i) Si $U_\beta = U \cup N(\bigcup_{\omega \leq \gamma < \beta} D_\gamma)$ entonces D_β es un subespacio cerrado y discreto de $X \setminus U_\beta$ y $|D_\beta| \leq |\beta|$ para toda $\beta \in [\omega, \alpha)$.

(ii) Si $B_\beta = A_\beta \cup \bigcup_{\omega \leq \gamma < \beta} D_\gamma$ entonces $B_\beta \cup D_\beta$ es $U-$saturado siempre que $\omega \leq \beta < \alpha$.

Sea $U_\alpha := U \cup N(\bigcup_{\omega \leq \beta < \alpha} D_\beta)$. Se sigue de (i) que el cardinal del conjunto $B_\alpha = A_\alpha \cup \bigcup_{\omega \leq \beta < \alpha} D_\beta$ no excede a $|\alpha|$. Además, $N(B_\alpha) \subseteq U_\alpha$ por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción para encontrar $D_\alpha \subseteq X \setminus U_\alpha$ subconjunto cerrado y discreto tal que $B_\alpha \cup D_\alpha$ es $U_\alpha-$saturado. La igualdad $U_\alpha \cup N(B_\alpha \cup D_\alpha) = U \cup N(B_\alpha \cup D_\alpha)$ muestra que $B_\alpha \cup D_\alpha$ es también $U-$saturado.

Es claro que las condiciones (i) y (ii) se satisfacen para toda $\beta \in [\omega, \alpha]$, así que podemos continuar el procedimiento inductivo para construir a la familia $\{D_\beta : \omega \leq \beta < \kappa\}$ para la cual las condiciones (i) y (ii) se satisfacen siempre que $\omega < \alpha < \kappa$.

Si $D := \bigcup_{\omega \leq \beta < \kappa} D_\beta$ entonces se sigue de (i) que $D \subseteq X \setminus U$. Sea $P \in \mathcal{O}(A \cup D)$. Entonces existe $\beta < \kappa$ tal que $P \in \mathcal{O}(B_\beta)$, por lo que la condición (ii) implica que

$$K(P) \subseteq U \cup N(B_\beta \cup D_\beta) \subseteq U \cup N(D),$$

lo cual prueba que $A \cup D$ es $U-$saturado.

Sea $x \in X$; si $x \in U$ entonces U es una vecindad abierta de x que intersecta de manera vacía a D. Si $x \notin U \cup N(D)$ y $x \in \overline{D}$ entonces existe $P \in \mathcal{O}(D) \subseteq \mathcal{O}(A \cup D)$ tal que $x \in P \subseteq N(x)$, y por lo tanto $x \in K(P) \setminus (U \cup N(D))$ lo cual contradice el hecho de que $A \cup D$ es $U-$saturado. Entonces $x \notin \overline{D}$. Si $x \in N(D) \setminus U$, entonces sea α el mínimo ordinal tal que $x \in N(D_\alpha)$. Si $\alpha = \gamma + 1$ para algún ordinal γ, entonces el conjunto $E_\alpha = \bigcup_{\omega \leq \beta < \alpha} D_\beta$ está contenido en $B_\gamma \cup D_\gamma$. Si $x \in \overline{E_\alpha}$ entonces $x \in P \subseteq N(x)$ para algún subconjunto $P \in \mathcal{O}(E_\alpha) \subseteq \mathcal{O}(B_\gamma \cup D_\gamma)$. Como $B_\gamma \cup D_\gamma$ es un conjunto $U-$saturado, entonces

$$x \in K(P) \subseteq U \cup N(B_\gamma \cup D_\gamma),$$

y por lo tanto $x \in N(\bigcup_{\omega \leq \beta \leq \gamma} D_\beta)$ lo que contradice la elección de α. Por lo tanto $x \notin \overline{E_\alpha}$.

Si α es un ordinal límite, entonces $B_\alpha := \bigcup_{\omega \leq \beta < \alpha} (B_\beta \cup D_\beta)$ por lo cual, usando (ii) y el Lema 3.28, se tiene que B_α es $U-$saturado. Si $x \in \overline{E_\alpha}$ entonces $x \in P \subseteq N(x)$ y por tanto $x \in K(P)$ para algún $P \in \mathcal{O}(E_\alpha) \subseteq \mathcal{O}(B_\alpha)$. Como B_α es $U-$saturado, se sigue que $K(P) \subseteq U \cup N(B_\alpha)$ y por tanto, puesto que $x \notin U$, concluimos que $x \in N(E_\alpha)$ lo cual es de nuevo una contradicción por la elección de α. Por lo tanto $x \notin \overline{E_\alpha}$ en todos los casos. La propiedad (i) muestra que $N(D_\alpha)$ es una vecindad abierta de x que intersecta de manera vacía al conjunto $\bigcup_{\alpha < \beta < \kappa} D_\beta$. Consecuentemente, el punto x tiene una vecindad abierta que no intersecta al conjunto $\bigcup \{D_\beta : \beta \in [\omega, \kappa) \setminus \{\alpha\}\}$. El conjunto D_α es cerrado y discreto por lo cual x tiene una vecindad abierta que contiene a lo más un punto de D. Entonces D es un subconjunto cerrado y discreto de $X \setminus U$ y además, por la propiedad (i), se tiene que $|D| \leq \kappa$.

Por el principio de inducción transfinita, nuestra prueba está completa ■

Teorema 3.30. Cualquier espacio monótonamente monolítico es un espacio hereditariamente D.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio monótonamente monolítico. Puesto que todo subespacio de un espacio monótonamente monolítico es monótonamente monolítico, basta demostrar que X es un espacio D.

Denotemos por $\kappa = |X|$ a la cardinalidad de X. Como todo espacio Tychonoff finito es discreto (y por tanto un espacio D), podemos suponer que $\kappa \geq \omega$. Para todo $A \subseteq X$ sea $\mathcal{O}(A)$ una red externa de $\overline{A}$ en X que satisface las propiedades de la Definición 3.20.

Sean $N : X \longrightarrow \tau$ una asignación de vecindades en X y $a \in X$ fijo. Aplicando el Lema 3.29 al conjunto $A := \{a\}$ y $U = N(a) \subseteq N(A)$, existe $D_0^{'} \subseteq X \backslash U$ cerrado y discreto tal que $D_0 = \{a\} \cup D_0^{'}$ es U-*saturado*. Entonces

$$K(P) \subseteq N(D_0) \cup U = \bigcup_{x \in D_0} N(x) \cup N(a) = N(D_0)$$

para todo $P \in \mathcal{O}(A)$, donde $K(P)$ denota al conjunto de los puntos centrales de P. Así, D_0 es un conjunto saturado. Como $a \notin D_0^{'}$ entonces existen abiertos ajenos que separan a $\{a\}$ y a $D_0^{'}$, por lo cual se sigue que D_0 es cerrado y discreto.

Procediendo de manera inductiva, supongamos que α es un ordinal tal que $0 < \alpha < \kappa^+$ (donde κ^+ denota al cardinal sucesor de κ) y que tenemos una familia $\{D_\beta : \beta < \alpha\}$ de subconjuntos cerrados, discretos y no vacíos tales que:

(a) El conjunto $\bigcup_{\gamma<\beta} D_\gamma$ es saturado para cualquier $\beta < \alpha$.

(b) $D_\beta \subseteq X \setminus N(\bigcup_{\gamma<\beta} D_\gamma)$ para todo $\beta < \alpha$.

Si $N(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta) \neq X$, sean $Q := \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ y $b \in X \setminus N(Q)$. Por el Lema 3.29 aplicado al conjunto $Q \cup \{b\}$ y $V = N(Q \cup \{b\})$, existe $D_\alpha^{'} \subseteq X \setminus N(\{b\} \cup Q)$ tal que $Q \cup \{b\} \cup D_\alpha^{'}$ es V-saturado. Sea $D_\alpha := \{b\} \cup D_\alpha^{'}$. Es claro que D_α es cerrado, discreto, no vacío y que

$$K(P) \subseteq N(Q \cup \{b\} \cup D_\alpha^{'}) \cup N(Q \cup \{b\}) = N(Q \cup D_\alpha)$$

para cualquier $P \in \mathcal{O}(Q \cup D_\alpha)$, por lo cual $Q \cup D_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} D_\beta$ y de esta manera las propiedades (a) y (b) se siguen manteniendo para $\beta \leq \alpha$.

De esta manera, esta construcción inductiva puede continuar a un conjunto D_α siempre que $N(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta) \neq X$. Supongamos que podemos construir a la familia $\{D_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$. Dados $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa^+$ se tiene que

$$D_{\alpha_2} \subseteq X \setminus N\left(\bigcup_{\gamma<\alpha_2} D_\gamma\right) \subseteq X \setminus D_{\alpha_1},$$

por lo cual $D_{\alpha_1} \cap D_{\alpha_2} = \emptyset$. Por tanto,

$$\left|\bigcup_{\alpha<\kappa^+} D_\alpha\right| = \sum_{\alpha<\kappa^+} |D_\alpha| = \kappa^+ \cdot sup\{|D_\alpha| : \alpha < \kappa^+\} = \kappa^+,$$

lo cual es imposible. Entonces debe existir $\alpha < \kappa^+$ tal que $N\left(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta\right) = X$.

Sea $D := \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ y tomemos a $x \in X$. Sea $\gamma = mín\{\beta < \alpha : x \in N(D_\beta)\}$. Por (b) se sigue que para toda $\beta > \gamma$ se tiene que

$$D_\beta \subseteq X \setminus N\left(\bigcup_{\theta<\beta} D_\theta\right) \subseteq X \setminus N(D_\gamma),$$

por lo cual $D_\beta \cap N(D_\gamma) = \emptyset$. Obsérvese que, aplicando (a) y el Lema 3.28, resulta que el conjunto $E := \bigcup_{\beta<\gamma} D_\beta$ es saturado. Supongamos, para generar una contradicción, que $x \in \overline{E}$. Entonces $x \in P \subseteq N(x)$ para algún $P \in \mathcal{O}(E)$ de donde se sigue que $x \in K(P) \subseteq N(E)$, lo cual es una contradicción por la elección de γ. Así, $x \notin \overline{E}$ y entonces

$$\{D_\beta : D_\beta \cap N(D_\gamma) \neq \emptyset,\ \beta < \alpha\} = \{D_\gamma\},$$

por lo cual $\{D_\beta : \beta < \alpha\}$ es una familia localmente discreta y por lo tanto D es cerrado.

Finalmente, sea $x \in D$. Por lo hecho anteriormente, sabemos que existe $\gamma < \alpha$ tal que $x \in N(D_\gamma)$ y $N(D_\gamma) \cap D_\beta = \emptyset$ si $\beta \neq \gamma$. Entonces, necesariamente $x \in D_\gamma$. Como D_γ es un subconjunto cerrado y discreto en X se sigue que $X \setminus (D_\gamma \setminus \{x\})$ es un conjunto abierto en X por lo cual

$$\{x\} \subseteq D \cap (N(D_\gamma) \cap (X \setminus (D_\gamma \setminus \{x\})) = D_\gamma \cap X \setminus (D_\gamma \setminus \{x\}) = \{x\}$$

es un subconjunto abierto en D.

Así, D es un subconjunto cerrado, discreto y no vacío de X tal que $N(D) = X$. Por lo tanto X es un espacio D. ∎

Corolario 3.31 (Arkhangel'skii - Buzyakova, [4])**.** Todo espacio topológico X con una base puntualmente numerable es un espacio hereditariamente D.

3.3 El teorema de Tkachuk

En esta sección probaremos el resultado más importante de este capítulo. Como hemos mencionado a lo largo de este capítulo, este teorema asegura que si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ entonces $C_p(X)$ es un espacio monótonamente monolítico. La importancia de este resultado es que unifica algunos resultados de la C_p-teoría, a saber: el teorema de Baturov (1987), el teorema de Grothendieck (1952), y los ya mencionados teoremas de Buzyakova (2004) y Gruenhage (2006), y el siguiente teorema de Arkhangel'skii: *Si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$ entonces $C_p(X)$ es monolítico.* Algunos resultados más se desprenderán de algunas de las propiedades de los espacios D que se presentaron en el Capítulo 2.

Teorema 3.32 (Tkachuk). Si X es un espacio Lindelöf-Σ entonces $C_p(X)$ es un espacio monótonamente monolítico.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio Lindelöf-Σ. Entonces existen $\mathcal{K}$ cubierta compacta de X y $\mathcal{N}$ red numerable respecto a $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de $\mathbb{R}$.

Para $n \in \mathbb{N}$, $E_1, ..., E_n \subseteq X$ y $U_1, ..., U_n \in \tau(\mathbb{R})$ sea

$$[E_1, ..., E_n; U_1, ..., U_n] := \{f \in C_p(X) : f[E_i] \subseteq U_i \text{ para } i \leq n\}$$

En el caso en que $E_i = \{x_i\}$, para todo $i \leq n$, escribiremos $[x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n]$ en lugar de $[\{x_1\}, ..., \{x_n\}; U_1, ..., U_n]$ que corresponde a un elemento de la base canónica de $C_p(X)$.

Para cualquier $\xi \subseteq \mathcal{P}(X)$ familia de subconjuntos de X, definimos:

- $\mathcal{C}(\xi) := \{N \backslash E : N \in \mathcal{N} \text{ y } E \in \xi\}$.
- $\mathcal{F}(\xi) := \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \xi \text{ y } |\mathcal{A}| < \omega\} \cup \{\emptyset\}$ la familia de uniones finitas de elementos de ξ.
- $\mathcal{W}(\xi) := \{[E_1, ..., E_n; U_1, ..., U_n] : E_i \in \xi \text{ y } U_i \in \mathcal{B} \text{ para } i \leq n, n \in \mathbb{N}^+\}$.

Dado $A \subseteq C_p(X)$ definamos a $\xi_A := \{f^{-1}[B] : f \in A \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{H}_A := \mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_A))$ y a la colección $\mathcal{O}(A) := \mathcal{W}(\mathcal{H}_A)$. Nuestro objetivo será demostrar que $\mathcal{O}(A)$ es una red externa de $\overline{A}$ que satisface las propiedades (a)-(c) de la Definición 3.20 para cada $A \subseteq X$. Para ello, necesitamos demostrar la siguiente afirmación:

Sea $A \subseteq C_p(X)$. Para cada $f \in \overline{A}$, $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \in B$ existe $P \in \mathcal{H}_A$ tal que $f \in [P; B] \subseteq [x; B]$.

Demostración. Sean $A \subseteq C_p(X)$, $f \in \overline{A}$, $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \in B$. Como $\mathcal{K}$ es cubierta compacta de X, sea $K \in \mathcal{K}$ tal que $x \in K$.

Supongamos que $f^{-1}[B] \neq X$. Entonces para cualquier $z \in X \backslash f^{-1}[B]$ existe $B_z \in \mathcal{B}$ tal que $f(z) \in B_z$ y $f(x) \notin \overline{B_z}$. En efecto: sea $z \in X \backslash f^{-1}[B]$, entonces $f(x) \neq f(z)$ por lo cual existen $U_z, V_z \in \tau(\mathbb{R})$ tales que $f(x) \in U_z$, $f(z) \in V_z$ y $U_z \cap V_z = \emptyset$. Luego, existe $W_z \in \tau_e$ tal que $f(z) \in W_z \subseteq \overline{W_z} \subseteq V_z$ y así, como $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}$, existe $B_z \in \mathcal{B}$ tal que

$$f(z) \in B_z \subseteq W_z \subseteq \overline{W_z} \subseteq V_z,$$

por lo cual $f(z) \in B_z$ y $f(x) \notin \overline{B_z}$.

Sea $z \in X \backslash f^{-1}[B]$. Si $f \in A$ entonces $f(x) \in B \backslash \overline{B_z}$ y $f(z) \in B_z$. Si $f \notin A$ entonces $f \in der(A)$ y, puesto que el conjunto $[x, z; B \backslash \overline{B_z}, B_z]$ es un abierto canónico en $C_p(X)$ tal que $f \in [x, z; B \backslash \overline{B_z}, B_z]$, entonces existe $g \in [x, z; B \backslash \overline{B_z}, B_z] \cap A$ por lo cual $g \in A$, $g(x) \in B \backslash \overline{B_z}$ y $g(z) \in B_z$. Así, para toda $z \in X \backslash f^{-1}[B]$ existe $a_z \in A$ tal que $a_z(x) \in B \backslash \overline{B_z}$ y $a_z(z) \in B_z$.

Definamos a $\mathcal{A} = \{a_z^{-1}[B_z] : z \in X \backslash f^{-1}[B]\}$. La colección $\mathcal{A} \cup \{f^{-1}[B]\}$ es una cubierta abierta de K por lo cual existe $Q \subseteq K$ finito tal que

$$x \in K \subseteq \bigcup \{a_z^{-1}[B_z] : z \in Q\} \cup f^{-1}[B].$$

Sea $G := \bigcup \{a_z^{-1}[B_z] : z \in Q\} \cup f^{-1}[B]$. Entonces existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $K \subseteq N \subseteq G$. Por construcción $x \notin a_z^{-1}[B_z]$ para todo $z \in Q$, por lo cual, si $P = N \backslash \bigcup \{a_z^{-1}[B_z] : z \in Q\}$, se tiene que

$$x \in P \subset f^{-1}[B],$$

de donde se sigue que $f[P] \subseteq B$ y así $f \in [P; B] \subseteq [x; B]$ con $P \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_A)) = \mathcal{H}_A$.

Supongamos que $f^{-1}[B] = X$. Entonces $K \subseteq f^{-1}[B]$ por lo cual existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in K \subseteq N \subseteq f^{-1}[B]$ y por lo tanto

$$f(x) \in f[N] \subseteq B,$$

por lo cual $f \in [N; B] \subseteq [x; B]$ con $N = N \backslash \emptyset \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_A)) = \mathcal{H}_A$. Así, queda demostrada la afirmación.

Sean $A \subseteq C_p(X)$, $f \in \overline{A}$ y V conjunto abierto en $C_p(X)$ tal que $f \in V$. Entonces existe un abierto canónico V' de la forma $[x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n]$, con $x_i \in X$ y $B_i \in \mathcal{B}$ para toda $i \leq n$, tal que $f \in [x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n] \subseteq V$. Observemos que

$$V' = [x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n] = \bigcap_{i=1}^{n} [x_i; B_i]$$

por lo cual, usando la afirmación demostrada anteriormente, para toda $i \leq n$ existe $P_i \in \mathcal{H}_A$ tal que $f \in [P_i; B_i] \subseteq [x_i; B_i]$. De esta manera

$$f \in [P_1, ..., P_n; B_1, ..., B_n] = \bigcap_{i=1}^{n} [P_i; B_i] \subseteq V' \subseteq V,$$

y además $[P_1, ..., P_n; B_1, ..., B_n] \in \mathcal{O}(A) = \mathcal{W}(\mathcal{H}_A)$. Así, $\mathcal{O}(A)$ es red externa de $\overline{A}$.

Por construcción, $|\xi_A| \leq |A \times \mathcal{B}| \leq \textit{máx}\{\omega, |A|\}$. Puesto que

$$\mathcal{F}(\xi_A) = \left\{ \bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \xi_A \text{ y } |\mathcal{A}| < \omega \right\} \cup \{\emptyset\} = \bigcup_{0<n<\omega} \left\{ \bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \xi_A \text{ y } |\mathcal{A}| = n \right\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces $|\mathcal{F}(\xi_A)| \leq \omega \textit{máx}\{|A|, \omega\} = \textit{máx}\{\omega, |A|\}$. Así, $|\mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_A))| \leq |\mathcal{N} \times \mathcal{F}(\xi_A)| = \textit{máx}\{\omega, |A|\}$ y por lo tanto

$$|\mathcal{O}(A)| = \left| \bigcup_{0<n<\omega} \{[E_1, ..., E_n; U_1, ..., U_n] : E_i \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_A)) \text{ y } U_i \in \mathcal{B} \text{ para } i \leq n\} \right| \leq \textit{máx}\{\omega, |A|\}.$$

Entonces, para todo $A \subseteq C_p(X)$, $\mathcal{O}(A)$ es una red externa de $\overline{A}$ tal que $\mathcal{O}(A) \leq \textit{máx}\{\omega, |A|\}$.

Sean $C, D \subseteq C_p(X)$ tales que $C \subseteq D$. Entonces

$$\{f^{-1}[B] : f \in C \text{ y } B \in \mathcal{B}\} \subseteq \{f^{-1}[B] : f \in D \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$$

de donde se sigue inmediatamente que $\mathcal{O}(C) \subseteq \mathcal{O}(D)$.

Finalmente, sea α un ordinal y $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ una familia de subconjuntos de $C_p(X)$ tales que $\beta < \beta' < \alpha$ implica $A_\beta \subseteq A_{\beta'}$. Sea $V \in \mathcal{O}(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $E_1, ..., E_n \in \mathcal{C}\left(\mathcal{F}\left(\xi_{\cup_{\beta<\alpha} A_\beta}\right)\right)$ y $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}$ tales que $V = [E_1, ..., E_n; B_1, ..., B_n]$.

Sea $1 \leq i \leq n$. Entonces existen $N_i \in \mathcal{N}$ y $G_i \in \mathcal{F}\left(\xi_{\cup_{\beta<\alpha} A_\beta}\right)$ tales que $E_i = N_i \backslash G_i$.

Supongamos que $G_i \neq \emptyset$, entonces existen $m_i \in \mathbb{N}^+$ y $F_1^i, ..., F_{m_i}^i \in \xi_{\cup_{\beta<\alpha} A_\beta}$ tales que $G_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} F_j^i$. Sea $1 \leq j \leq m_i$, entonces $F_j^i \in \xi_{\cup_{\beta<\alpha} A_\beta}$ por lo cual existe $f_j^i \in \cup_{\beta<\alpha} A_\beta$ y

$B^i_j \in \mathcal{B}$ tales que $F^i_j = (f^i_j)^{-1}[B^i_j]$. Dado que $f^i_j \in \cup_{\beta<\alpha} A_\beta$, sea $\gamma^i_j < \alpha$ tal que $f^i_j \in A_{\gamma^i_j}$. Sea $\gamma_i = \textit{máx}\{\gamma^i_1, ..., \gamma^i_{m_i}\} + 1$. Entonces $f^i_j \in A_{\gamma_i - 1}$ para toda $1 \leq j \leq m_i$. Si $G_i = \emptyset$, entonces sea $\gamma_i = 0$.

Sea $\gamma = \textit{máx}\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$. Si $\gamma = 0$ entonces $E_i = N_i$ para toda $1 \leq i \leq n$ por lo cual $E_i \in \mathcal{N}$ para toda $1 \leq i \leq n$, y por tanto, $E_i \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_{A_0}))$ para toda $1 \leq i \leq n$. Así $V \in \mathcal{O}(A_0) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(A_\beta)$.

Supongamos que $\gamma \geq 1$. Si $\gamma_i \geq 1$ entonces $A_{\gamma_i - 1} \subseteq A_{\gamma - 1}$ por lo cual $f^i_j \in A_{\gamma-1}$ para toda $1 \leq j \leq m(i)$, de donde se sigue que $F^i_j \in \xi_{A_{\gamma-1}}$ para toda $1 \leq j \leq m(i)$ y por consiguiente $E_i = N_i \setminus G_i \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_{\gamma-1}))$. Si $\gamma_i = 0$ entonces $E_i = N_i \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\xi_{\gamma-1}))$. De esta manera $V \in \mathcal{O}(A_{\gamma-1}) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(A_\beta)$.

Así, $\mathcal{O}(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(A_\beta)$ implicando que $\mathcal{O}(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}(A_\beta)$.

Por lo tanto $C_p(X)$ es un espacio monótonamente monolítico. ■

Debido a que los espacios $\sigma-$compactos y los espacios de peso de red numerable son espacios Lindelöf$-\Sigma$, el anterior resultado genera el siguiente corolario.

Corolario 3.33. Si X es $\sigma-$compacto o $nw(X) \leq \omega$, entonces $C_p(X)$ es un espacio hereditariamente D.

Terminamos esta tesis enunciando algunos resultados clásicos que ahora sabemos son consecuencia del teorema de Tkachuk (ver Teorema 3.32).

Corolario 3.34 (Arkhangel'skii)**.** Si X es un espacio Lindelöf$-\Sigma$, entonces $C_p(X)$ es un espacio monolítico.

Corolario 3.35 (Gruenhage, [18])**.** Si X es un espacio Lindeloff$-\Sigma$, entonces $C_p(X)$ es un espacio hereditariamente D.

Corolario 3.36 (Buzyakova, [8])**.** Si X es un espacio compacto, entonces $C_p(X)$ es un espacio hereditariamente D.

Corolario 3.37 (Baturov, [5])**.** Sea X un espacio compacto, entonces $l(Y) = e(Y)$ para cualquier subespacio Y de $C_p(X)$.

Corolario 3.38 (Grothendieck, [17])**.** Si X un espacio compacto y $Y \subseteq C_p(X)$ es un subespacio numerablemente compacto, entonces Y es un subespacio compacto de $C_p(X)$.

Bibliografía

[1] Aguilar Velázquez, J. A. (2015). *La propiedad Lindelöf* Σ *en espacios de funciones*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma Metropolitana]. Repositorio de la UAM http://tesiuami.izt.uam.mx/uam/default.php

[2] Alas, O. T., Junqueira, L. R., & Wilson, R. G. (2008). Dually discrete spaces. *Topology and its Applications*, 155(13), 1420-1425.

[3] Arkhangel'skii, A. V. (1984). Continuous mappings, factorization theorems and spaces of functions. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 47, 3-21.

[4] Arkhangel'skii, A. V., & Buzyakova, R. Z. (2002). Addition theorems and D-spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 43(4), 653-663.

[5] Baturov, D. P. (1987). Subspaces of function spaces. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 4, 66-69.

[6] Borges, C. R., & Wherly, A. C. (1991). A study of D-spaces. *Topology Proceedings*, 16, 7-15.

[7] Buzyakova, R. Z. (2002). On D-property of strong Σ spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 43(3), 493-495.

[8] Buzyakova, R. (2004). Hereditary D-property of function spaces over compacta. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(11), 3433-3439.

[9] Casarrubias Segura, F., Tamariz Mascarúa, Á. (2019). *Elementos de Topología General*. Colección *Aportaciones matemáticas* Textos 37, Instituto de Matemáticas, UNAM.

[10] Casarrubias Segura, F. (2022). Espacios Cp (X) en el contexto de la clase L$\Sigma(\omega)$. *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana*, 18, 3-29.

[11] Clapp, M. (2017). *Análisis matemático* (Segunda ed.). Colección *papirhos* Textos 2, Instituto de Matemáticas, UNAM.

[12] Creede, G. (1970). Concerning semi-stratifiable spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 32(1), 47-54.

[13] van Douwen, E., & Pfeffer, W. V. (1979). Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 81(2), 371-377.

[14] van Douwen, E. K., & Wicke, H. H. (1977). A real, weird topology on the reals. *Houston J. Math*, 3(1), 141-152.

[15] Eisworth, T. (2007). On D-spaces. *In Open problems in topology II* (pp. 129-134). Elsevier.

[16] Engelking, R. (1989). General topology. *Sigma series in pure mathematics*, 6.

[17] Grothendieck, A. (1952). Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. *American Journal of Mathematics*, 74(1), 168-186.

[18] Gruenhage, G. (2006). A note on D-spaces. *Topology and its Applications*, 153(13), 2229-2240.

[19] Gruenhage, G. (2011). A survey of D-spaces. *Set Theory and Its Applications: Annual Boise Extravaganza in Set Theory, Boise, Idaho*, 1995-2010, 533, 1.

[20] Guo, H., & Junnila, H. (2011). D-spaces and thick covers. *Topology and its Applications*, 158(16), 2111-2121.

[21] Hernández Hernández, F. (2011). *Teoría de Conjuntos (Una introducción)* (Tercera edición.). (Instituto de Matemáticas) Sociedad Matemática Mexicana, Colección *Aportaciones matemáticas* Textos 13.

[22] Hongfeng, G., & Junnila, H. (2010). On spaces which are linearly D. *Topology Appl*, 157, 102-107.

[23] Just, W., & Weese, M. (1996). Discovering modern set theory. I: The basics, volume 8 of Graduate Studies in Mathematics.

[24] Nagami, K. (1969). Σ-spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 65(2), 169-192.

[25] Nyikos, P. J. (2011). D-spaces, trees, and an answer to a problem of Buzyakova. *In Topology Proceedings* (Vol. 38, pp. 361-373).

[26] Peng, L. X. (2010). On spaces which are D, linearly D and transitively D. *Topology and its Applications*, 157(2), 378-384.

[27] Tkachuk, V. V. (2009). Monolithic spaces and D-spaces revisited. *Topology and its Applications*, 156(4), 840-846.

[28] Tkachuk, V. V. (2011). *A Cp-theory problem book.* New York-Dordrecht-Heidelberg-London: Springer.

Índice alfabético