Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Relaciones entre algunas retículas de clases de módulos y algunos tipos importantes de anillos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

Luis Alfonso García Araoz

TUTOR:
Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Ciudad Universitaria, CD. MX. 2023

UNAM Universidad Nacional Autónoma de México
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
   García
   Araoz
   Luis Alfonso
   56306494
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   314090665

2. Datos del tutor
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía

3. Datos del sinodal 1
   Dra.
   Bertha María
   Tomé
   Arreola

4. Datos del sinodal 2
   Dra.
   Diana
   Avella
   Alaminos

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Óscar Alberto
   Garrido
   Jiménez

6. Datos del sinodal 4
   M. en C.
   Luis Fernando
   García
   Mora

7. Datos del trabajo escrito
   Relaciones entre algunas retículas de clases de módulos y algunos tipos importantes de anillos
   77p
   2023

Agradecimientos

Al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, con gran admiración, por su generoso apoyo, paciencia y guía a lo largo de este trabajo y años bajo su enseñanza.

A la Dra. Bertha María Tomé Arreola, a la Dra. Diana Avella Alaminos, al Dr. Óscar Alberto Garrido Jiménez y al M. en C. Luis Fernando García Mora por sus atentas observaciones, correcciones y comentarios que me ayudaron en la finalización de esta tesis.

A mis padres y mi hermano por su apoyo incondicional, pr el inagotable amor y enseñarme a ser la persona que quiero ser.

A Sandy, por su compañía y cariño a lo largo de toda esta etapa de nuestras vidas; por compartir, estar y amar en todo momento.

A mis amigos y compañeros Diego, Ari, Alba, Nestor, Karim, Isaac y Gema durante este viaje llamado licenciatura.

A todos mis profesores y alumnos que me hicieron valorar el conocimiento aprendido y enseñado.

Relaciones entre algunas retículas de clases de módulos y algunos tipos importantes de anillos.

Luis Alfonso García Araoz

Índice

Introducción

El objetivo de este trabajo es dar caracterizaciones que permiten relacionar clases de módulos inyectivos, proyectivos, noetherianos, artinianos y de Serre con los anillos de Kasch, PF y QF.

La tesis se encuentra dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo se definen los conceptos de retículas y sucesiones exactas, los cuales son ampliamente utilizados a lo largo de la tesis. Para la definición de retículas se define primero el concepto de conjunto parcialmente ordenado y como consecuencia de esto también se define el concepto de cadena. Por el lado del concepto de las sucesiones exactas, se debe notar su importancia en la teoría de módulos, ya que existen muchos conceptos que pueden ser estudiados a partir de diagramas y sucesiones, de esta manera en este capítulo se introducen los preliminares necesarios para el uso de propiedades relacionadas con morfismos, sucesiones y diagramas.

En el segundo capítulo se definen las primeras clases de módulos que se emplearán a lo largo de la tesis, que son los módulos inyectivos y proyectivos, además de definir dos estructuras que son de gran utilidad para desarrollar muchos de los conceptos, que son el zoclo y el radical de un R-módulo. Todas estas construcciones motivan la definición de nuevas clases de módulos a lo largo del capítulo como lo son los módulos simples y semisimples.

En el tercer capítulo se utilizan en mayor medida el concepto de cadena definido en el primer capítulo, esto para definir las últimas clases de módulos que se abordan en la tesis, las cuales son las clases de módulos noetherianos, artinianos, semiartinianos y clases de Serre. Además, se dan importantes caracterizaciones y relaciones entre clases de módulos y con ellas concluir el capítulo con el Teorema de Hopkins-Levitzki.

El cuarto capítulo tiene como objetivo definir los anillos casi Frobenius, además de obtener algunas caracterizaciones y relaciones con algunas de las clases de módulos establecidas en los capítulos anteriores. Para llegar a ello se da un pequeño preliminar del uso de anuladores en anillos y se dedica una sección a la teoría de torsión de Lambek sobre submódulos e ideales densos. Con los resultados obtenidos en estas secciones es que se pueden caracterizar a los anillos de Kasch y los anillos QF, las cuales a su vez motivan las relaciones de un anillo QF con clases de módulos como por ejemplo los módulos inyectivos y proyectivos.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se darán las primeras definiciones relacionadas al orden y a los morfismos entre R-módulos, lo cual llevará a definir los conceptos de retículas y sucesiones de R-módulos.

1.1 Retículas

En la teoría de módulos es de gran importancia el concepto de retícula, para ello se debe establecer un orden entre los submódulos de un R-módulo. Esto motiva las primeras definiciones sobre órdenes parciales.

Definición 1. *Sea X un conjunto, una relación binaria $\leq$ es un orden parcial si $\forall$ x, w, $z \in X$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $x \leq x$.
2. $(x \leq z \wedge z \leq x) \Rightarrow x = z$.
3. $(x \leq w \wedge w \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Definición 2. *Si $(A, \leq)$ y $(B, \leq')$ son conjuntos parcialmente ordenados, un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados $f : A \to B$ es una función que respeta el orden, es decir, si $a_1 \leq a_2$, entonces $f(a_1) \leq' f(a_2)$.*

Definición 3. *Sean $(A, \leq)$, $(B, \leq')$ dos conjuntos parcialmente ordenados y $f : A \to B$ un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados. Decimos que:*

- *f es un epimorfismo si f es una función sobreyectiva.*
- *f es un monomorfismo si f es una función inyectiva.*
- *f es un isomorfismo si f es una función biyectiva.*

Definición 4. *Sea $(X, \leq)$ un orden parcial y $x \in X$*

1. *x es el elemento mayor de X si $\forall$ $y \in X$, $y \leq x$.*

2. x *es el elemento menor de* X *si* $\forall\ y \in X,\ x \leq y$.

3. x *es un elemento máximo de* X *si* $\forall\ y \in X\ (x \leq y \Rightarrow x = y)$.

4. x *es un elemento mínimo de* X *si* $\forall\ y \in X\ (y \leq x \Rightarrow x = y)$.

Definición 5. *Sea* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado,* x *es supremo de* $Y \subseteq X$ *si:*

1. $\forall z \in Y,\ z \leq x$.

2. $(\forall\ z \in Y,\ z \leq w) \Rightarrow x \leq w$.

Definición 6. *Sea* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado,* x *es un ínfimo de* $Y \subseteq X$ *si:*

1. $\forall z \in Y,\ x \leq z$

2. $(\forall\ z \in Y,\ w \leq z) \Rightarrow w \leq x$.

Definición 7. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(L \leq)$ *es una retícula si* $\forall\ a,\ b \in L$, *el conjunto* $\{a,\ b\}$ *tiene supremo e ínfimo. Denotaremos el supremo de* $\{a,\ b\}$ *como* $a \vee b$ *y el ínfimo de* $\{a,\ b\}$ *se denotará como* $a \wedge b$.

Si se tiene que cualquier A *,* $A \subseteq L$*, tiene supremo e ínfimo, entonces diremos que la retícula es completa.*

Definición 8. *Sea* $(L, \leq)$ *una retícula con elemento menor* 0 *y elemento mayor* 1*, dados* $a,\ b \in L$ *decimos que* b *es un complemento de* a *si* $a \vee b = 1$ *y* $a \wedge b = 0$.

Definición 9. *Una retícula* $(L, \leq)$ *es modular si dados* $a,\ b \in L$ *tales que* $a \leq b$ *entonces* $a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b\ \forall\ x \in L$.

Definición 10. *En una retícula* $(L, \leq)$ *con elemento menor* 0*, decimos que* b *es un seudocomplemento de* a *si* b *es máximo en el conjunto* $\{c \in L \mid a \wedge c = 0\}$.

Definición 11. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(X, \leq)$ *es una cadena, u orden total, si, para cualesquiera* $x,\ y \in X$ *se tiene que* $x \leq y$ *o* $y \leq x$.

Definición 12. *Decimos que un conjunto* $(X, \leq)$ *tiene condición de cadena ascendente si toda cadena ascendente de elementos de* X *se estaciona, es decir, si dada una cadena:*

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq ...$$

$\exists\ n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n = a_m\ \forall\ m \geq n$.

Decimos que un conjunto $(X, \leq)$ *tiene condición de cadena descendente, si toda cadena descendente de* X *se estaciona, es decir, si dada una cadena:*

$$... \leq a_n \leq ... \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1$$

$\exists\ n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n = a_m\ \forall\ m \geq n$.

Definición 13. *Decimos que un conjunto parcialmente ordenado* $(X, \leq)$ *distinto del vacío tiene condición máxima si todo subconjunto no vacío* $Y \subseteq X$ *tiene un máximo.*

Decimos que un conjunto X *distinto del vacío tiene condición mínima si todo subconjunto* $Y \subseteq X$ *tiene mínimo.*

Observación 1. *Sea* M *un* R*-módulo. Si* $A \leq M$*, entonces* ${}_R[A, M] := \{N \leq M \mid A \leq N \leq M\}$ *es una retícula modular completa.*

Este es un conjunto ordenado por la inclusión de submódulos.

Si $\{B_i\}_I$ es una familia en ${}_R[A, M]$, su ínfimo es $\bigcap\{B_i\}$ y el supremo es $\Sigma\{B_i\} = \{\sum_{j \in F} b_j \in B_j \mid F$ es un subconjunto finito de $I\}$. Análogamente, $[A, M]_R$ denotará la retícula de los submódulos derechos de M_R que contienen a A_R.

Denotaremos $Ide_{\bullet}(R) =_R [0, R]$ la retícula de los ideales izquierdos de R. $Ide(R)_{\bullet} = [0, R]_R$ denotará la retícula de los ideales derechos de R y con $Ide_{\bullet}(R)_{\bullet} =_R [0, R]_R$ la retícula de los ideales bilaterales de R.

Definición 14. *Si* $(L, \leq, \wedge, \bigvee)$ *y* $(L', \leq', \wedge', \bigvee')$ *son retículas completas, entonces un isomorfismo de retículas es una función* $f : L \longrightarrow L'$ *que respeta el orden, supremos e ínfimos arbitrarios y que tiene una inversa con las mismas propiedades.*

En la siguiente sección se define el concepto de R-morfismos, así como algunas propiedades que se emplean a lo largo de la teoría de módulos.

1.2 Sucesiones exactas de R-módulos

Definición 15. *Un morfismo de* R*-módulos o* R*-morfismo es una función* $f : {}_RM \to {}_RN$ *tal que* $\forall\ x, y \in_R M$ *y* $\forall\ r \in R$ *se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

2. $f(rx) = rf(x)$.

Si es claro que M es un R-módulo lo denotaremos únicamente como M en lugar de ${}_RM$, en lugar de R-morfismo diremos morfismo.

Definición 16. *Si* $M \xrightarrow{f} L$ *es un morfismo, entonces* $N \xrightarrow{\eta} M$ *es un núcleo de* f *si:*

1. *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & M \arrow[r, "f"] & L \end{tikzcd}$$

2. *Si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[r, "f"] & L \\ & A \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $u : A \longrightarrow N$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[r, "f"] & L \\ & A \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "0"'] \arrow[ul, dashed, "u"] & \end{tikzcd}.$$

Definición 17. *Si* $M \xrightarrow{f} L$ *es un morfismo, entonces* $L \xrightarrow{c} C$ *es un conúcleo de* f *si:*

1. *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & L \arrow[r, "c"] & C \end{tikzcd}$$

2. *Si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & L \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h"] & C \\ & D & \end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $u : C \longrightarrow D$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & L \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[dl, dashed, "u"] \\ & D & \end{tikzcd}.$$

Definición 18. *Un morfismo* $M \xrightarrow{f} N$ *es un monomorfismo si* $f \circ g = f \circ h$, *implica que* $g = h$, $\forall$ $L \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} M$.

Lema 1. *Son equivalentes para un morfismo* $M \xrightarrow{f} N$.

1) f *es monomorfismo.*

2) f *es inyectivo.*

3) $0 \xrightarrow{\overline{0}} M$ *es un núcleo para* f.

Demostración:

2) $\Rightarrow$ 1) Todo morfismo inyectivo es un monomorfismo pues toda función inyectiva es cancelable por la izquierda.

1) $\Rightarrow$ 3) Lo demostraremos utilizando la propiedad universal del núcleo. Sea L un R-módulo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ & L \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}.$$

Existe un único morfismo $L \to 0$ a saber el morfismo 0. Por la conmutatividad del diagrama se tiene que $f \circ h = 0 = f \circ 0_L^M$ y como f es un monomorfismo, entonces $h = 0$ y por lo tanto se cumple la propiedad universal del núcleo.

3) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que f no es un morfismo inyectivo, sean $x,\ y \in M$ tales que $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$, entonces $x - y \in \{m \in M \mid f(m) = 0\} = K$ el cual es un submódulo de M, por lo cual se obtiene el siguiente diagrama conmutativo por la propiedad universal del núcleo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ & K \arrow[ul, "0"] \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}.$$

Pero esto implica que $i = 0$, lo cual es una contradicción, pues $0 \neq x - y \in K$. La contradicción surge de suponer que f no es un morfismo inyectivo, por lo tanto f es un morfismo inyectivo. ■

Definición 19. *Un morfismo* $N \xrightarrow{f} M$ *es un epimorfismo si* $g \circ f = h \circ f$, *implica que* $g = h$, $\forall$ $M \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} L$.

Lema 2. *Son equivalentes para un morfismo* $N \xrightarrow{f} M$.

1) f *es epimorfismo.*

2) f *es suprayectivo.*

3) $M \xrightarrow{\bar{0}} 0$ *es un conúcleo para* f.

Demostración:

2) $\Rightarrow$ 1) Todo morfismo suprayectivo es un epimorfismo.

1) $\Rightarrow$ 3) Lo probaremos utilizando la propiedad universal del conúcleo, sea L tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & N \arrow[r, "0"] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[dl, "0"] \\ & L & \end{tikzcd}.$$

Existe un único morfismo $0 \to L$, a saber el morfismo 0. Por la conmutatividad del diagrama se tiene que $h \circ f = 0 = 0_N^L \circ f$ y como f es un epimorfismo, entonces $h = 0$ y por lo tanto se cumple la propiedad universal del conúcleo.

3) $\Rightarrow$ 2) Dado el morfismo $M \xrightarrow{f} N$ se puede considerar el cociente $\frac{N}{f(M)}$ y el siguiente diagrama conmutativo por la propiedad universal del conúcleo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & N \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[dl, "0"] \\ & \frac{N}{f(M)} & \end{tikzcd}$$

por lo tanto $\pi = 0$, lo cual implica que $\frac{N}{f(M)} = 0$ y por lo tanto $f(M) = N$, es decir, f es un morfismo suprayectivo. ■

Definición 20. *Un morfismo $M \xrightarrow{f} N$ es un isomorfismo si existe $N \xrightarrow{g} M$ un morfismo tal que $g \circ f = Id_M, \ f \circ g = Id_N$.*

Observación 2. *Son equivalentes para un morfismo $M \xrightarrow{f} N$:*

1) f es isomorfismo.

2) f es una biyección.

En la sección anterior se definió el concepto de retícula. Una vez definidos los conceptos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo, podemos dar un resultado muy importante para las retículas de R-módulos.

Teorema 1. *(De la correspondencia). Si $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo de R-módulos, entonces $f_* : [Nuc(f), \ M] \longrightarrow [\{0\}, \ N]$, donde $A \longmapsto f(A)$, es un isomorfismo de retículas completas cuyo inverso es $f^* : [\{0\}, \ N] \longrightarrow [Nuc(f), \ M]$, donde $B \longmapsto f^{-1}(B)$.*

Demostración:

f_* y f^* son morfismos de orden, entonces son morfismos de retículas y por lo tanto basta ver que son inversas una de la otra.

Sea $A \in [Nuc(f), \ M]$, entonces $A \longmapsto f(A) \longmapsto f^{-1}(f(A))$, pero

$$f^{-1}(f(A)) = A + Nuc(f) = A.$$

Por el otro lado sea $B \in [\{0\}, \ N]$, entonces $B \longmapsto f^{-1}(B) \longmapsto f(f^{-1}(B))$, pero

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(M) = B \cap N = B$$

Por lo tanto f_* y f^* son inversas y por lo tanto definen un isomorfismo de retículas completas. ■

Definición 21. *Una familia* $\{A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *es exacta si* $Im(f_i) = Nuc(f_{i+1})\ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.

1. $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B$ *es exacta si y sólo si* f *es un monomorfismo.*

2. $B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{0} 0$ *es exacta si y sólo si* f *es un epimorfismo.*

3. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *es exacta si y sólo si* $g \circ f = 0$ *y* $Nuc(g) \subseteq Im(f) \Rightarrow Nuc(g) = Im(f)$.

Lema 3. *Son equivalentes para* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$

1) *La sucesión es exacta.*

2) f *es un núcleo para* g *y* g *es un conúcleo para* f.

Demostración:
La demostración de este lema es clara a partir de las definiciones de núcleo, conúcleo y exactitud. ■

Definición 22.

1. *Un epimorfismo* $B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C$ *se escinde si y sólo si existe un morfismo* $C \xrightarrow{h} B$ *tal que* $g \circ h = Id_C$.

2. *Un monomorfismo* $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$ *se escinde si y sólo si existe un morfismo* $B \xrightarrow{k} A$ *tal que* $k \circ f = Id_A$.

3. *Una sucesión exacta* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *se escinde por la izquierda si* f *se escinde.*

4. *Una sucesión exacta* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *se escinde por la derecha si* g *se escinde.*

5. *Una sucesión exacta* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *se escinde si se escinde por la izquierda y por la derecha.*

Definición 23. *Sea* $\{N_\alpha\}_X$ *una familia de submódulos de un R-módulo* M, *si:*

1. $\Sigma_X N_\alpha = M$

2. $\forall\ \alpha \in X\ \ N_\alpha \cap \Sigma_{\beta\neq\alpha} N_\beta = 0$.

Decimos que M *es la suma directa de la familia* $\{N_\alpha\}_X$ *y lo denotamos como* $\bigoplus_X \{N_\alpha\}$.

Observación 3. *Son equivalentes para* $M = \Sigma_X N_\alpha$:

1) $\forall \alpha \in X\ \ N_\alpha \cap \Sigma_{\beta\neq\alpha} N_\beta = 0$.

2) *Todo elemento* $m \in M$ *se escribe de manera única como* $m = n_{\alpha_1} + ... + n_{\alpha_k}$.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Se probara por contrapuesta. Sea $m \in M$ tal que $m = a_{\alpha_1} + ... + a_{\alpha_k}$ y $m = b_{\alpha_1} + ... + b_{\alpha_s}$, con a_{α_i}, $b_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}$ dos representaciones distintas de m. Considere $a_{\alpha_j} \in N_{\alpha_j}$ tal que forma parte de una de las representaciones de m, entonces $a_{\alpha_j} = b_{\alpha_1} + ... + b_{\alpha_s} - a_{\alpha_1} - ... - a_{\alpha_k}$, agrupando los términos que se encuentren en el mismo submódulo se concluye que $0 \neq a_{\alpha_j} \in N_{\alpha_j} \cap \Sigma_{\beta \neq \alpha_j} N_\beta$.

2) $\Rightarrow$ 1) Se probará por contrapuesta. Si N_{α_s} es tal que $N_{\alpha_s} \cap \Sigma_{\beta \neq \alpha_s} N_\beta \neq 0$, se considera $n_{\alpha_s} \in N_{\alpha_s} \cap \Sigma_{\beta \neq \alpha_s} N_\beta$, entonces $n_{\alpha_s} = n_{\beta_1} + ... + n_{\beta_k}$ con $n_{\beta_j} \in N_{\beta_j}$ y $\alpha_s \neq \beta_j$, esto concluye que hay elementos en M que no se pueden escribir de manera única con elementos de $\{N_\alpha\}_X$. ■

Definición 24. *Sea $_RM$ un R-módulo. Decimos que un submódulo $_RN \leq {_RM}$ es un sumando directo de $_RM$, denotado $_RN \leq_\oplus {_RM}$, si existe $_RL \leq {_RM}$ tal que $_RN \oplus {_RL} = {_RM}$.*

Teorema 2. *Son equivalentes para una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

1) f se escinde.

2) $B = f(A) \oplus C'$ tal que $C' \overset{g_{\restriction C'}}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$.

3) g se escinde.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea la sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tal que f se escinde, es decir, existe $B \xrightarrow{\beta} A$ tal que $\beta \circ f = Id_A$ y sea $b \in B$. De esta manera $b = f(\beta(b)) + (b - f(\beta(b))$ con $f(\beta(b)) \in f(A)$ y $b - f(\beta(b)) \in Nuc(\beta)$, por lo tanto $B = Im(f) + Nuc(\beta)$, para probar que la suma es directa sea $f(a) \in Nuc(\beta)$ con $a \in A$, entonces $0 = \beta(f(a)) = a$, de aquí que $f(a) = 0$ y por lo tanto $B = Im(f) \oplus Nuc(\beta)$. Ahora probaremos que hay un isomorfismo entre $Nuc(\beta)$ y C, sea $C = g(B) = g(f(A)) + g(Nuc(\beta))$, pero $g(f(A)) = 0$ por exactitud, por lo tanto $Nuc(\beta) \overset{g_\restriction}{\twoheadrightarrow} C$ es un epimorfismo. Por último $Nuc(g_{\restriction Nuc(\beta)}) = Nuc(\beta) \cap Nuc(g)$, pero $Nuc(g) = Im(f)$ por exactitud, por lo tanto $Nuc(g_{\restriction Nuc(\beta)}) = 0$, por lo tanto también es un monomorfismo, es decir, la restricción de g al núcleo de β es un isomorfismo.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea la sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} f(A) \oplus C' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ con $B = f(A) \oplus C'$, tal que $C' \overset{g_\restriction}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$, es decir, tiene inversa, sea $C \overset{(g_\restriction)^{-1}}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C' \xhookrightarrow{\iota^B_{C'}} B$

y $h = \iota_{C'}^{B} \circ (g_{\restriction})^{-1}$, se probará que h escinde a g. Sea $c \in C$, entonces

$$\begin{aligned}(g \circ h)(c) &= (g \circ (\iota_{C'}^{B} \circ (g_{\restriction})^{-1}))(c)\\ &= g(\iota_{C'}^{B}(g_{\restriction})^{-1}(c))\\ &= g((g_{\restriction})^{-1}(c))\\ &= (g_{\restriction})(g_{\restriction})^{-1})(c)\\ &= c\end{aligned}$$

Por lo tanto $g \circ h = Id_C$.

3) $\Rightarrow$ 2) Sea la sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tal que g se escinde, es decir, existe $h : C \longrightarrow B$ tal que $g \circ h = Id_C$. Sea $b \in B$, entonces $b \mapsto g(b) \mapsto h(g(b)) \mapsto g(h(g(b))) = g(b)$, es decir $b - (h \circ g)(b) \in Nuc(g)$ y por lo tanto $b \in Nuc(g) + h(C) = B$. Si $b \in Nuc(g) \cap h(C)$, entonces $b = h(c)$ para algún $c \in C$ y $0 = g(b) = g(h(c)) = c$, es decir $b = h(0) = 0$, por lo tanto la suma es directa. Luego $C = g(B) = g(h(C))$, por lo tanto la restricción $g_{\restriction}$ es un epimorfismo, además $Nuc(g_{\restriction}) = h(C) \cap Nuc(g) = 0$ y $Nuc(g) = f(A)$, por lo tanto también es un monomorfismo y por lo tanto es un isomorfismo.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea la sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} f(A) \oplus C' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ con $C' \overset{g_{\restriction}}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} C$.

Se probará que f se escinde. Si $b \in f(A) \oplus C'$, entonces $b = f(a) + c'$ para algunos $a \in A$, $c' \in C'$. Si se tuviera que $b = f(a') + c''$, entonces $0 = f(a) - f(a') + c' - c''$ y por lo tanto $f(a) - f(a') = c'' - c' \in f(A) \cap C'$, pero la suma es directa, por lo tanto $f(a) = f(a')$ y $c' = c''$. Como f es un monomorfismo, entonces $a = a'$, de esta manera se define $h : f(A) \oplus C' \longrightarrow A$ donde $b \mapsto a$ si $b = f(a) + c'$, veremos que h es un morfismo que escinde a f.

Para ver que es morfismo el argumento anterior nos muestra que está bien definido, ahora sean b, $b' \in f(A) \oplus C'$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}h(b + b') &= h((f(a) + c') + (f(a') + c''))\\ &= h(f(a + a') + c' + c'')\\ &= a + a' = h(b) + h(b')\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}h(rb) &= h(r(f(a) + c'))\\ &= h(f(ra) + rc')\\ &= ra = rh(b)\end{aligned}$$

por lo tanto h es un R-morfismo.

Por último se tiene que $h(f(a)) = a$ por cómo se definió el morfismo, es decir $h \circ f = Id_A$. ■

Capítulo 2

Módulos inyectivos y proyectivos.

En este capítulo se definirán algunos de los conceptos más importantes cuando se estudia la teoría de R-módulos. También se abordarán resultados que serán de utilidad en los siguientes capítulos.

2.1 El zoclo y el radical de un R-módulo.

Definición 25. *Sea $\mathcal{U}$ una clase de módulos definimos la traza de $\mathcal{U}$ en M, denotada $Tr_M(\mathcal{U})$, y el rechazo de $\mathcal{U}$ en M, denotado $Rech_M(\mathcal{U})$, como:*

$$Tr_M(\mathcal{U}) = \Sigma\{Im(h) \mid h : U \to M,\ U \in \mathcal{U}\}$$
$$Rech_M(\mathcal{U}) = \cap\{Nuc(h) \mid h : M \to U,\ U \in \mathcal{U}\}.$$

$Tr_M(\mathcal{U})$ es el submódulo de M generado por $\mathcal{U}$ y $\frac{M}{Rech_M(\mathcal{U})}$ es el cociente más grande cogenerado por $\mathcal{U}$.

Definición 26. *Un R-módulo M es semisimple si $A \leq M$ implica que $A \leq_{\oplus} M$.*

Definición 27. *Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un conjunto de submódulos simples de M. Si se cumple que $M = \oplus_A T_\alpha$, entonces decimos que ésta es una descomposición semisimple de M.*

Observación 4. *La clase de los módulos izquierdos semisimples es cerrada bajo tomar submódulos.*

Demostración:
Supongamos que ${}_R0 \neq_R N \lneqq_R M$ y que ${}_R0 \neq_R A \lneqq_R N$, donde ${}_RM$ es semisimple. Entonces existe ${}_RX \leq M$ tal que $A \oplus X = M$. Por modularidad, $N = N \cap (A \oplus X) = A + (N \cap X)$. Como $A \cap (N \cap X) = A \cap X =_R 0$, tenemos que $N = A \oplus (N \cap X)$. Es decir, todo submódulo de N es un sumando directo de N.

■

Lema 4. *Un módulo izquierdo semisimple no nulo contiene un submódulo izquierdo simple.*

Demostración:
Si ${}_RM \neq_R 0$, es semisimple, tomemos $0 \neq x \in M$. Como Rx es finitamente generado, entonces tiene un submódulo máximo, digamos J. Como Rx es semisimple, existe un submódulo T de Rx tal que $Rx = J \oplus T$. Entonces $T \cong Rx/J$ es simple y $T \leq Rx \leq M$.
■

Observación 5. *Un R-módulo M es semisimple si y sólo si M tiene una descomposición semisimple.*

Demostración:
Podemos suponer que ${}_RM \neq_R 0$, pues ${}_R0$ es semisimple y es una suma vacía de módulos simples.
$\Rightarrow$) Si ${}_RM$ es un módulo semisimple distinto de cero, entonces tiene un submódulo simple ${}_RS$. La familia $\{S\}$ es una familia independiente de submódulos simples de ${}_RM$. Como la colección de familias independientes de submódulos simples de M es de carácter finito (una tal familia es independiente si y sólo si cada una de sus subfamilias finitas son independientes), por el Lema de Tukey, existe una familia independiente máxima de submódulos simples de M, digamos $\{N_i\}_{i\in I}$. Entonces $\oplus_{i\in I} N_i \leq M$. Como M es semisimple, $\exists L \leq M$ tal que $M = (\oplus_{i\in I} N_i) \oplus L$. Como L es semisimple, si fuera distinto de cero, contendría un submódulo simple T, pero entonces $\{N_i\}_{i\in I} \cup \{T\}$ sería independiente, contradiciendo la elección de $\{N_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto $L =_R 0$ y $M = \oplus\{N_i\}_{i\in I}$. $\Leftarrow$) Si $M = \oplus_{i\in I} N_i$, donde cada N_i es simple, y ${}_R0 \neq A \lneqq M$, entonces $\exists j \in I$ tal que $N_j \nleq A$, así que $\{A\} \cup \{N_j\}$ es independiente. Por el Lema de Tukey, existe una subfamilia $\{N_j\}_{j\in J}$ de $\{N_i\}_{i\in I}$, que es máxima con la propiedad de que $\{A\} \cup \{N_j\}_{j\in J}$ es independiente. Notemos que todo N_i es un submódulo de $A \oplus (\oplus_{j\in J} N_j)$, pues si $N_k \nleq A \oplus (\oplus_{j\in J} N_j)$ con $k \in I$, entonces $\{A\} \cup (\{N_j\}_{j\in J} \cup \{N_k\})$ sería independiente, una contradicción. Por lo tanto $M = \oplus_{i\in I}\{N_i\} \leq A \oplus (\oplus_{j\in J} N_j)$. Es decir todo submódulo de M es un sumando directo.
■

Teorema 3. *Son equivalentes para un R-módulo M:*

1) M es semisimple.

2) M es generado por módulos simples.

3) M es la suma de algún conjunto de submódulos simples.

4) M es la suma de sus submódulos simples.

5) Todo submódulo de M es un sumando directo.

6) Toda sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

se escinde.

Demostración:
Las equivalencias de $(1),(2),...,(5)$ son claras, por el Lema anterior.

1) $\Rightarrow$ 6) Sea $M = \oplus_A T_\alpha$ una suma directa de simples. De esta manera, dada la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

se tiene que $Im(f) \leq M$ y existe $B \subseteq A$ tal que $M = (Im(f)) \oplus (\oplus_B T_\beta)$ y por lo tanto la sucesión exacta se escinde.

6) $\Rightarrow$ 5) Sean $N \leq M$ y la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N \longrightarrow 0\ .$$

Por hipótesis se tiene que la sucesión se escinde, lo cual es equivalente a que $M = N \oplus M/N$ y por lo tanto $N \leq_\oplus M$.

■

Definición 28. *El zoclo de un R-módulo M es el submódulo semisimple más grande de M.*

Notemos que si $\mathcal{S}$ es la clase de módulos simples, entonces $zoc(M) = Tr_M(\mathcal{S})$.

Definición 29. *Sea ${}_RN \leq {}_RM$. Decimos que ${}_RN$ es esencial en ${}_RM$, denotado ${}_RN \leq_{es} {}_RM$, si siempre que ${}_RN \cap {}_RL = 0$, con ${}_RL \leq {}_RM$, se tiene que ${}_RL = 0$. Equivalentemente, si $0 \neq {}_RL \leq {}_RM$, entonces ${}_RN \cap {}_RL \neq 0$.*

Proposición 1. *Sea M un R-módulo entonces:*

$$\begin{aligned} Zoc(M) &= \Sigma\{K \leq M \mid K \textbf{\textit{ es mínimo en }} M\} \\ &= \cap\{L \leq M \mid L \textbf{\textit{ es esencial en }} M\} \end{aligned}$$

Demostración:
La primera igualdad se concluye a partir de la observación hecha sobre la traza de la clase de módulos simples en M.

Para la segunda igualdad primero se probará que el zoclo de M está contenido en cada submódulo esencial de M. Sea $T \leq M$ un submódulo simple, si $L \leq_{es} M$, entonces $T \cap L \neq 0$, como $T \cap L \leq T$ y T es simple, entonces $T \cap L = T$. Por lo tanto $T \leq L$ y con esto se concluye que el zoclo está contenido en en todo submódulo esencial de M. Para la segunda contención, sea $H = \bigcap\{L \leq M \mid L \leq_{es} M\}$.

Se probará que H es semisimple. Sea $N \leq H$ y $N' \leq M$ un seudocomplemento de N (todo submódulo tiene un seudocomplemento, ver el Lema 6), entonces $N + N' = N \oplus N' \leq_{es} M$, (ver la Observación 8) pero entonces $N \leq H \leq N \oplus N'$ y como la retícula es modular, entonces:

$$H = H \cap (N \oplus N') = N \oplus (H \cap N').$$

Por lo tanto N es un sumando directo de H, entonces H es semisimple y por lo tanto $H \leq Zoc(M)$. ■

Definición 30. *El radical de un R-módulo Mes la intersección de sus submódulos máximos. Denotaremos el radical de un R-módulo M como $Rad(M)$, mientras que el radical de un anillo R lo denotaremos como $J(R)$, o como $Rad(R)$.*

Proposición 2. *Sea M un R-módulo, entonces:*

$$\begin{aligned} Rad(M) &= \cap\{K \leq M \mid M/K \textbf{ se sumerge en un producto de simples } \} \\ &= \Sigma\{L \leq M \mid L \textbf{ es superfluo en } M\}. \end{aligned}$$

Es decir, $Rad(M)$ es el menor submódulo de M que le produce un cociente sumergible en un producto de módulos simples.

Demostración:

Veamos la primer igualdad. Supongamos que M/N es un cociente de M cogenerado por una familia de simples $\{S_i\}_{i\in I}$, es decir, $\exists\varphi_R : M/N \longrightarrow \prod\{S_i\}_I$, un monomorfismo. Podemos suponer que $\forall i \in I, p_i \circ \varphi \neq 0$, donde $p_i : \prod\{S_i\}_I \longrightarrow S_i$ es la proyección canónica para cada $i \in I$. Entonces cada S_i es un cociente simple de M. Si tomamos la composición

$$M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/N \overset{\varphi}{\longrightarrow} \prod\{S_i\}_I,$$

donde π es el morfismo natural, entonces $N = \cap\{Nuc(p_i \circ \varphi \circ \pi) \mid i \in I\}$, donde cada $Nuc(p_i \circ \varphi \circ \pi)$. es un submódulo máximo de M. Entonces $N \geq \cap\{K \leq M \mid K$ **es máximo en** $M\} = Rad(M)$ Además, cuando consideramos el morfismo natural $M \to \prod\{M/N|N \leq_{max} M\}$, inducido por los epimorfismos naturales, este morfismo tiene $Rad(M)$ como núcleo.

Esto muestra que $Rad(M)$ es el menor submódulo de M que produce un cociente sumergible en un producto de simples.

Veamos ahora la segunda igualdad. Recuerde que $N \ll M$ (N es superfluo en M) si $N + A = M \Rightarrow A = M$. Notemos que cada submódulo superfluo está contenido en cada submódulo máximo. Si $A \ll M$ y $B \leq_{max} M$, entonces $A \nleq B \Rightarrow A + B = M$, pues $B \leq_{max} M$. Ahora como A es superfluo, de $A + B = M$ se sigue que $B = M$, contradiciendo que B es máximo. Esto muestra que

$$\sum\{A \mid A \ll M\} \leq \cap\{B \mid B \leq_{max} M\}.$$

Para ver la otra inclusión, supongamos que $x \in \cap\{B \mid B \leq_{max} M\}$, veremos que $xR \ll M$. Supongamos que $xR+B = M$, entonces $M/B = (xR+B)/B \cong xR/(xR\cap B)$ es un módulo cíclico. Como los módulos cíclicos tienen máximos (por el Lema de Zorn), entonces $xR/(xR \cap B)$ tiene máximos. Por el Teorema de la Correspondencia, M/B tiene un submódulo máximo, digamos N/B. N es un submódulo máximo de M que contiene a B pero que no contiene a x (en caso contrarío $M = xR + B \leq N$, lo que contradice que N es máximo en M). Pero esto contradice que x es un elemento de cada submódulo máximo de M. Por lo tanto, $xR \ll M$. ■

Definición 31. *Un ideal $\mathcal{I} \leq R$ es nilpotente si $\mathcal{I}^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. El menor natural con la propiedad anterior, se llama el índice de nilpotencia de $\mathcal{I}$.*

Definición 32. *Un anillo R es semiprimario si $Rad(R)$ es un ideal nilpotente y $\frac{R}{Rad(R)}$ es un anillo semisimple.*

Definición 33. *Un anillo R es semilocal si $R/Rad(R)$es un anillo semisimple.*

Definición 34. *Una asignación $\sigma : R{-}mod \to R{-}mod$ es un prerradical si $\sigma(M) \leq M$ para cada ${}_RM$ y para cada R-morfismo ${}_Rf : M \to N$ se tiene que $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ \sigma(M) & \xrightarrow{f|} & \sigma(N). \end{array}$$

Como una consecuencia de que para un R-morfismo $f : M \to N$, la imagen de un módulo simple es simple o cero, tenemos que $zoc : R{-}mod \to R{-}mod$ es un prerradical. Como los morfismos preservan submódulos superfluos, $Rad : R - mod \to R - mod$ es un prerradical.

Proposición 3. *Si σ es un prerradical, entonces $\sigma(R)$ es un ideal bilateral*

Demostración:
Por definición $\sigma(R)$ es un ideal izquierdo, $\forall s \in R$ tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\_\cdot s} & R \\ \uparrow & & \uparrow \\ \sigma(R) & \xrightarrow{(\_\cdot s)|} & \sigma(R) \end{array}$$

conmuta, lo que muestra que $\sigma(R)s \leq \sigma(R), \forall s \in R$. ■

Lema 5. *Para cada ${}_RM$, $(Rad(R))M \leq Rad(M)$*

Si ${}_RM$ es un R-módulo, tenemos que para cada elemento $m \in M$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\_\cdot m} & M \\ \uparrow & & \uparrow \\ Rad(R) & \xrightarrow{(\_\cdot m)|} & Rad(M), \end{array}$$

conmuta, lo que muestra que $(Rad(R))M \leq Rad(M)$.

En particular, si $M \neq_R 0$, es finitamente generado entonces $(Rad(R))M \leq Rad(M) \subsetneqq M$, debido a que los módulos finitamente distintos de cero tienen submódulos máximos.

Así tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4. *Si M es finitamente generado y $(Rad(R))M = M$, entonces $M =_R 0$.*

2.2 Módulos libres y proyectivos

Definición 35. *Un módulo F es libre con base $h : X \to F$ si para toda función $f : X \to M$ existe una única función $\phi : F \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ M & \end{tikzcd} .$$

Teorema 4. $(R^{(X)}, \{X \stackrel{\delta}{\to} R^{(X)}\})$ *es un R-módulo libre con base* $X \xrightarrow{\delta} R^{(X)}$, *donde $x \longmapsto \delta_x$ y*

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq y \\ 1 & si \quad x = y \end{cases}$$

Demostración:
Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"'] & R^{(X)} \\ M & \end{tikzcd} .$$

Definiremos un morfismo $\phi : R^{(X)} \longrightarrow M$ tal que el diagrama conmute.

Primero demostraremos que $\{\delta_x\}_X$ genera a $R^{(X)}$, si $u \in R^{(X)}$, entonces $u : X \longrightarrow R$, con el soporte de u, denotado $sop(u)$, finito. Si $sop(u) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, entonces $u(x_i) \neq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$ y si $u(x) = 0$, entonces $x \notin \{x_1, ..., x_n\}$. Entonces $u = u(x_1)\delta_{x_1} + ... + u(x_n)\delta_{x_n} = \Sigma_{sop(u)} u(x)\delta_x = \Sigma_X u(x)\delta_x$, por lo tanto $\{\delta_x\}_X$ genera a $R^{(X)}$. Además si $u = \Sigma r_x\delta_x$ y $sop(u)$ es finito, entonces para $z \in sop(u)$ se tiene que $u(z) = \Sigma(r_x\delta_x)z = r_x\delta_x(x) = r_x$ y para $z \notin sop(u)$, entonces $0 = u(z) = \Sigma(r_x\delta_x)z = r_x$, es decir, los coeficientes de $\Sigma r_x\delta_x$ están determinados por u.

Así definimos $\phi : R^{(X)} \longrightarrow M$, donde $\phi(u) = \phi(\Sigma r_x\delta_x) = \Sigma\phi(r_x\delta_x) = \Sigma r_x\phi(\delta_x) = \Sigma r_x f(x) = \Sigma u(x)f(x)$ y probaremos que es un morfismo. Si $u, v \in R^(X)$ y $r \in R$, entonces $\phi(u + v) = \Sigma(u + v)(x)f(x) = \Sigma(u(x) + v(x))f(x) = \Sigma u(x)f(x) + v(x)f(x) = \Sigma u(x)f(x) + \Sigma v(x)f(x) = \phi(u) + \phi(v)$ y además $\phi(ru) = \Sigma(ru(x))f(x) = \Sigma r(u(x)f(x)) = r\Sigma u(x)f(x) = r\phi(u)$, por lo tanto ϕ es un morfismo y además hace conmutar el diagrama, por lo tanto $(R^{(X)}, X \stackrel{\delta}{\to} R^{(X)})$ es libre con base $X \xrightarrow{\delta} R^{(X)}$.
■

Teorema 5. *Son equivalentes*

1) $(F, X \stackrel{h}{\to} F)$ *es libre.*

2) $\{h(x)\}_{x\in X} \xrightarrow{genera} F$ *y si $z \in F$, entonces $z = \Sigma r_x h(x)$ donde $\{r_x\}$ es casi nula y están determinados por z, es decir se satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

a) Si $z = \Sigma r_x h(x)$ y $z = \Sigma s_x h(x)$ con $r_x, s_x \in R$, entonces $r_x = s_x$ $\forall x \in X$.

b) En particular si $0 = \Sigma r_x h(x)$ y $0 = \Sigma 0 h(x)$, entonces $r_x = 0$ $\forall x \in X$.

3) $F \cong R^{(X)}$.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 3) Sea F un R-módulo libre con base $X \xrightarrow{h} F$, entonces existe un único morfismo ϕ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & F \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ R^{(X)} & \end{tikzcd}.$$

Por el lema anterior se tiene que $\{\delta_x\}_X \xrightarrow{genera} R^{(X)}$ y $\delta_x = f(x) = \phi \circ h(x)$, entonces $\{\delta_x\} \hookrightarrow Im\phi$, entonces $R^{(X)} = R^{\langle\{\delta_x\}\rangle} \leq Im\phi \leq R^{(X)}$, es decir $Im\phi = R^{(X)}$ y por lo tanto ϕ es un morfismo suprayectivo.

Definimos $\psi : R^{(X)} \longrightarrow F$ donde $\delta_x \longmapsto h(x)$, pero como cada elemento de $R^{(X)}$ se puede escribir como una combinación de $\{\delta_x\}$ cuyos coeficientes están determinados de manera única para cada elemento, entonces dicha asignación se puede extender a $\psi : R^{(X)} \longrightarrow F$ donde $\Sigma r_x \delta_x \longmapsto \Sigma r_x h(x)$ con $\{r_x\}$ casi nula. Se tiene que ψ es morfismo. De esta manera $h(x) \longmapsto \delta_x$ vía ϕ y $\delta_x \longmapsto h(x)$ vía ψ, es decir $\psi \circ \phi = Id_F$, por lo tanto ϕ es monomorfismo y por lo tanto $F \cong R^{(X)}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Por hipótesis se puede considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F & R^{(X)} \arrow[l, two heads, tail, "\theta"'] \\ X \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\delta_{()}"] & \{\delta_x\}_{x\in X} \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd},$$

donde se define $h := \theta \circ \iota \circ \delta_{()}$ y también $\delta : X \longrightarrow R^{(X)}$ donde $\delta = \iota \circ \delta_{()}$.

Para demostrar que $(F, X \xrightarrow{h} F)$ es libre consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "\psi\circ\theta^{-1}"'] & X \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"] & R^{(X)} \arrow[dl, "\psi"] \\ & M & \end{tikzcd},$$

donde $\psi \circ \delta = f$ y el morfismo $\psi \circ \theta^{-1}$ está bien definido, por lo cual sólo resta ver que el triángulo de la izquierda conmuta, lo cual se prueba con la siguientes igualdades $\psi \circ \theta^{-1} \circ h = \psi \circ \theta^{-1} \circ \theta \circ \iota \circ \delta_{()} = \psi \circ \iota \circ \delta_{()} = \psi \circ \delta = f$.

1) y 3) $\Rightarrow$ 2) Sea F un R-módulo libre con base $X \xrightarrow{h} F$ y tal que $F \cong R^{(X)}$ con el isomorfismo $\gamma : F \longrightarrow R^{(X)}$, donde $h(x) \longmapsto \delta_x$.

Si $0 = \Sigma r_x h(x)$, entonces $\overline{0} = \gamma(0) = \Sigma r_x \delta_x$ y aplicando a un elemento $y \in X$ se obtiene que $\overline{0}(y) = 0 = (\Sigma r_x \delta_x)(y) = \gamma(y)$, es decir $\gamma(y) = 0$ $\forall y \in X$, por lo tanto se satisface la segunda condición de (2).

2) $\Rightarrow$ 3) Sea F un R-módulo tal que $\{h(x)\}_{x\in X} \xrightarrow{genera} F$ y que si $z = \Sigma r_x h(x)$, entonces $\{r_x\}$ está determinado por z.

Se define $\gamma : F \longrightarrow R^{(X)}$, donde $h(x) \longmapsto \delta_x$, es decir $\gamma(\Sigma r_x h(x)) = \Sigma r_x \delta_x$. Y además se considera $\lambda : R^{(X)} \longrightarrow F$, tal que $\delta_x \longmapsto h(x)$, es decir, se puede considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} R^{(X)} \arrow[r, "\lambda"] & F \\ \{\delta_x\}_{x\in X} \arrow[u, hook, "genera"] \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd},$$

y además se observa que

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\gamma} & R^{(X)} & \xrightarrow{\lambda} & F \\ h(x) & \longmapsto & \delta_x & \longmapsto & h(x) \end{array},$$

entonces $\lambda \circ \gamma$ fija cada elemento de $h(X)$, pero $\{h(x)\}_{x\in X}$ genera a F, entonces $\lambda \circ \gamma = Id_F$.

Por el otro lado se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} R^{(X)} & \xrightarrow{\lambda} & F & \xrightarrow{\gamma} & R^{(X)} \\ \delta_x & \longmapsto & h(x) & \longmapsto & \delta_x \end{array},$$

por lo tanto $\gamma \circ \lambda = Id_{R^{(X)}}$ y por lo tanto $F \cong R^{(X)}$. ■

Corolario 1. *Todo R-módulo es cociente de un R-módulo libre.*

Demostración:

Sea M un R-módulo tal que $X \xrightarrow{genera} M$, de esta manera como $R^{(X)}$ es libre entonces existe un único morfismo $\phi : R^{(X)} \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, hook] & R^{(X)} \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ M & \end{tikzcd},$$

de donde se puede observar que $X \subseteq Im\phi$, entonces $M = \langle X \rangle \leq Im\phi \leq M$ y por lo tanto $M = Im\phi$, es decir, ϕ es un epimorfismo. ■

Definición 36. *Un R-módulo P es proyectivo si todo diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, two heads, "g"] & X \end{tikzcd}$$

se puede extender a un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
B \arrow[r, two heads, "g"] & C.
\end{tikzcd}$$

Observación 6. *Los módulos libres son módulos proyectivos.*

Basta con demostrar que $R^{(X)}$ es un R-módulo proyectivo. Se considera el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] & R^{(X)} \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, two heads, "g"] & C
\end{tikzcd},$$

se define el morfismo $h : X \longrightarrow B$ donde $h(x) = b$ si $g(b) = f(\delta_x)$, lo cual induce un morfismo $\phi : R^{(X)} \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"] & R^{(X)} \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\
B &
\end{tikzcd},$$

es decir, $h = \phi \circ \delta$.

Así, por la definición de h se tiene que $g \circ h = f \circ \delta$, pero entonces $g \circ (\phi \circ \delta) = (g \circ \phi) \circ \delta = f \circ \delta$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dashed, "(g\circ\phi)\circ\delta"'] & R^{(X)} \arrow[d, "f"] \arrow[d, dashed, bend left, "g\circ\phi"] \\
 & C
\end{tikzcd},$$

como $R^{(X)}$ es libre, entonces $f = g \circ \phi$ y por lo tanto se tiene que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & R^{(X)} \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "\phi"'] \\
B \arrow[r, two heads, "g"] & C
\end{tikzcd},$$

por lo tanto $R^{(X)}$ es proyectivo y por el teorema anterior se concluye que todo R-módulo libre es un R-módulo proyectivo.

Teorema 6. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *P es un R-módulo proyectivo.*

2. *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

   se escinde

3. *P es sumando directo de un R-módulo libre F.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea la sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd}
& & & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "Id_P"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

con P un R-módulo proyectivo, entonces existe un único morfismo $h : P \longrightarrow B$ tal que $g \circ h = Id_P$, es decir, g se escinde y por lo tanto la sucesión exacta corta se escinde.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Nuc(g) \xhookrightarrow{\iota} R^{(X)} \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0 \ ,$$

pero por hipótesis se escinde, entonces $R^{(X)} = Nuc(g) \oplus P'$ con $P \cong P'$ y por lo tanto P es sumando directo de un R-módulo libre.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea F un R-módulo libre tal que P es sumando directo de F y sea el siguiente diagrama con el renglón de abajo exacto

$$\begin{tikzcd}
& & F \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & P \arrow[d, "\alpha"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

así, como F es libre, entonces también es proyectivo y por lo tanto existe un único morfismo $\psi : F \longrightarrow B$ tal que $g \circ \psi = \alpha \circ \beta$. Pero P es sumando directo de F, entonces ψ induce un morfismo $\phi : P \longrightarrow B$ tal que $g \circ \phi = \alpha$, lo cual concluye que P es un R-módulo proyectivo. ■

2.3 Módulos inyectivos

Definición 37. *Un R-módulo M es N-inyectivo si todo diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, tail, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

se puede extender a un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, tail, "g"] & N. \arrow[ul, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior se puede considerar al monomorfismo g como una inclusión. De esta manera el diagrama se puede completar pues la sucesión $0 \longrightarrow A \hookrightarrow N$ es exacta.

Si todo diagrama

$$\begin{tikzcd} M \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook] & N \end{tikzcd}$$

se puede extender a un diagrama conmutativo con el morfismo $h : N \longrightarrow M$ y se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g^{\upharpoonright}"] \arrow[dd, "f"'] & & N \arrow[ddll, dashed, bend left, "h"] \\ & & g(A) \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dl, "f\circ(g^{\upharpoonright})^{-1}"] & \\ & M & & \end{tikzcd},$$

entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} g(A) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "(g^{\upharpoonright})^{-1}"'] & N \arrow[ddl, dashed, "h"] \\ A \arrow[d, "f"'] & \\ M & \end{tikzcd},$$

entonces se tiene que $h\circ\iota = f\circ(g^{\upharpoonright})^{-1}$ y por lo tanto $h\circ g = h\circ\iota\circ g^{\upharpoonright} = f\circ(g^{\upharpoonright})^{-1}\circ g^{\upharpoonright} = f$.

Definición 38. *Un R-módulo es inyectivo si es N-inyectivo para todo R-módulo N.*

Definición 39. *Para un R-módulo M, se define la siguiente clase $I^{-1}(M) = \{N \mid M$ **es** $N -$ **inyectivo**$\}$*

Teorema 7. *Para un R-módulo M la clase $I^{-1}(M)$ es cerrada bajo copias isomorfas (Clase abstracta), bajo tomar submódulos, cocientes y sumas directas (Clase de Wisbauer).*

Demostración:

Para demostrar que es cerrada bajo copias isomorfas sea $N \in I^{-1}$ y $N \cong^h N'$, si se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & N' \arrow[r, "h"] & N \arrow[dll, dashed, "\beta"] \\ M & & \end{tikzcd}$$

el morfismo β existe pues $N \in I^{-1}(M)$ y $h\circ\iota$ es un monomorfismo, entonces $f = \beta\circ h\circ\iota$, pero entonces el morfismo $\beta \circ h : N' \longrightarrow M$ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & N' \arrow[dl, dashed, "\beta\circ h"] \\ M & \end{tikzcd}$$

y por lo tanto $N' \in I^{-1}(M)$.

Para demostrar que $I^{-1}(M)$ es cerrada bajo submódulos sea $N \in I^{-1}(M)$ y $N' \leq N$, entonces se puede considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, "f"] & N' \arrow[r, hook, "\iota"] & N \arrow[dll, dashed, "\beta"] \\ M & & \end{tikzcd}$$

donde el morfismo β existe pues $N \in I^{-1}(M)$ y $\iota \circ \iota_1$ es un monomorfismo, entonces $f = \beta \circ \iota \circ \iota_1$ y por lo tanto el morfismo $\beta \circ \iota : N' \longrightarrow M$ extiende a f y así $N' \in I^{-1}(M)$.

Para demostrar que $I^{-1}(M)$ es cerrada bajo cocientes sea $N \xrightarrow{g} N'$ con $N \in I^{-1}(M)$, así si se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "g"] \\ A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & N' \\ M & \end{tikzcd}$$

se puede considerar la preimagen de A bajo g, con lo cual se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(A) \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, "g^{\restriction}"] & N \arrow[d, two heads, "g"] \arrow[ddl, dashed, bend left, "\beta"] \\ A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & N' \\ M & \end{tikzcd}$$

donde el morfismo β existe pues $N \in I^{-1}(M)$ y ι_1 es un monomorfismo, entonces $f \circ g^{\restriction} = \beta \circ \iota_1$. Ahora sea el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Nuc(g) \arrow[r, hook] & N \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N' \arrow[dl, dashed, "\beta'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

si $n \in N$ con $g(n) = x \in N'$ se define $\beta'(x) := \beta(x)$, para probar que el morfismo esté bien definido basta con demostrar que $\beta(Nuc(g)) = \overline{0}$, pero $Nuc(g) \subseteq g^{-1}(A)$ y entonces

$\beta\circ\iota_1 = f\circ g^{\restriction}$, por lo que si $x \in Nuc(g)$, entonces $\beta(x) = \beta\circ\iota_1(x) = f\circ g^{\restriction}(x) = f(0) = 0$, por lo tanto β' es un morfismo bien definido tal que $f = \beta\circ\iota$ y por lo tanto $N' \in I^{-1}(M)$.

Para demostrar que $I^{-1}(M)$ es cerrada bajo sumas directas sea una familia $\{N_j\}_{j\in J} \subseteq I^{-1}(M)$, así si se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & \oplus\{N_j\} \\ M & \end{tikzcd},$$

entonces podemos considerar la siguiente familia $\mathcal{B} = \{(U, \phi_U) \mid A \hookrightarrow U \hookrightarrow \oplus\{N_j\} \text{y} f = \phi_U \circ \iota\}$, la cual es no vacía, pues $(A, f) \in \mathcal{B}$ y además se puede definir un orden parcial dado por $(U, \phi_U) \leq (V, \phi_V)$ si $U \leq V$ y ϕ_V extiende a ϕ_U, así $\mathcal{B}$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn, pues si se considera una cadena $\{(U_i, \phi_i)\}$ en $\mathcal{B}$, entonces $\{U_i\}$ es una cadena de submódulos de $\oplus\{N_j\}$, por lo que se puede considerar $\bigcup\{U_i\}$ y se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, "f"'] & & \oplus\{N_j\} \\ & \bigcup\{U_i\} \arrow[ur, hook] \arrow[dl, "\gamma"] & \\ M & & \end{tikzcd}$$

donde $\gamma(x) = \phi_i(x)$ si $x \in U_i$, así γ está bien definida, pues $\{U_i\}$ es una cadena y además γ extiende a f pues extiende a cada morfismo ϕ_i los cuales extienden a f, por lo tanto $(\bigcup\{(U_i\}, \gamma)$ es una cota superior para la cadena $\{(U_i, \phi_i)\}$. Así, por el Lema de Zorn $\mathcal{B}$ tiene un máximo (W, ϕ_W).

Demostraremos que $W \leq_{es} \oplus\{N_i\}$, suponiendo que existe $Z \neq 0$ tal que $W \oplus Z \leq \oplus\{N_i\}$, entonces se puede considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"] & W \oplus Z \arrow[dl, dashed, "\gamma\oplus\overline{0}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

donde $(W, \gamma) \leq (W \oplus Z, \gamma \oplus \overline{0})$, lo cual contradice la maximalidad de (W, γ) en $\mathcal{B}$, por lo que $W \leq_{es} \oplus\{N_i\}_J$.

Ahora demostraremos que cada N_i es submódulo de W, para ello supongamos que existe $i \in J$ tal que $N_i \nleq W$, entonces $N_i \lneq N_i + W$ y además $N_i \cap W \neq 0$, por lo cual se pueden considerar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} N_i \cap W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_W\restriction"'] & N_i \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "\iota_*"] \arrow[d, "\gamma"'] & N_i + W \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ M & \end{tikzcd}$$

donde se define el morfismo $\theta : W + N_i \longrightarrow M$ por $w + x_i \longmapsto \phi_W(w) + g(x_i)$. Para ver que está bien definido sea $w + x_i = w' + x_i'$ con $w,\ w' \in W$ y $x_i,\ x_i' \in N_i$, entonces $w - w' = x_i' - x_i \in W \cap N_i$, por lo tanto $\phi_W(w) - \phi_W(w') = \phi_W(w - w') = g(x_i' - x_i) = g(x_i') - g(x_i)$ y por lo tanto $\phi_W(w) + g(x_i) = \phi_W(w') + g(x_i')$. Así θ es un morfismo que extiende a ϕ_W lo cual contradice la maximalidad de (W, ϕ_W) en $\mathcal{B}$, lo cual prueba que $N_i \leq W\ \forall\ i \in J$ y por lo tanto $W = \oplus\{N_i\}_J$, lo cual termina la prueba. ■

Teorema 8. *$I^{-1}(M)$ es una clase cerrada bajo copias isomorfas (Clase abstracta) y bajo tomar submódulos, cocientes y sumas directas (clase de Wisbauer).*

Demostración:
Se probó en los lemas anteriores. ■

Definición 40. *La clase $I^{-1}(M)$ se llama la clase de inyectividad del R-módulo M.*

Teorema 9 (Criterio de Baer)**.** *Son equivalentes para un R-módulo M:*

1. *M es inyectivo.*
2. *$R \in I^{-1}(M)$*

Demostración:
Que M sea inyectivo, es equivalente a que $I^{-1}(M) = R - mod$. Esto último ocurre si y sólo si $R \in I^{-1}(M)$, pues todo módulo es un cociente de un módulo libre.

■

2.4 Monomorfismos esenciales y cápsulas inyectivas.

Una vez definido el concepto de retícula podemos estudiar las retículas de R-módulos. En este caso, dado un anillo R tenemos que en la retícula de submódulos de M el ínfimo está dado por la intersección y el supremo por la suma directa.

Definición 41. *Decimos que $_RB$ es un seudocomplemento de $_RA$ en $_RM$ si es máximo respecto a la propiedad $_RA \cap_R B =_R 0$.*

Lema 6. *Todo submódulo $_RA$ de un módulo $_RM$ tiene un seudocomplemento.*

Demostración:

Consideremos $\mathcal{U} = \{X \subseteq_R M \mid A \cap \langle X \rangle =_R 0\}$. Veremos que $\mathcal{U}$ es de carácter finito.

Si consideramos $Y \subseteq X \in \mathcal{U}$, entonces ${}_R\langle Y \rangle \leq {}_R\langle X \rangle$ y $A \cap {}_R\langle Y \rangle \leq A \cap {}_R\langle X \rangle = {}_R0$. Supongamos entonces que todo subconjunto finito de X pertenece a $\mathcal{U}$ pero que $X \notin \mathcal{U}$, tendríamos que ${}_R\langle X \rangle \cap A \neq {}_R0$, es decir $\exists\ n \in A,\ n \in_R \langle X \rangle$ con $n \neq 0$, entonces lo podemos escribir como: $n = r_1x_1 + ... + r_mx_m$. Por lo tanto tenemos que $A \cap {}_R\langle \{x_1,\ ...,\ x_m\} \rangle \neq {}_R0$, lo cual es una contradicción, la que surge de suponer que $X \notin \mathcal{U}$, por lo tanto $\mathcal{U}$ es de carácter finito.

Así, por el Lema de Tukey $\mathcal{U}$ tiene máximos. Sea B un elemento máximo de $\mathcal{U}$, entonces $A \cap {}_R\langle B \rangle = {}_R0$. Supongamos que ${}_R\langle B \rangle$ no fuera un seudocomplemento de A, eso implica que $\exists\ N \leq M$ tal que ${}_R\langle B \rangle \lneqq N$ y $A \cap N = {}_R0$, consideremos entonces $z \in N \setminus {}_R\langle B \rangle$, tendríamos que $B \subsetneqq B \cup \{z\}$ y $A \cap {}_R\langle B \cup \{z\} \rangle \leq A \cap N = {}_R0$, lo cual es una contradicción, pues B era máximo con esa propiedad, por lo tanto todo submódulo ${}_RA$ de un módulo ${}_RM$ tiene un seudocomplemento. ■

Observación 7. *Decimos que ${}_RA$ es esencial en ${}_RM$, denotado ${}_RA \leq_{es} {}_RM$ si ${}_R0$ es un seudocomplemento de ${}_RA$.*

Lema 7. *${}_RA \leq_{es} {}_RM$ si y sólo si $\forall\ x \in M$, con $x \neq 0$, $\exists\ r \in R$ tal que $0 \neq rx \in\ A$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Como ${}_RA$ es esencial en ${}_RM$ entonces ${}_RA \cap Rx \neq 0\ \forall\ x \in\ {}_RM$ distinto de 0, por lo tanto existen $a\ \in\ A$ y $r\ \in\ R$ tales que $a = rx \neq 0$.

$\Leftarrow$) Sea ${}_RN \neq_R 0$ y $x \neq 0\ \ \in_R N$, por hipótesis existe $r \in\ R$ tal que $rx \in\ A$ con $rx \neq 0$, por lo tanto ${}_RA \cap {}_RN \neq {}_R0$, es decir, ${}_RA \leq_{es} {}_RM$. ■

Observación 8. *B es un seudocomplemento de A en M entonces $A \oplus B \leq_{es} M$*

Demostración:

Es claro que $A + B = A \oplus B$ pues $A \cap B = 0$. Si $A \oplus B$ no fuera esencial en M, tendría un seudocomplemento Cen M, con $C \neq 0$. Pero entonces $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$, con $B \lneqq B \oplus C$, contradiciendo que B es un seudocomplemento de A.

■

Definición 42. *Decimos que un R-módulo ${}_RM$ es uniforme si no es ${}_R0$ y todos sus submódulos no triviales son esenciales.*

Ejemplo 2. *${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es uniforme, pues si consideramos $m,\ n \in \mathbb{N}$ distintos de 0, entonces $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \neq \{0\}$ pues $mn \neq 0$ y $mn \in\ m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.*

Definición 43. *Decimos que ${}_RC \leq {}_RM$ es esencialmente cerrado en ${}_RM$ si ${}_RC \leq_{es} {}_RD \leq {}_RM$, entonces ${}_RC = {}_RD$ y lo denotaremos como ${}_RC \leq_{ec} {}_RM$. También lo denotaremos como ${}_RC \xhookrightarrow{e.c.} {}_RM$.*

Lema 8. *Sean ${}_RA$, ${}_RB$, submódulos de ${}_RM$ tales que $A \leq_{es} B \leq_{es} M$, entonces $A \leq_{es} M$.*

Demostración:
Sea $0 \neq x \in M$, veremos que $\exists r \in R$ tal que $0 \neq rx \in A$. Como $B \leq_{es} M$ $\exists r_1 \in R$ tal que $0 \neq r_1 x \in B$ y como $A \leq_{es} B$ $\exists r_2 \in R$ tal que $0 \neq r_2 r_1 x \in A$, por lo tanto $r = r_1 r_2 \in R$ es el elemento que buscamos y por lo tanto $A \leq_{es} M$. ■

Lema 9. *Todo submódulo ${}_RA$ de ${}_RM$ es esencial en un submódulo esencialmente cerrado de ${}_RM$.*

Demostración:
Sea $\zeta = \{{}_RB \leq {}_RM \mid {}_RA \leq_{es} {}_RB\}$ y consideremos una cadena en ζ, $\{B_i\}_I, \bigcup_I \{B_i\} \leq {}_RM$. Si consideramos $0 \neq x \in \bigcup\{B_i\}$, entonces $0 \neq x \in B_j$ para algún $j \in I$ y como $A \leq_{es} B_j$, entonces $\exists\ r \in R$ tal que $0 \neq rx \in A$. es decir, $A \leq_{es} \bigcup\{B_i\}$. Hemos demostrado que toda cadena en ζ tiene una cota superior. Por el Lema de Zorn, ζ tiene máximos.

Consideremos $C \in \zeta$ máximo, así $A \leq_{es} C$. Si tuviéramos que $C \leq_{es} D$, entonces $A \leq_{es} C \leq_{es} D$, lo que implica que $A \leq_{es} D$. Como C es máximo en ζ, entonces $C = D$, por lo que $A \leq_{es} C \leq_{ec} M$. ■

Lema 10. *Sean A, B submódulos de M como en el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "es"'] \arrow[dr, hook] & M \\ & B, \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

entonces $A \leq_{es} B$ y $B \leq_{es} M$.

Demostración:
Para demostrar que $A \leq_{es} B$ consideremos $0 \neq x \in B \leq M$, como $A \leq_{es} M$ $\exists r \in R$ tal que $0 \neq rx \in A$ y por lo tanto $A \leq_{es} B$.

Para demostrar que $B \leq_{es} M$ consideremos $0 \neq x \in M$, como $A \leq_{es} M$ $\exists r \in R$ tal que $0 \neq rx \in A \leq B$ y por lo tanto $B \leq_{es} M$. ■

Lema 11. *Sean A, B submódulos de M. Si B es seudocomplemento de A, entonces $A \oplus B \leq_{es} M$ y $\frac{A \oplus B}{B} \leq_{es} \frac{M}{B}$.*

Demostración:
Como B es seudocomplemento de A, entonces $A \cap B = 0$ y si existe $0 \neq C \leq M$ tal que $(A \oplus B) \cap C = 0$, entonces $(A \oplus B) \oplus C \leq M$, pero se tiene que $(A + B) + C = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A + (B + C)$ y además $B \cap C \leq (A \oplus B) \cap C = 0$, por lo tanto $B \cap C = 0$.

Ahora probaremos que $A \cap (B + C) = 0$, sea $a = b + c$ con $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$, entonces $a - b = c \in (A \oplus B) \cap C = 0$, por lo tanto $c = 0$, entonces $a = b \in A \cap B = 0$ y por lo tanto $a = b = c = 0$. Además $B \lneqq B \oplus C$, ya que $C \neq 0$. Y si $0 \neq x \in C$, entonces $x \notin B$ y como B es un seudocomplemento de A, entonces $A \cap (B \oplus C) = 0$ es una contradicción. Por lo tanto $A \oplus B \leq_{es} M$. ■

Todo grupo abeliano tiene característica de $\mathbb{Z}$-módulo.

Definición 44. *Un grupo abeliano ${}_{\mathbb{Z}}D$ es divisible si $nD = D$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Teorema 10. *Son equivalentes para un grupo abeliano ${}_{\mathbb{Z}}D$:*

1) ${}_{\mathbb{Z}}D$ es divisible.

2) Para todo morfismo $f : n\mathbb{Z} \longrightarrow D$ existe $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow D$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}}n\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ {}_{\mathbb{Z}}D & \end{tikzcd}.$$

3) Para todo diagrama

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & {}_{\mathbb{Z}}B \\ {}_{\mathbb{Z}}D & \end{tikzcd}$$

existe un morfismo $\phi : B \longrightarrow D$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & {}_{\mathbb{Z}}B \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ {}_{\mathbb{Z}}D & \end{tikzcd}$$

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea ${}_{\mathbb{Z}}D$ un grupo abeliano divisible y el morfismo $f :_{\mathbb{Z}} n\mathbb{Z} \longrightarrow_{\mathbb{Z}} D$ donde $n \longmapsto d$. Como ${}_{\mathbb{Z}}D$ es divisible, entonces $\exists d' \in D$ tal que $d = nd'$, de esta manera se define el morfismo $\phi :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow_{\mathbb{Z}} D$ como multiplicar por la derecha por d' y así el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}}n\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \arrow[dl, "\phi = \_ \cdot d'"] \\ D & \end{tikzcd}.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $n \in \mathbb{N}$, $d \in_{\mathbb{Z}} D$ y el morfismo $f :_{\mathbb{Z}} n\mathbb{Z} \longrightarrow_{\mathbb{Z}} D$ donde $nz \longmapsto dz$, entonces por hipótesis existe un morfismo $\phi :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow_{\mathbb{Z}} D$ que extiende a f, es decir que es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}}n\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \arrow[dl, "\phi = \_ \cdot \phi(1)"] \\ {}_{\mathbb{Z}}D & \end{tikzcd}$$

por lo tanto por un lado se tiene que $n \mapsto d$ y por el otro lado $n \mapsto n \mapsto n \cdot \phi(1)$, es decir $\forall d \in_{\mathbb{Z}} D\ \exists d' \in_{\mathbb{Z}} D$, a saber $d' = \phi(1)$, tal que $d = nd'$ y por lo tanto ${}_{\mathbb{Z}}D$ es divisible.

3) $\Rightarrow$ 2) Se tiene por ser 2 un caso particular de 3.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & {}_{\mathbb{Z}}B \\ {}_{\mathbb{Z}}D & \end{tikzcd}$$

y el conjunto $\zeta = \{(C, \phi_C) \mid A \hookrightarrow C \hookrightarrow B \text{ y } \phi_C : C \to D \text{ extiende a } f\}$, es decir, si $(C, \phi_C) \in \zeta$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, "f"] & & B \\ & C \arrow[ur, hook] \arrow[dl, dashed, "\phi_C"] & \\ D & & \end{tikzcd},$$

observemos queζ es no vacío, pues $(A, f) \in \zeta$.

Definimos la relación $(C, \phi_C) \leq (C', \phi_{C'})$ si

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_C"] & C' \arrow[dl, "\phi_{C'}"] \\ D & \end{tikzcd}$$

y probaremos que es un orden en ζ.

La reflexividad es clara, si $(C, \phi_C) \in \zeta$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_C"] & C \arrow[dl, "\phi_C"] \\ D & \end{tikzcd}$$

y por lo tanto $(C, \phi_C) \leq (C, \phi_C)$.

Si $(C, \phi_C) \leq (C', \phi_{C'}) \leq (C, \phi_C)$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi_C"] & C' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_{C'}"] & C \arrow[dl, "\phi_C"] \\ & D & \end{tikzcd},$$

entonces $C = C'$ y $\phi_C = \phi_{C'} {\restriction_C} = \phi_{C'} {\restriction_{C'}} = \phi_{C'}$ y por lo tanto $(C, \phi_C) = (C', \phi_{C'})$.

Si $(C, \phi_C) \leq (E, \phi_E) \leq (F, \phi_F)$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi_C"] & E \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_E"] & F \arrow[dl, "\phi_F"] \\ & D & \end{tikzcd},$$

entonces $C \leq F$ y $\phi_{F\restriction_E} = \phi_E$, por lo tanto $\phi_F \restriction_C = (\phi_F \restriction_E) \restriction_C = \phi_E \restriction_C = \phi_C$ y por lo tanto $(C, \phi_C) \leq (F, \phi_F)$.

Por lo tanto $\leq$ es una relación de orden en ζ.

Sea $\{(C_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ una cadena en ζ, entonces $\{C_i\}_{i\in I}$ es una cadena de subgrupos de B que contienen a A por lo tanto $A \leq \bigcup_I \{C_i\} \leq B$ y se define $\phi_U : \bigcup_I \{C_i\} \longrightarrow D$ como $\phi_U(x) = \phi_i(x)$ si $x \in C_i$, de esta manera ϕ_U está bien definido, pues si $x \in C_j$, entonces

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_i"] & C_j \arrow[dl, "\phi_j"] \\ D & \end{tikzcd}$$

ó

$$\begin{tikzcd} C_j \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_j"] & C_i \arrow[dl, "\phi_i"] \\ D & \end{tikzcd}$$

con $\phi_i(x) = \phi_j(x)$ y además $(C_i, \phi_i) \leq (\bigcup_I \{C_i\}, \phi_U)$, entonces se satisfacen las hipótesis del Lema de Zorn y por lo tanto ζ tiene un elemento máximo (W, θ) y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, "f"'] & & B \\ & W \arrow[ur, hook] \arrow[dl, "\theta"] & \\ D & & \end{tikzcd} .$$

Si $W = B$, entonces acaba la demostración. Veamos que $W \lneqq B$ lleva a una contradicción. Sea $0 \neq b \in B \setminus W$. Afirmamos que $W \cap \mathbb{Z}b \neq {}_{\mathbb{Z}}0$, pues de lo contrario $\exists \theta' : W \oplus \mathbb{Z}b \longrightarrow D$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\theta"] & W \oplus \mathbb{Z}b \arrow[r, hook] \arrow[dl, "\theta'"] & B \\ D & & \end{tikzcd} ,$$

así $(W, \theta) \lneqq (W \oplus \mathbb{Z}b, \theta')$ en ζ, lo cual es una contradicción y por lo tanto $W \cap \mathbb{Z}b \neq 0$. Entonces $\exists z \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \neq zb \in W$, definimos $(b : W) = \{z \in \mathbb{Z} \mid zb \in W\}$ y notemos que es un ideal de $\mathbb{Z}$, pues contiene a 0 y es cerrado bajo la resta, observemos además que los ideales de $\mathbb{Z}$ coinciden con sus subgrupos, es decir, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $(b : W) = n\mathbb{Z}$. Como
$$\begin{aligned} n\mathbb{Z} &\longrightarrow D \\ ns &\longmapsto (\theta(nb))s \end{aligned}$$
es un morfismo de grupos, por hipótesis $\exists \varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow D$ tal que $\forall s \in \mathbb{Z}$ $\varphi(ns) = \theta(nb)s$.

Definimos $\lambda : W + \mathbb{Z}b \longrightarrow D$, donde $\lambda(w + zb) = \theta(w) - \varphi(zb)$. Veamos que λ está bien definida, sean w, $w' \in W$ y z, $z' \in \mathbb{Z}$ tales que $w + zb = w' + z'b$, entonces $w - w' = (z' - z)b$, por lo tanto $z' - z \in (b : W) = n\mathbb{Z}$, es decir, $z' - z = nt$ para algún $t \in \mathbb{Z}$. De aquí se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\theta(w) - \theta(w') &= \theta(w - w') \\
&= \theta((z' - z)b) \\
&= \theta(ntb) \\
&= \theta(nbt) \\
&= \theta(nb)t \\
&= \varphi(nt) \\
&= \varphi(n)t \\
&= \varphi(1)nt \\
&= \varphi(1)(z' - z) \\
&= \varphi(1)z' - \varphi(1)z \\
&= \varphi(z') - \varphi(z).
\end{aligned}$$

Por lo que $\lambda(w + zb) = \theta(w) + \varphi(z) = \theta(w') + \varphi(z') = \lambda(w' + z')$, es decir, λ está bien definida. Es claro que λ es un morfismo de grupos que extiende a θ, lo cual contradice la propiedad que tiene (W, θ) de ser máximo. La contradicción surge de suponer que $W \neq B$, por lo tanto $W = B$ y esto concluye la demostración. ■

Definición 45. *Un monomorfismo* $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$ *es esencial si* $f(A) \leq_{es} B$.

Lema 12. *Son equivalentes para un morfismo* $A \xrightarrow{f} B$:

1) f es monomorfismo esencial.

2) $g \circ f$ monomorfismo $\Rightarrow$ g es monomorfismo.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que f es un monomorfismo esencial y consideremos el siguiente diagrama con $g \circ f$ monomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dr, tail, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

si g no fuera monomorfismo, entonces $Nuc(g) \neq 0$, lo cual implica que $f(A) \cap Nuc(g) \neq 0$, es decir, $\exists 0 \neq a \in A$ tal que $g(f(a)) = 0$, entonces $(g \circ f)(a) = 0$ lo cual es una contradicción, pues $g \circ f$ es un monomorfismo. Por lo tanto g es monomorfismo.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que si $g \circ f$ es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo, pero supongamos que $f(A)$ no es esencial en B, esto implica que $\exists 0 \neq x \in B$ tal que $f(A) \cap Rx = 0$. Consideremos entonces el siguiente diagrama con π la proyección canónica:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi\circ f"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ & \frac{B}{Rx}. \end{tikzcd}$$

Veremos que $\pi \circ f$ es un monomorfismo, lo cual nos llevará a una contradicción.

Consideremos $a \in A$ tal que $(\pi \circ f)(a) = 0$, entonces $f(a) \in Rx \cap f(A)$, es decir, $f(a) = 0$ pues $f(A)$ no es esencial en B, pero f es monomorfismo, entonces $a = 0$, es decir $\pi \circ f$ es monomorfismo, pero π no es monomorfismo, lo cual contradice la hipotesis, por lo tanto $f(A) \leq_{es} B$. ■

Definición 46. *Una cápsula inyectiva de ${}_RM$ es un monomorfismo esencial $M \rightarrowtail E$ con ${}_RE$ inyectivo.*

A partir de aquí denotaremos a la cápsula inyectiva de un módulo M como $E(M)$.

Teorema 11. *Si D es un grupo divisible, entonces ${}_RHom(R, D)$ es inyectivo.*

Demostración:

${}_RHom(R, D)$ es un R-módulo, pues si $r \in R$ y $f : R \longrightarrow D$, entonces $(rf)(x) = f(xr)$ y se satisfacen las condiciones para ser un R-módulo, sean $r_1,\ r_2,\ x_1,\ x_2 \in R$ y $f \in Hom(R, D)$, entonces

1. $(1f)(x_1) = f(x_1 \cdot 1) = f(x_1)$.
2. $(r_1r_2 \cdot f)(x_1) = f(x_1r_1r_2) = (r_2f)(x_1r_1) = r_1(r_2f)(x_1)$.
3. $((r_1 + r_2)f)(x_1) = f((x_1)(r_1 + r_2)) = f(x_1r_1 + x_1r_2) = f(x_1r_1) + f(x_1r_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_1)$.
4. $(r_1f)(x_1 + x_2) = f((x_1 + x_2)r_1) = f(x_1r_1 + x_2r_1) = f(x_1r_1) + f(x_2r_1) = r_1f(x_1) + r_1f(x_2)$.

Para probar que $Hom(R, D)$ es inyectivo usaremos el criterio de Baer, para ello consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "{}_R\phi"] & R \\ Hom(R, D) & \end{tikzcd}$$

se tiene que $\phi(i) \in Hom(R, D)$ y además $(\phi(i))(1) \in D$, lo cual induce un morfismo de grupos $\phi(\_)(1) : I \longrightarrow D$, además por hipótesis D es divisible, es decir, es inyectivo como $\mathbb{Z}$-módulo, por lo tanto existe un morfismo $\theta : R \longrightarrow D$ tal que el siguiente diagrama de $\mathbb{Z}$-módulos conmuta

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi()(1)"'] & R \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ D & \end{tikzcd}$$

es decir, $\theta(i) = \phi(i)(1)\ \forall i \in I$. Así tenemos el morfismo $\_ \cdot \theta : R \longrightarrow Hom(R, D)$, con ello probaremos que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "_R\phi"'] & R \arrow[dl, dashed, "\_\cdot\theta"] \\ Hom(R,D) & \end{tikzcd}$$

sean $i \in I,\ r \in R$, entonces $(i\theta)(r) = \theta(ri) = \phi(ri)(1) = (r\phi(i))(1) = (\phi(i))(1 \cdot r) = \phi(i)(r)$, por lo tanto se cumple el criterio de Baer, de aquí que $Hom(R, D)$ es inyectivo. ∎

Con el resultado anterior se tiene que $Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ es inyectivo como R-módulo.

Lema 13. *Para todo R-módulo M existe un morfismo $_R\phi : M \longrightarrow Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ distinto de cero.*

Demostración:

Por el lema anterior se tiene que $Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ es inyectivo, por lo que basta demostrar que $Hom(Rx, Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})) \neq 0$ para todo $_RRx \neq 0$, pues de existir un morfismo no cero $f \in Hom(Rx, Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}))$ tendríamos que existe un morfismo ϕ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \neq M \arrow[r, dashed, "\phi"] & Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) \\ Rx \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}.$$

Sea $Rx \neq 0$, como $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ es un cogenerador inyectivo en $\mathbb{Z} - mod$ existe un morfismo distinto de cero $f : Rx \longrightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, además se tiene que el morfismo $\_ \cdot x : R \longrightarrow Rx$ es un morfismo de grupos, por lo que la composición $f \circ (\_ \cdot x)$ es un morfismo de grupos. Sea $\theta : Rx \longrightarrow Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ el morfismo tal que $x \mapsto f \circ (\_ \cdot x)$ y $rx \mapsto r(f \circ (\_ \cdot x))$. Así, si $s \in R$, entonces $(\theta(rx))(s) = (r(f \circ (\_ \cdot x))(s) = (f \circ (\_ \cdot x))(sr) = f(srx)$. Veremos que θ es un morfismo bien definido, para ello sea $rx = 0$ y probaremos que $\theta(rx) = 0$, pero $\theta(rx)(s) = f(srx) = f(0) = 0\ \forall s \in R$, por lo tanto $\theta(rx) = 0$ con $\theta \neq 0$. Por último, tenemos que $(\theta(x))(s) = (f \circ (\_ \cdot x)(s) = f(sx)$ y en particular $(\theta(x))(1) = f(x)$, por lo que existe un morfismo $M \to Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$. ∎

Teorema 12. *Todo módulo M se puede sumergir en un módulo inyectivo.*

Demostración:

El módulo $_R0$ es un módulo inyectivo, pues satisface el criterio de Baer:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & R \arrow[dl, dashed, "0"] \\ 0 & \end{tikzcd}.$$

De esta manera, sea $M \neq 0$ un R-módulo, entonces $\forall x \in M$ $\exists 0 \neq \phi_x : Rx \longrightarrow Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$. Como $Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ es inyectivo $\exists \theta_x : M \longrightarrow Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_x"] & M \arrow[dl, dashed, "\theta_x"] \\ Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) & \end{tikzcd},$$

así, la familia $\{M \xrightarrow{\theta_x} Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\}_{x \in M\setminus\{0\}}$ induce un morfismo π_x tal que el siguiente diagrama conmuta por la propiedad universal del producto:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta_x"] & \Pi Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) \arrow[dl, dashed, "\pi_x"] \\ Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) & \end{tikzcd},$$

si $0 \neq x \in M$, entonces $\pi_x(\phi(x)) = \theta_x(x) = \phi_x(x) \neq 0$, por lo tanto $0 \neq \phi(x) \in \Pi Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ y por lo tanto $Nuc(\phi) = \{0\}$, es decir, ϕ es un monomorfismo y $\Pi Hom(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ es inyectivo por ser producto de inyectivos y por lo tanto M se sumerge en un módulo inyectivo. ∎

Observación 9. *La clase de los módulos inyectivos izquierdos es abstracta, es decir, si M es inyectivo y $M \overset{f}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} N$, entonces N es inyectivo.*

Demostración:

Utilizando el criterio de Baer, buscamos un morfismo $\psi : R \longrightarrow N$ tal que el diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & R \arrow[dl, "\psi"] \\ N & \end{tikzcd}.$$

Como M es inyectivo, existe $\phi : R \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "g"] & R \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ N \arrow[r, "f^{-1}"] & M \end{tikzcd},$$

es decir, $f^{-1} \circ g = \phi \circ \iota$, como f es isomorfismo, entonces $g = f \circ \phi \circ \iota$ y por lo tanto $\psi = f \circ \phi$ es el morfismo deseado y por lo tanto N es inyectivo. ∎

Lema 14. *Si $E \leq_{e.c.} K$, con K un R-módulo inyectivo, entonces E es un sumando directo de K.*

Demostración:
Sea B un seudocomplemento de E en K, entonces $E \oplus B \overset{es}{\hookrightarrow} K$ y por el Lema 11, se tiene que $\frac{E\oplus B}{B} \leq_{es} \frac{K}{B}$.

Ahora, como $E \cong \frac{E\oplus B}{B}$, consideremos el monomorfismo esencial $\gamma : E \longrightarrow \frac{K}{B}$ dado por la composición del isomorfismo y la inclusión esencial descrita anteriormente. Además, como K es inyectivo, $\exists\phi : \frac{K}{R} \longrightarrow K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, hook, "\iota"] & \frac{K}{B} \arrow[dl, dashed, tail, "\phi"] \\ K & \end{tikzcd}$$

y como γ es un monomorfismo esencial y $\phi \circ \gamma$ es un monomorfismo, entonces ϕ también es un monomorfismo, lo cual implica que $E \leq Im(\phi)$, probaremos que $E \leq_{es} Im(\phi)$.

Sea $0 \neq e \in E$, entonces $e \mapsto r(R + B)$ vía el isomorfismo y a su vez $r(R + B) \mapsto r\overline{k} \in \frac{K}{B}$, así, $e = \phi(r\overline{k}) = r\phi(\overline{k}) \neq 0$, entonces $E \leq_{es} Im(\phi)$ y por lo tanto $E = Im(\phi)$.

De esta manera se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "\gamma"] \arrow[d, hook, "\iota\restriction"] & \frac{K}{B} \arrow[dl, "\phi\restriction"] \\ E = Im(\phi) & \end{tikzcd},$$

es decir, $\phi\restriction$ escinde a γ, por lo tanto $\gamma(E)$ es un sumando directo esencial de $\frac{K}{B}$, entonces $\frac{E\oplus B}{B} = \gamma(E) = \frac{K}{B}$ y por lo tanto $E \oplus B = K$, es decir, E es sumando directo de K. ■

Definición 47. *Una extensión esencial de un módulo M es un módulo E que contiene a M y $M \hookrightarrow E$ es un monomorfismo esencial.*

Teorema 13. *Todo R-módulo izquierdo se puede sumergir esencialmente en un módulo inyectivo.*

Demostración:
Si M es un R-módulo, entonces por el teorema anterior $\exists\alpha : M \rightarrowtail K$ con K un R-módulo inyectivo.

Por comodidad consideremos $\alpha(M)$ como M y de esta forma α es una inclusión, es decir $M \hookrightarrow K$ con K un R-módulo inyectivo.

M tiene una extensión esencial máxima en K, sea $E \hookrightarrow K$ una extensión esencial máxima de M en K, es decir $M \overset{es}{\hookrightarrow} E \overset{e.c.}{\hookrightarrow} K$. Por el lema anterior tenemos que E es un sumando directo de K, entonces E es inyectivo y por lo tanto M se sumerge esencialmente en un módulo inyectivo. ■

El resultado anterior prueba que todo R-módulo tiene cápsula inyectiva. En seguida se probará que si un R-módulo tiene dos cápsulas inyectivas estas son isomorfas.

Lema 15. *Dos cápsulas inyectivas de un R-módulo M son isomorfas.*

Demostración:

Sean $M \underset{es}{\overset{f}{\rightarrowtail}} E$ y $M \underset{es}{\overset{g}{\rightarrowtail}} Q$ dos cápsulas inyectivas de M. Como Q es inyectivo y f es un monomorfismo, entonces $\exists \gamma : E \longrightarrow Q$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "f", "es"'] \arrow[d, tail, "g", "es"'] & E \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

así, como $\gamma \circ f$ es un monomorfismo y f es un monomorfismo, entonces γ es también un monomorfismo y como E es inyectivo, entonces $E \cong \gamma(E)$, así que $\gamma(E)$ es inyectivo (vea la Observación 9). Considerando la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \gamma(E) \hookrightarrow Q \longrightarrow \frac{Q}{\gamma(E)}$$

esta se escinde y por lo tanto $\gamma(E)$ es sumando directo de Q, pero $\gamma \circ f = g$ y g es un monomorfismo esencial por hipótesis, entonces $Im(g) \leq_{es} Q$ y $Im(g) \leq Im(\gamma \circ f) \leq Im(\gamma) \leq Q$, entonces $Im(\gamma) \leq_{es} Q$, por lo tanto $\gamma(E)$ es un sumando directo esencial de Q y por lo tanto $\gamma(E) = Q$, es decir γ es monomorfismo y epimorfismo, por lo tanto es isomorfismo y $E \cong Q$. ■

Teorema 14. *Todo módulo tiene una cápsula inyectiva y es única salvo isomorfismo.*

Demostración:

Se concluye del Teorema 13 y del Lema15. ■

Teorema 15. *Son equivalentes para un R-módulo E*

1) E es inyectivo.

2) Toda sucesión

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

se escinde.

3) Si E' es una copia de E y $E' \leq D$, entonces E' es sumando directo de D.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Como E es inyectivo, entonces $\exists \phi : B \longrightarrow E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_E"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\phi"] & C \arrow[r] & 0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

es decir, $\phi \circ f = Id_E$ y por lo tanto la sucesión se escinde.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea E' una copia de E, es decir $\exists \gamma : E \longrightarrow E'$ un isomorfismo y sea $E' \leq D$, entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\ & E' \arrow[r, hook] & D & & \end{tikzcd}$$

entonces por hipótesis $\iota \circ \gamma : E \longrightarrow D$ es un monomorfismo que se escinde, por lo tanto $\exists \beta : D \longrightarrow E$ tal que $\beta \circ \iota \circ \gamma = Id_E$, pero entonces $\gamma \circ \beta \circ \iota \circ \gamma = \gamma = Id_{E'} \circ \gamma$ y como γ es en particular un monomorfismo, entonces $\gamma \circ \beta \circ \iota = Id_{E'}$, entonces $\gamma \circ \beta$ escinde a ι y por lo tanto E' es un sumando directo de D.

3) $\rightarrow$ 1) Sea $E \overset{f}{\rightarrowtail} Q$ una cápsula inyectiva para E, por hipótesis se tiene que $f(E)$ es un sumando directo de Q y además $f(E) \leq_{es} Q$, pues f es un monomorfismo esencial, por lo tanto $f(E) = Q$ con Q inyectivo, es decir, E es isomorfo a un módulo inyectivo y como la clase de módulos inyectivos es abstracta, entonces E es inyectivo. $\blacksquare$

2.5 Epimorfismos superfluos y cubiertas proyectivas.

Proposición 5. *Todo R-módulo M es una imagen epimórfica de un módulo proyectivo P.*

Demostración:

Se sigue de los resultados obtenidos en la sección de módulos libres y proyectivos. $\blacksquare$

Definición 48. *Sea $N \leq M$, decimos que N es superfluo en M si $\forall U \leq M$ tal que $N + U = M$, entonces $U = M$ y se denota $N \ll M$*

Definición 49. *Un epimorfismo $f : M \to N$ es superfluo si $Nuc(f)$ es superfluo en M.*

Proposición 6. *Sea M un R-módulo y $K \leq M$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) $K \ll M$.

2) El morfismo $p_K : M \longrightarrow \frac{M}{K}$ es un epimorfismo superfluo.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $K \ll M$ y el morfismo $p_K : M \longrightarrow \frac{M}{K}$, entonces como $Nuc(p_K) = K$ y $K \ll M$, entonces $Nuc(p_K) \ll M$ y así p_K es superfluo.

2) $\Rightarrow$ 1) Como p_K es un epimorfismo superfluo, entonces $Nuc(p_K) \ll M$, pero $Nuc(p_K) = K \leq M$, por lo tanto $K \ll M$. $\blacksquare$

Corolario 2. *Un epimorfismo $g : M \longrightarrow N$ es superfluo si y sólo si para todo morfismo h, si $g \circ h$ es un epimorfismo, entonces h es un epimorfismo.*

Lema 16. *Si $K \ll M$ y $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo, entonces $f(K) \ll N$. En particular, si $K \ll M \leq N$, entonces $K \ll N$.*

Demostración:
Sea $f(K) + A = N$, con $A \leq N$, entonces para $m \in M$ existen $k \in K$, $a \in A$ tal es que $f(m) = f(k) + a$, entonces $f(m - k) = a$, es decir, $m - k \in f^{-1}(A)$, entonces $m \in K + f^{-1}(A)$, por lo tanto $M = K + f^{-1}(A)$, pero $K \ll M$, entonces $M = f^{-1}(A)$ y $f(M) = f \circ f^{-1}(A) = A \cap Im(f)$, por lo tanto $f(K) \leq f(M) \leq A$ y por lo tanto $A = f(K) + A = N$, entonces $f(K) \ll N$. ■

Definición 50. *Una cubierta proyectiva de un módulo ${}_RM$ es un epimorfismo superfluo $P \twoheadrightarrow M$ con ${}_RP$ proyectivo.*

A diferencia de la cápsula inyectiva no todo módulo tiene cubierta proyectiva.

Ejemplo 3. *Consideremos a $\mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}$-módulo. En el caso de los $\mathbb{Z}$-módulos, basta con considerar los epimorfismos que parten de $\mathbb{Z}$, por la definición de módulo proyectivo, pero observemos que el epimorfismo natural $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ no es superfluo, pues $Nuc(\pi) \cong 2\mathbb{Z}$.*

Lema 17. *Sea M un R-módulo tal que $p : P \longrightarrow M$ es una cubierta proyectiva para M. Si Q es un R-módulo proyectivo y $q : Q \longrightarrow M$ es un epimorfismo, entonces $Q = P' \oplus P''$, donde*

1) $P' \cong P$

2) $P'' \leq Nuc(q)$

3) $q\restriction_{P'} : P' \longrightarrow M$ es una cubierta proyectiva de M.

Demostración:
Como Q es un R-módulo proyectivo existe un único morfismo $h : Q \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "q"] \\ P \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

Como $P \xrightarrow{p} M$ es una cubierta proyectiva, entonces p es un epimorfismo superfluo, como el diagrama conmuta, entonces $p \circ h = q$ y además q es un epimorfismo por hipótesis, por lo tanto h es un epimorfismo, es decir, se tiene la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{h} P \longrightarrow 0$$

por el Teorema 6 se tiene que la sucesión se escinde, por lo tanto existe un morfismo (es monomorfismo por la sucesión exacta) $g : P \longrightarrow Q$ tal que $h \circ g = Id_P$ y por lo tanto $Q = Im(g) \oplus Nuc(h)$.

Ahora, como g es monomorfismo se tiene que $P' = Nuc(g) \cong P$, con lo cual se satisface (1). El inciso (2) se satisface ya que por el diagrama se tiene que $p \circ h = g$ y por lo tanto $P'' = Nuc(h) \leq Nuc(q)$. Por último, se tiene que $q(P') = q(Q) = M$, es decir, la siguiente sucesión es exacta

$$P' \xrightarrow{q^{\restriction}} M \longrightarrow 0 \ ,$$

como $q \circ g = p \circ h \circ g = p$, entonces $Nuc(q^{\restriction}) = g(Nuc(p))$, donde este último es un submódulo superfluo de $g(P) = P'$, por lo tanto $P' \xrightarrow{q^{\restriction}} M$ es una cubierta proyectiva y por lo tanto se satisface el inciso (3). ■

Teorema 16. *Sea M un R-módulo, si M tiene cubierta proyectiva, entonces esta es única salvo isomorfismos.*

Demostración:

Sea M un R-módulo y sean $p_1 : P_1 \longrightarrow M$ y $p_2 : P_2 \longrightarrow M$ dos cubiertas proyectivas para M.

Se considera el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[d, dashed, "f"'] & M \arrow[d, tail, two heads, "Id_M"] \\ P_2 \arrow[r, two heads, "p_2"] & M \end{tikzcd} ,$$

en donde el morfismo f existe pues P_1 es R-módulo proyectivo y p_2 es un epimorfismo. Además $Im(f) + Nuc(p_2) = P_2$, ya que $Id_M \circ p_1 = p_2 \circ f$ es un epimorfismo, pero $P_2 \xrightarrow{p_2} M$ es una cubierta proyectiva y por lo tanto $Nuc(p_2)$ es superfluo en P_2, entonces $Im(f) = P_2$, por lo que f es un epimorfismo.

Ahora, como P_2 es proyectivo, entonces f se escinde, entonces $P_1 = Nuc(f) \oplus P_0$, con $P_0 \cong \frac{P_1}{Nuc(f)}$ proyectivo. Como $Nuc(f) \hookrightarrow Nuc(p_1)$, entonces $p_1^{\restriction P_0}$ es un epimorfismo, pero P_0 es proyectivo. Se probará que $Nuc(p_1^{\restriction}) \ll P_0$, para ello, se considera la restricción $f^{\restriction} : P_0 \longrightarrow P_2$, donde $p \longmapsto f(p)$. Por la definición de P_0 y como f es un epimorfismo se concluye que $f^{\restriction}$ es un isomorfismo. Así, se tiene que $Id_M \circ p_1^{\restriction} = p_2 \circ f^{\restriction}$ y como Id_M y $f^{\restriction}$ son isomorfismos, entonces $Nuc(p_1^{\restriction}) = f^{\restriction -1}(Nuc(p_2))$. Pero $Nuc(p_2) \ll P_2$, entonces (por el Lema 16) $Nuc(p_1^{\restriction}) \ll f^{\restriction -1}(P_2) = P_0$.

Así, como $p_1 : P_1 \longrightarrow M$ es una cubierta proyectiva, entonces $Nuc(p_1) \ll P_1$ y como $Nuc(f) \hookrightarrow Nuc(p_1)$, entonces $Nuc(f) \ll P_1$, pero $P_1 = Nuc(f) \oplus P_0$, entonces $Nuc(f) = 0$ y por lo tanto f es un isomorfismo. ■

Capítulo 3

Anillos noetherianos y artinianos.

En la teoría de R-módulos tienen gran importancia las condiciones de cadenas por los conceptos que se obtienen a partir de ellas. En este capítulo se estudian algunos resultados sobre módulos noetherianos y artinianos.

3.1 Módulos noetherianos y artinianos

Recordemos que todo anillo R tiene estructura de R-módulo por la izquierda y por la derecha. En esta sección se definen los conceptos de módulos noetherianos y artinianos en general.

Definición 51. *Decimos que un R-módulo M es finitamente generado si existe un conjunto X finito tal que todo elemento $m \in M$ es de la forma $m = r_1x_1+r_2x_2+...+r_nx_n$ con $r_i \in R,\ x_i \in X\ \forall i \in \{1,\ ...,\ n\}$.*

El concepto de R-módulo finitamente generado también puede ser estudiado a partir de R-morfismos, de esta manera se obtiene la siguiente equivalencia.

Proposición 7. *Un R-módulo M es finitamente generado si y sólo si para cada colección de módulos $\{U_i\}_{i\in I}$ y un epimorfismo $f : \bigoplus_I \{U_i\} \to M$ existe una subcolección finita $\{U_i\}_{i\in F}$ tal que la restricción $f_\lfloor : \bigoplus_F \{U_i\} \twoheadrightarrow M$ es un epimorfismo.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $\{U_i\}_I$ una colección de módulos y $f : \bigoplus_I \{U_i\} \longrightarrow M$ un epimorfismo, con M finitamente generado por $\{x_1, ..., x_n\}$. Como f es epi, se consideran preimágenes de $x_1,\ ...,\ x_n$, de esta manera $f^{-1}(x_j) \in \bigoplus_{F_j} \{U_i\}$ con F_j finito y para $j \in \{1, ..., n\}$. De esta manera se obtiene una subcolección finita de módulos $\{U_j\}_{F_1\cup...\cup F_n}$ tal que $f_\lfloor : \bigoplus_{j=1}^n \{U_j\}_{F_1\cup...\cup F_n} \longrightarrow M$ es un epimorfismo por cubrir a los generadores de M.

$\Leftarrow$) Apliquemos la hipótesis a la colección $\{Rm\}_{m\in M\setminus\{0\}}$, donde

$$f : \bigoplus \{Rm \mid m \in M \setminus \{0\}\} \longrightarrow M$$

$$r_1m_1 + ... + r_sm_s \longmapsto r_1m_1 + ... + r_sm_s$$

es un epimorfismo. Por hipótesis $\exists F \subseteq M \setminus \{0\}$ finito tal que $f_{\downharpoonleft} : \bigoplus_{m\in F}\{Rm\} \longrightarrow M$ es un epimorfismo y por lo tanto $\{m|m \in F\}$ genera a M. ■

Definición 52. *Un R-módulo M es finitamente cogenerado si dada una familia de submódulos de M, $\{N_i\}_{i\in I}$, se tiene que si $\bigcap\limits_I N_i =_R 0$ entonces $\exists F \hookrightarrow I$ finito tal que $\bigcap\limits_F N_i =_R 0$.*

Lema 18. *Si $_RM$ es un módulo semisimple finitamente generado, cualquier descomposición de M como suma directa de simples tiene el mismo número de sumandos.*

Demostración:

Supongamos que no es así, sea $M = S_1 \oplus S_2 \cdots \oplus S_n$ donde n es el número menor de sumandos directos simples. Y también $M = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ con T_j simple $\forall j$ y $m > n$. Notemos que $n > 1$. Notemos también que si $S_i \cap T_j \neq_R 0$, entonces $S_i = T_j$, pues S_i y T_j son simples. Como $n > 1$, existe S_i tal que $T_1 \neq S_i$. Tomemos $\{S_{i_1}, \cdots, S_{i_k}\} \subseteq \{S_1, \cdots, S_n\}$ una familia independiente máxima tal que $\{S_{i_1}, \cdots, S_{i_k}\}$ es independiente. Notemos que $T_1 \oplus S_{i_1} \oplus \cdots \oplus S_{i_k}$ contiene a todos los simples, por la manera en que escogimos $\{S_{i_1}, \cdots, S_{i_k}\}$.

Entonces $S_1 \oplus \cdots \oplus S_n = T_1 \oplus S_{i_1} \oplus \cdots \oplus S_{i_k}$. Reordenando y reetiquetando, podemos suponer que $S_{i_j} = S_j$, para $j \in \{1, \cdots, k\}$. Entonces $T_1 \cong S_{k+1} \oplus ... \oplus S_n$. Pero esto solamente es posible si $k + 1 = n$.

Entonces $S_1 \oplus \cdots \oplus S_n = S_1 \oplus \cdots \oplus S_{n-1} \oplus T_1$. Es decir $T_1 \cong S_n$.

Entonces $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n = S_n \oplus T_2 ... \oplus T_m$. De aquí que $S_1 \oplus \cdots \oplus S_{n-1} \cong T_2 ... \oplus T_m$. Pero entonces $n - 1 = m - 1$. Una contradicción. ■

A partir de este resultado se puede concluir el siguiente corolario relacionado con la dimensión de un R-módulo M finitamente generado. Recordemos que la dimensión nos la indica el número de generadores linealmente independientes que tenga el módulo.

Corolario 3. *Si $N \leq M$ con M semisimple finitamente generado entonces $dim(N) \leq dim(M)$, y $dim(N) < dim(M) \Leftrightarrow N < M$.*

Teorema 17. *Son equivalentes para un R-módulo M:*

1) M es finitamente cogenerado.

2) Si existe un monomorfismo $f : M \rightarrowtail \prod\limits_I N_i$, entonces existe $F \hookrightarrow I$ finito tal que $f \restriction: M \rightarrowtail \prod\limits_F N_i$ es un monomorfismo.

3) $zoc(M) \leq_{es} M$ y $zoc(M)$ es finitamente generado.

Demostración:

2) $\Rightarrow$ 1) Si $\{L_i\}_I$ es una familia de submódulos de M con intersección nula, entonces consideremos la siguiente familia de morfismos: $\{M \xrightarrow{p_i} \frac{M}{L_i}\}_I$ lo cual induce un morfismo al producto y tenemos el siguiente diagrama conmutativo $\forall\ i \in I$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod_I \frac{M}{L_i} \arrow[dl, "\pi_i"] \\ \frac{M}{L_i} & \end{tikzcd}$$

consideremos $x \in M$, $x \in Nuc(f)$ si y sólo si $0 = f(X) \in \prod_I \frac{M}{L_i}$ si y sólo si $0 = (\pi_i \circ f)(x) \in \frac{M}{L_i}\ \forall\ i \in I$. Por el otro lado tenemos que $p_i(x) = \frac{x+L_i}{L_i}$ si y sólo si $x \in L_i\ \forall\ i \in I$, si y sólo si $x \in \bigcap_I \{L_i\}$, por lo tanto $Nuc(f) = \bigcap_I \{L_i\} = {}_R0$, entonces f es un monomorfismo y por hipótesis existe $F \hookrightarrow I$ finito tal que $M \xrightarrow{f_\restriction} \prod_{i\in F} \frac{M}{L_i}$ es un monomorfismo, entonces ${}_R0 = Nuc(f_\restriction) = \bigcap_F L_i$ y por lo tanto M es finitamente cogenerado.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $M \xrightarrow{f} \prod_I N_i$ es un monomorfismo y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Nuc(\pi_j \circ f) \arrow[r, hook] & M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dr, "\pi_j \circ f"'] & \prod_I N_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ & & N_j \end{tikzcd}$$

como f es un monomorfismo, entonces $0 = Nuc(f) = \bigcap_{j\in I} Nuc(\pi_j \circ f)$ y por hipótesis existe $F \hookrightarrow I$ finito tal que $\bigcap_{j\in F} Nuc(\pi_j \circ f) = 0$ y considerando la restricción $M \xrightarrow{f_\restriction} \prod_F N_i$ entonces $Nuc(f_\restriction) = \bigcap_{j\in F} Nuc(\pi_j \circ f_\restriction = 0$ y por lo tanto la restricción es un monomorfismo.

1) $\Rightarrow$ 3) Primero afirmamos que $zoc(M)$ es esencial en M, pues de lo contrario existe $0 \neq N \leq M$ tal que $N \cap zoc(M) = 0$, entonces $0 = zoc(N) = \bigcap\{L \mid L \leq_{es} N\}$, pero como M es finitamente cogenerado, entonces existen $L_1,\ L_2,\ ...,\ L_k$ submódulos esenciales de N tales que $L_1 \cap L_2 \cap ... \cap L_k = 0$ pero la intersección de submódulos esenciales es esencial, es decir $L_1 \cap L_2 \cap ... \cap L_k \leq_{es} N \neq 0$.

Ahora afirmamos que $zoc(M)$ es finitamente generado, pues de lo contrario existe una familia numerable $\{S_1,\ S_2,\ ...\}$ de submódulos simples de M. Si consideramos

$$U_1 = S_1 \oplus S_2 \oplus ... U_2 = S_2 \oplus S_3 \oplus ...... U_k = S_k \oplus S_{k+1} \oplus ...$$

tendríamos que $0 = \bigcap\{U_i\}$ y $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k = U_k \neq 0$, lo cual contradice que M es finitamente cogenerado y por lo tanto $zoc(M)$ es finitamente generado.

3) $\Rightarrow$ 1) Por inducción sobre $dim(zoc(M))$.

Base. Si $dim(zoc(M)) = 0$, entonces $zoc(M) = 0 \leq_{es} M \Rightarrow M = 0$ y ${}_R0$ es finitamente cogenerado.

Si $dim(zoc()M) = 1$ entonces ${}_RM$ tiene un zoclo simple y esencial ${}_RS$, digamos. Entonces S es un submódulo de cualquier submódulo no nulo de M. La única manera de que una familia de submódulos de M sea de intersección trivial, es que algún submódulo de la familia sea ${}_R0$. Entonces M es finitamente cogenerado.

Podemos suponer que $zoc(M)$ tiene dimensión $n > 1$. Sea $\{N_i\}_I$ una familia en ${}_R[0,\ M]$ de intersección nula, podemos suponer que todos los módulos en la familia son no nulos. Escojamos N_i en la familia con zoclo contenido propiamente en $zoc(M)$, (tiene que haberlo porque la familia es de intersección nula). Notemos que $zoc(N)$ es esencial en N, para cada submódulo de M.

N_i es un módulo con zoclo finitamente generado y esencial de dimensión menor a n. Podemos aplicar hipótesis de inducción. La familia $\{N_i \cap N_j\}_{j \in I \setminus \{i\}}$ es una familia de intersección nula de submódulos de ${}_RN_i$. Por hipótesis de inducción contiene una subfamilia finita de intersección nula. Entonces $\{N_i\}_{i \in I}$ tiene una subfamilia finita de intersección nula. ■

Teorema 18. *Son equivalentes para un R-módulo izquierdo (derecho) M:*

1) Todo submódulo N de M es finitamente generado.

2) M tiene condición de cadena ascendente en sus submódulos.

3) M tiene condición máxima en sus submódulos.

4) M tiene condición de cadena ascendente en sus submódulos finitamente generados.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $N_1 \leq N_2 \leq ...$ es una cadena de submódulos de M y notemos que $\bigcup N_i \leq M$ y por hipótesis es finitamente generado, digamos entonces que $\{x_1, ..., x_n\} \xrightarrow{genera} \bigcup N_i = N$, como $x_1 \in N$ entonces $x_1 \in N_{i_1}$ para algún $i_1 \in \mathbb{N}$, si N_{i_1} contuviera a todos los generadores de N, entonces $N_{i_1} = N$ y la cadena se estaciona ahí, en caso contrario $\exists x_{i_2} \in \{x_1,\ ...,\ x_k\}$ con $x_{i_2} \neq x_1$ y $x_{i_2} \notin N_{i_1}$, entonces $\exists i_2 > i_1$ tal que $x_{i_1},\ x_{i_2} \in N_{i_2}$, nuevamente, si N_{i_2} contiene a todos los generadores de N entonces la cadena se estaciona en $N_{i_2} = N$ y en caso contrario repetimos el proceso, notemos que como $\{x_1,\ ...,\ x_k\}$ es finito este proceso debe terminar, por lo tanto existe N_j tal que $x_1,\ ...,\ x_k \in N_j = N$, por lo tanto toda cadena ascendente de submódulos de M se estaciona.

2) $\Rightarrow$ 3) Se probará por contrapositiva, supongamos que M no tiene condición máxima, entonces existe una familia no vacía $\{N_i\}_I$ de submódulos de M sin máximos. Sea N_{i_1} en la familia, como N_{i_1} no es máximo $\exists i_2 \in I$ tal que $N_{i_1} \leq N_{i_2}$, pero como N_{i_2} tampoco es máximo $\exists\ i_3 \in I$ tal que $N_{i_1} \leq N_{i_2} \leq N_{i_3}$ y repitiendo este proceso obtenemos una cadena ascendente que no se estaciona, por lo tanto M no tiene condición de cadena ascendente.

3) $\Rightarrow$ 1) Se probará la contrapuesta. Supongamos que existe $N \leq M$ tal que N no es finitamente generado, en particular $N \neq 0$, entonces $\exists\ 0 \neq x_1 \in N$ y $Rx_1 \lneqq N$, posteriormente $\exists 0 \neq x_2 \in N \setminus Rx_1$ con $Rx_1 \lneqq Rx_1 + Rx_2$ y continuando de esta manera obtenemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de N tal que la familia $\{Rx_1 + ... + Rx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene máximos y por lo tanto M no tiene condición máxima en submódulos. 2) $\Rightarrow$ 4) Claro. 4) $\Rightarrow$ 1) Igual que en 3) $\Rightarrow$ 1). ∎

Definición 53. *Un R-módulo izquierdo (derecho) M que cumpla las condiciones anteriores es un módulo noetheriano izquierdo (derecho).*

Diremos que un anillo R es noetheriano si es noetheriano izquierdo y derecho.

Teorema 19. *Son equivalentes para un R-módulo izquierdo (derecho) M:*

1) *M tiene condición de cadena descendente en sus submódulos izquierdos (derechos).*

2) *M tiene condición mínima en sus submódulos izquierdos (derechos).*

3) *Todo cociente de ${}_RM$ es finitamente cogenerado.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Se probará por contrapositiva, supongamos que $\{N_j\}_J$ es una familia de submódulos izquierdos de M no vacía y sin mínimos. Entonces consideremos N_{j1}, como la familia no tiene mínimos existe N_{j2} tal que $N_{j1} \gneqq N_{j2}$. Notemos que podemos repetir este proceso indefinidamente por hipótesis, por lo tanto tenemos una cadena descendente propia infinita:

$$N_{j1} \gneqq N_{j2} \gneqq ... \gneqq N_{jn} \gneqq ...$$

Por lo tanto M no tiene condición de cadena descendente en sus submódulos izquierdos.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que M tiene condición mínima en sus submódulos izquierdos y consideremos una cadena descendente de submódulos:

$$N_1 \gneqq N_2 \gneqq ... \gneqq N_n \gneqq ...$$

Pero esta cadena es una familia de submódulos izquierdos de M, entonces tiene un mínimo N_m y por lo tanto la cadena se estaciona.

1) *y* 2) $\Rightarrow$ 3) Si M tiene condición mínima en sus submódulos izquierdos, entonces cualquier cociente $\frac{M}{N}$ también la tiene por el Teorema de la correspondencia.

Basta ver que M es finitamente cogenerado.

Afirmamos que $zoc(M)$ es finitamente generado, pues de lo contrario existiría una familia independiente de submódulos simples $\{S_i\}_I$ de M y podemos tomar la siguiente cadena:

$$S_1 \oplus S_2 \oplus ... \gneqq S_2 \oplus S_3 \oplus ... \gneqq ... \gneqq S_n \oplus S_{n+1} ... \gneqq ...$$

La cual no termina, pero esto contradice que M tiene condición de cadena descendente, por lo tanto $zoc(M)$ es finitamente generado.

Ahora afirmamos que $zoc(M)$ es esencial en M pues de lo contrario existe $0 \neq N \leq M$ tal que $N \cap zoc(M) = 0$, entonces $zoc(N) = 0$ y como $zoc(N) = \bigcap\{E \leq N \mid E \leq_{es} N\}$, entonces N contiene submódulos esenciales. Sea $\zeta = \{E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_n} \mid E_{i_j} \leq_{es} N,\ n \in \mathbb{N}\}$, como M tiene condición mínima entonces ζ debe tener un mínimo, digamos $E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_2}$, si tenemos $E \leq_{es} N$, entonces $E \geq E \cap (E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_n} = E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_n}$ y por lo tanto $0 \neq E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_n} \leq \bigcap\{E \mid E \leq_{es} N\} = 0$ lo cual es una contradicción y por lo tanto $zoc(M) \leq_{es} M$ y es finitamente generado, entonces M es finitamente cogenerado y por lo tanto todo cociente de M también es finitamente cogenerado.

3) $\Rightarrow$ 1) *y* 2) Consideremos una cadena descendente de submódulos de M:

$$N_1 \geq N_2 \geq ... \geq N_n.$$

Sea $N = \bigcap\{N_i\}_{\mathbb{N}}$, consideremos la familia de cocientes $\{\frac{N_i}{N}\}_{\mathbb{N}}$ y notemos que es de intersección nula en $\frac{M}{N}$ y como $\frac{M}{N}$ es finitamente cogenerado por hipótesis, entonces existen $i_1,\ i_2,\ ..., i_k$ tales que $\{\frac{N_{i_1}}{N},\ ...,\ \frac{N_{i_k}}{N}\}$ es finita de intersección nula, es decir $0 = \bigcap_{j=1}^{k}\{\frac{N_{i_j}}{N}\} = \frac{N_{i_l}}{N}$ para algún $l \in \{1,\ ...,\ k\}$ tal que N_{i_l} es el máximo en $\{N_{i_1},\ ...,\ N_{i_k}\}$, entonces $N = N_{i_l}$ y por lo tanto la cadena que consideramos se estaciona. ■

Definición 54. *Un R-módulo M que cumpla las condiciones anteriores es un módulo artiniano izquierdo (derecho).*

Diremos que un anillo R es artiniano si es artiniano izquierdo y derecho.

3.2 Anillos artinianos, semiartinianos y teorías de torsión.

Para el siguiente capítulo es necesario obtener algunos resultados relacionados con los anillos artinianos. Se definen los anillos semiartinianos, semiperfectos y se plantea el concepto de teoría de torsión.

En el capítulo 3 se abordó el concepto de radical, en este capítulo se utiliza dicho concepto para obtener resultados necesarios para el capítulo siguiente. Recordemos que el radical de un R-módulo M se define como $Rad(M) = \cap\{K \leq M | K$ **es máximo en** $M\}$.

Proposición 8 (Lema de Nakayama)**.** *Sea M un R-módulo finitamente generado. Si $L \leq M$ es tal que $L + J(R)M = M$, entonces $L = M$.*

Demostración:

Si $L + J(R)M = M$, entonces $J(R)(\frac{M}{L}) = \frac{M}{L}$, de esta manera, por la Proposición 4 del capítulo anterior se obtiene que $\frac{M}{L} = 0$, lo cual concluye la prueba. ■

Teorema 20. *Si R es un anillo semilocal, entonces para cada ${}_RM$ se tiene que $Rad(M) = (Rad(R))M$.*

Demostración:
En el Lema 5 vimos que siempre se tiene que $Rad(M) \geq (Rad(R))M$. Notemos ahora que el cociente $M/Rad(R)M$ es anulado por $Rad(R)$, así que es un $R/Rad(R)$-módulo, y como tal, es semisimple. Entonces $M/Rad(R)M$ es una suma directa de módulos simples, y en consecuencia se sumerge en un producto directo de módulos simples. Por la Proposición 2 concluimos que $Rad(M) \leq Rad(R)M$.

■

El radical de Jacobson de un anillo R puede ser expresado de diferentes maneras, a continuación se enuncian algunas equivalencias.

Proposición 9. $J(R) = \{a \in R | 1 - ab$ ***tiene un inverso derecho*** $\forall b \in R\}$

Demostración:
Se tiene que $a \in J(R)$ si y sólo si $\mathbf{m} + aR \neq R$ para todo ideal máximo $\mathbf{m} \leq R$, lo cual es equivalente a $1 - ab \notin \mathbf{m}$ para todo $b \in R$ y $\mathbf{m} \leq R$ ideal máximo, es decir $1 - ab$ tiene un inverso derecho. ■

Proposición 10. *$J(R)$es el ideal bilateral de R que tiene como elementos a los $r \in R$ tales que $1 - r$ es invertible.*

Demostración:
Por la proposición anterior se tiene que si $\mathcal{I}$ es un ideal bilateral tal que $1 - a$ es invertible para todo $a \in I$, entonces $\mathcal{I} \subset J(R)$.

Queda demostrar que si $r \in J(R)$, entonces $1 - r$ es invertible. Es claro que existe s tal que $(1 - r)s = 1$, lo cual implica que $1 - s = -rs \in J(R)$, por lo que existe s' tal que $(1 - (1 - s))s' = 1$, es decir, $ss' = 1$, por lo tanto s es invertible y se concluye que $1 - r$ también lo es. ■

El resultado anterior es simétrico, con lo cual podemos concluir el siguiente corolario:

Corolario 4. *$J(R)$ es la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de R.*

Este resultado también fue explorado en la sección 2.1.

3.3 Módulos semiartinianos

Definición 55. *Un módulo $_RM$ es semiartiniano, si cada uno de sus cocientes distintos de cero tienen submódulos simples, en otras palabras, el zoclo de un cociente no nulo de M es distinto de cero.*

Lema 19. *El zoclo de un módulo semiartiniano $_RM$ es esencial en $_RM$.*

Demostración:
Podemos suponer que $_RM \neq 0$. Notemos que $zoc(M) \neq 0$, por definición. Si $zoc(M)$ no fuera esencial, entonces tendría un seudocomplemento $K \neq {_R0}$ en $_RM$. Tomemos $\overline{zoc(M)}$, un seudocomplemento de $_RK$ que contenga a $zoc(M)$, entonces $\overline{zoc(M)} \oplus K \leq_{es} M$ y $K \cong (\overline{zoc(M)} \oplus K)/\overline{zoc(M)} \leq_{es} M/\overline{zoc(M)}$. Como M es semiartiniano,

entonces $zoc(M/\overline{zoc(M)}) \neq 0$. Como el zoclo de un módulo es la intersección de los submódulos esenciales, entonces $(\overline{zoc(M)} \oplus K)/\overline{zoc(M)}$ contoene un submódulo simple. Pero entonces $zoc(K) \neq 0$, contradiciendo que K es un seudocomplemento de $zoc(M)$. ■

Teorema 21. *La clase de los módulos semiartinianos es cerrada bajo tomar cocientes, submódulos, extensiones y sumas directas.*

Demostración:

$\twoheadrightarrow$) Es claro de la definición, que un cociente de un módulo semiartiniano M es semiartiniano (un cociente de un cociente de M, sigue siendo un cociente de M).

$\leq$) Sea M semiartiniano y $N \leq_R M$, sea L un cociente distinto de cero de L, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"] & M \\ L & \end{tikzcd}.$$

Completemos este diagrama con el núcleo de α :

$$\begin{tikzcd} Nuc(\alpha) \arrow[r, "Id_{Nuc(\alpha)}"] \arrow[d] & Nuc(\alpha) \arrow[d] \\ N \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[d] \\ L \arrow[r, "\varphi"] & M/Nuc(\alpha) \end{tikzcd}.$$

Se sigue de manera inmediata que φ es un monomorfismo. Como $M/Nuc(\alpha)$ es semiartiniano y distinto de ${}_R0$, tiene zoclo esencial, de donde se obtiene que $\varphi(L) \cap zoc\,(M/Nuc(\alpha)) \neq 0$. Por lo tanto $zoc\,(L) \neq_R 0$. Es decir, L es semiartiniano.

Extensiones) Si $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es una sucesión exacta con A y C semiartinianos. Tomemos un cociente distinto de ${}_R0$ de B, digamos $B \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$. Si $\beta f \neq 0$, entonces $\beta f\,(A)$ contiene un simple, y $\beta f\,(A) \subseteq M$. Si $\beta f\,(A)$=0, entonces existe $\gamma : M \to L$, tal que $\gamma g = \beta$, por la propiedad universal del conúcleo. Como se ve en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma"] & 0 \\ & & M & & \end{tikzcd}$$

Note que $\gamma g = \beta$ implica que γ es un epimorfismo. Entonces M contiene un submódulo simple por ser un cociente del módulo semiartiniano C.

En cualquier caso, M tiene un submódulo simple, así que B es semiartiniano.

$\oplus$) Supongamos que $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos semiartinianos y sea $\oplus\{M_i\}_{i\in I} \xrightarrow{g} N$ un epimorfismo no nulo. Entonces $\exists j \in I$ tal que $g(M_j) \neq_R 0$. Como M_j es semiartiniano, $g(M_j)$ contiene un submódulo simple. Por lo tanto N contiene un submódulo simple.

$\blacksquare$

3.4 Clases de Serre, el Teorema de Hopkins-Levitzki

Definición 56. *Una clase de módulos izquierdos $\mathcal{C}$ es abstracta si es cerrada bajo copias isomorfas de sus elementos. Es decir, si $(M \in \mathcal{C}$ y $M \cong N) \Rightarrow N \in \mathcal{C}$.*

Definición 57. *Una clase de módulos izquierdos $\mathcal{C}$ es una clase de Serre, si es cerrada bajo tomar submódulos, imágenes epimórficas y extensiones.*

Observación 10. *Una clase de Serre es una clase abstracta.*

Lema 20. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) ${}_RM$ es finitamente generado.

2) Si $R^{(X)} \xrightarrow{\varphi} M$ es un R-morfismo, entonces existe un subconjunto finito F de X tal que $R^{(F)} \xrightarrow{\varphi|} M$ es un epimorfismo. (Note que la inclusión $F \xhookrightarrow{\iota} X$ induce un monomorfismo $R^{(F)} \rightarrowtail R^{(X)}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R^{(X)} \arrow[r, twoheadrightarrow, "\varphi"] & M \\ R^{(F)} \arrow[u, rightarrowtail] \arrow[ur, twoheadrightarrow, "\varphi|"] & \end{tikzcd}$$

conmuta).

3) Si $(\oplus_{i\in X}\{N_i\}) \xrightarrow{\varphi} M$ es un epimorfismo, entonces $\exists F \xhookrightarrow{finito} I$ tal que $(\oplus_{i\in F}\{N_i\}) \xrightarrow{\varphi|} M$ es un epimorfismo.

Demostración:

1)$\Longrightarrow$ 3) Supongamos que$\{x_1, ..., x_n\}$ es un conjunto de generadores de ${}_RM$, $x_i = \sum_{j\in F_i}\varphi(n_j)$ para algún subconjunto finito F_i de X. Como todo elemento de M es una combinación de elementos en $\{x_1, ..., x_n\}$, entonces cada elemento de M es la imagen bajo φ de un elemento en $\oplus_{i\in F_1\cup...\cup F_n}\{N_i\}$, y $F_1 \cup ... \cup F_n$ es un subconjunto finito de X.

3)$\Longrightarrow$ 2) Es claro.

2)$\Longrightarrow$ 1) Como todo módulo es un cociente de un módulo libre, es claro que entonces, M es un cociente de R^n para alguna $n \in \mathbb{N}$. Así, si $R^n \overset{\varphi}{\longrightarrow} M$ es un epimorfismo, entonces $\{\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)\}$ genera M (e_i es el i-ésimo elemento de la base canónica de R^n). ■

Teorema 22. *La clase de los módulos izquierdos finitamente generados que denotaremos* **FG**, *es cerrada bajo cocientes y extensiones.*

Demostración:

$\twoheadrightarrow$) Del lema anterior se sigue que un cociente de un módulo finitamente generado es finitamente generado.

Extensiones) Supongamos que $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, con A y B finitamente generados.

Entonces tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & R^n \arrow[d] & & R^m \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd},$$

donde el renglón y las columnas son sucesiones exactas. Podemos extender este diagrama al diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[drr, "f\circ\alpha"] & & R^n \oplus R^m \arrow[r, bend right, "\pi"'] \arrow[d, "\lambda"] & R^m \arrow[l, dashed, bend right, "k"'] \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde γ está dada por la proyectividad de R^m y λ es el morfismo inducido por $f \circ \alpha$ y por γ. Entonces $g \circ \gamma = \beta$,$\lambda\iota = f\alpha$. $\lambda\kappa = \gamma$ y $\pi\kappa = Id_{R^m}$. Notemos que el primer cuadrado es conmutativo y también el segundo: pues $\beta\pi = g\gamma\pi = g\lambda\kappa\pi$.

Para ver que g$\lambda = \beta\pi$, basta ver que antecedidos por ι y por κ, producen los mismos morfismos.

En efecto, $g\lambda\iota = gf\alpha = 0$ y $\beta\pi\iota = 0$. Además, $\beta\pi\kappa = \beta Id_{R^m} = \beta$, y $g\lambda\kappa = g\gamma = \beta$.

Como el diagrama conmuta, y α, β son epimorfismos, entonces λ es epi, por el Lema de los cinco. Entonces B es finitamente generado.

■

Lema 21. *Las siguientes afirmaciones acerca de un módulo semisimple, son equivalentes:*

1) $_RM$ *es noetheriano*

2) ${}_RM$ *es finitamente generado.*

3) ${}_RM = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$*, para una familia* $\{S_1, \cdots, S_n\}$ *de submódulos simples de* ${}_RM$*.*

4) ${}_RM$ *es finitamente cogenerado.*

5) ${}_RM$ *es artiniano.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Si ${}_RM$ es noetheriano, entonces por el Teorema 18 todo cociente de M, es finitamente generado, en particular M es finitamente generado.

2) $\Rightarrow$ 3) Como M es semisimple, entonces $M = \oplus_{i\in I} S_i$, para una familia de submódulos simples. Consideremos $\oplus_{i\in I} S_i \xrightarrow{Id_M} M$, como M es finitamente generado, por el Lema 20, $\exists F \xhookrightarrow{finito} I$ tal que $\oplus_{i\in F} S_i \xrightarrow{Id_M} M$ es un epimorfismo. Entonces $M = \oplus_{i\in F} S_i$, una suma directa finita de simples.

3) $\Rightarrow$ 4) Es claro que M tiene zoclo esencial finitamente generado, en este caso (vea el Teorema 17).

4) $\Rightarrow$ 5) Si M es semisimple finitamente cogenerado entonces $M = zoc(M)$ es finitamente generado. Por lo que M es semisimple de dimensión finita, y también así son los cocientes de M. Así, todos los cocientes de M son finitamente cogenerados. Por lo tanto, M es artiniano.

5) $\Rightarrow$ 1) Si M es semisimple artiniano, entonces M es de dimensión finita (un semisimple de dimensión infinita admite una cadena descendente propia infinita de submódulos, si uno va quitando sucesivamente un sumando directo simple de una descomposición en simples). Un semisimple M de dimensión finita tiene todos sus submódulos semisimples de dimensión finita, es decir, son finitamente generados.

■

Teorema 23. *La clase* **Noeth** *de los módulos noetherianos izquierdos es una clase de Serre.*

Demostración:

$\twoheadrightarrow$) Supongamos que M es noetheriano y que $M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo. Por el Teorema de la correspondencia, las retículas $[Nuc(g), M]$ y $[{}_R0, N]$ son isomorfas. Así que si M tiene condición máxima en submódulos, entonces N también la tiene.

$\leq$) Si N es un submódulo del módulo noetheriano M, entonces todos los submódulos de N son finitamente generados, pues son submódulos de M.

Extensiones) Si $0 \longrightarrow {}_RL \xrightarrow{f} {}_RM \xrightarrow{g} {}_RN \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta con L y N noetherianos y B es un submódulo de M, entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B \cap f(L) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & g(B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0
\end{array},$$

con renglones exactos y donde los morfismos verticales son monomorfismos. Como L y N son noetherianos, $B \cap f(L)$ y $g(B)$ son finitamente generados. Como la clase **FG** es cerrada bajo extensiones, entonces B es finitamente generado.

Por lo tanto, M es noetheriano. ■

Lema 22. *La clase* **FCog** *de los módulos finitamente cogenerados es cerrada bajo submódulos y extensiones.*

Demostración:

$\leq$) Es claro, de la definición, pues si $N \leq M$ con M finitamente cogenerado, una familia de submódulos de N de intersección nula, es también una familia de submódulos de M.

Extensiones) Si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta con L y N finitamente cogenerados, podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f(L)\cap zoc(M) \arrow[r] \arrow[d] & zoc(M) \arrow[r] \arrow[d] & (f(L)+zoc(M))/f(L) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

donde los renglones son exactos, los morfismos verticales son monomorfismos y donde los módulos en la sucesión de arriba son semisimples. Notemos que $(f(L)+zoc(M))/f(L)$ se sumerge en $zoc(N)$, que es finitamente generado, porque N es finitamente cogenerado. Como también $f(L) \cap zoc(M)$ es finitamente generado, por sumergirse en $zoc(L)$, tenemos que $zoc(M)$ es finitamente generado. Veamos ahora que $zoc(M)$ es esencial en M. En caso contrario, el seudocomplemento K de $zoc(M)$, sería distinto de cero, pero $zoc(K) = 0$. K es finitamente cogenerado y $0 = zoc(K) = \cap\{U \leq K \mid U \leq_{es} K\}$ (ver el Lema 1). Entonces existe $\{U_1, \cdots U_n\}$ una familia finita de submódulos esenciales de K, con intersección ${}_R0$. Como una intersección finita de submódulos esenciales es esencial, entonces ${}_R0 \leq_{es} K$, entonces $K =_R 0$, contradicción. Como $zoc(M)$ es puntos módulo esencial finitamente generado en M, M es finitamente cogenerado. ■

Teorema 24. *La clase* **Art** *de los R-módulos izquierdos artinianos es una clase de Serre.*

Demostración:

$\leq$) Es claro que un submódulo de un módulos artiniano es artiniano, por ejemplo usando la condición mínima en submódulos.

$\twoheadrightarrow$) Como un módulo M es artiniano si y sólo si sus cocientes son finitamente cogenerados, es claro que un cociente de un módulos artiniano es artiniano.

Extensiones) Si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta con L y N artinianos, veamos que los cocientes de M son finitamente cogenerados para demostrar que M es artiniano. Si tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \\ & & B & & \end{tikzcd}$$

donde la sucesión es exacta, L, N son artinianos y β es un epimorfismo, podemos extender el diagrama anterior al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta f|"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \beta f(L) \arrow[r, hook] & B \arrow[r, "\overline{g}"] & B/(\beta f(L)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

que tiene renglones exactos y donde γ está dada por la propiedad universal del conúcleo. Como $\gamma g = \overline{g}\beta$ es un epimorfismo, entonces γ es un epimorfismo. Por el Lema de los cinco, β es un epimorfismo, como la clase **FCog** es cerrada bajo extensiones, entonces B es finitamente cogenerado. Por lo tanto M es artiniano.

■

Teorema 25. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) ${}_RR$ es semiartiniano.

2) Todo módulo ${}_RM$ es semiartiniano.

Demostración:

2) $\Rightarrow$ 1) Esto es claro.

1) $\Rightarrow$ 2) Si ${}_RR$ es semiartiniano, entonces cada módulo libre es semiartiniano, como cada módulo es un cociente de un módulo libre, entonces cada módulo es semiartiniano.

■

Decimos que el anillo R es semiartiniano izquierdo cuando R goza de las condiciones anteriores.

Observación 11. *Un anillo artiniano izquierdo es semiartiniano izquierdo.*

Demostración:

Si R es artiniano, entonces la familia de los ideales izquierdos no nulos de R tienen mínimos. Un ideal izquierdo no nulo mínimo es un submódulo simple de R, entonces $zoc(R) \neq 0$. Como los cocientes de R también son artinianos, con el mismo argumento, tenemos que el zoclo de los cocientes no nulos de R tienen zoclo no nulo. ■

Teorema 26. *Un anillo artiniano izquierdo R es semiartiniano izquierdo y noetheriano izquierdo.*

Demostración:
Un anillo artiniano tiene radical de Jacobson nilpotente. Demostraremos que R es noetheriano por inducción sobre el índice de nilpotencia de $Rad(R)$. Base: si $Rad(R) = (0)$, como$_RR$ es finitamente cogenerado, y $Rad(R) = (0)$ es la intersección de los ideales izquierdos máximos de R, existe un número finito de ideales izquierdos máximos de intersección nula. Entonces existe un monomorfismo $R \to R/\mathcal{M}_1 \times \cdots \times R/\mathcal{M}_n$. Entonces R es semisimple. Paso inductivo: si $m > 1$ es el índice de nilpotencia de $Rad(R)$, entonces $R/Rad^{m-1}(R)$ es un anillo con índice de nilpotencia $m-1$, pues como R es artiniano, $Rad(R/Rad^{m-1}(R) = Rad(R)(R/Rad^{m-1}(R)) = (Rad(R))/Rad^{m-1}(R))$, de donde se sigue que la potencia $m-1$ de $Rad(R/Rad^{m-1}(R)$ es cero. Por hipótesis de inducción, $R/Rad^{m-1}(R)$ es noetheriano, consideremos ahora la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Rad^{m-1}(R) \longrightarrow R \longrightarrow R/Rad^{m-1}(R) \longrightarrow 0.$$

Notemos que $Rad^{m-1}(R)$ es un $R/Rad(R)$-módulo, por la elección de m. Como $R/Rad(R)$ es un anillo artiniano de radical nulo, debido a que $Rad(R/Rad(R) = Rad(R)(R/Rad(R) = {}_R0$, la base de la inducción nos dice que R/Rad(R) es noetheriano. De la sucesión exacta, concluimos que R es noetheriano, usando que la clase **Noeth** es de Serrre. ■

Como un preliminar al Teorema de Hopkins-Levitski se define el concepto de los zoclos extendidos.

Definición 58. *Definimos recursivamente $zoc_n({}_RM)$ por: $zoc_0({}_RM) = {}_R0$, $zoc_{n+1}({}_RM)/zoc_n({}_RM) := zoc({}_RM/zoc_n({}_RM))$*

Podemos notar de esta definición, que $zoc_1({}_RM) = zoc({}_RM)$ y $zoc_n({}_RM) \leq zoc_{n+1}({}_RM)$, para cada módulo ${}_RM$.

Teorema 27. *Un anillo noetheriano izquierdo y semiartiniano izquierdo R, es artiniano izquierdo.*

Demostración:
Supongamos que R satisface las hipótesis. Como R es noetheriano, la cadena $0 \leq zoc_1(R) \leq zoc_2(R) \cdots \leq zoc_n(R) \leq \cdots$ se estaciona, digamos que $zoc_n(R) = zoc_{n+1}(R)$. Entonces $0 \cong zoc_{n+1}(R)/zoc_n(R) = zoc(R/zoc_n(R)$. Como R es semiartiniano, tenemos que $R = zoc_n(R)$. Veamos que $zoc_n(R)$ es artiniano, para toda n, por inducción. Base, si $n = 0$, $zoc_0(R) =_R 0$ es artiniano. Paso inductivo, si $zoc_m(R)$ es artiniano, en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow zoc_m(R) \longrightarrow zoc_{m+1}(R) \longrightarrow zoc(M/zoc_m(R)) \longrightarrow 0 \ ,$$

tenemos que $zoc(M/zoc_m(R))$ es noetheriano por que es un submódulo de $M/zoc_m(R))$ que es noetheriano porque es un cociente de R. Ahora por el Lema 21, $zoc(M/zoc_m(R))$ es artiniano. Como los extremos de la sucesión exacta son artinianos, entonces $zoc_{m+1}(R)$ es artiniano. Lo que completa la inducción. En particular, $R = zoc_n(R)$ es artiniano. ■

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 28. $(Hopkins - Levitzki)$ *Un anillo R es artiniano izquierdo si y sólo si es noetheriano izquierdo y semiartinaino izquierdo.*

Capítulo 4

Anillos de Kasch, anillos PF y anillos QF

En este capítulo se definen los anillos casi Frobenius y se obtienen caracterizaciones de estos anillos a partir de la Teoría de torsión de Lambek y el uso de los anillos de Kasch.

Definición 59. *Un anillo R es de Kasch derecho (izquierdo) si todo R-módulo derecho (izquierdo) simple es isomorfo a un ideal derecho (izquierdo) de R.*

Un anillo R es de Kasch si es de Kasch izquierdo y derecho.

Definición 60. *Sean ${}_RM$ un R-módulo y $x \in M$. Definimos los siguientes conjuntos:*

1) $r(x) = \{s \in R | xs = 0\}$. A este conjunto se le conoce como el anulador derecho de x.

2) $l(x) = \{s \in R | sx = 0\}$. A este conjunto se le conoce como el anulador izquierdo de x.

Es claro que los anuladores derecho e izquierdo de un elemento x de un R-módulo M son ideales del anillo R.

Note que se pueden definir los anuladores derecho e izquierdo de un R-módulo M como $r(M) = \{s \in R | xs = 0 \ \forall x \in M\}$ y $l(M) = \{s \in R | sx = 0 \ \forall x \in M\}$ respectivamente. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 61. *Decimos que un R-módulo M es fiel derecho si $r(M) = 0$. Análogamente, M es fiel izquierdo si $l(M) = 0$.*

Un R-módulo M es fiel si es fiel derecho e izquierdo.

Definición 62. *Sean M_R un R-módulo, N un submódulo de M y $y \in M$, se define el conjunto $y^{-1}N = \{r \in R | yr \in N\} = an\,(y + N)$, donde $y + N \in M/N$.*

El conjunto anterior es un ideal derecho de R, que es el anulador derecho de la clase $\overline{y} \in M/N$. Análogamente se puede definir el anulador izquierdo de la clase $\overline{y} \in M/N$.

Definición 63. *Sean L y L' retículas completas. Una conexión de Galois entre L y L' es un par de morfismos $\sigma : L \to L'$ y $\tau : L' \to L$ tales que:*

1) Si $x_1 \leq x_2$, entonces $\sigma(x_1) \geq \sigma(x_2)$, con $x_1, x_2 \in L$.

2) Si $y_1 \leq y_2$, entonces $\tau(y_1) \geq \tau(y_2)$, con $y_1, y_2 \in L'$.

3) $x \leq (\tau \circ \sigma)(x)\ \forall x \in L$ y $y \leq (\sigma \circ \tau)(y)\ \forall y \in L'$.

Ejemplo 4. *Existe una conexión de Galois entre $\wp(R)$ y $\wp(R)$ definida por:*

$$\begin{tikzcd} \wp(R) \arrow[r, bend left, "l"] & \wp(R) \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

$$X \longmapsto l(X)$$

$$r(Y) \longleftarrow\!\shortmid\ Y.$$

Esta conexión se restringe a una conexión entre la retícula de ideales derechos ($L(R.)$) y la retícula de ideales izquierdos ($L(.R)$) de un anillo R, la cual está dada por las asignaciones $l : L(R.) \to L(.R)$ y $r : L(.R) \to L(R.)$, en donde $l(I)$ denota el anulador izquierdo de I y $r(J)$ denota el anulador derecho de J. Es claro que l y r invierten el orden, que $I_\bullet \subseteq rl(I)$ y que ${}_\bullet J \subseteq lr(J)$, para cualquier ideal izquierdo I y cualquier ideal derecho J.

4.1 La Teoría de torsión de Lambek. Submódulos e ideales densos

Teorema 29. *Sea R un anillo y denotemos $E(R)$ su cápsula inyectiva, la clase de módulos*

$$\mathbb{T}_L = \{M \mid Hom(M, E(R)) = 0\}$$

es cerrada bajo tomar cocientes, submódulos, extensiones y sumas directas.

Demostración:

$\twoheadrightarrow$) Supongamos que $M \in \mathbb{T}_L$ y que $M \overset{g_R}{\twoheadrightarrow} N$ es un epimorfismo de R módulos derechos. Si $N \overset{f_R}{\to} E(R)$ es un R-morfismo, entonces $f \circ g : M \to E(R)$ es el morfismo cero, como g es epi, entonces f es cero. Así, $N \in \mathbb{T}_L$.

$\leq$) Supongamos que $N \leq M$, con $M \in \mathbb{T}_L$. Si $f : N \to E(R)$ es un R-morfismo, entonces f se extiende a un morfismo $\varphi : M \to E(R)$, pues $E(R)$ es inyectivo y N es un submódulo de M. Como φ es el morfismo cero, entonces f es cero.

Extensiones) Si se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

con $K, N \in \mathbb{T}_L$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom(N, E(R)) \xrightarrow{-\circ g} Hom(M, E(R)) \xrightarrow{-\circ f} Hom(K, E(R)) \longrightarrow 0$$

es exacta con $Hom(N, E(R)) = 0 = Hom(K, E(R))$, por lo tanto $Hom(M, E(R)) = 0$, es decir $M \in \mathbb{T}_L$.

Sumas directas) Si $\{M_i\}_I$ es una familia en $\mathbb{T}_L$, entonces $\forall i \in I$ $Hom(M_i, E(R)) = 0$, así $\Pi\{Hom(M_i, E(R))\} \cong 0$, pero $Hom(\oplus\{M_i\}, E(R)) \cong \Pi\{Hom(M_i, E(R))\} \cong 0$.

■

Definición 64. *Un submódulo $N \leq M$ es denso, lo que denotaremos $N \leq_d M$, si $\frac{N}{M} \in \mathbb{T}_L$.*

Un ideal ${}_RI$ es denso si $\frac{R}{I} \in \mathbb{T}_L$.

Lema 23. *${}_RM \in \mathbb{T}_L$ si y sólo si $Hom(Rx, R) = 0$, $\forall x \in M$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Si ${}_RM \in \mathbb{T}_L$ y $f : Rx \longrightarrow R$, con $x \in M$, entonces existe un morfismo $\phi : {}_RM \longrightarrow E(R)$, que extiende a f ya que $E(R)$ es inyectivo, es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Rx \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & {}_RM \arrow[ddl, "\phi"] \\
R \arrow[d, hook] & \\
E(R) &
\end{tikzcd}.$$

Como ${}_RM \in \mathbb{T}_L$, entonces $\phi = \overline{0}$ y por lo tanto $f = \overline{0}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $Hom(Rx, R) = 0$, $\forall x \in M$. Si $\overline{0} \neq \phi : M \longrightarrow E(R)$, como $R \leq_{es} E(R)$, se tiene que $R \cap \phi(M) \neq 0$. Si $r = \phi(x) \neq 0$, entonces, por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] & E(R) & \\
Rx \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi\restriction_{Rx}"] & R \cap \phi(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & R
\end{tikzcd},$$

se tiene que $x \in Rx \mapsto \phi(x) \neq 0 \in R \cap \phi(M) \mapsto \phi(x) = r \in R$, es decir, $Hom(Rx, R) \neq 0$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $Hom({}_RM, E(R)) = 0$. ■

Corolario 5. *$N \leq_d M \Leftrightarrow \forall x \in M$ $Hom(\frac{Rx+N}{N}, R) = 0$.*

Observación 12. *Si $N \leq M$, entonces $Hom(\frac{Rx+N}{N}, R) = 0$, $\forall x \in M$, si y sólo si $\forall x \in M$, $\forall r \in R \setminus \{0\}$, $\exists s \in R$ tal que $sx \in N$, pero $sr \neq 0$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Se probará por contrapuesta. Si $\exists x \in M$ y $\exists r \in R \setminus \{0\}$ tales que, $(\forall s \in R, sx \in N \Rightarrow sr = 0)$, entonces

$$\frac{Rx+N}{N} \xrightarrow{\quad \phi \quad} R$$

$$x + N = \overline{x} \longmapsto r \neq 0,$$

ϕ es un R-morfismo distinto de $\overline{0}$ y está bien definido, ya que $s\overline{x} = \overline{0}$ implica que $sr \in N$ y entonces por hipótesis $sr = 0$. Por lo tanto $Hom(\frac{Rx+N}{N}, R) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\forall r \in R \setminus \{0\}$, $\exists s \in R$ tal que $sx \in N$, pero $sr \neq 0$. Un morfismo ϕ que salga desde un módulo cíclico está determinado por su valor en el generador, así si

$$\frac{Rx+N}{N} \xrightarrow{\phi} R$$

$$\overline{x} \longmapsto r,$$

con $r \neq 0$, es un R-morfismo, para que esté bien definido debe pasar que si $sx \in N$ entonces $sr = 0$. Pero por hipótesis $\exists s \in R$ tal que $sx \in N$ con $sr = 0$. Por lo tanto el único morfismo en $Hom(\frac{Rx+N}{N}, R)$ es el morfismo 0. ■

En particular $I \leq_d R$ si y sólo si $\forall x \in R$ y $\forall r \in R \setminus \{0\}$, $\exists s \in R$ tal que $sx \in I$, pero $sr \neq 0$.

Definición 65. *Se define la clase libre de torsión de Lambek como*

$$\mathbb{F}_L := \{M \mid Hom(D, M) = 0, \forall D \in \mathbb{T}_L\}$$

Teorema 30. $\mathbb{F}_L$ *es cerrada bajo submódulos, productos, extensiones y cápsulas inyectivas.*

Demostración:

$\leq$) Supongamos que $N \leq M$, $M \in \mathbb{F}_L$ y $D \in \mathbb{T}_L$. Si $D \xrightarrow{f} N$ es un R-morfismo, componiendo con la inclusión $N \xhookrightarrow{\iota} M$ obtenemos el morfismo $D \xrightarrow{\iota \circ f} M$ que es el morfismo cero por hipótesis. Como ι es un monomorfismo, entonces $f = 0$. Entonces $Hom_R(D, N) = \{0\}$ para cada $D \in \mathbb{T}_L$.

$\prod$) Supongamos que $\{N_i\}_{i \in I}$ es una familia de módulos en $\mathbb{F}_L$ y supongamos que $M \in \mathbb{T}_L$, entonces $Hom\left(M, \prod \{N_i\}_{i \in I}\right) \cong \prod_{i \in I} \{Hom(M, N_i)\} = 0$.

Extensiones) Supongamos que $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de R-módulos con A y B en $\mathbb{F}_L$ y supongamos que $M \in \mathbb{T}_L$. Si $M \xrightarrow{f} B$ es un R-morfismo, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, "\alpha"] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Entonces $g\alpha = 0$, por hipótesis. Por la propiedad del núcleo existe $M \xrightarrow{\beta} A$ tal que $f\beta = \alpha$. Por hipótesis β es el morfismo 0, entonces α es 0.

Cápsulas inyectivas) Supongamos que $N \in \mathbb{F}_L$ y que $M \in \mathbb{T}_L$. Si $M \xrightarrow{f} E(N)$ es un morfismo no nulo, entonces $(N \cap f(M)) \neq 0$, entonces $0 \neq f^{-1}(N \cap f(M)) \leq M$, así que $0 \neq f^{-1}(N \cap f(M)) \xrightarrow{f_{\downarrow}^{\uparrow}} N$, contradicción. ■

4.2 Anillos de Kasch y anillos QF

Proposición 11. *Sea ${}_RI$ un ideal izquierdo máximo de R, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *R/I se sumerge en ${}_RR$.*

2) *$I = l(x)$ para algún $x \in R$.*

3) *$r(I) \neq 0$.*

4) *$I = l(r(I))$.*

5) *I no es denso en ${}_RR$.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Si $R/I \xrightarrow{f} R$ es un monomorfismo, denotemos $x = f(\bar{1})$. $Ix = If(\bar{1}) = f(I\bar{1}) = f(\bar{0}) = 0$, entonces $I \leq l(x) \neq R$. Como I es un ideal izquierdo máximo, entonces $I = l(x)$.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $I = l(x)$, entonces $0 \neq x$. Como $Ix = 0$, entonces $0 \neq x \in r(I)$.

3) $\Rightarrow$ 4) Como $I(r(I)) = 0$, entonces $I \leq l(r(I)) . l(r(I))$ es un ideal izquierdo propio de R, pues $1 \notin l(r(I))$, puesto que $r(I) \neq 0$. Como I es un ideal izquierdo máximo, entonces $I = l(r(I))$.

4) $\Rightarrow$ 5) Si I fuera denso en R, entonces $Hom_R(R/I, E(R)) = 0$. En particular, $Hom_R(R/I, R) = 0$. Así que para toda $0 \neq s \in R$, multiplicar por s por la derecha, no define un morfismo $R/I \xrightarrow{\overline{\cdot}s} R$. Esto es porque $I = l(\bar{1}) \nsubseteq l(s)$. Entonces $s \notin r(I)$, por lo que $Is \neq 0$, para cada $s \in R \setminus \{0\}$. Esto muestra que $r(I) = 0$, así que $I = l(r(I)) = l(0) = R$, contradiciendo que I es un ideal máximo.

5) $\Rightarrow$ 1) Como I no es denso en R, entonces $Hom(R/I, E(R)) \neq 0$. Como R/I es un módulo simple, entonces R/I se sumerge en $E(R)$. Como R es esencial en $E(R)$, entonces R/I se sumerge en R.

■

Para el resultado siguiente hace falta relacionar las propiedades de los anuladores con las propiedades de ser autoinyectivo.

Proposición 12. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

1) *Todo morfismo $f_R : I_R \longrightarrow R_R$, donde I es un ideal derecho finitamente generado, es de la forma $f(x) = ax$ para algún $a \in R$.*

2) *R satisface las siguientes condiciones para I_1, I_2 dos ideales derechos finitamente generados de R:*

   a) *$l(I_1 \cap I_2) = l(I_1) + l(I_2)$.*

   b) *$l(r(a)) = Ra$ para todo $a \in R$.*

Demostración:
1) $\Rightarrow$ 2) Como $I_1 \cap I_2 \subseteq I_1$ se tiene que $l(I_1) \subseteq l(I_1 \cap I_2)$. Análogamente $l(I_2) \subseteq l(I_1 \cap I_2)$, entonces $l(I_1) + l(I_2) \subseteq l(I_1 \cap I_2)$.

Para la otra inclusión, sea $y \in l(I_1 \cap I_2)$ y definamos $\alpha : I_1 + I_2 \longrightarrow R$ como:

$$\alpha(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in I_1 \\ (1+y)x & si \quad x \in I_2 \end{cases},$$

α está bien definido, pues las dos expresiones coinciden en $I_1 \cap I_2$, además es un R-morfismo, claramente. Por hipótesis, $\exists a \in R$ tal que $\alpha(x) = ax$, de esta manera, si $x \in I_1$, entonces $x = ax$, es decir, $(a-1)x = 0$, por lo tanto, se puede escribir $y = (a-1) + (1+y-a) \in l(I_1) + l(I_2)$, lo cual prueba la primera igualdad.

Ahora, para cada $a \in R$, se tiene que $Ra \subseteq l(r(a))$. Sea $b \in l(r(a))$, se puede definir un morfismo $aR \longrightarrow bR$, donde $ax \longmapsto bx$, (que está bien definido, pues si $ad = 0$, entonces $d \in r(a)$, por lo que $db = 0$). Pero entonces, por hipótesis, debe existir $c \in R$ tal que $b = ca$, lo que muestra que $b \in Ra$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $\alpha : I \longrightarrow R$, un morfismo con I un ideal derecho finitamente generado de R, entonces $I = a_1R + a_2R + ... + a_nR$. La prueba procederá por inducción sobre el número de generadores de I. El caso $n = 0$ es claro, supongamos entonces que $n > 0$ y que la afirmación se cumple para $n-1$. Sea $I' = a_1R + ... + a_{n-1}R$ y sean c, $c' \in R$ tales que

$$\alpha(x) = \begin{cases} cx & si \quad x \in I' = a_1R + ... + a_{n-1}R \\ c'x & si \quad \quad \quad \quad x \in a_nR. \end{cases}$$

En $x \in I' \cap a_nR$ se tiene que $(c-c')x = 0$. Es decir, se tiene que $(c-c') \in l(I' \cap a_nR) = l(I') + l(a_nR)$, por hipótesis. De esta manera $c - c' = b - b'$ con $bI' = 0$ y $ba_n = 0$. Por lo tanto la multiplicación por $c - b = c' - b'$ coincide con α en $I = I' + a_nR$. Esto concluye la inducción. ∎

Note que la proposición anterior dice que todo morfismo desde un ideal finitamente generado hacia el anillo, se puede extender a un endomorfismo de R si y sólo cada pareja de ideales finitamente generados satisfacen (a) y (b). Con esencialmente la misma demostración, tenemos lo siguiente.

Proposición 13. *Si R es un anillo autoinyectivo derecho, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $l(I_1 \cap I_2) = l(I_1) + l(I_2)\ \forall I_1,\ I_2$ *ideales derechos de* R.

2) $l(r(J) = J\ \forall J$ *ideal izquierdo finitamente generado.*

Demostración:
Las demostraciones de ambos incisos son muy similares a la prueba de la proposición anterior. ■

Lema 24. *Si* R *es un cogenerador de* $Mod - R$*, entonces* $r(l(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ *para todo ideal derecho* $\mathcal{I} \leq R$.

Demostración:
Siempre se tiene que $\mathcal{I} \leq rl(\mathcal{I})$. Como R es un cogenerador de $Mod - R$, entonces para cada ideal $\mathcal{I}_R \leq R$, existe un monomorfismo $f : \frac{R}{\mathcal{I}} \longrightarrow R^J$ para algún conjunto J, de tal manera que si $f(\overline{1}) = (x_i)_J$, entonces $\mathcal{I} = \bigcap\limits_J r(x_i) = r(\{x_i\})$, así $\{x_i\}_{i\in J} \subseteq l(\mathcal{I})$ y por lo tanto $rl(\mathcal{I}) \subseteq r(\{x_i\}) = \mathcal{I}$. Por lo tanto $\mathcal{I} = r(l(\mathcal{I}))$. ■

Lema 25. *Sea* R *un anillo autoinyectivo derecho y sean* $x, y \in R$*. Suponga que* $yR \cong xR$*. Entonces* Rx *es isomorfo a un ideal contenido en* Ry*. Si* Ry *es simple, entonces* $Ry \cong Rx$.

Demostración:
Sea $\varphi : yR \longrightarrow xR$ un isomorfismo. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
yR \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \arrow[ddl, "\gamma=a\cdot_"] \\
xR \arrow[d, hook, "\iota_2"'] & \\
R &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que si $r \in R$, $\varphi\,(yr) = \gamma\,(yr) = \gamma\,(y)\,r$.
Ahora, $\varphi\,(y) = xr_0$ con $r_0 \in R$, y $x = \varphi\,(yr_1)$ con $r_1 \in R$.
Definamos

$$\begin{array}{ccc}
Rx & \xrightarrow{\quad\widehat{\varphi}\quad} & Ry \\
 & & \\
rx & \longmapsto & rxr_0 = r\varphi(y) = r\gamma(y) = ray.
\end{array}$$

Entonces $\widehat{\varphi}$ es un morfismo de R-módulos izquierdos.
Si $rxr_0 = 0$, entonces $0 = rxr_0r_1 = r\varphi\,(y)\,r_1 = r\varphi\,(yr_1) = rx$. Esto muestra que $\hat{\varphi}$ es un monomorfismo. Por lo tanto $xR \cong yR$ y yR simple implica que $Rx \cong Ry$. ■

Lema 26. *Sea* $S := End\,(M_R)$*, si* T *es un submódulo simple de* M *tal que* $E\,(T) \leq M$*, entonces para* $0 \neq x \in T$*, tenemos que* Sx *es un submódulo simple de* ${}_SM$.

Demostración:
Veremos que Sx está generado por cualquiera de sus elementos no nulos.

Supongamos que $\alpha(x) \neq 0$, con $\alpha \in S$. Tenemos un isomorfismo $\begin{array}{ccc} xR & \xrightarrow{\alpha|} & \alpha(x)R \\ x & \mapsto & \alpha(x) \end{array}$, así que $\alpha(x)R$ es también un módulo simple. Denotemos $\tau : \alpha(x)R \longrightarrow xR$ el inverso de $\alpha\,|$. Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\alpha(x)R \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\tau"'] & M_R \arrow[dddl, dashed, "\varphi"] \\
xR \arrow[d, "="'] & \\
S \arrow[d, "\iota_3"'] & \\
E(S) \arrow[r, hook] & M.
\end{tikzcd}$$

Como $E(S)$ es inyectivo, $\exists \varphi : M \longrightarrow E(S)$ tal que hace el diagrama conmutativo. Hagamos $\gamma := \iota_3\varphi$. Entonces $\gamma \in S$ y $\gamma(\alpha(x))=\iota_3\tau\alpha(x) = x$, por la definición de τ. Entonces $Sx \subseteq S\alpha(x) \subseteq Sx$. ■

Corolario 6. *Si R_R es inyectivo, entonces para un submódulo simple $T_R \leq R$ y un elemento $x \in T$, Rx es un módulo izquierdo simple. Consecuentemente $zoc(R_R) \subseteq zoc({}_RR)$ (El zoclo derecho de R está contenido en el zoclo izquierdo).*

Demostración:
Notemos que $End(R_R)$ es un anillo isomorfo a R. Podemos aplicar el lema anterior.
■

4.3 Anillos PF

Definición 66. *Se dice que un anillo R es un anillo pseudo-frobenius derecho, abreviado PF, si es semiperfecto, autoinyectivo derecho y el zoclo derecho de R es esencial en R.*

Teorema 31. *Son equivalentes:*

1) R_R es un cogenerador y $R - simp$ es finito.

2) R_R es un cogenerador y ${}_RR$ es de Kasch.

3) Todo M_R fiel es un generador.

4) Todo cogenerador de $Mod - R$ es un generador.

5) R_R es inyectivo y finitamente cogenerado.

6) R_R es inyectivo, semiperfecto y tiene zoclo esencial.

Demostración:

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que M_R es fiel. Para ver que M es un generador, basta ver que R_R está generado por M_R. Es decir necesitamos ver que $R = tr_M(R) = \sum \{\varphi(M) \mid \varphi \in Hom_R(M,R)\}$. Hagamos $T = tr_M(R)$ y denotemos $M^* = Hom_R(M,R)$. Notemos que T es un ideal bilateral de R, porque tr_M es un prerradical. Si $z \in r(T)$ (el anulador derecho de T), entonces $0 = \varphi(M)z = \varphi(Mz), \forall \varphi \in M^*$. Entonces $Mz \subsetneqq \bigcap \{Nuc(\varphi) \mid \varphi \in M^*\}$.

Como R_R es un cogenerador, existe un monomorfismo $M \overset{\theta}{\rightarrowtail} R^Y$, para algún conjunto Y.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "\theta"] & R^Y \arrow[d, "\pi_y"] \\ & R \end{tikzcd},$$

entonces $0 = Nuc(\theta) = \bigcap \{Nuc(\pi_y \circ \theta) \mid y \in Y\} \supseteq \bigcap \{Nuc(\varphi) \mid \varphi \in M^*\}$.

Esto muestra que $Mz = 0$. Como M es fiel entonces $z = 0$. Por lo tanto $r(T) = 0$.

Si T fuera un subconjunto propio de R, existiría un ideal izquierdo máximo ${}_RI$ que contiene a T. Entonces R/I sería un módulo izquierdo simple, que por hipótesis se sumerge en ${}_RR$. Si $R/I \xrightarrow{\sigma} R$ es un monomorfismo de R-módulos izquierdos, entonces $\forall a \in I$, tenemos que $0 = \sigma(\overline{a}) = \sigma\left(a\overline{1}\right) = a\sigma\left(\overline{1}\right)$, pero entonces $0 \neq \sigma\left(\overline{1}\right) \in r(I) = \{0\}$, contradicción. Por lo tanto $T = R$.

3) $\Rightarrow$ 4) Notemos que todo generador de $Mod - R$ es fiel. Si M_R es un generador, entonces existe un epimorfismo $M^{(Z)} \twoheadrightarrow R$, como R es proyectivo, entonces R es isomorfo a un sumando directo de $M^{(Z)}$. Entonces $r\left(M^{(Z)}\right) = r(M) \subseteq r(R) = 0_R$. Es decir que M_R es fiel.

4) $\Rightarrow$ 5) Consideremos el cogenerador inyectivo $C = \bigoplus \{E(S) \mid S \in simp - R\}$, donde $E(S)$ denota la cápsula inyectiva del simple S_R. Por hipótesis, es un generador, así que existe un epimorfismo $C^{(X)} \twoheadrightarrow R$ para algún conjunto X. Entonces R es un cociente de una suma directa de cápsulas inyectivas de simples. Como R es finitamente generado, es una cociente de una suma directa finita de cápsulas inyectivas de simples. Como R es proyectivo, entonces es un sumando directo de una suma directa finita de cápsulas inyectivas de simples. Digamos que $R \rightarrowtail \bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$. Como $\bigoplus_{i=1}^n S_i$ es esencial en $\bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$, tenemos que $\bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$ es finitamente cogenerado. Entonces R es finitamente cogenerado. R_R es inyectivo porque es una suma directa de un módulo inyectivo.

5) $\Rightarrow$ 6) Resta ver que R es semiperfecto. Tenemos que R_R es una suma directa de cápsulas inyectivas de simples. Si $E(S)$ es una cápsula inyectiva de un simple contenida en R, entonces $E(S)$ es un proyectivo inescindible. Un proyectivo inescindible P_R es semiperfecto (Teorema 11.4.1 de [5]).

6) $\Rightarrow$ 1)$\wedge$2) Por hipótesis $zoc(R_R)$ es esencial en R_R.

El zoclo derecho está contenido en el zoclo izquierdo (ver lema). El radical de Jacobson de R es tal que $Rad(R)\, zoc_R({}_RR) = 0$, (siempre se tiene que $Rad(R)\, M \leq$

$Rad\,(M)$ y el radical de un módulo semisimple es 0). Entonces $\text{zoc}(R_R) \leq zoc\,({}_R R) \leq r\,(RadR)$. Entonces $r\,(RadR) \leq_{es} (R_R)$.

Si ${}_R T$ es un módulo simple y $0 \to_R U \to_R R \overset{\varphi}{\to} T \to 0$ es una sucesión exacta, como T tiene una cubierta proyectiva (R es semiperfecto) , entonces $R = Re_1 \oplus Re_2$, donde $Re_2 \leq U$ y $Re_1 \bigcap U \ll Re_1$ (teorema fundamental de las cubiertas proyectivas). Por modularidad, $U = U \cap (Re_1 \oplus Re_2) = (U \cap Re_1) \oplus Re_2$. Como $Re_1 \bigcap U \ll Re_1$, entonces $Re_1 \bigcap U \leq Rad\,(Re_1) \leq Rad\,(R)$. Como e_2 es idempotente, entonces $r\,(Re_2) = (1 - e_2)\,R = e_1 R$. Como $Re_1 \bigcap U \leq Rad\,(R)$, entonces $r\,(Rad\,(R)) \leq r\,(Re_1 \bigcap U) \leq R_R$. Entonces $r\,(Re_1 \bigcap U) \leq_{es} R_R$. Así que $0 \neq r\,(Re_1 \bigcap U) \cap r\,(Re_2) = r\,((Re_1 \bigcap U) \oplus Re_2) = r\,(U)$.

Si $Ua = 0$ con $R \ni a \neq 0$, entonces $U \leq l\,(a)$, entonces $U = l\,(a)$, pues U es un ideal izquierdo máximo. Por lo tanto ${}_R T \cong R/U = R/l\,(a) \cong Ra$. Entonces tenemos que todo módulo izquierdo simple es isomorfo a un ideal izquierdo de R, es decir que R es de Kasch izquierdo.

Resta ver que $simp - R$ es finito. Como R es semiperfecto, hay un número finito de clases de isomorfismo de simples izquierdos. Podemos suponer que $R - simp = \{Ra_1, ..., Ra_n\}$, con $a_i \in R$. Como $zoc\,(R_R)$ es esencial, entonces cada ideal derecho $a_i R$ contiene un simple, que se puede escribir como $a_i b_i R$. Hagamos $c_i = a_i b_i$. Tenemos el isomorfismo,

$$\begin{array}{ccc} Ra_i & \longrightarrow & Rc_i \\ a_i & \longmapsto & a_i b_i \end{array}$$

como Ra_i es simple, entonces $\{Rc_i\}_{i=1}^{n}$ es un conjunto de representantes de clases de isomorfismo módulos izquierdos simples. Si $c_i R \cong c_j R$, entonces por el Lema 25 $Rc_i \cong Rc_j$.

Cuando $R/rad(R)$ es semisimple el número de sumandos directos simples derechos en una descomposición de $R/rad(R)$ coincide con el número de sumandos simples izquierdos, por el Teorema de Wedderburn-Artin. Este número es el cardinal de $R - simp$ que coincide con el cardinal de $simp - R$. Por lo tanto $\{c_i R\}_{i=1}^{n}$ es un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de módulos derechos simples. Como R es autoinyectivo derecho y contiene una copia de cada simple derecho, entonces R_R es un cogenerador.

1) $\Rightarrow$ 6) Como R_R es un cogenerador, entonces R_R contiene una copia de cada simple derecho. Sea $\{a_1 R, ..., a_n R\}$ un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples formada por ideales de R. La cápsula inyectiva de un simple de la forma $a_i R$, es inescindible, pues $a_i R \leq_{es} E\,(a_i R)$.

Como R_R es inyectivo y $E\,(a_i R) \leq R$, entonces $E\,(a_i R)$ es un sumando directo de R_R y por lo tanto es proyectivo.

Como $E\,(a_i R)$ es un proyectivo inescindible, entonces $E\,(a_i R)$ tiene un submó- dulo mayor que es superfluo. Entonces cada cociente $E\,(a_i R)\,/Rad\,(a_i R)$ es simple. Como $E\,(a_1 R) \oplus ... \oplus E\,(a_n R)$ es un sumando directo de R, digamos que $R = E\,(a_1 R) \oplus ... \oplus E\,(a_n R) \oplus eR$, entonces de $R/Rad(R) \cong E\,(a_1 R)\,/Rad\,(a_1 R) \oplus ... \oplus E\,(a_n R)\,/Rad\,(a_n R) \oplus eR/Rad(eR)$, tenemos que

$$\{E\,(a_1 R)\,/Rad\,(a_1 R)\,, ..., E\,(a_n R)\,/Rad\,(a_n R)\}$$

es también un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de simples derechos. Como los epimorfismos naturales $E(a_iR) \twoheadrightarrow E(a_iR)/Rad(a_iR)$ son cubiertas proyectivas, entonces cada módulo simple derecho tiene cubierta proyectiva. Esto es equivalente a que R sea semiperfecto. R_R es semiperfecto si y sólo si ${}_RR$ es semiperfecto.

Hay una descomposición $R_R = P_1 \oplus ... \oplus P_m$ donde cada P_i es un proyectivo inescindible y donde cada $P_i/RadP_i$ es simple. Por lo tanto $P_i \cong E(a_j)$, para alguna j. Entonces R_R es inyectivo. Además $zoc(R_R) \leq_{es} R$, pues cada P_i es la cápsula inyectiva de un simple. ■

Proposición 14. *Sea R un anillo autoinyectivo derecho, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *R es un anillo de Kasch derecho.*

2) *R_R es un cogenerador inyectivo de $Mod - R$.*

3) *$r(l(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ para todo ideal derecho $\mathcal{I} \leq R$.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) Un ideal derecho $\mathcal{I} \leq R$ es denso si $Hom(\frac{R}{\mathcal{I}}, E(R)) = 0$, pero R es un anillo de Kasch derecho, por lo tanto R no tiene ideales derechos propios densos, entonces $Hom(C, E(R)) \neq 0$ para todo R-módulo cíclico $C \neq 0$, lo que muestra que $E(R)$ es un cogenerador de $Mod - R$. Como R es un anillo autoinyectivo derecho, se tiene que R es un cogenerador inyectivo de $Mod - R$.

2) $\Rightarrow$ 3) Se sigue del Lema 24.

3) $\Rightarrow$ 1) Se sigue de la Proposición 11. ■

Proposición 15. *Sea R un anillo semiperfecto y autoinyectivo derecho, si el zoclo de R es un ideal esencial derecho de R, entonces R es un anillo de Kasch izquierdo.*

Demostración:

Esto es 6) $\Rightarrow$ 2) del Teorema 31 . ■

Proposición 16. 1) *Sea R un anillo noetheriano derecho. Entonces R es autoinyectivo derecho si y sólo si*

   a) *$l(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) = l(\mathcal{I}_1) + l(\mathcal{I}_2)$ para cualesquiera ideales derechos $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2 \leq R$.*

   b) *$l(r(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$ para todo ideal izquierdo finitamente generado $\mathcal{J} \leq R$.*

2) *Todo anillo perfecto izquierdo y autoinyectivo derecho R es un anillo de Kasch izquierdo.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$) De la Proposición 13 tenemos (a) y (b).

$\Leftarrow$) Ahora, si R es noetheriano derecho y valen (a) y (b), entonces se cumple 2. de la Proposición 13, como todos los ideales derechos de R son finitamente generados, concluimos que R_R es inyectivo, usando la proposición mencionada.

2) Un anillo perfecto izquierdo R es semiperfecto y semiartiniano derecho. Entonces R tiene zoclo derecho esencial. Concluimos usando el Teorema 31.

■

Teorema 32. *Las siguientes propiedades de un anillo son equivalentes:*

1) R es un cogenerador inyectivo para $Mod-R$.

2) Todo módulo M_R fiel es un generador para $Mod-R$.

3) R_R es inyectivo con zoclo derecho finitamente generado.

4) R es un anillo semiperfecto autoinyectivo derecho con zoclo derecho esencial.

Demostración:
Se sigue del Teorema 31.

■

Proposición 17. *Si R es un anillo semiperfecto y autoinyectivo derecho y si $zoc(R)_R \leq_{es} R$ (el zoclo derecho), entonces R es un anillo de Kasch izquierdo.*

Demostración:
Se sigue del Teorema 31. ■

Con todo lo anterior es posible ahora definir los anillos casi-Frobenius (anillos QF), además podemos dar algunas propiedades relacionadas con los anuladores derechos e izquierdos así como con la propiedad de ser de Kasch.

Definición 67. *Un anillo artiniano R (es decir, R es artiniano izquierdo y derecho y por lo tanto es noetheriano izquierdo y derecho) es un anillo casi Frobenius, abreviadamente QF, si satisface*

$$r(l(\mathcal{D})) = \mathcal{D}$$
$$l(r(\mathcal{I})) = \mathcal{I},$$

para todo ideal derecho $\mathcal{D} \leq R$ y todo ideal izquierdo $\mathcal{I} \leq R$.

Proposición 18. *Un anillo artiniano R es un anillo QF si y sólo si es autoinyectivo derecho e izquierdo.*

Demostración:
Si R es un anillo QF, entonces la conexión de Galois (r, l) define un anti-isomorfismo entre las retículas de ideales izquierdos y derechos de R, por lo tanto se satisfacen las condiciones en los anuladores izquierdos y derechos de la Proposición 12. Concluimos, usando la Proposición 16 que R es un anillo autoinyectivo derecho e izquierdo. La demostración del recíproco se sigue de la proposición 13 y del hecho de que R es noetheriano izquierdo y derecho. ■

Corolario 7. *Todo anillo QF es un anillo de Kasch izquierdo y derecho.*

Demostración:

Se sigue de la proposición anterior y de la Proposición 14. ■

Se puede obtener un resultado más fuerte si se considera que las condiciones se cumplen de un solo lado.

Proposición 19. *Si R es un anillo artiniano derecho o izquierdo y autoinyectivo derecho o izquierdo, entonces R es un anillo QF.*

Demostración:

Se deben considerar dos casos en la siguiente demostración:

1. R es artiniano derecho y autoinyectivo derecho.

2. R es artiniano izquierdo y autoinyectivo derecho.

Notemos que es posible llevar la situación (1) a (2) si consideramos $\mathcal{I}_1 \leq \mathcal{I}_2 \leq ... \leq ...$ una cadena ascendente de ideales izquierdos finitamente generados de R, entonces la cadena descendente $r(\mathcal{I}_1) \geq r(\mathcal{I}_2) \geq ... \geq ...$ se estaciona ya que R es artiniano derecho, pero $\mathcal{I}_i = l(r(\mathcal{I}_i))$ por la Proposición 13, por lo tanto la cadena ascendente también se estaciona, es decir R es noetheriano izquierdo (Teorema 18) y por lo tanto también artiniano izquierdo (un anillo R es artiniano izquierdo si y sólo si R es semiartiniano izquierdo y noetheriano izquierdo, por el Teorema de Hopkins-Levitzki y un anillo artiniano derecho es un anillo perfecto derecho que es semiartiniano izquierdo, por el Teorema P de Bass). Entonces un anillo artiniano derecho y noetheriano izquierdo es artiniano izquierdo.

Como R es artiniano izquierdo, entonces es semiartiniano derecho, semiperfecto y autoinyectivo derecho, de donde se concluye que R es un anillo de Kasch izquierdo, por la Proposición 31 De la Proposición 14 se sigue que R es un anillo de Kasch derecho, por lo tanto $r(l(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ para todo ideal derecho $\mathcal{I} \leq R$. Usando esta condición y que R es artiniano izquierdo se concluye que R es noetheriano derecho, por lo tanto R es también artiniano derecho. Por lo tanto también se satisface la condición $l(r(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$ para todo ideal izquierdo $\mathcal{J} \leq R$ y con eso se concluye que R es un anillo QF. ■

Las condiciones para que un anillo R sea casi Frobenius se pueden debilitar aún más gracias a la siguiente proposición.

Proposición 20. *Si R es un anillo noetheriano derecho o izquierdo y es autoinyectivo derecho o izquierdo, entonces R es un anillo QF.*

Demostración:

Nuevamente se deben considerar dos casos:

1. R es noetheriano izquierdo y autoinyectivo derecho.

2. R es noetheriano derecho y autoinyectivo derecho.

Para el caso 1) se probará que R es un anillo artiniano izquierdo, pero para ello basta con probar que R es un anillo semiprimario (es decir, que $R/RadR$ es semisimple y que $RadR$ es nilpotente). Para ver que R es semisimple, se puede observar que $\frac{R}{Rad(R)}$ es noetheriano izquierdo y regular de Von Neumann, como una consecuencia del Teorema XIV.1.2 de [2], por lo tanto $R/RadR$ es un anillo semisimple. Para probar que $Rad(R)$ es nilpotente se considera una cadena ascendente de ideales bilaterales de R $r(Rad(R)) \leq r(Rad(R)^2) \leq ...$, la cual se estaciona ya que R es noetheriano izquierdo. De esta manera existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r(Rad(R)^n) = r(Rad(R)^{n+1})$, pero por la Proposición 13 se tiene que $Rad(R)^n = Rad(R)^{n+1}$ y por la Proposición 4 se concluye que $Rad(R)^n = 0$, por lo tanto $Rad(R)$ es nilpotente. Entonces R es semiprimario y consecuentemente es perfecto izquierdo y derecho. Entonces R es semiartiniano izquierdo y noetheriano izquierdo, por lo tanto R es artiniano izquierdo. Aplicando la proposición anterior concluimos que R es un anillo QF.

Para el caso 2 se tiene un resultado más fuerte enunciado en el siguiente teorema.

■

Teorema 33. *Si un anillo R tiene condición de cadena ascendente en ideales anuladores derechos o en sus ideales anuladores izquierdos y R es autoinyectivo derecho o izquierdo, entonces R es un anillo QF.*

Demostración:

Se tienen dos casos:

1. R tiene condición de cadena ascendente en sus anuladores izquierdos y es autoinyectivo derecho.

2. R tiene condición de cadena ascendente en sus anuladores derechos y es autoinyectivo derecho.

En el primer caso se tiene que todo ideal izquierdo finitamente generado es un anulador izquierdo por la Proposición 13, lo cual prueba que R es noetheriano izquierdo y por el caso 1) del teorema anterior se concluye que R es QF.

En el segundo caso, sea

$$\mathcal{I}_1 \geq \mathcal{I}_2 \geq ... \geq ...$$

una cadena descendente de ideales izquierdos finitamente generados de R, entonces la respectiva cadena ascendente

$$r(\mathcal{I}_1) \leq r(\mathcal{I}_2) \leq ... \leq ...$$

se estaciona. De la Proposición 13 se puede concluir que la cadena original también se estaciona, por lo tanto R es un anillo perfecto izquierdo, de esta manera se puede aplicar la Proposición 15 para concluir que R es un anillo de Kasch derecho y por lo tanto todo ideal derecho R es un anulador derecho. De esta manera R es un anillo noetheriano derecho y semiprimario, lo cual implica que es artiniano derecho (recuerde que un anillo semiprimario es perfecto por los dos lados y entonces es semiartiniano por los dos lados, y un anillo semiartiniano derecho y noetheriano derecho es artiniano derecho, por el Teorema de Hopkins-Levitzki). Usando la Proposición 19 se concluye que R es un anillo QF. ■

Note que de los resultados anteriores se desprende que la propiedad de un anillo R de ser QF, no tiene lateralidad, es decir que un anillo es es QF izquierdo si y sólo si es QF derecho. A continuación se enuncia un resultado sobre R-módulos cuando R es un anillo QF.

Proposición 21. *Si R un anillo QF, las siguientes condiciones son equivalentes para un R-módulo M_R:*

1. *M es un modulo inyectivo.*
2. *M es un módulo proyectivo.*
3. *$M \cong \oplus_I e_i R$ para una familia $\{e_i\}_I$ de idempotentes primitivos.*

Demostración:

Podemos suponer que M es distinto de 0_R.

1) $\Rightarrow$ 3) Como R es un anillo noetheriano, entonces todo R-módulo se puede descomponer como una suma directa de módulos inyectivos inescindibles. De esta manera, basta con ver que el resultado se cumple para un R-módulo inyectivo inescindible M_R. Como R es un anillo artiniano, entonces M contiene un submódulo simple S, el cual satisface que $M = E(S)$. Pero S es isomorfo a un ideal derecho mínimo de R (por el Corolario 7), y como R es autoinyectivo derecho se concluye que $E(S) = e_i R$ para algún idempotente e_i primitivo pues $E(S)$ es un sumando directo de R, y además es inescindible porque S es simple.

3) $\Rightarrow$ 2) Cada $e_i R$ es un R-módulo proyectivo y sumas directas de módulos proyectivos son módulos proyectivos.

2) $\Rightarrow$ 1) Como R es autoinyectivo y noetheriano, entonces todo R-módulo libre es inyectivo, pues R es proyectivo y R es noetheriano si y sólo si sumas directas de inyectivos son inyectivas. Así que los módulos libres son inyectivos con las hipótesis presentes. Ahora, un módulo proyectivo es un sumando directo de un módulo libre y los sumandos directos de los inyectivos son inyectivos. ■

Bibliografía

[1] A. Alvarado García, C. Cejudo Castilla, H. Rincón Mejía, I. Vilchis Montalvo, M. Zorrilla Noriega, *On QF rings and artinian principal ideal rings*, Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics 48(1) (2019).

[2] B. Stenström *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Nueva York, 1975.

[3] C. Faith, *Lectures on Injective Modules and Quotient Rings*, Springer-Verlag, Berlín, 1967

[4] C. Faith, *Rings and things and a Fine Array of Twentieth Century Associative Algebra*, segunda edición, American Mathematical Society, Estados Unidos, 2004.

[5] F. Kasch, *Modules and rings*, Academic Press, 1982.

[6] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, segunda edición, Springer-Verlag, Nueva York, 1992.

[7] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, Nueva York, 1998.

[8] W. K. Nicholson y M. F. Yousif, *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge University Press, Nueva York, 2003