



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE UNA CONJETURA SOBRE LOS SISTEMAS CTLN. ANÁLISIS Y EJEMPLOS.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
RUBY LIZBETH ALMAZÁN CALZADA

DIRECTOR
DR. VINICIO ANTONIO GÓMEZ GUTIÉRREZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS.
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2023.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*"Todo lo que somos es el resultado de lo que hemos pensado; está fundado en
nuestros pensamientos y está hecho de nuestros pensamientos."*

Buda

A mis gatos: Ceci, Caballero y Tora , mi gorda, por desvelarse conmigo y acompañarme gatunamente desde que llegaron. Este trabajo está lleno de sus pelitos.

Agradecimientos

Primero que nada quisiera agradecer a mis familia. Mis padres: Juanis y Joel. Este trabajo es gracias a todo el apoyo que nos han brindado desde siempre y de manera incondicional. En segundo lugar le doy las gracias a mis hermanas y compañeras de desvelo durante la maestría: Pamela y Katia, gracias por sus ánimos y hacerme reír cuando lo necesitaba. A mis abuelas y abuelos y mis tíos, especialmente Javier y Luis, gracias por creer en mi. A mi prima Natz por preocuparse por mi cuando los días no eran buenos.

Quiero agradecer al Dr. Vinicio A.Gómez Gutierrez por su guía no sólo durante la elaboración de éste trabajo sino durante toda la duración de la maestría, sus comentarios y sugerencias acertadas hicieron el proceso mucho más sencillo y amable. También muchas gracias a todos y cada uno de mis profesores y profesoras durante la maestría: sus enseñanzas marcaron un antes y un después en mi formación matemática.

A las amistades que han permanecido y a las que se han creado últimamente muchas gracias por su compañerismo y aprecio, sepan que es mutuo. No puedo dejar pasar el agradecerle a mi compañero, Andrés Jiménez Lizarraga, por apoyarme y ser mi contención con paciencia y cariño.

Al programa de posgrado en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, su plantilla académica y administrativa, por el apoyo que nos brindaron en los tiempos de incertidumbre que fue la pandemia. A los sinodales que me brindaron su tiempo para leer y corregir este trabajo, su guía y ayuda fueron muy valiosas.

Finalmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT. La beca proporcionada durante la maestría fue elemental para la dedicación en mis estudios.

Índice general

1. Introducción	7
2. Conceptos y resultados básicos.	12
2.1. Conceptos básicos de digráficas	12
2.2. Conceptos básicos de los CTLN	16
2.3. Predicción de los soportes de los puntos fijos mediante análisis gráfico.	25
2.4. Ejemplos de análisis	42
2.4.1. Ejemplo A	42
2.4.2. Ejemplo B	44
3. El arreglo de hiperplanos dado por $y_i = 0$	46
3.1. Ejemplos de dos neuronas.	49
4. El arreglo de las isoclinas $G_i = 0$	69
4.0.1. Ejemplos de dos neuronas	70
5. Predecir el flujo de los sistemas CTLN, un método alternativo	82
5.1. El algoritmo	83

5.2. Ejemplos del algoritmo.	84
5.2.1. Ejemplo dos neuronas.	85
5.2.2. Ejemplo tres neuronas.	91
6. Las fuentes propias tienden a apagarse	96

Capítulo 1

Introducción

La memoria episódica, que son todos nuestros recuerdos, es una facción de la memoria explícita dentro de la memoria a largo plazo que están ubicadas en el hipocampo. Estas memorias no se almacenan, en realidad son patrones de actividad neuronal que se capturan dentro de la red y cuando se crea un impulso tal que los patrones relacionados se reactivan de manera que causan una actividad neuronal muy parecida entonces recordamos.¹

Los *threshold-linear networks* (TLN) son modelos que se utilizan comúnmente para representar las interacciones recurrentes entre neuronas. La dinámica de estos modelos está dada por los sistemas de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \max\left\{\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + b_i, 0\right\} \quad (1.1)$$

donde $i = 1, \dots, n$ indica la i -ésima neurona, la variable $x_i(t) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ representa

¹Esta información es parte del sitio <https://www.pattern-completion.net/> donde se pueden encontrar artículos y vídeos relacionados al *pattern completion*.

el nivel de actividad de la i -ésima neurona y los valores $b_i \in \mathbb{R}$ resultan ser constantes que representan los impulsos externos. Los valores de W_{ij} son entradas de una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ con entradas en los reales que se define por el tipo de conexión que se da entre las neuronas.

Los *Combinatorial Threshold-Linear Networks* son un caso especial de los TLN donde se restringen las conexiones a una gráfica dirigida. A diferencia de los TLN la matriz $W = (W_{ij})$ que define al sistema está dada por la digráfica como:

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -1 + \varepsilon & \text{si } i \leftarrow j \\ -1 - \delta & \text{si } i \not\leftarrow j \end{cases}$$

donde $i \leftarrow j$ si la arista (j, i) existe en la digráfica y $i \not\leftarrow j$ en el caso en que no exista. Los valores de δ y ε deben de cumplir que $\delta > 0$ y $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{\delta + 1}$, cuando sucede esto decimos que están dentro de un *rango legal*. Por comodidad utilizaremos los valores estándar propuestos por las Doctoras Carina Curto y Katherine Morrison que son $\delta = 0,5$ y $\varepsilon = 0,25$.

Por ejemplo, consideremos la gráfica dirigida de tres neuronas que se presenta en la figura 1.1

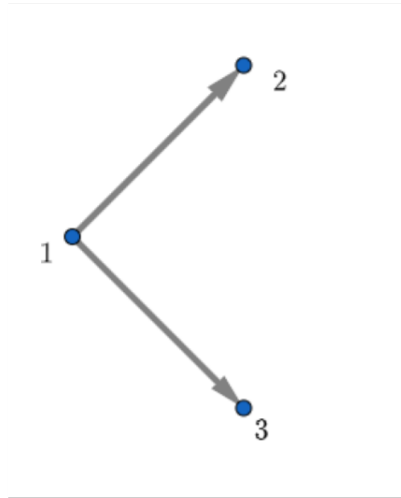


Figura 1.1: Ejemplo de tres neuronas $\{1, 2, 3\}$ con las aristas $(1, 2)$ y $(1, 3)$.

en este caso la matriz asociada a la gráfica de la figura 1.1 y utilizando los valores estándar mencionados anteriormente es

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 & -1,5 \\ -0,75 & 0 & -1,5 \\ -0,75 & -1,5 & 0. \end{pmatrix}.$$

En los *Combinatorial Threshold-Linear Networks* en lugar de tener constantes b_i de impulsos externos distintos para cada ecuación del sistema se fija un valor $b_i = \theta$ para toda $i = 1, \dots, n$. Así, la dinámica resultante está dada ahora por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \max\left\{\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta, 0\right\}. \quad (1.2)$$

Los CTLN son dependientes al etiquetado de la digráfica y a los parámetros $\varepsilon, \delta, \theta$. Todas las neuronas están conectadas y cuánto influye una neurona en otra está determinado por si hay o no hay arista entre ellas. Como condición adicional a que δ y ε se encuentren dentro del rango legal vamos a considerar $\theta = 1$

Podemos interpretar los CTLN como modelos de neuronas cuyas interacciones son inhibitorias. Cuando no tenemos arista de j a i (es decir cuando $j \not\rightarrow i$) decimos que j *inhibe fuertemente a i* mientras que cuando si se encuentra esa arista en G (es decir cuando $j \rightarrow i$) decimos que j *inhibe débilmente a i* . Esta relación de inhibición es la que explica que la actividad neuronal tienda a seguir la dirección de las aristas de la gráfica dirigida que defina al CTLN en cuestión.

El objetivo de este trabajo es mostrar distintas formas de analizar el modelo CTLN. La primera manera, que se encuentra en el capítulo de preliminares, es mediante un análisis gráfico de la digráfica que define el sistema de ecuaciones siguiendo las reglas propuestas por la Dra. Carina Curto y la Dra. Katherine Morrison en los artículos *Flexible memory networks*² y *Encoding binary neural codes in networks on threshold-linear networks: a preliminar report*³.

La segunda forma es mediante el estudio de arreglos de hiperplanos y_i que dividen al espacio en regiones donde la dinámica del sistema CTLN coincida con la de sistemas lineales. Después presentamos las funciones $G_i = 0$ que define la hipersuperficie iso-

²[2]
³[3]

clina donde $\frac{dx_i}{dt} = 0$.

En el capítulo 5, en un trabajo en colaboración con el matemático Carlos Joaquín Castañeda Castro, presentamos una primera versión de un algoritmo que nos permite construir una gráfica dirigida a partir del arreglo de hiperplanos $y_i = 0$. Asignamos a cada región vectores de signos y se construye una digráfica que represente el flujo de actividad entre las neuronas. Esto nos permitió llegar a resultados originales que se presentan en este trabajo: las proposiciones 3,1 y 3,2 junto con sus demostraciones. Finalmente, en el capítulo 6 mostramos nuestros avances en la prueba de la conjetura de que las fuentes propias tienden a apagarse.⁴

⁴Una fuente propia, como se definirá más adelante, es un vértice j que tiene al menos una arista $j \rightarrow k$ para $k \neq j$. Se menciona en [10] que en experimentos numéricos las fuentes propias tienden a apagarse. Esto se refiere a que la actividad de $x_j(t)$ tiende a cero cuando t crece a infinito.

Capítulo 2

Conceptos y resultados básicos.

2.1. Conceptos básicos de digráficas

A continuación se presentan las definiciones necesarias de digráficas para este capítulo. Es importante hacer notar que seguiremos las definiciones presentadas en [9].

Definición 2.1. *Una gráfica dirigida o digráfica $\mathcal{D} = (V(D), A(D))$ consiste de dos conjuntos finitos:*

- *El conjunto no vacío de vértices o nodos, denotado $V(D)$. Usualmente lo vamos a denotar $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ donde $n \in \mathbb{N}$ es el número de nodos.*
- *El conjunto de aristas o arcos de la digráfica denotado $A(D)$ que consiste de todas las parejas ordenadas (u, v) donde u es el nodo inicial y v es el nodo final. Este conjunto no necesariamente es diferente de vacío.*

Definición 2.2. Una digráfica $D = (V(D), A(D))$ es simple si no contiene bucles¹ ni arcos paralelos². De manera análoga diremos que una gráfica es orientada si no contiene arcos bidireccionales y que es un torneo si es una gráfica completa orientada³.

Definición 2.3. El grado de entrada de un nodo v es el número de arcos que llegan a v mientras que el grado de salida es el número de arcos que salen de v , son denotados $d_D^-(v)$ y $d_D^+(v)$ respectivamente.⁴

Un nodo v se dice que es un *pozo* si su grado de salida es igual a cero, $d_D^+(v) = 0$, pero si el grado de entrada de un nodo es igual a cero entonces se dirá que es una *fuente*, $d_D^-(v) = 0$, más aún si tiene grado de salida distinto de cero diremos que es una *fuente propia*. Por último diremos que un nodo está *aislado* si sus grados de entrada y salida son cero. Los grados máximos y mínimos de una digráfica siguen el mismo concepto de las gráficas simples con la salvedad que se deben de considerar los grados de entrada y salida. Es decir, diremos que el grado máximo de entrada es el número máximo de aristas o arcos que entran a un vértice de la digráfica, mientras que el grado mínimo de entrada es el número mínimo de aristas o arcos que entran a un vértice de la digráfica. De manera análoga los grados máximos y mínimos de salida. Las notaciones son $\delta^-(D), \delta^+(D)$ para los mínimos y $\Delta^-(D), \Delta^+(D)$ para los máximos.

Definición 2.4. Sea D una digráfica. Se dice que es k -regular si cada vértice tiene grados de entrada y salida igual a k .

¹Aristas donde el vértice de inicio y de término es el mismo.

²Dos arcos tengan el mismo vértice inicial y final

³Nos referimos a gráfica completa orientada a una gráfica donde cada par de aristas se encuentra conectada por una arista direccional.

⁴Bondy, Murty. *Graph Theory*, Springer, 2008.

Definición 2.5. Sea D una digráfica. Se dice que un vértice tiene grado de entrada uniforme d si todos los vértices tienen grado de entrada d . Análogamente decimos que un vértice tiene grado de salida uniforme m si todos los vértices tienen grado de salida m .

Sea $\sigma \subseteq [n]$, la gráfica inducida $D|_\sigma$ o D restringida a σ es la subgráfica de D que contiene solamente los vértices de σ y los arcos entre ellos. Teniendo esto decimos que un subconjunto σ tiene *grado de entrada uniforme d* si $G|_\sigma$ tiene grado de entrada uniforme d .

Definición 2.6. Sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica. Decimos que $\sigma \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente si no hay arcos entre cualquier par de vértices de σ , es decir que $D|_\sigma$ es un conjunto de vértices aislados.

Podríamos decir que la siguiente definición es la versión dual de la definición anterior.

Definición 2.7. Sea $D = (V(D), A(D))$ digráfica. Decimos que $\sigma \subseteq V(D)$ es un clique o clan si para cada par de nodos hay una arista bidireccional.

Un clique se dice que es *maximal* si no está contenido en un clique de mayor cardinalidad. Un nodo $k \notin \sigma$ es llamado *target* u *objetivo* de un clique σ si recibe una arista de todo nodo que esté en σ . En la siguiente figura 2.1 podemos observar un clique de 5 nodos.

Definición 2.8. Sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica. Una trayectoria dirigida es una secuencia finita de aristas que une una secuencia de vértices distintos con la condición de que el vértice final de cada arista sea el vértice inicial de la siguiente.

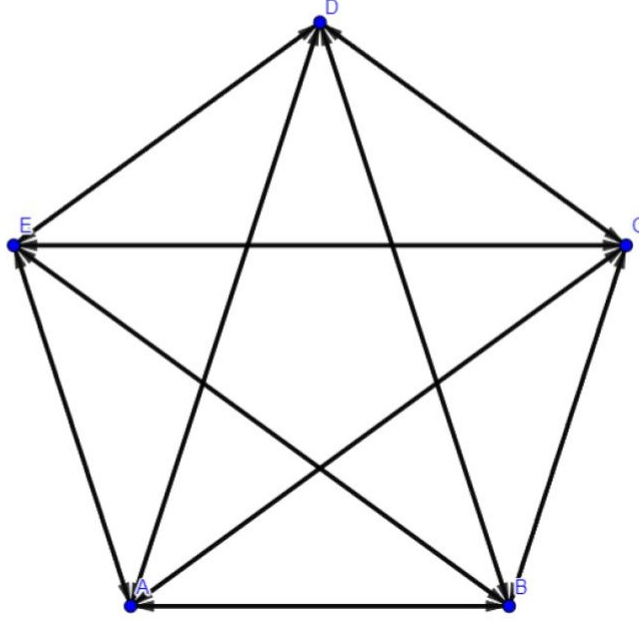


Figura 2.1: Ejemplo de un Clique o Clan

Definición 2.9. Un subconjunto $\varsigma \subseteq V(D)$ con $|\varsigma| = k$ es un ciclo si hay un ordenamiento de los vértices de ς tal que $D|_{\varsigma}$ tiene $|\varsigma|$ aristas de la forma $v_i \rightarrow v_{i+1}$ para $i = 0, \dots, k-1$ y $v_k \rightarrow v_0$.

Definición 2.10. Sea $D = (V(D), A(D))$, $\sigma \subseteq V(D)$ y $j, k \in V(D)$. Decimos que k domina gráficamente⁵ a j con respecto al conjunto σ , denotado $k >_{\sigma} j$, si $\sigma \cap \{j, k\} \neq \emptyset$ y se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cada $i \in \sigma \setminus \{j, k\}$ si $i \rightarrow j$ entonces $i \rightarrow k$.
2. Si $j \in \sigma$ entonces $j \rightarrow k$.
3. Si $k \in \sigma$ entonces $k \nrightarrow j$.

Observemos que si $k >_{\sigma} j$ entonces $j \not>_{\sigma} k$ por lo que $>_{\sigma}$ es una relación antisimétrica. Existen tres tipos de dominación:

⁵Este concepto de dominación lo presentan las autoras en [6] y [8].

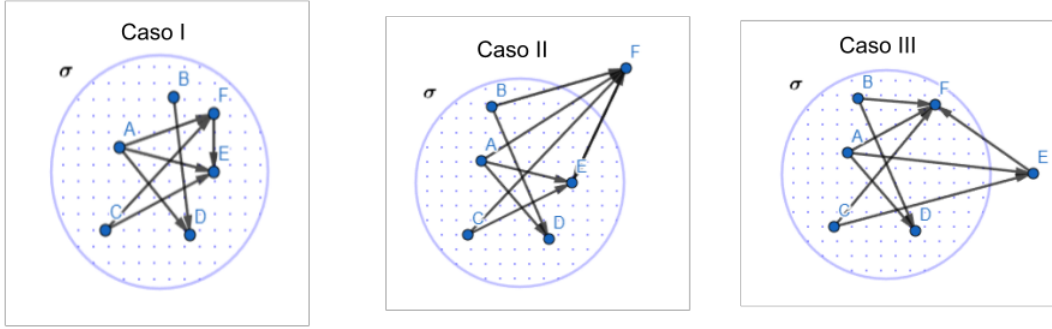


Figura 2.2: Los distintos casos de dominación.

- Caso I: la dominación *hacia adentro* si $j, k \in \sigma$,
- Caso II: la dominación de *afuera hacia adentro* si $j \in \sigma$ pero $j \notin k$ y
- Caso III: la dominación de *adentro hacia afuera* si $j \notin \sigma$ y $k \in \sigma$.

En la siguiente figura podemos observar los tres casos de dominación gráfica donde F domina gráficamente a E .

2.2. Conceptos básicos de los CTLN

Es necesario hacer notar que los sistemas CTLN son casos particulares de los TLN. Así que las siguientes definiciones que se presentan a continuación para los TLN también aplican, por extensión, a los CTLN. Para facilidad de las pruebas vamos a considerar $b_i = \theta$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Un *punto de equilibrio* del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \max\left\{\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta, 0\right\}$$

es un vector $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ tal que al evaluar $x = x^*$ obtenemos que para cada ecuación se cumple $\frac{dx_i}{dt} = 0$. Es común en redes neuronales atractoras que estos puntos de equilibrio presenten patrones de memoria que han sido almacenados. El proceso de desarrollo desde las condiciones iniciales a los puntos de equilibrio es un modelo estándar del *pattern completion* o que se puede traducir como *finalización del patrón*. Cuando se crea un recuerdo, los patrones de actividad en las neuronas se inscriben en sus conexiones, dejando un rastro conocido como engrama⁶. Se cree que durante el recuerdo se restaura este rastro y se restablece el patrón de actividad original. Este proceso se conoce como *pattern completion* y se traduce como "finalización del patrón" y se cree que ocurre en una parte del cerebro llamada hipocampo.⁷

El sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \max\left\{\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j + \theta, 0\right\}, i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

se puede escribir como una ecuación vectorial

$$\frac{dx}{dt} = -x + \max\{Wx + \theta, 0\}. \quad (2.2)$$

donde θ en esta ocasión pasa ser la n-ada $(\theta, \theta, \dots, \theta)$. Omitiendo la operación de tomar el máximo entonces sólo se mantendrá el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = (-I + W)x + \theta. \quad (2.3)$$

⁶En ingles Engram

⁷<https://www.pattern-completion.net/index.html>

Si suponemos que $-I + W$ es invertible este sistema tendrá un único punto de equilibrio, el cual será estable si todos los valores propios de $-I + W$ tienen parte real negativa, y será inestable si algún valor propio de $(-I + W)$ tiene parte real positiva⁸.

Tomando

$$y_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j + \theta \quad (2.4)$$

podemos sintetizar aún más la ecuación 2.1 y obtendremos $\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \max\{y_i, 0\}$. Observemos que cuando $y_i \leq 0$ se obtiene que $\frac{dx_i}{dt} = -x_i$ para la i -ésima neurona. Cuando $y_i > 0$ tendremos que $\frac{dx_i}{dt} = -x_i + y_i$.

Definición 2.11. *Un vector $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema si al evaluar en $x = x^*$ obtenemos que $\frac{dx_i}{dt} = 0$ para cada $i \in [n]$.*

Definición 2.12. *Sea $\sigma \in [n]$. Decimos que σ es un soporte de un punto de equilibrio x^* si $\sigma = \{i | y_i > 0\}$ en el sistema evaluado en $x = x^*$.*

Definición 2.13. *Dado un sistema TLN con matriz de relación $W(G, \varepsilon, \delta)$ definimos el conjunto de soportes de los puntos de equilibrios del sistema como*

$$FP(W, b) = \{\sigma \subseteq [n] \mid \text{Donde } \sigma \text{ es soporte de un punto de equilibrio del sistema}\}$$

Si consideramos el conjunto de hiperplanos $\{y_i = 0\}$ tendremos que éstos particionan al espacio \mathbb{R}^n donde el sistema de ecuaciones restringido es lineal. Cada uno de

⁸Decimos en este caso que un punto fijo estable es tal que un sistema puede ser perturbado inicialmente alrededor de su punto fijo pero eventualmente regresar a su ubicación original y permanecer allí

estos sistemas lineales tiene un punto de equilibrio x^* tal que $x_k^* = 0$ para toda $k \in \sigma$ donde $\sigma = \{i | y_i > 0\}$ y $x_\sigma^* = (I - W_\sigma)^{-1} \theta_\sigma$ donde el subíndice σ indica la restricción del vector o la matriz solo a las entradas con subíndice en σ .

Por ejemplo, si tenemos un sistema *TLN* de 4 neuronas con una matriz del sistema W que tenga como soporte $\sigma = \{1, 3\}$ entonces la matriz resultante será $Id - W$ y sólo considerar las columnas y renglones 1 y 3. Es decir la matriz $Id - W = \begin{pmatrix} 1 & a_{13} \\ a_{31} & 1 \end{pmatrix}$. Donde los valores a_{13} y a_{31} quedan determinados si existen las aristas de $(1, 3), (3, 1)$ o ambas.

Para cada σ el punto de equilibrio correspondiente x^* es un punto de equilibrio del TLN si se encuentra en la región apropiada. Por ejemplo, el punto de equilibrio $x^* = 0$ corresponde a $\sigma = [n]$ ya que $y_i = \sum_{j \in [n]} w_{ij} x_j + \theta$ en $x = 0$ se obtiene que $y_i = \theta$, pero $\theta > 0$ y por lo tanto $y_i > 0$ para toda $i \in [n]$. Por lo tanto no podrá ser punto de equilibrio.

Para que x^* sea un punto de equilibrio del CTLN se deben cumplir las siguientes desigualdades:

1. $y_i > 0$ para toda $i \in \sigma$
2. $y_k^* \leq 0 \forall k \notin \sigma$ donde y_k^* se obtiene de evaluar y_k con x^* .

La primera es la condición de *encendido*⁹ y la segunda es la condición de *apagado*¹⁰. Cuando estas condiciones se satisfacen decimos que el sistema CTLN tiene un punto de equilibrio con soporte σ .

⁹*on neural condition.*

¹⁰*off neural condition.*

Como se menciona en [6] puede haber varios puntos de equilibrio y cada uno es determinado por su soporte. En [2] se nos presentan una serie de reglas que determinan la naturaleza de los soportes de los puntos de equilibrio y con ellos la estabilidad de estos. A lo largo de esta sección se presentan dichas reglas junto de algunos resultados presentados por las autoras ya mencionadas en [9] y [8].

Para las siguientes definiciones es importante recordar la regla de Cramer. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con $\det A \neq 0$ y consideremos el sistema $Ax = b$. Este tiene como solución única $x = A^{-1}b$ y las entradas de x se pueden expresar de la siguiente manera:

$$x_i = \frac{\det(A_i, b)}{\det A} \quad (2.5)$$

con (A_i, b) la matriz obtenida de remplazar la i -ésima columna de A con una constante b .

Se sigue de la regla de Cramer que un punto de equilibrio con soporte σ tiene valores

$$x_i^\sigma = \frac{\det((I - W_\sigma)_i, b_\sigma)}{\det(I - W_\sigma)} \quad (2.6)$$

para $i \in \sigma$. Para cualquier $\sigma \subseteq [n]$ podemos definir

Notación 2.1. $s_i^\sigma = \det((I - W_{\sigma \cup \{i}})_i, b_{\sigma \cup \{i}})$ para $i \in [n]$.

Definición 2.14. Decimos que un TLN con matriz W y constante θ es no degenerado si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $b_i = \theta > 0$ para al menos un $i \in [n]$

2. $\det(I - W_\sigma) \neq 0$ para cada $\sigma \subseteq [n]$
3. Para cada $\sigma \subseteq [n]$ el correspondiente determinante de Cramer es diferente de cero. Es decir, $\det(I - W_\sigma) \neq 0$ donde W_σ es la submatriz de W donde solo se consideran las columnas y filas de los nodos que se encuentran en σ , así como b_σ es el valor que se le da a la constante de impulsos exteriores solo en los nodos de σ .

Observación 2.1. Para efectos de éste trabajo consideraremos a los sistemas CTLN que resultan ser no degenerados.

Definición 2.15. Para cada punto de equilibrio con soporte σ definimos el índice

$$idx(\sigma) = \text{sgn}(\det(I - W_\sigma))$$

Como mencionamos anteriormente trabajaremos con TLN no degenerados. Esto se puede entender como $\det(I - W_\sigma) \neq 0$ y así $idx(\sigma) = \{\pm 1\}$. También al ser no degenerados sólo puede haber a lo más un punto de equilibrio por soporte.

Denotemos

Notación 2.2. $x^\sigma = (I - W_\sigma)^{-1}b$

Recordemos que para un punto de equilibrio x^* si σ es soporte de x^* entonces $x_i^* = x_i^\sigma$ por lo que podemos asegurar¹¹ que σ es soporte de un punto de equilibrio si:

1. $y_i^\sigma > 0 \forall i \in \sigma$, y

¹¹Esto se muestra con más detalle en [6] *Pattern completion in symmetric threshold-linear networks*.

2. $y_k \leq 0$ para todas las $k \notin \sigma$.

Definición 2.16 (Motivos permitidos). Sea TLN un sistema TLN de $[n]$ neuronas con matriz de incidencia W y constante θ . Decimos que $\sigma \in [n]$ es un motivo permitido si $\sigma \in FP(W, b)$, es decir, que sea soporte de un punto de equilibrio. De otro modo decimos que σ es un motivo no permitido.

Definición 2.17. Para cada punto de equilibrio de un TLN que se encuentre asociado a su soporte $\sigma \in FP(W, b)$ definimos el índice

$$idx(\sigma) = \text{sgn}(\det(I - W_\sigma)).$$

Como por hipótesis los TLN que estamos trabajando son no degenerados entonces $idx(\sigma) \in \{\pm 1\}$. Para cualquier $\sigma \subseteq [n]$ podemos definir

Notación 2.3. $s_i^\sigma = \det((I - W_{\sigma \cup \{i\}})_i, b_{\sigma \cup \{i\}}) \forall i \in [n]$.

Con esto podemos definir

$$\text{sgn}(s_i^\sigma) = \text{sgn}(\det((I - W_{\sigma \cup \{i\}})_i, b_{\sigma \cup \{i\}}))$$

para cada $i \in \sigma$.

Teorema 2.1. Sea (W, b) un TLN con n neuronas. Para cualquier $\sigma \in [n]$ distinto de vacío tenemos σ es un motivo permitido si, y sólo si $\text{sgn}s_i^\sigma = \text{sgn}s_j^\sigma \forall i, j \in \sigma$. Más aún tendremos que $\sigma \in FP(W, b)$ si, y sólo si, $\text{sgn}s_i^\sigma = \text{sgn}s_j^\sigma = -\text{sgn}s_k^\sigma$ para $i, j \in \sigma$ y $k \notin \sigma$.

Para proceder con la demostración del teorema 2.1 es necesario el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea (W, b) un sistema TLN den $[n]$ neuronas y sea $\sigma \in [n]$. Entonces*

$$s_k^\sigma = \sum_{i \in \sigma} W_{ki} s_i^\sigma + b_k \det(I - W_\sigma)$$

para cada $k \in [n]$.

Demostración. Para $k \in \sigma$. De la notación 2.2 tenemos que $x^\sigma = W_\sigma x^\sigma + b_\sigma$, entonces

$$x_k^\sigma = \sum_{i \in \sigma} W_{ki} x_i^\sigma + b_k.$$

Usando la ecuación 2.3 esto produce que $s_k^\sigma = \sum_{i \in \sigma} W_{ki} s_i^\sigma + b_k \det(I - W_\sigma)$.

Después consideramos $k \notin \sigma$ y calculamos:

$$\begin{aligned} s_k^\sigma &= \det((I - W_{\sigma \cup \{k\}})_k; b_{\sigma \cup \{k\}}) \\ &= \det \left(\begin{array}{cc} I - W_\sigma & b_\sigma \\ -W_{k1} \dots W_{k,k-1} & b_k \end{array} \right) \end{aligned}$$

Utilizando la expansión de Laplace para el determinante en el k -ésimo renglón obtenemos.

$$\begin{aligned} s_k^\sigma &= \sum_{i \in \sigma} (-1)^{i+k} (-W_{ki})^{(k-1)-i} \det((I - W_\sigma)_i; b_\sigma) + b_k \det(I - W_\sigma) \\ &= \sum_{i \in \sigma} W_{ki} s_i^\sigma + b_k \det(I - W_\sigma). \end{aligned}$$

□

Con este lema podemos proceder con la demostración del teorema 2.1.

Demostración. Recordemos que $\sigma \in FP(W_\sigma, b_\sigma)$ si, y sólo si, $x_i^\sigma > 0$ para cada $i \in \sigma$.

Por la regla de Cramer tenemos que

$$x_i^\sigma = \frac{s_i^\sigma}{\det(I - W_\sigma)}.$$

Como $x_i^\sigma > 0$ para cada $i \in \sigma$ entonces se debe de cumplir que

$$sgn s_i^\sigma = sgn s_j^\sigma = sgn(\det(I - W_\sigma)) = idx(\sigma)$$

para todas $i, j \in \sigma$.

Para la implicación contraria supongamos que $sgn s_i^\sigma = sgn s_j^\sigma$ para cualesquiera $i, j \in \sigma$. Esto implica que x_i^σ para cada $i \in \sigma$ tienen el mismo signo, pero debemos probar que este signo es positivo.

Primero probamos que $b_i > 0$ para cada $i \in \sigma$. Recordemos que en los CTLN siempre tenemos que $b_i \geq 0$. Supongamos que existe $j \in \sigma$ tal que $b_j = 0$. Entonces por el lema anterior tendríamos que:

$$\begin{aligned} s_j^\sigma &= \sum_{i \in \sigma} W_{ji} s_i^\sigma \det(I - W_\sigma) \\ &= \sum_{i \in \sigma - \{j\}} W_{ji} s_i^\sigma. \end{aligned}$$

Usando que el hecho que $W_{jj} = 0$ y como $W_{ji} < 0$ para cada $i \neq j$ la igualdad anterior

contradice la afirmación que todos los signos de s_i^σ son iguales para toda $i \in \sigma$. Así podemos concluir que $b_i > 0$ para toda $i \in \sigma$. Esto a su vez asegura que $x_i^\sigma > 0$ para al menos uno, de hecho todos los $i \in \sigma$, esto ya que por definición tenemos que $(I - W_\sigma)x_i^\sigma = b_\sigma$ además que todas las entradas de $I - W_\sigma$ son no negativas. Así $\sigma \in FP(W_\sigma, b_\sigma)$. Lo que completa la prueba de la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte recordemos que $\sigma \in FP(W, b)$ justamente cuando $\sum_{i \in \sigma} W_{ki}x_i^\sigma + b_k \leq 0$ para toda $k \notin \sigma$. Usando el lema 2.1 y dividiendo por $\det(I - W_\sigma)$ encontramos que

$$\frac{s_k^\sigma}{\det(I - W_\sigma)} = \sum_{i \in \sigma} W_{ki}x_i^\sigma + b_k \quad (2.7)$$

Como el sistema es no degenerado entonces $\det(I - W_\sigma) \neq 0$ y $s_k^\sigma \neq 0$ y como $\sum_{i \in \sigma} W_{ki}x_i^\sigma + b_k \leq 0$ para las $k \notin \sigma$ entonces $\text{sgn}s_k^\sigma = -\text{sgn}(\det(I - W_\sigma))$. Uniendo esto con las condiciones de signos de la primera parte de la demostración concluimos la prueba. □

En la tesis de doctorado de la Doctora Parmelee [7] se encuentra un apéndice donde muestra los motivos permitidos de n nodos con $n = 1, \dots, 5$.

2.3. Predicción de los soportes de los puntos fijos mediante análisis gráfico.

Las siguientes reglas de análisis de soportes de los puntos fijos son presentadas por las doctoras C. Curto y K. Morrison en [6], [8] y [9]. El objetivo principal de ésta subsección es el presentar los avances que las autoras han hecho para encontrar

soportes de puntos fijos y su naturaleza directamente en la gráfica que define a un sistema CTLN. Así como presentar un par de ejemplos de dichas reglas de predicción. Comenzaremos recordando que a cada subconjunto del conjunto de nodos $[n]$ se le puede asociar un punto de equilibrio. Como una red de n nodos tiene $2^n - 1$ subconjuntos no vacíos, podemos asegurar que $|FP(G)| \leq 2^n - 1$ donde $FP(G)$ es el conjunto de soportes de puntos de equilibrio asociados a una gráfica G que define al un sistema CTLN. Esta cota superior se alcanza cuando G es un conjunto independiente, es decir que sea la unión de nodos aislados sin aristas entre ellos.

Ya que $sgn(\det(I - W_\sigma)) = \pm 1$ entonces debe de haber un número impar de términos y así tendremos que el conjunto de todos los soportes debe tener cardinalidad impar¹².

Así cada CTLN debe satisfacer la siguiente condición de paridad:

$$\sum_{\sigma \in FP(G)} sgn(\det(I - W_\sigma)) = 1 \quad (2.8)$$

Regla 1. *El número de soportes de un sistema CTLN debe ser impar.*

Observemos que para que un conjunto $\sigma \subseteq [n]$ sea un soporte de un punto de equilibrio la condición de prendido se deben de cumplir para cada nodo dentro de σ , es decir que $y_i > 0$ para cada $i \in \sigma$. Mientras que las condición de apagado se deben cumplir para cada nodo en $[n] \setminus \sigma$, es decir $y_i < 0$ para $i \notin \sigma$. Las condiciones de prendido son independientes de todos los nodos que no estén en σ por lo que es equivalente que σ satisfaga las condiciones de prendido a que se encuentre en $FP(G|_\sigma)$ ¹³.

De igual manera como la condición de apagado se puede comprobar para un nodo $\{i\}$

¹²[8]

¹³ $FG(G|_\sigma)$ se referirá al conjunto de soportes del sistema definido por la gráfica $G|_\sigma$.

de manera independiente de cualquier otro nodo que tampoco se encuentre en σ esta condición es equivalente a probar que $\sigma \in FP(G|_{\sigma \cup \{i\}})$ ¹⁴.

Regla 2. *Sea G la gráfica que define un sistema CTLN. Un subconjunto σ pertenece al conjunto de soportes $FP(G)$ si, y sólo si*

1. $\sigma \in FP(G|_{\sigma})$ y
2. para cada $k \notin \sigma$ se tiene $\sigma \in FP(G|_{\sigma \cup \{k\}})$.

Es importante hacer notar una serie de observaciones que aparecen en [4] referente a la definición 2.14. La primera es que como se mencionó anteriormente los CTLN son casos particulares de los TLN. La segunda que los conjuntos permitidos¹⁵ de la red dependen puramente de la matriz W que define el TLN en cuestión. En general se espera que a cada conjunto permitido se le asocie un punto de equilibrio, sin embargo dado un conjunto σ que no sea un conjunto permitido no se puede asegurar que exista un punto de equilibrio que se le pueda asociar, es decir que el requisito que σ sea un conjunto permitido es una condición necesaria mas no suficiente para la existencia de un punto de equilibrio del sistema que tenga a σ como soporte. El siguiente teorema fue primeramente probado para casos simétricos de W en [1] y generalizado a una W arbitraria¹⁶ en [2]

Teorema 2.2. *Considérese un TLN (1.1) de n neuronas. Un subconjunto de nodos $\sigma \subset [n]$ es un conjunto permitido, si y sólo si, el punto de equilibrio asociado a σ es*

¹⁴ $FG(G|_{\sigma})$ se referirá al conjunto de soportes del sistema definido por la gráfica $G|_{\sigma}$ junto con el nodo $\{i\}$

¹⁵Definición 2.16

¹⁶Arbitraria dentro de las matrices asociadas a las gráficas de los sistemas CTLN.

estable, es decir, si todos los valores propios de la matriz $(I - W_\sigma)$ tienen parte real negativa.

El siguiente lema es necesario para la demostración del teorema anterior.

Lema 2.2. *Sea A una matriz de $n \times n$ con entradas en los reales (no necesariamente simétrica) con diagonal estrictamente negativa, y $n \geq 2$. Si A es estable¹⁷ entonces existe una submatriz principal de A de tamaño 2×2 que es estable.*

Demostración. Se utilizamos la fórmula para el polinomio característico en términos de sus menores principales¹⁸

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} m_1(A) X^{n-1} + \dots + m_n(A)$$

donde $m_k(A)$ es la suma de los $(k \times k)$ -menores principales de A ¹⁹. Si se escribe el polinomio característico en términos de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y asumiendo que A es estable tendremos que

$$m_2(A) = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j > 0.$$

Esto implica que al menos uno de los menores principales de tamaño 2×2 es positivo.

Como la submatriz principal de 2×2 tiene traza negativa ya que las diagonales de cualquier matriz del sistema son cero, entonces debe ser estable. \square

¹⁷Una matriz es estable si todos sus valores propios pertenecen a $C^- := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

¹⁸Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y k entero tal que $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$, un menor de orden $k \times k$ de A es el determinante de una matriz $k \times k$ obtenido mediante la eliminación de $m - k$ filas y $n - k$ columnas.

¹⁹Esto es resultado de la expansión de Laplace

En [4] las autoras mencionan que el lema 2.1 y el teorema 2.1 tienen como consecuencia los siguientes resultados que también son necesarios para la prueba del teorema 2.3.

Definición 2.18. *Una submatriz principal es una matriz cuadrada que resulta de eliminar ciertos renglones y columnas.*

Lema 2.3. *Sea W la matriz asociada a un sistema de un sistema TLN. Si todas las submatrices principales de $-I + W$ de tamaño 2×2 tienen traza negativa y son inestables entonces la red no tiene conjuntos permitidos que contengan más de un nodo.*

Corolario 2.1. *Dado un TLN con entradas diagonales $w_{ii} = 0$. Si todas las submatrices principales de $-I + W$ de tamaño 2×2 son inestables, entonces la red no tiene puntos de equilibrios estables con soporte de más de un nodo.*

Estos resultados son vitales para la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Considérese un sistema CTLN con matriz de aristas W asociada a la gráfica G . Supóngase que*

1. G es una gráfica orientada²⁰ sin pozos²¹ y
2. cada que $j \rightarrow i$ en G , $w_{ij} < \frac{1}{w_{ji}}$ ²²

entonces la red CTLN tiene actividad acotada y no tiene puntos estables fijos.

²⁰Sin aristas bidireccionales.

²¹Que reciba aristas de otros nodos pero que ninguna arista salga de ese nodo.

²²Esto es un resultado directo de la desigualdad $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{\delta+1}$.

Demostración. Para probar que no hay puntos de equilibrio estables primero se mostrará que no puede haber puntos de equilibrios estables con soporte de dos o más nodos. Esto ya que la red no tiene conjuntos permitidos de tamaño $|\sigma| \geq 2$. Por los resultados anteriores es suficiente probar que todas las submatrices principales de tamaño 2×2 de $-I + W$ son inestables. Cada una de estas matrices $\begin{pmatrix} -1 & w_{ij} \\ w_{ji} & -1 \end{pmatrix}$ tiene una traza negativa. Recordemos que es estable si, y sólo si, la parte real de su valor propio es negativo y es inestable en caso contrario. Entonces:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} -1 & w_{ij} \\ w_{ji} & -1 \end{pmatrix} = 1 - w_{ij}w_{ji}.$$

Como G es una gráfica orientada tenemos dos casos:

1. El caso en que una de las aristas le envíe a otra, es decir, $-1 < w_{ij} \leq 0$ y $w_{ji} \leq -1$ o viceversa.
2. El caso en que no haya arista entre ambos, lo que se traduce a que $w_{ij} \leq -1$ y $w_{ji} \leq -1$.

En el primer caso la gráfica debe de contener la arista $j \rightarrow i$ por lo que $w_{ij}w_{ji} > 1$ por lo que en este caso tendríamos que $\Delta < 0$. En el segundo caso tenemos que $w_{ij}w_{ji} \geq 1$ y por lo tanto $\Delta \leq 0$. Así todas las submatrices principales de $-I + W$ resultan ser inestables y por lo tanto la red no tiene puntos de equilibrio estables con dos o más nodos activos.

El siguiente paso será demostrar por contradicción que la red no tiene puntos de

equilibrio con soporte de un solo nodo. Supóngase que x^* es un punto de equilibrio con soporte $\{i\}$ con $x_i^* > 0$ y $x_j^* = 0 \forall j \neq i$ y observemos que $w_{ii} = 0$. Entonces

$$x_i^* = \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j^* + \theta = w_{ii}x_i^* + \theta = \theta.$$

Por otro lado, para cada $k \neq i$ se debe cumplir que

$$\frac{dx_k}{dt} = -x_k + \max\left\{\sum_{j \neq k} w_{kj}x_j + \theta, 0\right\}$$

de donde

$$y_k^* = \max\left\{\sum_{j=1}^n w_{kj}x_j^* + \theta, 0\right\}_+ = [w_{ki}x_i^* + \theta]_+ = [w_{ki}\theta + \theta]_+ = [w_{ki} + 1]_+ \cdot \theta.$$

Observemos que por hipótesis G no tiene pozos, en particular i no es un pozo, y existe al menos un vértice l distinto de i tal que $i \rightarrow l$. Esto significa que $w_{li} > -1$ y por lo que $x_l^* > 0$, contradiciendo que el punto de equilibrio x^* tenía como soporte solamente al nodo $\{i\}$. \square

El siguiente teorema nos muestra que solamente los clanes sin objetivo²³ pueden ser soportes de puntos de equilibrios fijos.

Teorema 2.4. *Sea G una gráfica simple y dirigida y considérese el modelo CTLN asociado con W la matriz de relaciones entre neuronas y los parámetros arbitrarios $\varepsilon, \delta, \theta$, con $\varepsilon < 1$. Si σ es un clan de G entonces existe un punto de equilibrio estable*

²³Los clanes son conjuntos de nodos tales que cada nodo envía al resto de los nodos del conjunto y recibe de cada uno de ellos. Y decimos que un clan no tiene objetivo si no existe un nodo fuera del clan tal que reciba aristas de cada nodo del clan.

x^* del sistema con soporte σ si, y sólo si, σ no tiene objetivos.

Para la demostración de este teorema debemos de considerar antes la siguiente notación y lema. En [6] se define la siguiente matriz auxiliar.

Notación 2.4. $A = 11^T - I + W$ donde 11^T es la matriz de rango uno con entradas todas iguales a 1.

Con la notación anterior entonces podemos reescribir:

$$W_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{para } i=j \\ -1 + A_{ij} & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Lema 2.4. *Considérese el modelo CTLN con matriz de relación entre neuronas W y supóngase que x^* es un punto de equilibrio del modelo con soporte en un clan σ de G . Entonces x^* es un punto de equilibrio estable y además*

$$x_\sigma^* = \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\sigma|} 1_\sigma^{24}$$

Demostración. Si σ es un clan en G entonces $(-I + W)_\sigma = (-1 + \varepsilon)11^T - \varepsilon I_\sigma$. Esto ya que como cada nodo envía y recibe aristas del resto de los nodos de σ entonces las entradas $w_{ij} = -1 + \varepsilon$ cuando $i \neq j$ y -1 cuando $i = j$. Esta matriz tendrá con valores propios $|\sigma|(-1 + \varepsilon)\varepsilon$ y $-\varepsilon$. Estos son negativos para $0 < \varepsilon < 1$ por lo que se puede concluir que $(-I + W)_\sigma$ es estable y por lo tanto σ es un conjunto permitido. Cualquier punto de equilibrio x^* con soporte σ satisface la ecuación del punto de

²⁴Recordemos que ε, θ y σ deben cumplir estar dentro del rango legal.

equilibrio

$$x_\sigma^* = [W_\sigma x_\sigma^* + \theta 1_\sigma]_+.$$

Observemos que ya que $x_\sigma^* > 0$ podemos pasar por alto la no linealidad para obtener la restricción equivalente $(I - W_\sigma)x_\sigma^* = \theta 1_\sigma$. Nótese que esta ecuación tiene una solución única, comprobemos que $x_\alpha^* = \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\delta|}$ es solución.

$$(I - W_\sigma)x_\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \varepsilon & \cdots & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 & \cdots & 1 - \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - \varepsilon & 1 - \varepsilon & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\delta|} \\ \vdots \\ \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\delta|} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\delta|} (1 + (1 - \varepsilon) + \cdots + (1 - \varepsilon)) \\ \vdots \\ \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\delta|} ((1 - \varepsilon) + \cdots + (1 - \varepsilon) + 1) \end{pmatrix}$$

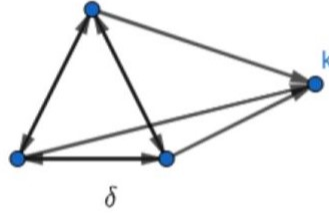
$$= \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\delta|} (|\delta| - \varepsilon(1 - \varepsilon)) 1_\delta$$

$$= \theta 1_\delta$$

□

Así podremos demostrar el teorema 2.4

Demostración. Teorema 2.4 \Rightarrow) Supongamos que x^* es un punto de equilibrio estable con soporte σ donde σ es un clan de G . Entonces $w_{ij} = -1 + \varepsilon$ para todas las parejas de nodos distintos de σ . Para probar que σ es un clan target free supongamos que σ tiene como blanco a $k \notin \sigma$. La siguiente imagen ilustra a δ con el v\u00e9rtice k que es blanco.



Esto implica que $w_{ki} = -1 + \varepsilon$ para cada $i \in \sigma$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} x_k^* &= \left[\sum_{i \in \sigma} w_{ki} x_i^* + \theta \right]_+ \\ &= \left[(-1 + \varepsilon) \sum_{i \in \sigma} x_i^* + \theta \right]_+ \end{aligned}$$

Por el lema anterior tenemos que $\sum_{i \in \sigma} x_i^* = \frac{\theta |\sigma|}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) |\sigma|}$. Entonces:

$$\begin{aligned} &= \left[(-1 + \varepsilon) \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) |\sigma|} + \theta \right]_+ \\ &= \left[\frac{\varepsilon \theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) |\sigma|} \right]_+ > 0. \end{aligned}$$

Esto contradice el hecho que $x_k^* = 0$ ya que $k \notin \sigma$. Por lo tanto podemos concluir que σ es un clan libre de blancos.

\Leftarrow) Supongamos ahora que σ es un clan target free. Por el lema anterior sabemos que si un punto de equilibrio x^* con soporte σ existe entonces éste debe ser único y estable con $x_\sigma^* = \frac{\theta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\sigma|} 1_\sigma$. Podemos afirmar que $x_i^* > 0$ para cada $i \in \sigma$. Para poder garantizar que x_σ^* es el punto de equilibrio basta comprobar que también satisface las desigualdades de apagado:

$$y_k = \sum_{i \in \sigma} w_{ki} x_i^* + \theta < 0 \quad (2.9)$$

Como σ es por hipótesis un clan libre de blanco para cada $k \notin \sigma$ existe un $i \in \sigma$ tal que no hay flecha del nodo i hacia el nodo k por lo que $w_{ki} = -1 - \delta$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \sigma} w_{ki} x_i^* + \theta &= \theta \left(\frac{-1 - \delta + (|\sigma| - 1)(-1 + \varepsilon)}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\sigma|} + 1 \right) \\ &= \frac{-\theta\delta}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)|\sigma|} < 0. \end{aligned}$$

Entonces x_σ^* además de ser punto de equilibrio del sistema lineal lo es también del sistema no lineal. \square

Como corolario del teorema 2.3 tenemos la siguiente regla.

Regla 3. *Los cliques que sean libres de blancos son soportes de puntos de equilibrio*

estables.

Obsérvese que un solo nodo $\{i\}$ es trivialmente un clan libre de blancos cuando no envía aristas a otros nodos, es decir cuando el nodo i es un pozo. En consecuencia de la regla anterior tenemos la siguiente regla.

Regla 4. *Un nodo $\{i\}$ es un soporte de un punto de equilibrio si, y sólo si, el nodo i es un pozo en G . En este caso es un punto de equilibrio estable.*

Como una consecuencia, utilizando la regla 2.2 junto con la regla anterior podemos concluir en las siguientes dos reglas.

Regla 5. *Sea σ un conjunto de nodos independientes. Entonces $\sigma \in FP(G)$ si, y sólo si, σ es unión de pozos.*

Regla 6. *Si k es un pozo en G y $\sigma \subseteq [n]$, entonces $\sigma \in FP(G)$ si, y sólo si $\sigma \cup \{k\} \in FP(G)$.*

De manera análoga podemos presentar el siguiente corolario como consecuencia contrapositiva del teorema 2.3

Corolario 2.2. *Si G es una gráfica orientada sin pozos entonces el sistema CTLN correspondiente no tiene puntos de equilibrio estables.*

Considerando que una fuente propia es la antítesis de los pozos las autoras presentan en [9] reglas opuestas a las de los pozos.

Regla 7. 1. *Si $i \in \sigma$ es una fuente propia en $G|_\sigma$ entonces $\sigma \notin FP(G)$.*

2. *Si i es una fuente propia en G entonces $FP(G) = FP(G \setminus \{i\})$.*

Para las siguientes reglas es importante tener presente la definición 2.10 de dominación y los tipos de dominación que se presentaron.

Regla 8. Sean $k, j \in [n]$ y $\sigma \subseteq [n]$. Supóngase que k domina dinámicamente a j con respecto a σ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

1. Si $j, k \in \sigma$ entonces $\sigma \notin FP(G|_\sigma)$ y así $\sigma \notin FP(G)$.
2. Si $j \in \sigma$ y $k \notin \sigma$ entonces $\sigma \notin FP(G|_{\sigma \cup \{k\}})$ y así $\sigma \notin FP(G)$.
3. Si $j \in \sigma$ y $k \in \sigma$ y $FP(G|_\sigma)$ entonces $\sigma \in FP(G|_{\sigma \cup \{i\}})$ y como consecuencia $\sigma \in FP(G)$.

La primera parte de esta regla nos dice que si hay algún tipo de dominación dentro de σ entonces σ no es un motivo permitido ni un soporte de $FP(G)$. La segunda parte de esta regla nos dice que si hay un nodo $j \in \sigma$ que sea dominado desde afuera de σ entonces σ no sobrevive para ser soporte de un punto de equilibrio de G , sin importar si σ es o no un motivo permitido. Finalmente la tercera parte de la regla implica que si la dominación es de adentro hacia afuera entonces σ sobrevive como soporte de punto de equilibrio y prueba que σ sea un motivo permitido. Es importante mencionar que la regla 2.8 es presentada como el teorema 3.9 en [8] junto con la prueba correspondiente. La siguiente regla corresponde con conjuntos con grados de entrada uniformes. Los siguientes lemas y teoremas son necesarios para la demostración de veracidad de esta regla.

Lema 2.5. Si σ tiene grado de entrada uniforme d , entonces $\sigma \in FP(G|_\sigma)$ y el punto

de equilibrio correspondiente x^* es uniforme con valores

$$x_i^* = \frac{\theta}{|\sigma| + \delta(|\sigma| - d - 1) - \varepsilon d}$$

para cada $i \in \sigma$.

Demostración. Comenzaremos esta prueba haciendo notar que como $G|_\sigma$ tiene grado de entrada uniforme entonces la suma de los renglones de $I - W_\sigma$ es igual. Esto implica que el vector 1_σ de puros unos es un vector propio de $I - W_\sigma$ asociado a un valor propio R que resulta ser igual a la suma del renglón. Ahora considérese el vector x^* que satisfaga que

$$x_i^* = \frac{\theta}{R}$$

para cada $i \in \sigma$, y x_k^* para cada $k \notin \sigma$. Entonces

$$(I - W_\sigma)x_\sigma^* = \theta 1_\sigma$$

y así x_σ^* es un punto de equilibrio de la red restringida a σ . Más aún, como todos los vértices en $G|_\sigma$ tienen grado de entrada d entonces cada renglón de W_σ tiene d términos con valor $-1 + \varepsilon$ y $|\sigma| - d - 1$ términos con valor $-1 - \delta$. Esto nos permite reescribir la suma del renglón como

$$R = 1 - \sum w_{1i} = |\sigma| + \delta(|\sigma| - d - 1) - \varepsilon d,$$

pasando a que $x_i^* = \frac{\theta}{|\sigma| + \delta(|\sigma| - d - 1) - \varepsilon d}$ para cada $i \in \sigma$. □

Lema 2.6. *Supóngase que σ tiene grado de entrada uniforme d , y supongamos que $j \in \sigma$ y $k \notin \sigma$. Sea d_k el número de aristas que k recibe de σ . Entonces $\sigma \in FP(G|_\sigma)$ y*

1. $k >_\sigma j$ si $d_k > d$

2. $j >_\sigma k$ si $d_k \leq d$.

Demostración. Sabemos por la regla de Cramer que $s_i^\sigma = \det(I - W_\sigma)x_i^*$. Entonces por el lema anterior $s_i^\sigma = s_j^\sigma$ para cada par $i, j \in \sigma$ con σ que tenga grado de entrada uniforme. Esto implica que $\sigma \in FP(G|_\sigma)$ y también nos permite factorizar $|s_i^\sigma|$ fuera de las sumas para comprobar dominación, así que $k >_\sigma j$ si, y sólo si $\sum_{i \in \sigma} w_{ki} > \sum_{i \in \sigma} w_{ji}$. Ahora observe que

$$\sum_{i \in \sigma} = d_k(-1 + \varepsilon) + (|\sigma| - d_k)(-1 - \delta)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \sigma} w_{ji} &= d(-1 + \varepsilon) + (|\sigma| - d - 1)(-1 - \delta) - 1 \\ &= d(-1 + \varepsilon) + (|\sigma| - d)(-1 - \delta) + \delta \end{aligned}$$

como $j \in \sigma$ y $w_{jj} = 0$. En particular, si $d_k = d$ entonces tendremos $\sum_{i \in \sigma} w_{ki} < \sum_{i \in \sigma} w_{ji}$ así que $j >_\sigma k$. □

Regla 9. *Supóngase que σ tiene grado de entrada uniforme. Entonces $\sigma \in FP(G)$ si, y sólo si, σ es libre de blancos.*

Finalmente presentamos un resumen de todas las reglas de análisis gráfico que se

presentaron.

Reglas de análisis gráfico.

1. El número de soportes de un sistema CTLN debe ser impar.
2. Un subconjunto σ pertenece al conjunto de soportes de un sistema CTLN con gráfica G si, y solo si,
 - a) $\sigma \in FP(G|_\sigma)$
 - b) Para cada $k \notin \sigma$ se tiene $\sigma \in FP(G|_{\sigma \cup \{k\}})$
3. Los clanes que sean libres de blancos son soportes de puntos de equilibrios estables.
4. Un nodo $\{i\}$ es soporte de un punto de equilibrio si, y solo si, es un pozo en G .
5. Sea σ un conjunto de nodos independientes. Entonces $\sigma \in FP(G)$ si, y solo si, σ es la unión de pozos.
6. Si k es un pozo en G y $\sigma \subseteq [n]$, entonces $\sigma \in FP(G)$ si, y solo si, $\sigma \cup \{k\} \in FP(G)$.
7.
 - a) Si $i \in \sigma$ es una fuente propia en $G|_\sigma$ entonces $\sigma \notin FP(G)$.
 - b) Si i es una fuente propia en G entonces $FP(G) = FP(G \setminus \{i\})$.
8. Sean $k, j \in [n]$ y $\sigma \subseteq [n]$. Supóngase que k domina dinámicamente a j con respecto a σ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones
 - a) Si $j, k \in \sigma$ entonces $\sigma \notin FP(G|_\sigma)$ y así $\sigma \notin FP(G)$.
 - b) Si $j \in \sigma$ y $k \notin \sigma$ entonces $\sigma \notin FP(G|_{\sigma \cup \{k\}})$ y así $\sigma \notin FP(G)$.

c) Si $j \in \sigma$ y $k \in \sigma$ y $FP(G|_\sigma)$ entonces $\sigma \in FP(G|_{\sigma \cup \{i\}})$ y como consecuencia $\sigma \in FP(G)$.

9. Supóngase que σ tiene grado de entrada uniforme. Entonces $\sigma \in FP(G)$ si, y sólo si, σ es target-free.

2.4. Ejemplos de análisis

En esta sección presentaremos un par de ejemplos para ilustrar el análisis con las reglas presentadas en la sección anterior.

2.4.1. Ejemplo A

Consideremos el sistema CTLN dado por la siguiente gráfica A.

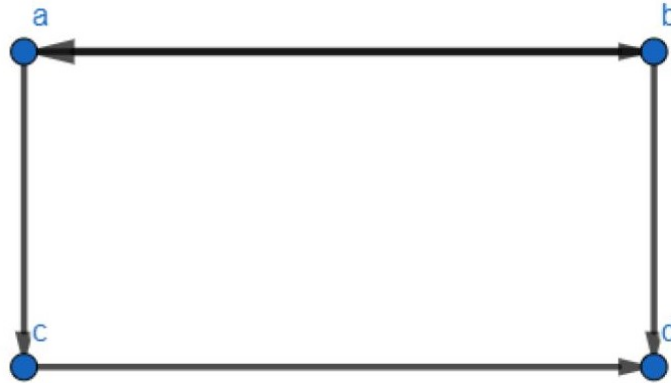


Figura 2.3: Gráfica ejemplo A

Los grados de entrada y de salida están dados en la siguiente tabla

Nodo	Grado de entrada	Grado de salida
a	1	2
b	1	2
c	1	1
d	2	0

Observemos que en este caso el nodo d es el único pozo del sistema y por la regla 4 el singulete $\{d\}$ es el único soporte de un sólo nodo. Luego $\{a, b\}$ es un clan y como el nodo d solo recibe de b y c sólo recibe de a podemos decir que es target free por lo que $\{a, b\} \in FP(A)$ por la regla 3. Los conjuntos independientes $\{a, d\}$ y $\{b, c\}$ no son uniones de pozos por lo que no pueden ser soportes, mientras que las parejas $\{a, c\}$ y $\{b, d\}$ tienen a a y b respectivamente como fuentes propias por lo que tampoco pueden ser soportes. El conjunto $\{a, b, d\}$ tiene grado de entrada uniforme 1 y además c no es blanco ya que sólo recibe arista del nodo a así que por la regla 9 tendremos que $\{a, b, d\}$ es un soporte de $FP(A)$. Es necesario hacer notar la diferencia con el subconjunto $\{a, b, c\}$ que también tiene grado de entrada uniforme pero en este caso d sería un target tal que las entradas que entren a este nodo son de mayor cantidad que el grado de entrada del conjunto, así que $\{a, b, c\} \notin FP(A)$. Tampoco el subconjunto $\{b, c, d\}$ es elemento de $FP(A)$ ya que b y c son fuentes propias en $G|_{\{b, c, b\}}$. Entonces hasta ahora $FP(A)$ contiene 3 subconjuntos: $\{d\}$, $\{a, b\}$, y $\{a, b, d\}$. Por la regla 1 de paridad tenemos que $\{a, b, c, d\} \notin FP(A)$.

$$FA(A) = \{\{d\}, \{ab\}, \{a, b, d\}\}$$

Para este sistema se hará la notación de subíndices σ_1 para el punto de equilibrio con

soporte $\{d\}$, σ_2 para el punto de equilibrio con soporte $\{a, b\}$, y σ_3 para el punto de equilibrio $\{a, b, d\}$

Esto nos indica en que sección del plano \mathbb{R}^4 se encontrarán los puntos de equilibrio.

2.4.2. Ejemplo B

La siguiente gráfica se le conoce como Gráfica Mariposa y la denotaremos por M .

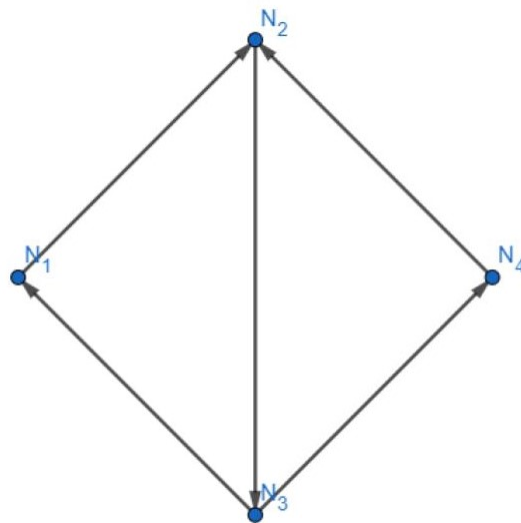


Figura 2.4: Gráfica ejemplo B

Los grados de entrada y de de salida están dados en la siguiente tabla

Nodo	Grado de entrada	Grado de salida
1	1	1
2	2	1
3	1	2
4	1	1

Observemos que ninguno de los nodos de la gráfica M es un pozo por lo que ningún singulete o conjunto independiente de los nodos será soporte de un punto de equilibrio. La gráfica M no contiene aristas multidireccionales por lo que para las parejas de nodos que no sean independientes tendremos que al restringir la gráfica a la pareja uno de los nodos será fuente propia por lo que tampoco tendremos parejas de nodos como soportes.

La gráfica mariposa contiene dos 3 ciclos $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 3, 4\}$ que tienen grado de entrada uniforme igual a uno. Ninguno de estos ciclos tienen algún nodo externo que reciba dos o más aristas por lo que ambos son libres de blancos y soportes de un punto de equilibrio. Cualquier otra terna de nodos que no sean los 3-ciclos definen una subgráfica al restringir G que contiene un nodo que resulta ser una fuente propia, así que no son elementos de $FP(M)$. Finalmente, por la regla 1 de paridad tenemos que $|FP(M)|$ debe ser impar, por lo que el conjunto total de nodos $\{1, 2, 3, 4\}$ es también soporte de un punto de equilibrio. Así $FP(M) = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Capítulo 3

El arreglo de hiperplanos dado por

$$y_i = 0$$

En este capítulo presentaremos algunos resultados asociados a las regiones y_i con $i \in [n]$ que presentamos en los capítulos anteriores.

Recordemos que dada una digráfica G , que define un sistema CTLN con matriz de incidencia W . Vamos a considerar el valor estándar $\theta = 1$:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + \max\left\{\sum_{j \in [n]} w_{1j}x_j + \theta, 0\right\}$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = -x_n + \max\left\{\sum_{j \in [n]} w_{nj}x_j + \theta, 0\right\}$$

definimos

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{j \in [n]} w_{1j} x_j + \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
y_n &= \sum_{j \in [n]} w_{nj} x_j + 1
\end{aligned}$$

para cada uno de los $i \in [n]$.

Observemos que cada uno de los hiperplanos y_i particiona al espacio \mathbb{R}^n en dos regiones: donde $y_i < 0$ y donde $y_i > 0$. Así tendremos 2^n regiones de \mathbb{R}^n que podemos etiquetar utilizando un vector de signos donde la i -ésima coordenada está definida positiva si $y_i > 0$ y negativa en caso contrario, es decir que $y_i \leq 0$. Los siguientes son resultados referentes a la región de signos negativos.

Proposición 3.1. *Las trayectorias en la región correspondiente al vector $(-, \dots, -)$, cuando $y_i \leq 0$ para cada $i \in [n]$, son rayos que siempre tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración. La región correspondiente al vector de signos $(-, \dots, -)$ define el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= -x_n.
\end{aligned}$$

Que tiene como conjunto de soluciones

$$\{c_1e^{-t}, c_2e^{-t}, \dots, c_ne^{-t}\}$$

Observemos que independientemente de los valores que tomen las constantes c_i la gráfica de e^{-t} tiende a cero cuando t crece hacia infinito. Entonces cada una de las soluciones se irá a cero. Así tenemos que los puntos de equilibrio ocurren cuando $x_i = 0$ que es el origen. Tenemos que la matriz definida por el sistema será la que tenga -1 en la diagonal y cero en el resto de las entradas así tendremos que el valor propio de esta matriz será $\lambda = -1$ con multiplicidad n^1 . Esto implica que se tiene valores propios reales negativos iguales, por lo que la clasificación de puntos de equilibrio nos asegura que el origen será un punto de equilibrio atractor con trayectorias que tienden hacia él. □

Proposición 3.2. *Toda solución con valores iniciales en la región $(-, \dots, -)$, donde $y_i \leq 0$, se sale de esta región.*

Demostración. Como se mencionó en la prueba anterior la región con vector $(-, \dots, -)$ define las ecuaciones $\frac{dx_i}{dt} = -x_i$.

Observemos que el origen no se encuentra en ésta región. Esto ya que para este punto cada una de las sumas

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta = \sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + 1 = \sum_{j=1}^n 1 > 0 \quad (3.1)$$

¹Donde n es el número de nodos del sistema.

ya que $\theta > 0$. Podemos concluir que en el origen $\max\{y_i, 0\} = y_i$ y que el origen es un elemento de la región donde cada y_i es positivo. Por la proposición anterior sabemos que sin importar los valores iniciales de las trayectorias en la región del ortante negativo, cuando $y_1 < 0, y_2 < 0, \dots, y_n < 0$, estos son rayos que tienden al origen que se encuentra fuera de esa región. \square

3.1. Ejemplos de dos neuronas.

En los siguientes ejemplos mostraremos como se comportan las regiones donde $y_i < 0$ para cada $i \in [n]$. Para términos prácticos utilizaremos los valores estándar propuestos: $\varepsilon = 0,5, \delta = 0,25$ y $\theta = 1$.

Ejemplo 3.1. *Sea el sistema CTLN definido por dos neuronas $\{1, 2\}$ sin una arista entre ellas:*



Figura 3.1: Dos neuronas sin arista entre ellas

Utilizando los valores estándar se define la matriz de incidencia:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\left\{1 - \frac{3}{2}x_2, 0\right\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\left\{1 - \frac{3}{2}x_1, 0\right\}.\end{aligned}$$

Observemos que en este ejemplo las funciones $y_1 = 0$ y $y_2 = 0$ son

$$\begin{aligned}y_1(x_1, x_2) &:= 1 - \frac{3}{2}x_2 \\ y_2(x_1, x_2) &:= 1 - \frac{3}{2}x_1.\end{aligned}$$

Estas se pueden mostrar en la siguiente figura 3.2.

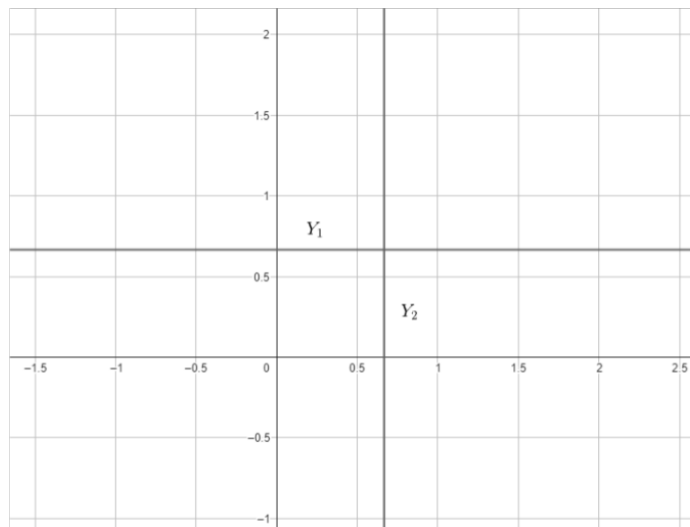


Figura 3.2: Líneas $y_1 = 0$ y $y_2 = 0$

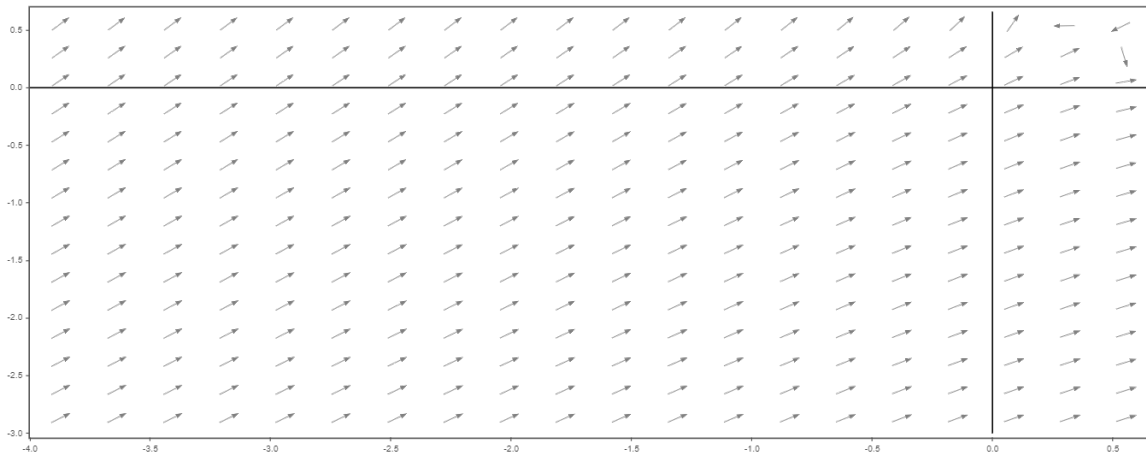
Es importante hacer notar que en el origen $y_1(0, 0) = 1 > 0$ y $y_2(0, 0) = 1 > 0$. En

general para cualquier $i \in [n]$ se va a tener que en el origen $y_i(0, 0) = 1 > 0$ por lo que éste siempre se va a encontrar dentro de la región donde todos los y_i son positivos. Regresando al ejemplo, la matriz asociada al sistema lineal de CTLN donde $y_i > 0$ para cada i es:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene como valores propios $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$. El punto de equilibrio de este sistema se encuentra en $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ que es un punto en la región $(+, +)$. Este punto de equilibrio es hiperbólico. En la siguiente imagen 3.1 podemos observar el campo vectorial asociado al sistema lineal:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 - \frac{3}{2}x_1 + 1 \end{aligned}$$



En la figura 3.3 se muestra el plano fase de este sistema.

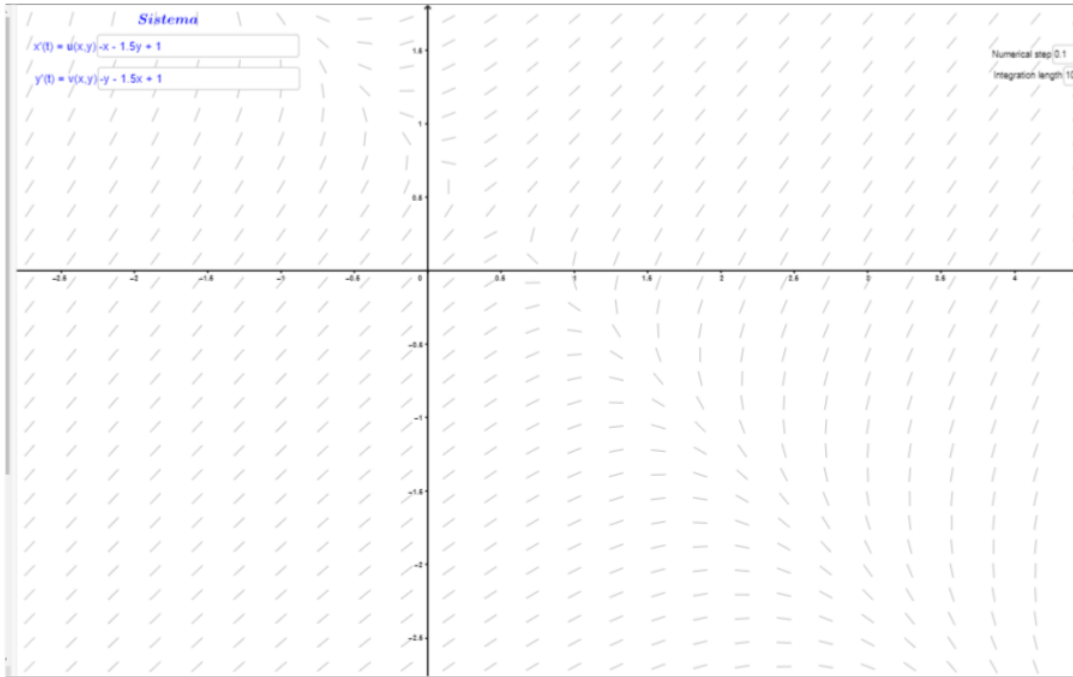


Figura 3.3: Plano fase de la región (+,+)

Este sistema lineal coincide con el CTLN cuando $y_1 > 0$ y $y_2 > 0$. Esto sucede si, y sólo si, cuando $\frac{2}{3} > x_2$ y $\frac{2}{3} > x_1$ al mismo tiempo. Esta región se puede describir como

$$R_{(+,+)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < \frac{2}{3}, x_2 < \frac{2}{3}\} \quad (3.2)$$

Veamos que sucede con las regiones $(+, -)$ y $(-, +)$. Estas regiones se definen como:

$$R_{(+,-)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > \frac{2}{3}, x_2 \leq \frac{2}{3}\}$$

$$R_{(-,+)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq \frac{2}{3}, x_2 > \frac{2}{3}\}$$

Es preciso hacer la observación que son regiones que definen sistemas simétricos.

Mientras que en la región $(+, -)$ tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 \end{aligned}$$

en la región $(-, +)$ se mantiene el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 - \frac{3}{2}x_1 + 1. \end{aligned}$$

En la región $R_{(+,-)}$ el punto de equilibrio es $(1, 0)$ que se encuentra en la región. El

sistema de ecuaciones define la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene $\lambda = -1$ como valor propio y con multiplicidad 2. En la figura 3.4 se muestra el plano fase de la región donde se aprecia que las trayectorias tienden al punto de

equilibrio.

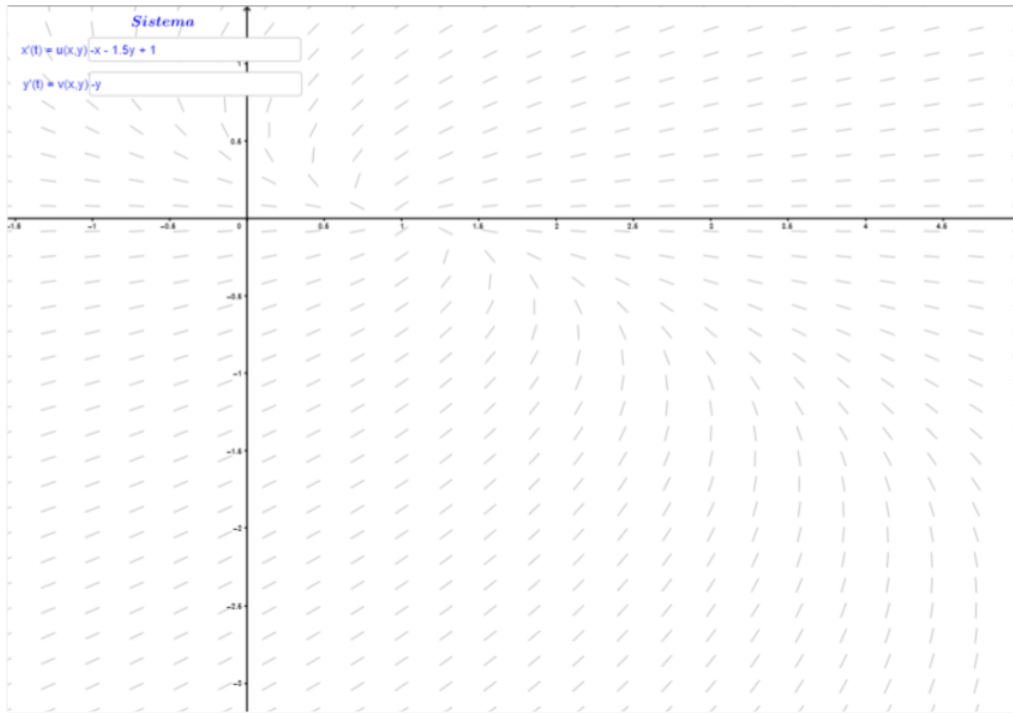


Figura 3.4: Plano fase región $(+, -)$

En la región $R_{(-,+)}$ el punto de equilibrio es $(0, 1)$ que se encuentra en la región.

El sistema de ecuaciones define la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

que de igual manera tiene valor propio $\lambda = -1$ de multiplicidad 2. En la siguiente figura, 3.5, se muestra el plano fase de la región.

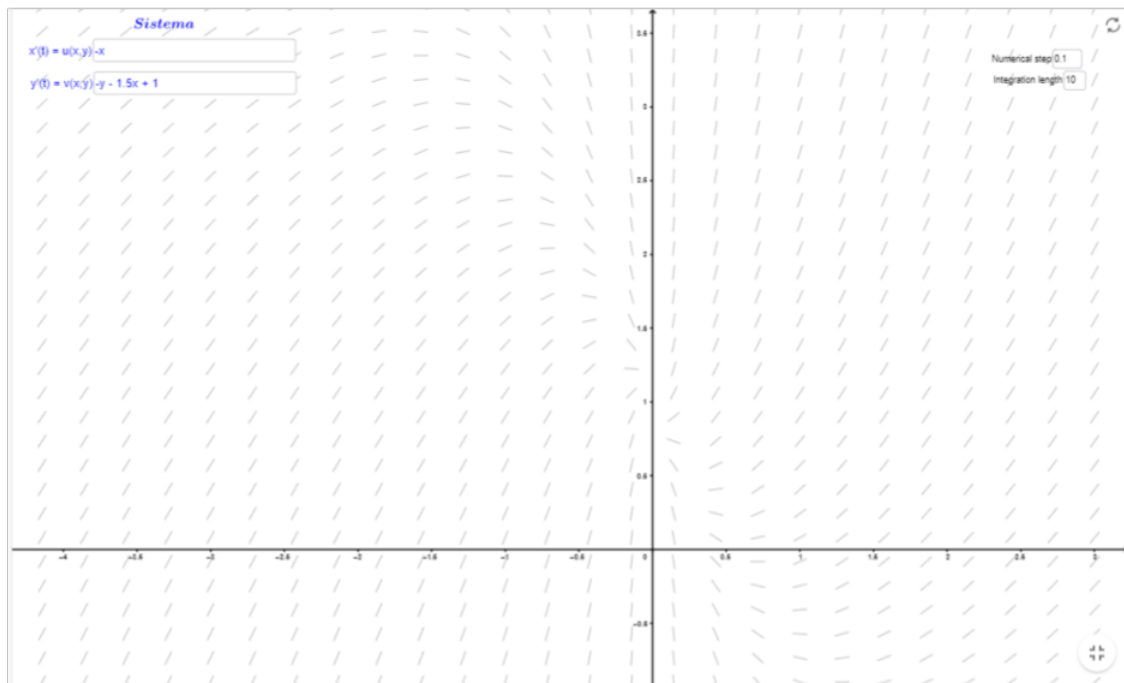


Figura 3.5: Plano fase región $(-, +)$

Ejemplo 3.2. Consideremos el sistema CTLN definido por dos neuronas $\{1, 2\}$ con una arista entre ellas. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{1, 2\}$, donde 1 es una fuente propia. Así como se muestra en la siguiente 3.6

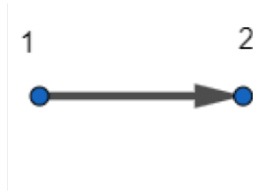


Figura 3.6: Dos neuronas con una fuente propia

En este caso tenemos que el sistema CTLN será:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\{1 - \frac{3}{2}x_2, 0\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\{1 - \frac{3}{4}x_1, 0\}\end{aligned}$$

En este ejemplo tenemos que las líneas y_i , con $i = 1, 2$, están dadas como:

$$\begin{aligned}y_1 &:= 1 - \frac{3}{2}x_2 = 0 \\ y_2 &:= 1 - \frac{3}{4}x_1 = 0\end{aligned}$$

Estas se pueden mostrar en la siguiente figura 3.7:

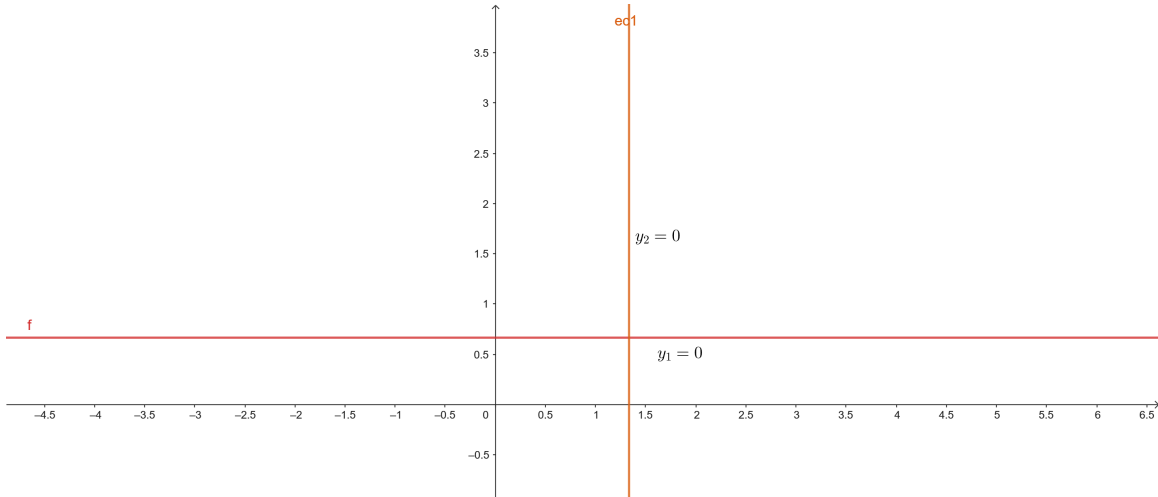


Figura 3.7: rectas $y_1 = 0$ y $y_2 = 0$

Las regiones entonces las podemos definir como siguen:

$$R_{(+,+)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < \frac{4}{3}, x_2 < \frac{2}{3}\}$$

$$R_{(-,-)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq \frac{4}{3}, x_2 \geq \frac{2}{3}\}$$

$$R_{(+,-)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < \frac{4}{3}, x_2 \geq \frac{2}{3}\}$$

$$R_{(-,+)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq \frac{4}{3}, x_2 < \frac{2}{3}\}$$

Región $R_{(+,+)}$

En ésta región el sistema CTLN que se define es:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 - \frac{3}{4}x_2 + 1 \end{aligned}$$

La matriz asociada al sistema lineal de CTLN donde $y_i > 0$ para cada i es:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene como valores propios $\lambda = \frac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{4}$. El punto de equilibrio, que es $(4, -2)$, será hiperbólico. Sin embargo, este punto se encuentra fuera de la región.

La región donde el sistema lineal definido coincide con el sistema CTLN es cuando $y_1 > 0$ y $y_2 > 0$, es decir cuando $x_2 < \frac{2}{3}$ y $x_1 < \frac{4}{3}$ al mismo tiempo. En la figura 3.8 se muestra el plano fase de ésta región.

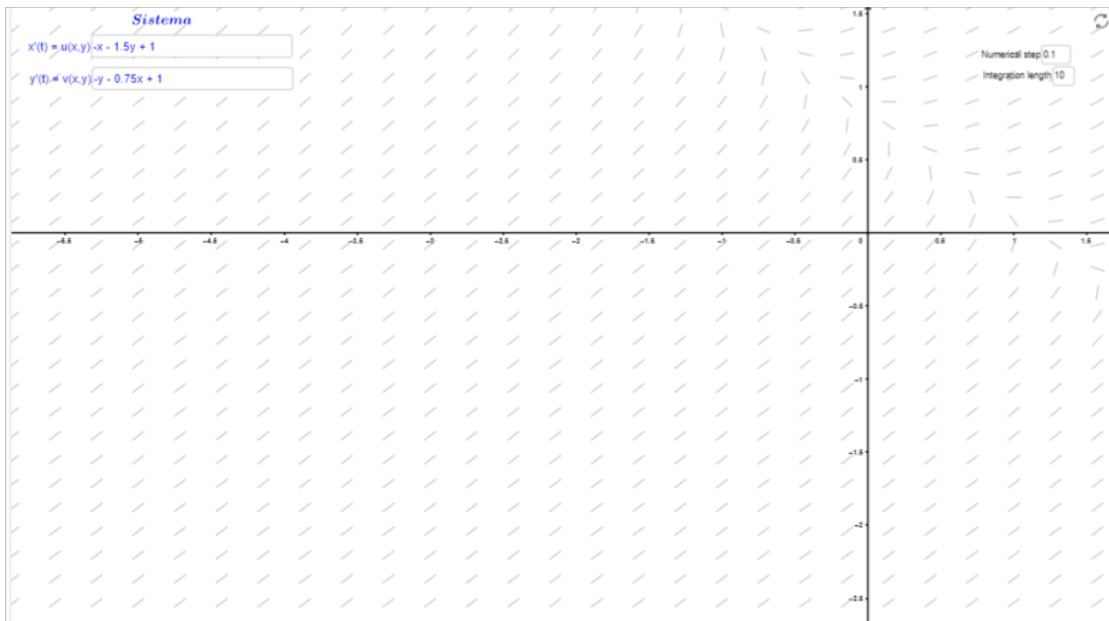


Figura 3.8: Plano fase región $R_{(+,+)}$

Por las proposiciones que demostramos anteriormente sabemos que en la región $R_{(-,-)}$ se cumple que el punto de equilibrio es el origen y que se encuentra fuera de ésta región. Además de que las trayectorias con condiciones iniciales en esa región se salen hacia $R_{(+,+)}$.

Región $R_{(+,-)}$

El sistema que define esta región es:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 1 \quad (3.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 \quad (3.4)$$

que define como matriz del sistema: $M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que tiene como valor propio

$\lambda = -1$ con multiplicidad 2. El punto de equilibrio de este sistema resulta ser $(1, 0)$

que se encuentra fuera de la región, se encuentra en $R_{(+,+)}$. El plano fase del sistema

definido en esta región se muestra en 3.9.

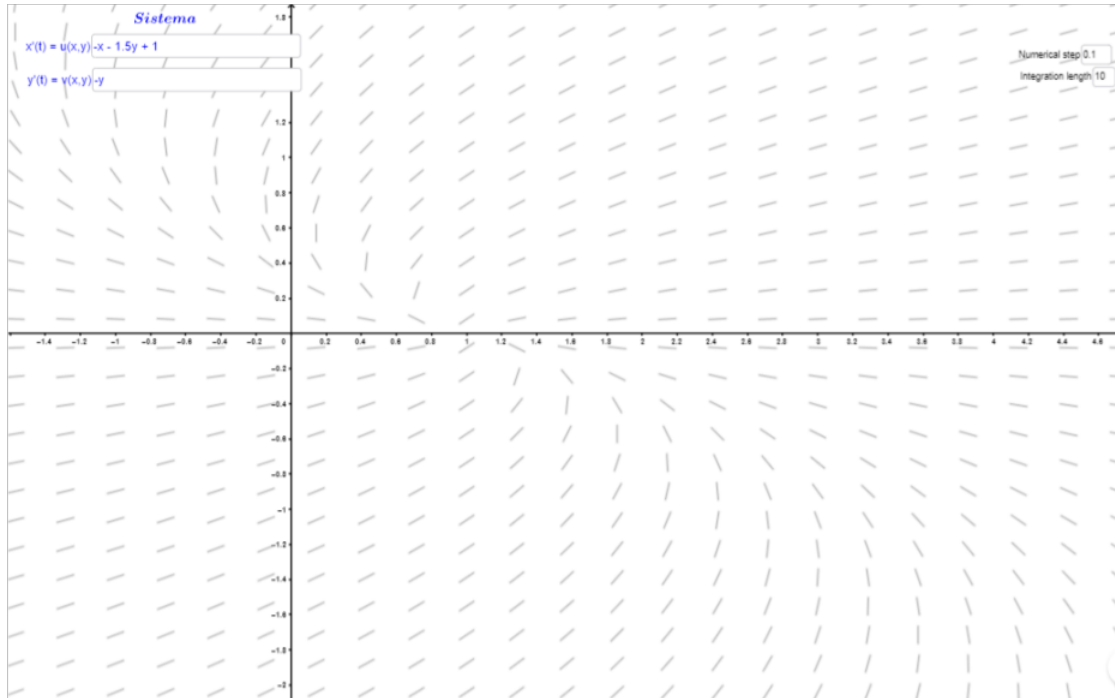


Figura 3.9: Plano fase de la región $R_{(+,-)}$

Región $R_{(-,+)}$

A diferencia del ejemplo anterior en este caso las regiones $R_{(+,-)}$ y $R_{(-,+)}$ no son simétricas. En esta región el sistema que predomina es:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 \tag{3.5}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - \frac{3}{4}x_1 + 1. \tag{3.6}$$

El punto de equilibrio del sistema de esta región es $(0, 1)$ que si se encuentra en la

región. La matriz del sistema $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}$ tiene como valor propio $\lambda = -1$ con multiplicidad 2. Así el punto de equilibrio resulta ser un punto de equilibrio estable.

Esto se puede apreciar en 3.10.

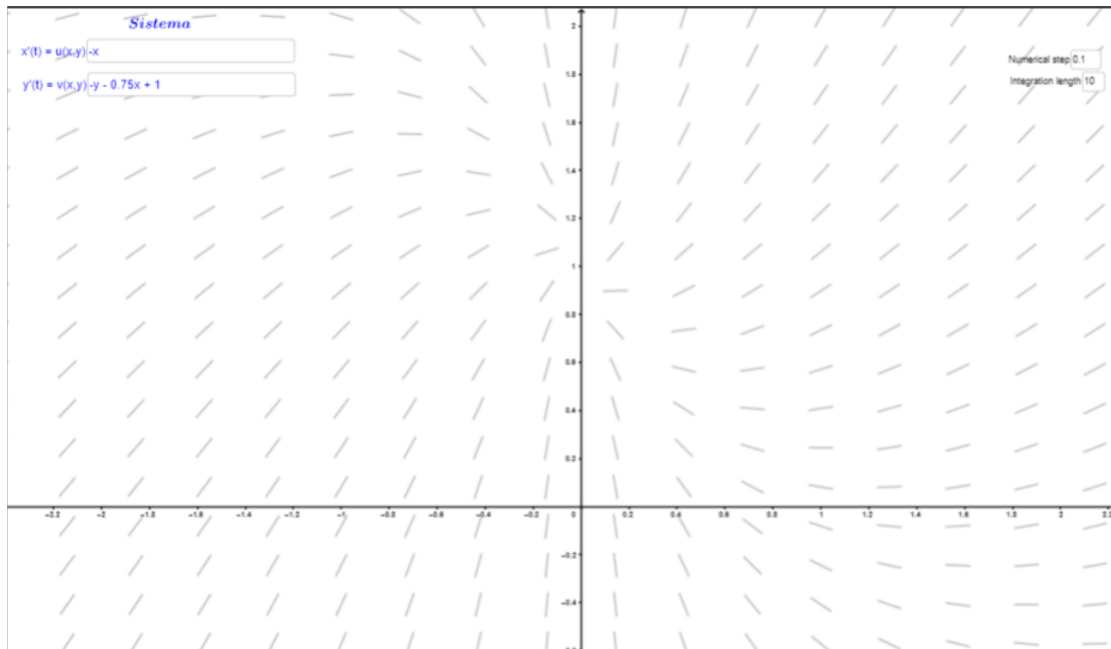


Figura 3.10: Plano fase de la región $R_{(-,+)}$.

Ejemplo 3.3. Consideremos el sistema CTLN definido por dos neuronas $\{1,2\}$ con una arista bidireccional entre ellas. Como se muestra en 3.11



Figura 3.11: Dos neuronas con arista bidireccional

Este define el sistema con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\{1 - \frac{3}{4}x_2, 0\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\{1 - \frac{3}{4}x_1, 0\}\end{aligned}$$

En este ejemplo tenemos que las rectas $y_i = 0$, con $i = 1, 2$, están dadas como:

$$\begin{aligned}y_1 &:= 1 - \frac{3}{4}x_2 \\ y_2 &:= 1 - \frac{3}{4}x_1\end{aligned}$$

Entonces las regiones definidas en este sistema serán las siguientes.

$$\begin{aligned}R_{(+,+)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < \frac{4}{3}, x_2 < \frac{4}{3}\} \\ R_{(-,-)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq \frac{4}{3}, x_2 \geq \frac{4}{3}\} \\ R_{(+,-)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < \frac{4}{3}, x_2 \geq \frac{4}{3}\} \\ R_{(-,+)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq \frac{4}{3}, x_2 < \frac{4}{3}\}\end{aligned}$$

En la figura 3.12 se observan las rectas y_i .

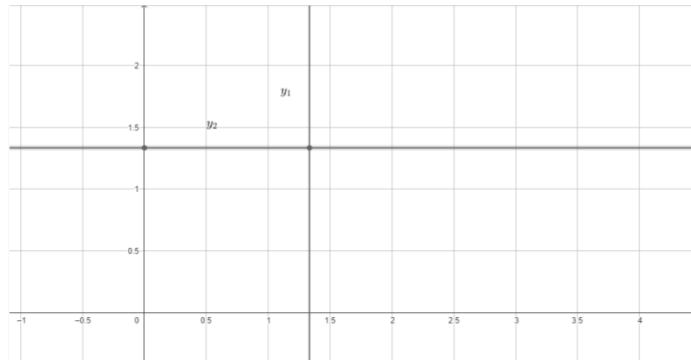
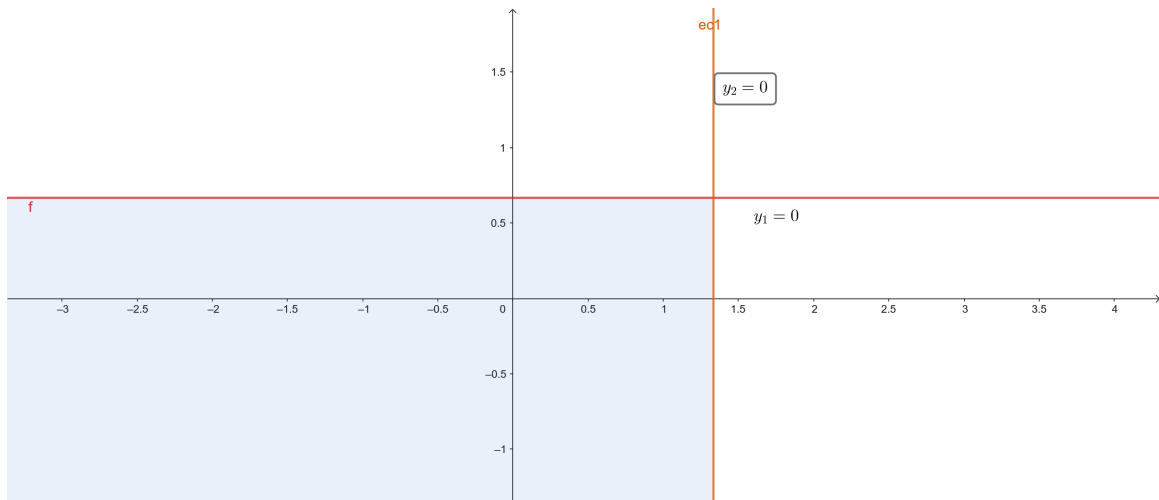


Figura 3.12: Rectas $y_1 = 0$ y $y_2 = 0$

Región $R_{(+,+)}$

En la zona coloreada de la siguiente imagen 3.1 se ilustra la región con estas características



En esta región se mantiene el sistema:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - \frac{3}{4}x_1 + 1 \quad (3.8)$$

La matriz asociada al sistema lineal de CTLN donde los $y_i > 0$ para cada $i \in [n]$ es

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene como valores propios $\lambda_1 = -\frac{7}{4}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. El punto de equilibrio del sistema lineal CTLN donde $y_i > 0 \forall i$ es $(\frac{4}{7}, \frac{4}{7})$ y es asintóticamente estable y se encuentra en la región analizada. En la figura 3.13 se puede apreciar el plano fase del sistema de esta región.

Región $R_{(-,-)}$

El sistema de esta región sería:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 \quad (3.9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 \quad (3.10)$$

que por las proposiciones demostradas en el inicio de esta sección ya sabemos que el origen es su punto de equilibrio pero que no se encuentra en ésta región, además que las trayectorias con condiciones iniciales en $R_{(-,-)}$ son rayos que tienden al origen.

Región $R_{(+,-)}$

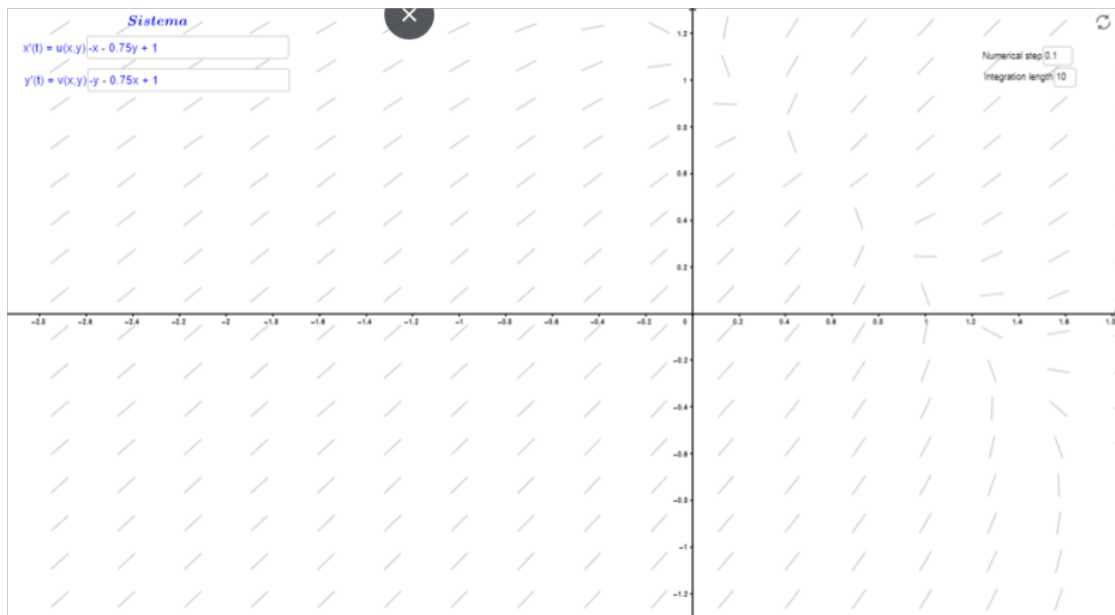


Figura 3.13: Plano fase región $R_{(+,+)}$

En esta región se mantiene el sistema lineal

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 1 \quad (3.11)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 \quad (3.12)$$

Que tiene punto de equilibrio $(1, 0)$ que si se encuentra en esta región. Como la matriz definida por este sistema tiene valores propios $\lambda = -1$ con multiplicidad dos tendremos que el punto de equilibrio será asintóticamente estable. En la figura 3.14 se muestra el plano fase de esta región.

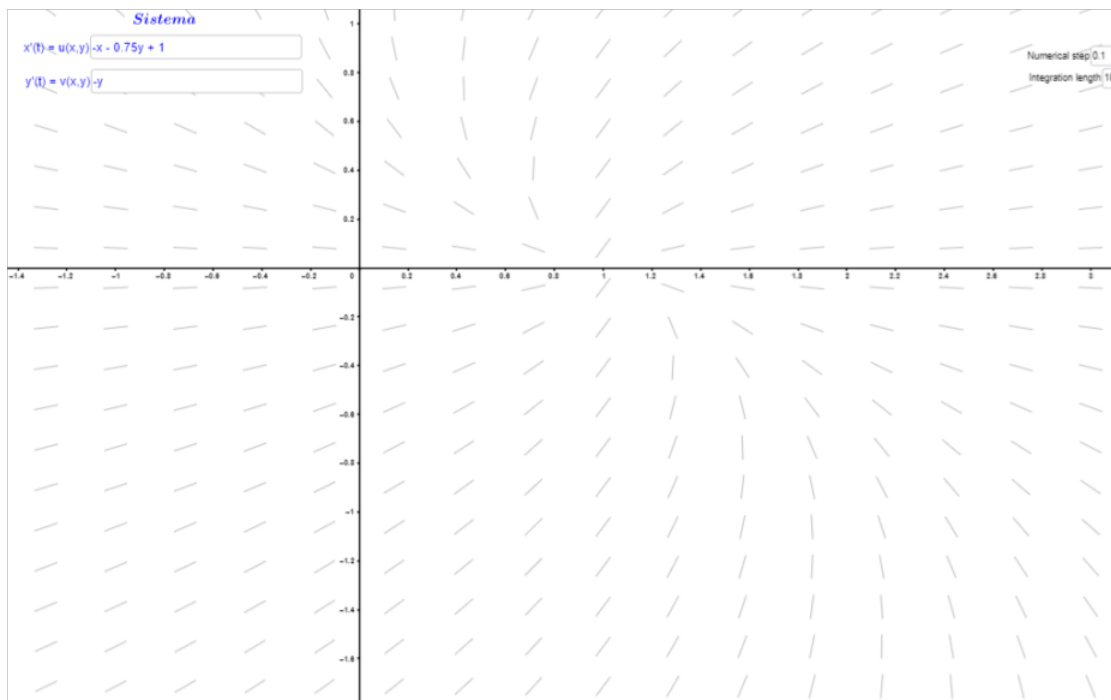


Figura 3.14: Plano fase de la región $R_{(+,-)}$

Región $R_{(-,+)}$

Como en el ejemplo 3.1 tenemos que las regiones $R_{(+,-)}$ y $R_{(-,+)}$ son en efecto simétricas. En esta región el sistema lineal con el que nos quedamos es

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 \tag{3.13}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - \frac{3}{4}x_1 + 1 \tag{3.14}$$

Este sistema tiene como punto de equilibrio el $(0, 1)$ que si se encuentra en esta región. Además que la matriz definida por este sistema tiene como valor propio $\lambda = -1$ de multiplicidad 2. En la siguiente figura 3.15 podemos observar el comportamiento del plano fase.

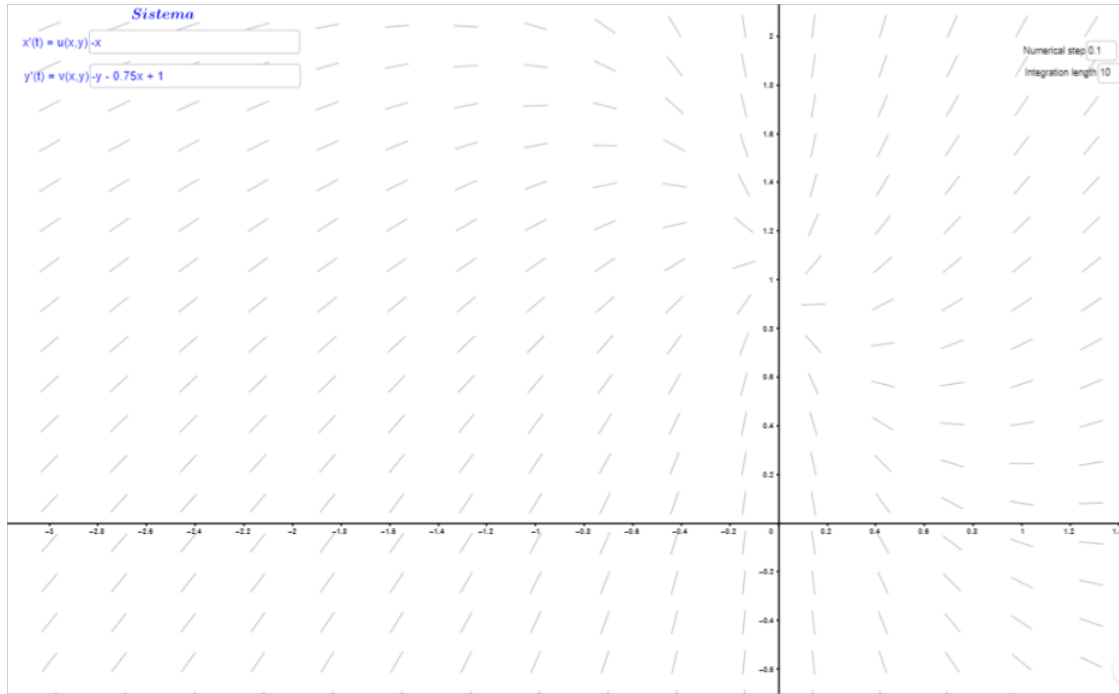


Figura 3.15: Plano fase de la región $R_{(-,+)}$

Capítulo 4

El arreglo de las isoclinas $G_i = 0$

Vamos a describir aquellas regiones donde $\frac{dx_i}{dt} \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$ y $y_i > 0$. Las hipersuperficies G_i estarán dados por las ecuaciones

$$G_i := -x_i + \max\{y_i, 0\} = 0.$$

Esto se puede reescribir como

$$x_i = \max\{y_i, 0\}$$

donde $y_i = \sum_{j \in [n]} w_{ij} x_j + 1$.

Como se mostrará en los ejemplos las gráficas de las curvas correspondientes en realidad serán curvas poligonales, es decir, unión de rectas, de planos o de hiperplanos dependiendo del número de nodos del sistema. De manera análoga a los hiperplanos y_i tendremos que las hipersuperficies G_i dividen al espacio \mathbb{R}^n en regiones donde $\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \max\{y_i, 0\}$ es positivo o negativo.

Observemos que al evaluar el sistema de ecuaciones de cualquier CTLN en el origen resulta que $\frac{dx_i}{dt}(0) = 1$ para todo $i \in [n]$ por lo que el origen se va a encontrar siempre en la región donde $G_i > 0$ para todas las i en el conjunto de neuronas.

4.0.1. Ejemplos de dos neuronas

Ejemplo 4.1. *Como el ejemplo 3.1 vamos a considerar el sistema CTLN dado por dos neuronas $\{1, 2\}$ sin aristas entre ellas.*

Como se mencionó anteriormente que el sistema CTLN definido en este caso es

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\{1 - \frac{3}{2}x_2, 0\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\{1 - \frac{3}{2}x_1, 0\}.\end{aligned}$$

Así que, por la definición de las hipersuperficies G_i , en este caso tenemos que G_1 sería la unión de rectas $-x_1 + \max\{-\frac{3}{2}x_2 + 1, 0\} = 0$ y G_2 la unión de rectas $-x_2 + \max\{-\frac{3}{2}x_1 + 1, 0\} = 0$. G_1 coincide con la parte del eje x_2 que está del punto $(0, 2/3)$ hacia arriba, y corta al eje x_1 en $(1, 0)$. Mientras que G_2 corta a los ejes x_1 y x_2 en los puntos $(0, 1)$ y $(\frac{2}{3}, 0)$ respectivamente.

Observemos que cuando $1 - \frac{3}{2}x_2 = 0$ entonces $x_2 = \frac{2}{3}$. Entonces tenemos los siguientes dos casos:

- Si $x_2 > \frac{2}{3}$ entonces $x_1 = 0$

- Si $x_2 < \frac{2}{3}$ entonces $x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2$.

De manera análoga cuando $1 - \frac{3}{2}x_1 = 0$ entonces $x_1 = \frac{2}{3}$. Así se presentan dos casos:

- Si $x_1 > \frac{2}{3}$ entonces $x_2 = 0$
- Si $x_1 < \frac{2}{3}$ entonces $x_2 = 1 - \frac{3}{2}x_1$.

Esto se puede observar en las siguientes imágenes:

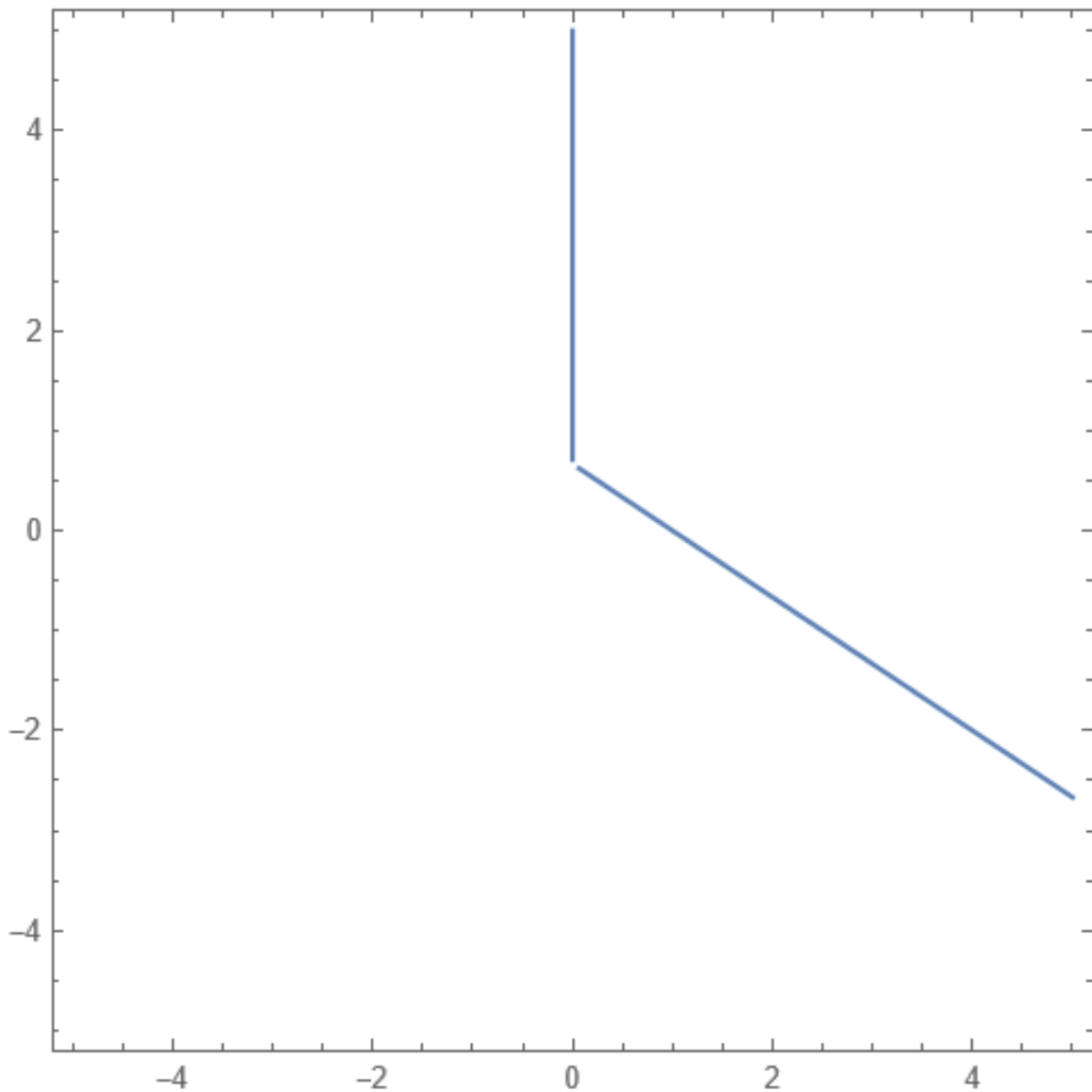


Figura 4.1: La gráfica $G_1 = 0$

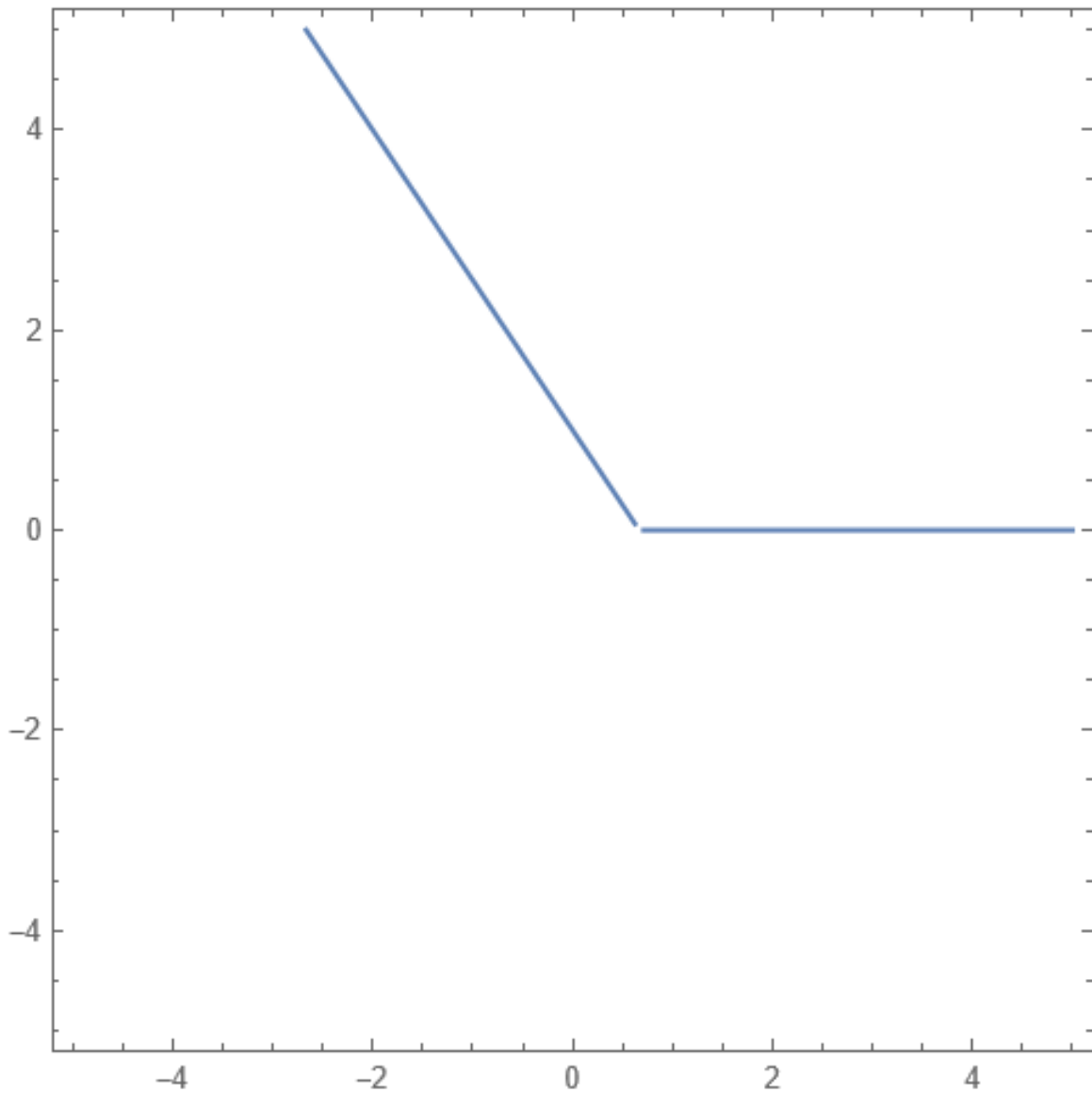


Figura 4.2: La gráfica $G_2 = 0$

Ambas gráficas tienen su intersección en el punto $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ que se encuentra dentro de la región $(+, +)$. Entonces los puntos $A = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, $B = (0, \frac{2}{3})$ y $C = (\frac{2}{3}, 0)$ junto con el origen forman una figura de cuatro lados dentro de la región de todos positivos. Tenemos que el origen se encuentra tanto en la parte positiva de los y_i como en la parte positiva de los G_i . En este caso en particular el punto de intersección de G_1 y

G_2 cae dentro de la frontera de la región $(+, \dots, +)$.

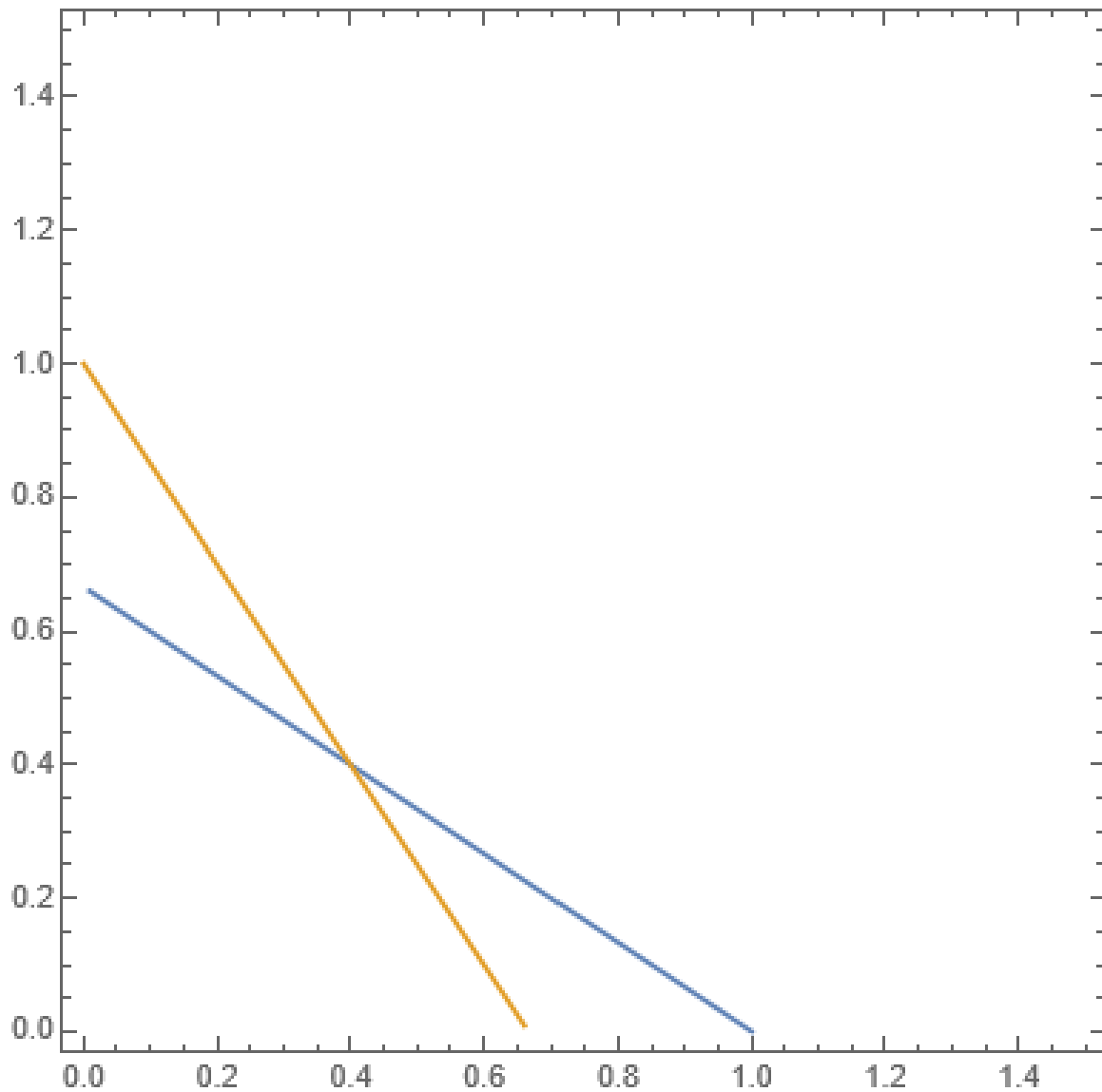


Figura 4.3: G_1 y G_2 en la región $(+, +)$

Sean el punto A como el origen, B el punto de intersección entre el eje x_1 y G_1 , C el punto de intersección entre el eje x_1 y G_2 y D el punto de intersección entre G_1 y G_2 . Es importante hacer notar que definimos los puntos B y D dependiendo de

su cercanía al origen sobre los respectivos ejes. En este caso los puntos A, B, C y D forman un cuadrilátero.

Ejemplo 4.2. Como en el ejemplo 3.2 vamos a considerar el sistema CTLN definido por dos neuronas $\{1, 2\}$ y la arista $(1, 2)$, donde 1 es una fuente propia.

El sistema CTLN con el que trabajamos en este ejemplo será:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\{1 - \frac{3}{2}x_2, 0\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\{1 - \frac{3}{4}x_1, 0\}\end{aligned}$$

En este caso G_1 sería la gráfica $-x_1 + \max\{1 - \frac{3}{2}x_2, 0\} = 0$ y G_2 sería la gráfica $-x_2 + \max\{1 - \frac{3}{4}x_1, 0\}$. Observemos que G_1 corta al eje x_1 en $x_1 = 1$ y corta al eje x_2 en $x_2 = \frac{2}{3}$. Por otro lado G_2 corta al eje x_1 en $x_1 = \frac{4}{3}$ mientras que corta al eje x_2 en $x_2 = 1$.

Cuando $1 - \frac{3}{2}x_2 = 0$ entonces $x_2 = \frac{2}{3}$. Entonces tenemos los siguientes casos:

- Si $x_2 > \frac{2}{3}$ entonces $x_1 = 0$
- Si $x_2 < \frac{2}{3}$ entonces $x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2$.

De manera análoga cuando $1 - \frac{3}{4}x_1 = 0$ entonces $x_1 = \frac{4}{3}$. Entonces tendremos que:

- Si $x_1 > \frac{4}{3}$ entonces $x_2 = 0$
- Si $x_1 < \frac{4}{3}$ entonces $x_2 = 1 - \frac{3}{4}x_1$.

Esto se puede ver en la siguientes imágenes:

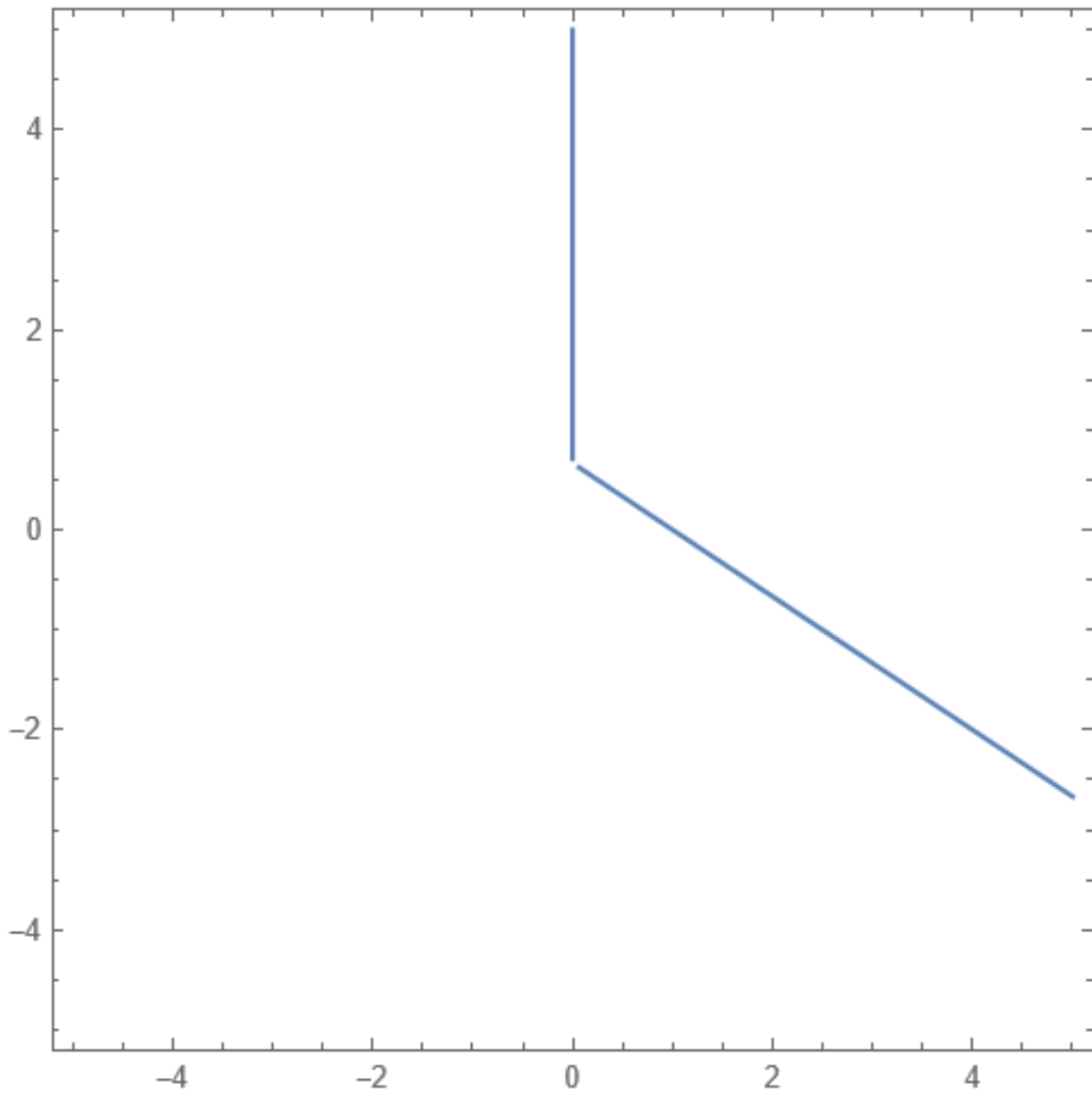


Figura 4.4: Gráfica $G_1 = 0$

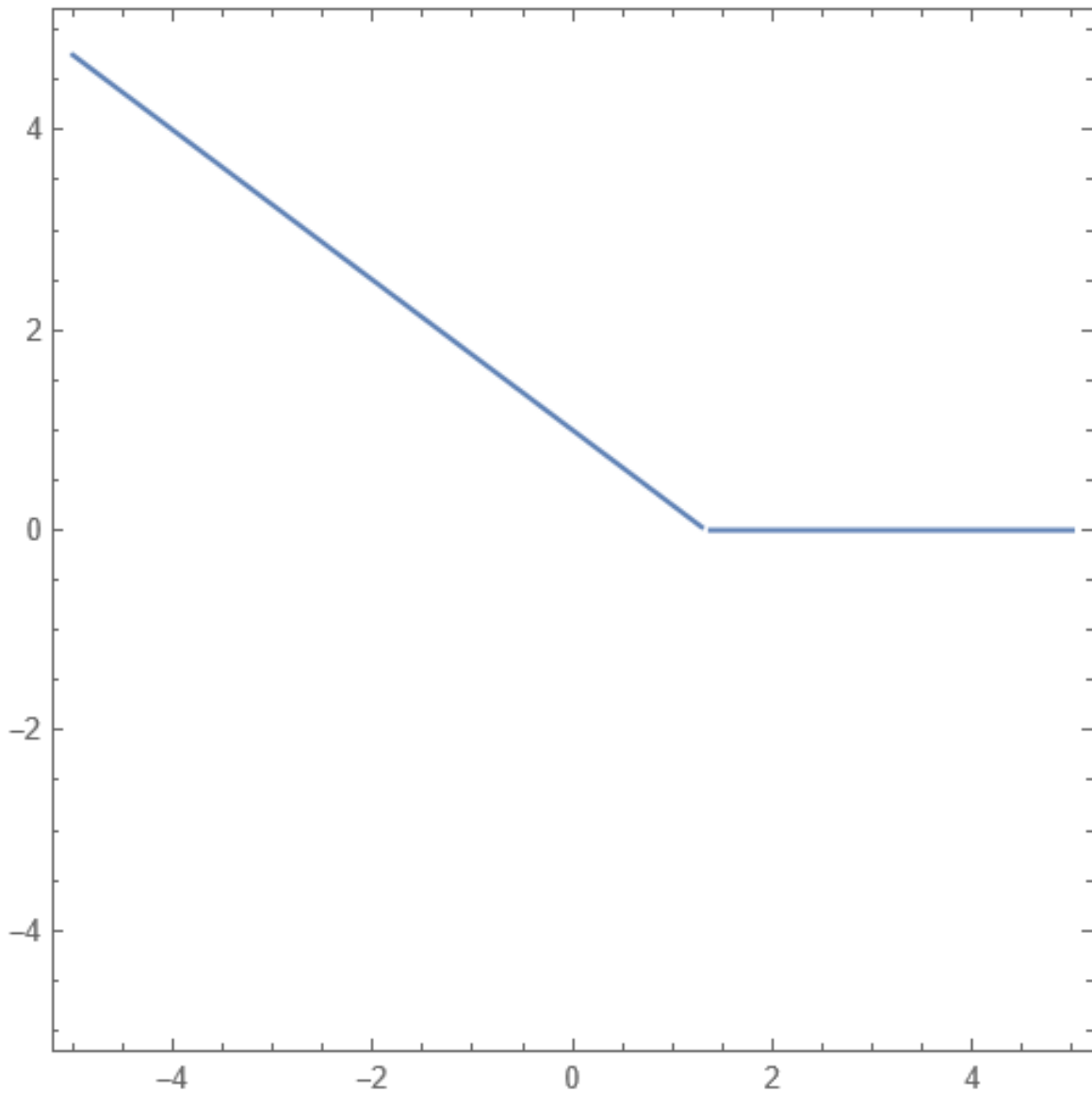
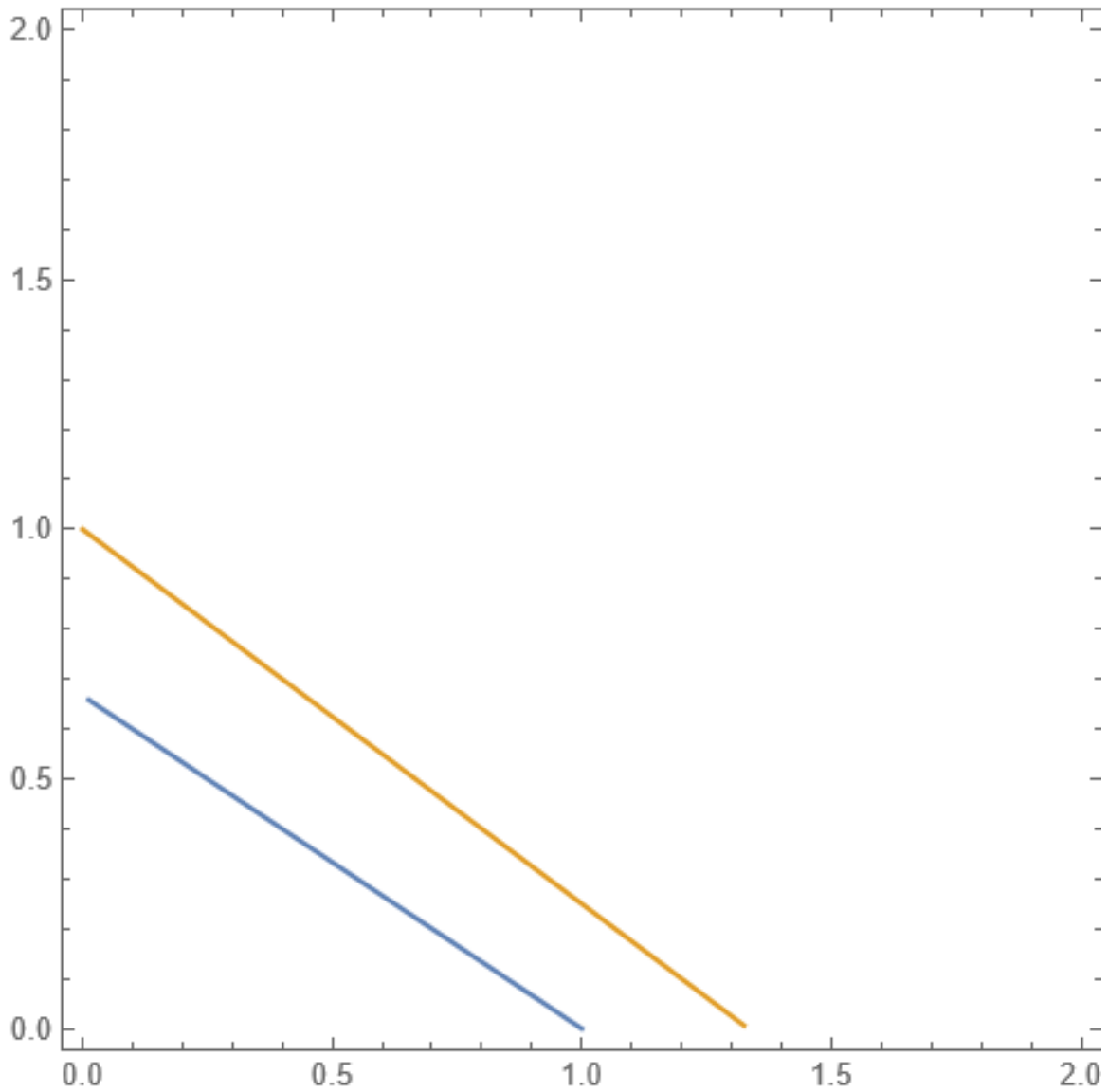


Figura 4.5: Gráfica $G_2 = 0$

A diferencia del ejemplo anterior en la siguiente imagen se puede observar que el punto de intersección de las gráficas de G_1 y G_2 se encuentra fuera de la sección $(+, +)$. Se observa que en este caso la intersección de las regiones $G_1 > 0$, $G_2 > 0$, $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$ forman un triángulo.



Ejemplo 4.3. Como el ejemplo 3,3 vamos a considerar el sistema CTLN definido por dos neuronas $\{1, 2\}$ y una arista bidireccional entre ellas.

Como se mencionó anteriormente el sistema de ecuaciones para el sistema CTLN

definido en este ejemplo será:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\left\{1 - \frac{3}{4}x_2, 0\right\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\left\{1 - \frac{3}{4}x_1, 0\right\}.\end{aligned}$$

En éste caso G_1 va a ser la curva $-x_1 + \max\{1 - 0,75x_2, 0\} = 0$ mientras que G_2 es la curva $-x_2 + \max\{1 - 0,74x_1, 0\} = 0$. Observemos que la intersección de G_1 con los ejes x_1 y x_2 suceden cuando $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{4}{3}$ respectivamente, mientras que G_2 corta cada uno en $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_1 = 1$.

Cuando $1 - \frac{3}{4}x_2 = 0$ entonces $x_2 = \frac{4}{3}$, de esto se derivan los siguientes casos:

- Si $x_2 > \frac{4}{3}$ entonces $x_1 = 0$
- Si $x_2 < \frac{4}{3}$ entonces $x_1 = 1 - \frac{3}{4}x_2$.

Cuando $1 - \frac{3}{4}x_1 = 0$ es completamente análogo y simétrico a lo anterior. Esto se puede ver en las siguientes imágenes.

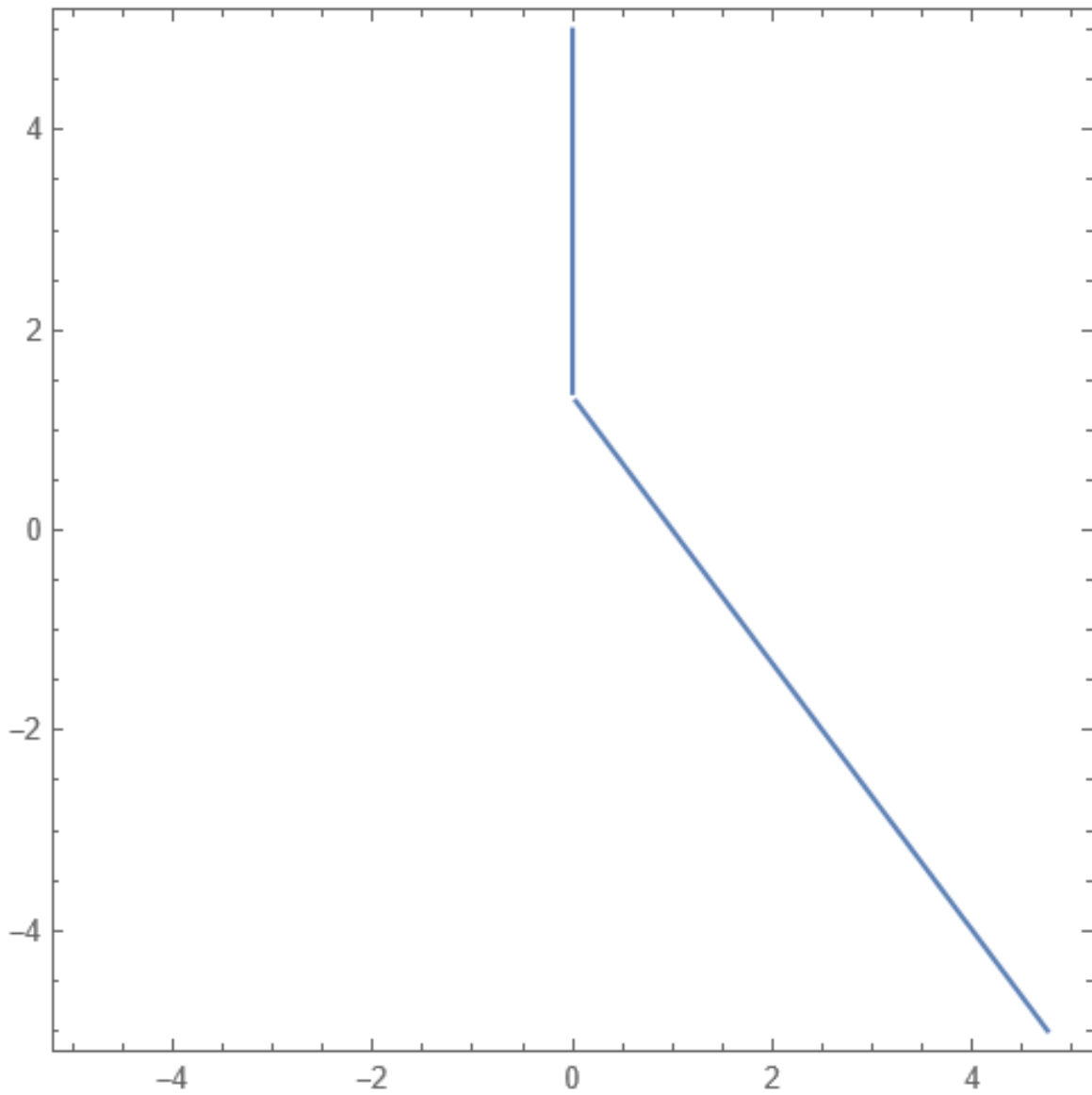


Figura 4.6: $G_1 = 0$

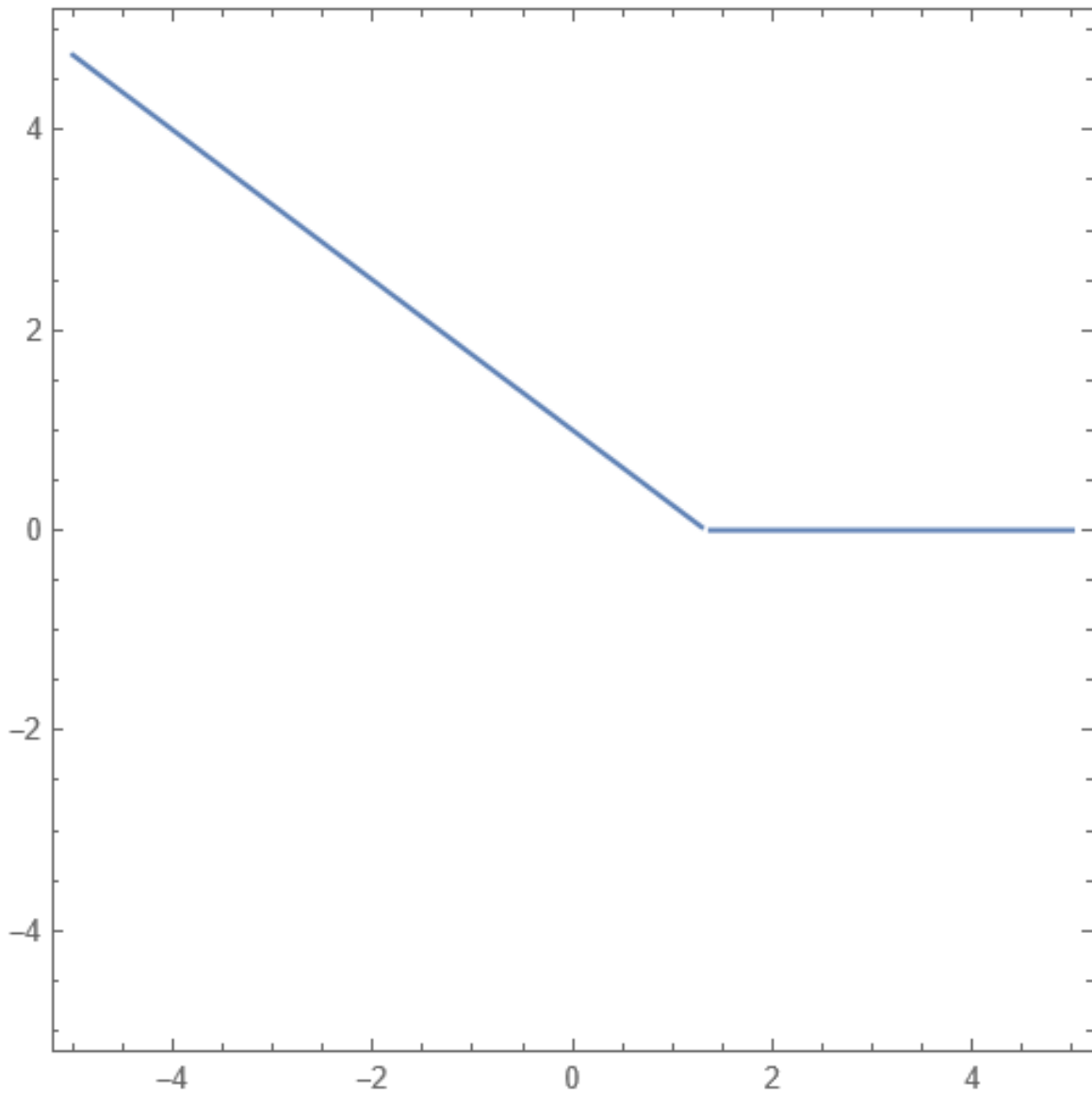


Figura 4.7: $G_2 = 0$

El punto de intersección se encuentra dentro de la frontera de la región $(+, +)$ y es el $(1, 0)$.

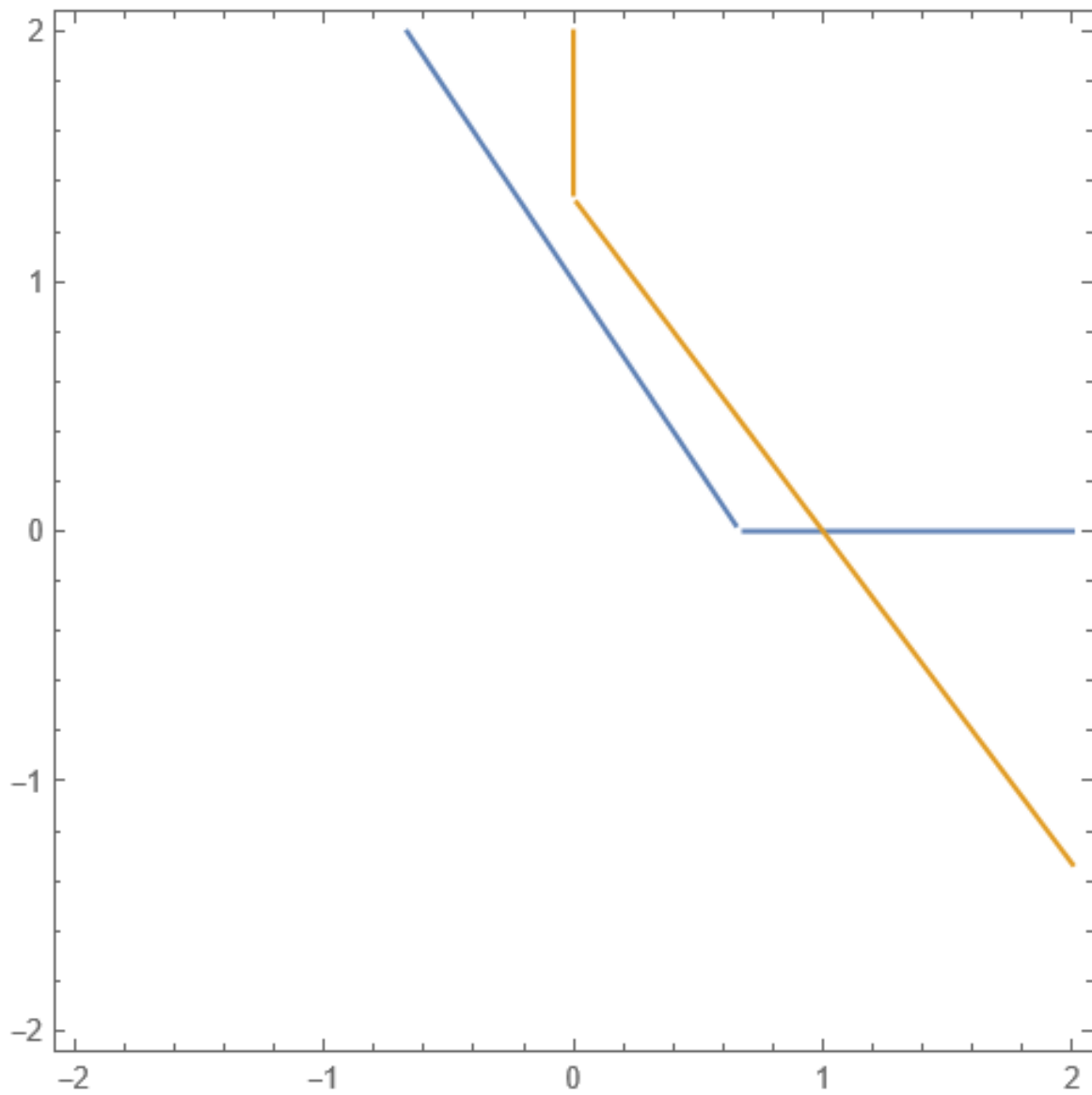


Figura 4.8: $G_1 = 0$ y $G_2 = 0$

Capítulo 5

Predecir el flujo de los sistemas

CTLN, un método alternativo

En este capítulo presentamos un algoritmo basado en el sistema de ecuaciones diferenciales definidas por la digráfica de los sistemas CTLN que a su vez definen otra digráfica basada en los hiperplanos definidos por el flujo de los inputs del sistema.

5.1. El algoritmo

Comenzaremos con un sistema CTLN de n nodos que es representado con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\{y_1, 0\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\{y_2, 0\} \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= -x_n + \max\{y_n, 0\}\end{aligned}$$

donde

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta. \quad (5.1)$$

1. Cuando $y_i \leq 0$ tenemos que $\frac{dx_i}{dt} = -x_i$ mientras que cuando $y_i > 0$ entonces $\frac{dx_i}{dt} = -x_i + y_i$. Cada hiperplano $y_i = 0$ divide \mathbb{R}^n en regiones positivas y negativas donde $y_i \leq 0$ y $y_i > 0$. Podemos afirmar que cada una de las regiones son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n con la topología euclidiana.
2. La partición definida en el primer paso resulta en 2^n regiones. A cada una de estas regiones le podemos asignar un vector de signos donde la i -ésima coordenada es $+1$ si sucede que la región está definida positivamente por el y_i hiperplano y -1 en otro caso.
3. Construcción de una nueva digráfica.

Se construye una digráfica como sigue. Los vértices de esta gráfica son las re-

giones representadas por los vectores de signos presentados en el paso anterior. Si dos regiones tienen una frontera diferente de vacío agregamos una arista que conecte los vértices asignados a los vectores de signos que representan dichas regiones. Luego, la dirección de la arista sigue la dirección del flujo de energía del sistema, si el flujo corre en ambas direcciones entonces agregamos una arista multidireccional.

Las condiciones iniciales se posicionan en el vértice de la región correspondiente y este nuevo algoritmo no afecta el conjunto de vértices que forman el soporte de cada punto fijo del sistema. Esto sucede ya que el soporte es definido cuando $y_i \leq 0$ y $y_i > 0$ en otro caso de manera que los soportes se encuentran en el vértice de su neurona correspondiente.

4. Las coordenadas positiva y negativa determinan un nuevo sistema donde cada región define un sistema de ecuaciones lineales. Cuando $y_i > 0$ se cumple que

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i \text{ y si } y_i > 0 \text{ entonces } \frac{dx_i}{dt} = -x_i + y_i.$$

5. Así podemos calcular y encontrar las coordenadas de cada punto estable. Más aún, al encontrar los valores propios de cada región podemos observar el comportamiento de cada punto de equilibrio y del flujo.

5.2. Ejemplos del algoritmo.

Presentaremos dos ejemplos sencillos para ilustrar el proceso del algoritmo que acabamos de presentar.

5.2.1. Ejemplo dos neuronas.

Entonces consideremos un conjunto de dos vértices $\{1, 2\}$ y una arista con dirección $\vec{12}$ o $\vec{21}$, como en el ejemplo 3.2. Supongamos sin pérdida de generalidad que tenemos el caso de la arista $\vec{12}$. En la siguiente imagen 5.1 está representada este ejemplo.

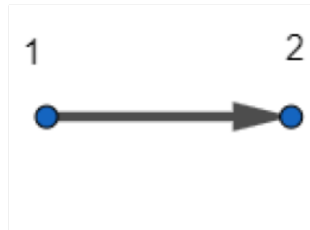


Figura 5.1: Representación dos neuronas donde una de ellas es fuente.

Entonces tenemos la matriz que define el sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 - \delta \\ -1 + \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Como mencionamos en la introducción los valores estándar que hemos estado ocupando a lo largo de este trabajo son $\epsilon = 0,5$, $\delta = 0,25$ y $\theta = 1$. Entonces sustituyendo estos valores en la matriz tendremos que el sistema de ecuaciones que definen estas dos neuronas será:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + [(-1 - 0,5)x_2 + 1]_+ = -x_1 + [-\frac{3}{2}x_2 + 1]_+$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + [(-1 + 0,25)x_1]_+ = -x_2 + [-\frac{3}{4}x_1 + 1]_+.$$

Observemos que en este ejercicio $y_1 = 1 - 1,5x_2$ y $y_2 = 1 - 0,75x_1$. Entonces las líneas que separarán el plano según el algoritmo serán $\frac{2}{3} = x_2$ y $\frac{4}{3} = x_1$. Lo que da paso a la siguiente división del plano \mathbb{R}^2 .

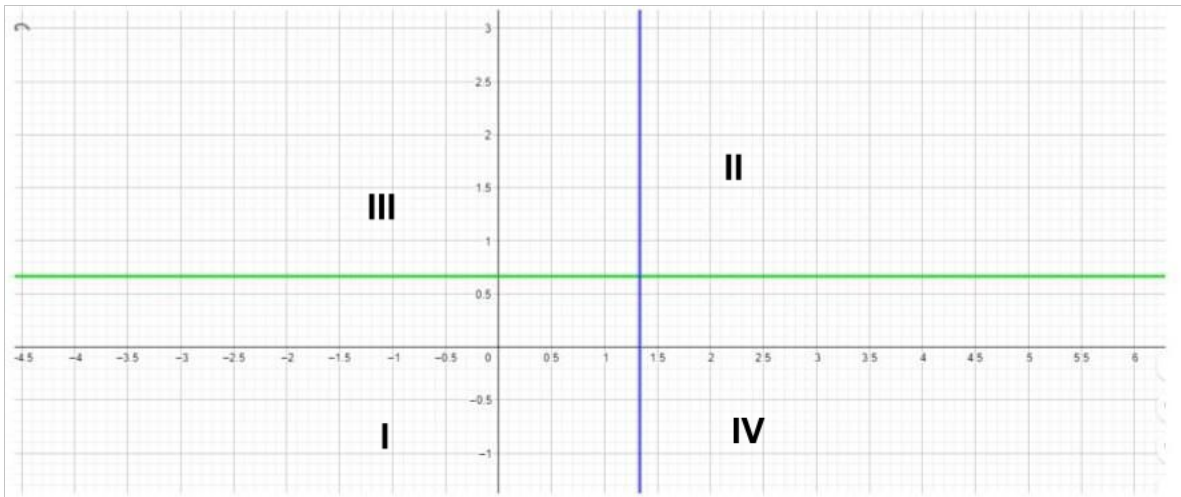


Figura 5.2: partición del plano por $y_1 = 0$ y $y_2 = 0$

La primera región corresponde a $R_{(+,+)}$, la segunda región a $R_{(-,-)}$ y las regiones III y IV a $R_{(+,-)}$ y $R_{(-,+)}$ respectivamente. Así podemos describir las regiones como siguen:

Primera región $R_{(+,+)}$

Observemos que en ésta región $y_1 > 0$ y $y_2 > 0$ por lo que para esta región se define el sistema

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{dt} &= 1 - x_1 - \frac{3}{2}x_2 \\ \frac{x_2}{dt} &= 1 - x_2 - \frac{3}{4}x_1\end{aligned}$$

por lo que podemos afirmar que se debe cumplir que $x_2 < \frac{2}{3}$ y $x_1 < \frac{3}{4}$. Así la matriz del sistema lineal:

$$R_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1,5 \\ -0,75 & -1 \end{bmatrix}$$

tiene como valores propios $-\frac{4 \pm 3\sqrt{2}}{4}$. En el plano fase que se muestra en la figura 5.3 podemos observar que el flujo sale de esta región hacia las regiones vecinas que son las regiones III y IV. Así que en la gráfica de regiones tendremos las aristas (1,3) y (1,4).

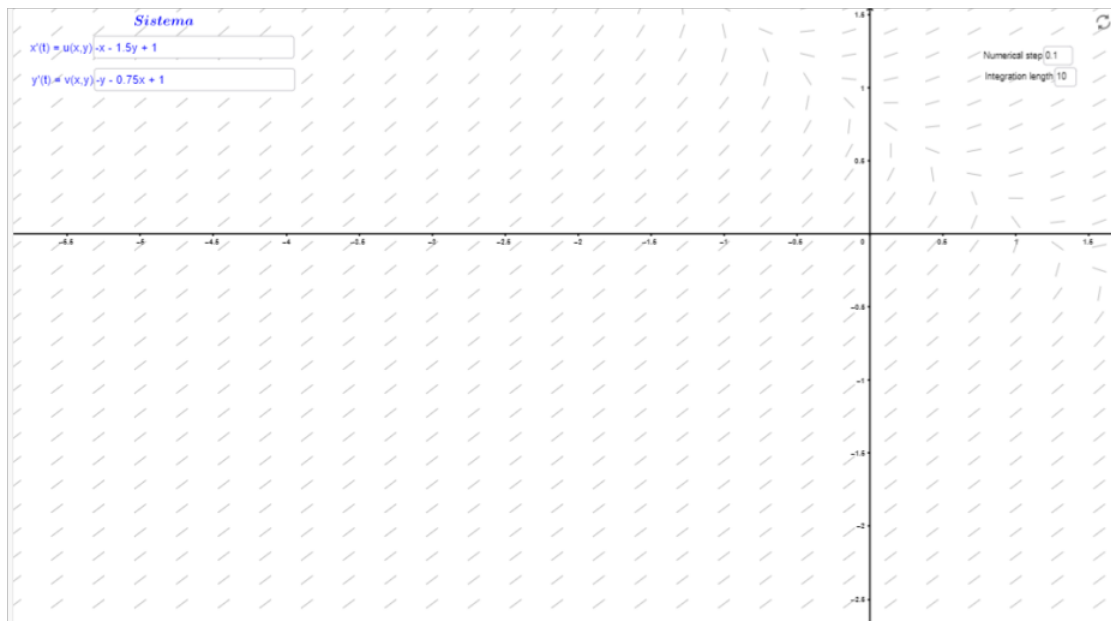


Figura 5.3: Plano fase región $R_{(+,+)}$

Segunda región $R_{(-,-)}$

En esta región se cumple que $x_2 > \frac{2}{3}$ y $x_1 > \frac{3}{4}$. El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2.\end{aligned}$$

Que ya es un sistema lineal. Tenemos además que $\lambda = -1$ es el único valor propio con multiplicidad 2. Por otro lado el origen es el punto de equilibrio que se encuentra en la región I. Como se mostró anteriormente este resulta ser un nodo atractor. Así más bien el flujo se va rumbo a la región 1 mediante las regiones vecinas. Por lo que podemos afirmar que tendremos las aristas (2, 3) y (2, 4).

Tercera Región $R_{(+,-)}$

En esta región se debe cumplir que $x_1 < \frac{3}{4}$ y $x_2 > \frac{2}{3}$. El sistema definido para esta región es:

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 - x_1 - 1,5x_2 \quad (5.2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2. \quad (5.3)$$

Que tiene como punto de equilibrio (1,0) pero que se encuentra fuera de la región, a saber en la región 1. La matriz del sistema lineal tiene a $\lambda = -1$ como el único valor propio de multiplicidad 2. En el plano fase de la figura 3.9 podemos observar como el flujo sale de la zona rumbo a la primera región. Así en la gráfica de regiones podemos

tener la arista (3, 1).

Cuarta región $R_{(-,+)}$

En esta región se debe cumplir que $x_1 > \frac{3}{4}$ y $x_2 < \frac{2}{3}$. El sistema de esta región es:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 1 - 0,75x_1 - x_2.\end{aligned}$$

La parte lineal del sistema nos da como valor propio -1 con multiplicidad 2. Tenemos que el punto de equilibrio del sistema ahora es (0,1) que se encuentra en esta región. Entonces tendremos que el punto de equilibrio será un atractor así que el flujo se dirigirá a este punto y se mantendrá en esa región. Entonces el flujo se mantiene en esta región, por lo que en la digráfica que vamos a construir no saldrán aristas del nodo correspondiente a esta cuarta región.

Entonces la digráfica de regiones será la siguiente (figura 5.4):

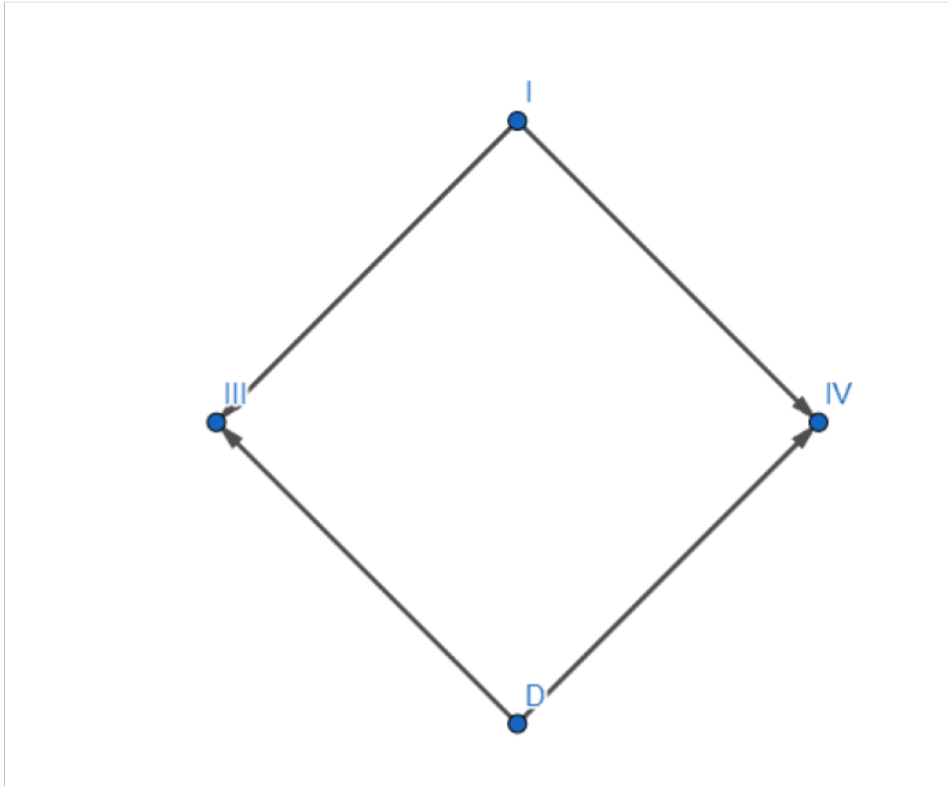


Figura 5.4: Digráfica de regiones

Observemos que en la digráfica de regiones el correspondiente a la región 4 pasa a ser un pozo mientras que la región 2 pasa a ser una fuente propia.

5.2.2. Ejemplo tres neuronas.

Para este ejemplo vamos a considerar un 3-ciclo de las neuronas a , b y c .

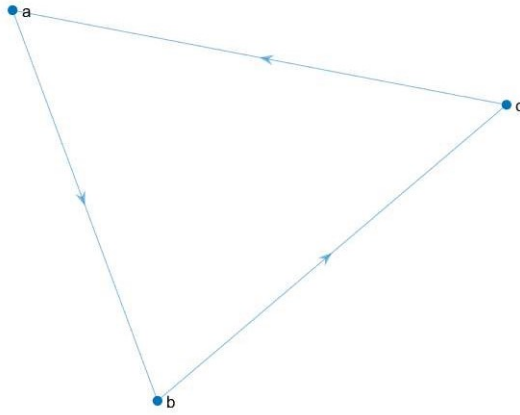


Figura 5.5: Tres neuronas en un 3-ciclo.

El sistema de ecuaciones que define la digráfica del 3-ciclo es:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + \max\{y_1, 0\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \max\{y_2, 0\} \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + \max\{y_3, 0\}\end{aligned}$$

donde

$$y_1 = -1,5x_2 - ,75x_3 + 1$$

$$y_2 = -,75x_1 - 1,5x_3 + 1$$

$$y_3 = -1,5x_1 - ,75x_2 + 1$$

En éste ejemplo tendremos tres hiperplanos orientados que dividen a \mathbb{R}^3 en 8 regiones cuando $y_1 = 0, y_2 = 0$ y $y_3 = 0$. Este es el primer paso del algoritmo. En

la siguiente figura el primer hiperplano $y_1 = 0$ está representado con el color azul, el segundo $y_2 = 0$ con el color morado mientras que el tercero $y_3 = 0$ con color rosa.

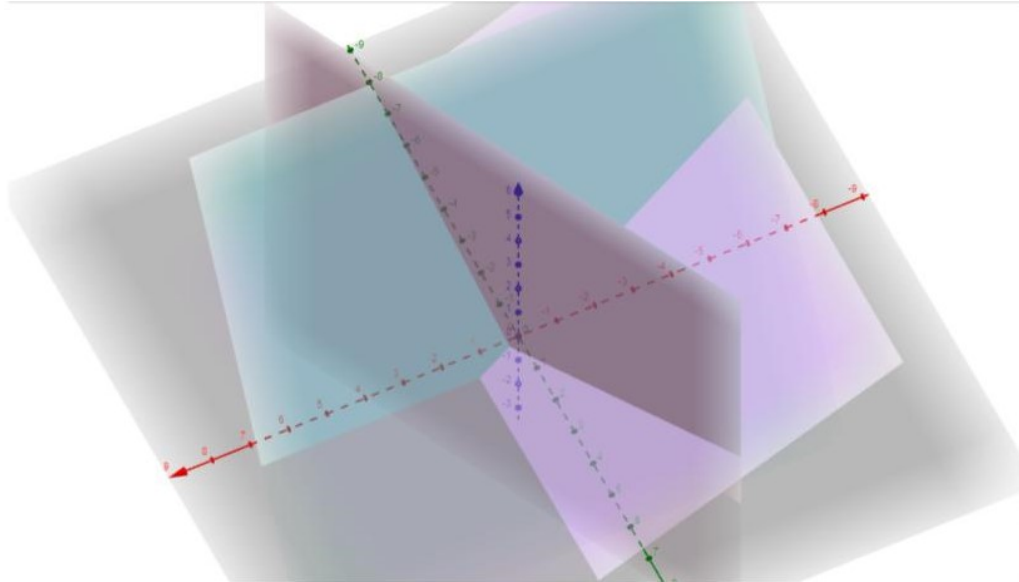


Figura 5.6: Hiperplanos y_1, y_2 y y_3 .

Cuando $y_i < 0$ la segunda parte de las ecuaciones es cero y $\frac{dx_i}{dt} = -x_i$ y define la parte negativa de un hiperplano mientras que la parte positiva se da cuando $y_i > 0$. El caso $y_1 > 0$ ocurre cuando $-1,5x_2 - 0,75x_3 + 1 > 0$, análogamente $y_2 > 0$ si $-1,5x_3 - 0,75x_1 + 1 > 0$ y $-1,5x_1 - 0,75x_2 + 1 > 0$. Continuando con el segundo paso del algoritmo asignamos un vector de signo de 3 coordenadas a cada una de las 8 regiones de \mathbb{R}^3 dependiendo si y_1, y_2 y y_3 son positivos o negativos en la región en la que nos encontremos. Por ejemplo, a la región donde $y_1, y_3 > 0$ y $y_2 < 0$ se le asocia el vector $(+, -, +)$ o $(1, -1, 1)$. En la siguiente tabla, cada región se identificará con el vector asociado.

Región	Vector
R_1	$(-, -, -)$
R_2	$(+, -, -)$
R_3	$(-, +, -)$
R_4	$(-, -, +)$
R_5	$(+, +, -)$
R_6	$(+, -, +)$
R_7	$(-, +, +)$
R_8	$(+, +, +)$

Como se menciona en el tercer paso del algoritmo se debe construir una digráfica con 8 vértices, cada uno de los cuales representa una región y se asignan las aristas dependiendo de la dinámica del flujo. Podemos identificar en la siguiente tabla los vecinos de cada región.

Región	Regiones vecinas
R_1	R_2, R_3 y R_4
R_2	R_1, R_5 y R_6
R_3	R_1, R_5 y R_7
R_4	R_6, R_7 y R_1
R_5	R_2, R_3 y R_8
R_6	R_2, R_4 y R_8
R_7	R_3, R_4 y R_8
R_8	R_5, R_6 y R_7

El análisis completo de éste 3-ciclo junto con la digráfica correspondiente fue desarrollado por Joaquín Castañeda en su tesis de licenciatura *CTLN's definidos por torneos* asesorado por el Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutierrez. Gracias a su trabajo tenemos que la digráfica de regiones es la siguiente.

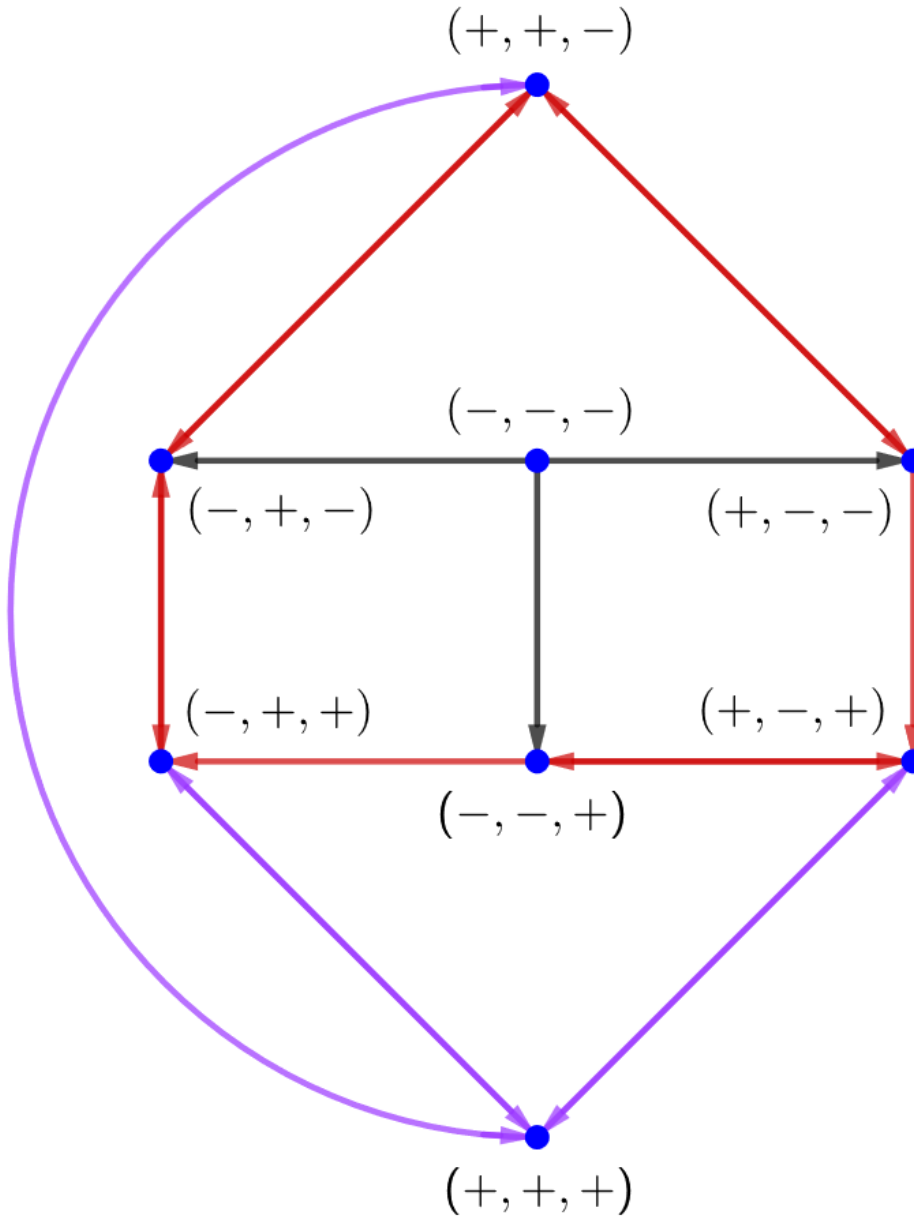


Figura 5.7: Gráfica de regiones del ejemplo con tres regiones.

Capítulo 6

Las fuentes propias tienden a apagarse

La siguiente es una conjetura presentada por las autoras en *Fixed points of competitive threshold-linear networks* [8] y *Predicting neural network dynamics via graphical analysis* [9]. Se presenta una prueba parcial donde sólo se consideran los casos con una sola fuente propia que envía aristas al resto de los nodos y no considera aristas entre los nodos restantes, es decir, sólo considera estrellas con $[n] - 1$ puntas.

Conjetura 6.1. *Eventualmente todas las fuentes propias tienden a apagarse¹.*

Demostración. Como mencionamos anteriormente vamos a considerar el caso en que el primer nodo sea una fuente propia que envíe arista al resto de los vértices y que las demás aristas no envíen o reciban aristas del o al resto. En general podemos asumir el caso donde el primer nodo sea una fuente propia y utilizaremos los valores estándar

¹Es decir que la función $x_i(t)$ asociada a la i -ésima neurona, siendo esta una fuente propia, se acerca cada vez más a cero cuando hacemos t tender a infinito.

$W_{1j} = -1,5$ y $W_{ji} = -0,75 \forall j = 2, \dots, n$. Así las ecuaciones están definidas como

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \max\left[\sum w_{ij}x_j + 1, 0\right] \quad (6.1)$$

y todos los valores para x_i son positivos, lo que significa que todas las neuronas estén activas.

Así definimos dos regiones en el cuadrante positivo de \mathbb{R}^n :

$$A := \{(x_1, \dots, x_n) \mid -1,5(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + 1 \leq 0\}$$

$$B := \{(x_1, \dots, x_n) \mid -1,5(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + 1 \geq 0\}.$$

Dentro de la región B tendremos la ecuación

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 1,5(x_2 + \dots + x_n) + 1.$$

Así podemos definir un simplejo con vértices $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, \frac{2}{3}, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, \frac{2}{3})$, $(0, \dots, 0)$ que son los puntos donde los hiperplanos $y_i = 0$ corten a cada uno de los ejes de R^n . Si unimos estos punto podemos definir un simplejo y así vamos a definir B_1 como la región dentro de este simplejo y B_2 la región fuera pero dentro de la región $\frac{dx_1}{dt} \leq 0$.

Afirmamos que tomando las condiciones iniciales en el simplejo el flujo irá hacia el prisma. Para que esto suceda es necesario que el producto punto entre el campo vectorial de las ecuaciones y el vector normal del simplejo debe ser positivo. El vector normal será $N = (1, 1,5, 1,5, \dots, 1,5)$ mientras que F es el vector del campo vectorial donde $\frac{dx_1}{dt} = 0$ y $\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \sum w_{ij}x_j + 1$. En la frontera tendremos que $-1,5x_2 -$

$1,5x_3 - \dots - 1,5x_n + 1 = 0$ y $1 = -1,5(x_2 + \dots x_n)$. Podemos reescribir la suma como

$$\sum (1,5 + w_{ij})x_j + (1,5 - 1)x_k$$

y podemos observar que usando los valores estándar tendremos que $1,5 + x_{ij}$ es positivo o cero mientras que $(1,5 - 1)x_k \leq 0$ ya que nos encontramos en el ortante positivo. Entonces $N \cdot F$ es una suma de productos positivos por lo que $N \cdot F > 0$. Podemos interpretar esto como que las soluciones con distintos valores iniciales siempre tienden a apagar el primer nodo que representa la fuente propia. □

Conclusiones Finales

En este trabajo se presentaron varios ejemplos de la dinámica de dos y tres neuronas. Estos son ejemplos aún observables y que nos pueden ayudar a visualizar las diferencias, que no son sustancialmente grandes, entre distintos sistemas generados por digráficas con el mismo número de nodos pero distinta distribución de las aristas. Sin embargo, para digráficas de mayor número de nodos es más efectivo el análisis de soportes de puntos fijos que se realiza utilizando las reglas presentadas en el capítulo de preliminares.

El algoritmo que presentamos en éste trabajo nos ayuda a realizar un análisis completo de la dinámica utilizada por el flujo de inputs y outputs de los posibles modelos de sinapsis neuronales. Comenzando con las regiones definidas por $y_i = 0$ donde el sistema CTLN pasa a ser un sistema lineal encontramos y demostramos que las conjeturas presentadas anteriormente no dependen de las condiciones iniciales, en otras palabras, de la región neuronal donde comencemos el flujo. Se presentó además la demostración a un caso particular de la conjetura sobre las fuentes propias presentada por las Doctoras Carina Curto y Katherine Morrison en [6]. El caso demostrado sólo considera difráficas en forma de estrella.

Bibliografía

- [1] R.H. Hahnloser, H.S. Seung, J.J. Slotine. *Permitted and forbidden sets in symmetric threshold-linear networks*. Neural Comput., 15(3):621-368, 2003.
- [2] C. Curto, A. Degeratu, V. Itskov. *Flexible memory networks*. Bulletin of Mathematical Biology vol. 74 590–614, 2012.
- [3] C. Curto, A. Degeratu, V. Itskov. *Encoding binary neural codes in networks of threshold-linear neurons*. Neural Computation 25 páginas 2858-2903, 2013.
- [4] K. Morrison, A. Degeratu, V. Itskov, C. Curto. *Diversity of emergent dynamics in competitive threshold-linear networks: a preliminar report* Versión online en <https://arxiv.org/abs/1605.04463>
- [5] K.Morrison, J. Geneson, C. Langdon, A. Degeratu, V. Itsvok, C. Curto. *Emergent dynamics from network connectivity: a minimal model*. Versión online en <https://arxiv.org/abs/1605.04463>, 2016.
- [6] C. Curto, K. Morrison. *Pattern completion in symmetric threshold-linear networks*. Neural computation, 28:2825-2852, 2016.

- [7] C. Parmelee. *Applications of Discrete Mathematics for Understanding Dynamics of Synapses and Networks in Neuroscience*. Ph.D Disertation. University of Nebraska-Lincon. 2016.
- [8] C. Curto, Jesse Geneson, K. Morrison. *Fixed points of competitive threshold-linear networks*. Versión online en <https://arxiv.org/abs/1804.00794>. Agosto 2018.
- [9] C. Curto, K. Morrison. *Predicting neural network dynamics via graphical analysis*. Algebraic and Combinatorial Computational Biology y versión online en <https://arxiv.org/abs/1804.01487>. 2018
- [10] C. Curto, K. Morrison. *Graph rules for recurrent neural network dynamics: extended version*. Versión online en <https://arxiv.org/abs/2301.12638>. Enero 2023.