1101

FACULTAD DE INGENIERIA

Aplicaciónes de la Programación Lineal a la Solución de Problemas Industriales.

T E S I S

Que para obtener el título de :

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

p r e s e n t a :

GUILLERMO SCHULTZ MENDIVIL

MEXICO, D. F. 1967

APLICACIONES DE LA PROGRAMACION LINEAL A LA SOLUCION DE PROBLEMAS INDUSTRIALES

GUILLERMO SCHULTZ MENDIVIL

MEXICO, D. F. 1967

A mi madre.

A la memoria de mi padre.

A mi hermano.

FACULTAD DE INGENIERIA
Dirección
Núm. 73-303
Exp. Núm. 73/214.2/1.-

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

Al Pasante señor Juan Guillermo SCHULTZ MENDIVIL
P r e s e n t e.

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el señor profesor Ingeniero Victor Gerez - Greiser, para que lo desarrolle como tesis en su examen profesional de Ingeniero MECANICO ELECTRICISTA.

"Aplicaciones de la Programación Lineal a la solución de Problemas Industriales.

Capítulos:

I.- Introducción
II.- Antecedentes matemáticos.
III.- El Problema de Programación Lineal.
IV.- Teoría del Método Simplex.
V.- Desarrollo detallado y características de cálculo del Método Simplex.
VI.- La Programación Lineal y sus aplicaciones en la- Industria.

Ruego a usted tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar examen profesional; - así como de la disposición de la Dirección General de Servicios - Escolares, en el sentido de que se imprima en lugar visible de -- los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Muy atentamente,

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
México, D. F., a 25 de enero de 1967
EL DIRECTOR

Ing. Manuel ~~Paulín Ortiz~~

MPO/MMO/rr.

I N D I C E.

CAPITULO III

EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

CAPITULO I

INTRODUCCION.

1.1.- ANTECEDENTES.-

Con el objeto de hacer un estudio lo más completo posible de la Programación, Lineal en general y de su aplicación a la Industria en particular - he dividido este trabajo en las siguientes partes: Introducción, Antecedentes Matemáticos, El problema de Programación Lineal, Teoría del Método Simplex, Desarrollo detallado y Características del cálculo del Método Simplex y la Programación Lineal, y sus aplicaciones en la Industria.

Los problemas de Programación surgieron primeramente en el campo de la economía donde el aprovechamiento óptimo de los recursos ha sido siempre su principal objetivo. Especificamente, la programación se originó en los trabajos realizados alrededor, de 1930 por un grupo de matematicos alemanes y austriacos entre los que, destaca Von Neumann, quien desarrolló un modelo - lineal de una economía en expansión.

Fue sinembargo, durante la Segunda Guerra Mundial, cuando un grupo, bajo la dirección de Marshall K. Wood se dedicó a maximizar o minimizar funciones lineales para la fuerza Aerea Norteamericana. George B. Danzig, - -- quien pertenecía a este grupo formuló el problema general de la programa- -

ción lineal y proyectó el método "simplex" para su solución en 1947.

Sus trabajos pasaron al dominio público en 1951 y desde entonces sus aplicaciones se han difundido a todos los campos, siendo de especial interés la obra de W. W. Cooper, quien fomentó el uso de la Programación Lineal a la Industria.

La Programación Lineal es una de las muchas técnicas matemáticas que se agrupan bajo el título de "Investigación de Operaciones".

Matematicamente, la programación lineal consiste en el problema de encontrar el máximo (o mínimo) de una función lineal, sujeta a ciertas condiciones lineales y al hecho de que las variables sean siempre positivas.

Las condiciones lineales constituyen un sistema de ecuaciones lineales. Cuando el número de variables excede al número de ecuaciones, el sistema tendrá en general un número infinito de soluciones, entre las cuales, aquellas que, contengan uno o mas valores negativos son desechadas, y el problema consiste en encontrar aquella solución que de el valor, mayor (o menor), de la función lineal que se desea optimizar.

Sucede frecuentemente, que las alternativas posibles, - las posibilidades entre las que tenemos que escoger - aparecen como soluciones alternativas de un sistema de ecuaciones lineales que, constituyen la expresión matemática de las restricciones tecnológicas y económicas de la libertad de acción de una industria.

Las restricciones tecnológicas y económicas irán intimamente ligadas, ya que, se buscará, por ejemplo una máxima, utilización de la maquinaria para obtener una ganancia máxima.

El hecho de que las variables deban ser siempre positivas es con el objeto de garantizar soluciones lógicas, ya que no se podrá hablar, por ejemplo, de una producción negativa.

Deseo agradecer sinceramente a la Universidad Nacional Autónoma de México, por las facilidades que me ha brindado, para realizar mis estudios.- A el autor que he tomado como base para el desarrollo de este trabajo: G.-

Hadley ("Linear Programming") a quien doy todo crédito de originalidad y, le estoy muy agradecido por los conocimientos dee de el adquirí, que además de haberme sido de gran utilidad, me han permitido asomarme a un campo poco conocido en nuestro país. A todos y cada uno de mis maestros por su desinteresada cooperación, y muy especialmente al Ing. Victor Gerez Greiser por su dedicación y consejos, que me hicieron posible realizar este trabajo.

1 9 6 7

Guillermo Schultz Mendívil.

1-2.- EL USO DE CALCULADORAS DIGITALES EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL.-

Existen varios programas y otros se están elaborando para el cálculo de los problemas de programación lineal por medio de calculadoras digitales.

La IBM - 604 se puede utilizar ventajosamente para los cálculos del método simplex. El uso de esta calculadora está sinembargo limitado por el tamaño del problema y requiere de un gran manejo de tarjetas ya que el programa no se puede almacenar eficientemente en la máquina.

La IBM - 650 es una calculadora especial pafa almacenar datos, y por ello es muy utilizada en la solución de problemas de programación lineal.- Existen varios programas que difieren principalmente en lo que se refiere al tamaño del problema que pueden resolver y en el tipo de instrucciones.

Las calculadoras IBM 701 y 704 tienen una capacidad de memoria mucho mayor, y son mucho más rápidas que la 650. Su uso es especialmente ventajoso en problemas muy grandes.

Los programas individuales y el tamaño máximo del problema diferen grandemente, dependiendo del autor del programa y del equipo para el cual el programa fué elaborado.

Un problema preparado para la IBM 650 solucionará problemas hasta de $5m + 6n \leq 2300$ con nL 100. Es decir que un problema de transportación - (ver Capítulo VI) con 100 origenes y aproximadamente 340 destinos se puede resolver en esta calculadora.

Otro programa para la IBM 701 podrá resolver problemas de distribución hasta de $m \times n \leq 3000$.

Existen principalmente varios programas para la IBM 650 para utilizar el método simplex. Un programa puede solucionar problemas cuya matriz (incluyendo la matriz unitaria) puede ser de $m \times n = 30 \times 59$ o bien --- $m(n + 1) \leq 1400$.

Aunque el uso de las calculadoras digitales se ha generalizado mucho, el desarrollo de este trabajo tiene por objeto establecer las bases y la secuencia necesaria para la solución de problemas con el uso de la programación lineal ya sea utilizando calculadoras digitales o bién haciendo las operaciones a mano.

CAPITULO II

Antecedentes Matemáticos.

2-1.- MATRICES.-

Definición: Una matriz se define como un arreglo rectangular de números y se representa por:

$$A = \left[a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ -- & -- & -- \\ -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se dice que la matriz anterior es de orden m x n.

Una matriz no tiene un valor numérico es únicamente una forma adecuada para representar arreglos de números.

Estos números se conocen como elementos de la matríz

Utilizaremos un doble subíndice con objeto de definir cualquier elemento. El primer subíndice indicará el renglón y el segundo la columna en que dicho elemento se encuentre situado. Consiguientemente el elemento a_{ij} se encontrará en el renglón i y en la columna j.

N O T A C I O N:

Indicaremos una matríz con las letras A, B, C, etc. En forma semejante $[a_{ij}]$ indicará una matriz que posea cuando menos dos renglones y dos columnas.. (a_{ij}) indicara una matriz de un solo renglón.

Una matriz que tenga el mismo número de columnas y de renglones se -- llama matriz cuadrada.

P R O P I E D A D E S.-

a) Dos matrices A y B serán iguales $A = B$ si y solamente si sus-elementos correspondientes son iguales, es decir si $a_{ij} = b_{ij}$ para cual-- quier valor de i y cualquier valor de j.

b) La suma de las matrices A y B se define como una matriz, C, $C = A + B$ tal que sus elementos estan dados por:

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

De la definición se concluye que únicamente se podrán sumar matrices -- del mismo orden.

c) De la propiedad b se concluye que la adición de matrices satisfa ce las condiciones de asociación y conmutación es decir.

$$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

d) Para multiplicar una matriz por un escalar 2, se deberán multiplicar cada uno de los elementos de la matriz por dicho escalar. De lo anterior se desprende que

$$\lambda A = A \lambda$$

e) Producto de matrices. Para poder multiplican dos matrices éstas-deberán ser conformables es decir que el número de columnas de la primera deberá ser igual al número de renglones de la segunda. Si A es una matriz de orden $m \times s$ y B es una matriz de orden $s \times n$ el producto $C = AB$ será una matriz de orden $m \times n$ cuyos elementos estarán dados por:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \qquad \begin{array}{l} i = 1 - - - m \\ j = 1 - - - n. \end{array}$$

Se deberá notar que el producto BA no se definió.

f) De acuerdo con la propiedad e el producto de matrices satisface las leyes de distribución y asociación es decir:

$$A (B + C) = AB + AC$$

$$ABC = A (BC) = (AB) C$$

2-2.- MATRICES ESPECIALES.-

a) Matriz identidad o Matriz Unitaria

La matriz unitaria de orden n se designa por I o I_n y es una matriz cuyos elementos son nulos excepto los de la diagonal principal que son unos, es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si utilizamos la delta de Kronecker se tendrá:

$$I = [\delta_{ij}] \text{ en que } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El símbolo I_n indica que la matriz unitaria es de orden n.

Si se tiene una matriz A de orden m x n, entonces se cumple:

$$I_m\ A = A\ I_n = A$$

El producto $I_n\ I_n = I_n^2$, entonces $I^2 = I$, y en general $I^k = I$, $K = 1,2,...$

El producto de un escalar por la matriz unitaria define a la llamada matriz escalar, o sea

$$S = [\lambda\ \delta_{ij}] = \lambda\ I \qquad \text{en que s,}$$

S, de acuerdo con la definición de

I será una matriz cuadrada.

La matriz cuadrada $D = [\lambda_i\ \delta_{ij}]$ se conoce como matriz diagonal.

b) Matriz Nula es aquella matriz en que todos sus elementos son nulos. Se designa por 0.

La matriz nula no es necesariamente cuadrada, cuando las operaciones estén definidas se tendrá:

$$A + 0 = A = 0 + A$$

$$A - A = 0$$

$$A0 = 0$$

$$0\ A = 0$$

Si a y b son números reales, $ab = 0$ implica que $a = 0$ o bien $b=0$

Sinembargo $AB = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$. Es sencillo encontrar matrices no nulas cuyo producto sea una matriz nula.

c) MATRIZ TRANSPUESTA.-

La transpuerta de la matriz $A = [a_{ij}]$ es una matriz formada al intercambiar los renglones, y las columnas de la matriz A de tal forma que el renglón i de A se convierte en la columna i de la matriz transpuesta. Designaremos a la matriz traspuesta por A'.

$$A' = [a'_{ij}] \; ; \; a'_{ij} = a_{ji}$$

De la definición de la matriz transpuesta se deducen las siguientes relaciones

$$(A + B)' = A' + B'$$

$$(A B)' = B' A'$$

$$I' = I$$

$$(A')' = A$$

d) MATRIZ SIMETRICA.-

Una matriz es simétrica cuando es igual a su transpuerta, es decir cuando

$$A = A'$$

Por la definición la matriz simétrica debe ser cuadrada y $a_{ij} = a_{ji}$ para todas las i y j.

e) MATRIZ OBLICUA.-

Es aquella matriz en la que $[a_{ij}] = -[a_{ji}]$ siempre que los elementos de la diagonal principal no sean todos nulos.

f) MATRIZ ANTISIMETRICA.-

Es aquella en la que $a_{ij} = -a_{ji}$ y $a_{kk} = 0$ ó sea que una, matriz-oblicua en la cual los elementos de la diagonal principal son nulos.

2-3.- PARTICION DE MATRICES.-

S U B M A T R I Z.-

Si se eliminan todos los elementos, excepto r renglones y s columnas de una matriz A de orden $m \times n$ la matriz resultante de orden $r \times s$ es una submatriz de A. $(m > r\,;\ n > s)$

E j e m p l o:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{22} \quad \begin{bmatrix} a_{44} \\ a_{54} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Para poder multiplicar dos matrices que se han partido, los productos $A_{ik}\ B_{kj}$ deberán existir o sea que las submatrices A_{ik} y B_{kj} deberán ser conformables.

2.4.- D E T E R M I N A N T E S.-

Toda matriz cuadrada A lleva asociada un número llamado determinante de A.

D E F I N I C I O N:

El determinante de una matriz de orden enésimo $A = [a_{ij}]$ y designado por $|A|$, se define como el número obtenido de la siguiente suma que contiene a los n^2 elementos de A.

$$|A| = \Sigma (\pm)\ a_{1i}\ a_{2j} \ldots\ a_{nr}\ , \qquad (1.6.1)$$

sumandose todas las permutaciones de los segundos subíndices. Un término llevará el signo, positivo si (i, j, . r) es una permutación par de (1,2, ...n) y llevará el signo menos si se trata de una permutación impar.

Cada término de 1-6-1 es el producto de n, elementos de A, uno de cada renglón y columna. Habrá n! términos en 1-6-1.

El determinante de una matriz de orden enésimo se puede escribir

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij} \quad \text{para cada } i = 1,..,n \qquad 1\text{-}6\text{-}2)$$

donde A_{ij} es $(-1)^{i+j}$ el determinante de la submatriz obtenida de A al eliminar el renglon i y la columna j; elemento a_{ij}.

La expresión 1-6-2 se conoce como la expansión de $|A|$ en el renglón i.

Para que se cumpla la expresión 1-6-2 para una matriz de $|x|$ a 1.

La expresión para la expansión en cofactores por columnas es.

$$| A | = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \; A_{ij}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$

La expansión por cofactores reduce el problema de evaluar un determinante de orden enésimo al de calcular n determinantes de orden $n-1$; es decir las cofactores A_{ij}. La aplicación del método de expansión por cofa factores a los cofactores, reduce el problema del cálculo de cada cofactor de orden $n-1$ al de calcular $n-1$ determinantes de orden $n-2$ etc.

Los determinantes de orden K, $K = 1, \ldots, n-1$, que aparecen en el cálculo por expansión de $| A |$ se conocen como menores de A; así se podrá decir que para cualquier matriz de orden $m \times n$ la submatriz R de orden K, obtenida al eliminar todos los elementos excepto K renglones y K. columnas de A, su determinante $| R |$ será llamado un menor de orden K de A.

2-5.- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.-

a.- El intercambio de dos columnas o dos renglones en una matriz A, cambia el signo de $| A |$

b) $| A' | = | A |$

c) La multiplicación de cada elemento del renglón i (o la columna i) de la matriz A por un escalar λ, multiplica a $| A |$ por λ. Consecuentemente $| \lambda A | = \lambda^n | A |$, y por lo tanto $| -A | = (-1)^n | A |$

d) Si todos los elementos en un renglón o en una columna son nulos, $| A | = 0$

e) La suma de un múltiplo del renglón K al renglón i $(i \neq K)$ o la suma de un múltiplo de la columna K a la columna i $(i \neq k)$ de A, no altera el valor de $| A |$.

f) El valor del determinante $| A |$ es cero si A tiene dos renglo nes o dos columnas que sean iguales, es decir $a_{ik} = a_{jk}$ (todas las k) o bien $a_{ik} = a_{ij}$ (todas las i)

g) Si A y B son matrices de orden n se tendrá que $| AB | = | A | \, | B |$ es decir que el determinante del producto es igual al producto de los determinantes.

De la propiedad f se tendrá que:

$$\sum_j a_{ij} A_{kj} = \sum a_{ji} A_{jk} = 0 \quad (i \neq k) \qquad 2\text{-}5\text{-}1$$

ya que se están utilizando los cafactores del renglón k y los elementos del renglón i que es la expresión con cofactores del determinante de una matriz cuyos renglones i y k son los mismos.por otro lado tendremos que:

$$\sum_j a_{ij} A_{kj} = \sum_j a_{ji} A_{jk} = | A | \delta_{ki} \qquad 2\text{-}5\text{-}2$$

donde δ_{ki} es la delta de Kronecker

Si llamamos $a^{+}_{ij} = A_{ji}$, entonces 2-5-2 se convierte a:

$$\sum_j a_{ij} a^{+}_{jk} = \sum_j a^{+}_{kj} a_{ji} = | A | \delta_{ki} \qquad 2\text{-}5\text{-}3$$

Si ahora llamamos

$$A^{+} = [a^{+}_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

la expresión 1-7-3 se puede expresar en forma matricial de la siguiente - manera:

$$A^{+} = A^{+} A = |A| \; I_n \qquad 2\text{-}5\text{-}4$$

La matriz A^{+} se llama matriz "adjunta" de A. De hecho A^{+} es la transpuerta de una matriz obtenida de A al sustituir cada elemento a_{ij} - por su cofactor A_{ij}.

2.6.- MATRIZ INVERSA.-

D E F I N I C I O N.-

Dada una matriz cuadrada A, si existe otra matriz cuadrada B que - satisfaga la relación.

$$AB = BA = I \qquad 2\text{-}6\text{-}1$$

B se llama matriz inversa de A

Generalmente se designa con A^{-1} a la matriz inversa de A.

Unicamente las matrices cuadradas tienen inversa

De la expresión 2-5-4 se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{+} \qquad 2\text{-}6\text{-}2$$

Ya que 2-5-4 satisface 2-6-1

A^{-1} en 2-6-2 únicamente existirá si $|A| \neq 0$ o sea que A deberá- ser una matriz no singular.

Propiedades de la matriz inversa.-

a) La inversa de una matriz no singular es única.

Demostración: Supongamos que existieran dos inversas B y D de A

$$A B = I$$

$$DAB = DI = D$$

pero $DA = I$ luego $B = D$

b) Si A y B són dos matrices de orden n tales que $AB = I$, entonces:

i) A y B son no singulares

ii) $A^{-1} = B$; $B^{-1} = A$

iii) $BA = I$

Demostración : De la propiedad g de los determinantes

$$|A| \; |B| = |I| \quad 1.$$

Sonsecuentemente A y B deberán ser no singulares

Por ello A^{-1} existe.

Premultiplicando $AB = I$ por A^{-1} se tiene

$$A^{-1} AB = A^{-1} I = A^{-1}$$

$$B = A^{-1} \quad \text{consecuentemente} \quad BA = I$$

c) Si A y B son dos matrices de orden n entonces

$$(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Demostración

$$ABB^{-1} A^{-1} = A I A^{-1} = AA^{-1} = I$$

de las propiedades a y b se cumple la suposición.

d) $(A^{-1})^{-1} = A$ Demostración

Si $A^{-1} = B$ por la propiedad b

$B^{-1} = A$

e) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

f) Si A es no singular y $AB = 0$ entonces $B = 0$

Demostración : Premultiplicando por A^{-1}

$A^{-1} \; A B = A^{-1} \; 0$

$B = 0.$

2-7.- CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR PARTICION DE MATRICES.-

Si M es una matriz no singular dividida en la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

en donde α es una submatriz de orden $s \times s$, β de orden $s \times m$ γ de $m \times s$ y δ de $m \times m$. $(n = m + s)$

M^{-1} existe y será dividida en forma igual a M o sea

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

donde A es $s \times s$, B es $s \times m$, C es $m \times s$ y D es $m \times m$.

Asumiendo que δ tiene inversa y δ^{-1} es conocida, entonces dado -- que $M M^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & \underline{0} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

desarrollando

$$\alpha A + \beta C = I_s$$

$$\alpha B + \beta D = 0$$

$$\gamma A + \delta C = 0$$

$$\gamma B + \delta D = I_m$$

despejando los valores de A, B, C y D se tiene

$$A = (\alpha - \beta \delta^{-1} \gamma)^{-1}$$

$$B = - A \beta \delta^{-1} \qquad 2\text{-}7\text{-}1$$

$$C = - \delta^{-1} \gamma A$$

$$D = \delta^{-1} - \delta^{-1} \gamma B$$

Como M^{-1} existe, existiran las submatrices A, B, C y D. Si δ^{-1} - existe, todas las operaciones se pueden verificar y A, B, C y D se pueden calcular de 2-7-1.

2-8.- VECTORES Y ESPACIOS EUCLIDEANOS.-

Las matrices de un solo renglón o columna se conocen frecuentemente -- como vectores.

A una matriz de un solo renglón se le llama vector renglón e vector hilera y a una matriz de una sola columna se le llama vector columna.

Un vector $a = (a_1 , a_2, \ldots, a_n)$ se le llama vector n - dimensional y a_i, $i = 1, \ldots n$, se le conoce como la componente i de a.

Geometricamente se consideran equivalentes los vectores renglón y columna.

D E F I N I C I O N E S :

Vector unidad. El vector unidad o unitario, designado por e_i es un -- vector cuya componente i vale 1 y todas las demás son nulas.

Vector cero: El vector cero o nula es un vector en que todas sus componentes son nulos. Se designa con 0.

Vector suma: Un vector suma es aquel en que todas sus componentes son 1.

El producto escalar de dos vectores está dado por el número:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \; b_i \qquad 2\text{-}8\text{-}1$$

Como $a = (a_1 \ldots, a_n)$ se puede interpretar como un punto en el espacio n - dimensional, la distancia entre dos puntos estará dada por:

$$| a - b | = \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad 2\text{-}8\text{-}2$$

D E F I N I C I O N.-

Espacio Euclideano : Un espacio euclidiano n - dimensional, representado por E^n se define como el conjunto de todos los vectores (puntos) - $a = (a_1 \ldots a_n)$.

Para estos vectores, la suma y multiplicación por un escalar están definidos por el algebra matricial. Asociado a dos vectores (puntos) cualquiera del conjunto está un número no negativo llamado distancia entre dos vectores (puntos). Esta distancia está dada por la expresión 1-10-2.

2-9.- DEPENDENCIA LINEAL.-

Un vector a de E^n se dice que es una combinación lineal de $a_1, \ldots a_k$ si a se puede obtener de:

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \quad \ldots \qquad 2\text{-}9\text{-}1$$

para un conjunto de escalares λ_i.

Dependencia linear. Un conjunto de vectores $a_1, \ldots . a_m$ de E^n se dice que son linealmente dependientes si existen escalares λ_i no todos - nulos tales que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0 \qquad 2\text{-}9\text{-}2$$

Si el unico conjunto de λ_i para el cual se cumple 1 - 11 - 2 es --- $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_m = 0$ se dice que los vectores son independientes.

Un conjunto de vectores que no es dependiente linealmente debe ser linealmente independiente.

$$\text{si} \quad a_1 = (a_{11} \ldots a_{n1}) \ ; \ a_m = (a_{1m}, \ldots a_{nm}), \quad 1\text{-}11\text{-}2$$

queda:

$$a_{11} \lambda_1 + a_{12} \lambda_2 + \ldots + a_{1m} \lambda_m = 0 \ldots \qquad 2\text{-}9\text{-}3$$
$$\vdots$$
$$a_{n1} \lambda_1 + a_{n2} \lambda_2 + \ldots + a_{nm} \lambda_m = 0$$

que constituye un conjunto de n ecuaciones lineales simultaneas con m - incognitas las λ_i.

Si existe otra solución además de la trivial, los vectores son linealmente dependientes.

La dependencia e independencia linear son propiedades de conjuntos-de vectores y no de los vectores individuales del conjunto. Para un conjunto que contiene un único vector a, la definición de dependencia linear implica que para que $\lambda \neq 0$ y $\lambda a = 0$; $a = o$ será un conjunto dependiente y - $\lambda a \neq 0$ será uno independiente.

Si un conjunto vectorial $a_1, \ldots, a_m$ de E^n contiene dos o mas -- vectores, entonces el conjunto es linealmente dependiente si y solamente - si uno cualquiera de los vectores es una combinación lineal de los otros.

D E M O S T R A C I O N.-

Supongamos que el vector a_m se puede obtener de una combinación lineal de los demás, o sea

$$a_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i a_i \quad \text{o bien} \quad \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i a_i - a_m = 0$$

lo que implica que los vectores son linealmente dependientes. Por otro - lado, si los vectores son linealmente dependientes entonces 2-11-3 se deberá cumplir por lo menos un $\lambda_i \neq 0$. Supongamos que $\lambda m \neq 0$, entonces:

$$a_m = - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} a_i$$

y un vector se puede escribir como una combinación lineal de los demás.

Un vector a es linealmente dependiente de un conjunto de vectores - $a_1, \ldots, a_m$ si a se puede expresar como una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_m$; de no ser así, a es independiente del conjunto.

Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, entonces cual quier sub-conjunto de estos vectores es también linealmente independiente.

Si un conjunto cualquiera de vectores es linealmente dependiente, cual quier conjunto de vectores que contenga al conjunto dado es también linealmente dependiente.

Se tendrá que el máximo número de vectores linealmente independientes en un conjunto es k, si en el conjunto hay por lo menos un conjunto de k vectores que son linealmente independientes, y no existe un subconjunto de $k + 1$ vectores que sea linealmente independiente.

Si $k < m$ es el máximo número de vectores linealmente independientes de un conjunto de m vectores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de E^n entonces, dado un subconjunto cualquiera de k vectores linealmente independientes cualquier otro vector del conjunto, se puede expresar como una combinación lineal de estos k vectores.

D E M O S T R A C I O N.-

Considerense los vectores $a_1, \ldots, ak$, tales que sean linealmente independientes.

El conjunto $a_1, \ldots, a_k, a_r$ deberá ser linealmente dependiente para cualquier $r = k + 1, \ldots, m$.

Esto implica que 2-9-2 se cumple y por lo menos un $\lambda_i \neq 0$. Sinembargo, λ_r no puede ser cero, ya que esto se opondría al hecho de que $a_1, \ldots, a_k$ es linealmente dependiente. Por consiguiente a_r se puede expresar como una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_k$.

2-10.- B A S E S.-

D E F I N I C I O N E S:

Conjunto Generador.

Un conjunto de vectores $a_1, \ldots, a_r$ de E^n se dice que genera o abarca a E^n si todos los vectores de E^n se pueden expresar como una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_r$.

De

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

se observa que los vectores unitarios generan E^n.

Un conjunto generador que contenga el mínimo número posible de vectores deberá ser linealmente independiente, ya que en un conjunto linealmente dependiente de vectores, por lo menos un vector se puede expresar como una combinación lineal de los demás y por lo tanto no se le requiere en el conjunto generador.

B A S E:

Una base de E^n es un subconjunto linealmente independiente de E^n que genera a todo el espacio.

Los vectores unitarios son base de E^n ya que son linealmente independientes.

Una base de E^n no es única, como se verá, existe un número infinito de bases para E^n.

La representación de cualquier vector en términos de un conjunto de vectores base es única. Es decir que cualquier vector de E^n se puede expresar como una combinación lineal de un conjunto de vectores base únicamente de una sola forma.

D E M O S T R A C I O N:

Sea l un vector cualquiera en E^n y sean $a_1, \ldots, a_r$ un conjunto de vectores base. Si se supone que l se pude expresar como una combinación lineal de los vectores base de dos maneras diferentes, o sea

$$l = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \quad ; \quad l = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i' a_i \qquad 2\text{-}10\text{-}2$$

$$\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda'_i) a_i = 0$$ y como el conjunto de vectores base es linealmente independiente, esto implica que $\lambda_i - \lambda'_i = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ o sea $\lambda_i = \lambda'_i$.

Consideraremos ahora una técnica que es fundamental en el método simplex para la solución de problemas de programación lineal. Esta consiste en reemplazar uno de los vectores base de E^n por un vector arbitrario l en tal forma que el nuevo conjunto también sea una base.

T E O R E M A :

Dado un conjunto de vectores base $a_1, \ldots, a_r$ de E^n, y otro vector cualquiera, $l \neq 0$ de E^n, entonces en la expresión de l como una combinación de a_i.

$$l = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i \qquad 2\text{-}10\text{-}2$$

Si cualquier vector a_i, para el cual $a_i \neq$ es reemplazado del conjunto $a_1, \ldots, a_r$ y l es agregado al conjunto el nuevo conjunto de r ventores es también base de E^n

D E M O S T R A C I O N.-

Por lo menos un α_i de 2-10-2 es diferente de cero ya que $l \neq 0$.

Si numeramos los vectores de tal suerte que $\alpha_r \neq 0$, se desea demostrar que el conjunto $a_1, \ldots, a_{r-1}, l$ es una base de E^n.

Para demostrar que el conjunto $a_1, \ldots, a_{r-1}, l$ es linealmente independiente supongamos lo contrario o sea:

$$\sum_{i=1}^{r-1} \delta_i \lambda_i + \delta l = 0 \qquad 2\text{-}10\text{-}3$$

y por lo menos un δ_i o δ es diferente de cero. Pero δ no puede ser cero porque esto implicaria que a_i, $i = 1, \ldots, r - 1$ son linealmente -

independientes. Sinembargo si de 2-10-2 eliminamos 1 obtendremos

$$\sum_{i=1}^{r-1} (\delta_i + \alpha_i \delta) \; a_i + \delta \, \alpha_r \, a_r = 0 \qquad \text{2-10-4}$$

donde $\delta \; \alpha_r \neq 0$

Sinembargo esto contradice el hecho de que a_i, $i = 1, \ldots, r$, son -- linealmente independientes luego el conjunto $a_1, \ldots, a_{r-1}$, 1 es lineal mente independiente.

Se puede ver por otro lado que cualquier vector Z de E^n se puede ex-- presar como una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_{r-1}$, 1. Dado que a_i, $i=1, \ldots, r$ forman una base, se puede escribir.

$$Z = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \, a_i \qquad \text{2-10-5}$$

Si se elimina a_r de 2-10-5 utioizando la expresión 2-10-2, se ob tiene:

$$Z = \sum_{i=1}^{r-1} \left[\gamma_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \gamma_r \right] a_i + \frac{\gamma_r}{\alpha_r} \, 1 \qquad \text{2-10-6}$$

que expresa a Z como una combinación lineal de $a_1, \ldots, a_{r-1}$, 1. Luego $a_1, \ldots, a_{r-1}$, 1 es una base de E^n.

Si en 2-10-2 1 sustituye a un vector a_i para el cual $\alpha_i = 0$, entonces el nuevo conjunto de vectores es linealmente dependiente y no constituye una base de E^n.

D E M O S T R A C I O N.-

Si $\alpha_r = 0$ y se sustituye a_r por 1 entonces

$$1 - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i a_i = 0 \qquad 2\text{-}10\text{-}7$$

Los vectores $a_1, \ldots, a_{r-1}, 1$ son linealmente dependientes.

2-11.- NUMERO DE VECTORES EN UNA BASE PARA E^n.-

T E O R E M A.-

Dos bases cualesquiera de E^n tienen el mismo número de vectores base.

D e m o s t r a c i ó n.-

Sean $a_1, \ldots, a_u$ un conjunto de vectores base de E^n y $b_1, \ldots, b_v$ otro conjunto cualquiera de vectores base.

Se desea demostrar que $u = V$.

Podremos expresar los vectores a_1 de tal forma que cuando b_v se exprese como una combinación lineal de a_i, $b_v = \Sigma \lambda_i a_i$, rntonces $\lambda_u \neq 0$.

De acuerdo con lo dicho en las secciones anteriores $a_1, \ldots, a_{u-1}$, b_v es una base de E^n.

Si ahora expresamos

$$b_{v-1} = \sum_{i=1}^{u-1} \delta_i a_i + \delta b_v \qquad 2\text{-}11\text{-}1$$

por lo menos una δ_i deberá ser diferente de cero, ya que de lo contrario el conjunto b_j no sería linealmente independiente.

Digamos que $\delta_{u-1} \neq 0$, entonces $a_1, \ldots, a_{u-2}, b_{v-1}, b_v$ es una base de E^n.

Si aplicamos este principio reiteradamente, llegaremos a una base que tendrá cualquiera de las siguientes dos formas, a saber:

$a_1, \ldots, a_{u-v}, \quad b_1, \ldots, b_\nu \quad ó \quad b_1, \ldots, b_v.$

Deberán existir por lo menos tantas a_i como b_j. De otra manera - se llegaría al hecho de que una b_j fuese una combinación lineal de algunas de las otras, hecho que contradice la independencia lineal de las b_j.

Por lo tanto $u \geq \nu$.

Sinembargo, se podría haber hecho las operaciones anteriores a parte- de las b_j y haber ido insertando las a_i se llegaría así a la conclusión de que $v \geq u$.

Por ello $u = v$ y con ello se ha demostrado el teorema.

Para determinar el número de vectores necesarios en una base de E^n - es únicamente necesario encontrar una base y contar el número de vectores- que posee, ya que como se acaba de ver, todas las demas bases deberán tener el mismo número de vectores.

Se demostró con anterioridad que los n vectores unitarios forman -- una base de E^n. Consecuentemente cualquier base de E^n deberá estar -- constituida de precisamente n vectores.

Esto querrá decir que cualquier conjunto de n vectores linealmente- independientes constituyen una base de E^n.

Cualquier conjunto de m vectores linealmente independientes, $m < n$ de E^n forman parte de una base de E^n, es decir que si $a_1, \ldots, a_m$ de E^n son linealmente independientes, entonces $n - m$ vectores adicionales son - necesarios para que a_i, $i = 1, m$ y los $n - m$ vectores constituyan una base de E^n.

La dimensión n de un espacio eudideano se caracterizó por el número de componentes en el conjunto de vectores que constituyen el espacio. Se- acaba de demostrar que el máximo número de victores linealmente independientes en E^n., es n. Podremos consecuentemente definir la dimensión de-un espacio por el máximo número de vectores linealmente independientes del espacio.

2-12.- ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES.-

D E F I N I C I O N.-

Un espacio vectorial es un conjunto de vectores agrupados bajo las -- operaciones de suma y producto por un escalar.

Esto querrá decir que si a y b pertenecen al conjunto, la suma a + b también pertenece al conjunto y por otro lado, si a pertenece al conjunto λa también pertenece al conjunto para cualquier escalar λ.

Se deberá notar que la distancia no requiere estar definida en un espacio vectoral. El vector 0 es siempre un elemento de un espacio vectoral, como también lo es - a si a es.

La totalidad de los vectores de n componentes se llama espacio vectorial n - dimensional y se designa con V_n.

Aunque E^n constituye un espacio vectorial no se cumple sinembargo -- que cualquier V_n sea un E^n.

D e f i n i c i ó n.-

Un subespacio S_n de V_n se define como un subconjunto de V_n que - constituye a su vez un espacio vectorial.

El subíndice n de S_n indica que los vectores tienen n componentes, es decir que son elementos de V_n.

Se define la dimensión de S_n como el máximo número de vectores linealmente independientes de S_n.

Se considera a' $S_n = V_n$ como un subespacio de V_n, de dimensión n es decir que el subespacio es totalmente de V_n.

Una interpretación geométrica de subespacios de E^3 es ya sea E^3 -

misma, un plano através del origen, una linea através del origen o el origen mismo (constituye este último un subespacio de un solo elemento y tiene dimensión 0).

Un conjunto de vectores de S_n genera S_n si cada vector de S_n se puede expresar como una combinación lineal de este conjunto de vectores. - Un conjunto linealmente independiente de vectores de S_n que genera S_n se llama base de S_n. Si S_n tiene dimensión k, entonces una base de S_n contendrá precisamente k vectores. Si S_n es un subespacio de E^n teniendo dimensión k, entonces, excepto por la notación S_n es igual a E^n.

2.13.- R A N G O.-

Las n columnas de una matriz A de orden $m \times n$ se pueden considerar como vectores de E^m. Las columnas de A están dadas por a.

D e f i n i c i ó n.-

El rango de columnas de una matriz A de orden, $m \times n$, indicado por $r(A)$, es el máximo número de columnas linealmente independientes en A.

T e o r e m a.-

El rango de A es K si y solamente si cualquier menor de A de orden $K+1$ es nulo mientras que existe por lo menos un menor de orden K diferente de cero.

Este teorema proporciona un método para determinar el rango de una matriz. Se determinará el orden del mayor menor diferente de cero y este será el rango de A.,

Por medio de este teorema es también posible determinar el máximo número de vectores linealmente independientes de un conjunto $a_1, \ldots, a_r$ de E^n.

Se forma una matriz $A = (a_1, \ldots, a_r)$ y se determina el orden del mayor menor diferente de cero.

El rango de renglones de una matriz A se puede definir como el máximo número de renglones linealmente independientes en A. Se demuestra fácilmente que el rango de renglones de A es igual al rango de columnas o lo que es lo mismo, que el máximo número de columnas linealmente independientes en A es igual al máximo número de renglones linealmente independientes.

El rango de A, es consecuentemente único y no será necesario distinguir entre rango de columnas o de renglones para demostrar esto solamente es necesario decir que el rango de renglones de A es igual al rango de columnas de A' y que el mayor menor diferente de cero de A aparece en A' y viceversa.

Las conclusiones anteriores indican que las columnas (o renglones) de una matriz no singular de orden n son linealmente independientes y forman una base de E^n.

Ademaás, una matriz de orden n cuyas columnas (o renglones) son base de E^n son no-singulares.

2-14.- FORMA DE PRODUCTO DE LA INVERSA.-

En el método simplex será frecuente el problema de calcular la inversa de una matriz, para la cual únicamente una columna es diferente de otra matriz cuya inversa se conoce.

Supóngase qee se tiene una matriz no singular $B = (b_1, \ldots b_n)$ y que B^{-1} se conoce. Si sustituímos la columna r de B por a y deseamos calcular la inversa de $B_a = (b_1, \ldots, b_{r-1}, a, b_{r+1}, \ldots, b_n)$.

Si las columnas de B y B_a son dos bases de E^n entonces B_a se pudo haber obtenido de B al intercambiar un vector de la base.

De lo visto en las secciones anteriores se tendrá que

$$a = \Sigma_i \; y_i \; b_i$$

B_a será no singular si y únicamente si $y_r \neq 0$, si este es el caso se tendrá:

$$b_r = B_a \; \eta$$

dono

$$\eta = \left[-\frac{Y_1}{Y_r}, \ldots, -\frac{Y_{r-1}}{Y_r}, \frac{1}{Y_r}, -\frac{Y_{r+1}}{Y_r}, \ldots, -\frac{Y_n}{Y_r} \right] \qquad 2\text{-}14\text{-}1$$

luego

$$B = B_a \; E, \quad E = \left[e_1, \ldots, e_{r-1}, \; \eta, \; e_{r+1}, \ldots, e_n \right] \qquad 2\text{-}14\text{-}1$$

o bién

$$B_a^{-1} = E \, B^{-1} \qquad 2\text{-}14\text{-}3$$

E se obtiene de la matriz identidad, al sustituir la columna r por η. Para calcular η por otro lado únicamente se requiere $y = B^{-1} a$.

La teoría anterior, proporciona una método para el cálculo de una matriz no singular $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Se partirá de la matriz identidad ($I^{-1} = I$) y se inserta una columna de B cada vez. Por ejemplo, se puede comenzar por insertar la primera columna de B a I, quitar la columna 1 de I para obtener B_1.

Seguidamente podremos insertar la 2_a columna de B en B_1, quitando la columna 2 de B_1, para obtener B_2 etc. Entonces

$$B^{-1} = E_n E_{n-1} \dots E_1, \qquad 2\text{-}14\text{-}4$$

donde

$$E_i = (e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, \eta_i, e_{i+1}, \dots e_n) \qquad 2\text{-}14\text{-}5$$

$$\eta_i = \left[-\frac{Y_{1i}}{Y_{ii}}, \dots, -\frac{Y_{i-1,i}}{Y_{ii}}, \frac{1}{Y_{ii}}, -\frac{Y_{i+1,i}}{Y_{ii}}, \dots -\frac{Y_{ni}}{Y_{ii}} \right] \qquad 2\text{-}14\text{-}6$$

y

$$Y_i = B_{i-1}^{-1} b_i, \quad B_i^{-1} = E_i \; E_{i-1}, \dots E_1$$

$$B_i^1 = E_i \; B_{i-1} \quad i = 1, \dots, n \qquad 2\text{-}14\text{-}7$$

$$B_o^{-1} = I$$

E j e m p l o :

Considérese una matriz $B = (b_1, b_2, b_3)$ cuya matriz inversa es

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Sustituyamos la segunda columna de B por $a = [2,7,5]$ para obtener la matriz $B_a = (b_1, a, b_3)$.

Para calcular B_a^{-1}, se calculará primero :

$$Y = B^{-1} a = \left[6 + 7 + 25,\ 12 + 14 + 20,\ 12 + 56 + 10 \right]$$

$$Y = \left[38,\ 46,\ 78 \right]$$

seguidamente calcularemos el vector :

$$\eta = \left[-\frac{Y_1}{Y_2},\ \frac{1}{Y_2},\ -\frac{Y_3}{Y_2} \right] = \left[-\frac{38}{46},\ \frac{1}{46},\ -\frac{78}{46} \right]$$

la matriz E se obtendrá sustituyendo la segunda columna de I_3 por η

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{38}{46} & 0 \\ 0 & \frac{1}{46} & 0 \\ 0 & -\frac{78}{46} & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$B_a^{-1} = E\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{38}{46} & 0 \\ 0 & \frac{1}{46} & 0 \\ 0 & -\frac{78}{46} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_a^{-1} = \begin{bmatrix} 3 - \frac{6 \times 38}{46}, & 1 - \frac{2 \times 78}{46}, & 5 - \frac{4 \times 38}{46} \\ \frac{6}{46}, & \frac{2}{46} & \frac{4}{46} \\ -\frac{6 \times 78}{46} + 6, & -\frac{2 \times 78}{46} + 8, & -\frac{4 \times 78}{46} + 2 \end{bmatrix}$$

$$B_a^{-1} = \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 138 - 228, & 46 - 76, & 230 - 152 \\ 6 & 2 & 5 \\ -468 + 276, & -156 + 368, & -312 + 92 \end{bmatrix}$$

$$B_a^{-1} = \frac{1}{46} \begin{bmatrix} -90 & -30 & 78 \\ 6 & 2 & 5 \\ -192 & 212 & -220 \end{bmatrix}$$

2-15.- ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS.-

Un sistema de m ecuaciones lineales simulteaneas con n incognitas, $X_1, \ldots, X_n$, tiene la forma

$$\begin{matrix} a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + \ldots + a_{mn} X_n = b_m \end{matrix} \qquad 2\text{-}15\text{-}1$$

donde a_{ij}, b_i son constantes conocidas.

Si

$$A = [\, a_{ij} \,], \quad x = [\, X_1, \ldots X_n \,]$$

$b = [\, b_1, \ldots, b_m \,]$ el arreglo 2-15-1 expresado en forma matricial sería:

$$A X = b$$

Estudiemos el caso para el cual $m = n$.

Entonces si $r(A) = n$ es decir que $|A| = 0$ se obtendrá - una única solución $x = A^{-1} b$. La solución es única, porque la inversa lo es.

Utilizando la expresión 1-8-2, podemos expresar la solución $x = A^{-1}b$ según sus componentes de la siguiente manera:

$$X_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, b_j \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{2-15-2}$$

De la definición de un determinante se observa que $\Sigma_j A_{ji} b_j$ es el determinante de la matriz formada de A al sustituir la columna i por - b, o sea

$$X_1 = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdot & \cdot \\ \vdots & \\ b_n & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} ; \ldots ; X_n = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots a_{1, n-1}, & b_1 \\ \cdot & & \cdot \\ & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots a_{n, n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

2 - 1 2-15-3

Las ecuaciones 2-15-3 se conocen como la regla de Cramer para encon--- trar la solución de un sistema de n ecuaciones con n incognitas. Este método no es numericamente muy eficiente sin embargo tiene un gran valor -- teórico.

Un método más eficiente para la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es el conocido como cuadro de reducción de Gauss. Es quizá el primer intento que se ocurre al intentar solucionar un sistema de- ecuaciones.

Si numeramos las variables y las ecuaciones de 2-15-1 de tal manera -- que $a_{11} \neq 0$, dividimos la primer ecuación por a_{11} y se utiliza el resultado para eliminar X_1 en las ecuaciones 2, ..., n esto es

$$
\begin{aligned}
X_1 + a'_{12} X_2 + \cdots + a'_{1n} X_n &= b'_1 \\
a'_{22} X_2 + \cdots + a'_{2n} X_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
a'_{n2} X_2 + \cdots + a'_{nn} X_n &= b'_n
\end{aligned}
\qquad 2\text{-}15\text{-}4
$$

donde

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}, \quad j = 2, \ldots n ;$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{11}} a_{ij}$$

$$i = 2, \ldots, n \ ; \ j = 2, \ldots, n$$

$$b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}} ; b'_i = b_1 = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 , \quad i = 2, \ldots, n$$

Seguidamente se divide la segunda ecuación de 2-15-4 por a_{22} (numerar las variables si es necesario para que $a_{22} \neq 0$) y se elimina x_2 en las ecuaciones 3, ..., n. En un número finito de pasos se llegará a un conjunto de ecuaciones que tendrán la siguiente forma (si $| A | \neq 0$)

$$
\begin{bmatrix}
1 & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\
 & 1 & \cdots & h_{2n} \\
 & & & \vdots \\
 & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n
\end{bmatrix}
\qquad 2\text{-}15\text{-}5
$$

Entonces $X_n = g_n$ y sustituyendo hacia atras se tendrá.

$$x_{n-1} = g_{n-1} - h_{n-1} g_n \text{ etc.}$$

Regresemos nuevamente a las ecuaciones 2-15-1 y consideremos ahora-ahora el caso general, o sea cuando m pueda ser diferente de n. Según - esto m podrá ser mayor igual o menor que n ($m >=< n$).

Primeramente determinaremos las condiciones para las cuales sabemos - que existe por lo menos una solución a 2-15-1. Para ello formemos primero la matriz $m \times (n + 1)$ o sea $A\,b = (A, b)$, es decir que Ab, llamada matriz aumentada del sistema se obtiene al anexar a A el vector b - que se convierte en la columna $n + 1$.

Se deberá notar que $r(Ab) \geq r(A)$ ya que cualquier menor de - A también aparece en AB.

Si ahora $r(Ab) > r(A)$, no existirá una solución para 2-15-1. Esto se debe a que si $r(Ab) = k > r(A)$ cualquier conjunto de k co-lumnas linealmente dependientes de Ab deberá contener a b.

Consecuentemente b no se podrá expresar como una combinación lineal de las columnas de A es decir que no existen unas x_j tales que $\Sigma_j x_j a_j = b$. Por otro lado, si $r(Ab) =_j r(A) = k$, entonces si - existe un conjunto de k columnas de A tales que cualquier columna de Ab y b en particular se pueden expresar como combinaciones lineales de estas k columnas. En conclusión existirá por lo menos una solución a 2-15-1 y esta con no mas de k de las variables diferentes de caro.

El conjunto de ecuaciones 2-15-1 se llama consistente si existe por-lo menos una solución de otra manera será inconsistente.

E j e m p l o:

Las ecuaciones:

$$2\,x_1 + 5\,x_2 = 9$$

$$3\,x_1 + 7.5\,x_2 = 3$$

son inconsistentes y no existe solución ya que $r\,(A) = 1$ y $r\,(Ab) = 2$.

Esto se debe a que si multiplicamos la primera ecuación por $^3/2$, la parte izquierda resulta igual a la parte izquierda de la segunda ecuación.

Sinembargo la parte derecha de la primera ecuación no se convierte en la parte derecha de la segunda ecuación. Geometricamente las ecuaciones representan dos lineas paralelas no-coincidentes que no se intersectan.

Estudiemos ahora un sustema de ecuaciones del tipo 2-15-1 para el caso en que $r(A) = r\,(A_b) = K < m$. Es decir que si numeramos las ecuaciones de tal manera que las K primeras sean linealmente independientes, entonces si designamos los renglones de A_b con (a^i, b_i) se podrá expresar cualquier renglón cuya índice sea $r \varepsilon > k$ como una combinación lineal de los primeros k renglones, es decir:

$$(a^r, b_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}\ (a^i, b_i)\ ; \quad r = k+1, \ldots, m. \qquad 2\text{-}15\text{-}6$$

o bién

$$a^r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}\ a^i \quad ; \quad b_r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}\ b_r$$

$$r = K+1, \ldots, m \qquad 2\text{-}15\text{-}7$$

Supóngase que x satisface a las primeras k ecuaciones de 1-17-2, o sea

$$a^i x = b_i \qquad i = 1, \ldots, k \text{, entonces}$$

$$a^r x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir} \; a^i x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir} \; b_i = b_r$$

$$r = k + 1, \ldots, m \qquad 2\text{-}15\text{-}8$$

Consecuentemente, cualquier x que satisfaga a k ecuaciones $a^i x = b_i$, para la cual los correspondiente renglones de A son linealmente independientes satisface a todas las m ecuaciones.

En otras palabras, todas excepto k ecuaciones pueden ser ignoradas- al buscar la solución de 2-15-1. Se dice que m-k de las ecuaciones -- son redundantes, es decir que no implican ninguna nueva restricción a las- variables.

Hemos supuesto que los primeros k renglones de la matriz A son linealmente independientes. Si llamamos A_1 a la submatriz formada de los primeros k renglones y columnas de A, podremos expresar a las primeras - k ecuaciones de 2-15-1 de la siguiente manera:

$$A_1 \; x_\alpha + R \, X_\beta = b^* \qquad 2\text{-}15\text{-}9$$

donde $X_\alpha = [\, X_1, \ldots, X_k \,]$; $X_\beta = [\, X_{k+1}, \ldots, X_n \,]$,

$b^* = [\, b_1, \ldots, b_k]$, y R contiene las n-k columnas de A. Cualquier $X = [\, X_\alpha, X_\beta]$ que satisfaga a 2-15-3 satisface también a todas las m ecuaciones de 2-15-1. Supongamos que las variables fueron - numeradas de tal suerte que A_1 es np-singular, entonces

$$X_\alpha = A_1^{1} \; b^* - A_1^{-1} \; R \; X_\beta \qquad 2\text{-}15\text{+}10$$

o sea que dada cualquier X_β podremos calcular X_α en términos de X_β.

Es por ello que las variables $n-k^1$ podrán tomar cualquier valor arbitrario, los valores para las restantes k variables en X se pueden encontrar de tal forma que $X = [X_\alpha \; X_\beta]$ sea solución de 2-15-1.

Todas las soluciones de 2-15-1 se pueden formar dando todos los valores posibles al conjunto de variables X_β.

Es, decir que si $\nu n > k$, existirá un número infinito de soluciones diferentes para 2-15-1. Hemos demostrado por lo tanto que el conjunto de ecuaciones $A x = b$ puede:

1.- No tener ninguna solución

2.- Tener una única solución

3.- Tener una infinidad de soluciones.

Sea X_1 una solución de 2-15-1, entonces cualquier otra solución x_2 de 2-15-1 se podrá escribir como $X_2 = X_1 + Y$, $Y = X_2 - X_1$. Nótese que Y satisface a $AY = 0$. Se dice que un conjunto de ecuaciones lineales $AX = 0$ es hemogeneo se ha demostrado que cualquier solución a 2-15-1 se puede obtener a partir de una solución de 2-2-15 mas todas las soluciones del conjunto de ecuaciones homogeneas, consiguientemente el conjunto de todas las soluciones de $AX = 0$ es un subespacio de E^n. La dimensión de este subespacio es $n-k$ donde $r(A) = k$. Entonces la dimensión del espacio generado por las soluciones de 2-15-1 deberá también tener dimensión $n-k$, Sinembargo , si $b \neq 0$, el espacio oo es un subespacio de E^n porque 0 no es una solución.

El espacio generado por la solución de 2-15-1 con $b \neq 0$ es llamado un subespacio afin. Este espacio se ha trasladado fuera del origen porque $b \neq 0$.

E j e m p l o :

La solución de $a_1 \; x_1 + a_2 \; x_2 + a_3 \; x_3 = b$ están sobre un plano. Es plano no pasará por el origen excepto cuando $b = 0$.

2-16.- SOLUCIONES BASICAS.-

Consideraremos ahora las solcoiones a un sistema de m ecuaciones -- $AX = b$ con $n > m$ incógnitas que tienen tantas variables nulas como sea - posible.

De la sección anterior sabemos que si $r(A) = k$ y si seleccionamos- k columnas cualesquiera de A que sean linealmente independientes, podrémos dar valores arbitrarios a $n-k$ variables que no estén asociadas con a estas columnas.

Las restantes k variables serán exclusivamente determinadas en términos de las $n-k$ variables. Entonces para un sistema de este tipo podemos hacer $n-k$ variables iguales a cero. Las restantes k variables serán en general diferentes de cero ya que las ecuaciones se deberán cumplir. (En algunos casos, una o mas de estas variables podrán ser nulas).

Es decir que supondremos que $r(A) = r(A_b) = m$.

Esto implica que ninguna de las ecuaciones es redundante.

D e f i n i c i ó n:

Solución Básica: Dado un sistema de ecuaciones, lineales simultaneas con n incognitas $AX = b$ $(m < n)$ y $r(A) = m$.

Si cualquier matriz no singular $m \times m$ se escoge de A, y si todas -- las $n-m$ variables no asociadas con las columnas de esta matriz se hacen nulas, la solución del sistema resultante de ecuaciones se llama solución básica. Las m variables que pueden ser diferentes de cero se llaman variables básicas.

Si se escogen m columnas linealmente independientes de A y se forman así una matriz B cuyas columnas son las columnas seleccionadas de - A, entonces la solución básica estará dada por

$$X_b = B^{-1} b \qquad 2\text{-}16\text{-}1$$

donde todas las variables no asociadas con las columnas de esta matriz se-hacen iguales a cero.

El número máximo posible de soluciones básicas será la combinación de n variables tomadas m a la vez, es decir

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

Para obtener este número de soluciones es necesario que cualquier conjunto de m columnas de A sean siempre linealmente independientes.

D e f i n i c i ó n.-

Degeneración: Una solución básica de $AX = b$ se dice que es degenerada si una o mas de las variables básicas es nula.

T e o r e m a s:

a) Es condición necesaria y suficiente para la existencia y no degeneración de todas las soluciones básicas posibles de $AX = b$ la independencia lineal de cada conjunto de m columnas de la matriz aumentada --- $A_b = (A, b)$.

b) Es condición necesaria y suficiente para una solución básica cualquiera $X_B = B^{-1} b$ para no ser degenerada la independencia lineal de by cualquier conjunto de m-1 columnas de B.

Si se tiene una solución de 2-15-1 que posee precisamente m variables diferentes de cero, y si esta solución es única deberá ser entonces - una solución básica para demostrarlo es únicamente necesario demostrar que las columnas de A asociadas con las variables diferentes de cero.son li--- nealmente independientes. Si fuesen dependientes, entonces algunas de --- ellas, digamos K, podrian expresarse como una combinación lineal de las-- otras. Esto, sinembargo, contradice el hecho de que la solución es única porque para cualquier valor arbitrario de X_k, los valores de las otras --m-1 variables podrían encontrarse que forman una solución. (las variables nulas permaneciendo iguales a cero).

E j e m p l o.-

$$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 8$$

El máximo posible de soluciones básicas es:

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{6}{2 \times 1} = 3$$

Si $X_3 = 0$:

$$2X_1 + 3X_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 = 8$$

$$-X_2 = -10$$

$X_2 = 10$ $\qquad X_1 = 8 - 2X_2 = -12$

$X_1 = -12$

Si $X_2 = 0$

$$2X_1 + 2X_3 = 6$$
$$X_1 + 4x3 = 8$$

$$-6X_3 = -10$$
$$X_3 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$X_1 = 8 - 4X_3 = 8 - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$$

$$X_1 = \frac{4}{3}$$

$$X_3 = \frac{5}{3}$$

Si $X_1 = 0$

$$3X_2 + 2X_3 = 6$$

$$2X_2 + 4X_3 = 8$$

$$-4X_2 = -4$$

$$X_2 = 1$$

$$X_3 = 3 - \frac{3}{2}X_2 = \frac{6}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$X_3 = \frac{3}{2}$$

o sea las tres soluciones básicas existen y no son degeneradas.

2-17.- TRANSFORMACIONES LINEALES.-

El álgebra matricial se conoce también por el algebra de las transformaciones lineales. Sea A una matriz de orden $m \times n$. Para cualquier vector X de E^n, el vector $Y = AX$ se puede considerar como un vector en E^m corresponde un punto $Y = AX$ en E^m. El punto $Y = AX$ se llama imagen de X. Se dice que A mapea a E^n dentro de todo o parte de E^m. Una transformación matricial de la forma $Y = AX$ se dice que es una transformación lineal. Una transformación matricial o lineal tiene la propiedad de conservar la suma bajo la transformación: Si $Y_1 = AX_1$ y $Y_2 = AX_2$, entonces Si $Y_3 = A(X_1 + X_2)$ se implica que $Y_3 = Y_1 + Y_2$. Además una-transformación lineal o matricial conserva la multiplicación por un escalar, es decir si $Y = AX$ y $Y' = A(\lambda X)$, entonces $Y' = \lambda Y$.

Si A es una matriz de orden $m \times r$ y B es una matriz de orden $r \times n$, la relación $Y = A\,B\,X$, se puede considerar como una secuencia de transformaciones lineales.

La matriz B transforma a un punto de E^n a uno de E^r y A transforma a un punto de E^r en uno de E^m.

2-18.- CONJUNTOS DE PUNTOS.-

El concepto de conjunto es tan básico que es difícil definirlo en función de iddas o conceptos aún mas fundamentales. Se pueden dar las siguientes expresiones como sinónimos:

a) Un conjunto de elementos

b) Una colección de objetos

c) Un número de cosas

Un conjunto consiste en un número finito o infinito de elementos. Indicaremos un conjunto con letras mayúscubas como por ejemplo A, B, etc. - los elementos del conjunto se indicarán por a_i, b_i, etc.

Los parentesis { } encierran a los elementos que pertenenen al conjunto. Es decir que un conjunto A que contiene a los elementos a_i se indicará por $A = \{ a_i \}$.

Dos conjuntos Ay B son iguales, $A = B$, si contienen precisamente los mismos elementos. La notación $a_i \in A$ indica que a_i es un elemento de A y $Aa_i \notin A$. indica lo contrario. Un subconjunto B de A es un conjunto én que todos sus elementos están en A. Sinembargo no todos los elementos de A deberán estar en el subconjunto B; B es un subconjunto propio de A. si A contiene por lo menos un elemento que no pertenece a B. La notación $B \subset A$ o $A \supset B$ indica que B es un subconjunto de A.

La intersección de un número finito de conjuntos $A_1, \dots, A_k$ y que qe in dica por $A_1 \cap A_2 \cap A_k$, es el conjunto que contiene a todos los elementos comunes a $A_1, \dots, A_k$. La unión de un número finito de conjuntos $A_1, \dots, A_k$ y que se indica por $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ es el conmunto que contiene a todos los elementos de por lo menos uno de los conjuntos $A_1, \dots, A_k$.

Los conjuntos de puntos son conjuntos cuyos elementos son vectores o- puntos en E^n.

Como el enfoque buscado es principalmente geométrico, nos referimos a los vectores como puntos en E^n. Los conjuntos de puntos pueden contener u un número finito a una infinidad de elementos.

Generalmente contendrán un número infinito de elementos. Los conjuntos de puntos están frecuentemente definidos por alguna propiedad o propiedades que satisface el conjunto.

E j e m p l o.-

Consideremos el conjunto de puntos de E^3 encerrados dentro del elipsoide.

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} < 1 \quad (a, b, c \text{ reales} > 0)$$

La forma de representar este conjunto es

$$X = \{ [X_1, X_2, X_3] \mid \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} < 1 \},$$ y en la - notación.

$$X = \{X \mid P(X)\} \quad - - - \quad 2-18-1$$

indicará que el conjunto de puntos $X = \{X\}$ tiene o cumple la propiedad -- (o propiedades) P (X). En el ejemplo enterior, la propiedad P es la de-- sigualdad

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} < 1$$

Si no e isten puntos que posean la propiedad P, entonces el conjunto 2-18-1 no contiene elementos y se llama conjunto vacío

Consideraremos que siempre existe por lo menos un elemento, a no ser que se establezca lo contrario.

Una hiperesfera en E^2 con centro en a y radio $\epsilon > o$ se define como el conjunto de puntos $X = \{X \mid |X - a| = \epsilon\}$ es decir que la ecuación de una hiperestera en E^n es $\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 = \epsilon_1^2$ que es un círculo en E^2 y una esfera en E^3.

El interior de una hiperesfera con centro en a y radio ϵ es el con-- junto de puntos $X = \{X \mid |X - a| < \epsilon\}$. Un entorno ϵ alrededor del punto a está definida por el conjunto de puntos que quedan dentro de la hiperesfe ra con centro en α y radio ϵ.

Un punto α es un punto interior del conjunto A si existe un entorno ϵ alrededor de α que contenga únicamente puntos del conjunto A. Un punto interior de A deberá ser un elemento de A. Un punto α es un punto fron-- tera* del conjunto A, si cualquier entorno ϵ alrededor de α (independien- temente de que tan pequeño sea $\epsilon > o$) contiene puntos que pertenecen al con junto un punto frontera de A no es indispensablemente un elemento de A.

Un conjunto A es abierto si únicamente contiene a puntos interiores. Un conjunto A es cerrado si contiene a todos sus puntos frontera. Un --

* pu o de acumulación (T M Apostol)

conjunto podrá no ser ni abierto ni cerrado, si contiene a algunas, pero no todas sus a sus puntos frontera.*

* o punto de acumulación (T.M. Apóstol)

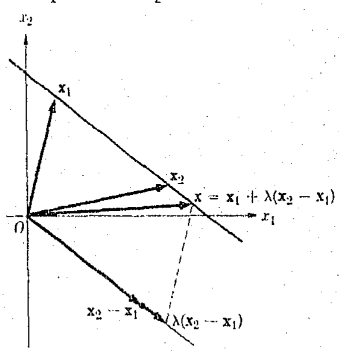
Se dice que un conjunto está acostado superiormente si existe un número positivo Γ tal que para cualquier $\alpha \epsilon A.$, $|\alpha| < \Gamma$. Un conjunto acotado superiormente está en el interior de una hiperesfera de radio Γ y centro en el origen.

Un conjunto A se dice que está acotado inferiormente si existe un Γ con cada componente finita tal que para todas las $\alpha \epsilon A$, $\alpha \geq \Gamma$. Un conjunto acotado interiormente tiene un límite interior para cada componente de -- cada punto del conjunto.

2-19.- RECTAS E HIPERPLANOS.-

Considérese la recta en E^2 indicada en la figura 2-1. Esta línea -- pasa a través de los puntos X_1 y X_2, y al vector $X_2 - X_1$ paralelo a la -- línea. De acuerdo con la ley aditiva del álgebra vectoral, para cual---- quier punto X sobre la recta, existe una λ tal que

$$X = X_1 + \lambda(X_2 - X_1) = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 \quad --- 2 - 19 - 1$$



En E^n se define una recta a través de los dos puntos X_1 y X_2, ----- $X_1 \neq X_2$

como el conjunto de puntos

$$X = \{ X \mid X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 , \lambda \text{ reales} \} \quad (2\text{-}19\text{-}2)$$

En la figura 1-1 nótese que al ir variando λ entre0 y 1, se --- traza la parte de la recta comprendida entre X_1 y X_2.

En E^n el segmento de recta comprendida entre X_1 y X_2 está definida por el conjunto de puntos

$$X = \{ X \mid X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 , 0 < \lambda < 1 \} \quad (2\text{-}19\text{-}3)$$

En E^2, $C_1 X_1 + C_2 X_2 = Z$ es una recta para valores conocidos de -- C_1, C_2 y Z, en E^3, $C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 = Z$ es un plano

En E^n se dice que el conjunto de puntos X que satisfacen aa

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n = Z \quad --- \ 2\text{-}19\text{-}4$$

(no todas las $C_j = 0$)

definen un hiperplano para valores conocidos de c_j y Z.
Si designamos con $C = (C_1, \cdots, C_n)$;
entonces el hiperplano 2-19-4 se puede indicar por $CX = Z$

En un problema de programación lineal, el conjunto de todas las X que dan un cierto valor a la función objetiva es un hiperplano.

Un hiperplano pasará por el origen cuando $Z = 0$ es decir $CX = 0$. --- nótese que esta relación implica que C es otorgonal a cualquier vector X en el hiperplano.

Cuando $Z \neq 0$, entonces sí X_1 X_2 satisfacen a 2-19-4, es decir que -- están en el hiperplano $C(X_2 - X_1) = 0$

Esto implica que C es el vector normal al hiperplano;

$$\pm C / | c |$$

se llaman normales unitarias. Dos hiperplanos serán paralelos si tienen las mismas normales unitarias, o sea, que las hiperplanos $C_1 X = Z_1$ y ---- $C_2 X = Z_2$ son paralelos si $C_1 = \lambda C_2$, $\lambda \neq 0$.

Considérese el hiperplano $CX = Z_0$.

El conjunto de puntos $X_0 + \lambda C'$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 0$

$$CX_0 = Z_0,,$$

(C es un vector renglón, así que C' es un vector columna).

Nótese que estos puntos caen en el hiperplano $CX = Z_1$ donde ----

$$Z_1 = Z_0 + \lambda \mid C \mid^2 > Z_0$$

los puntos sobre el hiperplano $CX = Z_1$ satisfacen $CX > Z_0$. Intuitivamente se dice que el hiperplano $CX = Z_1$ es obtenido al mover $CX = Z_0$ paralelamente a sí mismo en la dirección de C.

Un hipeplano $CX = Z$ divide a toda el E^n en tres conjuntos mutuamente exclusivos y colectivamente exahustivas. Estas son:

1.- $X_1 = \{ X \mid CX < Z \}$,

2.- $X_2 = \{ X \mid CX = Z \}$,

3.- $X_3 = \{ X \mid CX > Z \}$,

Los conjuntos X_1 y X_3 se llaman semi-espacios abiertos.

En E^2 y E^3 un semi-espacio es todo aquel E^2 o E^3 que queda de un lado de una recta o plano respectivamente. Los conjuntos

$X_4 = \{ X \mid CX \leq Z$ y $X_5 = \{ X \mid CX \geq Z \}$

se llaman semi-espacios cerrados.

Nótese que

$$X_4 \cap X_5 = X_2$$

Los hiperplanos son conjuntos cerrados, de hecho, cada punto sobre un hiperplano es un punto frontera (punto de acumulación). Además los semi-- espacios cerrados son conjuntos cerrados. Por otro lado semi-espacios --- abiertos son conjuntos abiertos.

2-20.- CONJUNTOS CONVEXOS.-

Definición.-

Un conjunto X es convexo, si para dos puntos cualquiera X_1, X_2 del -- conjunto, el segmento de recta que une a estos puntos también pertenece al conjunto.

La definición implica que si X_1, $X_2 \in X$, entonces cualquier punto

$$X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 , \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

también deberá pertenecer al conjunto. Por convención se dice que cualquier conjunto que contiene únicamente un punto es convexo

La expresión $\lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 , \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

se le llama combinación convexa de X_1, X_2. Intuitivamente un conjunto convexo no puede tener "huecos", deberá ser sólido , no "re-entrante", es decir que sus fronteras son convexas hacia afuera del conjunto.

Definición.-

Punto Límite.- Un punto X es un punto límite o punto extremo de un conjunto convexo si y solamente si no existen otros puntos X_1, X_2 , ---

$$X_1 \neq X_2 ,$$

del conjunto tales que

$$X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 , \quad 0 < \lambda < 1$$

Nótese que λ pertenece a un conjunto abierto. La definición implica que un punto extremo no puede estar 'entre' otras dos puntos del conjunto. Es evidente que un punto extremo es un punto frontera (punto de - acumulación) del conjunto, ya que de otra manera estaría situado entre -- dos puntos del conjunto.

Sin embargo, no todos los puntos de acumulación de un conjunto convexo son necesariamente puntos extremos. Algunos puntos frontera o de -- acumulación pueden estar situados entre otros puntos frontera.

Ejemplos:

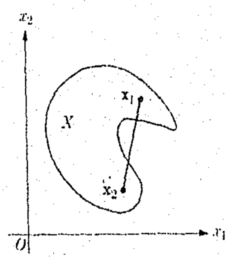
a) Un triángulo y su interior forman un conjunto convexo. Los vértices del triángulo son sus únicos puntos extremos o límites.

b) El conjunto

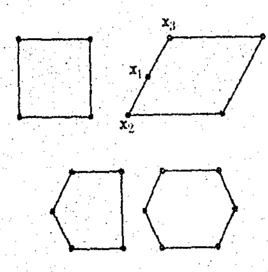
$$X = \{ [X_1, X_2,] \mid X_1^2 + X_2^2 < 1 \}$$

es convexo. Cada punto sobre la circunferencia es un punto extremo.

c) El conjunto de la figura 2-2 no es convexo ya que la recta que une a X_1 con X_2 no está totalmente dentro del conjunto. El conjunto es re-entrante.



d) Los polígonos de la figura 2-3 son conjuntos convexos, y los puntos extremos son las vértices. El punto X_1 no es un punto extremo ya que se puede definir como una combinación convexa de X_2 Y X_3 con $0 < \lambda < 1$



Un hiperplano es un conjunto convexo. Para demostrarlo es únicamente necesario notar que si X_1 y X_2 están sobre el hiperplano, - es decir, $CX_1 = Z$, $CX_2 = Z$, entonces

$$X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1$$

también está sobre el hiperplano ya que

$$CX = C [\lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1] = \lambda CX_2 + (1 - \lambda) CX_1$$

$$CX = \lambda Z + (1 - \lambda) Z = Z$$

En forma análoga, los semi-espacios abiertos y cerrados también - son conjuntos convexos.

La intersección de dos conjuntos convexos también es convexo. -- Para demostrar esto, considérense los conjuntos convexos X_1, X_2 y sean X_1, X_2

dos puntos cualesquiera de $X_3 = X_1 \cap X_2$

(si únicamente existe un punto en X_3 entonces X_3 es automáticamente convexo por definición). Entonces

$$\lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 \in X_1 \qquad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad \text{y} +$$

$$\lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1 \in X_2 \qquad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1$$

esto implica que

$$\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1 \in X_1 \cap X_2 = X_3$$

y consecuentemente X_3 es convexo. Si X_1 y X_2 son conjuntos cerrados, entonces $X_3 = X_1 \cap X_2$

es también cerrado. Para demostrar esto es únicamente necesario notar que cualquier punto frontera (acumulación) de X_3 es un punto frontera de X_1 o X_2. Si. embargo X_1 X_2 son cerrados, luego - X_3 contiene a todos sus puntos frontera y es por ello cerrado.

En forma más general, la intersección de cualquier número finito de conjuntos convexos es convexa, y si cada una de los conjuntos es cerrada, la intersección es también cerrada.

De los resultados anteriores se deduce que la intersección de un - número finito de hiperplanos o semi-espacios, o de las dos es un - conjunto cerrado. Además la intersección de un número finito de - hiperplanos, o semi-espacios cerrados, o de ambos es un conjunto - convexo cerrado.

Estos resultados tienen una inmediata aplicación a la programación lineal como se verá en el capítulo siguiente las limitaciones a un problema de programación lineal se pueden expresar como

$$\sum_{j=1} \alpha_{ij} X_j \{ < = > \} b_i \qquad i = 1, \ldots, m \quad --- (2\text{-}20\text{-}1)$$

Si hacemos

$$a^i = (a_{1i}, \ldots, a_{ri}),$$

entonces la expresión

2-20-1

se convierte en

$$a^i X \quad \{ < = > \} \; b_i, \qquad i=1, \ldots, m.$$

cada una de las ecuaciones limitadoras requiere que las X posibles estén en algún semi-espacio cerrado de E^r dado o si la igualdad - es la que rige la ecuación, esté en algún hiperplano dado. Además existen como se verá las condiciones de no negatividad o sea,

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, r$$

Si ahora escribimos

$$a^{m+j} = e'_j$$

entonces $\quad X_j \geq 0 \quad$ se convierte en

$$a^{m+j} X = e'_j X \geq 0$$

cada una de las restricciones de no-negatividad requiere que las X permitidas estén en algún semi-espacio cerrado.

La región de E^r definida para $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, r$ se llama-ortante no negativo.

Cualquier solución posible X deberá ser simultaneamente un ele-- mento de cada uno de los conjuntos.

$$X_i = \{ X \mid a^i x \; (\leq = \geq) \; b_i \} \qquad i = 1, \ldots, m+r$$

2-20-2

donde $b_i = 0 \quad i = m+1, \ldots, m+r$. Por ello el conjunto de solu-- ciones posibles de un problema de programación lineal (si es que - existe una solución posible) es un conjunto convexo. Además, este conjunto está acotado interiormente por 0 ya que $X \geq 0$.

El análisis anterior también muestra que el conjunto de soluciones de un sistema, de m ecuaciones lineales con n incognitas, $AX = b$, es un conjunto convexo cerrado.

El conjunto de soluciones es la intersección de m hiperplanos. Además el conjunto de soluciones no negativas de $Ax = b$, es decir el conjunto de soluciones con $x \geq 0$ es conjunto convexo cerrado.

Hemos definido una combinación convexa de dos puntos. Esta definición se puede generalizar a la del concepto de combinaciones convexa de un número finito de puntos $x_i, \ldots, x_m$ se define como un punto.

$$X = \sum_{i=i}^{m} U_i x_i \quad , \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} U_i = 1 \qquad 2\text{-}20\text{-}3$$

De su definición se demuestra que todas las combinaciones convexas de un número finito de puntos $X_1, \ldots, X_m$ es un conjunto convexo.

D e f i n i c i ó n.-

Poliedro convexo.-

El conjunto de todas las combinaciones convexas de uh número finito de puntos se llama el poliedro convexo generado por estos puntos.

El poliedro convexo generado por $n+1$ puntos en E^n que no están sobre un hiperplano se llama un "simplex".

En E^2, un triángulo y su interior forman un simplex. Los tres puntos que generan al simplex son los vértices del triángulo.

2-21.- CONJUNTOS CONVEXOS E HIPERPLANOS.-

En esta sección estableceremos cuatro teoremas importantes que se uti lizan en programación lineal, teoría de las decisiones y teoría de los juegos de estrategia.

Teorema I:

Dado un conjunto convexo cerrado cualquiera X, un punto y pertenece al conjunto X o bien existe un hiperplano que contiene a y tal que todo el conjunto x está contenido en un semi espacio abierto producido por ese hiperplano.

Geométricamente es obvio en E^2 y E^3 como lo indica la figura 2-4.

Si y no pertenece al conjunto X, se puede trazar una recta através de y tal que todo el conjunto X quede en un semi-espacio abierto producido por la recta.

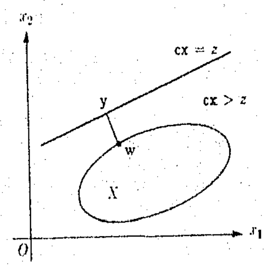


Figura 2-4

Dado un punto frontera w (punto de acumulación) de un conjunto convexo w, entonces a cx = z se le llama un hiperplano apoyado en w.

Si cw = z y además todo el conjunto X queda en un semi-espacio cerrado producido por el hiperplano, es decir, $c\ u \geq z$, para cualquier $u \in X$ o $c\ u \leq z$ para cualquier $u \in X$.

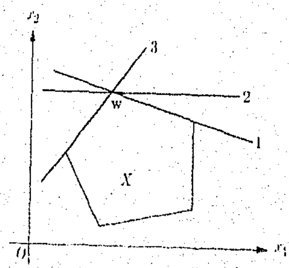


Figura 2-5

Teorema II.-

Si w es un punto frontera de un conjunto convexo cerrado, entonces-existe por lo menos un hiperplano apoyado en w Este teorema es evidente en E^2 y E^3. Pueden existir mas de un hiperplano apoyado en W como se ve en la figura 2-5.

Se demostró con anterioridad que el conjunto de soluciones factibles-a un problema de programación lineal es un conjunto convexo cerrado, y que la función por optimizar es un hiperplano.

Este hiperplano se moverá paralelamente a si mismo sobre el conjunto-convexo de soluciones factibles hasta que la Z se hace lo más grande posible (en el caso de maximizar az) mientras aún se tenga por lo menos un-punto de X sobre el hiperplano en el conjunto convexo de las soluciones --factibles.

Por lo tanto, si un hiperplano dado corresponde al valor óptimo de X, entonces ningún punto interior del conjunto convexo de soluciones facti---bles. (Las soluciones no acotadas no se consideran soluciones óptimas.

Para demostrar esto, supóngase que $Z = CX$ es un hiperplano óptimo y-que uno de sus puntos x_0 es un punto interior del conjunto. Si escogemos $\epsilon > 0$ tal que cualquier punto en la vecindad ϵ de x_0 pertenezca a-X, el punto

$$X_1 = X_0 + \left(\frac{\epsilon}{z}\right) \left(\frac{c^1}{|c|}\right) \text{ pertenece a } X,$$

$$\text{y} \qquad CX_1 = Z + \left(\frac{\epsilon}{2}\right) | c | > z$$

Esto contradice el hecho de que Z, es el valor máximo de la función-objetiva. Por ello, si X_0 es una solución óptima a un problema de programación lineal deberá ser un punto frontera del conjunto convexo de solu ciones factibles, y si $z = c\ x_0$, entonces $CX =$ es una hiperplano apoyado al conjunto convexo de soluciones factibles en X_0.

Teorema III.-

Un conjunto convexo cerrado, acotado interiormente tiene puntos extre mos en cada hiperplano apoyado.

Tiene este teorema especial importancia en la programación lineal por que establece que si existe una solución óptima entonces por lo menos un - punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles será una solu-- ción óptima.

El número de puntos extremos es finito como se demostrará después, -- por ello, si tuviesemos los medios para seleccionar los puntos extremos -- del conjunto convexo de soluciones factibles, únicamente un número finito de puntos se necesitarían analizar para encontrar una solución óptima al - problema. Este principio constituye la base del método simplex.

Nos transladaremos de un punto extremo a otro nuevo hasta que se halla encontrado la solución óptima.

Demostracuón del Teorema III.- El hipdrplano $CX = Z$ se considerará- un hiperplano apoyado en X_0 al conjunto convexo cerrado X que está acotado interiormente.

La intersección de X y $S = \{ X \mid CX = Z \}$ se designará con T. La intersección no está vacia ya que $X_0 \in T$. además como X y S son conjuntos convexos cerrados T también lo es; T también estará acotada interiormente ya que X lo está.

Demostratemos que cualquier punto extremo de T también es un punto extremo de X.

Si t es un punto cualquiera de T, y si $t = \lambda x_2 + (1-\lambda) x_1$ $0 < \lambda < 1$, donde $x_1, x_2 \in X$, entonces $X_1, X_2 \in T$. Esto se debe al hecho de que $Ct = \lambda CX_2 + (1-\lambda) CX_1 = Z$, y $CX_1 \geq Z$, $CX_2 \geq Z$ porque $CX = Z$ es un hiperplano apoyado. Si $\lambda > 0$, $1-\lambda > 0$ es obvio que $ct = z$ requiere que $CX_1 = Z$, $CX_2 = Z$, es decir, $x_1, x_2 \in T$. Por ello, si t es un punto extremo de T, no existirán otros puntos x_1, x_2 de X tales que t se pueda escribir o expresar como una combinación convexa de estos puntos con $0<\lambda<1$. Por ello, un punto extremo de T es un punto extremo de X.

Falta aún demostrar que T efectivamente tiene un punto extremo; para ello construyamos un punto extremo. De todos los puntos en T escojamos aquel cuya primera componente, sea algebraicamente la mas pequeña.

Existe tal punto, ya que está acotado inferiormente.

Si existe mas de un punto con la primera componente mas pequeña, se deberá escoger el punto o puntos con las menores primera y segunda componentes. Si aún así no se ha obtenido un punto único, se escogerá aquel punto que tenga las menores primera segunda y tercera componentes, etc.

Finalmente, se obtendrá un punto único, ya que solamente existe un punto todas cuyas componentes tengan un mínimo valor algebraico.

El punto así obtenido t^* es un punto extremo Si t^* no fuese un punto extremo se podría escribir.

$$t^* = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2, \quad 0 < \lambda <,$$

$$t_1, \; t_2 \in T, \; t_1 \neq t_2 \qquad 2\text{-}21\text{-}1$$

Si nos imaginamos que el punto t^* se obtuvo al minimizar la componente j.

Si a las componentes i de t^* t_1, t_2 las designamos con t_i^*, t_{i1}, t_{i2} respectivamente, entonces de la expresión 2-21-1 y la definición de t^* se sigue que $t_i^* = t_{i1} = t_{i2}$ $i = 1, 2, \ldots, j-1$. Entonces la componente j de 1-23-1 requiere que $t_j^* > \min [\, t_{j1}, t_{j2} \,]$ o bien $t_j^* = t_{j1} = t_{j2}$.

Cualquiera de estas dos alternativas contradice el hecho de que t_j^* es el único mínimo para la componente j cuando las primeras j-1 coponentes -- tienen su valor mínimo. En consecuencia t^* no se puede expresar como -- una combinación convexa de ningunos otros dos puntos de T $(0 < \lambda < 1)$. - por ello t^* es un punto extremo y el teorema está demostrado.

Teorema IV.-

Si un conjunto X es convexo cerrado y acotado, y tiene un número finito de puntos extremos, cualquier punto del conjunto se puede expresar como una combinación convexa de los puntos extremos, es decir que X es el conjunto de todas las combinaciones convexas de sus puntos extremos.

E j e m p l o:

Se desea expresar un punto cualquiera W. en el interior de un triángulo, como una combinación convexa de sus vértices que son sus puntos extremos o sean X_1, X_2, X_3. Se tendrá entonces $W = \Sigma\, \mu_i X_i$, $\mu_i \geq 0$, y que se ilustra en la figura F-2-6.

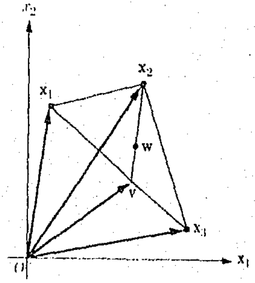


Figura 2-6

Si unimos a X_2 con, w con una recta, esta intersectará el lado --- opuesto del triángulo en V. según esto:

$$w = \lambda_1 X_2 + (1-\lambda_1) V, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1.$$

pero a su vez

$$V = \lambda_2 x_1 + (1-\lambda_2) x_3 \quad \text{o sea}$$

$$w = \lambda_1 x_2 + (1-\lambda_1) \lambda_2 x_1 + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) x_3$$

Si hacemos

$$\mu_1 = \lambda_2 (1-\lambda_1), \quad \mu_2 = \lambda_1, \quad , \mu_3 = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)$$

De acuerdo con esto se cumple que cada $\mu_i \geq 0$ y $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ o - sea la expresión buscada $w = \Sigma \mu_i x_i$ se cumple.

De la definición de un poliedro convexo y del Teorema IV, se implica- que cualquier conjunto cerrado, convexo y acotado con un número finito de- puntos extremos es un poliedro convexo. Los conjuntos convexos, con un - número finito de puntos extremos son escencialmente poliedros convexos, -- sinembargo puede no ser estrictamente acotados.

D e f i n i c i ó n.-

Margen: Sean x_1 y x_2 dos puntos extremos distintos del conjunto convexo X. La recta que los une se llamará margen del conjunto convexo si - es la intersección de X con un hiperplano apoyado. Si x^* es un punto extremo, y si existe otro punto $x \in X$ tal que la recta $x^* + \lambda (x - x^*)$, - $\lambda \geq 0$, pertenece a X y es la intersección de X con un hiperplano apoyado,- entonces se dice que esta recta es un margen del conjunto que se origina - en x^* y se extiende al infinito.

D e f i n i c i ó n.-

Puntos Extremos Adyacentes; Dos puntos extremos distintos x_1, x_2 de un conjunto convexo X serán adyacentes si el segmento de recta que los - une es un margen del conjunto convexo.

2-22.- CONOS CONVEXOS.-

Un cono C es un conjunto de puntos con la siguiente propiedad:

Si X pertenece al conjunto también pertenecerá μx para toda $\mu \geq 0$. El cono que se genera por un conjunto de puntos $X = \{ x \}$ es el conjunto.

$$C = \{ Y \mid Y = \mu X \text{ , } \mu \geq 0 \text{ y toda } x \in X \} \qquad 2\text{-}22\text{-}1$$

En E^2 y E^3, un cono como conjunto de puntos es frecuentemente idénti co con el concepto geométrico usual de un cono.

Se deberá notar que un cero nunca es un conjunto estrictamente acotado, excepto en el caso trivial donde 0 es el único elemento del cono.

El punto 0 es un elemento de cualquier cono y se llama vértice del- cono.

El negativo C^- de un cono $C=\{\mu\}$ es el conjunto de puntos $C^- =\{-u\}$. obviamente C^- es un cono si C lo es. La suma de dos conos $C_1 =\{u\}$ $C_2=\{V\}$, es C_1+C_2 y es el conjunto de todos los puntos u+v; $u\in C_1, V\in C_2$. La suma C_1+C_2 es un cono.

Si $C = \{u\}$ es un cono entonces C^+, el cono polar a C es la colección- de puntos $\{V\}$ tales que $V'u \geq 0$ para cualquier V del conjunto y toda $u\in C$.

C^+ es un cono ya que un cono polar es la colección de todos los vectores que forman ángulos no mayores de 90° con todos los vectores de C. Cada $V\in C^+$ deberá formar un ángulo no obtuso con cada vector de C.

Un cono es un cono convexo si es un conjunto convexo. Se puede demostrar que un conjunto de puntos es un cono convexo si y solamente si la suma $V_1 + V_2$ pertenece al conjunto cuando V_1, V_2 pertenecen , y si μV pertenece cuando V pertenece para cualquier $\mu \geq 0$.

La suma de dos conos convexos es también convexa, El cono generado por un conjunto convexo es un cono convexo. La dimensión de un cono convexo C está dada por el máximo número de vectores linealmente independientes de C.

Dado un punto $a \neq 0$, se definirá una semi-recta o rayo por el conjunto $L = \{ Y \mid y = \mu a \text{ toda } \mu \geq 0 \}$. Nótese que un rayo es un cono convexo. - Un cono poliedrico convexo C es la suma de un número finito de semi-rectas, es decir $C = \sum_{i=1}^{r} L_i$

Se deberá entender por suma a una suma de conos.

Si el punto $a_i \neq 0$ genera a la semi-recta L_i entonces un cono poliedrico convexo es la colección de puntos.

$$Y = \sum_{i=1}^{r} \mu_i a_i , \quad \text{toda } \mu_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, r.$$

El cono generado por un poliedro convexo es un cono poliedrico convexo.

Ejemplo.- La figura 2-7 muestra al cono poliédrico generado por las semi-rectas 1,2,3. Nótese que cualquier sección transversal del cono poliédrico es un poliedro convexo.

Si A es una matriz de orden $n \times r$ $A = (a_1, \ldots, a_r)$, entonces el conjunto de puntos $Y = AX = \sum x_j a_j$, toda $x \geq 0$, es un cono convexo - poliedrico en E^n.

Las columnas a_j de A generan las semirectas cuya suma da el cono poliédrico.

Es decir que existirá una solución no negativa al conjunto de ecuaciones $Ax = b$ si y solamente Si b es un elemento de cono convexo poliédrico generado por las columnas de A.

Cualquier número finito de puntos $a_1, \ldots, a_r$ de E^n se pueden imaginar como generando un cono, poliédrico convexo C. Si el máximo número de puntos linealmente independientes en el conjunto $a_1, \ldots, a_r$ es n, entonces el conjunto genera un cono de dimensión n. Supongamos que se tiene en E^n un cono n - dimensional generado por $a_1, \ldots, a_r$. Del conjunto $a_1, \ldots,$ aa_r escogemos n-1 puntos independientes cualquiera $b_1, \ldots, b_{n-1}$.

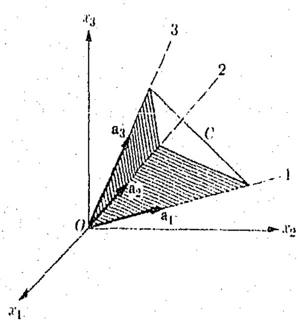
Estos puntos determinan un hiperplano $CX = 0$ único através del origen en E^n.

Puede, o puede no ser cierto que todo el cono C. este en alguno de los semi-espacios cerrados $CX \geq 0$ o $cx \geq 0$.

Si C si está en uno de los semiespacios cerrados producidos por --- $cx = 0$ se tendrán las siguientes definiciones:

El conjunto de puntos $HF = \{V \mid CV \leq 0\}$ es un semi espacio extremo para el cono n - dimensional convexo y poliédrico C generado por los puntos $a_1, \ldots, a_r$ si C está en el semi-espacio AF y n - 1 puntos linealmente independientes del conjunto $a_1, \ldots a_r$ están sobre el hiperplano $CV = 0$. El hiperplano $CV = 0$ se conoce como hiperplano extremo del cono convexo poliédrico C.

Figura 2-7



CAPITULO III

El Problema de Programación Lineal.

3-I PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.

Supongamos que en una fábrica de motores eléctricos se producen cinco tipos de motores diferentes, a, b, c, d, e. El proceso de fabricación, está dividido en cuatro departamentos, A, B, C, D. Todo motor deberá pasar - por los cuatro departamentos y en el orden indicado.

La tabla 2-I indica: a) las horas que requiere cada tipo de motor en cada departamento, b) el total de horas máquina disponibles en cada departamento a la semana, y c) la utilidad neta obtenida en la venta de un mo-- tor.

Se supone, que la utilidad es directamente proporcional al número de motores vendidos

T. 2 - 1

Departamento	Motores					Horas - máquina disponibles por semana
	a	b	c	d	e	
A	3	2.5	5	2	4	2200
B	2	9	2.5	7	6	7500
C	3.2	6	8	2.5	4	4500
D	2.5	3	2	3	1.5	3000
Utilidad Neta	$ 500	$ 700	$ 900	$ 400	$ 450	

De una superficial inspección a la Tabla 2 - I se deduce que si bién los motores b y c son los que mayor utilidad neta producen, también requieren de mayores tiempos en algunos departamentos.

Nos interesa determinar que cantidades de cada tipo de motor se deberían fabricar para hacer máxima la utilidad neta total.

Este tipo de análisis es conveniente ya que una vez determinada la distribución de fabricación más adecuada, se buscaría alterar las ventas de tal forma que se apegaran lo más posible a la condición óptima de fabricación. Esto último se logra estudiando las técnicas de la mercadotecnia moderna para tal propósito.

De acuerdo con las restricciones de tiempo disponible en cada departamento se tendrá: para el departamento A:

$$3 x_1 + 2.5 X_2 + 5 X_3 + 2 X_4 + 4 X_5 \text{ horas a la semana}$$

Como el máximo de horas - máquina disponibles a la semana es 22000, esto se expresará por:

$$3 X_1 + 2.5 X_2 + 5 X_3 + 2 X_4 + 4 X_5 \leq 2200$$

Como es posible que no exista ninguna combinación que utilice los cuatro departamentos a plena capacidad, es necesario utilizar el símbolo de desigualdad.

Las ecuaciones correspondientes a los departamentos B, C, y D serán:

$$2\,X_1 + 9\,X_2 + 2.5\,X_3 + 7\,X_4 + 6\,X_5 \leq 7500$$

$$3.2\,X_1 + 6\,X_2 + 8\,X_3 + 2.5\,X_4 + 4\,X_5 \leq 4500$$

$$2.5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 + 3\,X_4 + 1.5\,X_5 \leq 3000$$

Por la naturaleza del problema son inadmisibles los valores negativos de X_j por lo tanto o son positivos o son nulos.

$$X_j \geq 0$$

La función que expresa el objetivo del problema es:

$$500\,X_1 + 700\,X_2 + 900\,X_3 + 400\,X_4 + 450\,X_5 = Z$$

Z es la utilidad neta y por ello deseamos que Z sea máxima.

Las ecuaciones anteriores unicamente expresan relaciones lineales entre las variables.

3-2 CARACTERISTICAS DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.

Como resultó evidente del planeamiento anterior, la programación lineal unicamente se refiere a la solución de problemas en los cuales todas las relaciones entre las variables son lineales, tanto en las ecuaciones restrictivas como en la función por optimizar.

El problema general de programación lineal se puede expresar como un conjunto de m inecuaciones o ecuaciones con r variables, y se desean encon trar valores no negativos de estas variables que satisfagan las restricciones y maximicen o minimicen alguna función de las variables.

Expresado matematicamente se tendrán m inecuaciones o ecuaciones con r variables. (m podrá ser mayor, menor o igual a r).

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \dots + a_{ir} X_r \ (\geq , = , \leq) \ b_i$$

$$i = 1, \dots, m$$

3 - 2 - 1

y se desean encontrar valores de $X_j \geq 0$ $\quad j = 1, \dots, r$

--- 3 - 2 - 2

que hagan máxima o mínima a la función

$$Z = c_1 X_1 + \dots + C_r X_r \quad \text{-- } \quad 3 - 2 - 3$$

en que a_{ij}, b_i y c_i son constantes conocidas.

El hecho de implicar un comportamiento lineal a un problema no es siempre representativo del problema real, sinembargo la discrepancia en la gran mayoría de los casos es tan pequeña que al asumir un comportamiento lineal práticamente no se cometen errores.

Por otro lado, el hecho de permitir a X_j que tome los valores permitidos por 2 - 2 - 1 y 2 - 2 - 2 pueden dar por resultado que X_j no sean valores integrales. Si se desea agregar una condición que haga que los valores X_j sean integrales, esto hará que, en general se pierda la linearidad. Muchas veces sinembargo la condición del problema requiere que los variables sean integrales y en estos casos si las X_j resultan fraccionales se aproximarán al integral más próximo. Esta aproximación será tanto más exacta y válida cuanto mayores sean los valores de X_j.

La función expresada en la ecuación 3 - 2 - 3 se llama función objetiva. En ella no aparece ningún término constante o sea $Z = \sum_{j=1}^{r} C_j X_j + C$.

Ello es evidente ya que en el caso de que en realidad existiese un - término tal este no intervendría en el proceso de maximizar o minimizar a Z, es decir que se le podria ignorar durante el proceso de optimización y agregarse después.

Existen en el problema dos tipos de condiciones restrictivas, a saber, las impuestas por las ecuaciones 3 - 2 - 1 y aquella debida a la condi- - ción de no negatividad expresada en 2 - 2 - 2. Matemáticamente no difie-- ren estas condiciones sinembargo, en el proceso de solucionar un problema de programación lineal, estas restricciones se tratarán de diferente manera.

A cualquier conjunto de X_j que satisfaga a las restricciones 3 - 2 - 1 se le llama, solución del problema de programación lineal. Cualquier solución que satisfaga a la condición de no negatividad se llamaré a su vez solución viable o factible. Cualquier solución factible que optimice a la función objetiva se llamaré solución factible óptima.

Resulta entonces evidente que el objetivo en un problema de programación lineal consiste en encontrar una solución factible óptima. En gene-- ral en un problema de programación lineal existirán un número infinito de soluciones factibles, y entre ellas se deberé encontrar aquella que optimice a la función objetiva.

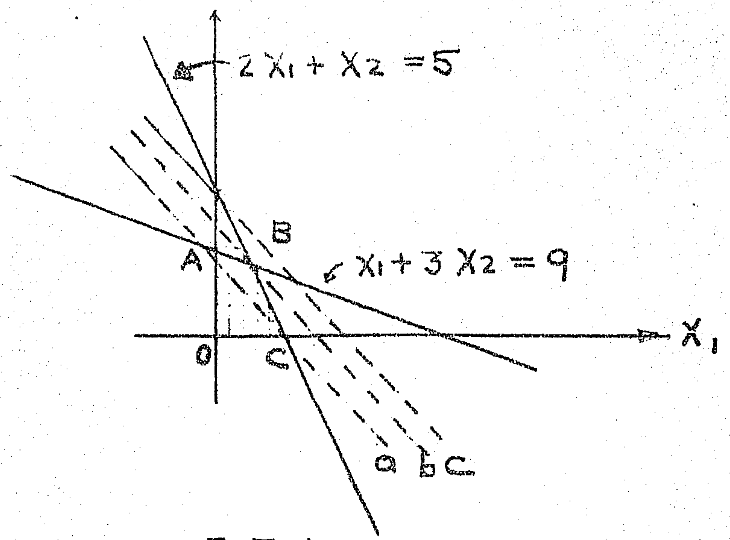
3-3 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.

Por razones obvias unicamente se interpretarán geométricamente aquellos problemas que contienen dos o tres variables y unicamente se podrán resolver graficamente problemas de programación lineal en E^2 y E^3

Con objeto de ilustrar graficamente un problema en E^2 supongamos que el planteamiento arroja las siguientes ecuaciones:

$$2 X_1 + X_2 \leq 5 \qquad X_1, X_2 \geq 0$$

$X_1 + 3X_2 \leq 9$



F. 3-1

Como X_1, X_2 > 0 unicamente nos ocuparemos del primer cuadrante.

El lugar geométrico de X_1, X_2 > 0 y, $2X_1 + X_2 \leq 5$ está dado por el triángulo con achurado horizontal y el lugar geométrico de X_1, X_2 > 0 y $X_1 + 3X_2 \leq 9$ por el triángulo con achurado vertical.

Las soluciones posibles estarán en la intersección de las dos regiones, o sea en el cuadrángulo 0 ABC.

La solución óptima al problema de programación lineal consistirá en encontrar el punto o puntos en la región de soluciones posibles que haga máxima a la función objetiva.

La función objetiva $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$ consiste en un conjunto de -- rectas paralelas para diferentes valores de Z y deseamos encontrar aquel valor de Z máximo que haga que la recta contenga un punto o puntos de la región cerrada 0 ABC.

De la figura 3 - I se ve que el caso b es el que da la solución ya que la recta c aunque tiene una Z mayor no contiene ningún punto de la región de soluciones factibles.

La solución analítica para encontrar la ecuación de la recta b se limitaría a encontrar las coordenadas del punto B y sustituirlas en la ecuación de la función objetiva para así determinar el valor de Z.

Es decir:

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &= 5 \\ X_1 + 3X_2 &= 9 \\ \hline -5X_2 &= -13 \\ X_2 &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

$$X_1 = 9 - 3 \times \frac{13}{5} = \frac{45 - 39}{5} = \frac{6}{5}$$

La función objetiva es:

$$Z = X_1 + X_2 = \frac{6}{5} + \frac{13}{5} = \frac{19}{5} = Z_{max}$$

Un caso particular del ejemplo anterior se presentaría cuando la pendiente de la función objetiva es igual a la pendiente de alguna de las -- dos ecuaciones restrictivas o sea por ejemplo el caso siguiente:

$$2X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0$$

$$Z_{max} = X_1 + 3X_2$$

Graficamente este problema queda representado en la figura siguiente:

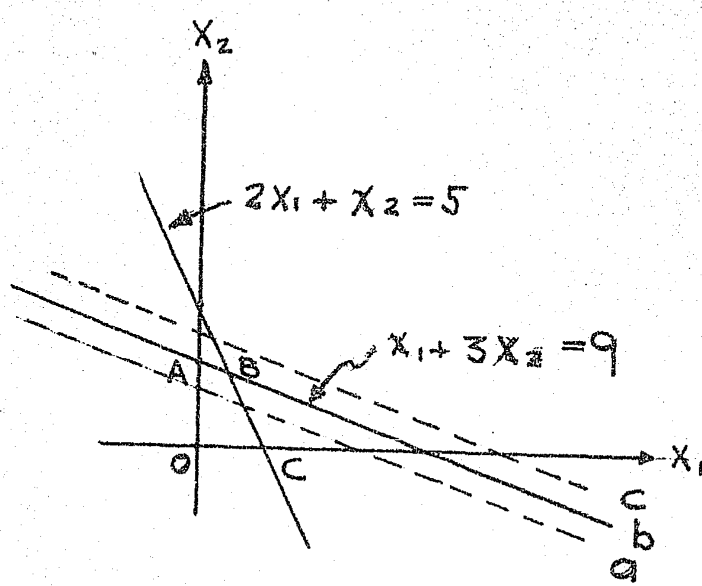


Figura 3 - 2.

En este caso la recta que representa a la función objetiva cae sobre una de las rectas frontera de la región de soluciones factibles.

Evidentemente no existe en este caso un par único de valores X_1 , X_2 que maximice a Z_1 por el contrario, cualquier punto comprendido dentro del segmento de recta AB dará un mismo valor máximo de Z. Esto es el valor máximo de la función objetiva es único pero existe un número infinito de soluciones factibles que proporcionan este valor de Z.

Es importante notar que el vértice del polígono que en el primer ejemplo fué la solución óptima, también es en este caso una solución óptima. En este caso dos vertices, así como cualquier punto sobre el segmento de recta comprendido entre los dos vertices constituyen soluciones óptimas. De aquellos problemas de programación lineal en que es posible combinar los recursos de más de una manera para obtener una condición óptima se dice que tienen soluciones óptimas multiples.

Como siguiente caso analizaré una región de soluciones factibles defi_
nida por un mayor número de condiciones restrictivas.

Digamos que se tiene el siguiente problema:

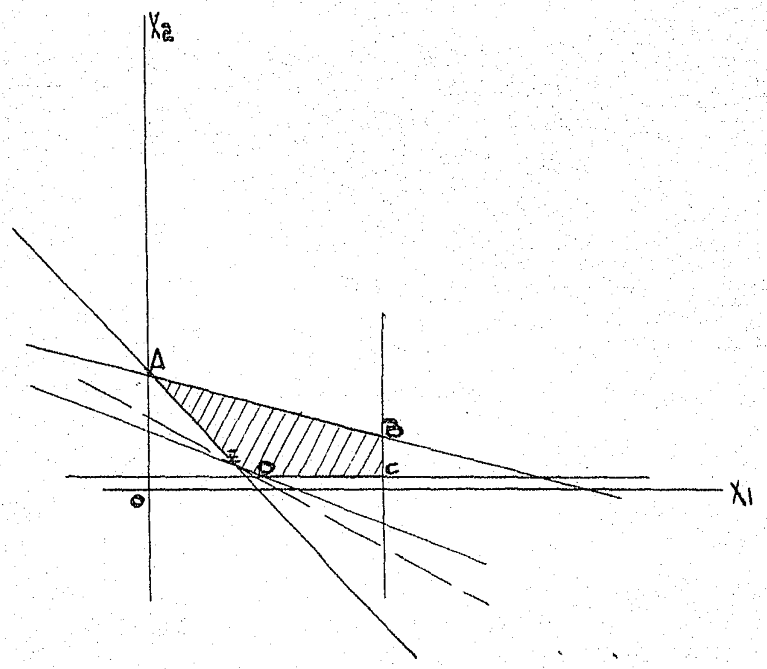


Figura 3 - 3.

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 16$$

$$X_1 \leq 9$$

$$X_2 \geq 0.5$$

$$Z_{min} = X_1 + 2 X_2$$

De la figura se ve que Z es mínima en el punto E. El punto E es la intersección de:

$$X_1 + X_2 = 4$$

$$X_1 + 3 X_2 = 6$$

$$2 X_2 = 2$$

$$X_2 = 1$$

$$X_1 = 3$$

O sea $Z\ min = 3 + 2 = 5$

3-4 INTERPRETACION GEODETRICA DE CASOS ESPECIALES DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL.

Existen algunos problemas, cuya naturaleza es especial y que se deberán tomar en consideración en el desarrollo de una técnica general para la solución de problemas de Programación Lineal.

Considérese el siguiente problema:

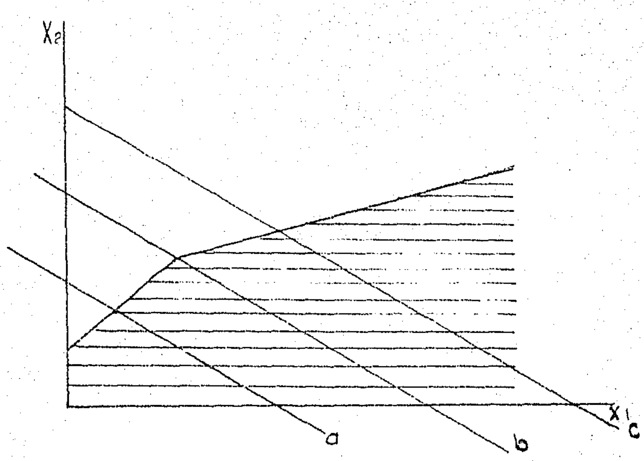


Figura 3 - 4.

$$3X_1 - 4X_2 \geq -8$$

$$X_1 - 4X_2 \geq -16$$

$$X_1 , \quad X_2 \geq 0$$

$$\max Z = X_1 + 2X_2$$

Como se puede apreciar de la figura 2 - 4 Z se puede incrementar arbitrariamente y siempre permanecerá dentro de la región de soluciones factibles y se dice por ello que Z no tiene un valor máximo finito. Este problema tiene una solución no acotada.

Ningún problema de programación lineal que representa un caso real deberá tener una solución no acotada, ya que esto, implicaría la posibilidad de una utilidad neta infinita.

Sinembargo sucede en ocasiones que un error en el planteamiento del problema conduce a una solución no acotada.

En el ejemplo anterior, ambas variables se podían incrementar arbitrariamente al crecer Z. Es importante hacer notar sinembargo que una solución no acotada no implica necesariamente que todas las variables se pueden hacer arbitrariamente grandes al crecer Z. Si el problema anterior hubiese sido:

$$3X_1 - 4X_2 \geq -8$$

$$X_2 \leq 7$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\max Z = X_1 + 2X_2$$

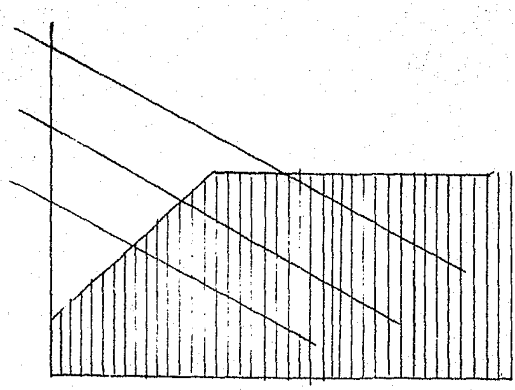


Figura 3 - 5

en este caso, aunque Z cresca, X_2 siempre será $X_2 \leq 7$

En un caso anterior se vió que el conjunto de variables que maximiza a la función objetiva no necesariamente es única. Puede además presentarse el caso en que aunque Z máxima sea finita, existan soluciones que den esta Z -

máxima que tengan valores arbitrariamente grandes de las variables.

Si las ecuaciones del problema fueran:

$$3 X_1 - 4 X_2 \geq - 8$$

$$X_1 - 4 X_2 \geq - 16$$

$$X_1 , \quad X_2 \geq 0$$

$$\max Z = X_1 - 4 X_2$$

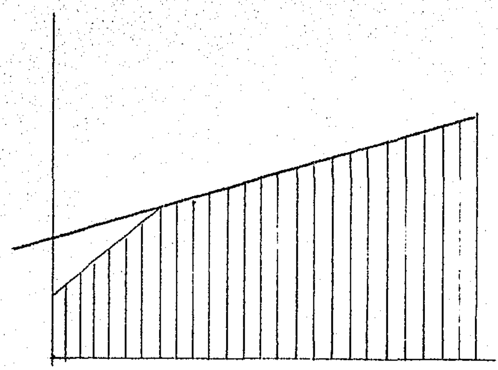


Figura 3 - 6.

Este tipo de problemas no son del todo coherentes, ya que existen soluciones con valores arbitrariamente grandes de las variables y que sinembargo conducen al valor óptimo de Z.

Los casos especiales analizados han tenido soluciones factibles, sinembargo, pueden presentarse incongruencias en el planteamiento de las funciones, restrictivas que hagan imposible la obtención de soluciones factibles.

El siguiente ejemplo muestra una de estas inconsistencias:

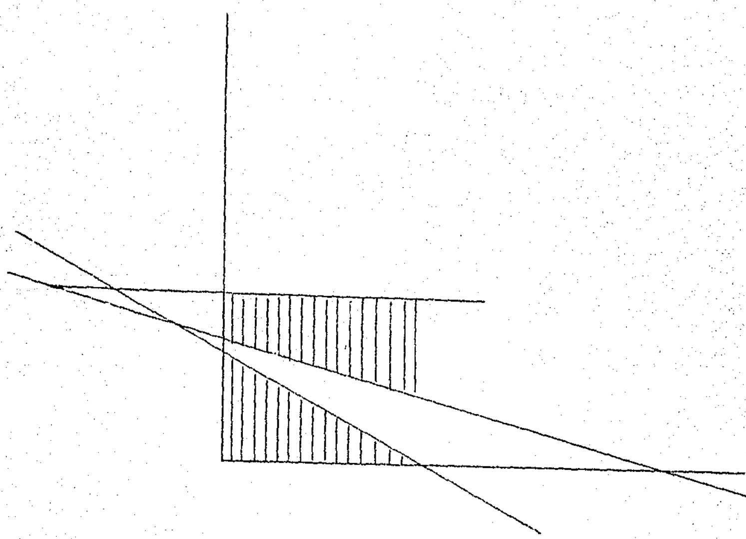


Figura 3 - 7.

$$X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 4X_2 \geq 18$$

$$X_2 \leq 6$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

$$Z \max = 2X_1 + 2X_2$$

Como se puede apreciar de la figura 3 - 7, no existe ninguna región - - que cumpla las condiciones impuestas por el problema ya que para X_1 , X_2 ≥ 0 no está definida la región de las funciones restrictivas, y donde -- existe una región que satisface a las funciones restrictivas X_1 es menor - que cero, o lo que es lo mismo, las funciones restrictivas pueden o no ser inconsistentes y, sinembargo no existir ninguna solución factible.

Resulta evidente que no es de esperarse que un problema lógico, correctamente planteado, tenga un comportamiento, como los analizados en esta sección. Sinembargo, en un problema real, con un gran número de variables y ~~funciones~~ restrictivas, resulta muy dificil poder afirmar a simple vista que las funciones restrictivas son consistentes, y más zún que exista una solución factible y que no existan soluciones no acotadas. Los casos especiales antes analizados se pueden presentar sinembargo, debido principalmente a errores en el planteamiento del problema.

Debido a la posibilidad de que durante el cómputo de un problema pudiera surgir que este tenga una solución no acotada o bien que no presente una región de soluciones factibles, es necesaria una técnica general, que nos indique estas irregularidades.

3-5 INTRODUCCION AL METODO SIMPLEX.

De los casos hasta ahora estudiados se pueden obtener las siguientes importantes conclusiones:

a). En el caso de existir soluciones factibles, la región de soluciones factibles era convexa.

b). Las fronteras de la región de soluciones factibles eran rectas o planos, y en el caso general serán hiperplanos.

c). Existían vértices en la frontera, y existían aristas que unían a los diferentes vértices.

d). Para cualquier valor dado de Z, la función objetiva está representada por una recta, un plano, o en el caso general por un hiperplano.

Así mismo el análisis anterior mostró la peculiaridad de que cuando el valor óptimo de Z, era finito, por lo menos uno de los vértices de la región de soluciones factibles era una solución óptima. Esta situación también es cierta en el caso general, si nos imaginamos un espacio de dimen--

sión n. En este caso la región de soluciones factibles es un conjunto convexo. También posee vértices o puntos extremos, y se dice entonces que de existir una solución óptima, esta ocurre en uno de los puntos extremos.

Cuando se busca maximizar o minimizar una función, se piensa inmediatamente en el método del cálculo diferencial, sin embargo este método no es aplicable a los prbblemas de programación lineal. La razón se debe a que las soluciones óptimas están en la frontera o puntos de acumulación de la región de soluciones factibles, y lo que es aún peor, en los vértices de esta región, o sea en las discontinuidades. Además, el cálculo diferencial unicamente localiza los máximos y mínimos relativos y no indican directamente el máximo o mínimo absoluto.

No existe hasta ahora ningún método que conduzca a la solución óptima de un problema de programación lineal directamente. Los métodos existentes son iterativos y por ello en el caso de existir un gran número de funciones restrictivas resulta extremadamente dificil encontrar una solución factible, más aún una solución óptima.

En 1947 George Dantzig desarrollo el método simplex. Es éste el método más conocido y empleado en la solución de problemas de programación lineal. Este método simplex es un proceso algebráico interativo que conduce a la solución exacta (no es un método aproximativo) de cualquier problema de programación lineal en un número finito de pasos, o en su defecto indicar que existe una solución no acotada.

El método simplex constituye un procedimiento para ir de paso en paso, moviéndose de un punto extremo dado al punto extremo óptimo. Cada paso es unicamente moverse de un punto extremo a uno adyacente. Entre los puntos extremos adyacentes, el seleccionado es aquel que da el incremento máximo, (o decremento máximo) en la función objetiva. El método simplex se "mueve" sobre una arista de la región de soluciones factibles de un punto extremo a uno adyacente.

En cada uno de los puntos extremos, el método simplex indica si es óptimo, y en caso de no serlo cual deberá ser el siguiente punto extremo.

Si llega a suceder que en algún paso cualquiera un punto extremo tiene una arista que tienda al infinito y que la función objetiva se pueda incrementar o disminuir al moverse sobre esta arista, el método simplex indica que existe una solución no acotada.

El método simplex como se mencionó anteriormente se inicia en un punto extremo y surge entonces el problema de como encontrar un primer punto extremo. Como se pudo ver en los ejemplos anteriores, el origen constituyó en varios casos un punto extremo de la región de soluciones, factibles. Si el origen es una solución factible, será necesariamente un punto extremo - por la condición de no negatividad de las variables. Es decir que si - - - $X_j = 0 \quad j = 1,\ldots, n$, satisface, a las funciones restrictivas, se habré encontrado un punto extremo inicial, Desgraciadamente no es siempre este el caso, ya que como se ve en el problema de la figura 2 - 3 el origen no es necesariamente un punto extremo de la región de soluciones factibles. En este caso es aún posible encontrar un punto extremo, pero es mucho mas laborioso como se verá posteriormente.

C A P I T U L O IV

Teoría del Método Simplex.

4.1 ELIMINACION DE LAS DESIGUALDADES.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el problema general de programación lineal consiste en encontrar valores para un conjunto de r variables x_j que satisfagan n desigualdades o igualdades lineales de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ir}x_r \{ \leq = \geq \} b_i,$$

$$i = 1, \ldots, m \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

en las cuales unicamente existe uno de los símbolos $\leq$, $=$, $\geq$ para cada función restrictiva, pero el símbolo puede ser diferente en cada ecuación. Las variables x_j no deberán ser negativas y deberán hacer máxima o mínima a la función objetiva.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_rx_r \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

Todas las a_{ij}, b_i, c_j son constantes conocidas.

Se mencionó igualmente que cualquier conjunto x_j que satisfaga el conjunto de restricciones (4-1-1) es una solución.

Cualquier solución que satisfaga la condición de no negatividad se llama solución factible. Cualquier solución factible que haga máxima o mínima a la función objetiva (4-1-2) se llama, solución factible óptima. Buscamos un método para encontrar una solución factible óptima.

Dado que es mas sencillo operar con ecuaciones que con desigualdades, eliminaremos éstas de la expresión (4-1-1) introduciendo una variable adicional en cada caso.

Con objeto de tener un desarrollo general mas simple, hagamos a todas las $b_i \geq 0$. En caso de no ser así multiplicaremos toda la expresión por (-1) para lograrlo, teniendo cuidado en invertir los símbolos de las desigualdades al hacerlo.

Para su estudio dividiremos las funciones restrictivas en tres grupos, a saber:

a).- Las que tienen el símbolo $\leq$.

b).- Las que tienen el símbolo $\geq$.

c).- Las ecuaciones.

Analizaremos el caso a:

La expresión general es:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{hj}x_j \leq b_h \qquad (4\text{-}1\text{-}3)$$

Si introducimos una nueva variable $x_{r+h} \geq 0$.

$$x_{r+h} = b_h - \sum_{j=1}^{r} a_{hj}x_j \geq 0 \qquad (4\text{-}1\text{-}4)$$

A x_{r+h} se le llama variable de defecto ya que constituye la diferencia o defecto entre la cantidad disponible y la cantidad realmente utilizada.

Por, ello arreglando los términos de la ecuación (4-1-4), la desigualdad (4-1-3) se ha transformado en una ecuación:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{hj} x_j + x_{r+h} = b_h \qquad (4\text{-}1\text{-}5)$$

Caso b. Para las desigualdades con símbolo $\geq$ el arreglo general es de la forma:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j \geq b_k \qquad (4\text{-}1\text{-}6)$$

se introducirá una nueva variable $x_{r+k} \geq 0$.

$$x_{r+k} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j - b_k \qquad (4\text{-}1\text{-}7)$$

Esta nueva variable x_{r+k} se llama variable de exceso ya que constituye la diferencia entre la cantidad que se tiene y la mínima por producir o sea un exceso. La expresión (4-1-6) se transforma en:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j - x_{r+k} = b_k \qquad (4\text{-}1\text{-}8)$$

En resumen el conjunto de restricciones (4-1-1) se transforman en un sistema de ecuaciones lineales simultáneas cuya forma general es:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{hj}x_j + x_{r+h} = b_h \qquad h = 1, \ldots, u$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j - x_{r+k} = b_k \qquad k = u+1, \ldots, \nu \qquad (4\text{-}1\text{-}9)$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{pj}x_j = b_p \qquad p = v+1, \ldots, w$$

El conjunto de restricciones (4-1-9) se pueden expresar en forma matricial por:

$$AX = x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b \qquad (4\text{-}1\text{-}10)$$

en donde a_j son las columnas de A. Las variables de defecto o de exceso x_{r+i} aparece en la ecuación i y por ello la columna de A que corresponde a x_{r+i} será e_i si x_{r+i} es una variable de defecto, o será $-e_i$ si x_{r+i} es una variable de exceso.

Consideremos, ahora el efecto que sobre la función objetiva, tiene la introducción de estas, variables adicionales.

La función objetiva original era:

$$z = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j \qquad (4\text{-}1\text{-}11)$$

Si ahora asociamos unos coeficientes C nulos a las variables adiciona les, de defecto o de exceso, la función objetiva.

$$z = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j + \sum_{j=r+1}^{r+v} 0\ x_j \qquad (4\text{-}1\text{-}12)$$

no cambia y es igual a la original (4-1-11).

A continuación se justificará la validez de la introducción de las -- variables adicionales.

Hemos afirmado que optimizar a (4-1-11) sujeta a las restricciones im puestas por el conjunto de ecuaciones lineales simultáneas (4-1-10) para - $x_j \geq 0$ ($j = 1,\ldots,n$) es equivalente a optimizar (3-1-2) sujeta a (4-1-1) para $x_j \geq 0$ ($j = 1,\ldots, r$).

Para demostrar que esto es correcto se deberá notar que si se tiene -- cualquier solución factible a las restricciones originales (4-1-1) enton-- ces el hecho de introducir, variables de exceso o de defecto dará un con-- junto de variables adicionales no negativas tales que se satisface (4-1-10) con todas las variables no - negativas.

En forma inversa, si se tiene una solución factible X al sistema ---- (4-1-10), entonces las primeras r compntes de X darán una solución facti- ble de (4-1-1).

Si ahora $\bar{x} = \{ \bar{x}_1,\ldots, \bar{x}_n \} \geq 0$ es una solución factible de(4-1-10), que optimiza a (4-1-12) entonces las r primeras componentes de $\bar{x}$, es decir $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r$ serán una solución optima de (4-1-1) y (4-1-2) y darán el mismo valor optimo $\bar{z}$ de z. Para demostrar esto supóngase lo contrario, es decir - que para las ecuaciones (4-1-1) y (4-1-2) otra solución, digamos ---- $\dot{x} = \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_1$ da un valor mejor de z o sea, $\dot{z}$ que $\bar{x} = \bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r$. se deberá notar que existen variables adicionales, no negativas $\dot{x}_{.+1},\ldots,\dot{x}_n$ tales -- que $\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n$ es una solución factible de (4-1-10) con $\dot{z}$ como valor de z.

Pero esto contradice el hecho de que $\bar{z}$ es el valor óptimo de z para - (4-1-10) y (4-1-12). Por ello, anexando las variables de exceso y de de-- fecto a cualquier solución óptima de (4-1-1) y (4-1-2) se obtendrá una so- lución óptima de (4-1-10) y (4-1-12).

Resumiendo, se concluye que si se agregan variables de defecto y de - exceso con $c_j = o$ $(j = r+1, \ldots\ r+v)$ para convertir al conjunto original de restricciones en un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, el proble- ma así constituido, tiene el mismo conjunto de soluciones óptimas que el - sistema original.

4-2.- OBTENCION DE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE A PARTIR DE UNA SOLUCION FACTIBLE CUALQUIERA.-

En los desarrollos siguientes, se considerará que el conjunto de res- tricciones (4-1-10) cumple que

$$r\ (A) = r\ (Ab), \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

es decir que el rango de la matriz formada por los coeficientes es igual - al rango de la matriz aumentada ya que de no ser así las restricciones son inconsistentes y no existe solución.

$$r\ (A) = m \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

en que m es el número de ecuaciones restrictivas del problema.

Las expresiones anteriores implican que el número de ecuaciones linealmente independientes podrá ser a lo sumo igual al número de variables. En el caso de ser iguales, existirá una solución única y si ésta es factible, será óptima.

Sin embargo en el caso general se tendrán mas variables que ecuaciones.

Teorema:

Dado un conjunto de m ecuaciones lineales simultáneas con n incógnitas ($n \geq m$), $AX = b$ $r(A) = m$, si existe una solución factible $x \geq 0$, necesariamente existirá una solución factible básica.

Demostración:

Supóngase que existe una solución factible con $q \leq n$ variables positivas. Si las numeramos de tal suerte que las primeras P variables son positivas la solución factible quedará expresada por:

$$\sum_{j=1}^{q} x_j a = b \tag{4-2-3}$$

$$x_j > 0 \; (j = 1,\ldots, q); \; x_j = 0 \quad (j=q+1,\ldots,n)$$

Los vectores a_j asociados a las variables positivas podrán ser linealmente independientes o no.

a) Si el conjunto a_j ($j = 1,\ldots, q$) es linealmente independiente, entonces $q \leq m$. Si $q = m$ la solución es automáticamente no degenerada básica y factible. Como $r(A) = m$, si $q < m$, existirán necesariamente m-q columnas de A que junto con la p columnas son base de E^m y forman una matriz no-singular. Por ello si a m-q de las variables las igualamos a cero ob--

tendremos una solución factible degenerada.

b) Si los vectores a_j $(j = 1,\ldots,q)$ son linealmente dependientes, --- existirán α_j no todos nulos tales que:

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j a_j = 0 \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

por ello buscaremos hacer algunos xr de:

$$\sum_{j=1}^{q} x_j a_j = b \quad x_j > 0 \quad (j = 1,\ldots,q) \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

iguales a cero.

Si existe un vector a_r cualquiera de los q vectores de (4-2-4) para - el cual $\alpha_r \neq 0$ lo podremos expresar en función de los q-1 vectores restan tes, es decir:

$$a_r = -\sum_{j \neq r} \frac{\alpha_j}{\alpha_r} a_j \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

que sustituida c_n (4-2-5) queda:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{q} \left(x_j - x_r \frac{\alpha_j}{\alpha_r}\right) a_j = b \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

Esta es una solución con no más de q-1 variables diferentes de cero. Sin embargo al escoger ar arbitrariamente puede resultar que algunas varia bles sean negativas.

tendremos una solución factible degenerada.

b) Si los vectores a_j $(j = 1,\ldots,q)$ son linealmente dependientes, --- existirán α_j no todos nulos tales que:

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j a_j = 0 \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

por ello buscaremos hacer algunos xr de:

$$\sum_{j=1}^{q} x_j a_j = b \quad x_j > 0 \quad (j = 1,\ldots,q) \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

iguales a cero.

Si existe un vector a_r cualquiera de los q vectores de (4-2-4) para - el cual $\alpha_r \neq 0$ lo podremos expresar en función de los q-1 vectores restantes, es decir:

$$a_r = -\sum_{j \neq r} \frac{\alpha_j}{\alpha_r} a_j \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

que sustituida c_n (4-2-5) queda:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{q} \left(x_j - x_r \frac{\alpha_j}{\alpha_r}\right) a_j = b \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

Esta es una solución con no más de q-1 variables diferentes de cero. Sin embargo al escoger ar arbitrariamente puede resultar que algunas variables sean negativas.

Por ello para que esto no suceda:

$$x_j - x_r \frac{\alpha_j}{\alpha_r} \geq 0 \quad (j = 1,\ldots,q) \quad j \neq r \tag{4-2-8}$$

Si para alguna j $\alpha_j = 0$, (4-2-8) se cumple automáticamente.

Cuando $\alpha_j \neq 0$, dividiendo por α_j :

$$\frac{xj}{\alpha j} - \frac{x_r}{\alpha_r} \geq 0 \quad S_i \quad \alpha_j > 0 \tag{4-2-9}$$

$$\frac{x_j}{\alpha_j} - \frac{x_r}{\alpha_r} \leq 0 \quad \alpha_j < 0 \tag{4-2-10}$$

Si para seleccionar al vector a_j utilizamos

$$\frac{x_r}{\alpha_r} = \min_j \left\{ \frac{x_j}{\alpha_j} \, , \, x_j > 0 \right\} \tag{4-2-11}$$

entonces todas las variables en (4-2-7) serán no-negativas y se habrá así encontrado una solución factible de no mas de p-1 variables diferentes de cero.

La expresión (4-2-11) indica que es necesario calcular todas las -- x_j/α_j para $\alpha_j > 0$ y entre ellas escoger la menor. La variable que corres ponde a este x_j / α_j mínimo se hace cero con la sustitución (4-2-6) se deberá notar que las α_j son las proporcionadas por (4-2-4).

Un método idéntico al anterior es escoger al mayor de los:

$$\frac{x_r}{\alpha_j} = \max_j \left\{ \frac{x_j}{\alpha_j}, \ \alpha_j < 0 \right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}12)$$

Habremos de esta manera obtenido una solución con no mas de p-1 variables positivas, siendo nulas las demas.

Si las columnas asociadas a las variables positivas son linealmente independientes habremos llegado al caso "a" ya, conocido, para el cual existe una solución básica factible. Si las columnas por otro lado son dependientes, se repetirá el proceso para hacer nula a otra variable.

Si en algún caso la x_j / α_j mínima no es única, en lugar de disminuir en uno las variables no nulas, haremos nulas a todas aquellas variables x_j para las cuales x_j / α_j es mínimo.

Ejemplo.-

Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3, & 5 \end{bmatrix}; \ a_2 = \begin{bmatrix} 2, & 1 \end{bmatrix}; \ a_3 = \begin{bmatrix} 2, & 3 \end{bmatrix}; \ b = \begin{bmatrix} 13, & 16 \end{bmatrix}$$

una solución factible sería: $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = b$

El rango de la matriz $A = (a_1, a_2, a_3)$ es 2. Por ello una solución bá sica factible existe para no más de dos variables diferentes de cero.

Por otro lado:

$$4a_1 + a_2 - 7a_3 = 0$$

y por ello: $\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -7$

Encontraremos el valor menor de:

$$\frac{x_r}{\alpha_r} = \min_j \left\{ \frac{x_j}{\alpha_j},\ \alpha_j > 0 \right\}$$

$$\text{Si:} \quad x_3 = 1 \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 13 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 16 \end{aligned}$$

$$3x_1 + 2x_2 = 13 - 2 = 11$$

$$5x_1 + x_2 = 16 - 3 = 13$$

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 = 11 \\ 10x_1 + 2x_2 = 26 \\ \hline 7x_1 \quad = 15 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{15}{7}$$

$$x_2 \equiv 13 - \frac{5 \times 15}{7} = \frac{91 - 75}{7} = \frac{16}{7}$$

Es decir:

$$\frac{x_r}{\alpha_r} = \min_j \left\{ \frac{x_j}{\alpha_j}, \ \alpha_j > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{15/7}{4}, \frac{16/7}{1} \right\} = \frac{15/7}{4} = \frac{15}{28}$$

por ello eliminaremos al vector a_1 y obtendremos así una nueva solución -- con no mas de dos variables no negativas. De (3-2-7) se tiene:

$$\overline{x_j} = x_j - \frac{x_r}{\alpha_r} \alpha_j$$

$$\overline{x_1} = \frac{15}{7} - \frac{15}{28} \times 4 = 0$$

$$\overline{x_2} = \frac{16}{7} - \frac{15}{28} \times 1 = \frac{64-15}{28} = \frac{49}{28} = \frac{7}{4}$$

$$\overline{x_3} = 1 - \frac{15}{28} (- 7) = 1 + \frac{15}{4} = \frac{19}{4}$$

Unicamente dos variables son difernte de cero, además a_2, a_3 son linealmente independientes. La solución básica factible es:

$$\overline{x}_2 \ a_2 + \overline{x}_3 \ a_3 = b$$

resultado que se puede comprobar por:

$$\frac{7}{4} \begin{bmatrix} 2, & 1 \end{bmatrix} + \frac{19}{4} \begin{bmatrix} 2, & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13, & 16 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7}{2} + \frac{19}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

y $$\frac{7}{4} + \frac{57}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

Si se hubiese eliminado a a_2 en lugar de a_1, x_2 se hubiera hecho igual a cero, sin embargo la nueva solución no hubiese sido factible ya que x_1 resultaría negativa.

4-3.- MEJORAMIENTO DE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE.-

Las restricciones en un problema de programación lineal se pueden expresar por:

$$AX = b \tag{4-3-1}$$

Si se desea encontrar una solución básica, se formará una matriz B (mxm) de la matriz original A (mxn), tal que B sea una base de E^m.

De acuerdo con esto, cualquier columna a_j de A se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de B, es decir:

$$a_j = y_{1j}b_1 + \cdots + y_{mj}b_m = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}b_i = By_j \tag{4-3-2}$$

$$Y_j = B^{-1} a_j; \quad y_j = [\, y_{1j}, \ldots, y_{mj}] \tag{4-3-3}$$

Cualquier matriz base B determina una solución básica de (4-3-1) que es:

$$X_B = B^{-1} b; \quad X_B \left[x_{B1}, \ldots, x_{Bm} \right] \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

Se recordará que una solución básica se dice que es degenerada, si -- una o mas de las variables básicas son nulas.

Las coeficientes de la función objetiva, también llamadas "precios" - forman un vector renglón c_B dado por:

$$C_B = (C_{B1}, \ldots, C_{Bm})$$

y la función objetiva para una solución básica factible estará dada por:

$$Z = C_B X_B \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

ya que todas las variables no básicas se anulan.

A continuación definiremos una nueva variable Z_j dada por:

$$Z_j = Y_{1j} C_{B1} + \cdots + Y_{mj} C_{Bm} = \sum_{j=1}^{m} Y_{ij} C_{Bi} = C_B Y_j \qquad (4\text{-}3\text{-}6)$$

y cuya interpretación económica se verá posteriormente, se notará que para cada a_j de A existe una Z_j ; la Z_j que corresponde a a_j variará al cambiar las columnas de A en B.

Ejemplo.- (4-3-1).

Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\sum_{j=1}^{4} x_j a_j = b \quad ; \quad x_j \geq 0$$

$$a_1 = [\ 4,3\ ];\ a_2 = [\ 1,3\ ];\ a_3 = [\ 2,4\ ];\ a_4 = [\ 0,2\ ]$$

$$b = [\ 2,3\ ]$$

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

La variable x_4 se puede considerar como una variable de exceso o de - defecto ya que $C_4 = 0$.

Se podrá formar una matriz base B haciendo $a_3 = b_1$ y $a_1 = b_2$ enton-- ces:

$$B = (\ b_1, b_2\ ) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}$$

Se obtendrá una solución básica en la cual x_2 y x_4 serán nulas.

$$x_B = B^{-1}\ b = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix}$$

Las variables incluidas en la base son:

$$x_{B1} = x_3 \ \text{ y } \ x_{B2} = x_1.$$

Los coeficientes C_j de estas variables son:

$$C_{B1} = C_3 = 1;\ C_{B2} = C_1 = 1, \quad C_B = (1,1)$$

Cualquier otro vector a_j de A se puede expresar como una combinación lineal de los vectores base. Para ello se requiere calcular los Y_j para a_j dado por (3-3-3).

Calculemos las Y_j para a_2 :

$$Y_2 = B^{-1} a_2 = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_2 = y_{12}\, b_1 + y_{22}\, b_2 = y_{12}a_3 + y_{22}a_1$$

El valor de la variable Z_j para $j = 2$ definida en (3-3-6) vale:

$$Z_2 = C_B\, Y_2 = 1\left(\frac{9}{10}\right) + 1\left(-\frac{2}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

El valor de Z para esta solución básica factible vale:

$$Z = C_B x_B = 1\left(\frac{6}{10}\right) + 1\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Estudiaremos ahora la posibilidad de encontrar otra solución básica, pero tal que de un valor mejorado de Z.

Para cambiar un vector de una base se vió que si:

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, b_i\ ,$$

entonces a_j puede sustituir a cualquier vector b_r para el cual $y_{rj} \neq 0$, y el nuevo conjunto de vectores seguirá siendo una base.

Si hacemos este tipo de sustitución se tendrá:

$$b_r = \frac{1}{y_{rj}} a_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} b_i \qquad (4\text{-}3\text{-}7)$$

como la solución básica factible original se podía expresar por:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi} b_i = b \qquad (4\text{-}3\text{-}8)$$

Si ahora eliminamos b_r, se obtendrá para la nueva solución básica:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) b_i + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} a_j = b \qquad (4\text{-}3\text{-}9)$$

Sin embargo la nueva solución básica deberá ser también factible, o - sea:

$$x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0 \qquad i \neq r \qquad (4\text{-}3\text{-}10)$$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0 \qquad (4\text{-}3\text{-}11)$$

como $y_{rj} \neq 0$ y $x_{Br} \neq 0$ de (4-3-11) se implica que $y_{rj} > 0$.

Se deberá escoger de las b_i con $y_{ij} > 0$ aquel vector b_r tal que se -- cumpla (3-3-10). Si $y_{ij} > 0$ la condición (4-3-10) se puede transformar a:

$$\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0$$

lo que nos indica que la columna r, de B que se deberá sustituir será:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \min_i \left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}},\ y_{ij} > 0 \right\} = \theta \qquad (4\text{-}3\text{-}12)$$

y la nueva solución básica será factible.

Si indicamos a la nueva solución básica factible con $X_B = \bar{B}^{-1}b$ de la expresión (4-3-9) se obtienen los valores de las nuevas variables básicas en función de las originales y de las y_{ij} es decir:

$$\bar{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br}\frac{y_{ij}}{y_{rj}} \qquad i \neq r \qquad (4\text{-}3\text{-}13)$$

$$\bar{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \qquad (4\text{-}3\text{-}14)$$

Es importante hacer notar que el valor mínimo dado por (4-3-12) puede no ser único. En este caso, si se sustituye una de las columnas que presentaron este mínimo, la nueva solución es factible, sin embargo, las otras variables que también tenían este mismo mínimo, al sustituir en la ecuación (4-3-13) la nueva $x_{Bi} = 0$, o sea que la nueva solución factible será degenerada.

Otro caso especial se presenta cuando el valor mínimo de (4-3-12) es cero.

Es decir que para que $\theta = 0$ se requiere que $x_{Br} = 0$, lo que implicaría que se partió originalmente de una solución degenerada. Al sustituir en (4-3-13) y (4-3-14) obtenemos que:

$$\bar{x}_{Bi} = x_{Bi} \; (i \neq r), \; \bar{x}_{Br} = 0$$

como los valores de la antigua y nueva solución no cambian, la nueva solución será también degenerada.

Sin embargo, el hecho si la solución original fue degenerada, no implica que la nueva solución siempre lo sea. Se puede presentar el caso de que las y_{ij} que corresponden a los $x_{Bi} = 0$ sean negativas, y consecuentemente no intervienen en la operación (4-3-12) por lo que θ será positiva. En este caso, aunque la solución original sea degenerada, la nueva no lo será.

Como se vió con anterioridad el objeto de obligar que $y_{rj} > 0$ fue con el objeto de que $x_{Br} / y_{rj} \geq 0$, pero si $x_{Br} = 0$ ya no es necesario, que $y_{rj} > 0$, en este caso se podrá sustituir simplemente la columna r de B y sustituirla directamente por a_j.

El objeto de haber buscado una nueva solución básica factible, fue la de que esta diera un valor mejorado de la función objetiva, estudiemos pues que condiciones se deberán cumplir para mejorar a la función objetiva.

El valor de la función objetiva para la solución original es:

$$z = c_B\, x_B = \Sigma\, c_{Bi}\, x_{Bi}$$

El valor de Z para la nueva solución básica es:

$$\bar{z} = \bar{c}_B\, x_B = \Sigma \bar{c}_{Bi}\, \bar{x}_{Bi}$$

en que:

$$\bar{c}_{Bi} = c_{Bi} \;(i \neq r) \quad y \;\bar{c}_{Br} = c_j$$

ya que el único precio que cambia es el de la nueva variable en la base.

Si utilizamos las expresiones (4-3-13) y (4-3-14) se tendrá:

$$\bar{z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} c_{Bi} \left(x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}\right) + \frac{x_{Br}}{y_{rj}}\, c_j \tag{4-3-15}$$

ahora bien, como el término i = r el paréntesis es nula, es posible hacer la suma ininterrumpida hasta m, es decir:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \left(x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}\right) + \frac{x_{Br}}{y_{rj}}\, c_j$$

o bién:

$$\bar{z} \quad \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ij} + \frac{x_{Br}}{y_{rj}}\, c_j \qquad (4\text{-}3\text{-}16)$$

El término $\Sigma\, c_{Bi}\, y_{ij}$ se definió en (4-3-6) por z_j, por lo que la ex-- presión anterior se reduce a:

$$\bar{z} = z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (c_j - z_j) = z + \theta (c_j - z_j) \qquad (4\text{-}3\text{-}17)$$

La ecuación (4-3-17), indica que el nuevo valor de la función objetiva es igual al anterior mas la cantidad $\theta\, (c_j - z_j)$.

Ahora bien $z_j = c_B\, y_j$, que se conoce para la solución básica original ya que se deberá notar que z_j se refiere a la solución básica original y - no a la nueva.

Por otro lado c_j es el precio asociado con la nueva variable x_j.

En el caso de desear maximizar a z, si $\theta\, (c_j - z_j) > 0$ entonces -- $\bar{z} > z$ y se habrá incrementado la función. Como $\theta \geq 0$ la condición se reduce a que $c_j - z_j > 0$.

Esto implica que el vector a_j para formar la nueva base se deberá elegir de tal manera que $c_j - z_j > 0$ y por lo menos un $y_{ij} > 0$.

Si la solución original no fue degenerada, entonces $\theta > 0$ y se habrá incrementado el valor de z. Si la solución básica original fue degenerada y se escoge un vector a_j tal que $c_j - z_j > 0$ y por lo menos un $y_{ij} > 0$, - se habrá o no se habrá incrementado z, dependiendo si $\theta > 0$, pero en todo caso cuando $c_j - z_j > 0$ no se habrá disminuido z.

Cuando se desea minimizar la a_j deberá ser tal que $c_j - z_j < 0$ para que $\bar{z} \leq z$.

Si un sistema de restricciones $AX = b$ de un problema de programación lineal tiene una solución básica factible, $X_B = B^{-1}b$ se tiene un valor de la función objetiva dado por $z = c_B X_B$.

Si para cualquier columna a_j en A, pero no en B se cumple que $c_j > z_j$ y si por lo menos un $y_{ij} > 0$ $i = 1, \ldots, m$, entonces es posible obtener una nueva solución básica factible, sustituyendo una de las columnas de B por a_j tal que el nuevo valor de la función objetiva cumple $\bar{z} \geq z$. Si además la solución básica original no es degenerada se cumple que $\bar{z} > z$.

En forma análoga si para un a_j en A pero no en B $c_j < z_j$ y por lo menos un $y_{ij} > 0$, entonces es posible obtener una nueva solución básica sustituyendo una de las columnas de B por a_j y el nuevo valor de la función objetiva $\bar{z}$ será tal que $\bar{z} \leq z$. Además si la solución básica original es no degenerada se tendrá que $\bar{z} < z$.

Ejemplo.- (4-3-2).

Se tiene el siguiente problema de programación lineal.

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$a_1 = [2, 3]; \quad a_2 = [1, 2]; \quad a_3 = [3, 2]$$

$$b = [10, 8]; \quad c_1 = 5; \quad c_2 = 3; \quad c_3 = 2$$

Formemos una matriz base B con a_3 en la columna 1 y a_2 en la columna 2.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

la solución básica será:

$$X_B = B^{-1}b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para esta solución básica:

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (2,\ 3)$$

$$z_1 = c_B\, y_1 = \frac{1}{4} [2,3] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (2+15) = \frac{17}{4}$$

$$c_1 - z_1 = 5 - \frac{17}{4} = \frac{20 - 17}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

$$z = c_B X_B = 2\ (3) + 3\ (1) = 9$$

como $\theta_j - z_j > 0$ y $y_{ij} > 0$ $i = 1,2$ será posible obtener una nueva solu-- ción básica factible con un valor mejorado de z. La nueva solución será - degenerada.

Para determinar que vector deberá ser sustituido:

$$\frac{x_{Br}}{y_{r1}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{i1}},\ y_{i1} > 0 \right) = \min \left(\frac{3}{1/4} = \frac{x_{B1}}{y_{11}};\ \ \frac{1}{5/4} = \frac{x_{B2}}{y_{21}} \right)$$

$$= \frac{4}{5} = \frac{x_{B2}}{y_{21}}$$

o sea el mínimo se presente para r = 2 y por lo tanto se sustituye la se-- gunda columna de B.

Ahora:

$$\bar{z} = z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (c_1 - z_1) = z + \frac{4}{5} \left(\frac{3}{4} \right) = z + \frac{3}{5} = 9 + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{48}{5}$$

Para comprobar este resultado rápidamente podemos obtener $\bar{X}_B$ y $\bar{c}_B$ y calcular $\bar{z} = \bar{c}_B \bar{X}_B$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \bar{B}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_B = \bar{B}^{-1}b = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_B = \begin{bmatrix} 2, & 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z} = \bar{c}_B \bar{X}_B = \frac{2}{5}(14) + \frac{5}{5}(4)$$

$$\frac{28 + 20}{5} = \frac{48}{5}$$

4.4.- SOLUCIONES NO ACATADAS.-

Hasta ahora al incluir a_j a una base para sustituir una columna de B requeríamos que por lo menos existiera un $y_{ij} > 0$ $i = 1,\ldots,m$. Veremos que sucede cuando al buscar incluir un a_j todas las $y_{ij} \leq 0$.

Para ello, en lugar de tratar de obtener una nueva solución básica, veremos el tipo de solución que se forma al permitir que m + 1 variables (las $x_{Bi} + x_j$) sean diferentes de cero.

Si se parte de la solución básica factible.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi} \, b_i = b$$

y le sumamos y restamos λa_j, en que λ es un escalar cualquiera se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\, b_i - \lambda\, a_j + \lambda\, a_j = b \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

pero

$$-\lambda\, a_j = -\lambda \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, b_i \qquad (4\text{-}4\text{-}2)$$

por lo que (4-4-1) se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{Bi} - \lambda\, y_{ij})\, b_i + \lambda\, a_j = b \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

como $y_{ij} \leq 0$, cualquier valor $\lambda > 0$ hará que $x_{Bi} - y_{ij} \geq 0$, y por lo tanto (4-4-3) es una solución factible en la cual $m + 1$ variables pueden ser diferentes de cero, pero que en general no constituye una solución básica.

Por lo que se refiere al valor de la función objetiva que corresponde a esta solución se tiene:

$$\bar{z} = \Sigma\, c_i\, \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, (x_{Bi} - \lambda y_{ij}) + c_j \lambda$$

$$= z + \lambda\, (c_j - z_j) \qquad (4\text{-}4\text{-}4)$$

Es decir que al hacer crecer a λ, $\bar{z}$ se puede hacer arbitrariamente grande si $c_j - z_j > 0$ y arbitrariamente pequeña si $c_j - z_j < 0$.

Ejemplo:

Si en el ejemplo anterior $a_1 = [-2, -3]$ entonces:

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = c_B\, y_1 - c_1 = \frac{1}{4}\,[2, 3]\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} - 5$$

$$= -\frac{17}{4} - 5 = -\frac{37}{4} < 0$$

Se deduce que existe una solución no acotada ya que:

$$\bar{z} = z + \lambda\,(c_1 - z_1) \mp z + \frac{37}{4}\lambda$$

crecerá indefinidamente al hacerlo X.

Resumiendo, si dada una solución básica factible a un problema de programación lineal, para esta solución existe alguna columna a_j no incluida en la base para la cual:

$$z_j - c_j < 0 \quad y \quad y_{ij} \leq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

entonces existirá una solución factible en la cual m + 1 variables pueden ser diferentes de cero, siendo el valor de la función objetiva arbitrariamente grande.

En este caso el problema tiene una solución no acotada si la función objetiva se desea maximizar.

En forma análoga si para alguna a_j:

$$z_j - c_j > 0 \quad y \quad y_{ij} \leq 0 \quad (i = 1,\ldots,m)$$

entonces existirá una solución factible en la cual m + 1 variables pueden ser diferentes de cero, pudiendo hacerse a la función objetiva arbitraria mente pequeña.

En este caso el problema tiene una solución no acotada si la función objetiva se desea minizar.

4.5.- CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE UNA SOLUCION OPTIMA.-

Como se ha visto en las partes anteriores, si se parte de una solución básica y si existe un vector a_j que no pertenece a B para el cual $z_j - c_j < 0$ y por lo menos un $y_{ij} > 0$, $i = 1,\ldots,m$, entonces existirá otra solución básica factible con otro valor de la función objetiva que es por lo menos igual si no es que mayor que el valor original de z. Además, en caso de no existir soluciones degeneradas se puede afirmar que la nueva solución básica definitivamente mejoró a la función objetiva.

Si consideramos que no se presenta el fenómeno de la degeneración, ninguna solución básica se podrá repetir, ya que z va aumentando de valor en cada cambio de base y una misma base no puede dar dos valores diferentes de z, por ello el proceso terminará en:

i) Una o mas $z_j - c_j < 0$, y para cada $z_j - c_j < 0$ $y_{ij} \leq 0$ para toda $i = 1,\ldots,m$.

ii) Toda $z_j - c_j \geq 0$ para las columnas de A que no pertenecen a B.

Si se presenta la condición (i) el problema presentará una solución no acotada Si se presenta la condición (ii) se tendrá una solución básica óptima como se demuestra a continuación.

Si el valor de la función objetiva para el caso de que $z_j - c_j \geq 0$ para toda columna a_j de A, no en B es $z_o = c_B X_B$, se demostrará que sujeta a las restricciones $AX = b$ y a la condición de no ser negativas, $X \geq 0$, z_o es el valor máximo de la función objetiva $z = CX$.

Considérese a: $x_j \geq 0$, $j = 1,\ldots, n$.

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \qquad (4\text{-}5\text{-}1)$$

una solución, factible cualquera cuyo valor de la función objetiva estará dado por:

$$\bar{z} = c_j x_j \quad j = 1,\ldots,n \qquad (4\text{-}5\text{-}2)$$

Cualquier vector a_j de A se puede expresar como una combinación lineal de los vectores base en B; es decir:

Cualquier vector a_j de A se puede expresar como una combinación li-neal de los vectores base en B; es decir:

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} b_i \qquad (4\text{-}5\text{-}3)$$

si se sustituye la expresión (4-5-3) en (4-5-1) se obtiene:

$$x_1 \sum_{i=1}^{m} y_{i1} b_i + \cdots + x_n \sum_{i=1}^{m} y_{in} b_i = b \qquad (4\text{-}5\text{-}4)$$

o bién:

$$b_1 \sum_{j=1}^{n} x_j y_{1j} + \cdots + b_m \sum_{j=1}^{n} x_j y_{mj} = b \qquad (4\text{-}5\text{-}5)$$

Si recordamos que la expresión de cualquier vector en términos de los vectores base es única, se concluye que:

$$x_{Bi} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m \qquad (4\text{-}5\text{-}6)$$

Por otro lado $z_j - c_j \geq 0$ para toda columna de A no contenida en B, - además según (4-3-3):

$$y_j = B^{-1} a_j = B^{-1} b_i = e_i \qquad (4\text{-}5\text{-}7)$$

si consideramos que a_j está en la columna i de B. Por ello:

$$z_j = c_B\, y_j = c_B\, e_i = c_B\, e_i = c_{Bi} = c_j$$

Es decir que para las columnas de A en B siempre se cumple que:

$$z_j - c_j = 0$$

De esto se concluye que para: $z_j \geq c_j$ sustituido en (4-5-2) se tiene:

$$z_1\, x_1 + \cdots + z_n\, x_n \geq \bar{z} \qquad (4\text{-}5\text{-}8)$$

ya que toda $x_j \geq 0$.

Si ahora sustituimos la definición:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ij}$$

en (4-5-8) se obtiene:

$$c_{B1} \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_{1j} + \cdots + c_{Bm} \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_{mj} \geq \bar{z}$$

Sim embargo, de acuerdo con (4-5-6) se tiene:

$$z_0 = x_{B1}\, c_{B1} + \cdots + x_{Bm}\, c_{Bm} \geq \bar{z} \qquad (4\text{-}5\text{-}9)$$

Esto demuestra que z_0 es por lo menos igual de grande que el valor de la función objetiva para cualquier otra solución factible y por ello z_0 es el valor máximo que puede tomar la función objetiva.

Las deducciones anteriores permiten enunciar el siguiente teorema:

Teorema:

Dada una solución básica factible $X_B = B^{-1}b$ al problema de programación lineal $AX = b$, $X \geq 0$ con $Z_0 = c_B X_B$ tal que $z_j - c_j \geq 0$ para cualquier vector a_j de A entonces z_0 es el máximo valor de z definida por max $z = CX$ y la solución básica factible es además óptima.

En forma similar dada una solución básica factible $x_B = B^{-1}b$ con $z_0 = c_B x_B$ al problema de programación lineal $AX = b$, $x \geq 0$, min $z = cx$ tal que $z_j - c_j \leq 0$ para cualquier vector a_j de A, entonces z_0 es el valor mínimo de z y, la solución básica factible es además mínima.

Es importante mencionar que en la demostración no intervino la condición de que la solución básica factible x_B fuese no degenerada. Si todas las $z_j - c_j \geq 0$, entonces x_B es una solución óptima independientemente de que sea degenerada.

Todo problema de programación lineal cae dentro de una de las siguientes categorías que son mutuamente exclusivas:

a) No existe una solución factible.

b) Existe una solución óptima.

c) La función objetiva no está acotada.

De existir una solución factible y consiguientemente una solución básica factible unicamente quedan dos alternativas: (b) o (c).

Se demostró que de no existir una solución degenerada, si existe una solución óptima, esta será una de las soluciones básicas factibles. Es decir que la solución óptima a un problema de programación lineal no requiere de mas de m variables diferentes de cero.

Ejemplo:

Si utilizamos la solución básica factible caracterizada por la base:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \bar{B}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

del ejemplo (3-3-1).

El único vector que no pertenece a la base es a_2 . Para este vector:

$$y_2 = \bar{B}^{-1} a_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = \bar{c}_B\, y_2 - C_2 \qquad = \frac{1}{5}\,[2, \ 5] \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - 3 =$$

$$= \frac{1}{5}(-2 + 20) - 3 = \frac{18}{5} - \frac{15}{5} = \frac{3}{5} > 0$$

Como para todos los vectores en la base $z_j - c_j = 0$, de acuerdo con lo dicho con anterioridad, la solución básica factible que se obtiene con a_1, a_3 en la base es una solución óptima.

Además, con objeto de dar mayor énfasis al hecho de que el valor ópti mo de la función objetiva se obtiene con una solución basica factible, encontraremos a continuación una solución factible cualquiera no básica y comprobemos que la función objetiva para esta solución da un valor menor al antes obtenido en el ejemplo (4-3-1) que fue: $z = 48/5 = 9\ 3/5$.

Como $n - m = n - r(A) = 3 - 2 = 1$ esto quiere decir que podremos dar valores arbitrarios a una de las variables y así determinar el valor de las otras dos obteniéndose una solución factible:

El sistema original es:

$$1)\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$$

$$2)\quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$$

Hagamos $x_1 = \frac{1}{2}$ y calculemos x_2 y x_3.

$$1)\quad 1 + x_2 + 3x_3 = 10$$

$$2)\quad 3/2 + 2x_2 + 2x_3 = 8$$

$$1)\quad x_2 + 3x_3 = 9$$

$$2)\quad 2x_2 + 2x_3 = 13/2$$

$$4x_3 = 18 - 13/2 = \frac{36 - 13}{2} = \frac{23}{2}$$

$$x_3 = \frac{23}{8}$$

$$x_2 = 9 - 3\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{72 - 69}{8} = \frac{3}{8}$$

La solución encontrada es factible, ya que:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

El valor de la función objetiva para esta solución es:

$$\overset{*}{z} = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\overset{*}{z} = 5\left(\frac{4}{8}\right) + 3\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{20+9+46}{8} = \frac{75}{8}$$

$$\overset{*}{z} = 9\ 3/8$$

Como se supuso el valor de la función objetiva para la solución factible resultó menor que el correspondiente a la solución básica factibl óptima ya que:

$$9\ 3/5 > 9\ 3/8\ ;\quad \bar{z} > \overset{*}{z}$$

4-6.- EL FENOMENO DE LAS SOLUCIONES DEGENERADAS.-

A continuación se considera el problema que encierra la presencia del fenómeno de degeneración en el proceso hasta ahora desarrollado. Como ya se comentó con anterioridad, la aparición de este fenómeno no nos garantiza que la inserción de un nuevo vector producirá un valor mejorado de la función objetiva, esta puede permanecer inalterada y consecuentemente se podrá repetir una base.

Lo dicho nos lleva a la conclusión de que las condiciones (i) y (ii) se puedan alcanzar en un número finito de pasos.

Se puede presentar el fenómeno de que se forme un circuito cerrado, con lo cual se repetiría indefinidamente una secuencia de las mismas bases, sin que se alterara el valor de z. La presencia de la degeneración no permite consecuentemente, asegurar la existencia de una solución básica factible óptima para toda $z_j - c_j \geq 0$, aún mas, aunque existiera una solución óptima, no podemos asegurar que una de las soluciones básicas será óptima.

El anterior problema dejaría de existir si se pudiera demostrar, como se hará posteriormente, de que una base no requiere ser repetida y entonces, como el número de bases sería finito, el problema se reduciría a uno de los dos casos ya mencionados, o sea:

i) $z_j - c_j \geq 0$ para toda j; lo que implicaría que se ha encontrado una solución básica óptima.

ii) Para toda $z_j - c_j < 0$, $y_{ij} \leq 0$ para toda i, lo que indicaría la presencia de una solución no acotada.

A reserva de demostrar despues la condición anterior de que una base no se requiere repetir, consideraremos que aún cuando se presenta el fenómeno de la degeneración, una de las soluciones básicas factibles será óptima, y que una de las soluciones óptimas tendrá toda $z_j = c_j \geq 0$. Además, cuando se presenta la degeneración, podrán existir soluciones básicas óptimas con una o más $z_j - c_j < 0$.

Se demostrará en el inciso (4-8) de que una de las soluciones básicas factibles es óptima, por otro método que es completamente independiente de cualquier argumento de degeneración. Esto se logrará al discutir en ese -

inciso la relación entre las soluciones básicas factibles y los puntos extremos ya que como se vió en el capítulo anterior, de existir una solución óptima, por lo menos uno de los puntos extremos del conjunto convexo de las soluciones factibles constituye una solución óptima.

4-7.- SOLUCIONES OPTIMAS MULTIPLES.-

En el capítulo II, se indicó este tipo de soluciones y la figura 2-2 indica claramente en que consiste este fenómeno.

La función objetiva posee un único valor óptimo, sin embargo, este valor de z lo pueden dar varios conjuntos ordenados de valores.

El caso estudiado en el capítulo II estaba en E^2 y en el la ecuación que representaba a la función objetiva tenía la misma pendiente que una de las funciones restrictivas, por ello dos puntos extremos y consiguientemente cualquier combinación convexa de ellos daban el mismo valor máximo de la función objetiva.

Consideremos el caso general en que se tienen r diferentes soluciones básicas factibles, $x_1, \ldots, x_r$ que son óptimas. consideraremos que cada x_i es un vector n- dimensional y consiguientemente incluye a todas las variables y no únicamente a las básicas.

Si se considera una combinación convexa cualquiera de estos vectores:

$$x = \sum_{i=1}^{r} \mu_i, \ x_i, \ \mu_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, r)$$

$$\sum \mu_i = 1 \qquad (4\text{-}7\text{-}1)$$

Toda $x_i \geq 0$ y $\mu_i \geq 0$, consecuentemente $x \geq 0$. Además $Ax_i = b$ y consecuentemente $AX = b$. Se sigue que X es una solución factible, aunque no necesariamente básica.

Si se designa a $z_0 = \max z = cx_i$ $(i = 1,\ldots,r)$ el valor correspondiente de la función objetiva para x es:

$$cx = \sum_{i=1}^{r} \mu_i cx_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_i z_0 = z_0 \qquad (4\text{-}7\text{-}2)$$

y consiguentemente x es una solución óptima.

Las expresiones (4-7-1) y (4-7-2) demuestran que si $x_1,\ldots,x_r$ son r soluciones básicas factibles óptimas diferentes de un problema de programación lineal, entonces cualquier combinación convexa de ellas también es una solución óptima.

Lo anterior indica que si existen dos o mas soluciones básicas factibles óptimas diferentes, existirán una infinidad de soluciones óptimas aunque no todas las soluciones óptimas serán básicas.

La posibilidad de que existan una infinidad de soluciones óptimas se puede presentar además de en el caso anterior en el caso ilustrado en la figura (3-6) o sea cuando la función objetiva en su posición óptima está sobre una arista del conjunto convexo de soluciones factibles que se extiende indefinidamente. En este caso el valor óptimo de z es finito, pero existien soluciones óptimas con valores arbitrariamente grandes de las variables.

Para generalizar el caso anterior considérese que se tiene una solución básica óptima de un problema de programación lineal y que para algún vector a_j **en A pero** no en B $z_j - c_j = 0$ y toda $y_{ij} \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$

Se podrá entonces formar una nueva solución factible:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{Bi} - \theta\, y_{ij})\, b_i + \theta\, a_j = b, \quad \theta > 0 \qquad (4\text{-}7\text{-}3)$$

que puede tener m + 1 variables distintas de cero.

El valor de la función objetiva para esta solución es el mismo que -- para la solución básica factible óptima, y consiguientemente la solución - (4-7-3) también es óptima.

Esto se cumple para valores arbitrariamente grandes de θ. Además, - por lo menos una $y_{ij} < o$ porque $a_j \neq 0$ y consiguientemente existen soluciones óptimas para las cuales por lo menos dos de las variables se pueden hacer arbitrariamente grandes (incluyendo a las variables de exceso y de defecto).

Se demostró por consiguiente que si existe una solución óptima básica, factible de un problema de programación lineal y, para alguna a_j no incluida en la base:

$$z_j - c_j = 0, \quad y_{ij} \leq 0$$

para toda i entonces la solución (4-7-3) es también una solución óptima - para cualquier $\theta > 0$.

4-8.- RELACION ENTRE LOS PUNTOS EXTREMOS DEL CONJUNTO CONVEXO DE SOLUCIONES FACTIBLES Y LAS SOLUCIONES BASICAS.-

En esta sección se demostrará que toda solución básica factible es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles y de que todo - punto extremo es una solución factible del conjunto de restricciones del - problema de programación lineal.

Supóngase que x es una solución básica factible del sistema AX = b. - si x es vector n- dimensional incluirá a m variables diferentes de cero y a n - m variables nulas, si arreglamos a x de tal manera que las primeras m variables sean las no nulas se tendrá:

$$x = [\, X_B,\ 0\,] \quad x_B = B^{-1}b \tag{4-8-1}$$

Demostraremos primeramente que x es un punto extremo. Para ello se demostrará que no existen soluciones factibles x_1, x_2 diferentes de x tales que:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)\, x_2, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{4-8-2}$$

supondremos que tales soluciones existieran y entonces separaremos a x_1 y x_2 en:

$$x_1 = [k_1, l_1]; \quad x_2 = [k_2, l_2] \tag{4-8-3}$$

en que k_1, k_2 son vectores de m componentes y l_1, l_2 son vectores de (n-m) componetes.

Observando las expresiones (4-8-1), (4-8-2) y (4-8-3), se deduce que la expresión (4-8-2) para las últimas n -m componentes queda:

$$0 = \lambda\, l_1 + (1 - \lambda)\, l_2 \tag{4-8-4}$$

pero como $\lambda > 0$, $(1 - \lambda) > 0$, $l_1 \geq 0$ y $l_2 \geq 0$ la expresión (4-8-4) unicamente se cumple si:

$$l_1 = l_2 = 0 \tag{4-8-5}$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned} AX_1 &= Bk_1 = b \\ AX_2 &= Bk_2 = b \end{aligned} \tag{4-8-6}$$

pero como se recordará, la expresión del vector b en términos de los vectores base es única y consecuentemente $X_B=K_1=K_2$; $X=X_1=X_2$ (4-8-7).

El desarrollo anterior demuestra que no existen soluciones factibles diferentes de x tales que se cumpla (4-8-2). Es decir que x es un punto extremo y consecuentemente cualquier solución básica factible es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Seguidamente se demostrará el caso inverso, es decir que cualquier punto extremo $\bar{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ del conjunto de soluciones factibles es a su vez una solución básica.

Esto se demostrará, demostrando que los vectores asociados con las componentes positivas de $\bar{x}$ son linealmente independientes.

Considérese que g de las componentes de $\bar{x}$ son diferentes de cero y numérense las variables de tal forma que las primeras g sean las no nulas

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{g} x_i a_i = b \qquad x_i > 0, \qquad i = 1, \ldots, g \tag{4-8-8}$$

Si las columnas correspondientes a las componentes no nulas de $\bar{x}$ son linealmente dependientes, entonces, de acuerdo con lo ya tratado existen λ_i no todas nulas tales que:

$$\sum_{i=1}^{g} \lambda_i a_i = 0 \tag{4-8-9}$$

Si ahora definimos a:

$$w = \min_i \frac{x_i}{|\lambda_i|}, \ \lambda_i \neq 0 \quad i = 1, \ldots, g \tag{4-8-10}$$

W es un número positivo.

Seleccionemos una $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < w$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_i + \epsilon \lambda_i > 0 \quad y \\ \\ x_i - \epsilon \lambda_i > 0 \end{array}\right. \quad i = 1, \ldots, g \tag{4-8-11}$$

A continuación definimos un vector columna de n componentes $\lambda \neq 0$ que tenga a las λ_i en las primeras g posiciones y cero para las restantes n-g componetes:

$$x_1 = \bar{x} + \epsilon \lambda \quad ; \quad x_2 = \bar{x} - \epsilon \lambda \tag{4-8-12}$$

De acuerdo con (4-8-11) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

y además según (4-8-9)

$$A \lambda = 0 \tag{4-8-13}$$

entonces:

$$AX_1 = b \quad ; \quad AX_2 = b \tag{4-8-14}$$

consecuentemente x_1 , x_2 son soluciones factibles diferentes de $\bar{x}$, y:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \tag{4-8-15}$$

Pero esto contradice al hecho de que $\bar{x}$ es un punto extremo. Consiguientemente las columnas de A asociadas a las componentes no nulas de cualquier punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles deberá ser linealmente independiente.

Como no pueden existir mas de m columnas linealmente independientes de A, un punto extremo no puede tener mas de m componentes positivas. De tener menos de m componentes positivas, esto se puede interpretar como una solución básica degenerada ya que se pueden imaginar m-g columnas de A que se agregan, a un nivel nulo y que originan una solución básica degenerada.

Se demostró que toda solución básica factible a AX = b es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles, y de que a su vez todo punto extremo es una solución básica factible.

De no existir degeneración se puede afirmar que existe una relación de uno a uno entre los puntos extremos y las soluciones básicas factibles, es decir que existe unicamente un punto extremo para cada solución básica factible, y unicamente una solución básica factible corresponde a un punto extremo.

Cuando se presenta el problema de la degeneración, no es este el caso. Si menos de m variables sin positivas, el vector o vectores de A que se agregan a un nivel nulo para originar una solución básica degenerada no son indispensablemente únicos. Por ello un cierto número de soluciones básicas degeneradas pueden corresponder a un mismo punto extremo.

En esta sección se demostró asimismo que el conjunto convexo de soluciones factibles tiene un número finito de puntos extremos. El número de puntos extremos es igual al número de soluciones básicas factibles diferentes. Nota: Las soluciones básicas factibles con iguales valores positivos de las variables no se considerán diferentes.

Es decir que el número de puntos extremos del conjunto convexo de soluciones factibles no podrá ser mayor que:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{n!\,(n-m)!}$$

En conclusión se llegó al importante resultado de que la solución óptima de un problema de programación lineal nunca requiere que mas de m variables sean diferentes de cero, en que m es el número de restricciones -- del problema.

Nota: Recuérdese que la condición de no negatividad no se clasifica como restricción propiamente.

CAPITULO V

Desarrollo Detallado y Características del Cálculo del Método Simplex.

5-1.- INTRODUCCION.-

En los capítulos anteriores se demostró:

a) De existir una solución factible de un problema de programación lineal existe una solución básica factible.

b) De existir una solución óptima, esta será una de las soluciones básicas factibles.

c) Si se tiene una solución básica factible que no es óptima, entonces suponiendo que no se presenta el problema de la degeneración, es posible, sustituyendo un vector de la base en cada operación, llegar a la solución óptima en un número finito de pasos, o bién demostrar que la función objetiva tiene una solución no acotada.

Los postulados anteriores constituyen la esencia del procedimiento para el cálculo de los problemas de programación lineal.

Además de utilizar la notación X_B para las soluciones básicas factibles se utilizaron las notaciones Y_j y $Z_j - C_j$ para los vectores no incluidos en la base con el objeto de determinar las nuevas soluciones básicas factibles.

Recordando, en el proceso de encontrar nuevas soluciones básicas factibles, primeramente se seleccionan los vectores para los cuales $z_j - c_j < 0$. Si cualquiera de estos vectores tienen todas las $Y_{ij} \leq 0$, i 1,..., m, existirá una solución no acotada. Si este no es el caso, se puede insertar cualquier vector a cuya $z_j - c_j < 0$ y así obtener una nueva solución básica factible que mejorará o por lo menos no empeorará el valor de la función objetiva.

Con objeto de que la nueva solución sea factible, el vector de la base original que se deberá sustituir, se deberá escoger de acuerdo con

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \frac{\min}{i}\left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, \quad y_{ij} > 0 \right\} = \theta \qquad (5\text{-}1\text{-}1)$$

Si el valor que se obtiene en (5-1-1) no es único, se presentará el problema de la degeneración. Si por el contrario este valor es único, se puede afirmar que la nueva solución arrojará un valor de la función objetiva mejor que el anterior.

Con objeto de determinar si la nueva solución básica factible es óptima, es necesario calcular las nuevas $z_j - c_j$ que designaremos con $\overline{z_j} - c_j$. Si no es óptima, se repetirá el proceso. Para ello es necesario calcular nuevas y_j y se designarán con $\overline{y_j}$.

A continuación obtendremos las expresiones de $\overline{z_j} - c_j$ y $\overline{y_j}$ en términos de los valores anteriores $z_j - c_j$ y y_j.

Si suponemos que se insertó el vector a_k y se sustituyó el vector b_r de la base.

En términos de la base original se tiene para a_j :

$$a_j \quad \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, b_i \qquad (5\text{-}1\text{-}2)$$

sin embargo al sustituir b_r por a_k se tiene:

$$b_r = \frac{1}{y_{rk}} a_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} b_i \qquad (5\text{-}1\text{-}3)$$

$$(3\text{-}3\text{-}7)$$

Al sustituir (4-1-3) en (4-1-2):

$$a_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right) b_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} a_k$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} \overline{y_{ij}}\, \overline{b_i} \qquad (4\text{-}1\text{-}4)$$

donde $\overline{b_i} = b_i$ para $i \neq r$; $\overline{b_r} = a_k$

Además por comparación

$$\overline{y_{ij}} = y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \quad i \neq r \qquad (5\text{-}1\text{-}5)$$

$$\overline{y_{rj}} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \qquad (5\text{-}1\text{-}6)$$

Falta unicamente encontrar las expresiones para $\overline{z_j} - c_j$ en función de los valores de la solución básica factible anterior.

De su definición se tiene:

$$\overline{z_j} - c_j = \overline{c_B}\, \overline{y_j} - c_j \quad \sum_{i=1}^{m} \overline{c_{Bi}}\, \overline{y_{ij}} - c_j \qquad (5\text{-}1\text{-}7)$$

Sin embargo:

$$\overline{c_{Bi}} = c_{Bi} \ : \ i \neq r \ ; \ \overline{c_{Br}} = c_k$$

Sustituyendo y_{ij} por las expresiones (5-I-5) y (4-I-6), se tiene:

$$\overline{z_j} - c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} c_{Bi} \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right) + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} c_k - c_j$$

(5-I-8)

como el término

$$c_{Br} \left(y_{rj} - y_{rj} \frac{y_{rk}}{y_{rk}} \right) = 0$$

la expresión (5-I-8) queda:

$$\overline{z_j} - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ij} - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ik} - c_k \right)$$

o bién

$$\overline{z_j} - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k) \qquad (5\text{-}I\text{-}9)$$

Las expresiones anteriores son la esencia del método simplex. En este método iteractivo y los pasos a seguir son los siguientes:

i) Examínense las $z_j - c_j$. Existen 3 casos:

a). Todas las $z_j - c_j \geq 0$. En este caso la solución básica es óptima.

b). Una o más de las $z_j - c_j < 0$, y por lo menos una a_k para la cual $z_k - c_k < 0$ todas las $y_{ik} \leq 0$. En este caso -- existe una solución no acotada.

c). Una o más de las $z_j - c_j < 0$, y cada una de ellas tiene -- $y_{ij} > 0$ para por lo menos una i. Se deberá insertar un vec--

tor de estos cualquiera, digamos a_k en la base.

ii) Cuando ocurre el caso (ic) para determinar cual deberá ser el vector que se sustituya de la matriz base B se utilizará.

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \frac{\min}{i} \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} , \quad y_{ik} > 0 \right\} \tag{5-1-10}$$

La columna r es eliminada y se sustituye por a_k.

iii) Utilizando las fórmulas

$$\overline{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} , \quad i \neq r \tag{3-3-10}$$

$$\overline{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \tag{3-3-11}$$

$$\overline{z} = z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (c_j - z_j) = z + \theta (c_j - z_j) \tag{3-3-17}$$

$$\overline{y}_{ij} = y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \quad i \neq r \tag{5-1-5}$$

rj

$$y_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \tag{5-1-6}$$

$$\overline{z}_j - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k) \tag{5-1-9}$$

con el subíndece k sustituyendo a j en (3-3-10), (3-3-11) y (3-3-17), calcúlese $\overline{x}_B$, $\overline{z}$, $\overline{y}_j$, $\overline{z}_j - c_j$ para toda j.

Una vez encontrados estos valores para la nueva solución factible regresese al paso i.

Este proceso iterativo constituye el método simplex para la sol,ción de problemas de programación lineal.

De no existir degeneración conduce a la solución básica factible óptima.

5-2 SELECCION DEL VECTOR MAS CONVENIENTE PARA FORMAR LA NUEVA BASE.

El paso (ic) no determina a ningún vector en particular para formar la nueva base, unicamente indica que cualquier vector cuya $z_j - c_j < 0$ se puede tomar. El incremento en la función objetiva al insertar un vector a_j vale:

$$\Delta z = \theta \, (c_j - z_j) = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \, (c_j - z_j)\ldots \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$

Resulta por ello lógico seleccionar a aquel vector a_j que al formar la nueva base proporcione el mayor incremento de la función objetiva, es decir que a_k se escogerá según

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} \, (c_k - z_k) = \max_j \left\{ \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \, (c_j - z_j) \right\} ,$$

$$z_j - c_j < 0 \qquad (5\text{-}2\text{-}2)$$

Para aplicar (5-2-2) es necesario calcular para cada caso x_{Br}/ y_{rj} y $(c_j - z_j)$ para toda a_j cuya $z_j - c_j < 0$.

Otro procedimiento consiste en seleccionar aquel vector cuya $c_j - z_j$

sea máxima, es decir, despreciando el valor x_{Br} / y_{rj}. Esto equivale a seleccionar el vector para la nueva base de acuerdo con

$$z_k - c_k = \min_j (z_j - c_j), \quad z_j - c_j < 0 \qquad (5\text{-}2\text{-}3)$$

Se selecciona el vector que tenga el menor valor algebraico (mayor valor absoluto) de $z_j - c_j$ entre aquellos cuyas $z_j - c_j < 0$.

Tanto el criterio (5-2-2) y (5-2-3) se han aplicado a problemas reales y se ha visto de que (5-2-3) conduce a la solución óptima en aproximadamente el mismo número de pasos que (5-2 2). Por esta razón se prefiere generalmente a (5-2-3). En particular, casi todos los códigos para la solución de problemas de programación lineal en calculadoras digitales utilizan este -- criterio.

Al utilizar el criterio (5-2-3) para determinar que vector se deberá - insertar, puede resultar que dos o mas vectores tengan el mismo valor mínimo de $z_j - c_j$. En este caso, el vector que se deberá, insertar en la base no está totalmente determinado..

Cuando los cálculos se verifican a mano se escogerá simplemente uno de los vectores en cuestión en forma arbitraria. Resulta evidente que se po- - dría calcular x_{Br}/ y_{rj} para cada uno de los vectores en cuestión y aplicar el criterio (5-2-2), pero esto no necesariamente eliminaría el problema. -- Por el contrario como este criterio requiere de más operaciones no se utiliza en general cuando los cálculos se llevan a cabo en una calculadora digital, el problema se soluciona haciendo que se seleccione a aquel vector que tenga por ejemplo el subíndice j más bajo.

No se ha llegado a desarrollar ningún criterio que garantice que una - vez que un vector se ha insertado en la base ya no será sustituido nunca. - En el método simplex que utiliza los criterios (5-2-3) o (5-2-2) para determinar cual vector deberá insertarse en la base, un vector puede entrar a la base y volver a salir de ella posteriormente, y de hecho esto puede suceder varias veces.

Si el problema de programación lineal es un problema de minimizar, los criterios análogos al (5-2-2) y (5-2-3) que se deberán utilizar son respectivamente:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} (c_k - z_k) = \min_j \left\{ \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (c_j - z_j) \right\}, \quad z_j - c_j > 0 \qquad (5\text{-}3\text{-}4)$$

$$z_k - c_k \quad \max_j \; (z_j - c_j), \quad z_j - c_j > 0 \qquad (5\text{-}2\text{-}5)$$

Otra importante simplificación que se puede hacer al método simplex -- consiste en no buscar desde un principio si existe, una solución no acotada. Es decir que unicamente se examinará las y_{ik} para el vector a_k que se insertará en la base, en lugar de analizar para todos los vectores cuyas - - - - $z_j - c_j < 0$ si alguno de ellos tiene $y_{ij} \leq 0$ para todas las i.

De existir una solución no acotada, finalmente nos daremos cuenta, pero el ahorro en tiempo y esfuerzo es en especial significativo si se considera que la presencia de soluciones no acotadas debidas a errores en la formulación del problema es en promedio muy baja.

Cuando se utilizan calculadoras digitales esta simplificación es muy - ventajosa, ya que el analizar a todas las componentes de un gran número de vectores requiere de bastante tiempo.

Por lo que se refiere al problema de la degeneración se puede decir -- que afortunadamente en la práctica esta no constituye realmente un pfoblema, aunque un gran número de las variables básicas se anulen. No se ha encontrado un problema práctico que forme un circuito cerrado y consecuentemente la degeneración nunca ha impedido que se encuentre una solución óptima por medio del método simplex presentado en la forma anterior.

Cuando ocurre la degeneración, el mínimo en (5-1-10) no es único. Como se vió con anterioridad cualquiera de los vectores que corresponden al valor mínimo se pueden sustituir y la nueva solución básica será factible y degenerada.

5-3.- DESARROLLO FINAL DE LAS FORMULAS DE TRANSFORMACION.-

En la sección (2-16) se desarrolló la forma de producto de la inversa, es decir una técnica para calcular la inversa de una matriz que difiere unicamente en una columna de otra matriz cuya inversa se conoce.

Como en el método simplex unicamente se reemplaza un solo vector de la base a la vez, resulta conveniente desarrollar las fórmulas de transformación utilizando esta técnica.

Si se empieza originalmente con una solución básica factible cuya matriz base es: $B = (b_1, \ldots, bm)$, se sustituirá la columna r, es decir b_r por la columna a_k.

Si se conoce B entonces para la solución básica original $X_B = B^{-1} b$, $Y_j = B^{-1} b$, $Y_j = B^{-1} a_j$, $j = 1, \ldots, n$. Si la nueva matriz base es B, entonces

$$\overline{X}_B = \overline{B}^{-1} b, \quad \overline{Y}_j = \overline{B}^{-1} a_j$$

En la sección *2-16 se vió como obtener B^{-1} de B^{-1}:

$$\overline{B}^{-1} = EB^{-1} \tag{5-3-1}$$

donde E es una matriz cuadrada de orden m que unicamente difiere de la matriz unidad en la columna r, donde tiene al vector η dado por:

$$\eta = \left[-\frac{y_{1,k}}{y_{r,k}}, \ldots, -\frac{y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}}, -\frac{y_{r+1,k}}{y_{rk}}, \ldots -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \right]$$

es decir que es válida la siguiente expresión:

$$\overline{x}_B = EB^{-1} b = EX_B ; \overline{Y}_j = EB^{-1} a_j = Ey_j \qquad (5-3-3)$$

Resulta conveniente desarrollar a (5-3-3) de acuerdo con la siguiente tranformación:

$$E = I + F \qquad (5-3-4)$$

donde F es una matriz que difiere unicamente de la matriz nula en la columna r. La columna r de f es el vector $\phi = \eta - e_r$, es decir

$$F \quad (o,\ldots,o,\phi,o,\ldots,o) \quad \phi \text{ en columnar} \qquad (5-3-5)$$

donde

$$\phi = \eta - e_r = \left[-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{nk}} - 1, - \right.$$

$$\left. -\frac{y_{r+1,k}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \right] \qquad (5-3-6)$$

Utilizando esta notación (5-3-3) queda:

$$\overline{X}_B = (I + F) X_B = X_B + FX_B \qquad (5-3-7)$$

pero como F es nula excepto en la columnar r:

$$FX_B = X_{Br} \phi \qquad (5-3-8)$$

entonces (5-3-8) en (5-3-7) da:

$$\bar{X}_B = X_B + X_{Br} \quad \phi \qquad (5\text{-}3\text{-}9)$$

analogamente:

$$\bar{Y}_j = Y_j + Y_{rj} \quad \phi \qquad (5\text{-}3\text{-}10)$$

Se deberá notar que las transformaciones de X_B y todas la Y_j unicamente dependen de sus valores originales y del vector ϕ que a su vez depende unicamente de Y_k. Una vez que se ha calculado ϕ los valores de $\bar{X}_B$ y $\bar{Y}_j$ resultan inmediatos a partir de (5-3-9) y (5-3-10) respectivamente.

Otra importante simplificación se logra si se designa a:

$$x_{Bi} = y_{io}, \qquad (i = 1,\dots,m);$$

$$z = y_{m+1,o}\ ; \qquad z_j - c_j = y_{m+1,j} \qquad (5\text{-}3\text{-}11)$$

es decir que la ecuación de transformación de z

$$\bar{z} = z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (C_j - Z_j) \quad \text{se podrá escribir como:}$$

$$\bar{y}_{m+1,o} = y_{m+1,o} + y_{ro} \left[- \frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}} \right] \qquad (5\text{-}3\text{-}12)$$

rk

y la ecuación de transformación:

$$\bar{z}_j - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \qquad \text{queda:}$$

$$\bar{y}_{m+1,j} = y_{m+1,j} + y_{rj}\left[-\frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}}\right] \tag{5-3-13}$$

Si ahora definimos a $Y_j = [y_{1j}, \ldots, y_{m+1,j}]$, $j = o, \ldots, n$, las expresiones para la transformación de cualquier cantidad se pueden expresar en términos de la única fórmula de transformación:

$$\bar{Y}_j = Y_j + y_{rj}\ \Phi , \quad j \quad o, 1, \ldots, n, \tag{5-3-14}$$

donde

$$Y_j = [y_j , y_{m+1,j}] , \quad j = o, \ldots, n;$$

$$\Phi = \left[\varphi , - \frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}}\right]$$

Los términos Y_j , Φ, son vectores de $(m+1)$ componentes.

La ecuación vectorial (5-3-14) proporciona las relaciones de transformación de todas las cantidades de interés.

Con el objeto de dar mayor claridad se establecen nuevamente las definiciones de Y_j y Φ en términos de las variables más conocidas.

Se tiene:

$$Y_o = [x_{B1} , \ldots, x_{Bm} , z] = [y_{10} , \ldots, y_{m+1,o}] \tag{5-3-15}$$

$$Y_j = [y_{1j} , \ldots, y_{mj} , z_j - c_j] = [y_{1j} , \ldots, y_{mj} , y_{m+1,j}]$$

$$j = 1, \ldots, n \tag{5-3-16}$$

$$\Phi = \left[-\frac{y_{1k}}{y_{kr}}, \ldots, -\frac{y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}} - 1, \frac{y_{r+1,k}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{mk}}{y_{rk}}, -\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \right]$$

$$(5\text{-}3\text{-}17)$$

La fórmula de transformación (5-3-14) se utiliza tanto para cálculos manuales como para el uso de calculadoras digitales.

Las definiciones anteriores también se utilizan ventajosamente para simplificar las fórmulas (4-3-10), (4-3-11), (4-3-17), (5-1-5), (5-1-6) y (5-1-9) de tal forma que todas estas fórmulas se pueden expresar en la siguiente forma compacta:

$$\overline{y}_{ij} = y_{ij} - y_{ik}\frac{y_{rj}}{y_{rk}}, \quad j = o, \ldots, n \qquad (5\text{-}3\text{-}18)$$

$$i = 1, \ldots, m+1, \; i \neq r$$

$$\overline{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}, \quad j = o, \ldots, n \qquad (5\text{-}3\text{-}19)$$

Las ecuaciones (5-3-18) y (5-3-19) constituyen una expresión de (5-3-14) reducida a sus componentes.

Las ecuaciones generales de transformación se pueden expresar en forma vectorial como en (5-3-14) y reducida a sus componentes según (5-3-18) y (5-3-19). Estas expresiones constituyen todas las cantidades de interes del método simplex.

5-4.- LA SOLUCION BASICA FACTIBLE INICIAL, LAS VARIABLES ARTIFICIALES Y EL ARTIFICIO DE CHARNES.-

A lo largo del desarrollo hasta ahora seguido siempre se supuso de que se tenía una solución básica inicial del problema de programación lineal.

En esta sección se desarrollará un procedimiento que nos proporcione una solución básica factible inicial o que en su defecto nos indique que el problema no fué correctamente formulado y que no existen soluciones factibles.

Con objeto de ilustrar más claramente el caso general, consideremos primeramente un caso particular, y las conclusiones a que lleguemos las trataremos de hacer aplicables al caso general.

Supóngase que en establecimiento de las restricciones del problema, cada una de estas constituye una desigualdad del tipo $\leq$, de tal suerte que es necesario añadir una variable de defecto a cada restricción, con objeto de convertirla en una ecuación. La matriz A del sistema tendrá entonces la forma:

$$A = (R, I) \tag{5-4-1}$$

en donde I es una matriz idéntidad de orden m ya que la columna que corresponde a la variable de defecto x_{r+i} es ei.

Si descomponemos a x en $x = x_r, x_d$ en donde x_d constituye el conjunto de las m variables de defecto y x_r constituye el conjunto de las r variables originales, entonces si para obtener una solución básica anulamos a estas, r, variables originales: $x_r = o$, se tendrá:

$$IX_d = b \tag{5-4-2}$$

Esta constituye una solución básica que contiene unicamente a las variables de defecto, y es además factible ya que $x_d = b$, y $b \geq o$ de acuerdo con la regla ya mencionada que conviene seguir al enunciar el problema.

Esta solución básica es por demás ventajosa ya que

$$B = I \; ; \; B^{-1} = I$$

$$y_j = B^{-1} a_j = I\, a_j = a_j \quad ; \quad j = 1, \ldots, n \tag{5-4-3}$$

y además $C_B = 0$ (5-4-4)

Ya que el coeficiente de la función objetiva o "precio" es nulo para las variables de exceso o de defecto. Por ello:

$$z_j - c_j = c_B y_j - c_j = - c_j \quad (5\text{-}4\text{-}5)$$

$$z = c_B x_B = o \quad (5\text{-}4\text{-}6)$$

Como resulta evidente de las expresiones anteriores, no se requiere de ningún cálculo para obtener los valores de interés, es decir x_B , z , y_j , $z_j - c_j$.

A partir de estos valores se puede iniciar el proceso itera tivo del método simplex.

Como resulta evidente el procedimiento anterior se puede utilizar si siempre que una matriz identidad de orden m se encuentre en A. Sin embargo si las columnas de la matriz identidad no corresponden a variables de defecto, entonces (5-4-4) puede no cumplirse. Las $z_j - c_j$ son en este caso también fáciles de calcular ya que

$$z_j - c_j = c_B y_j - c_j = c_B a_j - c_j \quad (5\text{-}4\text{-}7)$$

En la mayoría de los casos A no contendrá una matriz identidad, y bajo estas condiciones no existe ningún método expedito para encontrar una solución básica factible.

Se ha visto la conveniencia de que A contenga una matriz identidad. Supongamos que siempre iniciamos el proceso con una matriz unitaria como matriz base. Supondremos para ello que en lugar de las restricciones originales se tiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$AX + IX_a = (A, I) \begin{bmatrix} X \\ X_a \end{bmatrix} = b \quad (5\text{-}4\text{-}8)$$

Se ha aumentado el conjunto original de restricciones al añadírsele - m variables adicionales $X\alpha$ y cuyas columnas correspondientes son e_i . - - Estas nuevas variables se llaman variables artificiales ya que no tienen - ningún significado en el sistema original de restricciones. Las columnas e_i, que eventualmente designaremos con q_i, correspondientes a las varia--- bles artificiales $x\alpha_i$ se llaman columnas artificiales.

Con este artificio, hemos logrado tener una matriz identidad en - -- (5-4-8), y consecuentemente se tiene de inmediato una solución básica, factible de (5-4-8), es decir $X\alpha = b$, $X = 0$.

Se deberá notar sin embargo que esta solución NO constituye una so-- lución factible del conjunto original de restricciones.

Cualquier solución de (5-4-8) que sea también solución del sistema - original de restricciones deberá tener $X\alpha = 0$, es, decir que todas las variables artificiales se deberán anular.

En este caso, (5-4-8) se reduce al conjunto original de ecuaciones - $AX = b$. Lo anterior indica que se deberá encontrar una manera para ir de - (5-4-8) al sistema original.

Para lograr esto utilizaremos al propio método simplex para ir in--- sertando a las columnas legítimas a_j de A en la matriz original y de -- esta manera paso a paso, sustituir a los vectores artificiales de la base y hacer de esta forma nulas a todas las variables artificiales. Al final se tendría una base que contiene únicamente vectores de A, es decir una - solución básica factible del sistema original de ecuaciones. De aquí en adelante se prosigue aplicando el método simplex hasta llegar a la solu-- ción óptima.

En el método simplex las $z_j - C_j$ determinan qué vector se deberá in-- sertar en la base y por ello deberemos asignar precios a las variables - artificiales de tal manera desfavorables que la función, objetiva, se pueda mejorar mientras cualquier variable artificial permanezca en la solu-- ción básica factible en un nivel positivo.

Para el caso de maximizar a la función objetiva, se deberá asignar - un precio negativo muy grande a cada variable artificial. De esta manera se podrá esperar qué z se puede mejorar mientras un vector artificial quede en la base en un nivel positivo.

Si $C_{\alpha i}$ es el precio correspondiente a la variable artificial $x_{\alpha i}$, -- entonces designaremos:

$$C_{\alpha i} = -M;\ M>0,\ \text{si se desea maximizar } \alpha z$$

$$C_{\alpha i} = M;\ M>0,\ \text{si se desea minimizar } \alpha z$$

Para cálculos manuales M no se especifica como un número particular.

Entra a los cálculos como M y se le considera lo suficientemente grande como para que cualquier precio que corresponde a una variable legítima sea completamente despreciable respecto a M. Cuando usa una calculadora - digital se le da un valor a M aproximadamente 1000 veces mayor que el precio mayor, de cualquiera de las variables legítimas.

Puede suceder que debido a la introducción de variables de defecto ya exista parte de la matriz unitaria en A y en estos casos es únicamente necesario añadir los vactores artificiales e_i necesarios para acompletar a - la matriz unitaria.

Como las variables artificiales son inicialmente no negativas, y como el método simplex no las convierte en negativas, $x\alpha_i > 0$ siempre. Final-- mente tendremos $x\alpha_i = 0$ para todas las i para encontrar una solución factible del sistema original de ecuaciones.

Una vez que un vector artificial ha abandonado la base, ha servido a su propósito, y nos podemos olvidar de él. Un vector artificial nunca se considera para volver a entrar en la base.

El artificio de asignar un alto precio a una variable artificial fue primeramente sugerido por Charnes.

Ejemplo:

Supóngase que se tiene el siguiente problema de programación lineal:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \geq 6$$
$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 9$$

Se deberán eliminar primeramente las desigualdades añadiendo para --- ello variables de exceso y de defecto, hecho lo cual, el sistema resulta:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 0 & +1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

En A ya está presente el vector e_2, por ello únicamente hace falta - añadir $q = e_1$ $q_2 = e_3$ cuyas correspondientes variables serán $x\alpha_1$ y αx_2. El precio de cada una de estas variables será -M.

La matriz aumentada resulta:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x\alpha_1 \\ x_6 \\ x\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\max \; z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - Mx\alpha_1 - Mx\alpha_2$$

Una solución básica factible inmediata del sistema aumentado es:

$$X_B = [\, x\alpha_1 \,, \; x_6, \; x\alpha_2] = [\, 6, \; 5, \; 9 \,]$$

$$B = B^{-1} = I \quad ; \quad B = (q_1, \alpha_6, \; q_2)$$

Entonces, para todas las j : $y_j = a_j$ como existen variables artificiales en la base:

$$C_B = (-M, 0, -M)$$

Calculemos a continuación las $z_j - C_j$ para ver cuál vector deberemos introducir a la hueva base

$$z_j - C_j = C_B y^j - C_j$$

$$z_1 - C_1 = -4M - 2$$
$$z_2 - C_2 = -4M - 3$$
$$z_3 - C_3 = -10M - 2$$
$$z_4 - C_4 = -7M - 4$$
$$z_5 - C_5 = M$$

Como M es mucho mayor que cualquier otro precio únicamente cuentan -- los términos en M. El vector que se deberá insertar en la base es aquel - con el menor $z_j - C_j < o$. En nuestro caso este es a_3.

El vector que se deberá sacar de la base es:

$$\min_i \left\{ \frac{xB_i}{y_{i3}}, \quad y_{i3} > 0 \right\} \qquad \min\left(\frac{6}{6}\ \frac{5}{2}\ \frac{9}{4}\right) = 1$$

El mínimo se presenta para $i = 1$ esto implica que la columna 1 de B o sea q_1 se deberá sustituir por a_3. Se observa que en la primera iteración se ha sustituido uno de los vectores artificiales por uno legítimo.

No siempre sucede, sin embargo, que los vectores artificiales serán los primeros en ser sustituidos de la base, antes de que un vector legítimo lo sea.

Por ejemplo, si b_2 hubiese sido 1 en lugar de 5, el vector de la base que se debería eliminar lo hubiésemos determinado con

$$\min\left(\frac{6}{6}, \frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Es decir que en este caso el mínimo se presentó para $i = 2$ y consecuentemente a_6 se debería haber sustituido por a_3. Los dos vectores artificiales hubieran permanecido en la base en esta primera iteración.

5.5.- DETECCION DE INCONSISTENCIA Y REDUNDANCIA

Cuando el sistema de restricciones posee una matriz identidad, resulta evidente que existe una solución, básica factible. En este caso

$$r(A) = r(Ab) = m.$$

A continuación se indicará la forma de cómo el método simplex permite determinar si el sistema original de restricciones es consistente, y si alguna de las restricciones originales es redundante. Para ello es necesario empezar con un sistema aumentado, cuya solución básica factible inicial consista totalmente o en parte de variables artificiales.

1 Como en todo caso, a excepción de la presencia de una solución óptima no acotada, se satisface el criterio de optimización, es decir que toda $z_j - c_j \geq 0$ es suficiente considerar para el análisis este caso. Se podrán presentar las siguientes variantes:

a). No existen vectores artificiales en la base.

b). Uno o más de los vectores artificiales están en la base, pero a un nivel nulo.

c). Uno o más de los vectores artificiales están en la base a un nivel positivo.

En el caso (a) obviamente se tiene una solución óptima del problema y consecuentemente el sistema original de restricciones es consistente y ninguna de las ecuaciones es redundante.

Si se presenta el caso (b) como todas las variables artificiales son nulas, se tendrá una solución factible consecuentemente el sistema original de restricciones es consistente.

Por lo que se refiere a la redundancia analizaremos dos casos:

i) $y_{ij} = 0$ para toda a_j y para las i correspondientes a las columnas de la base que contienen vectores artificiales a un nivel nulo.

ii) $y_{ij} \neq 0$ para una o mas a_j y para una o mas i correspondiente a las columnas de B que contienen vectores artificiales.

Si para alguna j, $y_{ij} \neq 0$ (i corresponde a una columna de B que contiene un vector artificial) entonces el vector artificial se puede eliminar de la base y sustituir por a_j, y se mantendrá una base. Además como la variable artificial estaba a un nivel nulo, a entrará a la base también a un nivel nulo, y la nueva solución básica será factible. El valor de la función objetiva no se alterará. Si se puede continuar este proceso hasta que todos los vectores artificiales se han sustituido, se obtendrá una solución básica degenerada factible que también es óptima que contiene unicamente a las columnas de A. En consecuencia ninguna de las restricciones originales es redundante.

Si por el proceso anterior no es posible sustituir a todos los vectores artificiales, finalmente llegaremos al punto en que $y_{ij} = 0$ para toda a_j y toda i correspondientes a las columnas de B que contienen vectores artificiales a un nivel nulo. En estas circunstancias no se podrá sustituir a ningún vector artificial y aún mantener una base.

Supongamos que existen K vectores artificiales en la base a un nivel nulo. Se implica que cualquier columna de A se puede expresar como una combinación lineal de los $m - k$ columnas independientes de A en la base. Por ello $r(A) = m - k$, y k de las restricciones originales eran redundantes.

En el caso (c) resulta evidente que no existe solución factible al problema original, ya que de existir esta, las variables artificiales se podrían anular dando así un valor mejorado de z. Pero esto contradice al hecho de que el criterio óptimo se ha satisfecho.

El hecho de que no existan soluciones factibles se puede presentar debido a que las ecuaciones restrictivas son inconsistentes o porque existen soluciones, pero no soluciones factibles.

El método simplex permite identificar si se trata de soluciones no factibles o si el sistema de ecuaciones es inconsistente.

Si sustituimos los vectores artificiales de la base para los cuales $y_{ij} > 0$ se llegará a uno de los tres casos siguientes:

i) Se pudieron eliminar todos los vectores artificiales y consiguientemente se obtuvo una solución básica aunque no factible.

ii) $y_{ij} < 0$ para todas las j e i correspondientes a columnas de B que contienen vectores artificiales.

iii) $y_{ij} = 0$ para todas las j e i correspondientes a columnas de B que contienen vectores artificiales.

En el caso (ii) se pueden eliminar los vectores artificiales y como a_j entra a un nivel negativo se obtendrá finalmente una solución básica pero no factible.

En el caso (iii) si r (A) = K entonces r (Ab) = k + 1 y consiguientemente el sistema original de restricciones es inconsistente.

5-6.- TABLA PARA LOS CALCULOS DEL METODO SIMPLEX.-

La forma más adecuada para verificar ordenadamente los cálculos del método simplex es la ilustrada en la figura (5-6-1).

Se construirá una tabla nueva cada vez que se introduzca a la base un nuevo vector.

En la primera columna se indican los "precios" CB correspondientes a los vectores en la base, La segunda columna indica cuales son los vectores en la base. La tercera columna, bajo "b" da el valor de X_B, junto con el valor de la función objetiva para la solución básica factible indicada en la tabla.

Las demás columnas, proporcionan los valores de y_j para todos los vectores de A y cualquier vector artificial que se haya agregado.

TABLA SIMPLEX

			c_1	c_2	....	c_n	$\mp M$	....	$\mp M$
C_B	Vectores en la base	b	a_1	a_2	....	a_n	q_1	....	q_s
C_{B1}	b_1	$x_{B1} = y_{10}$	y_{11}	y_{12}	....	y_{1n}	$y_{1,n+1}$		$y_{1,n+s}$
C_{B2}	b_2	$x_{B2} = y_{20}$	y_{21}	y_{22}	....	y_{2n}	$y_{2,n+1}$		$y_{2,n+s}$
C_{Bm}	b_m	$x_{Bm} = y_{m0}$	y_{m1}	y_{m2}	....	y_{mn}	$y_{m,n+1}$		$y_{m,n+s}$
		$z = y_{m+1,0}$	$z_1 - c_1 = y_{m+1,1}$	$z_2 - c_2 = y_{m+1,2}$	....	$z_n - c_n = y_{m+1,n}$	...	.....	...

F. 5-6-1

Con y_{n+i}, indicaremos $B^{-1} q_i$. La última anotación en cada una de estas columnas da $z_j - c_j$. El primer renglón de la tabla da los precios asociados a los vectores.

Se recordará que es necesario saber cual columna de A está en la columna i de B, para poder determinar a la variable x_j que corresponde a x_{Bi}. Se ve al renglón de la columna 2 donde aparece x_{Bi} y se lee a que vector corresponde esta variable. De igual forma se encuentra la c_{Bi} que corresponde a una c_j.

Los vectores artificiales se consideran para volver a entrar en la base, y consiguientemente no se consideran columnas para ellos. Sin embargo si se desea tener a B^{-1} disponible para cada base, entonces es necesario incluir columnas para las variables artificiales como lo muestra la figura (5-6-1) y transformarlas en cada iteración.

5-7.- EJEMPLO DEL USO DE LA TABLA PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL.-

El mejor método para ilustrar el uso de la tabla anterior es mediante un ejemplo.

Recordando sabemos que una solución óptima se tiene cuando $z_j - c_j \geq 0$ para cualquier valor de j.

Cuando $z - c < 0$, se buscará el vector k que deberá entrar en la base mediante:

$$z_k - c_k = \min (z_j - c_j) ; z_j - c_j < 0 \qquad (5\text{-}7\text{-}1)$$

Una vez seleccionado este vector k se pueden presentar dos alternativas:

a) $y_{ik} \leq 0$ para toda i; en este caso se tendrá una solución no acotada.

b) $y_{ik} > 0$ para por lo menos una i; en este caso se podrá encontrar una nueva solución básica factible que proporciohe un valor mejorado de la función objetiva.

Para determinar cual de los vectores de la base se deberá eliminar y sustituir por el vector k se utiliza:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_{i} \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} , \ y_{ik} > 0 \right\} \qquad (5\text{-}7\text{-}2)$$

El cálculo de cada uno de los elementos al eliminar y sustituir uno de los vectores de la base se puede verificar ya sea por I o II.

$$\text{I.} \quad \bar{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}$$

toda j, i = 1,..., m∓1, i≠r (5-7-4)

$$\bar{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rj}} , \quad \text{toda } j$$

$$x_B = y_0 , \quad z = y_{m+1,o}, \quad z_j - c_j = y_{m+1,j}$$

$$j = 1,\dots,n$$

$$\text{II.} \quad \bar{Y}_j = Y_j + y_{rj} \Phi \qquad (5\text{-}7\text{-}5)$$

$$Y_j = \left[y_j , \ y_{m+1,j} \right] \quad \text{toda } j$$

$$\Phi = \left[-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}} - 1, -\frac{y_{r+1,k}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}} \right]$$

(5-7-6)

En la sección (2-3) se tenía el siguiente problema de programación lineal:

$$2x_1 + x_2 \leq 5 \qquad (5\text{-}7\text{-}7)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, \; x_2 \geq 0$$

$$z_{max} = x_1 + x_2$$

Este sencillo problema se resolvió graficamente en la figura (2-1) y los resultados obtenidos fueron:

$$x_1 = \frac{6}{5} = 1.2 \; ; \; x_2 = \frac{13}{5} = 2.6$$

$$z_{max} = \frac{19}{5} = 3.8$$

A continuación se resuelve el mismo problema utilizando el Método Simplex.

Se deberán añadir a las desigualdades (5-7-7) variables de defecto para convertirlas en ecuaciones, se tendrá entonces:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$a_1 = [2,1]$, $a_2 = [1,3]$, $a_3 = [1,0]$,

$a_4 = [0,1]$ $b = [5,9]$

Los variables de exceso y de defecto tienen precios nulos.

El valor de $z_j - c_j$ estará dado por el último renglón. En este último eenglón y en la columna b aparece el valor de z para esta iteración,

T (5-7-1)

			1	1	0	0
c_B	Vectores en la base	b	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_3	5	2	1	1	0
0	a_4	9	1	3	0	1
	$z_j - c_j$	0	-1	-1	0	0

$$z_j - c_j = c_B \; a_j - c_j \qquad (5\text{-}7\text{-}8)$$

Como la base en esta primera iteración es una matriz unitaria debida a las variables de defecto cuyos precios son nulos

$z_j - c_j = - c_j$ (último renglón)

La solución es obviamente no la óptima ya que aparecen dos $z_j - c_j < 0$

En este caso ya sea a_1 ó a_2 deberán entrar a la base en el siguiente paso.

Se recomienda encerrar a la columna que entrará a la base como está indicado en este caso a_2.

A continuación se deberá determinar el vector que se deberá eliminar de la base. En nuestro caso tanto y_{12} como y_{22} son positivas. ($j = 2$). - Se utiliza (5-7-2)

$$\frac{x_{B1}}{y_{12}} = \frac{5}{1} = 5 \quad ; \quad \frac{x_{B2}}{y_{22}} = \frac{9}{3} = 3$$

Consecuentemente el segundo vector de la base, a_4 se deberá sustituir por a_2

En este ejemplo se utilizará el método I para el cálculo de los nuevos elementos.

De acuerdo con (5-7-4) $\bar{y}_{rj}$ se obtiene al dividir las y_{rj} originales de cada j por y_{rk}. Conviene encerrar el renglón por sustituir como se ha indicado.

Para nuestro caso $y_{rk} = 3 = y_{22}$

entonces:

$$\bar{y}_{20} = \frac{9}{3} = 3 \;;$$

$$\bar{y}_{21} = \frac{1}{3} = 0,333$$

$$\bar{y}_{22} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\bar{y}_{23} = 0$$

$$\bar{y}_{24} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Los dos renglones restantes se obtienen mediante (5-7-3) o sea

$$\bar{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \qquad \text{para toda } j$$

El término $\frac{y_{ik}}{y_{rk}}$ es constante para cada renglón.

Para el primer renglón:

$$\frac{y_{1k}}{y_{2k}} = \frac{1}{3} = 0.333$$

entonces:

$$\bar{y}_{ij} = y_{ij} - 0.333 \; y_{2j}$$

es decir:

$$\bar{y}_{10} = 5 - 0.333 \times q = 5 - 3 = 2$$

$$\bar{y}_{11} = 2 - 0.333 \times 1 = 1.666$$

$$\bar{y}_{12} = 1 - 0.333 \times 3 = 0$$

$$\bar{y}_{13} = 1 - 0.333 \times 0 = 1$$

$$\bar{y}_{14} = 0 - 0.333 \times 1 = -0.333$$

$$y_{3k}/y_{2k} = -\frac{1}{3} \quad - 0.333$$

$$\bar{y}_{30} = 0 + 0.333 \times 9 = 0 + 3 = +3$$

$$\bar{y}_{31} = -1 + 0.333 \times 1 = -0.666$$

$\bar{y}_{32} = -1 + 0.333 \times 3 = 0$

$\bar{y}_{33} = 0$

$\bar{y}_{34} = 0 + 0.333 \times 1 = 0.333$

La Tabla T (5-7-2) muestra esta iteración

T (5-7-2)

			1	1	0	0
c_B	Vectores en la base	b	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_3	2	1.66	0	1	-0.33
1	a_2	3	0.33	1	0	0.33
	$z_j - c_j$	3	-0.66	0	0	0.33

La solución no es óptima aún, ya que $z_j - c_j < 0$ para $j = 1$. Consecuentemente, en la siguiente iteración se insertará a a_1.

El vector por eliminar será:

$$\frac{x_{B1}}{y_{11}} = \frac{2}{1.66} = 1.2 \; ; \; \frac{x_{B2}}{y_{21}} = \frac{3}{0.33} = 9$$

Como era de esperarse, se eliminará al vector artificial a_3 $(r = 1)$

Dividiremos todos los elementos del renglón $r = 1$ por $y_{rk} = y_{11} = 1.66$

$$\bar{y}_{10} = \frac{2}{1.66} = 1.2 \quad ; \quad \bar{y}_{13} = \frac{1}{1.66} = 0.6$$

$$\bar{y}_{11} = 1 \qquad \bar{y}_{14} = \frac{-0.33}{1.66} = -0.2$$

$$y_{12} = 0$$

La constante para $r = z$ vale

$$\frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{0.33}{1.66} = 0.2$$

$$\bar{y}_{2j} = y_{2j} - 0.2\, y_{1j}$$

$$\bar{y}_{20} = 3 - 0.2 \times 2 = 3 - 0.4 = 2.6$$

$$\bar{y}_{21} = 0.33 - 0.2 \times 1.66 = 0$$

$$\bar{y}_{22} = 1 - 0.2 \times 0 = 1$$

$$\bar{y}_{23} = 0 - 0.2 \times 1 = -0.2$$

$$\bar{y}_{24} = 0.33 - 0.2\,(-0.33) = 0.33 + 0.066 = 0.3999$$

La constante para r = 3 vale:

$$\frac{y_{31}}{y_{11}} = \frac{-0.66}{1.66} = -0.4$$

$$y_{3j} = y_{3j} + 0.4\ y_{1j}$$

$$\bar{y}_{30} = 3 + 0.4 \times 2 = 3 + 0.8 = 3.8$$

$$\bar{y}_{31} = -0.66 + 0.4\,(1.66) = 0$$

$$\bar{y}_{32} = 0 + 0 = 0$$

$$\bar{y}_{33} = 0 + 0.4\,(1) = 0.4$$

$$\bar{y}_{34} = 0.33 + 0.4\,(-0.33) = 0.33 - 0.1333 = 0.2000$$

La tabla para esta iteración es:

T (5-7-3)

			1	1	0	0
C_B	Vectores en la base	b	a_1	a_2	a_3	a_4
1	a_1	1.2	1	0	0.6	-0.2
1	a_2	2.6	0	1	-0.2	0.4
	$z_j - c_j$	3.8	0	0	0.4	0.2

Como todas la $z_j - c_j > 0$ se tiene la solución óptima.

De T(5-7-3) se leen los resultados

$$x_1 = 1.2 \qquad z_{max} = 3.8$$

$$x_2 = 2.6$$

que como se ve concuerdan con los obtenidos con el método gráfico.

5-8.- EL PROBLEMA DE HACER MINIMA A UNA FUNCION OBJETIVA.-

Las técnicas hasta ahora ilustradas para la solución lineal mediante el uso del método simplex se han limitado al caso en que se desea hacer máxima a la función objetiva.

En esta sección se indicará la forma de atacar aquellas problemas en que por el contrario se desea hacer mínima a la función objetiva.

Si se tiene una función de n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y f^* es el valor mínimo de esta función para una región cerrada de E^n entonces, para un punto X cualquierade la región se cumple que:

$$f^* - f \leq 0 \qquad (5\text{-}8\text{-}1)$$

o sea que multiplicando ambos miembros por (-1) se tiene:

$$(-f^*) - (-f) \geq 0$$

Por definición de un máximo absoluto se tiene:

$$(-f^*) = \max \left[- f \right]$$

es decir que $-f$ toma su valor máximo en x^*.

Se concluye que

$$\min f = f^* = -(-f^*) = -\max(-f) \qquad (5\text{-}82)$$

El mínimo de una función f para un conjunto de puntos es igual al nega tivo del máximo de la función - f.

Es decir que es sencillo convertir un problema por minimizar en un -- problema por maximizar y aplicarle entonces los métodos vistos.

Para ello es unicamente cambiar el signo a cada uno de los precios,

$$\min z = - \max (-cx) = - \max (-c)\, x \tag{5-8-3}$$

La función por maximizar es $z^* = (-c)\, x$, o sea $\min z = - \max z^*$.

Seguidamente se demuestra que al hacer lo antes indicado, el criterio de optimización y el método para seleccionar el vector que deberá entrar a la base no se han alterado.

Para los problemas de mínimos se tenía

$$z_j - c_j = c_B\, y_j - c_j \leq 0 \quad \text{para toda } j$$

Al convertirlo en un problema de máximo c_j es sustituida por $- c_j$ o sea

$$(-c_B)\; y_j - (-c_j) \leq 0 \quad \text{para toda } j$$

ya que equivale a multiplicar la ecuación por -1. Esto corresponde al criterio de optimización para hacer máxima a una función.

En forma análoga en un problema de mínimo, el vector que deberá entrar a la base se encuentra de:

$$z_k - c_k = \max (z_j - c_j), \qquad z_j - c_j > 0$$

Al sustituir c_j por $(-c_j)$ se tiene

$$- z_k - (-c_k) = \min_j \left[- z - (-c_j) \right]$$

$$- z_j - (-c_j) < 0$$

que corresponde al criterio utilizado en los problemas de maximización para determinar el vector que deberá entrar en la base.

En conclusión, como un problema por minimizar se puede convertir en -- una por maximizar cambiando únicamente de signo a los precios, se podrá a - continuación estudiar sin pérdida de generalización, únicamente problemas - de maximización.

A continuación se ilustra la resolución de un problema de programación lineal que presenta las siguientes características:

a) Se desea hacer mínima a la función objetiva.

b) Se utilizará el método II para su solución.

c) Requiere la introducción de variables artificiales.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ z_{min} &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Para hacer de las desigualdades ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

Además para tener una matriz base unitaria se deberán agregar dos columnas $q_1 = e_1$, $q_2 = e_2$ correspondientes a las variables artificiales- xa_1 y xa_2 entonces:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_{a1} &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + xa_2 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

Para convertirlo en un problema de maximización:

$$z_{MAX} = -x_1 - 2x_2 - M x_{a_1} - M x_{a_2}$$

T-(5-8-1)

			-1	-2	0	0	0	-M	-M
C_B	Vectores en la base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2
-M	q_1	4	1	1	-1	0	0	1	0
-M	q_2	6	1	3	0	-1	0	0	1
0	a_5	16	1	4	0	0	1	0	0
	$z_j - c_j$	-10M	-2M+1	-4M+2	M	M	0	0	0

$$z_j - c_j = C_b a_j - c_j$$

$$\bar{z} = CBb$$

$$\bar{z} = -10\ M$$

Para $j = 1$ $\quad z_j - C_j = -2M + 1$

Para $j = 2$ $\quad z_j - C_j = -4M + 2$

Para $j = 3$ $\quad z_j - C_j = +M$

$$Z_k - C_k = -4M + 2 \qquad k = 2$$

$$\frac{x_{B1}}{y_{1k}} : \quad \frac{x_{B1}}{y_{12}} = \frac{4}{1} ; \quad \frac{x_{B2}}{y_{22}} = \frac{6}{3} \quad \frac{x_{B3}}{y_{32}} = \frac{16}{4}$$

Consecuentemente q_2 será eliminada de la base.

$y_{rk} = 3$ entonces

$$\Phi = \left[-\frac{1}{3} ; \ \frac{1}{3} - 1, \ -\frac{4}{3}, \ \frac{4M-2}{3} \right]$$

$= [- 0.333 , - 0.666 , - 1.333 , 1,333 M - 0.666]$

$\bar{Y}_o = [4, 6, 16, - 10M] + 6 [-0.333, - 0.666, -1,333, 1.333M-0.666]$

$\bar{Y}_o = [4 - 2, 6 - 4, 16-8, - 10 M + 8 M - 4]$

$\bar{Y}_o = [4 - 2, 6 - 4, 16 - 8, - 10 M + 8 M - 4]$

$\bar{Y}_o = [2 , 2 , 8 . - 2M - 4]$

$\bar{Y}_1 = [1, 1, 1, - 2M+1] + 1 [-0.333, - 0.666, - 1.333, 1.333 M-0.666]$

$\bar{Y}_1 = [+0.666, + 0.333, - 0.333, - 0.666 M + 0.333]$

$\bar{Y}_2 = [0, 1, 0, 0]$

$\bar{Y}_3 = [-1, 0, 0, M] + 0 \phi$

$\bar{Y}_3 = [- 1, 0, 0, M]$

$\bar{Y}_4 = [- 0, - 1, 0, M] - 1 [- 0.33, - 0.66, - 1,333, 1.333M-0.666]$

$\bar{Y}_4 = [0.333, - 0.333 , + 1.333, - 0.333 M + 0.666]$

$\bar{Y}_5 = [0, 0, 1, 0]$

$\bar{Y}_6 = [1, 0, 0, 0]$

$\bar{7}_7 = [0, 1, 0, 0,] + 1 [- 0.333, - 0.666, - 1,333, 1,333 M-0.666]$

$\bar{7}_7 = [- 0.333, 0.333,, - 1.333, 1.333 M - 0.666]$

T (5-8-2)

			-1	-2	0	0	0	-M	-M
C_B	Vectores base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2
-M	q_1	2	0.666	0	-1	0.333	0	1	-0.333
-2	a_2	2	0.333	1	0	-0.333	0	0	0.333
0	a_5	8	-0.333	0	0	1.333	1	0	-1.333
	$z_j - c_j$	-2M-4	-0.666M + 0.333	0	M	-0.333M + 0.666	0	0	1.333M -0.666

$(z_j - c_j)$ mínima = $-\ 0.666\ M + 0.333$ o sea $k = 1$

$$\frac{x_{B1}}{y_{1k}} : \frac{x_{b1}}{y_{11}} = \frac{2}{0.666} = 3 \qquad \frac{x_{B2}}{y_{21}} = \frac{2}{0.333} = 6$$

se deberá eliminar q_1

$$y_{rk} = y_{11} = 0.666$$

$$\bar{\Phi} = \left[\frac{1}{0.666} - 1\ ,\ - \frac{0.333}{0.666},\ + \frac{0.333}{0.666}\ ,\ \frac{0.666\ M - 0.333}{0.666} \right]$$

$$\bar{\Phi} = [\ 0.5\ ,\ -\ 0.5,\ 0.5\ ,\ M - 0.5\ ]$$

$$Y_o = [\ 2,\ 2,\ 8,\ -\ 2M - 4\ ] + 2\ [\ 0.55,\ -0.5,\ 0.5,\ M-0.5]$$

$$Y_o = [\ 3\ ,\ 1,\ 9,\ -\ 5\ ]$$

$$Y_1 = [\ 0.666,\ 0.333,\ -\ 0.333,\ -\ 0.666\ M + 0.333\ ] +$$

$$+\ 0.666\ [\ 0.5,\ -\ 0.5,\ 0.5,\ M-0.5\ ]$$

$Y_1 = [1, 0, 0, 0.]$

$Y_2 = [0, 1, 0, 0]$

$Y_3 = [- 1, 0, 0, M] - [0.5, - 0.5, 0.5, M - 0.5]$

$Y_3 = [- 1.5, 0.5, - 0.5, 0.5]$

$Y_4 = [0.333, - 0.333, 1,333, - 0.333M + 0.666]$

$+ 0.333 [0.5, - 0.5, 0.5, M - 0.5]$

$Y_4 = [0.5 , - 0.5 , 1.5 , 0.5]$

$Y_5 = [0, 0, 1, 0]$

$Y_6 = [1, 0, 0, 0.] + [0.5, -0.5, 0.5, M-0.5]$

$Y_6 = [1.5, - 0.5, 0.5, M-0.5]$

$Y_7 = [- 0.333, 0.333, - 1.333, 1,333 M - 0.666]$

$- 0.333 [0.5, - 0.5, 0.5, M - 0.5]$

$Y_7 = [- 0.5, 0.5, - 1.5, M - 0.5]$

T (5-8-3)

C_B			-1	-2	0	0	0	-M	-M
C_B	Vectores base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2
-1	a_1	3	1	0	-1.5	0.5	0	1.5	-0.5
-2	a_2	1	0	1	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5
0	a_5	9	0	0	-0.5	1.5	1	0.5	-1.5
	$z_j - C_j$	-5	0	0	0.5	0.5	0	M-0.5	M-0.5

Como todas las $z_j - c_j \geq 0$ se tiene la solución óptima del problema

Esta solución es:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_5 = 3$$

$$z_{min} = -(-5) = 5.$$

5-9.- SOLUCION DEL PROBLEMA DE PRODUCCION PLANTEADO EN LA SECCION (3-1).

En la sección (3-1) se planteo un problema de programación lineal que tenía por objeto determinar la producción de motores economicamente mas -- mas conveniente.

Se obtubeieron las siguientes restricciones:

$$3x_1 + 2.5\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 + 4\,x_5 \leq 2200$$
$$2x_1 + 9x_2 + 2.5\,x_3 + 7\,x_4 + 6x_5 \leq 7500$$
$$3.2\,x + 6\,x_2 + 8\,x_3 + 2.5\,x_4 + 4\,x_5 \leq 4500$$
$$2.5\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 + 1.5\,x_5 \leq 3000$$

La función objetiva era la utilidad neta y consecuentemente se desea- hacer máxima.

$$z_{máx} = 500\,x_1 + 700\,x_2 + 300\,x_3 + 400\,x_4 + 450\,x_5$$

Es necesario introducir cuatro varianles de defecto x_6, x_7, x_8, x_9 - para convertir a las desigualdades en ecuaciones.

Unicamente a cada iteración se presentarán las tablas correspondientes a cada iteración.

T (5-9-1)

			500	700	900	400	450	0	0	0	0
C_B	Vectores base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2	q_3	q_4
0	q_1	2200	3	2.5	5	2	4	1	0	0	0
0	q_2	7500	2	9	2.5	7	6	0	1	0	0
0	q_3	4500	3.2	6	8	2.5	4	0	0	1	0
0	q_4	3000	2.5	3	2	3	1.5	0	0	0	1
	$Z_j - C_j$	0	-500	-700	-900	-400	-450	0	0	0	0

T (5-9-2)

			500	700	900	400	450	0	0	0	0
C_B	Vectores base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2	q_3	q_4
900	a_3	440	0.6	0.5	1	0.4	0.8	0.2	0	0	0
0	q_2	6400	0.5	7.75	0	6	4	-0.5	1	0	0
0	q_3	980	-1.6	2	0	-0.7	-2.4	-1.6	0	1	0
0	q_4	2110	1.3	2	0	2,2	-0.1	-0.4	0	0	1
	$Z_j - C_j$	396000	40	-250	0	-40	270	180	0	0	0

T (5-9-3)

			500	700	900	400	450	0	0	0	0
C_B	Vectores base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2	q_3	q_4
900	a_3	195	1	0	1	0.575	1.4	0.6	0	-0.25	0
0	q_2	2605	6.7	0	0	8.71	13.3	5.7	1	-3.875	0
700	a_2	490	-0.8	1	0	-0.35	-1.2	-0.8	0	0.5	0
0	q_4	1130	2.9	0	0	2.9	2.3	1.2	0	-1	1
	$z_j - c_j$	518,500	-160	0	0	-127.5	-30	-20	0	125	0

T (5-9-4)

			500	700	900	400	450	0	0	0	0
C_B	Vectores base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2	q_3	q_4
500	a_1	195	1	0	1	0.575	1.4	0.6	0	-0.25	0
0	q_2	1300	0	0	-6.7	4.86	3.92	+1.62	1	-2.2	0
700	a_2	646	0	1	0.8	0.11	0.08	-0.32	0	0.3	0
0	q_4	565	0	0	-2.9	1.23	-1.76	-0.54	0	-0.275	1
	$z_j - c_j$	549700	0	0	160	-36	194	76	0	85	0

T (5-9-5)

			500	700	900	400	450	0	0	0	0
C_B	Vectores base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	q_1	q_2	q_3	q_4
500	a_1	41	1	0	1.794	0	0.935	0.408	-0.1184	0.011	0
400	a_4	268	0	0	-1.38	1	0.81	0.335	0.206	-0.45	0
700	a_2	616.5	0	1	0.952	0	-0.0085	-0.357	-0.0227	0.35	0
0	q_4	236	0	0	-1.205	0	-2.75	-0.95	-0.253	0.282	1
	$Z_j - C_j$	559340	0	0	110.4	0	223.1	88	7.41	68.7	0

R E S U L T A D O S.-

La máxima utilidad neta que se puede obtener dadas las condiciones -- anteriores es de $ 559 340.00 a la semana.

Para ello es necesario producir 41 motores tipo a, 616.5 motores tipo b, y b, y 368 motores tipo d.

Seguramente la demanda del mercado por los motores no corresponde a - la producción más conveniente calculada arriba; es sinembargo de gran interés para una planta conocer cual es la producción mas económica. Conocida- esta, se tratará de que las futuras campañas publicitarias, y además promociones de ventas busquen que las ventas se asemejen lo mas posible a la -- producción más económica.

El análisis anterior permite además detectar cual es el departamento- que mas desperdicio de horas- máquina disponibles presentaría B_1 se tu--- viese la producción óptima. En el problema anterior se trató del departamento D.

En conclusión se puede decir que si la planta observa una demanda creciente por sus motores tal que se pudiera llegar cerca de la producción óptima, en el caso de la planta estudiada dados los resultados obtenidos convendría hacer un análisis de ruta crítica.

Este permitiría determinar en caso de expansión, cuales departamentos deberían, ser agrandados y en que proporción. Hecho esto se volvería a - hacer un cálculo igual al anterior pero para las nuevas restricciones y se determinaria si con los cambios propuesto aumentó la utilidad neta y en -- que proporción respecto a la inversión requerida para la expansión.

CAPITULO VI

La Programación Lineal y sus Aplicaciones en la Industria.

6-I) UTILIZACION OPTIMA DE LA CAPACIDAD DE LA MAQUINRIA.

Dentro de los problemas de capacidad maquinaria que frecuentemente se encuentran en la industria se tiene el siguiente ejemplo: una fábrica manufactura un cierto número de productos que requieren ser procesados en las mismas máquinas cuyas capacidades limitan la producción por período. El problema consiste en determinar la cantidad de cada producto que se deberá manufacturar cuando se desea maximizar la ganancia.

El problema (3-1) es un ejemplo de esta aplicación de la programación lineal en la industria. Este problema se solucionó en la sección (5-9).

Un ejemplo hipotético de este tipo de problemas es el siguiente: una fábrica de lavadoras de ropa produce dos modelos, el de 3 y el de 5 Kg. La planta consta de 4 departamentos y cada uno de ellos tiene una capacidad limitada.

El primer departamento es el del estampado y doblado de las láminas. Su capacidad se puede expresar como 300 lavadoras de 3 Kg. o 200 lavadoras de 5 Kg. al mes. Es decir que una lavadora de 3 Kg. ocúpa 1/300 de la capacidad mensual y la otra 1/200 de esta capacidad.

Esta limitación se expresa, en forma de una desigualdad lineal de la siguiente forma:

$$\frac{1}{300} X_1 + \frac{1}{200} X_2 \leq 1$$

en donde X_1, X_2 son el número de lavadoras de 3 y 5 Kg. producidas al mes-respectivamente

El segundo departamento es el de ensamble del motor cuya capacidad es de 166 lavadoras de 3 Kg. ó 320 lavadoras de 5 Kg. al mes. El tercer departamento es el de ensamble final de las lavadoras de 5 Kg. y su capacidad - es de 230 lavadoras al mes. El cuarto departamento es el de ensamble final de las lavadoras de 3 Kg. y su capacidad es de 150 lavadoras al mes.

El problema de programación lineal es:

$$\frac{1}{300} X_1 + \frac{1}{200} X_2 \leq 1$$

$$\frac{1}{166} X_1 + \frac{1}{320} X_2 \leq 1$$

$$\frac{1}{230} X_2 \leq 1$$

$$\frac{1}{150} X_1 \leq 1$$

La utilidad neta derivada de la venta de estas lavadoras es de \$ 750- y \$ 900 respectivamente. La función objetiva es consiguientemente:

$$Z \text{ Máx} = 750\ X_1 + 900\ X_2$$

6-2) PROBLEMAS DE BALANCEO DE MEZCLAS.

La aplicación de la programación lineal para balanceo de mezclas se - ha convertido en un análisis muy empleado en refinerías de petróleo y en - fábricas de alimentos balanceados para animales

Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente:

Una fábrica de pinturas manufactura una gran cantidad de productos para pinturas. Uno de sus departamentos se dedica unicamente a la prepara- -

ción de las bases para las pinturas. Esta base se mezcla despues con los pigmentos para formar la pintura propiamente dicha..

Las bases para la pintura se obtienen mezclando diferentes cantidades de los siguientes ingredientes: aceite, secador y solvente (thinner).

Supóngase que se requieren preparar dos bases A y B. Se requieren 400 galones de la base A y 600 de la base B.

Las composiciones de estas bases son las siguientes:

	Aceite	Secador	Solvente
Base A	80%	10%	10%
Base B	55%	15%	30%

Para la elaboración de estas bases se dispone de los siguientes ingredientes:

Ingrediente	Disponibilidad	Costo por Galón
Aceite	500 galones.	$ 38.00
Secador	200 galones,	$ 26.00
Solvente	200 galones.	$ 12.00

Además de los ingredientes puros arriba mencionados, se dispone en el almacén de dos mezclas comerciales ya preparadas cuya disposición es la siguiente:

Mezcla	Aceite	Secador	Solvente	Disponibilidad	Costo por-galón
1	70%	10%	20%	200 galones.	$ 32.00
2	40%	-	60%	150 galones.	$ 22.00

El costo de preapración de las ordenes es constante, independientemente de como se hayan hecho las mezclas y por consiguiente se puede despreciar.

El problema consiste por lo tanto en como se deberán preparar las bases requeridas A y B a partir de las substancias disponibles para que el costo sea mínimo.

Para ello consideraremos de que la composición de las mezclas es lineal, es decir que 10 galones de ingredientes forman 10 galones de mezcla, exactamente.

Las varialles en este problema son las cantidades de los diferentes ingredientes necesarias para cada mezcla.

Consideremos para mayor claridad la siguiente nomenclatura:

X_{11}= # de galones de la mezcla 1 utilizada para fabricar la base A.

X_{12}= # de galones de la mezcla 1 utilizada para fabricar la base B.

X_{21}= # de galones de la mezcla 2 utilizada para fabricar la base A.

X_{22}= # de galones de la mezcla 2 utilizada para fabricar la base B.

a_1 = # de galones de aceite puro utilizados para fabricar la base A.

a_2 = # de galones de aceite puro utilizados para fabricar la base B.

S_1 = # de galones de secador puro utilizados para fabricar la base A.

S_2 = # de galones de secador puro utilizados para fabricar la base B.

t_1 = # de galones de solvente (thinner) puro utilizados para fabricar la base A.

t_2 = # de galones de solvente (thinner) puro utilizados para fabricar la base B.

El sistema de relaciones que describe al problema se puede desarrollar sobre estas variables.

Se pueden establecer tres relaciones que describan el contenido de aceite, secador y solvente para la base A.

Base A

Aceite	$0.7\,X_{11} + 0.4\,X_{21} + a_1 = (0.8)\,400 = 320$
Secador	$0.1\,X_{11} + S_1 = (0.1)\,400 = 40$
Solvente	$0.2\,X_{11} + 0.6\,X_{21} + t_1 = (0.1)\,400 = 40$

Como X_{11} representa la cantidad total de la mezcla 1, entonces $0.7\ X_{11}$ representa a la cantidad de aceite en la mezcla 1, etc.

Un sistema de relaciones similar se puede establecer para las ingre-- dientes de la base B:

Base B

Aceite	$0.7\ X_{12} + 0.4\ X_{22} + a_2 = 0.55\ (600) = 330$
Secador	$0.1\ X_{12} + S_2 = 0.15\ (600) = 90$
Solvente	$0.2\ X_{12} + 0.6\ X_{22} + t_2 = 0.30\ (600) = 180$

Es además necesario incluir las limitaciones de los componentes disponibles. Estas son:

Aceite Puro : $a_1 + a_2 \leq 500$

Secador Puro: $S_1 + s_2 \leq 200$

Solvente Puro: $t_1 + t_2 \leq 200$

Mezcla 1 : $X_{11} + X_{12} \leq 200$

Mezcla 2 : $X_{21} + X_{22} \leq 150$

En resumen el sistema de restricciones del problema es:

	$0.7\ X_{11} + 0.4\ X_{21} + a_1 = 320$	(1)
Base A	$0.1\ X_{11} + S_1 = 40$	(2)
	$0.2\ X_{11} + 0.6\ X_{21} + t_1 = 40$	(3)
	$0.7\ X_{12} + 0.4\ X_{22} + a_2 = 330$	(4)
Base B	$0.1\ X_{12} + S_2 = 90$	(5)
	$0.2\ X_{12} + 0.6\ X_{22} + t_2 = 180$	(6)
	$a_1 + a_2 \leq 500$	(7)
Limitaciones en la disponibilidad.	$S_1 + S_2 \leq 200$	(8)
	$t_1 + t_2 \leq 200$	(9)
	$X_{11} + X_{12} \leq 200$	(10)
	$X_{21} + X_{22} \leq 150$	(11)

La función objetiva consiste en hacer mínimas los costos, es decir:

$$32\ (X_{11} + X_{12}) + 22\ (X_{21} + X_{22}) + 38\ (a_1 + a_2)$$

$$+ 26\ (S_1 + S_2)\quad 12\ (t_1 + t_2) = Z\ \text{mín}$$

o sea ya para resolver el problema se transformaría la función objetiva a:

$$Z\ \text{máx} = -32\ (X_{11} + é_{12}) - 22\ (X_{21} + X_{22})\ -38\ (a_1\ \ a_2)$$

$$-26\ (X_1 + S_2) - 12\ (t_1 + t_2)$$

6.3 PLANEACION DE INVENTARIOS.

En los ejemplos anteriores se ha considerado despreciable el problema de inventario, se consideró que, lo que se producía era lo que se vendía - inmediatamente, Obviamente no corresponde esto siempre a la realidad, so-- bre todo cuando existen marcadas fluctuaciones en la demanda del producto- a lo largo del año. El llevar un inventario permite que el ritmo de pro- - ducción y el de venta difieran, ya que el inventario puede absorber estas- diferencias.

Por ello, cuando se conocen las ventas para cada época, el problema - de planeación de la producción optima se convierte implicitamente en un -- problema de planeación de inventarios.

El incremento neto de inventario está dado por la diferencia entre el ritmo de producción y el de ventas y por ello el nivel de inventario en un momento dado estará dado por el inventario inicial mas la producción acumulada menos las ventas acumuladas.

Las variaciones de inventario serán de especial interés en el caso de marcadas variaciones en las ventas esperadas durante el año.

Cuando el costo de producir una unidad crece al crecer la capacidad - producida, como por ejemplo cuando hay que pagar sueldos mayores por tiem- pos extra de trabajo o por turnos nocturnos etc., se busca tener un ritmouniforme en la producción durante el período considerado, ya que, esto proporciona el mínimo costo de producción posible durante el período. Pero por otro lado hay que considerar los costos de inventario a que esto daría lugar. Desde el punto de vista de hacer mínimos los costos de inventario se debería planear la producción de tal forma que fuese lo mas semejante posible a las ventas.

La producción que junto con la demanda de ventas arroje el costo total mínimo de producción y de inventario será obviamente una solución intermedia entre los dos extremos antes mencionados.

El siguiente ejemplo ilustra la forma de plantear el problema de planeación de inventario por medio de la programación lineal.

Despues de hacer un análisis de mercados, una fábrica de cartuchos deportivos ha compuesto un programa de ventas para un calibre particular, que cubre un período de un año. Las ventas estimadas, (en miles de cartuchos) para cada uno de los trimestres es la siguiente:

Trimestre	Ventas esperadas en miles	Ventas acumuladas en miles.
1	680	680
2	580	1260
3	535	1795
4	1250	3045

Para el período anual completo la fábrica planeó una producció total igual a las ventas totales, suponiendo nulos los inventarios iniciales y finales.

El problema consiste en determinar la producción en cada uno de los trimestres tal que haga mínimo el costo total de producción y de almacenamiento.

La fábrica opera en dos turnos cuya capacidad máxima es de 560.1 y 447.2 respectivamente, (en miles de cartuchos por trimestre). El costo de producción de 1000 cartuchos es de $ 250.- en el turno 1 y $ 322.00 en el-segundo turno. El costo de almacenamiento de 1000 cartuchos durante un trimestre es de $ 4.03.

Consideremos que X_{ij} sea la producción en miles de cartuchos en el turno i y , en el trimestre j (i = 1,2 ; j = 1,2,3,4)

Las restricciones del problema serán entonces las siguientes:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & X_{11} + X_{21} & \geq 680 \\
(2) & X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22} & \geq 1260 \\
(3) & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_{23} & \geq 1795 \\
(4) & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} & = 3045 \\
(5) & X_{11} & \leq 560.1 \\
(6) & X_{12} & \leq 560.1 \\
(7) & X_{13} & \leq 560.1 \\
(8) & X_{14} & \leq 560.1 \\
(9) & X_{21} & \leq 447.2 \\
(10) & X_{22} & \leq 447.2 \\
(11) & X_{23} & \leq 447.2 \\
(12) & X_{24} & \leq 447.2
\end{array}
$$

Las primeras cuatro restricciones implican que el inventario sea positivo al término de cada trimestre, o sea que la producción sea mayor o - - igual a las ventas, y que el inventario sea nulo al final del año.

Las siguientes ocho restricciones son debidas a limitaciones de capacidad.

El costo total de producción al año será:

$$C_1 = 250 (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) + 322 (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24})$$

en pesos al año.

Es decir que la aparente no-linearidad de la función del costo se ha superado mediante el artificio de introducir variables separadas y limita-- ciones separadas para los dos turnos.

Los costos de almacenamiento para cada trimestre es de 4.03 veces el promedio de unidades (en miles de cartuchos) en inventario durante el trimestre, o sea aproximadamente el promedio del inventario inicial y el final.

Es decir que para el primer trimestre se tendrá:

$$4.03\ \frac{0 + (X_{11} + X_{21} - 680)}{2}$$

Para el segundo trimestre:

$$4.03\ \frac{X_{11} + X_{21} - 680 + X_{12} + X_{22} - 580}{2}$$

Para el tercer trimestre:

$$4.03\ \frac{X_{11} + X_{21} - 680 + X_{12} + X_{22} - 580 + X_{13} + X_{23} - 535}{2}$$

Para el cuarto trimestre:

$$4.03\ \frac{X_{11} + X_{21} - 680 + X_{12} + X_{22} - 580 + X_{13} + X_{23} - 535 + X_{14} + X_{24} - 1250}{2}$$

Sumando las 3 primeras se tiene:

$$C_2 = \frac{4.03}{2}\,[3X_{11} + 3X_{21} + 2X_{12} + 2X_{22} + X_{13} + X_{23} - 3(680) - 2(580) - 535]$$

$$C_2 = 2.015[3X_{11} + 3X_{21} + 2X_{12} + 2X_{22} + X_{13} + X_{23} - 2040 - 1160 - 535]$$

$$C_2 = 2.015[3X_{11} + 3X_{21} + 2X_{12} + 2X_{22} + X_{13} + X_{23} - 3735]$$

El costo total de producción y de almacenamiento es por lo tanto:

$$C_1 + C_2 = Z\ \text{mín} = 250\ (X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}) + 322\ (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) +$$
$$2.015[3X_{11} + 3X_{21} + 2X_{12} + 2X_{22} + X_{13} + X_{23} - 3735]$$

La solución óptima se calcula por medio del método simplex recordabdo cambiar el signo a los precios de la función objetiva.

6-4 PROBLEMAS DE TRANSPORTACION

Cuando las actividades de alguna empresa industrial requiere de envíos de mercancías entre puntos geográficamente separados, como puede ser entre plantas y almacenes situadas en diferentes partes del país, entonces resulta un problema importante el programar los envíos de tal manera que los costos de transportación sean mínimas.

Este tipo de problemas se puede atacar con gran frecuencia por medio de la programación lineal.

A continuación se plantea un problema de transportación por medio de programación lineal.

Una compañía manufacturera de productos derivados del coco posee dos fábricas, una en la costa del Golfo y otra en la costa del Pacífico. Los productos son distribuidos a todo el país desde cuatro grandes almacenes. La producción total semanaria es de 500 toneladas. La producción de la planta del Golfo es de 200 toneladas y la del Pacífico de 300 toneladas. Cada uno de los almacenes requiere de 50, 150 y 100, 200 toneladas a la semana respectivamente.

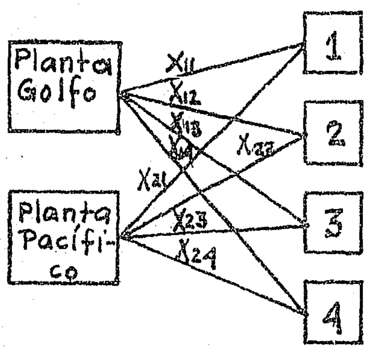
El problema estriba en calcular el patrón de embarques óptimo es decir, determinar las cantidades que se deberán enviar de cada planta a cada almacen a la semana cuando se desea que el costo total de transportación sea lo mas bajo posible.

Las incógnitas del problema están indicadas en el siguiente arreglo, donde X_{ij} es la cantidad (en toneladas a la semana), que se envía de la planta i al almacén j.

$$i = 1, 2 \qquad j = 1,2,3,4$$

		Almacén 1	2	3	4	Producción total.
Planta	Golfo	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	200
	Pacífico	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	300
Total requerido		50	150	100	200	500

Existen 8 incógnitas como lo indica el esquema 6-4-1



6-4-1

A cada variable corresponde un coeficiente C_{ij}, que es el precio o -- costo del envío de una tonelada de la planta i al almacén j.

La siguiente tabla da el valor de estos coeficientes:

C_{ij} en $ por tonelada	Almacén			
Planta	1	2	3	4
Golfo	40	26	13	60
Pacífico	26	53	90	18

El problema consiste en hacer mínima el costo total de transportación

$$C = \sum_{i} \sum_{j} C_{ij} X_{ij}$$

$$i = 1,2 \qquad\qquad j = 1,2,3,4$$

sujeto a las restricciones de que el embarque total de las dos fábricas sea de 200 y 300 toneladas respectivamente, Los envíos totales a cada almacén deberán ser 50, 150, 100 y 200 toneladas respectivamente.

Como los precios son funciones lineales de las X_{ij}, el problema se puede enunciar de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lcccccccccl}
(1) & X_{11} + & X_{12} + & X_{13} + & X_{14} & & & & & = & 200 \\
(2) & & & & & + X_{21} + & X_{22} + & X_{23} + & X_{24} & = & 300 \\
(3) & X_{11} & & & & + X_{21} & & & & = & 50 \\
(4) & & X_{12} & & & & + X_{22} & & & = & 150 \\
(5) & & & X_{13} & & & & + X_{23} & & = & 100 \\
(6) & & & & X_{14} & & & & + X_{24} & = & 200
\end{array}
$$

$$Z\ \text{mín} = 40\ X_{11} + 26\ X_{12} + 13\ X_{13} + 60\ X_{14} + 26\ X_{21} + 53\ X_{22} + 90\ X_{23} + 18X_{24}$$

es decir:

$$Z\ \text{max} = 40\ X_{11} - 26\ X_{12} - 13\ X_{13} - 60\ X_{14} - 26\ X_{21} - 53\ X_{22} - 90\ X_{23} - 18X_{24}$$

Se puede ver que las 6 ecuaciones anteriores unicamente 5 son independientes, ya que se podrían sumar las ecuaciones (1) y (2) y se obtendría el mismo resultado que si se sumaran las ecuaciones (3), (4), (5) y (6), es decir que la suma de todas las variables es igual a 500.

Esta simplificación se presenta en todos los problemas de este tipo, es decir que en caso general de m orígenes y n destinos, una de las m+n ecuaciones, cualquiera de ellas, se puede eliminar. De esta manera se expresa que se requieren unicamente m+n-1 variables para formar una base.

Esto implica que un problema de transportación, para ser óptimo unicamente utilizará cuando mas m+n-1 de las m x n rutas posibles.

Resulta difícil imaginarse como atacar este problema sin la ayuda de un modelo de programación lineal. Es además conocido lo difícil que es resolver los problemas de transportación por "sentido común". No resulta - - cierto suponer que cada almacén se deba abastecer de la fábrica mas cercana, ya que esta suposición será rara vez compatible con las resticciones.

En el problema de transportación es donde quizá se haya aplicado con- mayor éxito la programación inicial. Se ha publicado que por ejemplo la -- Compañía H. J.Heinz que fabríca salsa de tomate en media docena de fábri-- cas distribuidas en la Unión Americana y abastece a 70 almacenes, ha aho-- rrado varios miles de dólares semestralmente en costos de transporte, apli cando la programación lineal para determinar el sistema de envíos óptimo.- Además, la gran simplicidad del método ha permitido a la compañía revisar- el programa óptimo de transporteción a intervalos mas breves, obteniendo - de esta manera un mejor ajuste de los cambios de datos en el problema.

Se ha elaborado un problema generalizado de transportación para el ca so en que las cantidades po- embarcar de cada fábrica no están especifica- das claramente si no unicamente están limitadas a la capacidad de la fábri ca. Es decir, que las restricciones debidas a las fábricas se convierten - en desigualdades y entonces el problema consiste en determinar las cantida des que se deberán producir y embarcar de tal manera que el costo total de producción y transportación sea mínimo. El mismo modelo se podrá aplicar a aquellos casos donde el problema consiste en hacer mínimo el costo total - de la compra de materia prima de un número de proveedores geograficamente- separados y mandarla a un número de fábricas, tambien separadas que posee- la compañía.

Una mayor generalización se obtiene con un modelo en donde todas las- restricciones son desigualdades, ya que la producción total y las ventas - totales no han sido fijadas previamente, como tampoco las entregas a los - almacenes ni los embarques de las fábricas.

En este caso el problema no consiste en hacer mínimo al costo sino en hacer máximo el rédito de las ventas menos los costos variables de producción y transportación, es decir en hacer máxima la utilidad neta.

6-5 LAPROGRAMACION LINEAL EN LA DECISION DE INVERSIONES.

La programación lineal es particularmente eficiente en la solución de problemas a corto plazo, es decir en problemas que no involucren decisión de inversiones. La planeación de la producción bajo ciertas limitaciones de la capacidad conocidas es un ejemplo típico. El período para el cual se planean las operaciones es relativamente corto, de tal manera que el equipo no sufre cambios durante él. Además, las restricciones tecnológicas y económicas permanecen iguales durante el período y consiguientemente el programa de la producción respetará estas limitaciones. Sin embargo, cuando se trata de una planeación a largo plazo, las alternativas en la planeación ya no están en general sujetas a un equipo fijo, por el contrario la compañía está ahora en condiciones de ajustar el equipo al programa de producción deseado de tal forma que se eviten los embotellamientos y los desperdicios de la capacidad, en especial cuando se está proyectando una nueva planta.

Como se podrá ver, la programación lineal no es muy aplicable en estos casos. Sin embargo, siempre es posible utilizar a la programación lineal aún cuando se trate de decisión de inversiones. Esto se debe a que cuando una empresa tiene la libertad de escoger entre varias alternativas de inversión, la decisión estará basada en estimaciones sobre la utilidad que las alternativas hipotéticas pueden lograr; es decir que la programación lineal se puede utilizar como un arma para estimar estas utilidades futuras. Además, cuando el programa de operaciones de una planta existente se determinó por medio de programación lineal, la tabla simplex proporcionará una buena guía para una política óptima de inversiones. La solución obtenida por medio de la programación lineal indicará la posición exacta de los embotellamiento que limitan la utilidad; es decir indicará que partes de la planta se deberán agrandar.

Otra ventaja de los cálculos del método simplex estriba en que proporciona como resultado secundario aquellos précios que se pueden utilizar para evaluar la contribución marginal a la utilidad de cada uno de los facto res involucrados; o sea la cantidad en que la utilidad neta se incrementaría si una máquina adicional se utilizara. Se deberá tener cuidado, sin embargo de no caer en la creencia de que una nueva inversión se deberá siempre dirigir a la mayor aportación, ya que se deberán considerar otros factores como el costo de las nuevas máquinas, su vida estimada, intereses, etc.

6-6) LOS PROBLEMAS DE SECUENCIAS.

Otra seria limitación a la aplicabilidad de la programación lineal es que si bien nos indica el tipo de operaciones que se deben efectuar, en -- que máquinas, etc., no nos indica la secuencia en que las operaciones se - deben efectuar. Es decir, que una vez que se ha obtenido la solución a un-problema de este tipo por medio de la programación lineal, se deberá seguidamente hacer un análisis detallado para determinar la secuencia de las -- operaciones en cada máquina tal que arroje el mínimo tiempo de desperdicio en la planta. Para ello se han ideado varios métodos gráficos y numéricos-como los diagramas de barras, y el análisis de ruta crítica principalmente. Sin embrargo, cuando cada producto se tiene que procesar en las dife-- rentes máquinas en una cierta secuencia tecnológica, puede resultar imposible llevar a cabo el programa que en otras condiciones hubiese sido óptimo sin violar las limitaciones en la capacidad. El tiempo desperdiciado entre operaciones no se puede evitar ya que ciertas operaciones se tienen que retardar hasta que se hayan verificado otras, es decir que el programa requerirá de más horas-máquina, ya sea de trabajo o de desperdicio de las que - en realidad hay disponibles para el período para el cual se planeó la producción.

En estas circunstancias, el programa óptimo, tal como se le considera en la programación lineal, se deberá obtener por medio de tanteos u otros-métodos de sentido común.

6-7) CONCLUSIONES SOBRE LA APLICABILIDAD DE LA PROGRAMAMACION LINEAL EN LA INDUSTRIA.

Como se ha indicado, la programación lineal, no constituye un método universal para resolver todos los diferentes tipos de problemas que pueden afectar a una industria. Se ha visto que la programación lineal no es aplicable a problemas que involucren una determinada secuencia, como tampoco se deberan basar las decisiones de inversión por entero a los resultados obtenidos de ella.

Por otro lado no resulta difícil encontrar ejemplos de problemas que aunque son de naturalez lineal, se pueden resolver por lo menos con la misma sencillez por medio de inspección y sentido común sin tener que aplicar las técnicas de la programación lineal.

Resulta evidente de que muchos problemas sencillos a los cuales se les aplica la programación lineal son tan obvios que se pueden solucionar por medio de los métodos tradicionales basados en el sentido común. Algunos de los ejemplos antes formulados se podrían haber resuelto de esta manera. Sin embrargo, los problemas concretos con que nos podemos encontrar en la realidad pueden ser mucho mas complicados que estos ejemplos.

La verdadera prueba de la utilidad de la programación lineal es su gran habilidad para solucionar problemas complicados que involucran una gran número de variables y de restricciones pero sobre todo el hecho de haber dado soluciones mejores que aquellas dadas por los métodos tradicionales. Que la técnica de la programación lineal ha superado esta prueba no hay duda; la vasta literatura sobre este tema es prueba de que los métodos de la programación lineal han conducido a considerables aumentos, en las utilidades o en la reducción de costos.

Resulta muy frecuente encontrar problemas cuya estructura corresponde a la del modelo lineal y resulta evidente que las soluciones aproximadas encontradas por los métodos de sentido común serán tanto menos confiables, cuanto mas complicados sean los problemas.

Mucho se ha dicho contra la aplicación de la programación lineal, y - en general contra la de cualquier método teórico. Se dice que- no hay razón en calcular una solución exacta, con métodos tan elaborados - ya que los datos estadísticos, los coeficientes del modelo son tan insegu- ros de que en los resultados no se puede uno basar de todos modos.

Sin embrago las decisiones se toman de todas maneras basándose en es- tos datos ya que no existen otros mejores. Porque entonces no utilizar - - aquella técnica que para los datos disponibles nos da la solución mejor.

Otra frecuente objeción que se hace a la aplicación de la programa- - ción lineal es de que el modelo es una simplificación matemática que des-- precia a muchos de los factores que complican al problema real.

Si bien es cierto que la programación lineal no puede resolver proble mas cuya estructura es básicamente no lineal, tambien es cierto que es pe- ligroso y absurdo creer que los métodos de sentido común pueden absorver - mas factores que los que absrobe un método formal. Es mas, un modelo mate- mático, que aunque está algo simplificado, puede en general esperarse que- proporciones una mejor aproximación a la solución correcta que cualquier - otro método práctico, que toma mas factores en consideración a costo de -- una pérdida de exactitud.