

- UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
- **Comparación entre el Método Interativo para Análisis de Estructuras Reticulares de Castillo con los Métodos de Bowman y Wilbur.**

**T E S I S**

Que para obtener el título de :

**I N G E N I E R O C I V I L**

p r e s e n t a :

**EMILIO CARLOS LAVIN SANCHEZ**



COMPARACION ENTRE EL METODO INTERATIVO PARA  
ANALISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES DE CASTILLO  
CON LOS METODOS DE BOWMAN Y WILBUR

EMILIO CARLOS LAVIN SANCHEZ

MEXICO, D. F.

1968

A la familia Lavín Sánchez



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
Dirección  
Núm. 73-270  
Exp. Núm. 73/

Al Pasante señor EMILIO CARLOS LAVIN SANCHEZ  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el señor Profesor Ingeniero--CARLOS M. CHAVARRI MALDONADO, para que lo desarrolle como tesis en su exámen profesional de INGENIERO CIVIL.

"COMPARACION ENTRE EL METODO INTERATIVO PARA ANALISIS DE --  
-ESTRUCTURAS RETICULARES DE CASTILLO CON LOS METODOS DE ---  
BOWMAN Y WILBUR"

Que contiene los puntos siguientes:

- 1.- Introducción
- 2.- El método de Wilbur
- 3.- El método de Bowman
- 4.- El método del Ing. Heberto Castillo
- 5.- Aplicaciones
- 6.- Conclusiones.

Ruego a usted tomar debida nota de que cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones,--deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar exámen profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Muy atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
México, D. F. a 30 de abril de 1968.  
EL DIRECTOR

Ing. Manuel Paulín Ortiz

MPO' MMO' mb.

# I N D I C E.

	Pág.
<b>I N T R O D U C C I O N</b>	1
<b>C A P I T U L O I</b>	
<b>METODO DE WILBUR</b> _____	4
<b>ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL METODO PENDIENTE DE FORMACION</b> _____	4
<b>ECUACIONES DE PISO</b> _____	11
<i>Para <math>n &gt; 1</math></i>	
<i>Para <math>n = 1</math> (empotradas las columnas en las bases)</i>	
<i>Para <math>n = 1</math> (articuladas las columnas en las bases)</i>	
<b>ECUACIONES DE NUDO</b> _____	16
<i>Para <math>n &gt; 1</math></i>	
<i>Para <math>n = 1</math> (empotradas las columnas en las bases)</i>	
<i>Para <math>n = 1</math> (articuladas las columnas en las bases)</i>	
<b>METODO DE MANEY - GOLDBERG PARA EL CALCULO DE <math>E\phi_{nx}</math> Y <math>E\psi_n</math></b> _____	19
<i>Primera aproximación</i>	
<i>Aproximaciones posteriores</i>	

	Pág.
DETERMINACION DE ELEMENTOS MECANICOS _____	22
HIPOTESIS DEL METODO DE WILBUR _____	23
COMENTARIO _____	23
<b>C A P I T U L O            2</b>	
METODO DE BOWMAN _____	24
HIPOTESIS _____	24
COMENTARIO _____	26
<b>C A P I T U L O            3</b>	
METODO DEL ING. HEBERTO CASTILLO _____	28
ESTRUCTURAS SIN GRADOS DE LIBERTAD _____	28
ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL _____	32
<i>Cargas Verticales</i>	
<i>Cargas Horizontales.</i>	
ESTRUCTURAS CON COLUMNAS DE DIFERENTE ALTURA EN UN MISMO PISO. _____	38
CLAROS CONTINUOS _____	41
COLUMNAS ARTICULADAS _____	44
COMENTARIO _____	47
<b>C A P I T U L O            4</b>	
APLICACIONES _____	48
METODO DE CASTILLO _____	49
METODO DE WILBUR _____	69
METODO DE BOWMAN _____	80
CUADRO COMPARATIVO DE RESULTADOS _____	84
<b>C A P I T U L O            5</b>	
CONCLUSIONES _____	89
BIBLIOGRAFIA _____	91

## I N T R O D U C C I O N .

### **Análisis del Comportamiento de una Estructura.**

Una de las facultades más importantes en un ingeniero estructu--  
rista, es su habilidad para analizar matemáticamente el comportamiento de--  
una estructura dada y poder visualizar su deformación.

Para ello necesita de una teoría que se haya confirmado tanto--  
con observaciones sobre modelos, como con el comportamiento real de estruc--  
turas existentes.

Ahora bien, hay 3 tipos de problemas fundamentales en el análi--  
sis estructural:

- 1.-) Características de esfuerzo, deformación y desplazamientos de una estructura sujeta a condiciones de carga estática o casi estática.
- 2.-) Características de vibración, y respuesta de una estructu--  
ra sujeta a cargas dinámicas.
- 3.-) Características de falla, bajo cargas estáticas y ocasio--  
nalmente bajo cargas dinámicas.

El análisis de la falla y características de vibración de una estructura, no están dentro del margen de este trabajo, por lo que nos referiremos principalmente a el análisis de las características de esfuerzo, deformación y deflexión de una estructura sujeta a cargas estáticas o casi estáticas. Para resolver un problema de esta naturaleza completamente, es necesario obtener los esfuerzos y desplazamientos desconocidos en toda la estructura y que satisfagan las condiciones de frontera. Estas incógnitas se pueden obtener planteando un número apropiado de ecuaciones independientes, que se obtienen de los siguientes 3 tipos de relaciones que gobiernan el comportamiento de la estructura.

- 1) Condiciones para el equilibrio estático de las fuerzas internas y externas actuando sobre la estructura.
- 2) Relaciones entre los esfuerzos y deformaciones del material empleado .
- 3) Compatibilidad de las deformaciones de los puntos de la estructura.

Hay 2 métodos fundamentales para resolver un problema así planteado; que son el "método de las fuerzas" y el "método de las deformaciones".

La mayoría de los métodos de análisis estructural, tienen su base en el "método de las fuerzas", existiendo otros, como el "primer Teorema de Castigliano" y el "método de la pendiente-deformación" que se basan en el "método de las deformaciones".

Sin embargo, debe tenerse presente un hecho muy importante:

La mayoría de las estructuras actuales que se diseñan no son muy susceptibles a un análisis preciso, Con ésto no quiero decir que no se pueda llegar a un resultado en el que se cumplan exactamente las 3 condiciones antes citadas, pues con el uso de las computadoras electrónicas



cas, el tener un gran número de ecuaciones ya no representa problema alguno.

La dificultad que presenta el análisis preciso, es el poder determinar con exactitud las cargas que van a obrar sobre la estructura, los -- problemas intrínsecos de marcos complicados y sistemas de marcos, etc., -- que hacen necesario idealizar la estructura y resolver varias versiones -- simplificadas de ella de una manera extensa para tener bases para el diseño final.

Es debido a estas dificultades, que se desarrollaron los métodos aproximados para el cálculo de estructuras.

Como los factores que determinan la rigidez en una estructura hiperestática, no siempre son conocidos de antemano, se debe recurrir a los métodos aproximados, para tener un pre-diseño. También muchas veces no se dispone del tiempo necesario para hacer un análisis exacto de la estructura, por lo que se acude a éstos métodos.

Presentamos aquí una comparación entre un método aproximado, basado en observaciones empíricas, y 2 métodos iterativos, basados en el "método de la pendiente-deformación", el de Wilbur y el propuesto por el Ing. Heberto Castillo. Se exponen sus ventajas y desventajas y al final se -- presenta un cuadro comparativo de los tres, en el que se podrán fijar mejor las ideas en cuanto a sus aplicaciones.

## C A P I T U L O

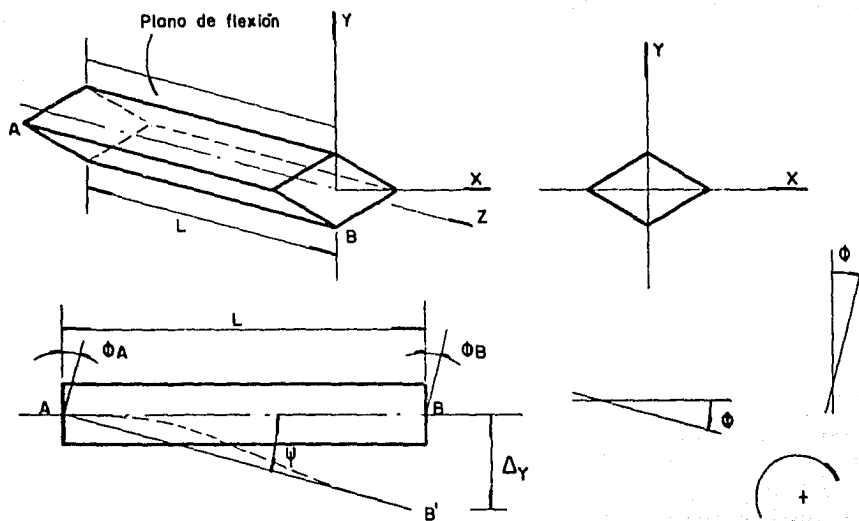
### METODO DE WILBUR.

Para el desarrollo del método de Wilbur, para análisis de marcos reticulares, emplearemos el método de la "pendiente - de formación", empleando las aproximaciones sucesivas de Maney - Goldberg.

Al final de este desarrollo, se presenta un resumen de las hipótesis del método.

1.- Ecuaciones fundamentales del método de "pendiente- de formación" para barras de eje recto y sección transversal constante.

Consideremos un plano en el espacio y una recta contenida en el mismo. Dicha recta se hace coincidir con el eje centroidal ( $Z$ ) de una barra, de tal forma que el plano que la contiene, sea el plano de flexión de la barra. Considerando una barra de sección transversal constante y simétrica al plano de flexión, con un momento de inercia  $I$ , respecto al eje  $X$ , y con un módulo de elasticidad  $E$ , constante también en toda la longitud ( $L$ ) de la barra, emplearemos los signos que a continuación se muestran:



La notación empleada, será la siguiente:

$\phi_A$  = rotación de la sección A de la barra.

$\phi_B$  = rotación de la sección B de la barra.

$\Delta_y$  = Desplazamiento relativo del extremo B de la barra con respecto al extremo A, medido sobre el eje Y

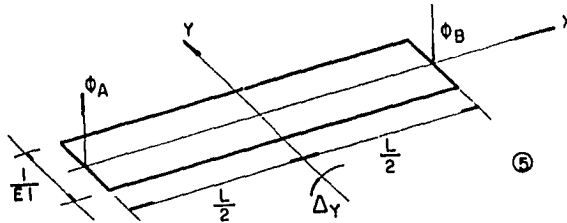
$\psi$  = Angulo de rotación de la recta que une los centroides de las secciones A y B al producirse el desplazamiento  $\Delta_y$ . Se le conoce al  $\psi$  como: rotación del eje de la barra

$K$  = rigidez relativa de la barra =  $I/L$

$M_{AB}$  = momento del apoyo sobre la sección A de la barra

$M_{BA}$  = momento del apoyo sobre la sección B de la barra.

a).- Considerando a la barra apoyada elásticamente en los dos extremos y sin carga alguna entre ellos, tendremos el área elástica de la figura:



Aplicando la ecuación de barra plana:

$$M = M' + \frac{\phi_A}{Ae} - \frac{\phi_B}{Ae} + \phi_A \left(-\frac{L}{2}\right) \frac{X}{Iy} - \phi_B \left(\frac{L}{2}\right) \frac{X}{Iy} + \Delta y \frac{X}{Iy}$$

$$M = 0 + (\phi_A - \phi_B) \frac{EI}{L} - \frac{L}{2} \left(\frac{12X EI}{L^3}\right) (\phi_A + \phi_B) + \frac{12EI X}{L^3} \Delta y$$

$$M = (\phi_A - \phi_B) \frac{EI}{L} - (\phi_A + \phi_B) \frac{6EI X}{L^2} + \frac{12EI X}{L^3} \Delta y$$

Para  $X = X_A = -\frac{L}{2}$ :

$$M_A = (\phi_A - \phi_B) \frac{EI}{L} - (\phi_A + \phi_B) \frac{6EI}{L^2} \left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{12EI}{L^3} \Delta y \left(-\frac{L}{2}\right)$$

$$M_A = (\phi_A - \phi_B) \frac{EI}{L} + (\phi_A + \phi_B) \frac{3EI}{L} - \frac{6EI}{L^2} \Delta y$$

$$M_A = \frac{\phi_A EI}{L} - \frac{\phi_B EI}{L} + \frac{\phi_A 3EI}{L} - \frac{6EI \Delta y}{L^2} \text{ y como: } \frac{\Delta y}{L} = \tan \psi \approx \psi \text{ por ser muy pequeño}$$

$$M_A = \frac{4EI}{L} \phi_A + \frac{2EI}{L} \phi_B - \frac{6EI}{L} \psi$$

$$\rightarrow M_A = 2EK (2 \phi_A + \phi_B - 3 \psi) \dots$$

Como la ecuación de barra da momentos flexionantes:

$$M_A = M_{AB} = 2EK (2 \phi_A + \phi_B - 3 \psi) \dots \dots \dots (1.1)$$

Para  $x = x_B = \frac{L}{2}$  :

$$M_B = (\phi_A - \phi_B) \frac{EI}{L} - (\phi_A + \phi_B) \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{12EI}{L^3} \Delta y \left(\frac{L}{2}\right)$$

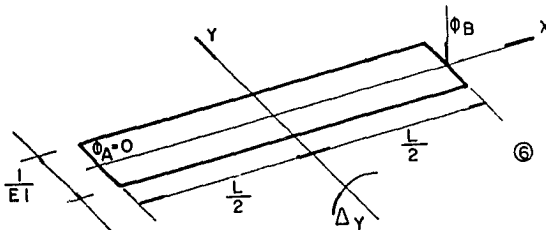
$$M_B = \phi_A \frac{EI}{L} - \phi_B \frac{EI}{L} - \phi_B \frac{3EI}{L} - \phi_B \frac{3EI}{L} + \frac{6EI}{L} \frac{\Delta y}{L} \text{ y como } \frac{\Delta y}{L} = \psi$$

$$M_B = -\frac{2EI}{L} \phi_A - \frac{4EI}{L} \phi_B + \frac{6EI}{L} \psi$$

$$\rightarrow M_B = M_{BA} = 2EK (\phi_A + 2 \phi_B - 3 \psi) \dots \dots \dots (1-2)$$

Supongamos ahora a la barra con el extremo A empotrado y el extremo B apoyado elásticamente y sin cargas entre ellos. Tendremos que:

$\phi_A = 0$  ;  $\phi_B \neq 0$  ;  $\Delta y \neq 0$  por lo que tendremos:



Aplicando nuevamente la ecuación de barra plana, tendremos:

$$M = M' - \frac{\phi_B}{Ae} - \phi_B \left(\frac{L}{2}\right) \frac{X}{I_y} + \Delta y \frac{X}{I_y}$$

Pero:

$$Ae = \frac{L}{EI} ; I_y = \frac{L^3}{12EI}$$

Por lo que:

$$M = -\phi_B \frac{EI}{L} - \phi_B \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{L}{2}\right) X + \frac{12EI}{L^3} \Delta y X$$

$$M = -\phi_B \frac{EI}{L} - \phi_B \frac{6EI}{L^2} X + \frac{12EI \Delta y}{L^3} X$$

Para  $X = X_A = -L/2$ :

$$M_A = \phi_B \frac{EI}{L} - \phi_B \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{12EI \Delta y}{L^3} \left(-\frac{L}{2}\right)$$

$$M_A = -\phi_B \frac{EI}{L} + \phi_B \frac{3EI}{L} - \frac{6EI \Delta y}{L^2}$$

$$M_A = \frac{2EI}{L} \phi_B - \frac{6EI}{L} \psi \quad \text{pues } \frac{\Delta y}{L} = \psi$$

$$\rightarrow M_A = M_{AB} = 2EK (\phi_B - 3\psi) \dots \dots \dots (1-3)$$

Procediendo de manera análoga a la anterior para  $M_B$ ,  $X = X_B = \frac{L}{2}$  :

$$- M_B = + M_{BA} = 2EK (2\phi_B - 3\psi) \dots \dots \dots (1-4)$$

Si suponemos ahora a la barra empotrada en el extremo B y apo-

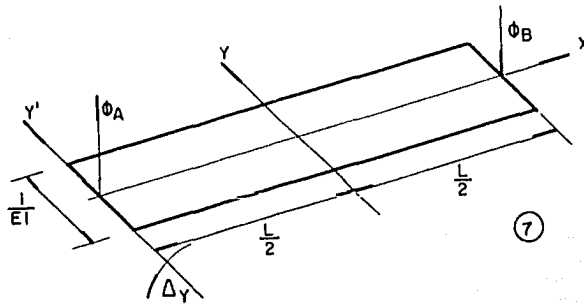
vada elásticamente en A, sin cargas entre los extremos, se tiene un desarrollo análogo al del caso anterior, quedando:

$$M_{AB} = 2EK (2 \phi_A - 3 \psi) \dots \dots \dots (1-5)$$

$$M_{BA} = 2EK (\phi_A - 3 \psi) \dots \dots \dots (1-6)$$

Consideremos ahora el caso en que la barra esté articulada en A, y con un apoyo elástico en B, sin cargas entre ambos extremos.

De la viga conjugada, tenemos que en A :  $fz = 0$ , por lo que emplearemos la ecuación de barra plana trasladada a un  $Y'$ .



Para este caso:

$$M = - \phi_B L \frac{X'}{I_{y'}} + \Delta y \frac{X'}{I_{y'}}$$

$$M = - \phi_B L \frac{3EI}{L^3} X' + \Delta y \frac{3EI}{L^3} X'$$

$$M = - \frac{3EI}{L^2} \phi_B X' + \frac{3EI}{L^3} \Delta y X'$$

Para  $X' = X_A = 0$

$$M_A = M_{AB} = 0 \dots \dots \dots (1-7)$$

Para  $X' = X_B = L$

$$M_B = -\phi_B \frac{3EI}{L^2} L + \frac{3EI}{L^2} \frac{\Delta y}{L} L$$

$$M_B = -\frac{3EI}{L} \phi_B + \frac{3EI}{L} \psi$$

$$\rightarrow -M_B = M_{BA} = 3EK (\phi_B - \psi) \dots \dots \dots (1-8)$$

Para el caso en que la barra esté articulada en B y apoyada -- elásticamente en A, se procede de una manera análoga y se determina que:

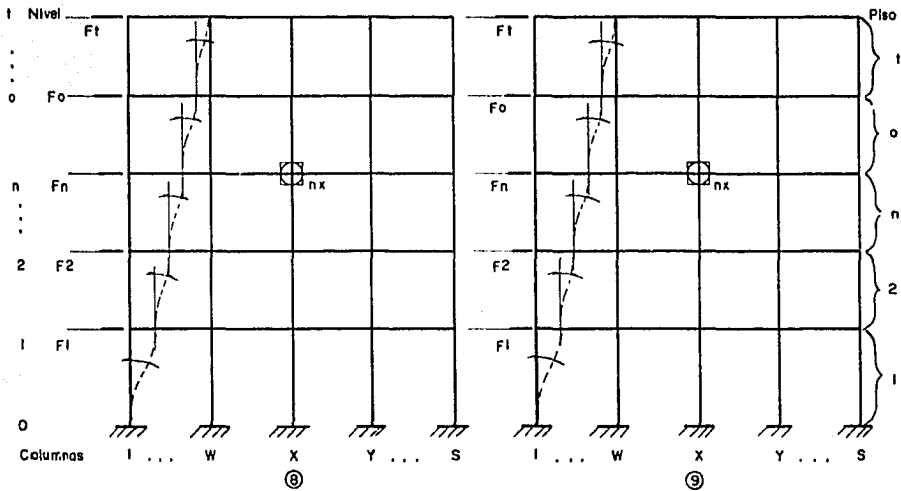
$$M_{AB} = 3EK (\phi_A - \psi) \dots \dots \dots (1-9)$$

$$M_{BA} = 0 \dots \dots \dots (1-10)$$

2.- Ecuación de piso y ecuación de nudo para un marco de edificio sometido a cargas laterales concentradas en los niveles de los ejes de las trabes.

Considerando dos marcos de edificio como los mostrados en las -- figs. 8 y 9, sometidos a las fuerzas  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_t$  aplicadas en los niveles 1, 2, 3, . . . . t, respectivamente:





Bajo la acción de estas fuerzas, todos los nudos sufren rotaciones debidas a los desplazamientos relativos de los niveles, llamando a dichas rotaciones:

$$\phi_{nx}, \text{ donde } n = 1, 2, 3 \dots \text{ t y } x = 1, 2, 3 \dots s \dots (2-1)$$

Asimismo, los desplazamientos relativos de los niveles perpendiculares a los ejes de las columnas, dan lugar a rotaciones de los ejes centroidales de éstas, llamando a estas rotaciones:

$$\psi_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots t \dots \dots \dots (2-2)$$

Debido a que las deformaciones longitudinales son muy pequeñas - en las trabes y losas que unen a las columnas de la estructura, podemos admitir que todas las columnas de un mismo piso, giran el mismo ángulo.

I).- Ecuaciones de Piso.-

a).- Ecuación del n-ésimo piso para  $n > 1$ .

Analizando el equilibrio de la X-ésima columna del piso n. Del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 10, se ve, para que exista equilibrio se requiere que:

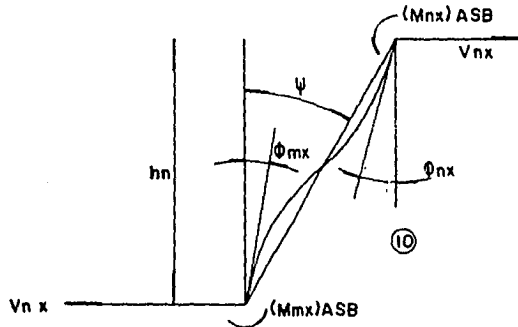
$$V_{nx} + \frac{(M_{nx})_{ASB} + (M_{mx})_{ASB}}{h_n} = 0 \dots \dots \dots (2-3)$$

Donde:

$V_n$  = fuerza cortante en la cabeza de la columna.

$h_n$  = altura de la columna.

$(M_{nx})_{ASB}$  y  $(M_{mx})_{ASB}$  = momentos ejercidos en los extremos de la columna por los apoyos elásticos.



Usando las expresiones (1-1) y (1-2) obtenidas anteriormente, tenemos:

$$(M_{nx})_{ASB} = 2EK_{nx} (2 \phi_{nx} + \phi_{mx} - 3 \psi_n) \dots \dots \dots (2-4)$$

$$(M_{mx})_{ASB} = 2EK_{nx} (\phi_{nx} + 2 \phi_{mx} - 3 \psi_n) \dots \dots \dots (2-5)$$

Substituyendo en (2-3), queda:

$$V_{nx} = - 6 EK_{nx} (\phi_{nx} + \phi_{mx} - 2 \psi_n) \dots \dots \dots (2-6)$$

Por otro lado, para mantener el equilibrio de la parte de la es-

estructura comprendida entre los niveles "n" y "t", se debe cumplir que:

$$\sum V_{nx} = F_n + F_o + \dots + F_t \dots \dots \dots (2-7)$$

Y como por definición de fuerza cortante ( $V_n$ ) en el piso "n", se tiene:

$$V_n = F_n + F_o + \dots + F_t \dots \dots \dots (2-8)$$

substituyendo: (2-6) y (2-8) en (2-7), resulta:

$$V_n h_n = (6 E \sum_{x=1}^s K_{nx} (\phi_{nx} + \phi_{mx}) - 12 E \psi_n \sum_{x=1}^s K_{nx}) (2-9)$$

Esta expresión es conocida como: "ecuación del piso "n" para  $n > 1$ ".

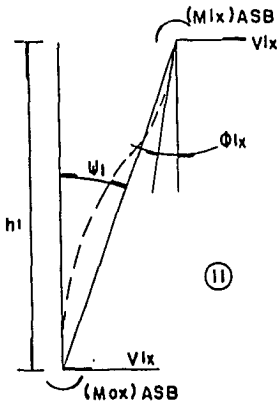
Despejando de ella a  $E \psi_n$ , queda:

$$E \psi_n = \frac{V_n h_n}{12 \sum_{x=1}^s K_{nx}} + \frac{\sum_{x=1}^s 6EK_{nx} \phi_{nx} + \sum_{x=1}^s 6EK_{nx} \phi_{mx}}{\sum_{x=1}^s 6EK_{nx} + \sum_{x=1}^s 6EK_{nx}} (2-10)$$

En esta ecuación (2-10), el segundo término del segundo miembro, es el "promedio pesado" de las rotaciones de los nudos de los niveles m y n, siendo los términos empleados en dicho promedio, los valores de las rigideces relativas de las columnas del piso "n".

b).- Ecuación del primer piso, ( $n = 1$ ), considerando las columnas empotradas en sus bases.

Del diagrama de cuerpo libre, (fig. 11), de la columna "x" del primer piso, empotrada en su base, se observa que:



Por equilibrio de la columna:

$$V_{1x} + \frac{(M_{1x})_{ASB} + (M_{0x})_{ASB}}{h_1} = 0 \quad (2-11)$$

De las expresiones (1-3) y (1-4):

$$(M_{1x})_{ASB} = 2EK_{1x}(2\phi_{1x} - 3\psi_1) \quad (2-12)$$

$$(M_{0x})_{ASB} = 2EK_{1x}(\phi_{1x} - 3\psi_1) \quad (2-13)$$

Substituyendo (2-12) y (2-13) en (2-11):

$$V_{1x} = \frac{-6EK_{1x}(\phi_{1x} - 2\psi_1)}{h_1} \quad (2-14)$$

Por equilibrio de la parte de la estructura entre los niveles l- y t, se debe cumplir que:

$$V_1 h_1 = - (6E \sum_{x=1}^S K_{1x} \phi_{1x} - 12 E \psi_1 \sum_{x=1}^S K_{1x}) \quad (2-15)$$

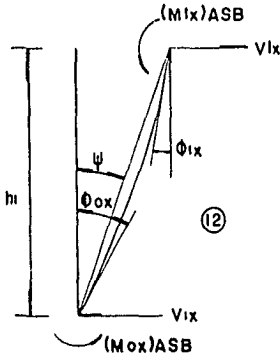
Esta expresión es la conocida como: "ecuación del primer piso, con columnas empotradas en sus bases".

Despejando el valor de  $E \psi_1$  de (2-15):

$$E \psi_1 = \frac{V_1 h_1}{12 \sum_{x=1}^S K_{1x}} + \frac{1}{2} \frac{E \sum_{x=1}^S X_{1x} \phi_{1x}}{\sum_{x=1}^S K_{1x}} \quad (2-16)$$

El segundo término de la expresión (2-16), es la mitad del promedio pesado de los valores de las rotaciones de los nudos del nivel l, siendo los términos empleados para su obtención, los valores de las rigideces relativas de las columnas del primer piso.

c).- Ecuación del primer piso ( $n = 1$ ), cuando las columnas están articuladas en sus bases:



Del diagrama de cuerpo libre de la columna X del primer piso (fig. 12), para que exista el equilibrio, se debe cumplir -- que:

$$V_{1x} + \frac{(M_{1x})_{ASB}}{h_1} = 0 \dots \dots (2-17)$$

Utilizando las expresiones (1-7) y (1-8), se tiene que:

$$(M_{1x})_{ASB} = 3 E K_{1x} (\phi_{1x} - \psi_1) \dots \dots (2-18)$$

$$(M_{0x})_{ASB} = 0 \dots \dots (2-19)$$

Substituyendo (2-18) en (2-17), queda:

$$V_{1x} = - \frac{3 E K_{1x} (\phi_{1x} - \psi_1)}{h_1} \dots \dots (2-20)$$

Por equilibrio de la parte de la estructura comprendida entre -- los niveles l y t:

$$V_1 h_1 = - (3 E \sum_{x=1}^S K_{1x} \phi_{1x} - 3 E \psi_1 \sum_{x=1}^S K_{1x}) \dots (2-21)$$

"Esta expresión es la ecuación del primer piso para columnas articuladas -- en las bases":

Despejando a  $E \psi_1$  de (2-21):

$$E \psi_1 = \frac{V_1 h_1}{3 \sum_{x=1}^s K_{1x}} + \frac{E \sum_{x=1}^s K_{1x} \phi_{1x}}{\sum_{x=1}^s K_{1x}} \dots \dots \dots (2-22)$$

El segundo término de esta ecuación representa el promedio pesado de los valores de las rotaciones de los nudos del nivel 1, empleando como sus términos los valores de las rigideces relativas de las columnas del primer piso.

II).- Ecuaciones de nudo:

a).- Ecuación del nudo "X" del nivel "n" (n > 1)

Para tener equilibrio en el nudo, se debe cumplir que sea nula la suma de momentos en los extremos de las barras que concurren a dicho nudo.

Estos momentos pueden ser de apoyo sobre barra, o de barra sobre apoyo.

Tomando los de apoyo sobre barra:

$$M_{wx} + M_{xy} + M_{nx} + M_{ox} = 0 \dots \dots \dots (2-23)$$

De las expresiones (1-1) y (1-2):

$$\left. \begin{aligned} M_{wx} &= 2 E K_{wx} (\phi_{nw} + 2 \phi_{nx}) \\ M_{xy} &= 2 E K_{xy} (\phi_{ny} + 2 \phi_{nx}) \\ M_{nx} &= 2 E K_{nx} (\phi_{nx} + 2 \phi_{mx} - 3 \psi_n) \\ M_{ox} &= 2 E K_{ox} (\phi_{ox} + 2 \phi_o - 3 \psi_o) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2-24)$$

Substituyendo (2-24) en (2-23):

$$2 E \sum K_i \phi_i + 4 E \phi_{nx} \sum K_i - 6 E K_{nx} \psi_n - 6 E K_{ox} \psi_o = 0 \dots \dots (2-25)$$

Ecuación conocida como "ecuación del nudo "x" del piso "n".

En esta ecuación (2-25),  $K_1$  representa a la rigidez relativa de un miembro cualquiera que concurra al nudo considerado y  $\phi_1$  a la rotación de un nudo cualquiera opuesto al considerado. Debe de extenderse la suma donde aparecen estos símbolos a todas las piezas que concurren al nudo.

De la expresión (2-25), se despeja  $E \phi_{nx}$  y queda que:

$$E \phi_{nx} = \frac{3 E K_{nx} \psi_n + 3 E K_{ox} \psi_o - E \sum K_1 \phi_1}{2 \sum K_1} \quad (2-26)$$

b).- Ecuación del nudo x del nivel 1, cuando las columnas están empotradas en sus bases. ( $n = 1$ ).

Por equilibrio del nudo, se debe cumplir que:

$$M_{xw} + M_{xy} + M_{1x} + M_{2x} = 0 \dots \dots \dots (2-27)$$

De las ecuaciones (1-1) (1-2) (1-3) y (1-4) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} M_{xw} &= 2 E K_{xw} (\phi_{1w} + 2 \phi_{1x}) \\ M_{xy} &= 2 E K_{xy} (\phi_{1y} + 2 \phi_{1x}) \\ M_{1x} &= 2 E K_{1x} (2\phi_{1x} - 3 \psi_1) \\ M_{2x} &= 2 E K_{2x} (\phi_{2x} + 2 \phi_{1x} - 3 \psi_2) \end{aligned} \right\} \dots (2-28)$$

Substituyendo (2-28) en (2-27), se obtiene que:

$$2 E \sum K_1 \phi_1 + 4 E \phi_{1x} \sum K_1 - 6 E K_{1x} \psi_1 - 6 E K_{2x} \psi_2 = 0 \dots (2-29)$$

que es la ecuación del nudo "x" del primer piso, cuando las columnas están

empotradas en sus bases. El significado de  $\sum K_i \phi_i$  es el mismo que en el caso anterior. Despejando de (2-29) a  $E \phi_{1x}$ , se obtiene:

$$E \phi_{1x} = \frac{3 E K_{1x} \psi_1 + 3 E K_{2x} \psi_2 - E \sum K_i \phi_i}{2 \sum K_i} \dots \dots \dots (2-30)$$

c).- Ecuación del nudo "X" del primer nivel, cuando las bases - de las columnas están articuladas:

Por ser un nudo del primer nivel, podemos usar la expresión ---- (2-27), y con las expresiones (1-1) (1-2) (1-7) y (1-8), se obtiene que:

$$\left. \begin{aligned} M_{xw} &= 2 E K_{xw} (\phi_{1w} + 2 \phi_{1x}) \\ M_{xy} &= 2 E K_{xy} (\phi_{1y} + 2 \phi_{1x}) \\ M_{1x} &= 3 E K_{1x} (\phi_{1x} - \psi_1) \\ M_{2x} &= 2 E K_{2x} (\phi_{2x} + 2 \phi_{1x} - 3 \psi_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2-31)$$

Substituyendo (2-31) en (2-27), queda:

$$2 E \sum K_i \phi_i + E \phi_{1x} (4 \sum K_i + 3 K_{1x}) - 3 E K_{1x} \psi_1 - 6 E K_{2x} \psi_2 = 0 \dots \dots \dots (2-32)$$

que es la ecuación del nudo "X" del primer piso cuando las bases de las columnas están articuladas.

En (2-32), el índice i se refiere a las piezas que concurren - en el nudo en cuestión y cuyo extremo opuesto a él, no se encuentra articu lado.

Despejando a  $E \phi_{1x}$  de (2-32), queda:



$$E \phi_{1x} = \frac{3 E K_{1x} \psi_1 + 6 E K_{2x} \psi_2 - 2 E \sum K_i \phi_i}{4 \sum K_i + 3 K_{1x}} \dots (2-33)$$

Hasta este momento sólo se ha desarrollado el método de "pendiente - de formación", para una estructura reticular, que tenga las bases de las columnas del primer piso, empotradas o articuladas.

Con este método se podrá analizar el comportamiento de un marco sujeto a fuerzas laterales, una vez que se hayan calculado las deformaciones  $E \psi_n$  y  $E \phi_{nx}$  para todos los valores de  $n$ .

El método que se empleará, será el de Maney-Goldberg. Sin embargo, sólo se desarrollará este método para valores de  $n$  mayores que 1, ya que para  $n = 1$ , se sigue la misma secuencia, sólo que empleando las ecuaciones correspondientes a las condiciones de apoyo de las bases de las columnas del primer piso. Este método es de los que puede considerarse exactos, pues como es un método de aproximaciones sucesivas, se puede llegar a obtener un valor con la exactitud deseada, efectuando las iteraciones necesarias.

3).- Método de Maney-Goldberg para el cálculo de  $E \phi_{nx}$  y  $E \psi_n$ .

a).- Primera aproximación para  $n > 1$ .

Para la primera aproximación a los valores de  $E \phi_{nx}$ , se sugiere suponer que las rotaciones de todos los nudos de un nivel y de los niveles adyacentes, son iguales, o sea que:

$$E \phi_{nx}^o = E \phi_{mx}^o = E \phi_{0x}^o \dots \dots \dots (2-34)$$

Según esta hipótesis, la ecuación (2-9) queda:

$$- V_n h_n = 12 E (\phi_{nx}^o - \psi_n) \sum_{x=1}^n K_{nx} \dots \dots \dots (2-35)$$

$$- V_o h_o = 12 E (\phi_{nx}^o - \psi_o) \sum_{x=1}^s K_{ox} \dots \dots \dots (2-36)$$

Sumando miembro a miembro (2-35) y (2-36), queda:

$$- V_o h_o - V_n h_n = 12 E \phi_{nx}^o \left( \sum_{x=1}^s K_{nx} + \sum_{x=1}^s K_{ox} \right) - 12 E \psi_n \sum_{x=1}^s K_{nx} - 12 E \psi_o \sum_{x=1}^s K_{ox} \dots \dots \dots (2-37)$$

Substituyendo (2-34) en la ecuación (2-25), se obtiene:

$$0 = 6 E \phi_{nx}^o (\sum K_1) - 6 E K_{nx} \psi_n - 6 E K_{ox} \psi_o \dots \dots \dots (2-38)$$

Sumando en ambos miembros de esta ecuación para todos los nudos del nivel "n", queda:

$$0 = 6 E \phi_{nx}^o \sum_{x=1}^s (\sum K_1) - 6 E \psi_n \sum_{x=1}^s K_{nx} - 6 E \psi_o \sum_{x=1}^s K_{ox} \dots \dots \dots (2-39)$$

Multiplicando (2-39) por -2 y sumando a (2-37) miembro a miembro:

$$- V_o h_o - V_n h_n = 12 E \phi_{nx}^o \left( \sum_{x=1}^s K_{nx} + \sum_{x=1}^s K_{ox} - \sum_{x=1}^s (\sum K_1) \right) \dots \dots \dots (2-40)$$

Despejando a  $E \phi_{nx}^o$ :

$$E \phi_{nx}^o = \frac{V_o h_o + V_n h_n}{12 \left( \sum_{x=1}^s (E K_1 - \sum_{x=1}^s K_{nx} - \sum_{x=1}^s K_{ox}) \right)} \dots \dots \dots (2-41)$$

En la que:

$$\sum_{x=1}^s (\sum K_1) = 2 \sum K + \sum_{x=1}^s K_{nx} + \sum_{x=1}^s K_{ox} \dots \dots \dots (2-42)$$

Ya que, al efectuar la suma de las sumas de las rigideces relativas de los miembros que concurren en cada nudo del nivel considerado, la rigidez de cada trabe interviene 2 veces como sumando, una vez en cada nudo en sus extremos.

Substituyendo (2-42) en (2-41), queda:

$$E \phi_{nx} = \frac{V_n h_n + V_o h_o}{24 \sum K_n} \dots \dots \dots (2-43)$$

Esta fórmula permite calcular, bajo la suposición (2-34), las rotaciones de los nudos de cada nivel, excepto el primero. Así, para las rotaciones del nivel m, se obtiene:

$$E \phi_{mx}^o = \frac{V_m h_m + V_n h_n}{24 E K_m} \dots \dots \dots (2-44)$$

Si ahora substituímos a  $E \phi_{nx}$  por  $E \phi_{nx}^i$  y a  $E \phi_{mx}$  por  $E \phi_{mx}^i$ , en la ecuación (2-10), se obtiene la primera aproximación al valor de  $E \psi_n$ .

$$E \psi_n^i = \frac{V_n h_n}{12 \sum_{x=1} K_{nx}} + \frac{E \phi_m^i + E \phi_n^i}{2} \dots \dots \dots (2-45)$$

Substituyendo (2-44) y (2-43) en (2-45), queda:

$$E \psi_n^i = \frac{V_n h_n}{12 \sum K_x} + \frac{V_n h_n + V_o h_o}{48 \sum K_n} + \frac{V_m h_m + V_n h_n}{48 \sum K_m} \dots \dots \dots (2-46)$$

Para obtener una primera aproximación a los valores de  $E \phi_{nx}$ , - Maney-Goldberg proponen utilizar la fórmula (2-26), substituyendo en ella a  $E \psi_n$  por  $E \psi_n^i$  y a  $E \psi_o$  por  $E \psi_o^i$ , calculados de la fórmula (2-46), y suponer que  $E \psi_i$  es igual a  $E \phi_{nx}^i$ . De lo que resulta:

$$E \phi'_{nx} = \frac{K_{nx} E \psi'_n + K_{ox} E \psi'_o}{\sum K_i} \dots \dots \dots (2-47)$$

b).- Aproximaciones de orden superior al primero para valores de  $E \psi_n$  y  $E \phi_{nx}$ .

Habiendo encontrado los valores de  $E \psi_n$  y  $E \phi_{nx}$  en una primera aproximación, se procede a substituirlos en las ecuaciones (2-10), (2-16), (2-22), (2-26) y (2-30), según el piso, nivel y condición de apoyo de las bases de las columnas en el marco considerado. Con los valores que resulten para  $E \phi_{nx}$  y  $E \psi_n$ , se repite el proceso, tantas veces como sea necesario para lograr la precisión deseada.

Debido a la naturaleza del método descrito, se pueden utilizar para la primera aproximación a los valores de  $E \psi_n$  y  $E \phi_{nx}$ , las fórmulas correspondientes a un piso y un nudo de orden superior al primero. (ecuaciones (2-46) y (2-47). Sin embargo, esto presenta el inconveniente de que la convergencia es menos rápida.

En la mayoría de los marcos sujetos a fuerzas laterales como sismo o viento, la naturaleza de estas fuerzas y la rápida convergencia del método descrito, hacen innecesario determinar los valores de  $E \psi_n$  más allá de la primera iteración, y los valores de  $E \phi_{nx}$  más allá de la segunda iteración. En el caso de marcos muy regulares, puede bastar la precisión que se logra con la primera iteración para los valores de  $E \phi_{nx}$ .

c).- Determinación de los valores de los elementos mecánicos en las barras de la estructura considerada.

Una vez que se tienen los valores de  $E \psi_n$  y  $E \phi_{nx}$ , con la precisión deseada, los momentos de apoyo sobre barra se calculan con las fórmulas (1-1) a (1-10). A partir de éstos, es inmediata la determinación del momento flexionante, fuerzas normales y fuerzas tangenciales en toda la estructura, utilizando los medios comunes de la estática.

### Hipótesis del método de Wilbur.-

a).- Los puntos de inflexión de todos los miembros, son en sus puntos medios.

b).- Los giros en los extremos de las barras de un mismo nivel, son iguales.

c).- La rigidez de cada trabe de un piso, es igual a la rigidez promedio de las trabes del piso en cuestión.

d).- La rigidez de cada columna de un mismo nivel, es igual a la rigidez promedio de las columnas del nivel.

### COMENTARIO.-

El método de Wilbur, como se ve en el desarrollo matemático de su obtención, está basado en un comportamiento bastante aproximado de la estructura y los resultados que se obtienen se apegan bastante a la realidad, por lo que puede servir para normas de criterio en el análisis de una estructura, siempre y cuando, se tengan en cuenta sus limitaciones.

Tales como: simetría en la estructura, momento de inercia de la sección de una pieza constante en toda su longitud, condiciones de apoyo iguales para todas las columnas, en cuanto se refiere a condiciones geométricas. Por lo que toca a las condiciones de carga, solamente se puede aplicar el método de Wilbur en casos de carga horizontal.

Probablemente, con el método de Wilbur se obtengan momentos en los extremos de las barras, que no cumplan con la ecuación de equilibrio de los nudos, contrario a lo que sucede en el método de Bowman, en donde sí se logra el equilibrio del nudo, pero por haberlo así forzado con las hipótesis iniciales.

## C A P I T U L O

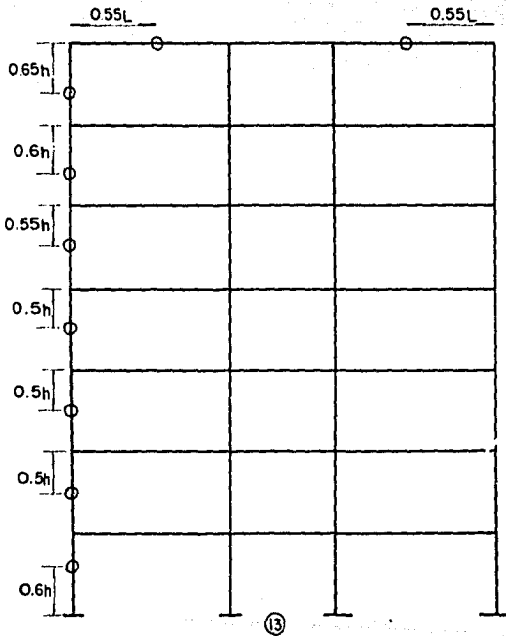


### M E T O D O D E B O W M A N .

Este método está basado en la observación y el estudio del comportamiento de un gran número de marcos, sujetos a diversas cargas laterales, por lo que es un método completamente empírico.

En estas observaciones, están basadas las siguientes hipótesis:

- 1).- El punto de inflexión de las traveses, se encuentra a  $0,55 L$  (longitud de la trabe) en las traveses extremas, y a  $0,5 L$  en las traveses restantes, excepto en la trabe central, si se tiene un número impar de claros, o en las 2 traveses centrales, si el número de claros es par (fig. 13).
  
- 2).- El punto de inflexión de las columnas se encuentra ":



a).- 0.6 h en el entrepiso de la planta baja, si la estructura es de uno o más pisos. Medido del extremo inferior.

b).- 0,65 h en las columnas del entrepiso superior, medidos del extremo superior, para marcos de 2 o más pisos.

c).- 0,6 h en el penúltimo piso, medido de la parte superior para marcos de 3 o más pisos.

d).- 0,55 h en el antepenúltimo piso, medido a partir del extremo superior de la columna, para marcos de 4 o más pisos.

e).- 0.5 h para los pisos restantes, si el marco es de más de 5 pisos.

### 3).- Distribución del cortante.

El cortante total, se distribuye en dos partes:

a).- Para columnas de piso inferior, se utiliza la siguiente expresión.

$$\frac{(\text{Número de claros} - 0,5)}{\text{Número de columnas}} V \dots 1-1$$

$V =$  cortante del entrepiso.

Esta primera parte del cortante se reparte en forma proporcional al momento de inercia de las columnas.

Además, si todas las columnas tienen la misma altura, este cortante tiene la misma proporcionalidad que la rigidez lineal o lateral de las columnas.

b).- La segunda parte del cortante se reparte en proporción inversa a la longitud del claro y en partes iguales a las columnas adyacentes a ese claro.

Si ya se conocen las  $K$  de las trabes, esta parte del cortante se distribuye en proporción directa a  $K$ .

c).- Para columnas de piso superior, la primera parte del cortante se distribuye de acuerdo con la expresión:

$$\frac{(\text{Números de claros} - 2)}{\text{Número de columnas}} V \dots 1 - 2$$

d).- La segunda parte del cortante, se distribuye en la misma forma explicada en el párrafo 3 - c).

#### COMENTARIO:

El método de Bowman, aunque está basado en hipótesis bastantes cercanas a la realidad, está propuesto de tal manera, que los errores se pueden acumular en los momentos de las trabes. Tiene así mismo el incon



veniente, de considerar en una forma insuficiente las rigideces de los miembros.

Otra limitación que se le encuentra, es que sólo se puede aplicar a marcos sujetos a carga horizontal.

Este método se puede aplicar con cierta seguridad a marcos más o menos regulares, que son en las que las hipótesis hechas se acercan más a la realidad, entendiéndose por marcos regulares, aquellos en que la sección transversal de las piezas que lo forman es constante, alturas iguales para columnas de un mismo nivel, trabes impedidas de sufrir desplazamiento vertical en un extremo, claros de trabes similares en todos los pisos, condiciones de apoyo de las columnas del primer piso en la cimentación iguales (todas empotradas - todas articuladas), etc.

Cualquier condición que se aleje de las enunciadas, conducirá a errores en el cálculo de los elementos mecánicos actuantes en la zona donde exista la irregularidad.

Mientras más irregularidades existan, será menos recomendable la aplicación de un método aproximado. Afortunadamente, la mayoría de los marcos de edificios modernos, puede considerarse como regular, y esto ha hecho que se continúen usando estos métodos.

El método de Bowman tiene también la desventaja poderse aplicar solamente a marcos de más de 2 claros.

## C A P I T U L O



### Método del Ing. Heberto Castillo.

Este método consiste básicamente, en la determinación de los giros y desplazamientos de los nudos de una estructura reticulada. Así --- mientras que en los demás métodos se busca el momento flexionante en los extremos de las barras y por lo tanto, se tienen como mínimo dos incógnitas por cada nudo de la estructura, en el método propuesto por el Ing. Castillo, se tienen como máximo dos incógnitas en cada nudo, o sea, el giro y el desplazamiento del nudo en cuestión.

Para determinar dichos giros y desplazamientos, emplea un método de cálculo de aproximaciones sucesivas, que es el método de Seydel para la solución de sistemas de ecuaciones simultáneas.

La teoría en que está basado este método, está ampliamente descrita en el libro del Ing. Castillo: "Un método para el cálculo de estructuras reticulares", por lo que aquí no la repetiremos, ya que este trabajo sólo trata de su comparación en la práctica con otros métodos de cálculo. El desarrollo y la aplicación del método para los diferentes casos - que se pueden presentar en una estructura, se exponen a continuación.

1).- Estructuras sin grados de libertad (nudos fijos linealmente)

te)

De la fórmula de la "pendiente - deformación" para una barra --  
con cargas externas; sin desplazamiento lineal:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} - \frac{2 EI}{L_{ik}} (2\phi_i + \phi_k) \dots 1-1$$

en donde:

$M_{ik}$  = Momento barra sobre nudo en el extremo i de la barra ik.

$\bar{M}_{ik}$  = Momento de empotramiento, barra sobre nudo, en el extremo i de la barra k.

$\phi_i$  = Giro en el extremo i.

$\phi_k$  = Giro en el extremo K.

$L_{ik}$  = Longitud de la barra ik

E = Módulo de elasticidad del material de la barra.

I = Momento de inercia de la sección

Efectuando el producto indicado en 1-1 :

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} - \frac{4 EI}{L_{ik}} \phi_i - \frac{2 EI}{L_{ik}} \phi_k \dots 1-2$$

Definiendo:  $\frac{4 EI}{L_{ik}} = r_{ik}$  ( rigidez de la barra ik )

$$\frac{2 EI}{L_{ik}} = r_{ki} t_{ki} \quad ( t_{ki} = \text{factor de transporte de k ha-} )$$

cia  $i$ , e igual a  $1/2$  para vigas empotradas sujetas a flexión, como es nuestro caso)

Substituyendo en 1-2

$$M_{ik} = \overline{M}_{ik} - r_{ik} \phi_i - r_{ki} t_{ki} \phi_k \dots 1-3$$

(válida para una barra cualquiera)

Por la condición de equilibrio en el nudo tenemos:

$$\sum M_{ik} = \sum \overline{M}_{ik} - \sum r_{ik} \phi_i - \sum r_{ki} t_{ki} \phi_k = 0 \dots 1-4$$

Definición:  $\sum \overline{M}_{ik} =$  Momento de desequilibrio en el nudo  $i = M_{Di}$

Despejando a  $\sum r_{ik} \phi_i$  de 1-4, queda:

$$\sum r_{ik} \phi_i = (M_{Di} - \sum r_{ki} t_{ki} \phi_k) \dots 1-5$$

Ahora bien, observemos que:

$\sum r_{ik} =$  rigidez total del nudo  $= r_{in}$  y que  $\phi_i =$  giro del nudo  $= \phi_n$ ,

y como el giro de todas las barras que concurren al nudo es igual a  $\phi_n$ , queda:

$$r_{in} \phi_n = (M_{Di} - \sum r_{ki} t_{ki} \phi_k) \dots 1-6$$

Despejando  $\phi_n$  de 1 - 6

$$\phi_n = \frac{(M_{Dl} - \sum r_{kl} t_{kl} \phi_k)}{r_{tn}} \quad \dots \quad 1 - 7$$

Pero como:

$$\frac{r_{kl}}{r_{tn}} = f_{dkl} \quad (\text{factor de distribución angular})$$

Sustituyendo en 1 - 7

$$\phi_n = \frac{(M_{Dl} - \sum f_{dkl} t_{kl} \phi_k)}{r_{tn}} \quad \dots \quad 1 - 8$$

Como  $t_{kl} = \frac{1}{2}$ , queda:  $\phi_n = \frac{(M_{Dl} - \frac{1}{2} \sum f_{dkl} \phi_k)}{r_{tn}} \quad 1 - 9$

Definiendo a:  $\frac{M_{Dl}}{r_{tn}} =$  " constante de giro inicial en el nudo" =  $K_{\phi_n}$  y es el giro que habría en el nudo "n" si los demás nudos no giraran.

$1/2 \sum f_{dkl} =$  "Factor de distribución del giro de los nudos vecinos"

Si :

$$2 f_{d\phi k} = \frac{1}{2} \sum f_{dkl} = 2 f_{dkl} t_{kl} \quad \text{la ecuación 1-9 queda:}$$

$$\phi_n = K_{\phi_n} - \sum f_{d\phi k} \phi_k \quad \dots \quad 1 - 10$$

La ecuación 10, se resuelve por aproximaciones sucesivas, por lo que hay que calcular el valor de  $k_{\phi n}$  y de  $f_{d\phi k}$  para todos los nudos y todas las barras.

El proceso a seguir es el siguiente:

a).- Se supone primero que el giro en los nudos vecinos al nudo escogido para iniciar las iteraciones, es igual a cero, por lo que el giro en el nudo considerado será la  $k_{\phi n}$  de dicho nudo.

b).- Se pasa al siguiente nudo, y su giro es igual a su  $k_{\phi n}$  más el  $f_{d\phi k}$  del nudo anterior.

c).- Se pasa al siguiente nudo, repitiendo el proceso, hasta terminar con todos los nudos de la estructura.

d).- El problema está resuelto cuando una iteración resulta igual a la anterior.

e).- Una vez conocidos los giros de cada nudo de la estructura, los momentos en los extremos de cada barra se determinan por medio de las ecuaciones 1 - 1 o 1 - 3.

2.- Estructuras con nudos con desplazamiento horizontal.

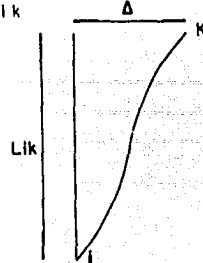
1).- Con carga vertical solamente:

La ecuación de "pendiente - deformación" aplicable a este caso,

es:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} - \frac{2EI}{L_{ik}} \left( 2\phi_i + \phi_k - \frac{3\Delta}{L_{ik}} \right) \dots 2-1$$

En donde consideramos a  $\Delta$  como el desplazamiento relativo del extremo k con respecto al extremo i, siendo  $\Delta$  positivo cuando i se mueve a la derecha de k, estando i arriba de k.



$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} - \frac{4EI}{L_{ik}} \phi_i - \frac{2EI}{L_{ik}} \phi_k + \frac{6EI}{L_{ik}^2} \Delta \dots 2-2$$

Definiendo a  $\frac{6EI}{L_{ik}^2}$  como rigidez lineal de la barra  $ik = R_{LIK}$ , queda:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} - r_{ik} \phi_i = r_{ki} t_{ki} \phi_k + R_{LIK} \Delta \dots 2-3$$

Por equilibrio en el nudo tendremos:

$$\sum M_{ik} = \sum \bar{M}_{ik} - \sum r_{ik} \phi_i - \sum r_{ki} t_{ki} \phi_k + \sum_c R_{LIK} \Delta = 0 \dots 2-4$$

expresión que se puede escribir, reemplazando valores obtenidos antes, como:

$$\sum M_{ik} = 0 = M_{D1} - r_{tn} \phi_n - \sum r_{ki} t_{ki} \phi_k + \sum_c R_{LIK} \Delta \dots 2-5$$

en donde:  $\sum_c R_{LIK} \Delta$ ,  $\sum_c$  se refiere a las columnas que concurren al nudo.

$$r_{tn} \phi_n = M_{D1} - ( \sum r_{ki} t_{ki} \phi_k - \sum_c R_{LIK} \Delta ) \dots 2-6$$

Despejando a  $\phi_n$ :

$$\phi_n = \frac{M_{D1}}{r_{tn}} ( \sum r_{ki} t_{ki} \phi_k - \sum_c R_{LIK} \Delta ) \dots 2-7$$

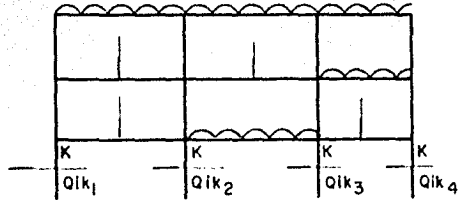
Al hacer un corte horizontal en un piso  $r$  cualquiera, el equilibrio exige que la suma de todas las fuerzas cortantes y de las fuerzas horizontales externas arriba del piso, sea igual a cero.. En este caso:

$$\sum Q_{ik} = 0 \dots 2 - 8$$

En donde la fuerza  $Q_{ik}$  de barra sobre nudo, en el extremo k es:

$$Q_{ik} = \frac{M_{ik} + M_{ki}}{L_{ik}} \dots 2 - 9$$

Siendo los momentos de barra sobre nudo y  $Q_{ik}$  será positivo cuando la fuerza -- tenga sentido de derecha a izquierda



En este caso, como  $\bar{M}_{ik} = \bar{M}_{ki} = 0$ , resulta que:

$$Q_{ik} = \frac{6 EI}{L^2_{ik}} \left( \phi_i + \phi_k - \frac{\sum \Delta}{L_{ik}} \right) \dots 2 - 10$$

Por lo que :

$$\sum_r Q_{ik} = - \frac{6 EI}{L^2_{ik}} \sum \left( \phi_i + \phi_k - \frac{\sum \Delta}{L_{ik}} \right) = 0 \dots 2 - 11$$

Siempre y cuando  $\frac{EI}{L^3_{ik}}$  sea constante.

de 2 - 11 :

$$\sum_r \phi_i + \sum_r \phi_k - \sum_r \frac{2 \Delta}{L_{ik}} = 0 \dots 2 - 12$$

Despejando  $\sum_r \frac{2 \Delta}{L_{ik}}$



$$\sum_r \frac{2 \Delta}{L_{ik}} = \sum_r \phi_i + \sum_r \phi_k \dots 2 - 13$$

Como  $\Delta$  y  $L_{ik}$  son constantes:  $\sum_r \frac{2 \Delta}{L_{ik}} = \frac{N 2 \Delta}{L_{ik}} \dots 2 - 14$

$$2 - 15 \dots \frac{N 2 \Delta}{L_{ik}} = \sum_r \phi_n + \sum_r \phi_k \quad (N = \text{número de columnas - en el piso})$$

$$N \Delta = \frac{L_{ik}}{2} \left( \sum_r \phi_i + \sum_r \phi_k \right) \dots 2 - 16$$

$$\Delta = \frac{L_{ik}}{2N} \left( \sum_r \phi_i + \sum_r \phi_k \right) \dots 2 - 17$$

Ahora bien, si llamamos a  $\frac{R_{lik}}{r_{tn}} = \text{factor del desplazamiento} = F_{\Delta\phi}$  que influye en el giro.

$$\frac{a L_r}{2N} = \text{factor del giro que influye en el desplazamiento} = F_{\phi\Delta}$$

y a  $f_{jki} t_{ki} = f_{\phi\phi k} = \text{factor de giro en } k \text{ que influye en } i, p_{\underline{0}}$

dremos escribir que :

$$\phi_n = K_{\phi n} - \sum f_{\phi\phi k} \phi_k + \sum F_{\Delta\phi\Delta} \dots 2 - 18$$

$$\Delta = F_{\phi\Delta} \left( \sum_r \phi_i + \sum_r \phi_k \right) \dots 2 - 19$$

Las ecuaciones 2 - 18 y 2 - 19 se resuelven por aproximaciones

sucesivas, determinando antes los valores de  $K_{\phi n}$ ,  $f_{d\phi k}$ ,  $F_{\Delta\phi}$ ,  $F_{\phi\Delta}$

Una vez determinados los valores, el proceso es el siguiente:

- a).- se supone primero que el giro en los nudos vecinos al nudo en que se comienza es igual a cero, así como los desplazamientos en todos los pisos de la estructura. Entonces el giro en el nudo considerado será la  $K_{\phi n}$  del mismo.
- b).- Se pasa al siguiente nudo y su giro será igual a su  $K_{\phi n}$  más  $f_{d\phi k}$  por el giro del nudo anterior.
- c).- Se repite el proceso, pasando a los siguientes nudos, hasta terminar con todos los nudos de la estructura,
- d).- Se suman en cada piso los giros de los nudos a que correspondan todas las columnas del piso, multiplicándolos por sus correspondientes  $F_{\phi\Delta}$ , determinando así los desplazamientos de cada piso.
- e).- Una vez que se tiene un valor del giro en cada nudo y del desplazamiento en cada piso, se regresa al primer nudo, aplicando la ecuación 2 - 18.
- f).- Se pasa a los demás nudos y por medio de la ecuación 2 - 19 se encuentran los nuevos desplazamientos de los demás pisos.
- g).- El problema queda resuelto cuando una iteración es igual o muy semejante a la anterior.
- h).- Una vez que se conocen los giros de cada nudo y los desplazamientos de cada piso, los momentos en los extremos de cada barra se determinan aplicando las ecuaciones 2 - 1 o 2 - 2

## II.- Cargas Horizontales.

El desarrollo es el mismo que en el caso anterior, hasta llegar a la expresión 2 - 7

$$\phi_n = \frac{M_{Dl}}{r_{tn}} - \left( \sum f_{dkl} t_{kl} \phi_k - \frac{\sum R_{Llk} \Delta}{r_{tn}} \right) \dots 2 - 7$$

Ahora bien, cortamos horizontalmente todas las columnas de un piso cualquiera, para que haya equilibrio se debe cumplir que la suma de todas las fuerzas cortantes de las columnas de este piso, sea igual a la suma de las fuerzas externas que actúen arriba de dicho piso.

$$\sum Q_{lk} = Q_r$$

$Q_r$  se considerará positivo cuando actúe de izquierda a derecha.

$$Q_r = \frac{6 EI}{L_{lk}^2} \sum_r \left( \phi_l + \phi_k - \frac{2 \Delta}{L_{lk}} \right) \dots 2 - 10$$

Si  $\frac{EI}{L_{lk}^2}$  es constante:

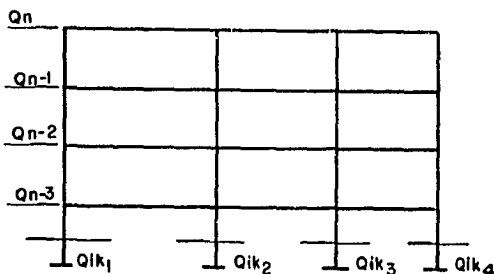
$$\frac{Q_r L^2}{6 EI} = - \sum_r \phi_l - \sum_r \phi_k + \frac{\sum 2 \Delta}{r L_{lk}} \dots 2 - 20$$

$$\Delta = \frac{L_{lk}}{2 N} \left( \frac{Q_r L^2}{6 EI} + \sum_r \phi_l + \sum_r \phi_k \right) \dots 2 - 22$$

Llamando a  $\frac{Q_r L^2}{6 EI} =$  constante del desplazamiento en el piso  $= k_{\Delta p}$

Si  $I$  no es constante, entonces su valor en  $K_{\Delta p}$  se toma como el promedio de los momentos de inercia de las columnas del piso:

$$I_{\text{prom}} = \frac{\sum I \text{ columnas piso}}{\text{Número de columnas del piso.}}$$



La ecuación 2 - 22 queda entonces como:

$$\Delta = F_{\phi \Delta} ( K_{\Delta p} + \sum \phi_1 + \sum \phi_k ) \dots 2 - 23$$

La ecuación 2 - 18, se conserva igual que en el caso anterior:

$$\phi_n = K_{\phi n} - \sum f_{d\phi k} \phi_k + \sum F_{\Delta \phi} \Delta \dots 2 - 18$$

El procedimiento a seguir para resolver las 2 ecuaciones anteriores 2 - 18 y 2 - 23 es semejante al caso I, excepto que se deberá ahora de tomar en cuenta a la constante de desplazamiento en el piso para el cálculo de  $\Delta$ .



3.-) Columnas de diferente altura en un mismo piso.

Llamaremos  $\phi_k$  a los giros en el nudo de la parte inferior de cada columna, y los del nudo de la parte -

superior  $\phi_i$ . Así, cada columna tendrá un  $\phi_i$  y un  $\phi_k$ .

En un piso  $r$ , en el que todas las columnas son de la misma longitud,  $L_{ik}$ , se tiene:

$$Q_r = \sum Q_{ki} = - \frac{6 E I}{L_{ik}^2} \sum_r \left( \phi_i + \phi_k - \frac{2 \Delta}{L_{ik}} \right) \dots 2 - 24$$

Donde el signo  $\sum_r$  indica: suma de todos los  $\phi_i$ ,  $\phi_k$ ,  $\frac{2 \Delta}{L_{ik}}$  de cada columna del piso.

En el caso de un piso con columnas de alturas diferentes, llamaremos  $L_j$  a la longitud predominante en las columnas.

Definiendo a  $C_{ik}$  como:

$$C_{ik} = \frac{L_j^2}{L_{ik}^2} \dots 3 - 1$$

$$L_{ik} = \frac{L_j^2}{C_{ik}} \dots 3 - 1'$$

Substituyendo en 2 - 24

$$Q_r = - \frac{6 E I}{L_j^2} C_{ik} \sum_r \left( \phi_i + \phi_k - \frac{2 \Delta}{L_{ik}} \right) \dots 3 - 2$$

En esta ecuación hay un  $C_{ik}$  para cada columna.

$$\frac{Q_r L_j^2}{6 E I} = - C_{ik} \sum_r \left( \phi_i + \phi_k - \frac{2 \Delta}{L_{ik}} \right) \dots 3 - 3$$

de 3 - 1' en 3 - 3 :

$$\frac{Q_r L^2_j}{6 E I} = - C_{ik} \sum_r (\phi_i + \phi_k \frac{- 2 C_{ik}^{\dagger} \Delta}{L_j}) \dots 3 - 4$$

$$Q_r \frac{L^2_j}{6 E I} = - \sum_r C_{ik} \phi_i - \sum_r C_{ik} \phi_k + \frac{\sum_r C_{ik} 2 C_{ik}^{1/2}}{L_j} \Delta$$

$$\frac{\sum_r C_{ik}^{\dagger}}{L_j} 2 \Delta = \frac{Q_r L^2_j}{6 E I} + \sum_r C_{ik} \phi_i + \sum_r C_{ik} \phi_k$$

$$\frac{2}{L_j} \sum_r C_{ik}^{3/2} \Delta = \frac{Q_r L_j}{6 E I} + \sum_r C_{ik} \phi_i + \sum_r C_{ik} \phi_k$$

$$\sum_r C_{ik}^{3/2} \Delta = \frac{L_j}{2} \left( \frac{Q_r L^2_j}{6 E I} + \sum_r C_{ik} \phi_i + \sum_r C_{ik} \phi_k \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\sum_r C_{ik}^{3/2}} \frac{L_j}{2} \left( \frac{Q_r L^2_j}{6 E I} + \sum_r C_{ik} \phi_i + \sum_r C_{ik} \phi_k \right) \dots 3 - 5$$

Si el valor de I no es constante, se tomará como:  $\frac{\sum I \text{ columnas piso } r}{\text{Número columnas piso } r}$ .

$$\Delta = \frac{L_j}{2 \sum_r C_{ik}^{3/2}} (K_{\Delta p} + \sum_r C_{ik} \phi_i + \sum_r C_{ik} \phi_k) \dots 3 - 6$$

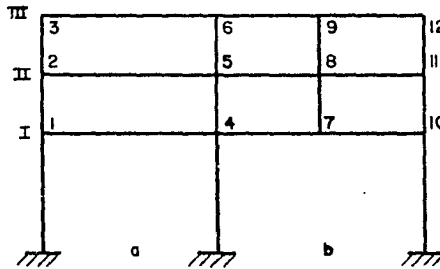
Haciendo a  $\frac{L_j}{2 \sum_r C_{ik}^{3/2}} = F \phi_{\Delta}$ , queda:

$$\Delta = F_{\phi\Delta} ( K_{\Delta p} + \sum C_{ik} \phi_i + \sum C_{ik} \phi_k ) \dots 3 - 7$$

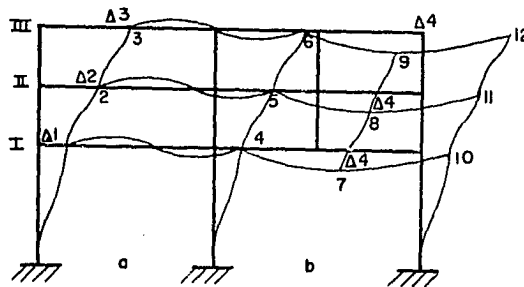
El procedimiento para la solución de la ecuación anterior, es semejante al usado en los casos previos, teniendo en cuenta que ahora se deberá considerar también la  $C_{ik}$  de cada columna afectada por el corte.

#### 4.- Claros continuos (falta de una columna)

Consideremos el siguiente marco, sujeto a cargas verticales y horizontales.



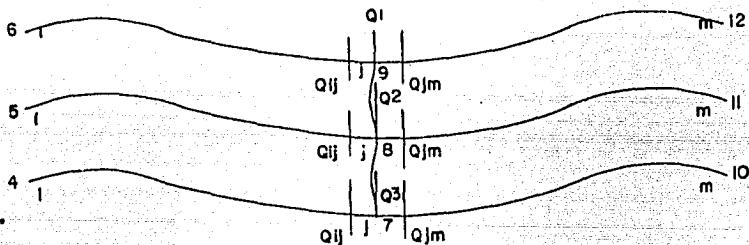
La deformación sufrida por el marco debida al sistema de cargas, será de la siguiente forma:



Como se ve, además de los giros de los nudos y desplazamientos horizontales de los pisos I, II y III, existe un desplazamiento vertical- $\Delta_4$  en los nudos, 7, 8, 9 de la crujía b.

Para la solución de marcos de este tipo, se procede como en los casos anteriores, para las columnas y traveses de todos los niveles, exceptuando las traveses de la cruzja b, que estarán afectadas por el desplazamiento  $\Delta_b$

Aislando a la cruzja b :



Fuerzas de barra sobre nudo :

$$Q_{1j} = - \frac{6 E I}{L^2_{1j}} \sum (\phi_1 + \phi_j + \frac{2 \Delta}{L_{1j}})$$

$$Q_{jm} = - \frac{6 E I}{L^2_{jm}} \sum (\phi_j + \phi_m - \frac{2 \Delta}{L_{jm}})$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_t$$

$$\sum Q + \sum Q_c = 0$$

$$0 = Q_r - \frac{6 E I}{L^2_{1j}} \sum (\phi_1 + \phi_j + \frac{2 \Delta}{L_{1j}}) + \frac{6 E I}{L^2_{jm}} \sum (\phi_j + \phi_m - \frac{2 \Delta}{L_{jm}})$$



$$\text{Si } \frac{C_{im}^2}{L_{jm}^2} = L_{ij}^2 \quad C_{im} = \frac{L_{ij}}{L_{jm}}$$

$$Q_r - \frac{6 E I \sum (\phi_i + \phi_j + \frac{2 \Delta}{L_{jm} C_{im}})}{L_{jm}^2 C_{im}^2} + \frac{6 E I \sum (\phi_j + \phi_m - \frac{2 \Delta}{L_{jm}})}{L_{jm}^2} = 0$$

$$\frac{1}{C_{im}^2} \frac{\sum 2 \Delta}{L_{jm} C_{im}} + \frac{\sum 2 \Delta}{L_{jm}} = \frac{Q_r L_{jm}^2}{6 E I} - \frac{1}{C_{im}^2} \sum (\phi_i + \phi_j) + \sum (\phi_j + \phi_m)$$

Como  $\Delta$  y  $L_{jm}$  son constantes:

$$\frac{1}{C_{im}^3} \frac{2 \Delta}{L_{jm}} N = \frac{Q_r L_{jm}^2}{6 E I} - \frac{1}{C_{im}^2} \sum (\phi_i + \phi_j) + \sum (\phi_j + \phi_m)$$

Donde N es el número de traves  $L_{jm}$ .

$$\frac{2 N \Delta}{L_{jm}} \left( \frac{1}{C_{im}^3} + 1 \right) = \frac{2 N \Delta}{L_{jm}} \times \frac{1 + C_{im}^3}{C_{im}^3}$$

$$\Delta = \frac{C_{im}^3 L_{jm}}{2 N (1 + C_{im}^3)} \left( \frac{Q_r L_{jm}^2}{6 E I} - \frac{1}{C_{im}^2} \sum (\phi_i + \phi_j) + \sum (\phi_j + \phi_m) \right)$$

Si llamamos:

$$F_{\phi \Delta c} = \frac{C_{im}^3 L_{jm}}{2 N (1 + C_{im}^3)}$$

$$K_{\Delta c} = \frac{Q_r L^2_{jm}}{6 E I}$$

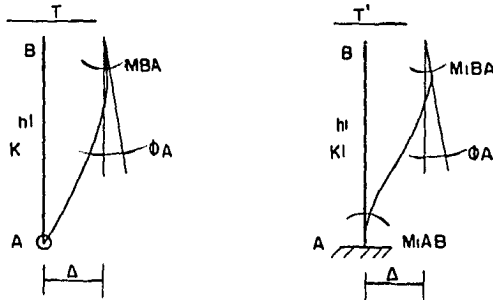
$$\Delta = F_{\phi \Delta c} \left( K_{\Delta c} - \frac{I}{C_{im}} \sum (\phi_i + \phi_j) + \sum (\phi_j + \phi_m) \right)$$

Si I no es constante, se toma un I promedio como en los casos anteriores.

Caso en que se presenten columnas articuladas.-

En estos casos, lo que procede es substituir la columna articulada por otra columna equivalente a ella, pero empotrada.

Recordando que partimos del método de la "pendiente - deformación", y que se consideraron como rigideces angulares de todas las piezas empotradas:  $r_a = 4 EK$



Como la rotación del nudo es única, las dos columnas deben tener la misma rotación. Lo mismo puede decirse de los desplazamientos.

De acuerdo con el método de la "pendiente - deformación", para la columna articulada:

$$M_{BA} = \underbrace{- 3 E K \phi_A}_{\text{momento debido al giro} = M'_{BA}} + \underbrace{3 E K \Delta}_h \text{ momento debido al desplazamiento --} = M'_{BA}$$

Para la columna empotrada:

$$M_{BA} = \underbrace{-4 E K_1 \phi_A}_{\text{momento debido al giro} = M_{BA}^T} + \underbrace{\frac{6 E K_1 \Delta}{h}}_{\text{momento debido al desplazamiento} = M_{BA}^n}$$

En caso de calcular los cortantes se tiene que:

$$M_{AB} = \underbrace{4 E K_1 \phi_A} + \underbrace{\frac{6 E K_1 \Delta}{h_1}}$$

$$1/2 M_{BA}^T = M_{AB}^T ; M_{BA}^n = M_{AB}^n$$

Como el giro del nudo, tanto en la columna articulada como en empotrada, deben ser el mismo, las partes del momento correspondientes al giro deben ser iguales también. Así:

$$M_{BA}^T = M_{AB}^T ; -3 E K \phi_A = -4 E K_1 \phi_A \Rightarrow K_1 = \frac{3}{4} K$$

Como el desplazamiento debe ser el mismo, las contribuciones lineales en la columna empotrada y en la columna articulada deben ser iguales. Así:

$$M_{BA}^n = M_{AB}^n ; \frac{3 E K \Delta}{h} = \frac{6 E K_1 \Delta}{h_1} \cdot \text{como } K_1 = \frac{3}{4} K$$

$$\frac{3 E K \Delta}{h} = \frac{6 E K_1 \Delta}{h_1}$$

$$\frac{3 E K \Delta}{h} = \frac{6 E \times 3 K \Delta}{4 h_1}$$

$$h_1 = \frac{3}{2} h$$

Cuando se analiza el cortante, este debe ser el mismo en las 2 - columnas, así, en la articulada:

$$T = - \frac{3 E K \phi_A}{h} + \frac{3 E K \Delta}{h^2}$$

en la empotrada:

$$T_1 = - \frac{6 E K_1 \phi_A}{h_1} + \frac{12 E K_1 \Delta}{h_1^2}$$

$$T = T_1 \Rightarrow - \frac{3 E K \phi_A}{h} + \frac{3 E K \Delta}{h^2} = - \frac{6 E K_1 \phi_A}{h_1} + \frac{12 E K_1 \Delta}{h_1^2}$$

Substituyendo  $h_1$  por  $h$  y  $K_1$  por  $K$

$$- \frac{3 E K \phi_A}{h} + \frac{3 E K \Delta}{h^2} = - \frac{6 E \frac{3}{4} K \phi_A}{\frac{3h}{2}} + \frac{12 \frac{3}{4} K \Delta m}{(\frac{9}{4} h^2)}$$

$$- \frac{3 E K \phi_A}{h} + \frac{3 E K \Delta}{h^2} = - \frac{3 E K \phi_A}{h} + \frac{m \ 4 E K \Delta}{h^2}$$

$$\frac{E \ 3 E K}{h^2} = \frac{4 E K m}{h^2} \Rightarrow m = 3/4$$

Por lo que hay que afectar a la parte del cortante correspondiente el desplazamiento, de un coeficiente.

$$m = \frac{3}{4}$$

**COMENTARIO:**

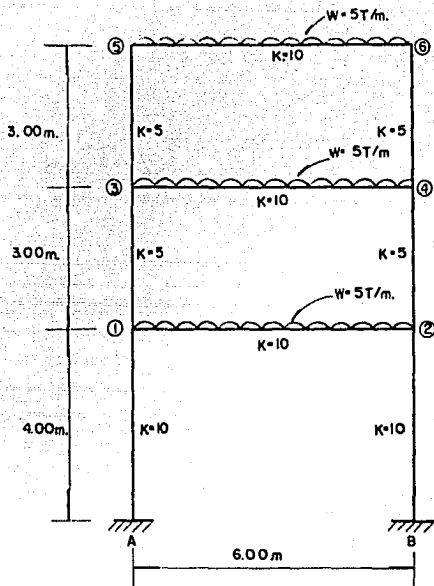
El método del Ing. Castillo, por su desarrollo, no tiene limitación de ninguna especie, como en los dos métodos vistos anteriormente. Se puede aplicar a cualquier tipo de marco, con cualquier sistema de carga, y los resultados no se verán afectados por ello.

Así pues, la aplicación de éste método para la solución de estructuras reticulares no representa más que ventajas en todos los aspectos, ya que no depende de la geometría de la estructura ni del sistema de cargas - para lograr resultados que se puedan considerar exactos.

**C A P I T U L O      I V**

---

**A P L I C A C I O N E S .**



NUDO	Barra	Long	K	$\bar{M}$	Md	$r_a$	$r_t$	$-fd\theta_k$	$K\phi$
1	1 - A	4.00	10	0	15.0	40E	100E	-0.2	0.15
	1 - 2	6.00	10	15.0		40E		-0.2	
	1 - 3	3.00	5	0		20E		-0.1	
2	2 - B	4.00	10	0	-15.0	40E	100E	-0.2	-0.15
	2 - 1	6.00	10	-15.0		40E		-0.2	
	2 - 4	3.00	5	0		20E		-0.1	
3	3 - 1	3.00	5	0	15.0	20E	80E	-0.125	0.188
	3 - 4	6.00	10	15.0		40E		-0.250	
	3 - 5	3.00	5	0		20E		-0.125	
4	4 - 2	3.00	5	0	-15.0	20E	80E	-0.125	-0.188
	4 - 3	6.00	10	-15.0		40E		-0.250	
	4 - 6	3.00	5	0		20E		-0.125	
5	5 - 3	3.00	5	0	15.0	20E	60E	-0.167	0.25
	5 - 6	6.00	10	15.0		40E		-0.333	
6	6 - 4	3.00	5	0	-15.0	20E	60E	-0.167	-0.25
	6 - 5	6.00	10	-15.0		40E		-0.333	

NUDO	1		2		3		4		5		6	
K $\Phi$ n	0.15		-0.15		0.188		-0.188		0.25		-0.25	
Fd $\Phi$ k	2	-0.20	1	-0.20	1	-0.125	2	-0.125	3	-0.167	4	-0.25
	3	-0.10	4	-0.10	4	-0.250	3	-0.25	6	-0.333	5	-0.333
$\Phi$	0.15		-0.18		0.169		-0.208		0.222		-0.289	
	0.166		-0.164		0.191		-0.179		0.314		-0.325	
	0.164		-0.165		0.173		-0.170		0.329		-0.331	
	0.166		-0.166		0.168		-0.168		0.332		-0.333	
	0.166		-0.166		0.168		-0.168		0.333		-0.333	
	0.166		-0.166		0.168		-0.168		0.333		-0.333	

$$M_{a1} = -40 \times 0.5 \times 0.166 = -3.320 \text{ Tm}$$

$$M_{1a} = 0 - 40 \times 0.166 - 0 = -6.65 \text{ Tm}$$

$$M_{12} = 15 - 40 \times 0.166 + 0.5 \times 40 \times 0.166 = 11.68 \text{ Tm}$$

$$M_{13} = 0 - 20 \times 0.166 - 0.5 \times 20 \times 0.168 = -5.00 \text{ Tm}$$

$$M_{31} = 0 - 20 \times 0.168 - 0.5 \times 20 \times 0.166 = -5.02 \text{ Tm}$$

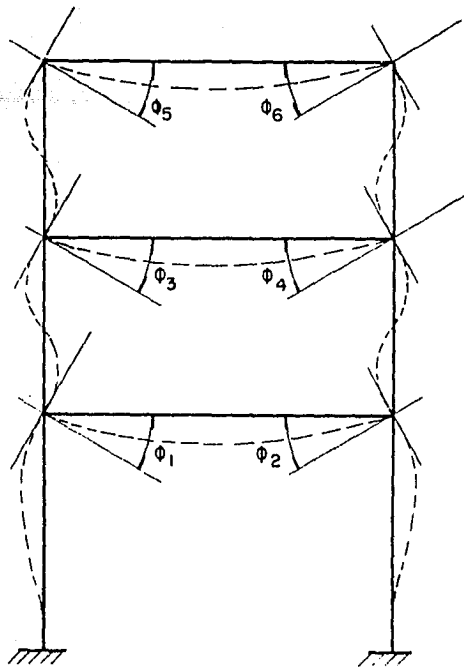
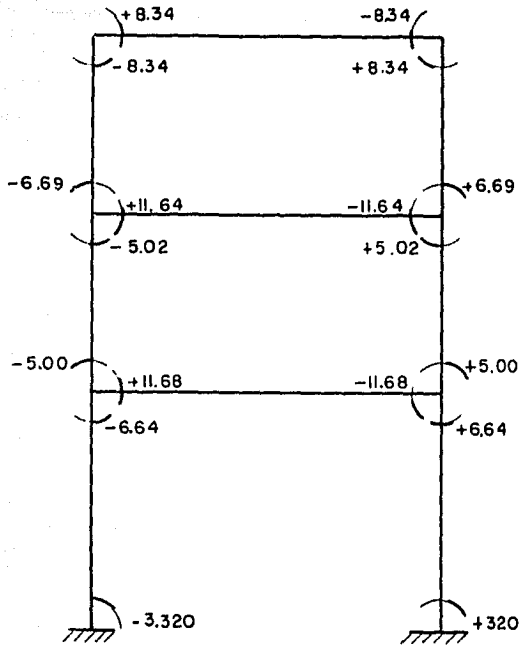
$$M_{34} = 15 - 40 \times 0.168 + 0.5 \times 40 \times 0.168 = 11.64 \text{ Tm}$$

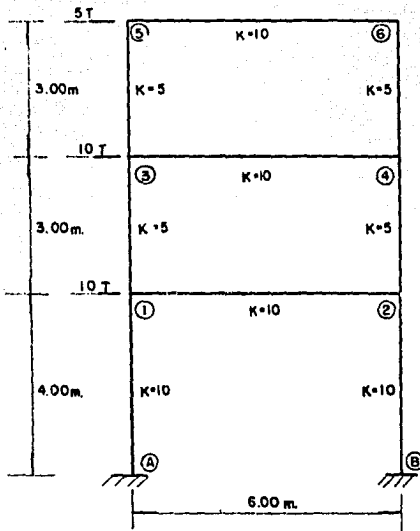
$$M_{35} = 0 - 20 \times 0.168 - 0.5 \times 20 \times 0.333 = -6.69 \text{ Tm}$$

$$M_{53} = 0 - 20 \times 0.333 - 0.5 \times 20 \times 0.168 = -8.34 \text{ Tm}$$

$$M_{56} = 15 - 40 \times 0.333 + 0.5 \times 40 \times 0.333 = 8.34 \text{ Tm}$$







Piso	Nudo	Barra	Long.	K	$r_a$	$r_t$	$-f_{djk}$	$R_1$	$F\Delta\phi$	$Q$	$K\Delta p$	$F\Delta$
I	1	1 - A	4.00	10	40E	100E	-0.20	15E	0.15	5T	1.66	0.375
		1 - 2	6.00	10	40E		-0.20	10E	0.10			
		1 - 3	3.00	5	20E		-0.10	10E	0.10			
	2	2 - B	4.00	10	40E	100E	-0.20	15E	0.15	5T	1.66	0.375
		2 - 1	6.00	10	40E		-0.20	10E	0.10			
		2 - 4	3.00	5	20E		-0.10	10E	0.10			
II	3	3 - 1	3.00	5	20E	80E	-0.125	10E	0.125	15T	1.50	0.375
		3 - 4	6.00	10	40E		-0.250	10E	0.125			
		3 - 5	3.00	5	20E		-0.125	10E	0.125			
	4	4 - 2	3.00	5	20E	80E	-0.125	10E	0.125	15T	1.50	0.375
		4 - 3	6.00	10	40E		-0.250	10E	0.125			
		4 - 6	3.00	5	20E		-0.125	10E	0.125			
III	5	5 - 3	3.00	5	20E	60E	-0.167	10E	0.167	25T	0.50	0.375
		5 - 6	6.00	10	40E		-0.333	10E	0.167			
	6	6 - 4	3.00	5	20E	60E	-0.167	10E	0.167	25T	0.50	0.375
		6 - 5	6.00	10	40E		-0.333	10E	0.167			

NUDO	1		2		3		4		5		6		P I S O			
	0		0		0		0		0		0		I	II	III	
-fdøk	1	-0.2	3	-0.2	1	-0.125	2	-0.125	3	-0.166	4	-0.166	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$
	2	-0.2	1	-0.2	4	-0.25	3	-0.25	5	-0.334	5	-0.334				
	3	-0.1	4	-0.1	5	-0.125	6	-0.125	6	-0.334			$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$
FΔ Ø	0.15	0.15	0.15	0.15	0.125	0.125	0.125	0.125	0.166	0.166	0.166	0.166	F Ø Δ			
	0.10	0.10	0.10	0.10	0.125	0.125	0.125	0.125	0.166	0.166	0.166	0.166	1.0	0.75	0.75	
Øn	0.395	0.319	0.319	0.319	0.20	0.20	0.129	0.129	0.05	0.05	0.0453	0.0453	KΔp			
	0.527	0.493	0.50	0.50	0.364	0.364	0.276	0.276	0.087	0.087	0.0391	0.0391				
	0.512	0.502	0.243	0.243	0.260	0.260	0.260	0.260	0.082	0.082	0.065	0.065	KΔp			
	0.504	0.500	0.251	0.251	0.257	0.257	0.257	0.257	0.078	0.078	0.075	0.075				
	0.500	0.500	0.354	0.354	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	1.66	1.50	0.50	
0.499	0.499	0.499	0.499	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	1.66	1.125	0.375		
Δ	0.499	0.499	0.499	0.499	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	2.378	2.547	0.694	
	0.499	0.499	0.499	0.499	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	2.680	2.39	0.844	
	0.499	0.499	0.499	0.499	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	2.674	2.274	0.878	
	0.499	0.499	0.499	0.499	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	2.664	2.261	0.876	
	0.499	0.499	0.499	0.499	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	2.660	2.258	0.874	
	0.499	0.499	0.499	0.499	0.255	0.255	0.255	0.255	0.077	0.077	0.077	0.077	2.658	2.257	0.874	

Mik = - Mik - rikphi - rkitikpok + RLik A

M1a = 0 - 40 x 0.499 - 40 x 0.5 x 0 + 15 x 2.658

= -19.960 + 39.870 = 19.91 T m

M12 = 0 - 40 x 0.499 - 40 x 0.5 x 0.499 = 29.94 T m

M13 = 0 - 20 x 0.499 - 20 x 0.5 x 0.255 + 10 x 2.257

= 0 - 9.98 - 2.55 + 22.57 = + 10.04 T m

M31 = 0 - 20 x 0.255 - 20 x 0.5 x 0.499 + 10 x 2.257 = 12.48 T m

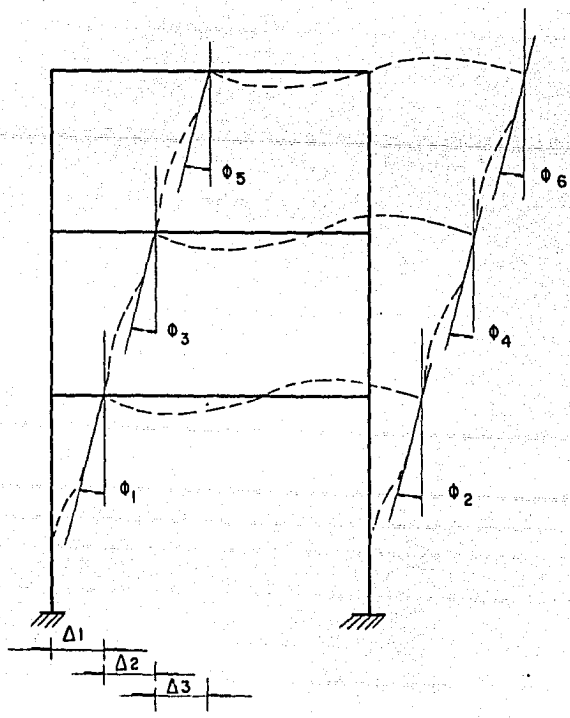
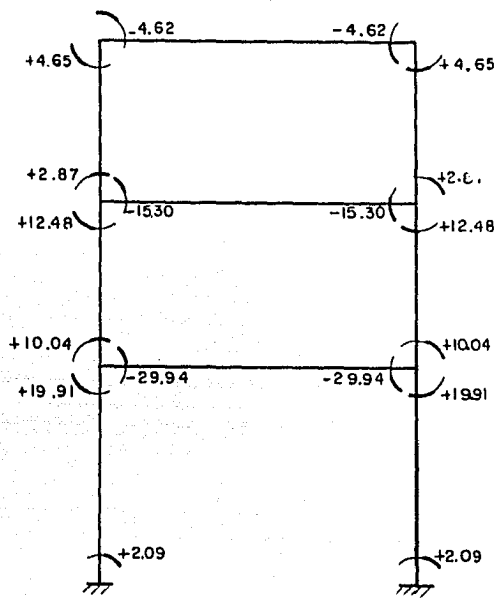
M34 = 0 - 40 x 0.255 - 40 x 0.5 x 0.255 = -15.30 T m

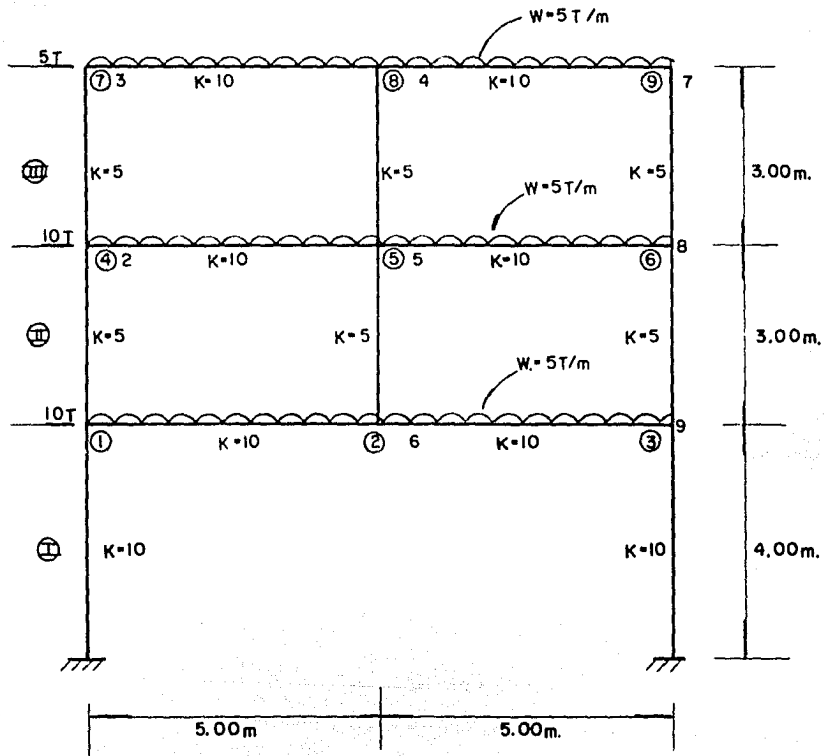
M35 = 0 - 20 x 0.255 - 20 x 0.5 x 0.077 + 10 x 0.874 = 2.87 T m

M53 = 0 - 20 x 0.077 - 20 x 0.5 x 0.255 + 10 x 0.874 = 4.65 T m

M56 = 0 - 40 x 0.077 - 40 x 0.5 x 0.077 = 4.62 T m

Ma1 = 0 - 0 - 40 x 0.5 x 0.499 + 15 x 2.658 = 29.89 T m





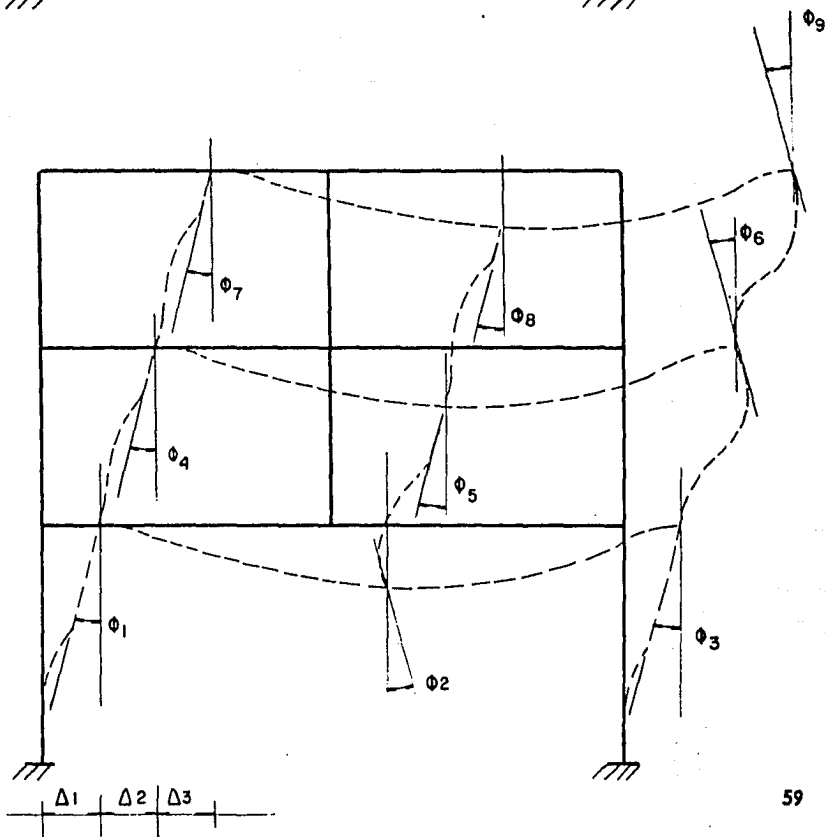
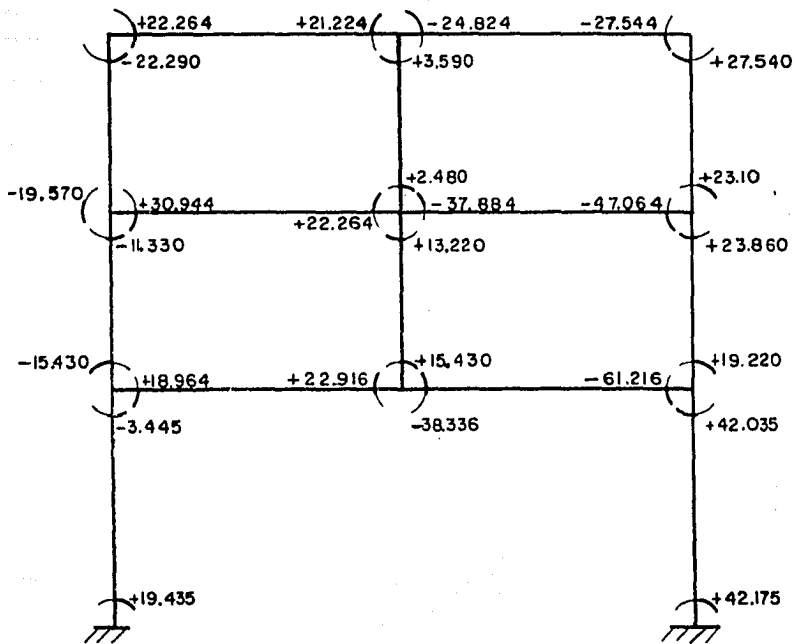
Pi-co	Nudo	Barra	Lamp.	K	S	N <sub>d</sub>	r <sub>A</sub>	r <sub>t</sub>	$\frac{1}{2}$ rd	K d	r <sub>c</sub>	Fb <sub>d</sub>	Fb <sub>d</sub>	u	KdP	Crujín	FΔpc	FΔc	uc	KΔc
I	1	1 - A	4,00	10	0	+10,42	40E	100E	-0,20	0,104	15E	0,15	1,00	25T	1,670	a	-0,12	0,417		
		1 - B	5,00	10	0	+10,42	40E	100E	-0,10	0,10	-12E	0,10								
	2	2 - 1	5,00	10	-10,42	0	40E	100E	-0,20	0	-13E	0,10	1,00	25T	1,670	a	-0,083	0,417		
		2 - 5	5,00	10	+10,42	0	40E	20E	-0,10	0,10	10E	0,10								
	3	3 - B	4,00	10	0	-10,42	40E	100E	-0,20	-0,104	15E	0,15	1,00	25T	1,670	b	0,12	0,417		
		3 - 6	5,00	5	0	-10,42	40E	20E	-0,10	0,10	10E	0,10								
II	4	4 - 1	3,00	5	0	+10,42	20E	80E	-0,125	+0,130	10E	0,125	0,50	15T	1,50	a	-0,15	0,417		
		4 - 5	5,00	10	+10,42	40E	80E	-0,25	+0,130	-12E	0,125									
	5	5 - 2	3,00	5	0	0	20E	120E	-0,083	0	10E	0,083	0,50	15T	1,50	a	-0,10	0,417		
		5 - 4	5,00	10	-10,42	40E	40E	-0,167	0	-12E	0,10									
	6	6 - 3	3,00	5	0	-10,42	20E	80E	-0,125	-0,125	10E	0,125	0,50	15T	1,50	b	0,15	0,417		
		6 - 9	5,00	5	0	-10,42	20E	20E	-0,125	-0,125	10E	0,125								
7	7 - 4	3,00	5	0	+10,42	20E	60E	+0,167	+0,174	10E	0,167	0,50	15T	1,50	a	-0,20	0,417			
	7 - 8	5,00	10	+10,42	40E	40E	-0,333	+0,174	-12E	0,167										
8	8 - 5	3,00	5	0	0	20E	100E	-0,10	0	10E	0,10	0,50	5T	0,50	a	-0,083	0,417			
	8 - 7	5,00	10	-10,42	40E	40E	-0,20	0	-12E	0,10										
9	9 - 6	3,00	5	0	-10,42	20E	60E	-0,167	-0,174	10E	0,167	0,50	5T	0,50	b	0,20	0,417			
	9 - 8	5,00	10	-10,42	40E	40E	-0,333	-0,174	-12E	0,167										

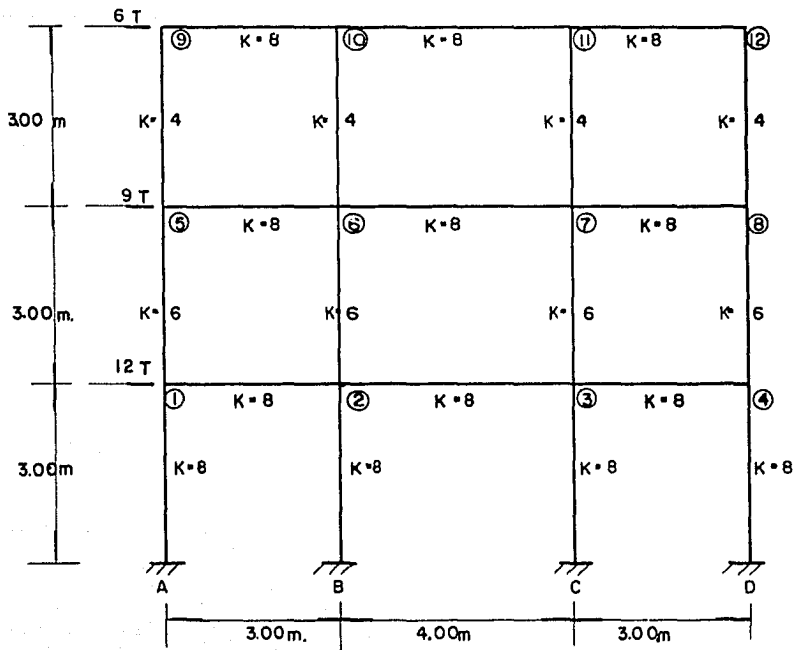


M1A =  $0 - 40 \times 1.144 + 15 \times 2.821 = -3.445$   
M12 =  $+ 10.42 - 40 \times 1.144 + 40 \times 0.5 \times 0.095 + 12 \times 4.367 = 18.964$   
M14 =  $0 - 20 \times 1.144 - 0.5 \times 20 \times 0.734 + 10 \times 1.479 = -15.430$   
  
M21 =  $- 10.42 + 40 \times 0.095 - 0.5 \times 40 \times 1.144 + 12 \times 4.368 = + 22.916$   
M25 =  $0 + 20 \times 0.95 - 20 \times 0.5 \times 0.126 + 10 \times 1.479 = + 15.430$   
M23 =  $10.42 + 40 \times 0.095 - 40 \times 0.5 \times 0.007 - 12 \times 4.368 = - 38.336$   
  
M3B =  $0 - 40 \times 0.007 + 15 \times 2.821 = + 42.035$   
M32 =  $- 10.42 - 40 \times 0.007 + 40 \times 0.5 \times 0.095 - 12 \times 4.368 = - 61.216$   
M36 =  $0 - 20 \times 0.007 + 20 \times 0.5 \times 0.457 + 10 \times 1.479 = + 19.220$   
  
M41 =  $0 - 20 \times 0.734 - 20 \times 0.5 \times 1.144 + 10 \times 1.479 = - 11.330$   
M45 =  $10.42 - 40 \times 0.734 - 40 \times 0.5 \times 0.126 + 12 \times 4.367 = + 30.944$   
M47 =  $0 - 20 \times 0.734 - 20 \times 0.5 \times 1.006 + 10 \times 0.517 = - 19.570$   
  
M52 =  $- 20 \times 0.126 + 20 \times 0.5 \times 0.095 + 10 \times 1.479 = + 13.220$   
M54 =  $- 10.42 - 40 \times 0.120 - 40 \times 0.5 \times 0.734 + 12 \times 4.367 = + 22.264$   
M56 =  $10.42 - 40 \times 0.126 + 40 \times 0.5 \times 0.457 - 12 \times 4.367 = - 37.884$   
M58 =  $- 20 \times 0.126 - 20 \times 0.5 \times 0.016 + 10 \times 0.517 = + 2.490$   
  
M63 =  $0 + 20 \times 0.457 - 20 \times 0.5 \times 0.007 + 10 \times 1.479 = + 23.860$   
M65 =  $- 10.42 + 40 \times 0.457 - 40 \times 0.5 \times 0.126 - 12 \times 4.367 = - 47.064$   
M69 =  $0 + 20 \times 0.457 + 20 \times 0.5 \times 0.890 + 10 \times 0.517 = + 23.210$   
  
M74 =  $0 - 20 \times 1.006 - 20 \times 0.5 \times 0.734 + 10 \times 0.517 = - 22.290$   
M78 =  $10.42 - 40 \times 1.006 - 40 \times 0.5 \times 0.016 + 12 \times 4.367 = + 22.264$   
  
M87 =  $- 10.42 - 40 \times 0.016 - 40 \times 0.5 \times 1.006 + 12 \times 4.367 = + 21.224$   
M85 =  $0 - 20 \times 0.016 - 20 \times 0.5 \times 0.126 + 10 \times 0.517 = + 3.590$   
M89 =  $10.42 - 40 \times 0.016 + 40 \times 0.5 \times 0.890 - 12 \times 4.367 = - 24.824$   
  
M98 =  $- 10.42 + 40 \times 0.890 - 40 \times 0.5 \times 0.016 - 12 \times 4.367 = - 27.544$   
M96 =  $0 + 20 \times 0.890 + 20 \times 0.5 \times 0.457 + 10 \times 0.517 = + 27.540$   
  
M41 =  $0 - 40 \times 0.5 \times 1.144 + 15 \times 2.821 = + 19.435$   
M83 =  $0 - 40 \times 0.5 \times 0.007 + 15 \times 2.821 = + 42.175$

M=Mik-rikoi-rkitkiok+RLik Δ







Piso	Nudo	Barra	Long.	K	r <sub>a</sub>	r <sub>t</sub>	$-\frac{1}{2}fd$	R1	FΔ ϕ	FϕΔ	Q	KΔ p				
I	1	1 - A	3.00	8	32E	88E	-0.182	16E	0.182	0.375	27T	1.687				
		1 - 2	3.00	8	32E		-0.182									
		1 - 5	3.00	6	24E		-0.136	12E	0.136							
	2	2 - B	3.00	8	32E	120E	-0.133	16E	0.133							
		2 - 1	3.00	8	32E		-0.133									
		2 - 3	4.00	8	32E		-0.133									
		2 - 6	3.00	6	24E		-0.100	12E	0.100							
	3	3 - C	3.00	8	32E	120E	-0.133	16E	0.133							
		3 - 2	4.00	8	32E		-0.133									
		3 - 4	3.00	8	32E		-0.133									
	4	4 - D	3.00	8	32E	88E	-0.182	16E	0.182							
		4 - 3	3.00	8	32E		-0.182									
		4 - 8	3.00	6	24E		-0.136	12E	0.136							
	II	5	5 - 1	3.00	6	24E	72E	-0.167	12E				0.167	0.375	15T	1.250
			5 - 6	3.00	8	32E		-0.222								
			5 - 9	3.00	4	16E		-0.111	8E				0.111			
6		6 - 2	3.00	6	24E	104E	-0.115	12E	0.115							
		6 - 5	3.00	8	32E		-0.154									
		6 - 7	4.00	8	32E		-0.154									
		6 - 10	3.00	4	16E		-0.077	8E	0.077							
7		7 - 3	3.00	6	24E	104E	-0.115	12E	0.115							
		7 - 6	4.00	8	32E		-0.154									
		7 - 8	3.00	8	32E		-0.154									
		7 - 11	3.00	4	16E		-0.077	8E	0.077							
8		8 - 4	3.00	6	24E	72E	-0.167	12E	0.167							
		8 - 7	3.00	8	32E		-0.222									
		8 - 12	3.00	4	16E		-0.111	8E	0.111							
III		9	9 - 5	3.00	4	16E	80E	-0.167	8E	0.167	0.375	6T	0.750			
			9 - 10	3.00	8	32E		-0.333								
	10	10 - 6	3.00	4	16E	80E		-0.100	8E	0.100						
		10 - 9	3.00	8	32E			-0.20								
		10 - 11	4.00	8	32E			-0.20								
	11	11 - 7	3.00	4	16E	80E		-0.100	8E	0.100						
		11 - 10	4.00	8	32E			-0.20								
		11 - 12	3.00	8	32E			-0.20								
	12	12 - 8	3.00	4	16E	48E		-0.167	8E	0.167						
		12 - 11	3.00	8	32E			-0.333								

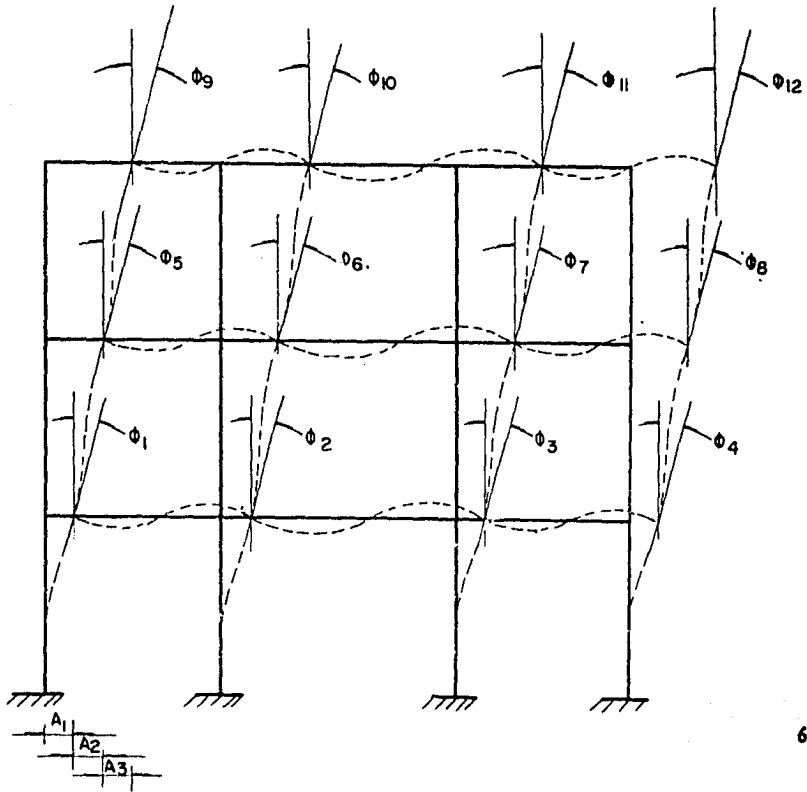
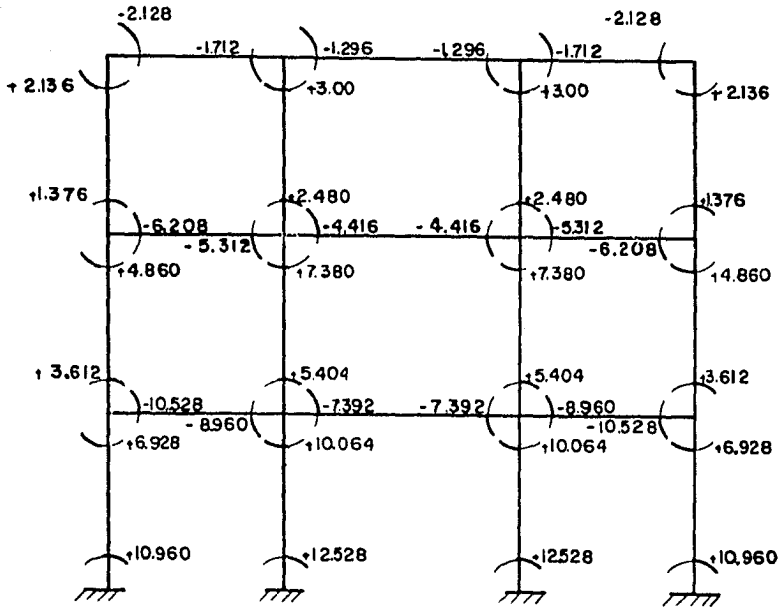
NUDO	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		P I S O		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	I	II	III
K1n	A	-0.182	B	-0.133	C	-0.133	D	-0.182	1	-0.167	2	-0.115	3	-0.115	4	-0.167	5	-0.167	6	-0.10	7	-0.10	8	-0.167	0		
	2	-0.182	1	-0.133	2	-0.133	3	-0.182	6	-0.222	5	-0.154	6	-0.154	7	-0.222	10	-0.20	9	-0.20	10	-0.20	11	-0.333	0		
	5	-0.136	6	-0.100	7	-0.100	8	-0.136	9	-0.111	10	-0.077	11	-0.077	12	-0.111	10	-0.333	11	-0.20	12	-0.20	11	-0.333	0		
F4	I	0.182	0.133	0.133	0.182	0.167	0.136	0.182	0.111	0.077	0.077	0.115	0.077	0.115	0.167	0.111	0.167	0.167	0.100	0.100	0.100	0.100	0.167	F Δ			
	III	0.136	0.100	0.100	0.136	0.111	0.136	0.111	0.077	0.077	0.115	0.077	0.115	0.167	0.111	0.167	0.167	0.167	0.100	0.100	0.100	0.100	0.167	F Δ			
Qn	+0.179	+0.232	+0.133	+0.157	+0.079	+0.079	+0.218	+0.157	+0.079	+0.057	+0.077	+0.054	+0.079	+0.054	+0.071	+0.054	+0.054	+0.034	+0.015	+0.024	+0.024	+0.028	+0.028	0.375 0.375 0.375			
	0.245	0.149	0.151	0.240	0.138	0.086	0.248	0.151	0.090	0.090	0.091	0.088	0.091	0.088	0.137	0.091	0.091	0.049	0.025	0.025	0.025	0.048	0.048	K Δ			
	0.249	0.155	0.155	0.248	0.145	0.092	0.251	0.155	0.092	0.092	0.092	0.091	0.091	0.145	0.145	0.145	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052	K Δ			
Δ	0.251	0.155	0.155	0.252	0.148	0.092	0.252	0.148	0.092	0.092	0.092	0.092	0.148	0.148	0.148	0.053	0.053	0.053	0.037	0.037	0.037	0.037	0.053	1.687 1.250 0.750			
	0.252	0.154	0.154	0.252	0.148	0.092	0.252	0.148	0.092	0.092	0.092	0.092	0.148	0.148	0.148	0.053	0.053	0.053	0.037	0.037	0.037	0.037	0.053	0.633 0.469 0.281			
	0.252	0.154	0.154	0.252	0.148	0.092	0.252	0.148	0.092	0.092	0.092	0.092	0.148	0.148	0.148	0.053	0.053	0.053	0.037	0.037	0.037	0.037	0.053	0.633 0.761 0.416			
																								0.904 0.887 0.477			
																								0.927 0.831 0.505			
																								0.935 0.948 0.516			
																								0.937 0.953 0.521			

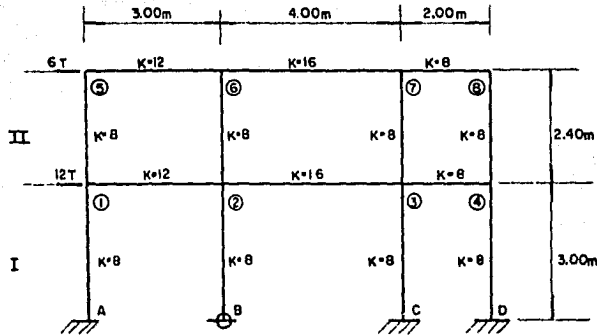
$$\Delta = F_{\Delta 0} [K_{\Delta 0} + \sum \theta_i + \sum \psi_i]$$

$$Q_n = K_{\Delta 0} - \sum F_{\Delta 0} \theta_i + \sum F_{\Delta 0} \psi_i$$

$$\begin{aligned}
1 \quad M1A &= 0 - 32 \times 0.252 + 16 \times 0.937 = + 6.928 \text{ T m} \\
y \quad M12 &= 0 - 32 \times 0.252 - 32 \times 0.5 \times 0.154 + 0 = - 10.528 \text{ T m} \\
4 \quad M15 &= 0 - 24 \times 0.252 - 24 \times 0.5 \times 0.48 + 12 \times 0.953 = +3.612 \text{ T m} \\
2 \quad M2B &= 0 - 32 \times 0.154 + 16 \times 0.937 = + 10.064 \text{ T m} \\
y \quad M21 &= 0 - 32 \times 0.154 - 32 \times 0.5 \times 0.252 = 8.960 \text{ T m} \\
3 \quad M23 &= 0 - 32 \times 0.154 - 32 \times 0.5 \times 0.154 = - 7.392 \text{ T m} \\
\quad M26 &= 0 - 32 \times 0.154 - 24 \times 0.5 \times 0.092 + 12 \times 0.953 = +5.404 \text{ T m} \\
5 \quad M51 &= 0 - 24 \times 0.148 + 24 \times 0.5 \times 0.252 + 12 \times 0.953 = +4.860 \text{ T m} \\
y \quad M56 &= 0 - 32 \times 0.148 - 32 \times 0.5 \times 0.092 = -6.208 \text{ T m} \\
8 \quad M59 &= 0 - 16 \times 0.148 - 16 \times 0.5 \times 0.053 + 8 \times 0.521 = +1.376 \text{ T m} \\
6 \quad M62 &= 0 - 24 \times 0.092 - 24 \times 0.5 \times 0.154 + 12 \times 0.953 = + 7.380 \text{ T m} \\
y \quad M65 &= 0 - 32 \times 0.092 - 32 \times 0.5 \times 0.148 = - 5.312 \text{ T m} \\
7 \quad M67 &= 0 - 32 \times 0.092 - 32 \times 0.5 \times 0.092 = - 4.416 \text{ T m} \\
\quad M610 &= 0 - 16 \times 0.092 - 16 \times 0.5 \times 0.027 + 8 \times 0.521 = +2.480 \text{ T m} \\
9 \quad M95 &= 0 - 16 \times 0.053 - 16 \times 0.5 \times 0.148 + 8 \times 0.521 = +2.136 \text{ T m} \\
y \quad M910 &= 0 - 32 \times 0.053 - 32 \times 0.5 \times 0.027 = - 2.128 \text{ T m} \\
10 \quad M106 &= 0 - 16 \times 0.027 - 16 \times 0.5 \times 0.092 + 8 \times 0.521 = + 3.000 \text{ T m} \\
y \quad M109 &= 0 - 32 \times 0.027 - 32 \times 0.5 \times 0.053 = - 1.712 \text{ T m} \\
11 \quad M1011 &= 0 - 32 \times 0.027 - 32 \times 0.5 \times 0.027 = - 1.296 \text{ T m} \\
MA1 &= MD4 = 0 - 32 \times 0.5 \times 0.252 + 16 \times 0.937 = + 10.960 \text{ T m} \\
MB2 &= MC3 = 0 - 32 \times 0.5 \times 0.154 + 16 \times 0.937 = + 12.528 \text{ T m}
\end{aligned}$$

$$M_{ik} = M_{ik} - r_{ik} \phi_i - r_{ik} \phi_k + R L_{ik} \Delta$$





Piso	Nudo	Barra	Long.	K	$r_a$	$r_+$	$-\frac{1}{2}r_d$	$R_L$	$F \Delta \phi$	$F \phi \Delta$	Q	K P
I	1	1 - A	3.00	8	32E	112E	-0.143	16 E	0.142	0.455	18T	1.200
		1 - 2	3.00	12	48E		-0.214	20 E	0.178			
		1 - 5	2.40	8	32		-0.143	20 E	0.178			
	2	2 - B	4.50	6	24E	168E	-0.071	8.0E	0.048			
		2 - 1	3.00	12	48E		-0.143	20 E	0.119			
		2 - 3	4.00	16	64E		-0.191	20 E	0.119			
		2 - 6	2.40	8	32E		-0.095	20 E	0.119			
	3	3 - C	3.00	8	32E	160E	-0.100	16 E	0.100			
		3 - 2	4.00	16	64E		-0.200	20 E	0.125			
3 - 4		2.00	8	32E	-0.100		20 E	0.125				
3 - 7		2.40	8	32E	-0.100		20 E	0.125				
II	4	4 - D	3.00	8	32E	96E	-0.166	16E	0.167	0.300	6T	0.300
		4 - 3	2.00	8	32E		-0.167	20 E	0.208			
		4 - 8	2.40	8	32E		-0.167	20 E	0.208			
	5	5 - 1	2.40	8	32E	80E	-0.200	20 E	0.25			
		5 - 6	3.00	12	48E		-0.300	20 E	0.25			
	6	6 - 2	2.40	8	32E	144E	-0.111	20 E	0.139			
		6 - 5	3.00	12	48E		-0.167	20 E	0.139			
		6 - 7	4.00	16	64E		-0.222	20 E	0.139			
	7	7 - 3	2.40	8	32E	128E	-0.125	20E	0.150			
		7 - 6	4.00	16	64E		-0.250	20 E	0.312			
		7 - 8	2.00	8	32E		-0.125	20 E	0.312			
	8	8 - 4	2.40	8	32E	64E	-0.250	20 E	0.312			
8 - 7		2.00	8	32E	-0.250		20 E	0.312				

Nudo	1		2		3		4		5		6		7		8		P I S O	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	I	II	
Kφn	2	-0.214	1	-0.143	2	-0.200	3	-0.167	1	-0.200	2	-0.111	3	-0.125	4	-0.250	φ <sub>1</sub>	φ <sub>2</sub>
	5	-0.143	3	-0.191	4	-0.100	8	-0.167	6	-0.300	5	-0.167	6	-0.250	7	-0.250	φ <sub>3</sub>	φ <sub>4</sub>
-fdφk	I	0.142	I	0.048	I	0.100	I	0.167	II	0.250	II	0.139	II	0.156	II	0.312	φ <sub>5</sub>	φ <sub>6</sub>
	II	0.178	II	0.119	II	0.125	II	0.208	II	0.250	II	0.139	II	0.156	II	0.312	φ <sub>7</sub>	φ <sub>8</sub>
FφΔ	I	1.00	I	0.444	I	1.00	I	1.00	I	1.00	I	1.00	I	1.00	I	1.00	F φ Δ	
	II	1.00	II	0.444	II	1.00	II	1.00	II	1.00	II	1.00	II	1.00	II	1.00	F φ Δ	
Cik	I	0.093	I	0.024	I	0.061	I	0.100	I	0.004	I	0.009	I	0.004	I	0.002	0.455	0.300
	II	0.120	II	0.023	II	0.074	II	0.135	II	0.017	II	0.016	II	0.014	II	0.017	0.455	0.300
φ	I	0.130	I	0.024	I	0.077	I	0.145	I	0.022	I	0.020	I	0.016	I	0.026	K Δp	
	II	0.133	II	0.025	II	0.078	II	0.148	II	0.023	II	0.021	II	0.017	II	0.029	K Δp	
Δ	I	0.133	I	0.025	I	0.078	I	0.149	I	0.024	I	0.021	I	0.017	I	0.030	1.200	0.300
	II	0.133	II	0.025	II	0.078	II	0.149	II	0.024	II	0.021	II	0.017	II	0.030	1.200	0.300
Δ	I	0.546	I	0.667	I	0.700	I	0.711	I	0.714	I	0.715	I	0.715	I	0.715	+ 0.546	+ 0.090
	II	0.546	II	0.667	II	0.700	II	0.711	II	0.714	II	0.715	II	0.715	II	0.715	+ 0.667	+ 0.175
Δ	I	0.211	I	0.224	I	0.228	I	0.229	I	0.229	I	0.229	I	0.229	I	0.229	+ 0.700	+ 0.211
	II	0.211	II	0.224	II	0.228	II	0.229	II	0.229	II	0.229	II	0.229	II	0.229	+ 0.711	+ 0.224
Δ	I	0.229	I	0.229	I	0.229	I	0.229	I	0.229	I	0.229	I	0.229	I	0.229	+ 0.714	+ 0.228
	II	0.229	II	0.229	II	0.229	II	0.229	II	0.229	II	0.229	II	0.229	II	0.229	+ 0.715	+ 0.229

$$\phi_n = K\phi_n - \sum f\phi_k\phi_k + \sum F\Delta\phi\Delta$$

$$\Delta = F\phi\Delta [K\Delta p + \sum C|k\phi_i + \sum C|k\phi_k]$$



$$\text{Mik} = \ddot{\text{Mik}} - \text{rik}\phi_i - \text{rkitki}\phi_k + \text{RLik}\Delta$$

$$\text{M1A} = -32 \times 0.133 + 16 \times 0.715 = + 7.184$$

$$\text{M12} = 48 \times 0.133 - 48 \times 0.5 \times 0.025 = 6.984$$

$$\text{M15} = -32 \times 0.133 - 32 \times 0.5 \times 0.024 + 20 \times 0.229 = 0.060$$

$$\text{M2B} = -24 \times 0.025 + 8 \times 0.715 = + 5.720$$

$$\text{M21} = -48 \times 0.025 - 48 \times 0.5 \times 0.133 = - 4.392$$

$$\text{M23} = -64 \times 0.025 - 64 \times 0.5 \times 0.078 = - 4.096$$

$$\text{M26} = -32 \times 0.025 - 32 \times 0.5 \times 0.021 + 20 \times 0.229 = + 3.444$$

$$\text{M3C} = -32 \times 0.078 + 16 \times 0.715 = + 8.944$$

$$\text{M32} = -64 \times 0.078 - 64 \times 0.5 \times 0.025 = - 5.792$$

$$\text{M34} = -32 \times 0.078 - 32 \times 0.5 \times 0.149 = - 4.880$$

$$\text{M37} = -32 \times 0.078 - 32 \times 0.5 \times 0.017 + 20 \times 0.229 = + 1.812$$

$$\text{M4D} = -32 \times 0.149 + 16 \times 0.715 = + 6.672$$

$$\text{M43} = -32 \times 0.149 - 32 \times 0.5 \times 0.078 = - 6.016$$

$$\text{M48} = -32 \times 0.149 - 32 \times 0.5 \times 0.030 + 20 \times 0.229 = - 0.668$$

$$\text{M51} = -32 \times 0.024 - 32 \times 0.5 \times 0.133 + 20 \times 0.229 = 1.684$$

$$\text{M56} = -48 \times 0.024 - 48 \times 0.5 \times 0.021 = - 1.656$$

$$\text{M62} = -32 \times 0.021 - 32 \times 0.5 \times 0.025 + 20 \times 0.229 = + 3.508$$

$$\text{M65} = -48 \times 0.021 - 48 \times 0.5 \times 0.024 = - 1.584$$

$$\text{M67} = -64 \times 0.021 - 64 \times 0.5 \times 0.017 = - 1.888$$

$$\text{M73} = -32 \times 0.017 - 32 \times 0.5 \times 0.078 + 20 \times 0.229 = + 2.788$$

$$\text{M76} = -64 \times 0.017 - 64 \times 0.5 \times 0.021 = - 1.760$$

$$\text{M78} = -32 \times 0.017 - 32 \times 0.5 \times 0.030 = - 1.024$$

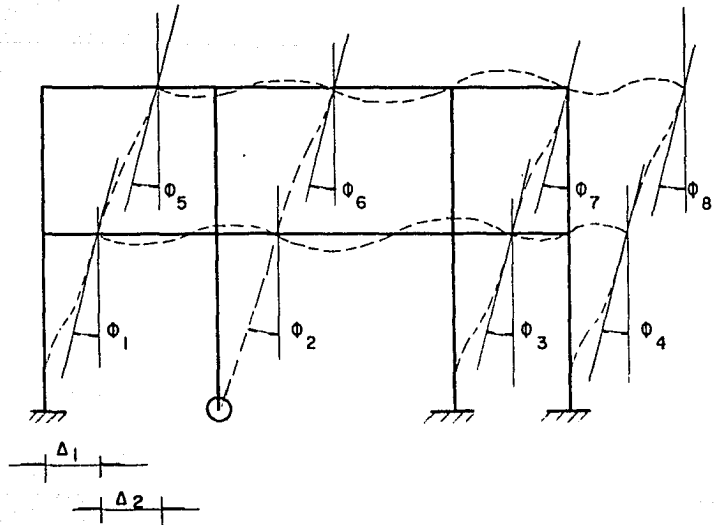
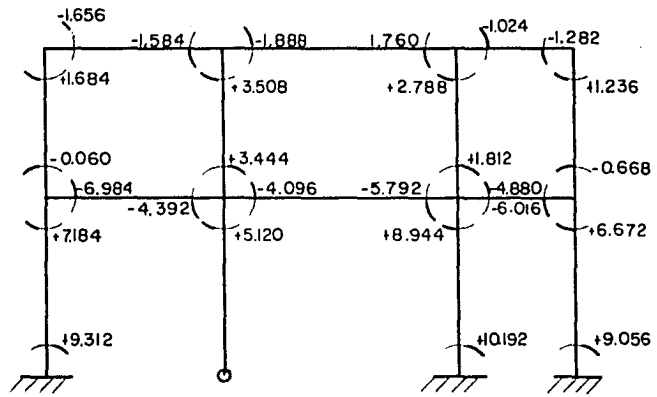
$$\text{M84} = -32 \times 0.030 - 32 \times 0.5 \times 0.149 + 20 \times 0.229 = + 1.236$$

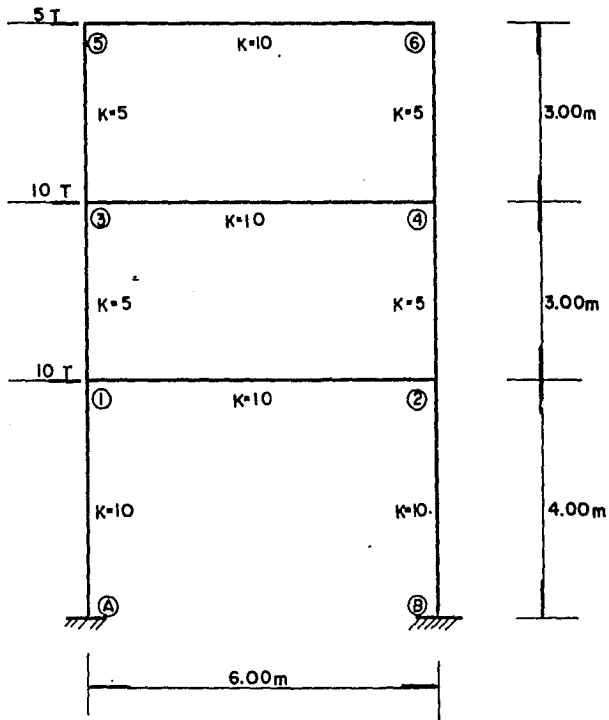
$$\text{M87} = -32 \times 0.030 - 32 \times 0.5 \times 0.017 = - 1.232$$

$$\text{MA1} = -32 \times 0.5 \times 0.133 + 16 \times 0.715 = + 9.312$$

$$\text{MC3} = -32 \times 0.5 \times 0.78 + 16 \times 0.715 = + 10.192$$

$$\text{MD4} = -32 \times 0.5 \times 0.149 + 16 \times 0.715 = + 9.056$$





$$\text{Nivel } n > 1 \quad \left\{ \begin{aligned} E \psi^n &= \frac{V_n h_n}{12 \sum K_{cx}} + \frac{V_n h_n + V_{o n}}{48 \sum k_{tn}} + \frac{V_n h_n + V_n h_n}{48 \sum k_{tm}} \\ E \phi^n_x &= \frac{K_n \times E \psi^n + K_o \times E \psi^o}{\sum k_i} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Nivel } n=1 \quad \left\{ \begin{aligned} E \psi^1 &= \frac{V_1 h_1}{12 \sum k_{c1}} + \frac{V_1 h_1 + V_2 h_2}{48 \sum k_t + 4 \sum k_{c1}} \\ E \phi^1_x &= \frac{K_{c1} \times E \psi^1 + K_{c2} \times E \psi^2}{\sum k_i - \frac{1}{3} K_{c1x}} \end{aligned} \right.$$

Primera Aproximación:

$$E \psi_{III}' = \frac{5 \times 3}{12 \times 10} + \frac{5 \times 3}{48 \times 10} + \frac{5 \times 3 + 15 \times 3}{48 \times 10} = 0.125 + 0.031 + 0.125 = 0.281$$

$$E \psi_{II}' = \frac{15 \times 3}{12 \times 10} + \frac{15 \times 3 + 5 \times 3}{48 \times 10} + \frac{15 \times 3 + 25 \times 4}{48 \times 10} = 0.375 + 0.125 + 0.302 = 0.802$$

$$E \psi_{I}' = \frac{25 \times 4}{12 \times 20} + \frac{25 \times 4 + 15 \times 3}{48 \times 10 + 4 \times 20} = 0.416 + 0.259 = 0.675$$

$$E \phi_5' = \frac{5 \times 0.281}{15} = 0.0937 = E \phi_6'$$

$$E \phi_3' = \frac{5 \times 0.802 + 5 \times 0.281}{20} = 0.271 = E \phi_4'$$

$$E \phi_1' = \frac{10 \times 0.675 + 5 \times 0.802}{25 - 5} = 0.538 = E \phi_2'$$

Segunda Aproximación

$$E \psi_{III}'' = \frac{5 \times 3}{12 \times 10} + \frac{2 \times 5 (0.0937 + 0.271)}{2 \times 2 \times 5} = 0.125 + 0.182 = 0.307$$

$$E \psi_{II}'' = \frac{15 \times 3}{12 \times 10} + \frac{2 \times 5 (0.271 + 0.538)}{2 \times 2 \times 5} = 0.375 + 0.405 = 0.780$$

$$E \psi_{I}'' = \frac{25 \times 4}{12 \times 20} + \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 10 \times 0.538}{20} = 0.417 + 0.269 = 0.686$$

$$E \phi_5'' = \frac{3 \times 5 \times 0.307 - 10 \times 0.0937 - 5 \times 0.271}{2 \times 15} = 0.077 = E \phi_6''$$

$$E \phi_3'' = \frac{3 \times 5 \times 0.307 + 3 \times 5 \times 0.780 - 5 \times 0.077 - 5 \times 0.538 - 10 \times 0.271}{2 \times 20} = 0.263 = E \phi_4''$$

$$E \phi_1'' = \frac{3 \times 10 \times 0.686 + 3 \times 5 \times 0.780 - 5 \times 0.263 - 10 \times 0.468}{2 \times 25} = 0.614 = E \phi_2''$$

Determinación de Momentos

Momentos en las Trabes

$$\begin{aligned} M_{56} = M_{65} &= 2 \times 10 \times 0.231 = 4.62 \text{ T m} \\ M_{34} = M_{43} &= 2 \times 10 \times 0.789 = 15.78 \text{ T m} \\ M_{12} = M_{21} &= 2 \times 10 \times 1.842 = 36.84 \text{ T m} \end{aligned}$$

Momentos en las columnas

$$M_{64} = M_{53} = 2 \times 5 (0.154 + 0.263 - 0.921) = -5.04 \text{ T m}$$

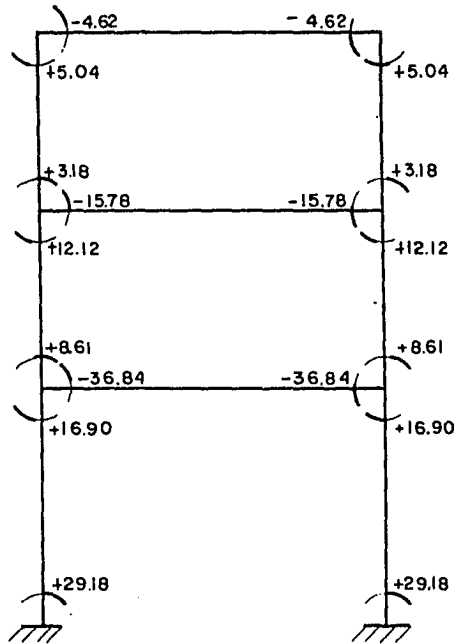
$$M_{46} = M_{35} = 2 \times 5 (0.526 + 0.077 - 0.921) = -3.18 \text{ T m}$$

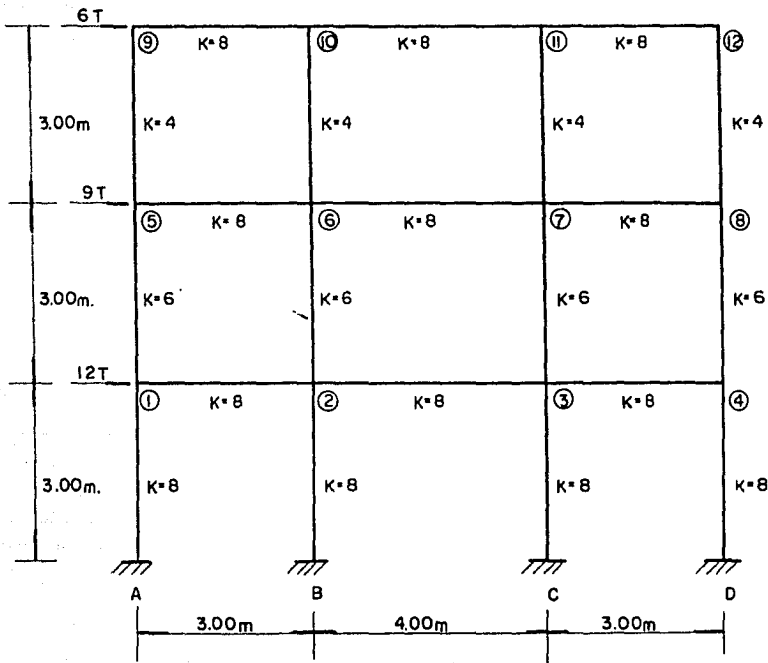
$$M_{42} = M_{31} = 2 \times 5 (0.526 + 0.614 - 2.352) = -12.12 \text{ T m}$$

$$M_{24} = M_{13} = 2 \times 5 (1.228 + 0.263 - 2.352) = -8.61 \text{ T m}$$

$$M_{2B} = M_{1A} = 2 \times 10 (1.228 - 2.073) = -16.90 \text{ T m}$$

$$M_{B2} = M_{A1} = 2 \times 10 (0.614 - 2.073) = -29.18 \text{ T m}$$





$$\text{Nivel } n > 1 \left\{ \begin{aligned} E \psi'_n &= \frac{V_n h_n}{12 \sum K_c} + \frac{V_n h_n + V_o h_o}{48 \sum K_t} + \frac{V_n h_n + V_m h_m}{48 \sum K_t} \\ E \phi'_n &= \frac{K_n \times E \psi'_n + K_o \times E \psi'_o}{\sum K_i} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Nivel } n=1 \text{ (empotrado)} \left\{ \begin{aligned} E \psi'_1 &= \frac{V_1 h_1}{12 \sum K_c} + \frac{V_1 h_1 + V_2 h_2}{48 \sum K_t + 4 \sum K_c} \\ E \phi'_1 &= \frac{K_c 1 \times E \psi'_1 + K_c 2 \times E \psi'_2}{\sum K_i - \frac{1}{3} K_c 1 \times} \end{aligned} \right.$$

Primera Aproximación.

$$E \psi_{III}' = \frac{6 \times 3}{12 \times 16} + \frac{6 \times 3}{48 \times 24} + \frac{6 \times 3 + 15 \times 3}{48 \times 24} = 0.094 + 0.016 + 0.055 = 0.165$$

$$E \psi_{II}' = \frac{15 \times 3}{12 \times 24} + \frac{6 \times 3 + 15 \times 3}{48 \times 24} + \frac{15 \times 3 + 27 \times 3}{48 \times 24} = 0.156 + 0.055 + 0.109 = 0.320$$

$$E \psi_{I}' = \frac{27 \times 3}{12 \times 32} + \frac{27 \times 3 + 15 \times 3}{48 \times 24 + 4 \times 32} = 0.211 + 0.098 = 0.309$$

$$E \phi_9' = E \phi_{12} = \frac{4 \times 0.165}{12} = 0.055$$

$$E \phi_{10}' = E \phi_{11} = \frac{4 \times 0.165}{20} = 0.033$$

$$E \phi_5' = E \phi_8 = \frac{6 \times 0.320 + 4 \times 0.165}{18} = 0.143$$

$$E \phi_6' = E \phi_7 = \frac{6 \times 0.320 + 4 \times 0.165}{26} = 0.099$$

$$E \phi_1' = E \phi_4 = \frac{8 \times 0.309 + 6 \times 0.320}{22 - 1/3 \times 8} = 0.226$$

$$E \phi_2' = E \phi_3 = \frac{8 \times 0.309 \times 6 \times 0.320}{30 - \frac{1}{3} \times 8} = 0.160$$

Segunda Aproximación

$$E \psi_{III}'' = \frac{6 \times 3}{12 \times 16} + \frac{6 \times 2 \times 4 (0.055 + 0.033)}{2 \times 6 \times 4 \times 4} + \frac{6 \times 2 \times 4 (0.143 + 0.099)}{2 \times 6 \times 4 \times 4} = 0.094 + 0.083 = 0.177$$

$$E \psi_{II}'' = \frac{15 \times 3}{12 \times 24} + \frac{6 \times 2 \times 6 (0.143 + 0.099 + 0.226 + 0.160)}{2 \times 6 \times 6 \times 4} = 0.156 + 0.157 = 0.313$$

$$E \psi_{I}'' = \frac{27 \times 3}{12 \times 32} + \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 2 (0.226 + 0.160)}{8 \times 4} = 0.211 + 0.097 = 0.308$$

$$E \phi_9'' = E \phi_{12} = \frac{3 \times 4 \times 0.177 - 8 \times 0.033 - 4 \times 0.143}{2 \times 12} = 0.054$$

$$E \phi_{10}'' = E \phi_{11} = \frac{3 \times 4 \times 0.177 - 8 \times 0.054 - 4 \times 0.099 - 8 \times 0.033}{2 \times 20} = 0.052$$

$$E \phi_5'' = E \phi_8 = \frac{3 \times 6 \times 0.313 + 3 \times 4 \times 0.177 - 4 \times 0.054 - 8 \times 0.099 - 6 \times 0.226}{2 \times 18} = 0.150$$

$$E \phi_6'' = E \phi_7 = \frac{3 \times 6 \times 0.313 + 3 \times 4 \times 0.177 - 4 \times 0.052 - 8 \times 0.150 - 8 \times 0.099 - 6 \times 0.160}{2 \times 26} = 0.088$$

$$E \phi_1'' = E \phi_4 = \frac{3 \times 8 \times 0.308 + 3 \times 6 \times 0.313 - 6 \times 0.150 - 8 \times 0.160}{2 \times 22} = 0.246$$

$$E\phi_2^H = E\phi_3 = \frac{3 \times 8 \times 0.308 + 3 \times 6 \times 0.313 - 8 \times 0.246 - 8 \times 0.160 - 6 \times 0.088}{2 \times 30} = 0.154$$

### Determinación de Momentos.

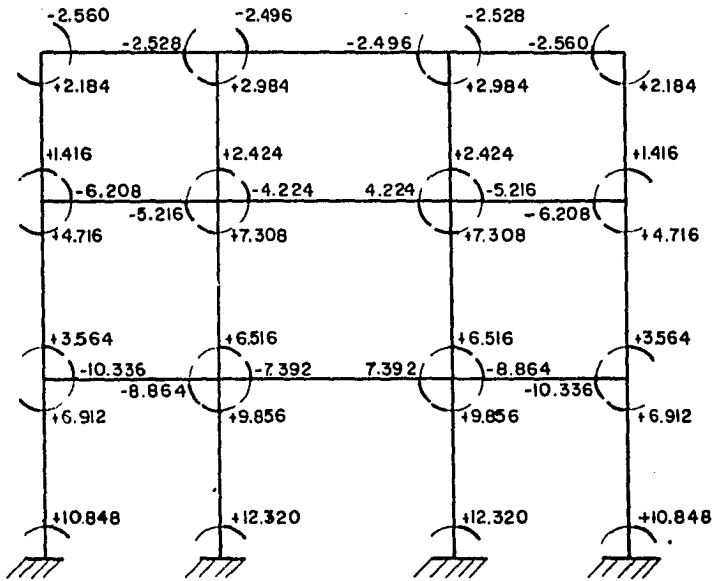
#### Momentos en las Trabes.

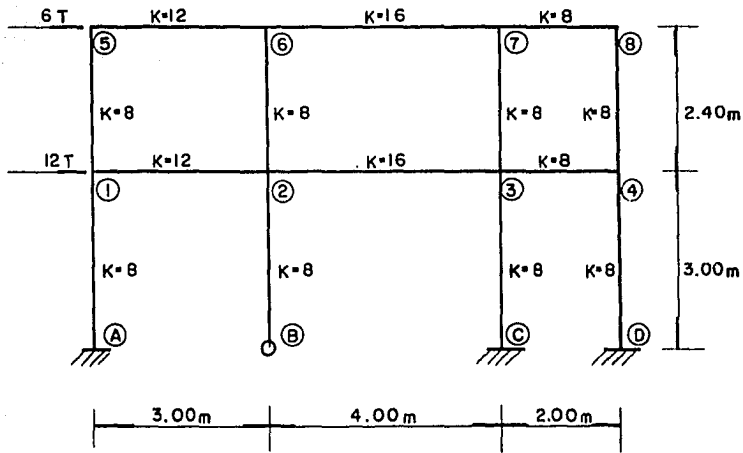
$$\begin{aligned} M_9+10 &= M_{12-11} = 2 \times 8 (0.108 + 0.052) = 2,560 \text{ T m} \\ M_{10-9} &= M_{11-12} = 2 \times 8 (0.104 + 0.054) = 2,528 \text{ T m} \\ M_{10-11} &= M_{11-10} = 2 \times 8 (0.104 + 0.052) = 2,496 \text{ T m} \\ \\ M_{5-6} &= M_{8-7} = 2 \times 8 (0.300 + 0.088) = 6,208 \text{ T m} \\ M_{6-5} &= M_{7-8} = 2 \times 8 (0.176 + 0.150) = 5,216 \text{ T m} \\ M_{6-7} &= M_{7-6} = 2 \times 8 (0.264) = 4,224 \text{ T m} \\ \\ M_{1-2} &= M_{4-3} = 2 \times 8 (0.492 + 0.154) = 10,336 \text{ T m} \\ M_{2-1} &= M_{3-4} = 2 \times 8 (0.308 + 0.246) = 8,864 \text{ T m} \\ M_{2-3} &= M_{3-2} = 2 \times 8 (0.308 + 0.154) = 7,392 \text{ T m} \end{aligned}$$

#### Momentos en las columnas

$$\begin{aligned} M_{9-5} &= M_{12-8} = 2 \times 4 (0.08 + 0.150 - 0.531) = -2,184 \text{ T m} \\ M_{10-6} &= M_{11-7} = 2 \times 4 (0.104 + 0.054 - 0.531) = -2,984 \text{ T m} \\ M_{5-9} &= M_{8-12} = 2 \times 4 (0.300 + 0.054 - 0.531) = -1,416 \text{ T m} \\ M_{6-10} &= M_{7-11} = 2 \times 4 (0.176 + 0.052 - 0.531) = -2,424 \text{ T m} \\ \\ M_{5-1} &= M_{8-4} = 2 \times 6 (0.300 + 0.246 - 0.939) = -4,716 \text{ T m} \\ M_{6-2} &= M_{7-3} = 2 \times 6 (0.176 + 0.154 - 0.939) = -7,308 \text{ T m} \\ M_{1-5} &= M_{4-8} = 2 \times 6 (0.492 + 0.150 - 0.939) = -3,564 \text{ T m} \\ M_{2-6} &= M_{3-7} = 2 \times 6 (0.308 + 0.088 - 0.939) = -6,516 \text{ T m} \\ \\ M_{1-A} &= M_{4-D} = 2 \times 8 (0.492 - 0.924) = -6,912 \text{ T m} \\ M_{2-B} &= M_{3-C} = 2 \times 8 (0.308 - 0.924) = -9,856 \text{ T m} \\ M_{A-1} &= M_{D-4} = 2 \times 8 (0.246 - 0.924) = -10,848 \text{ T m} \\ M_{B-2} &= M_{C-3} = 2 \times 8 (0.154 - 0.924) = -12,320 \text{ T m} \end{aligned}$$







$$\text{Nivel } n > 1 \left\{ \begin{aligned} E\psi'_n &= \frac{V_n h_n}{12 \sum k_c x} + \frac{V_n h_n + V_o h_o}{48 \sum k_t n} + \frac{V_m h_m + V_n h_n}{48 \sum k_t m} \\ E\theta'_n &= \frac{k_n \times E\psi'_n + k_o \times E\psi'_o}{\sum k_i} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Nivel } N = 1 \left. \begin{aligned} E\psi'_1 &= \frac{V_1 h_1}{12 \sum k_{c1}} + \frac{V_1 h_1 + V_2 h_2}{48 \sum k_{t1} + 4 \sum k_{c1}} \\ E\theta'_1 &= \frac{K_{c1} \times E\psi'_1 + K_{c2} \times E\psi'_2}{\sum k_i - \frac{1}{3} k_{c1x}} \end{aligned} \right\} \text{ (empotrado)}$$

$$\text{Nivel } N = 1 \left. \begin{aligned} E\psi'_1 &= \frac{V_1 h_1}{3 \sum k_{c1}} + \frac{2 V_1 h_1 + V_2 h_2}{48 \sum k_{t1}} \\ E\theta'_1 &= \frac{K_{c1} \times E\psi'_1 + 2 K_{c2} \times E\psi'_2}{2 \sum K - K_{c1x}} \end{aligned} \right\} \text{ (articulado)}$$

Primera Aproximación

$$\begin{aligned}
 E \psi_{II}' &= \frac{6 \times 2.40}{12 \times 32} + \frac{6 \times 2.40}{48 \times 36} + \frac{18 \times 3.00 + 6 \times 2.40}{48 \times 36} \\
 &= 0.0375 + 0.0083 + 0.0396 = 0.0854 \\
 E \psi_I' &= \frac{18 \times 3.00}{12 \times 32} + \frac{18 \times 3 + 6 \times 2.4}{48 \times 36 + 4.32} = 0.140 + 0.037 = 0.177 \\
 \text{(empotrado)} \\
 E \psi_I' &= \frac{18 \times 3}{3 \times 32} + \frac{2 \times 18 \times 3 + 6 \times 2.4}{48 \times 36} = 0.562 + 0.071 = 0.633 \\
 \text{(articulado)} \\
 E \psi_I' &= 0.177 \times 0.75 + 0.633 \times 0.25 = 0.134 + 0.158 = 0.292 \\
 E \phi_5' &= \frac{8 \times 0.0854}{20} = 0.034 \\
 E \phi_6' &= \frac{8 \times 0.0854}{36} = 0.019 \\
 E \phi_7' &= \frac{8 \times 0.0854}{32} = 0.021 \\
 E \phi_8' &= \frac{8 \times 0.0854}{16} = 0.043 \\
 E \phi_1' &= \frac{8 \times 0.292 + 8 \times 0.0854}{28 - \frac{1}{3} \times 16} = 0.133 \\
 E \phi_2' &= \frac{8 \times 0.292 + 2 \times 8 \times 0.0854}{88 - 8} = 0.046 \\
 E \phi_3' &= \frac{8 \times 0.292 + 8 \times 0.0854}{40 - \frac{1}{3} \times 16} = 0.087 \\
 E \phi_4' &= \frac{8 \times 0.292 + 8 \times 0.0854}{24 - \frac{1}{3} \times 16} = 0.161
 \end{aligned}$$

Segunda Aproximación

$$\begin{aligned}
 E \psi_{II}'' &= \frac{6 \times 2.40}{12 \times 32} + \frac{8 \times (0.544)}{2 \times 32} = 0.0375 + 0.068 = 0.105 \\
 E \psi_I'' &= \frac{18 \times 3}{12 \times 32} + \frac{1}{2} \times \frac{8(0.427)}{32} = 0.140 + 0.053 = 0.193 \\
 \text{(empotrado)} \\
 E \psi_I'' &= \frac{18 \times 3}{3 \times 32} + \frac{8 \times 0.427}{32} = 0.562 + 0.053 = 0.615 \\
 E \psi_I'' &= 0.193 \times 0.75 + 0.615 \times 0.25 = 0.144 + 0.153 = 0.297
 \end{aligned}$$

$$E\phi^{15} = \frac{3 \times 8 \times 0.105 - 8 \times 0.133 - 12 \times 0.019}{2 \times 20} = 0.031$$

$$E\phi^{16} = \frac{3 \times 8 \times 0.105 - 12 \times 0.031 - 8 \times 0.132 - 16 \times 0.021}{36} = 0.021$$

$$E\phi^{17} = \frac{3 \times 8 \times 0.105 - 16 \times 0.021 - 8 \times 0.087 - 8 \times 0.043}{32} = 0.036$$

$$E\phi^{18} = \frac{3 \times 8 \times 0.105 - 8 \times 0.036 - 8 \times 0.161}{16} = 0.059$$

$$E\phi^{11} = \frac{3 \times 8 \times 0.297 + 3 \times 8 \times 0.105 - 8 \times 0.031 - 12 \times 0.046}{56} = 0.158$$

$$E\phi^{12} = \frac{3 \times 8 \times 0.297 + 6 \times 8 \times 0.105 - 24 \times 0.158 - 16 \times 0.021 - 32 \times 0.087}{190} = 0.014$$

$$E\phi^{13} = \frac{3 \times 8 \times 0.297 + 3 \times 8 \times 0.105 - 16 \times 0.014 - 8 \times 0.036 - 8 \times 0.161}{80} = 0.098$$

$$E\phi^{14} = \frac{3 \times 8 \times 0.297 + 3 \times 8 \times 0.105 - 8 \times 0.098 - 8 \times 0.059}{48} = 0.175$$

#### Momentos en las Traves

$$M56 = 2 \times 12 (0.062 + 0.021) = 1.992 \text{ T m}$$

$$M65 = 2 \times 12 (0.042 + 0.031) = 1.752 \text{ T m}$$

$$M67 = 2 \times 16 (0.042 + 0.036) = 2.496 \text{ T m}$$

$$M76 = 2 \times 16 (0.072 + 0.021) = 2.976 \text{ T m}$$

$$M78 = 2 \times 8 (0.072 + 0.059) = 2.096 \text{ T m}$$

$$M87 = 2 \times 8 (0.108 + 0.036) = 2.304 \text{ T m}$$

$$M12 = 2 \times 12 (0.316 + 0.014) = 7.920 \text{ T m}$$

$$M21 = 2 \times 12 (0.028 + 0.158) = 4.464 \text{ T m}$$

$$M23 = 2 \times 16 (0.028 + 0.098) = 4.032 \text{ T m}$$

$$M32 = 2 \times 16 (0.196 + 0.014) = 6.720 \text{ T m}$$

$$M34 = 2 \times 8 (0.196 + 0.175) = 5.936 \text{ T m}$$

$$M43 = 2 \times 8 (0.350 + 0.098) = 7.168 \text{ T m}$$

#### Momentos en las columnas

$$M51 = 2 \times 8 (0.062 + 0.156 - 0.315) = -1.520 \text{ T m}$$

$$M15 = 2 \times 8 (0.316 + 0.31 - 0.315) = +0.512 \text{ T m}$$

$$M62 = 2 \times 8 (0.042 + 0.014 - 0.315) = -4.032 \text{ T m}$$

$$M26 = 2 \times 8 (0.028 + 0.021 - 0.315) = -4.256 \text{ T m}$$

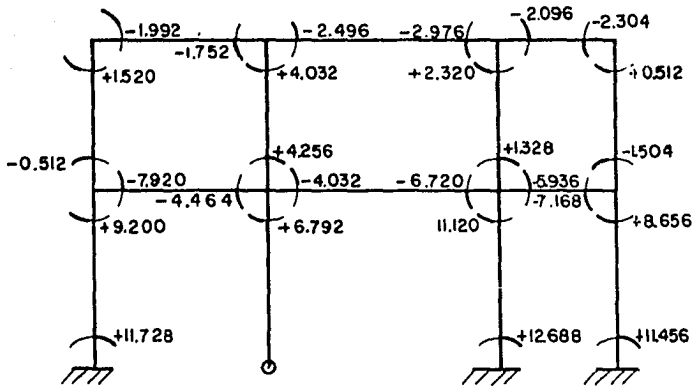
$$M73 = 2 \times 8 (0.072 + 0.098 - 0.315) = -2.320 \text{ T m}$$

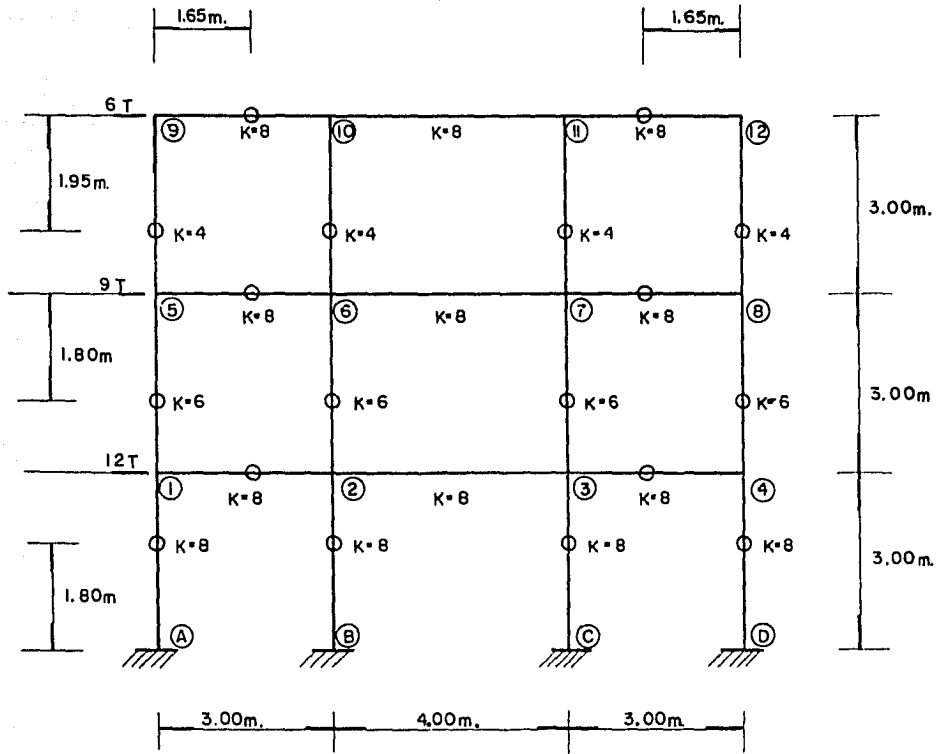
$$M37 = 2 \times 8 (0.196 + 0.036 - 0.315) = -1.328 \text{ T m}$$

$$M84 = 2 \times 8 (0.108 + 0.175 - 0.315) = -0.512 \text{ T m}$$

$$M48 = 2 \times 8 (0.350 + 0.059 - 0.315) = +1.504 \text{ T m}$$

M1A	=	2 x 8	(0.316 - 0.891)	=	9.200 T m
MA1	=	2 x 8	(0.158 - 0.891)	=	11.728 T m
M2B	=	3 x 3	(0.014 - 0.297)	=	6.792 T m
M3C	=	2 x 8	(0.196 - 0.891)	=	11.120 T m
MC3	=	2 x 8	(0.098 - 0.891)	=	12.688 T m
M4D	=	2 x 8	(0.350 - 0.891)	=	8.656 T m
MD4	=	2 x 8	(0.175 - 0.891)	=	11.456 T m





SOLUCION

$$\begin{aligned}
 V_3 &= 6 \text{ T} \begin{cases} 1.50\text{T} \\ 4.50\text{T} \end{cases} \\
 V_2 &= 15\text{T} \begin{cases} 3.75\text{T} \\ 11.25\text{T} \end{cases} \\
 V_1 &= 27\text{T} \begin{cases} 16.9 \text{ T} \\ 10.1 \text{ T} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 0.916$$

$$1/3/0.916 = 0.364$$

$$1/4/0.916 = 0.272$$

$$4.5 \times 0.364 = 1.64 \text{ T}$$

$$4.5 \times 0.272 = 1.224 \text{ T}$$

$$11.25 \times 0.364 = 4.1 \text{ T}$$

$$11.25 \times 0.272 = 3.06 \text{ T}$$

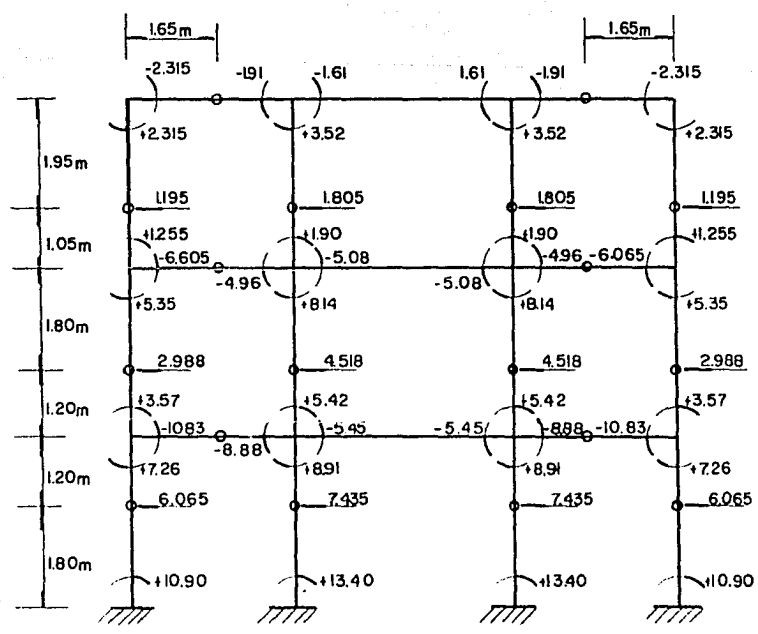
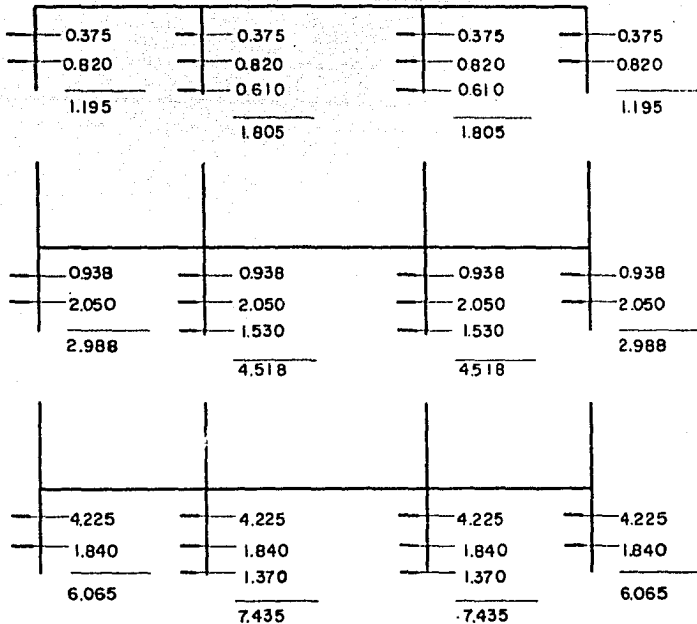
$$10.1 \times 0.364 = 3.680$$

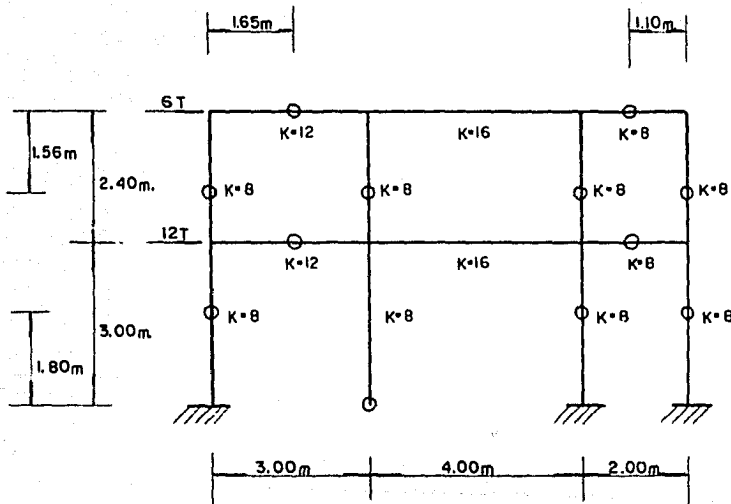
$$10.1 \times 0.272 = 2.74$$

$$1.5 \times 0.25 = 0.375$$

$$3.75 \times 0.25 = 0.938$$

$$16.9 \times 0.25 = 4.225$$





$$V_2 = 6 T$$

$$V_1 = 18 T$$

$$\frac{\# \text{ claros} - 1/2}{\# \text{ columnas}} = \frac{2.5}{4} = 0.625$$

$$\frac{\# \text{ claros} - 2}{\# \text{ columnas}} = \frac{3-2}{4} = 0.25$$

$$V_2 \begin{cases} 1.5 T \\ 4.5 T \end{cases}$$

$$V_1 \begin{cases} 11.2 T \\ 6.8 T \end{cases}$$

$$\Sigma \text{ inverso de los claros: } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.08$$

$$\frac{1/3}{1.08} = 0.308$$

$$\frac{1/4}{1.08} = 0.231$$

$$\frac{1/2}{1.08} = 0.461$$

$$4.5 \times 0.308 = 1.386$$

$$4.5 \times 0.231 = 1.039$$

$$4.5 \times 0.461 = 2.075$$

Como todas las columnas  
tienen el mismo :  $\frac{8}{32} = 0.25$

$$6.8 \times 0.308 = 2.094$$

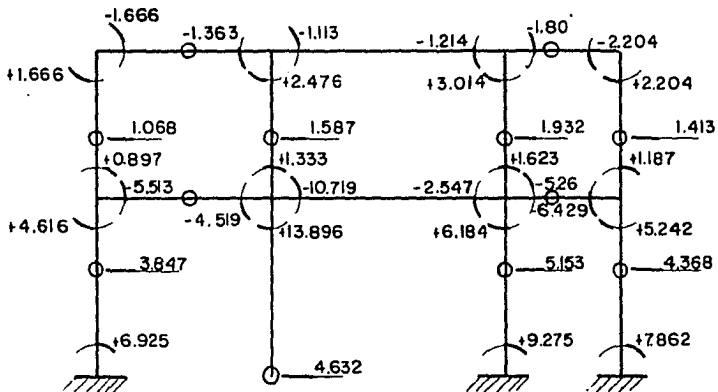
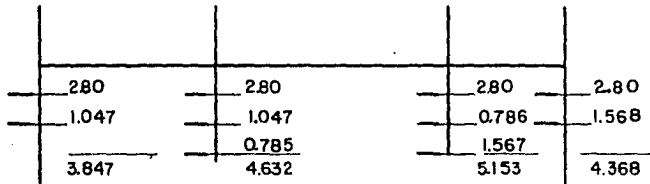
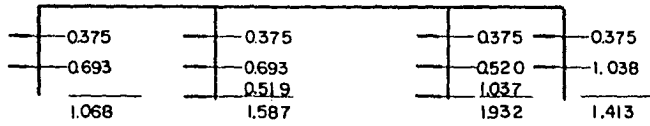
$$6.8 \times 0.231 = 1.571$$

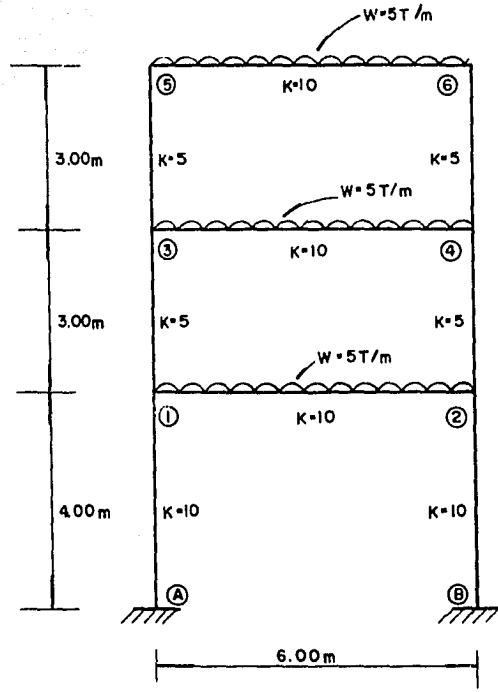
$$6.8 \times 0.461 = 3.135$$

$$1.5 \times 0.25 = 0.375$$

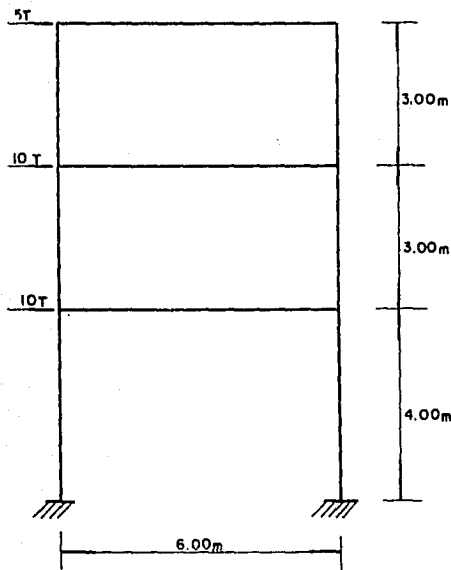
$$11.2 \times 0.25 = 2.80$$



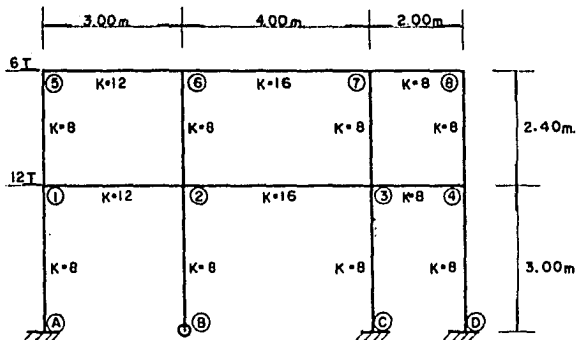




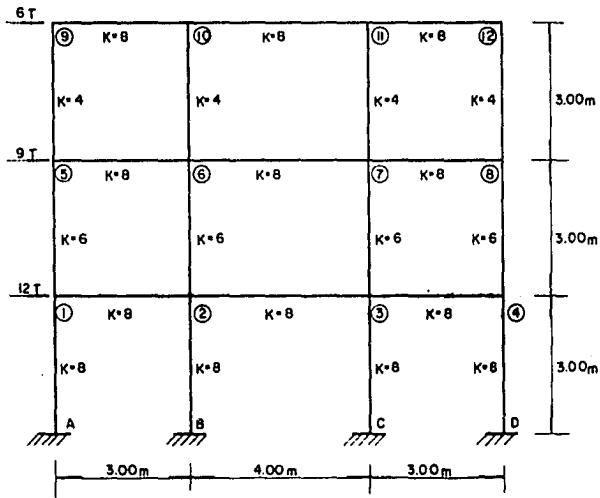
Nudo	Barra	Castillo			Wilbur			Bowman		
		$\phi$	$\Delta$	Mik	$\phi$	$\psi$	Mik	$\phi$	$\Delta$	Mik
1 = -2	1-A =-(2-B)	0.166	0	-6.640	-	-	-	-	-	-
	1-2 =-(2-1)			+11.68						
	1-3 =-(2-4)			-5.00						
3 = -4	3-1 =-(4-2)	0.168	0	-5.02	-	-	-	-	-	-
	3-4 =-(4-3)			+11.64						
	3-5 =-(4-6)			-6.69						
5 = -6	5-3 =-(6-4)	0.333	0	-8.340	-	-	-	-	-	-
	5-6 =-(6-5)			+8.340						
A = -B	A-1 =-(B-2)	0	0	-3.320	-	-	-	-	-	-



Nudo	Barra	Castillo			Wilbur			Bowman		
		$\phi$	$\Delta$	Mik	$\phi$	$\psi$	Mik	$\phi$	$\Delta$	Mik
A=B	A-1=B-2	0	0	+29.89	0	0	+29.18	—	—	—
1=2	1-A=B-2 1-2=2-1 1-3=2-4	0.499	2.658	+19.91 -29.94 +10.04	0.614	0.686	+16.90 -36.84 +8.61	—	—	—
3=4	3-1=4-2 3-4=4-3 3-5=4-6	0.255	2.257	+12.48 -15.30 +2.87	0.263	0.780	+12.12 -15.78 -3.18	—	—	—
	5-3=6-4 5-6=6-5	0.077	0.874	+4.65 -4.62	0.077	0.307	+5.04 -4.62	—	—	—

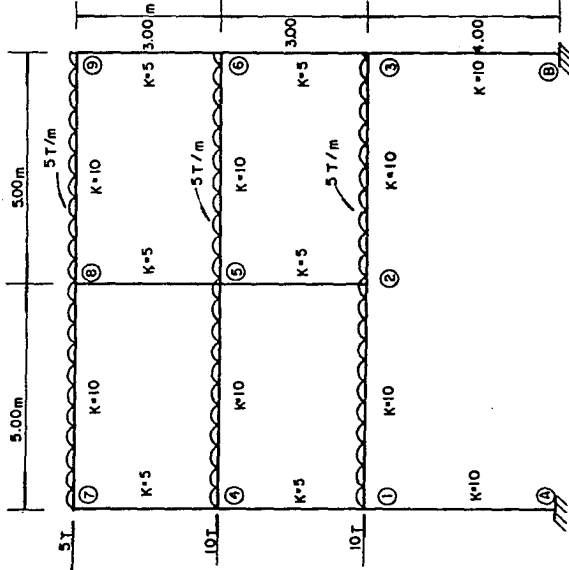


Nudo	Barra	Castillo			Wilbur			Bowman		
		$\phi$	$\Delta$	Mik	$\phi$	$\psi$	Mik	$\phi$	$\Delta$	Mik
A	A-1	0	0	+9.312	0	0	+11.728	—	—	+6.925
B	B-2	—	0	0	—	0	0	—	—	
C	C-3	0	0	+10.192	0	0	+12.668	—	—	+9.275
D	D-4	0	0	+9.056	0	0	+11.456	—	—	+7.862
1	1-A			+7.184			+9.200			+4.616
	1-2	+0.133	+0.715	-6.904	0.158	0.297	-7.920	—	—	-5.513
	1-5			-0.060			-0.512			+0.897
2	2-B			+5.120			+6.792			+13.896
	2-1	+0.025	+0.715	-4.392	0.014	0.297	-4.464	—	—	-4.510
	2-3			-4.096			-4.032			-10.719
3	3-C			+8.944			+11.120			+6.184
	3-2	+0.078	+0.715	-5.792	0.098	0.297	-6.720	—	—	-2.547
	3-4			-4.880			-5.936			-5.260
	3-7			+1.812			+1.328			+1.623
4	4-E			+6.672			+8.656			+5.242
	4-3	+0.149	+0.715	-6.016	0.175	0.297	-7.168	—	—	-6.429
	4-8			-0.668			-1.540			+1.187
5	5-1	+0.024	+0.229	+1.684	0.031	0.105	+1.520	—	—	+1.666
	5-6			-1.656			-1.992			-1.666
6	6-2			+3.508			+4.032			+2.476
	6-5	+0.021	+0.229	-1.584	0.021	0.105	-1.752	—	—	-1.363
	6-7			-1.888			-2.496			-1.113
7	7-3			+2.788			+2.320			+3.014
	7-6	+0.017	+0.229	-1.760	0.036	0.105	-2.976	—	—	-1.214
	7-8			-1.024			-2.096			-1.800
8	8-4	+0.030	+0.229	+1.236	0.059	0.105	+0.512	—	—	+2.204
	8-7			-1.232			-2.304			-2.204



Nudo	Barra	Castillo			Wilbur			Bowman		
		$\phi$	$\Delta$	Mik	$\phi$	$\psi$	Mik	$\phi$	$\Delta$	Mik
A=D	A-1 = D-4	0	0	+10,960	0	0	+10,848	-	-	+10,90
B=C	B-2 = C-3	0	0	+12,528	0	0	+12,320	-	-	+12,40
1=4	1-A = 4-D 1-2 = 4-3 1-5 = 4-8	0,252	0,937	+6,928 -10,528 +3,612	0,246	0,308	+6,912 -10,336 +3,564	-	-	+7,26 -10,83 +3,57
2=3	2-B = 3-C 2-1 = 3-4 2-6 = 3-7 2-3 = 3-2	0,154	0,937	+10,064 -8,960 +5,404 -7,392	0,154	0,308	+9,856 -8,864 +6,516 -7,392	-	-	+8,91 -8,88 +5,42 -5,45
5=8	5-1 = 8-4 5-6 = 8-7 5-9 = 8-12	0,148	0,953	+4,860 -6,208 +1,376	0,150	0,313	+4,716 -6,208 +1,416	-	-	+5,350 -6,605 +1,255
6=7	6-2 = 7-3 6-5 = 7-8 6-10 = 7-11 6-7 = 7-6	0,092	0,953	+7,380 -5,312 +2,480 -4,416	0,088	0,313	+7,308 -5,216 +2,424 -4,224	-	-	+8,14 -4,96 +1,90 -5,08
9=12	9-5 = 12-8 9-10=12-11	0,053	0,521	+2,136 -2,128	0,054	0,177	+2,184 -2,560	-	-	+2,315 -2,315
10=11	10-6 = 11-7 10-9 = 11-12 10-11=11-10	0,027 0	0,521	+3,000 -1,712 -1,296	0,052	0,177	+2,984 -2,528 -2,496	-	-	+3,52 -1,91 -1,61

Nudo	Barra	Castillo				Wilbur			Bowman	
		$\phi$	$\Delta h$	$\Delta v$	Mik	$\phi$	$\psi$	Mik	$\phi$	$\Delta$
A	A-1	0	0		+19.435	-	-	-	-	-
B	B-3	0	0		+42.175	-	-	-	-	-
1	1-A	+1.144	+2.821		-3.445	-	-	-	-	-
	1-2 1-3				+18.964 -15.430	-	-	-	-	-
2	2-1	-0.095	+2.821	-4.367	+22.916	-	-	-	-	-
	2-5 2-3				+15.430 -38.336	-	-	-	-	-
3	3-B	+0.007	+2.821		+42.035	-	-	-	-	-
	3-2 3-4				-61.216 +19.220	-	-	-	-	-
4	4-1	+0.734	+1.479		-11.330	-	-	-	-	-
	4-5 4-7				+30.944 -19.570	-	-	-	-	-
5	5-2	+0.126	+1.479	-4.367	+13.220	-	-	-	-	-
	5-4				+22.264	-	-	-	-	-
	5-6 5-8				-37.884 +2.490	-	-	-	-	-
6	6-3	-0.457	+1.479		+23.860	-	-	-	-	-
	6-5 6-9				-47.064 +23.210	-	-	-	-	-
	7-4 7-8	+1.006	+0.517		-22.290 +22.264	-	-	-	-	-
8	8-5	+0.016	+0.517	-4.367	+3.590	-	-	-	-	-
	8-7 8-9				+21.224 -24.824	-	-	-	-	-
	9-6 9-8	-0.890	+0.517		+27.540 -27.544	-	-	-	-	-



# C A P I T U L O **V**

---

## C O N C L U S I O N E S.

Comparando los resultados obtenidos por los diferentes métodos estudiados y teniendo en cuenta la mayor o menor facilidad para aplicarlos, podemos hacer las siguientes conclusiones:

a).- En cuanto a su aplicación:

1.- Los métodos de Wilbur y Bowman tienen la particularidad de haber sido concebidos exclusivamente para un sistema de cargas horizontales, lo que limita su aplicación a solo éste tipo de carga.

2.- El método de Bowman no es aplicable más que a estructuras de más de 2 claros, lo que circunscribe aún más su aplicación.

3.- El método del Ing. Castillo es aplicable a cualquier tipo de estructura sujeta a cualquier tipo de carga.

Esto nos representa una gran ventaja, pues podemos analizar a - a una estructura sujeta a cargas verticales y horizontales simultáneamente, sin necesidad de separar los sistemas de carga, analizar y superponer -- efectos.

b).- En cuanto a resultados obtenidos:

1.- Para marcos de gran regularidad, Wilbur obtiene una aproximación bastante aceptable en sus resultados, no así Bowman, que aunque logra el equilibrio del nudo, por hacerlo de una manera forzada, en ocasiones llega a cambiar de signo a los momentos. Sin embargo, para un análisis previo y debido a la sencillez de su aplicación, se puede preferir -- Bowman a Wilbur.

2.- En marcos que presenta irregularidades, (articulaciones, - columnas de distinta altura, etc.), tanto Bowman como Wilbur tienen errores muy grandes en las zonas donde se presenta la irregularidad, por lo - que no conviene aplicarlos en estos casos.

3.- El método del Ing. Castillo, por haber sido desarrollado - con base a un método "exacto", logra el equilibrio en el nudo y da resultados que se pueden aceptar como exactos, sin importar las irregularidades que se presenten, pues son factibles de tomar en cuenta en su desarrollo

#### RESUMIENDO:

Para un análisis previo, son aceptables los métodos de Wilbur y Bowman, siempre que se tengan en cuenta sus limitaciones.

Para un análisis más detallado, que puede llegar a la solución-final, el método del Ing. Castillo es el apropiado a usar para cualquier tipo de marco.



## B I B L I O G R A F I A .

- Ing. Heberto Castillo Martínez. . . . . "Un Método para el cálculo de estructuras reticulares"
- Charles Norris y John B. Wilbur. . . . . "Elementary Structural Analysis".
- Ing. Arturo Rojas de Bengardi . . . . . "Estudio Comparativo de algunos métodos de análisis - de estructuras" Tesis Profesional.
- Ing. J. M. Covarrubias. . . . . Apuntes de su clase de Estructuras Hiperestáticas.