Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Un estudio de conexiones de Galois y su aplicación a R-Módulos, prerradicales y teorías de torsión

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

CÉSAR DE JESÚS ESCOBEDO SANCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2023

1. Datos del alumno
Escobedo
Sánchez
César de Jesús
5537111508
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
512002734

2. Datos del tutor
Dr.
Alejandro
Alvarado
García

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Bertha María
Tomé
Arreola

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Iván Fernando
Vilchis
Montalvo

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Rodrigo
Domínguez
López

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Irvin
Arellano
Rosas

7. Datos del trabajo escrito
Un estudio de conexiones de Galois y su aplicación a R-Módulos, prerradicales y teorías de torsión
108 p
2023

Agradecimientos

Llegado a este punto en la carrera de matemáticas, me gustaría dedicar unas palabras de agradecimiento a todas las personas que conocí en el camino y me han ayudado a llegar hasta aquí.

Quiero comenzar agradeciendo a los miembros de mi comité sinodal. Agradezco a la Dra. Bertha María Tomé Arreola, al Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo y al M. en C. Rodrigo Domínguez López, quienes me han contribuido con sus valiosas observaciones y sugerencias para mejorar este trabajo. A ellos gracias por su interés y su gran ayuda. También agradezco especialmente a mi director de tesis el Dr. Alejandro Alvarado García, quien no sólo me ha ayudado a desempeñar esta labor hasta su término con sus excelentes asesorías y todo el apoyo que me brindó, sino por haberme enseñado todos los fascinantes temas de álgebra que pude llevar con él en la mayoría de mis cursos de álgebra moderna. Aprecio mucho todo el esmero dedicado que el Dr. puso al impartir los cursos que pude llevar con él. ¡Gracias Doctor por toda su ayuda, instrucción y paciencia para que yo llegara a este punto! Otro especial agradecimiento es para el Mat. Irvin Arellano Rosas, que junto con el Dr. Alejandro se encargó de apoyarme muchísimo en todas las sesiones y asesorías de los cursos de álgebra moderna que estuvo como ayudante. Aprecio mucho que Irvin, además de haberme ayudado con tanta paciencia y bondad a estudiar todos estos temas, me ha brindado su amistad que he tenido el gusto de conservar hasta ahora. !Gracias Irvin!

También deseo agradecer a todas las personas que fueron docentes en las materias que cursé en toda la carrera. Cada uno de ellos hizo que la materia que impartió cuando fui alumno me resultara muy interesante y me motivara a tratar de aprender lo más que yo pudiera al respecto. También quiero agradecer a muchos de quienes fueron mis compañeros a lo largo de todos esos cursos que tuve en la carrera. Con muchos de ellos pude pasar buenos momentos de compartir experiencias y enseñanzas mientras estuvimos juntos. Un agradecimiento especial merece Victor Anuar, una gran persona con quien sólo pasé unos pocos cursos, pero bastó para

volvernos amigos y seguir compartiendo esa amistad.

Por último, pero para nada menos importante, quiero agradecer a mi familia. A mis padres Carlos y Elena, a mis hermanos Carlos y Alejandra, a mis sobrinas Fernanda y Julieta, y al resto de mi familia. Sin el apoyo y cariño de ellos, yo solo no habría sido capaz de llegar hasta aquí. Gracias, familia, no sólo por ser los primeros en apoyarme a estudiar, sino también por su esfuerzo y paciencia para invaluables que me sirvieron enormemente para estar aquí ahora.

Introducción

Se puede decir que uno de los más grandes avances en el desarrollo de las matemáticas se dio a partir de las ideas de Évariste Galois acerca del estudio de la condiciones de solubilidad de ecuaciones polinomiales. Con las aportaciones de Galois se pudieron condiciones de solubilidad por radicales de ecuaciones polinomiales de cualquier grado positivo (estableciendo de paso una mayor generalidad en cuanto a las fórmulas que ya se tenían para polinomios de grados 2, 3 y 4), pero estos aportes fueron mucho más prolíficos. Las aportaciones de Galois para resolver el problema anterior son consideradas el punto de arranque de la Teoría de Grupos y el estudio de anillos y campos. Además, del estudio iniciado por Galois surge otro resultado importante para el estudio de tales estructuras algebraicas, conocido como el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois, el cual consiste en establecer las condiciones para el análisis de campos en términos de grupos y viceversa. Lo anterior se efectúa por medio de asignaciones especiales, mutuamente inversas, que nos permiten relacionar los subcampos de una extensión de cierto campo dada con los subgrupos de cierto grupo de automorfismos.[1]

Esa correspondencia especial entre estructuras algebraicas es uno de los rasgos que ha cobrado mayor importancia en el estudio de la Teoría de Galois. Según la teoría, que se satisfagan ciertas condiciones para establecer una correspondencia biunívoca entre campos y grupos proporciona una ventaja considerable cuando se trata de estudiar alguna de las estructuras en términos de la otra. Una pregunta natural que surge es si esas situaciones se pueden presentar en otras estructuras además de campos y grupos. Los resultados sobre esta cuestión no han resultado infructuosos, pues se ha logrado estudiar con éxito este tipo de correspondencias en otras ramas de las matemáticas aparte del Álgebra, tales como la Topología y la Geometría.

En este trabajo estamos interesados en el estudio de este tipo de correspondencias especiales entre estructuras algebraicas en el caso particular de la Teoría de Módulos. Sabemos que, dado un anillo R, podemos obtener colecciones de varios objetos que resultan de interés para estudiar

[1]Existe una bibliografía extensa dedicada al estudio detallado de la Teoría de Galois. En Howie (2006) y Zaldivar (1996) se hallan exposiciones detalladas para un buen estudio de la materia. Más adelante en este trabajo se pondrá mayor detalle en explicar nociones como extensiones de campos, grupos de automorfismos y esas asignaciones que los relacionan.

diversas propiedades que el anillo les induce y viceversa, como los R-módulos, R-morfismos y otras estructuras especiales como los R-prerradicales y las teorías de torsión. El objetivo de este trabajo es presentar diversos conceptos, definiciones y resultados que nos encaminen a obtener las llamadas **Conexiones de Galois** que pueden establecerse entre diversas colecciones de objetos propios de la Teoría de Módulos. Tales conexiones de Galois, inspiradas en la correspondencia biunívoca que hay entre campos y grupos dentro de la Teoría de Galois, son obtenidas cuando se tiene una serie de condiciones que cumplen los R-módulos, R-morfismos, R-prerradicales, etc. Después de esto, se presenta una lista de algunos requerimientos mínimos que permiten la existencia de determinadas conexiones de Galois entre ciertas estructuras de objetos dentro de la Teoría de Módulos.

Índice general

Capítulo 1

Nociones y definiciones preliminares

Requerimos establecer los conceptos e ideas elementales sobre los que estaremos operando a lo largo de este trabajo. La mayoría de tales conceptos suelen ser expuestos en cursos de licenciatura sobre álgebra moderna, pero notemos que algunos de ellos son de uso tan amplio que no es difícil comenzar a percibir el empleo de las ideas detrás de esos conceptos desde fases tempranas en cursos de geometría y cálculo. Comenzaré por proporcionar las definiciones de los objetos, estructuras y nociones que se tomarán en cuenta a lo largo de todo este trabajo. La dinámica que se seguirá desde ahora consiste en que, una vez que se hayan presentado los elementos básicos sobre los que desarrollaremos estos estudios, en los capítulos siguientes se presenten el resto de elementos relevantes que darán continuación a los contenidos en turno.[2]

Empezaremos con los conceptos básicos sobre anillos y módulos. En la primera definición servirá para recordar lo que son las estructuras algebraicas de grupo, anillo y campo entendidas comúnmente en la basta variedad de textos básicos, y sobre ellas se estarán reconociendo las nociones que se desprenden de dichas estructuras, como los subgrupos, subanillos y subcampos, las asignaciones llamadas morfismos entre dichas estructuras, etc.[3] Reservamos la definición de módulo aparte, puesto que requiere la consideración de las anteriores estructuras:

Definición 1. *Un grupo $(G, *, e)$ consiste en un conjunto G no vacío, una operación $* : G \to G$, y un elemento distinguido e de G, tales que:*

(i) $\forall a, b, c \in G$ se satisface $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(ii) $\forall a \in G$ se satisface $a * e = a = e * a$. El elemento e se llama neutro para la operación $*$.

[2]Cabe señalar que, junto con la presentación de todos estos elementos, se indicará, si es preciso, cuál es la notación que se usará para denotarlos.

[3]Como ya se ha mencionado, hay una gran variedad de textos donde se presentan detalladamente estas nociones que surgen de las estructuras algebraicas básicas que consideraremos. Se ofrece una presentación concisa de ellas en Zaldivar (1996).

(iii) $\forall a \in G\ \exists b \in G$ *tales que* $a * b = e = b * a$. *Se denota* $a^{-1} = b$.[4]

Un anillo es una quinteta $(R, +, 0, \cdot, 1)$ *donde* $(R, +, 0)$ *es un grupo conmutativo (es decir, que cualesquiera* $a, b \in R$ *satisfacen* $a + b = b + a$*),* $(R, \cdot, 1)$ *es un monoide (esto significa que* 1 *es el elemento neutro de la operación* $\cdot$*), y se cumplen las leyes distributivas:*

(i) $\forall a, b, c \in R$ *se satisface* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b + a \cdot c)$.

(ii) $\forall a, b, c \in R$ *se satisface* $(b + c) \cdot a = (b \cdot a + c \cdot a)$.

El anillo se llama anillo con elemento unitario si posee un elemento 1 *que es neutro para su segunda operación.*

El anillo es un anillo con división si $(R\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ *es un grupo.*

El anillo se llama campo si es un anillo con división conmutativo.

Desde ahora estaremos trabajando con anillos que tienen elemento unitario a menos que se indique lo contrario. También haremos explícito cuándo se estarán empleando anillos conmutativos.

Definición 2. *Sean* R *un anillo y* M *un grupo abeliano. Decimos que* <u>R *actúa en* M</u> *si existe un morfismo de anillos*

$\lambda : R \to \{f : M \to M \mid f - mor f. \, de \, grupos\} \doteq End(M)$

Tomando la acción $R \times M \to M$ *como* $(r, m) \mapsto r \cdot m \doteq \lambda(r)(m)$ *con* $\lambda : R \to End(M)$ *un morfismo de anillos (pues End(M) es un anillo), se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $1 \cdot m = m\ \forall m \in M$

(ii) $(r + s) \cdot m = \lambda(r + s)(m) = \lambda(r)(m) \dotplus \lambda(s)(m) = r \cdot m \dotplus s \cdot m$

(iii) $(r \cdot s) \cdot m = \lambda(rs)(m) = \lambda(r) \circ \lambda(s)(m) = \lambda(r)(\lambda(s)(m)) = r \cdot (s \cdot m)$

4) $r(m \dotplus n) = \lambda(r)(m) \dotplus \lambda(r)(n) = r \cdot m \dotplus r \cdot n$

Estas condiciones definen un módulo izquierdo denotado ${}_RM$. *De ahora en adelante, denotamos por* $R - Mod$ *a la colección de módulos izquierdos sobre un anillo* R[5]

En este trabajo no podemos ofrecer una exposición pormenorizada de todos los resultados que se desprenden de los estudios sobre anillos y módulos. A partir de ahora supondremos dados varios resultados conocidos de la Teoría de Anillos (anillos con división, campos, anillos cocientes, etc., morfismos y teoremas de estos, etc.) y de Teoría de Módulos (clases de módulos

[4]Hay una observación en esto. Dependiendo de si el anillo tiene una definición y comportamiento que le doten un carácter aditivo o multiplicativo, los elementos en la definición pueden cambiar su denotación. En este caso, pensamos al grupo en nuestra definición teniendo carácter multiplicativo.

[5]Haciendo el cambio obvio a acción por la derecha λ, tenemos un R-módulo derecho. Similarmente, $Mod - R$ denotará la colección de módulos derechos sobre el anillo R.

específicas como los cocientes, simples, semisimples, etc., propiedades y resultados de morfismos de módulos, etc.).[6]

Asimismo, estaremos manejando otro concepto muy importante: Conexión de Galois. La idea detrás de tales conexiones permea varias áreas de las matemáticas, pues básicamente exhibe la relación que existe entre dos estructuras que se hallan cada una en un campo bien delimitado de estudio aparentemente ajeno del otro. Estas conexiones fueron inspiradas por el trabajo de Evaristé Galois acerca de su investigación sobre las condiciones de solubilidad por radicales de ecuaciones polinomiales de grados 5 o superiores.[7] Aquí esbozaremos brevemente cómo es que trabaja la propuesta de Galois para establecer cuándo una ecuación polinomial de grado 5 o mayor es soluble por radicales.

Mediante la noción moderna de grupo $\langle G, \cdot, e\rangle$, la idea consiste en considerar las raíces de una ecuación polinomial y relacionarlas con un grupo especial. Dado un campo K, consideramos L/K la extensión del campo K por L y los isomorfismos $\sigma : L \to L$ tales que $\sigma\mid_K = id$, los cuales son llamados K-automorfismos de L y conforman la colección de objetos $Aut(L/K)$. Consideramos el grupo $\langle Aut(L/K), \circ, Id\rangle$. Ahora consideramos los campos intermedios de L/K y los subgrupos de $Aut(L/K)$:

$$C_{L/K} = \{campos\, intermedios\, de\, L/K\},$$
$$G_{L/K} = \{sugrupos\, de\, Aut(L/K)\}.$$

Definimos las siguientes asignaciones: $S : C_{L/K} \to G_{L/K}$ dada como $M \mapsto S(M) = Aut(L/M)$ donde $K \subseteq M \subseteq L$ (i.e. M es un campo intermedio entre K y L), $F : G_{L/K} \to C_{L/K}$ dada como $H \mapsto F(H) = L^H = \{a \in L \mid \sigma(a) = a\, \forall \sigma \in H\}$ donde L^H es conocido como el campo fijo de H (el cual se entiende así debido a que considera los automorfismos que dejan fijos a los elementos del campo L).[8]

El papel de las asignaciones S y F es muy importante para establecer cuándo una ecuación polinomial de grado n arbitrario admite soluciones por radicales, y para que esas asignaciones nos den esa información requerimos que las extensiones de campos tengan ciertas propiedades especiales. En primer lugar, se requiere que la extensión en cuestión sea finita. En segundo lugar

[6] Al respecto, resulta útil revisar Kasch (1982) y Stenström (1975) para la parte de módulos; los dos primeros capítulos de Zaldivar (1996) ofrecen un buen panorama sobre los anillos.

[7] Una buena parte de la vida y obra de Galois es conocida gracias a diversos testimonios. Aunque todavía no hay un consenso aceptado sobre algunos aspectos particulares de su vida. Se puede encontrar una buena recopilación bibliográfica de Galois en Stewart (3era ed. 2003).

[8] La notación aquí usada es la misma que se encuentra en Saldivar (1996). La notación sobre los campos intermedios y subgrupos de Aut(L/K), así como la de las asignaciones S y F, suele ser diferente al manejarse por otros autores como Howie en su (2006).

se piden un par de características adicionales. Por una parte, que la extensión L/K satisfaga que todo polinomio irreducible $f(x) \in K[x]$ tal que tenga una raíz en L, las tenga todas en L. Esto significa que L/K cumple la propiedad de *normalidad*. Por otra parte, la siguiente propiedad requiere un requisito preliminar: Un polinomio $f(x) \in K[x]$ se dice *separable* si todos sus factores irreducibles son separables sobre K, y estos irreducibles son separables si no tienen raíces múltiples en su campo de descomposición (el campo donde viven todas sus raíces). Con lo anterior, L/K es *separable* si todo $\alpha \in L$ es separable sobre K, donde la separabilidad de α significa que su polinomio mínimo irreducible asociado $irr(\alpha, K) \in K[x]$ es separable.

Una extensión L/K finita, normal y separable es lo que se conoce como extensión de Galois. En tal caso, denotamos al grupo de K-automorfismos como $Aut(L/K) = Gal(L/K)$ y lo llamamos Grupo de Galois.

Las extensiones de Galois son la clave para establecer el criterio de solubilidad de cualquier ecuación polinomial de grado n. Ahora estamos en posición de presentar el resultado central de la Teoría de Galois aplicada al problema de establecer tal criterio mediante las siguientes condiciones:[9]

Teorema Fundamental de la Teoría de Galois. Sea L/K una extensión de Galois y sea $G = Gal(K/L)$ el grupo (finito) de Galois de la extensión. Entonces:

(1) $\mid Gal(L/K) \mid = [L : K]$.

(2) Las asignaciones F y S son inversas una de la otra.

(3) Si M es un campo intermedio, $L \supseteq M \supseteq K$, entonces:

(i) $\mid S(M) \mid = \mid Gal(L/M) \mid = [L : M]$.

(ii) $[M : K] = \mid G \mid / \mid S(M) \mid = [G : S(M)] =$ índice de S(M) en G.

(4) Si M es campo intermedio, $L \supseteq M \supseteq K \Rightarrow$ M/K es normal sii $Gal(L/M) \subseteq Gal(L/K)$ es un subgrupo normal.

(5) Si para un campo intermedio M, M/K es normal, entonces el grupo de Galois
$Gal(L/K)/Gal(L/M) \cong Gal(M/K)$.

La idea central del Teorema Fundamental de la Teoría de Galois es la condición (2) sobre las asignaciones inversas F y S una de la otra. Que la extensión sea de Galois es lo que garantiza que ambas asignaciones sean inversas entre ellas, lo cual ayuda en el análisis del grupo

[9]La forma en que lo presento aquí sigue las ideas expuestas en Zaldivar (1996). He elegido esta presentación para que sea más claro el rol de las nociones de normalidad y separabilidad relacionadas con los grupos de Galois antes descritos. Otras versiones de presentación dadas en otros lugares son más breves en comparación a la aquí ofrecida.

de Galois en cuestión.

¿Cómo se relaciona esa correspondencia entre extensiones de campos y grupos de automorfismos con la solubilidad de ecuaciones polinomiales de grado n? Una ecuación polinomial f de grado n, con coeficientes en un campo K, que es soluble por radicales es tal que sus raíces inducen el grupo $\langle S_n, \circ, 1_n \rangle$ donde cada permutación actúa de cierto modo sobre las raíces del polinomio. Con el Teorema Fundamental y las asignaciones F y S, sabemos que el polinomio en cuestión es soluble por radicales si y sólo si el campo de descomposición de f es una extensión de K y de Galois si y sólo si $\langle S_n, \circ, 1_n \rangle$ es un grupo soluble. La idea de que un grupo G sea soluble es la siguiente:[10] Existe una cadena finita de subgrupos $1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G$ tal que: (1) Cada subgrupo es normal en el siguiente, es decir, $G_i \lhd G_{i+1}$ con $0 \leqslant i \leqslant n-1$, y (2) los cocientes G_{i+1}/G_i son abelianos para $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

El modo anterior constituye el criterio general para saber si una ecuación polinomial de grado n es o no soluble por radicales. Sin embargo, éste es sólo un aspecto particular que llegó a ser resuelto por la Teoría de Galois. Veremos más adelante que la esencia del Teorema Fundamental de la Teoría de Galois puede rastrearse más allá de los dominios de los grupos y los campos.

Ahora que hemos dado el esbozo de estos aspectos de la Teoría de Galois, a continuación veremos otros conceptos y definiciones más cercanos a la Teoría de Módulos.

Recordemos que de la Teoría de Categorías tenemos la noción de funtor. Un funtor es una asignación que relaciona los objetos y morfismos de un par de categorías (no necesariamente distintas entre sí). Tomando a R-Mod con estructura de categoría, tenemos la siguiente definición:

Definición 3. *Un prerradical r en R-Mod es un subfuntor del funtor identidad, esto es, a cada $M \in R-Mod$, r le asigna un submódulo $r(M)$ de tal modo que si $\varphi : M \to N$ es un R-morfismo φ la restricción $\varphi \restriction : r(M) \to r(N)$ es tal que el siguiente diagrama es conmutativo (ι es la inclusión):*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & N \\ r(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varphi\restriction"] & r(N) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

[10] Véase Zaldivar (1996), p. 167

Como ejemplos, damos un par de prerradicales de amplia consideración y que serán de particular interés en este trabajo. Son los denominados como *traza* y *rechazo*. Ambos se definen como sigue: Para una subclase $\mathscr{C}$ de R-mod,

(i) La traza $tr_{\mathscr{C}} : R - mod \to R - mod$ se define como

$tr_{\mathscr{C}}(M) = \sum\{Im(f) \mid f : U \to M,\ U \in \mathscr{C}\}$.

(ii) El rechazo $re_{\mathscr{C}} : R - mod \to R - mod$ se define como

$re_{\mathscr{C}}(M) = \bigcap\{Ker(g) \mid g : M \to U,\ U \in \mathscr{C}\}$.

Denotaremos como $R-pr$ a la clase de los prerradicales en $R-Mod$. Además, dotaremos a $R-pr$ con un orden dado de la siguiente manera: para $r, s \in R-pr$, $r \preceq s$ si $\forall M \in R-Mod$ se tiene que $r(M) \leqslant s(M)$. Adicionalmente, notemos que la relación de submódulos $\leqslant$ hace que $\preceq$ sea un orden parcial.

La siguiente importante noción a considerar es la de retícula, las cuales será importante definir lo suficientemente general para que consideremos tales estructuras sobre conjuntos, clases y conglomerados. Será importante señalar que, por una parte, aunque es aceptado que la distinción entre conjuntos, clases y conglomerados sea importante por diversas razones, nosotros no dependeremos en este trabajo de tal distinción para llevar a efecto los objetivos tenidos. Por otra parte, sí permitiremos el libre uso de operaciones conjuntistas usuales, como las de unión, intersección, potencia, etc., entre clases o conglomerados cuando sea necesario hacerlo, y esto no representará ningún problema de naturaleza distinta de la que tienen los problemas que nos conciernen en este trabajo.[11]

Introducimos las retículas mediante la siguiente definición:

Definición 4. *Una <u>retícula</u> o latíz es una cuarteta ordenada $(P, \leqslant, \wedge, \vee)$ donde $(P, \leqslant)$ es una colección parcialmente ordenada y no vacía, y para cualesquiera $a, b \in P$ existen el supremo y el ínfimo de $\{a, b\}$ respectivamente. Lo anterior significa que:*

(1) $a \wedge b \in P$, el ínfimo de a y b, cumple

(i) $a \wedge b \leqslant b$ y $a \wedge b \leqslant a$, lo que hace a $a \wedge b$ cota inferior de $\{a, b\}$.

(ii) Si hay $t \in P$ tal que $t \leqslant a$ y $t \leqslant b$, entonces $t \leqslant a \wedge b$, es decir que $a \wedge b$ es la máxima cota inferior.

(2) $a \vee b \in P$, el supremo de a y b, cumple

[11] Si bien suele ser una convención establecida que las clases son colecciones de objetos "demasiado grandes"para ser conjuntos (y de ahí que tenga más sentido hablar de cosas como el universo de todos los conjuntos), no se halla muy fácil en la literatura un tratamiento profundo de qué cosas sean los conglomerados de objetos salvo la idea básica de tratarse como colecciones de objetos "demasiado grandes"para ser clases. Nosotros asumiremos lo mismo en este trabajo sobre los conglomerados, pues para algunos resultados y usos de herramientas formales en este trabajo será conveniente considerar conglomerados de objetos.

(i) $a \leqslant a \vee b$ *y* $b \leqslant a \vee b$*, lo que hace a* $a \vee b$ *cota superior de* $\{a, b\}$*.*

(ii) Si hay $t \in P$ *tal que* $a \leqslant t$ *y* $b \leqslant t$*, entonces* $a \vee b \leqslant t$*, es decir que* $a \vee b$ *es la mínima cota superior.*

Se pueden dar diversos ejemplos de retículas empleando tipos de operaciones que permitan tener supremos e ínfimos dentro de conjuntos. Un ejemplo de una retícula es el que podemos tener dado un conjunto cualquiera A y empleando operaciones conjuntistas elementales, por lo que $(P(A), \subseteq, \cap, \cup)$ es una retícula. Además, la estructura reticular que tienen varias de esas colecciones se puede modificar, resultando en estructuras que poseen sólo algunas de las propiedades mencionadas en la Definición 4. Así, por ejemplo, si en una colección de objetos sólo se tienen ínfimos para el caso en que se consideran exclusivamente pares de objetos, entonces es una $\wedge$ - semirretícula; pasa lo propio al respecto de la existencia de sólo supremos para los pares de objetos, y aquí es una $\vee$ - semirretícula. Nótese que, en estos términos, tenemos una retícula cuando la colección de objetos cumple con ser $\wedge$ - semirretícula y $\vee$ - semirretícula.

Por otra parte, al fortalecer las condiciones del ínfimo y supremo para que se cumplan en conjuntos de tamaño $|X|$ para un conjunto X cualquiera, obtenemos una estructura de $\wedge$ - semirretícula completa y $\vee$ - semirretícula completa. En forma análoga, la retícula es completa cuando es ambas semiretículas anteriores.

Antes de dar la siguiente definición, concederemos que $\left(R-pr, \preceq, \wedge, \vee, \widehat{0}, \widehat{1}\right)$ es una retícula. A continuación damos un par de asignaciones nuevas, dada $\{r_\alpha\}_{\alpha \in X}$ una familia de prerradicales subindexada por un conjunto X:

Definición 5. *1)* $\bigvee \{r_\alpha\}_{\alpha \in X} : R-Mod \longrightarrow R-Mod$ *dada como* $M \mapsto \sum_{\alpha \in X} r_\alpha(M)$*.*

2) $\bigwedge \{r_\alpha\}_{\alpha \in X} : R-Mod \longrightarrow R-Mod$ *dada como* $M \mapsto \bigcap_{\alpha \in X} r_\alpha(M)$*.*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] & N \\
\sum r_\alpha(M) \arrow[u, "\iota"] & \sum r_\alpha(N) \arrow[u, "\iota"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] & N \\
\bigcap r_\alpha(M) \arrow[u, "\iota"] & \bigcap r_\alpha(N) \arrow[u, "\iota"]
\end{tikzcd}
$$

Por cómo se definen los prerradicales, se cumple que: $\varphi(\sum r_\alpha(M)) = \sum \varphi(r_\alpha(M)) \subseteq \sum r_\alpha(M)$, algo similar ocurre con la definición con $\bigcap r_\alpha(M)$ y el morfismo φ.

Llamamos a $\bigvee \{r_\alpha\}_{\alpha \in X}$ el supremo de $\{r_\alpha\}_{\alpha\in X}$, mientras que $\bigwedge \{r_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es el ínfimo de la misma familia de prerradicales.

Al considerar la colección $R-pr$ de prerradicales, más adelante se definirán las clases $\mathbb{T}_r = \{M \in R-Mod \mid r(M) = M\}$ y $\mathbb{F}_r = \{N \in R-Mod \mid r(N) = 0\}$. En este trabajo serán de suma importancia para nuestro estudio y estableceremos una serie de propiedades y resultados de ellas.

Trabajaremos con otro concepto importante que es el de asignación u homomorfismo entre retículas. La definición, como es de esperar, postula la compatibilidad de estas asignaciones con las operaciones de supremo e ínfimo que haya en las retículas involucradas:

Definición 6. *Sean $\langle A, \leqslant, \vee, \wedge\rangle$ y $\langle B, \preceq, \vee, \wedge\rangle$ dos retículas. Una asignación $f : A \to B$ es:*
1. ***Homomorfismo de retículas*** *si:*
$\forall a, b \in A\,(f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)\, y\, f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b))$.
2. ***Anti-homomorfismo de retículas*** *si:*
$\forall a, b \in A\,(f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b)\, y\, f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b))$.

Estaremos trabajando con homomorfismos de retículas con propiedades adicionales más específicas, los cuales servirán para obtener otros resultados que usaremos en nuestro estudio.

Nos falta un último concepto, el de teoría de torsión, para tener todos los preliminares necesarios en nuestro estudio. Para hablar de teorías de torsión, requerimos de algunas definiciones previas sobre propiedades que debe cumplir una cierta colección de objetos relevante.[12]

Definición 7. *Sea la clase $\mathscr{C} \subseteq \wp(R-Mod)$. Decimos que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo:*
1. Monomorfismos: Si dados $M \in \mathscr{C}$, $N \in R-Mod$ y un monomorfismo $f : N \to M$, entonces se tiene que $N \in \mathscr{C}$.
2. Epimorfismos: Si dados $M \in \mathscr{C}$, $L \in R-Mod$ y un epimorfismo $g : M \to L$, entonces se tiene que $L \in \mathscr{C}$.
3. Sumas directas: Si dada $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{C}$, se tiene que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in \mathscr{C}$.
4. Productos directos: Si dada $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{C}$, se tiene que $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in \mathscr{C}$.

[12] Estas nociones pueden tener más de una manera de presentarse. Las definiciones que siguen a continuación son tomadas de Dauns y Yiqiang (2006). Aunque ellos dan las definiciones en términos categorías, aquí hemos decidido darlas desde el contexto de la colección R-Mod para tener una mejor aproximación desde este trabajo.

5. Extensiones: Si dada una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *con* $N, L \in \mathscr{C}$*, se tiene que* $M \in \mathscr{C}$*.*

6. Cápsulas inyectivas: Si $M \in \mathscr{C}$*, entonces* $E(M) \in \mathscr{C}$*.*

Definición 8. *Una clase* $\mathscr{C} \in \wp(R - Mod)$ *es:*

1. Clase de pretorsión si es cerrada bajo epimorfismos y sumas directas.

2. Clase libre de pretorsión si es cerrada bajo monomorfismos y productos directos.

3. Clase de torsión si es clase de pretorsión y es cerrada bajo extensiones.

4. Clase libre de torsión si es clase libre de pretorsión y es cerrada bajo extensiones.

5. Clase de pretorsión hereditaria si es cerrada bajo epimorfismos, monomorfismos y sumas directas.

6. Clase de torsión hereditaria si es cerrada bajo epimorfismos, monomorfismos, sumas directas y extensiones.

7. Clase libre de torsión hereditaria si es cerrada bajo cápsulas inyectivas, epimorfismos, productos directos y extensiones.

Un ejemplo de algunas clases señaladas en la definición anterior lo constituyen las colecciones $\mathbb{T}_r$ y $\mathbb{F}_r$, que son clases de pretorsión y libre de pretorsión, respectivamente, para $r \in R-pr$. Es conveniente establecer la siguiente notación para hablar de algunas de las clases recién mencionadas: *T-tors* para las clases de torsión, *L-tors* para las clases libres de torsión, *T-torsh* para las clases de torsión hereditaria y *L-torsh* para las clases libres de torsión hereditaria.

Definición 9. *Una Teoría de torsión en R-Mod es una pareja ordenada* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *de clases de R-módulos que satisface lo siguiente:*[13]

1. $\mathbb{T} \cap \mathbb{F} = \{0\}$*.*

2. $\mathbb{T}$ *es cerrada bajo epimorfismos.*

3. $\mathbb{F}$ *es cerrada bajo monomorfismos.*

4. Para cada $M \in R - Mod$ *existe una sucesión exacta* $0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *con* $T \in \mathbb{T}$ *y* $L \in \mathbb{F}$*.*

Otra manera de hablar de las teorías de torsión es con la siguiente lista de propiedades:

1. $Hom(T, F) = 0\ \forall T \in \mathbb{T}\ \forall F \in \mathbb{F}$*.*

2. Si $M \in R - Mod$ *es tal que* $Hom(M, F) = 0\ \forall F \in \mathbb{F}$*, entonces* $M \in \mathbb{T}$*.*

3. Si $N \in R - Mod$ *es tal que* $Hom(T, N) = 0\ \forall T \in \mathbb{T}$*, entonces* $N \in \mathbb{F}$*.*

[13] Esta definición, con su respectiva restricción a R-Mod, se halla en Dickson (1964).

Con estas nociones y conceptos, ya contamos con los recursos necesarios para comenzar nuestro análisis de ciertas teorías de torsión relacionadas con algunos tipos especiales de prerradicales y módulos. Para esto utilizaremos una generalización de algunos de los conceptos mencionados en el estudio de la Teoría de Galois, los cuales permiten establecer, bajo determinadas condiciones, cuándo existe una relación entre tales teorías de torsión, prerradicales y módulos. En el siguiente capítulo nos enfocaremos en la introducción de los elementos para profundizar esta idea, además de ofrecer algunos resultados útiles para el estudio que haremos.

Capítulo 2

Conexiones de Galois: Algunas propiedades y resultados

Ahora veremos la noción clave para estudiar las relaciones entre ciertas teorías de torsión y ciertas clases de módulos y prerradicales. Nuestro objetivo aquí será llegar a uno de los resultados centrales que permite exponer la conexión entre teorías con clases de torsión y libres de torsión, y cómo eso se relaciona con ciertos prerradicales y módulos entre ellos.[14]

Empezaremos por recordar que una asignación entre conjuntos $f : A \to B$ es *preservadora de orden* si, dados unos órdenes $(A, \leqslant)$ y $(B, \preceq)$, se cumple que si $p, p' \in A$ son tales que $p \leqslant p'$, entonces $f(p) \preceq f(p')$ en B. En estos términos, procedemos a dar la siguiente definición:

Definición 10. *Una* ***conexión de Galois*** *entre dos conjuntos parcialmente ordenados* $(A, \leqslant)$ *y* $(B, \preceq)$ *es el par* $\langle f_+, f^+ \rangle$ *de asignaciones* $f_+ : A \to B$ *y* $f^+ : B \to A$ *tales que*

$$a \leqslant f^+f_+(a),\ \forall a \in A \ \text{y}\ b \preceq f_+f^+(b),\ \forall b \in B.$$

Equivalentemente: $a \leqslant f^+(b)$ *sii* $f_+(a) \preceq b\ \forall a \in A\ \forall b \in B$. A f_+ se le conoce como **parte residuada** y a f^+ como **parte residual**. Un aspecto importante de la Definición 10 es que se expone de modo que la función f^+ preserva el orden en que las imágenes bajo esta función se comparan con los elementos de A. Esta característica define a la conexión de Galois como isótona.[15] Dados dos COPOS A y B, denotaremos por $Gal(A, B)$ a la colección de conexiones de

[14] La mayoría de las definiciones y resultados que consideraremos sobre las conexiones de Galois obedecen a la exposición dada en Fernández (2011) y Cerda (2016).

[15] En contraste, hay las conexiones de Galois antítonas, las cuales difieren de las expuestas en la definición sólo por lo siguiente: $b \leqslant f_+f^+(b),\ \forall b \in B$. En otras palabras, las asignaciones antítonas invierten el orden en que aparecen los elementos evaluados del dominio. Es importante que consideremos esta distinción entre conexiones, pues más adelante veremos que el tomar uno u otro tipo nos permite estudiar algunas propiedades de las conexiones exclusivamente para el determinado tipo considerado, por ejemplo al hablar de sistemas de cerrados (propios de las conexiones antítonas) y de sistemas de abiertos (considerados dentro de las conexiones isótonas). En algunos de los resultados a presentar en este capítulo, consideraremos el uso de conexiones de un tipo sobre el otro, y en el respectivo resultado sólo bastará dualizar el caso contemplado a su correspondiente.

Galois antítonas entre A y B, mientras que $Gal_i(A, B)$ denotará a la colección de las respectivas conexiones isótonas.

Antes de dar los primeros resultados sobre algunas propiedades de las conexiones de Galois, requerimos lo siguiente:[16]

Definición 11. *Un operador cerradura (interior) $h : P \to P$, con $(P, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado, cumple las siguientes condiciones:*
1. h es un morfismo de orden.
2. h es inflatoria: $\forall p \in P$, $p \leqslant h(p)$ (y en el caso del operador interior: $h(p) \leqslant p$).
3. h es idempotente: $h \circ h = h$.

Definición 12. *Sea $\langle P, \leqslant \rangle$ un COPO. Un sistema de cerrados(abiertos) de P es un $Q \subseteq P$ tal que $\forall p \in P$ el conjunto $\{q \in Q | p \leqslant q\}$ ($\{q \in Q | q \leqslant p\}$) tiene elemento menor (mayor), usualmente denotado $\overline{p}$ (p°). Los elementos de Q se llaman cerrados (abiertos).*

De la Definición 11, podemos deducir inmediatamente que $f^+ f_+$ es un operador cerradura y $f_+ f^+$ es un operador interior (o cerradura en el caso de que la conexión de Galois sea antítona). Esto es que, si $h = f^+ f_+$ entonces se cumplen las tres condiciones de la Definición 11: (1) si $p, p' \in A$ son tales que $p \leqslant p'$ entonces $h(p) \preceq h(p')$ porque f^+ preserva el orden; (2) h es inflatoria por la Definición 10; (3) por un lado, $h(x) \preceq h(h(x))$ por ser h inflatoria, por otro lado $(f_+ f^+) f_+(x) \preceq f_+(x)$ por la Definición 10, y operando f^+ en ambos lados de esta relación tenemos que $h(h(x)) \preceq h(x)$, por lo que tenemos que $h \circ h = h$.[17] Con la siguiente proposición se exhibirán ciertos sistemas de cerrados (o abiertos) que están asociados siempre con los operadores cerradura (o interior):

Proposición 1. *Sea $\langle P, \leqslant \rangle$ un COPO.*
1. Si h es un operador cerradura (interior) sobre P, h(P) es un sistema de cerrados (abiertos) de P.
2. Si Q es un sistema de cerrados (abiertos) de P, entonces la función $h : P \to P$ definida como $h(p) = \overline{p}$ ($h(p) = p^\circ$) es un operador cerradura (interior) sobre P.

Demostración. Debido a la dualidad de las nociones de cerradura e interior, bastará un caso para cada inciso:

[16] Ver definiciones 2.4 y 2.5 de Fernández en su (2011).
[17] Se hacen desarrollos similares para demostrar que $f_+ f^+$ es un operador interior.

1) Sea h un operador interior sobre $\langle P, \leqslant\rangle$. Sabemos que $h(P) = \{y \in P \mid \exists x \in P(h(x) = y)\}$. Hacemos $A_p = \{h(x) \in P \mid h(x) \leqslant p\}$, y como h es operador interior, tenemos que $h(h(x)) \leqslant h(p)$, y por la idempotencia de h tenemos que $h(h(x)) \leqslant h(x) \leqslant h(p)$, además h es inflatoria, por lo que $h(p) \leqslant p$. Por tanto, tenemos que $\forall p \in P$, A_p tiene a $h(p)$ su mayor elemento, así que $h(P)$ es un sistema de abiertos.

2) Sea Q un sistema de cerrados y la función $h : P \to P$ dada como $h(p) = \overline{p}\, \forall p \in P$. Veamos que h es un operador cerradura:

(i) Sea $p \leqslant p'$. Como $h(p) = min\{q \in Q \subseteq P \mid p \leqslant q\} \leqslant min\{q \in Q \subseteq P \mid p' \leqslant q\} = h(p')$, pues $p' \in \{q \in Q \subseteq P \mid p \leqslant q\}$, entonces $h(p) \leqslant h(p')$.

(ii) Como $\forall p \in P$, $p \leqslant \overline{p}$, se tiene que $p \leqslant h(p) = \overline{p}$.

(iii) $h(h(p)) = h(\overline{P}) = h(min\{q \in Q \subseteq P \mid p \leqslant q\}) = min\{q \in Q \subseteq P \mid p \leqslant q\} = h(P)$.

Q.E.D.

Otra propiedad que podemos deducir de las definiciones de sistemas de cerrados (abiertos) y de los operadores cerradura (interior) para el caso del operador f^+f_+ (y el f_+f^+) es que $im(f_+)$ y $im(f^+)$ son isomorfos (anti-isomorfos). La justificación de esto es que podemos establecer una nueva asignación $h : im(f_+) \to im(f^+)$ tal que $h(\overline{a}) = a^\circ$, de modo que cada sistema de cerrados del conjunto A corresponda con un sistema de cerrados (o abiertos, en el caso de la conexión isótona) del conjunto B.

Con el siguiente resultado veremos que las conexiones de Galois son muy bien comportadas cuando transitamos de la parte residuada a residual y viceversa. Esto quiere decir que no hay riesgo de que se vaya a escapar algún elemento particular de los COPOS involucrados en las conexiones de Galois dadas:

Proposición 2. *Si $\langle f_+, f^+\rangle$ es una conexión de Galois entre los COPOS $(A, \leqslant)$ y $(B, \preceq)$, entonces:*

1) $f_+f^+f_+ = f_+$

2) $f^+f_+f^+ = f^+$

Demostración. Haciendo el desarrollo de una igualdad, la otra se desarrolla de manera análoga:

1) De la definición de conexión de Galois, tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que $a \leqslant f^+f_+(a)$, y como f_+ es un morfismo de orden, $f_+(a) \leqslant f_+f^+f_+(a)$. Pero como $f_+(a) \in B$, se cumple que $(f_+f^+)f_+(a) \leqslant f_+(a)$. Luego $f_+f^+f_+(a) = f_+(a)$.

Q.E.D.

Algo más que podemos deducir del hecho de que $im(f_+)$ y $im(f^+)$ son isomorfos, y de que f^+f_+ (y f_+f^+) es operador cerradura (interior), es lo siguiente. Como los puntos fijos de f^+f_+ son justo los miembros de $im(f^+)$ debido a la Proposición 2, entonces se tiene que $im(f^+f_+) = im(f^+)$. En modo análogo, concluimos que $im(f_+f^+) = im(f_+)$. De modo que tenemos un isomorfismo entre $im(f^+f_+)$ y $im(f_+f^+)$. Otra propiedad importante de las conexiones de Galois es que tienen la capacidad de construirse cuando se tiene que determinadas asignaciones cumplen ciertas propiedades. Por ejemplo, si se tienen A y B un par de grandes retículas completas, y $f : A \to B$ es una asignación tal que $f(\bigvee S) = \bigwedge f(S)$, $\forall S \subseteq A$, entonces al definir una nueva asignación $g : B \to A$ como $g(b) = \bigvee\{a \in A \mid f(a) \geqslant b\}$, g se vuelve la parte residual de una conexión de Galois $\langle f = f_+, f^+ = g\rangle$ entre A y B donde f es la parte residuada.[18] El mismo proceso se puede desempeñar al tener primero la asignación $g : B \to A$ y definir la asignación f como antes.

Requerimos que las conexiones de Galois nos permitan un manejo de los COPOS involucrados en términos de retículas. Para esto, recordando la Definición 6 del capítulo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3. *Sean A y B dos grandes retículas completas. Entonces $\langle f_+, f^+\rangle \in Gal(A, B)$ si y sólo si $f_+(\bigvee S) = \bigwedge_{s\in S} f_+(s)$ para todo $S \subseteq A$ y $f^+(\bigvee T) = \bigwedge_{t\in T} f^+(t)$ para todo $T \subseteq B$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Al tomar una conexión $\langle f_+, f^+\rangle$ y $S \subseteq A$, para un $s \in S$ se cumple que $s \leqslant \bigvee S$ implica que $f_+(\bigvee S) \leqslant f_+(s)$ por ser f_+ antítona. Luego se cumple que $f_+(\bigvee S) \leqslant \bigwedge f_+(s)$. Ahora, como toda $s' \in S$ cumple que $\bigwedge_{s\in S} f_+(s) \leqslant f_+(s')$, tenemos que $\bigwedge_{s\in S} f_+(s) \leqslant f_+(\bigvee S)$ por ser A una retícula completa. Luego $f_+(\bigvee S) = \bigwedge_{s\in S} f_+(s)$. Un razonamiento similar se da para f^+.

($\Leftarrow$) Sabemos, por lo anterior dicho que cumplen las conexiones de Galois, que existe $g : B \to A$ tal que $\langle f_+, g\rangle \in Gal(A, B)$. Terminamos al mostrar que $g = f^+$:

Para un $b \in B$, sea $A' = \{a \in A \mid a \leqslant f^+(b)\}$. Como se cumple que:

$a \leqslant \bigvee A' = f_+(b)$ si y sólo si $b \leqslant f_+f^+(b) = f_+(\bigvee A') \leqslant f_+(a)$

entonces $\bigvee A' = f_+(b)$. Sólo definimos $g : B \to A$ como $g(b) = \bigvee\{a \in A \mid f(a) \geqslant b\}$ para que se tenga que $g = f^+$.

[18] Verificar esto es una labor de mera aplicación de las definiciones de conexiones de Galois.

Q.E.D.

Lo anterior resulta ventajoso en términos del estudio de las retículas involucradas. No obstante, si denotamos como 0_A, 1_A a "el más pequeño" y "el más grande" de los elementos de cualquier retícula A (involucrado el orden), entonces tenemos que $f_+(0_A) = 1_B$ y $f^+(0_B) = 1_A$ sin el supuesto de que la retícula sea completa. La razón de esto es que, si tomamos $f \in Gal(A, B)$, entonces por lo deducido de la Proposición 1 sabemos que $im(f_+)$ y $im(f^+)$ son anti-isomorfos, y como f_+f^+ y f^+f_+ son los operadores interior que satisfacen la Definición 11, entonces tenemos el resultado. Además, para el caso en que las retículas de la conexión de Galois sean completas, se cumple que $f_+(1_A) = \bigwedge f_+(A)$ y $f^+(1_B) = \bigwedge f^+(B)$. Lo anterior para el caso en que $f = \langle f_+, f^+\rangle \in Gal(A, B)$.[19]

Para $f \in Gal(A, B)$, vamos a establecer que f-$cerr = im(f^+)$ y $cerr$-$f = im(f_+)$. Con esto, notemos que $f - cerr \subseteq A$ y $cerr - f \subseteq B$ son ambos sistemas de cerrados, donde $f^+f_+ : A \to A$ y $f_+f^+ : B \to B$ son los operadores cerradura correspondientes que relacionan esos sistemas.

Ahora, requerimos de la siguiente definición para establecer un cierto orden entre las conexiones de Galois que podamos dar entre un par de COPOS:

Definición 13. *Para $Gal(A, B)$ se define un orden "$\leqslant$", conocido como orden puntual, dado como sigue:*
Para cualesquiera $f, g \in Gal(A, B)$, $f \leqslant g$ si y sólo si $f_+(a) \leqslant g_+(a)$ y $f^+(b) \leqslant g^+(b)$ para todos $a \in A$, $b \in B$.[20]

Como A y B tienen órdenes parciales, el orden de la anterior definición resulta ser un orden parcial. La definición 13 nos permite pensar en un buen candidato que sería el ínfimo de un par de conexiones de Galois. Para el par de retículas A, B, el ínfimo de $f, g \in Gal(A, B)$ es dado como $f \wedge g = \langle f_+ \wedge g_+, f^+ \wedge g^+\rangle$, donde $(f_+ \wedge g_+)(a) = f_+(a) \wedge g_+(a)$ y $(f^+ \wedge g^+)(b) = f^+(b) \wedge g^+(b)$. Con esto, podemos deducir que, dados $f, g \in Gal(A, B)$, $f \wedge g \in Gal(A, B)$.

Con lo anterior, nos damos cuenta de lo siguiente. Para cada $\{f_i\}_{i\in X} \subseteq Gal(A, B)$, el ínfimo de esa familia de conexiones se define de manera similar al caso de tener dos de ellas: $\bigwedge\limits_{i\in X} f_i = \langle (\bigwedge\limits_{i\in X} f_{i+}), (\bigwedge\limits_{i\in X} f_i^+)\rangle$.

Con el orden puntual definido y la noción de ínfimo para familias de conexiones de Galois de tamaño arbitrario, tenemos que $\langle Gal(A, B), \leqslant, \wedge\rangle$ es una $\wedge$-semirretícula completa, por lo

[19]Para el caso en que $f \in Gal_i(A, B)$, se tiene que $f^+(1_B) = \bigvee f^+(B)$. Recordemos que la conexión isótona preserva el orden de las retículas.

[20]En $Gal_i(A, B)$ este orden puntual cambia la condición necesaria por: $g_+(a) \leqslant f_+(a)$ de las partes residuadas.

que se vuelve una retícula completa. La justificación de esto último se debe a que, para cada familia $\{a_i\}_{i\in X}$ de elementos de A, podemos construirle su supremo tomando el ínfimo de la familia $\{b \in A \,|\, a_i \leqslant b, \, \forall i \in X\}$.

Proposición 4. *Sean A y B COPOS y $\leqslant$ como en la Definición 13.*

1. Si A y B son grandes retículas completas, entonces $\langle Gal(A,B), \leqslant\rangle$ es una gran retícula completa.

2.Si A y B son grandes retículas distributivas, entonces $\langle Gal(A,B), \leqslant\rangle$ es una gran retícula distributiva.

3. Si A y B son grandes retículas booleanas, entonces $\langle Gal(A,B), \leqslant\rangle$ es una gran retícula booleana.

4. Si A y B son grandes marcos, entonces $\langle Gal(A,B), \leqslant\rangle$ es un gran marco.

Demostración.

1) Sean A y B grandes retículas completas. Entonces si tomamos la familia $\{f_i\}_{i\in X} \subseteq Gal(A,B)$, se tiene que $\bigwedge\limits_{i\in X} f_i = \langle (\bigwedge\limits_{i\in X} f_i)_+, (\bigwedge\limits_{i\in X} f_i)^+\rangle$ tal que $\bigwedge\limits_{i\in X} f_i(a)\ \forall a \in A$ es el ínfimo de $\{f_i\}_{i\in X}$ aplicadas en ese elemento. Luego $\langle Gal(A,B), \leqslant\rangle$ es una $\wedge$-semirretícula completa, lo que la hace una gran retícula completa por el método de construcción de supremos visto antes de esta proposición.

2) Sean A y B grandes retículas distributivas y $f, g, h \in Gal(A,B)$. Calculando para un $a \in A$: $(f \wedge (g \vee h))(a) = (f_+ \wedge (g_+ \vee h_+), (f^+ \wedge (g^+ \vee h^+))(a) = ((f_+ \wedge g_+) \vee (f_+ \wedge h_+)(a), (f^+ \wedge g^+) \vee (f^+ \wedge h^+)(a)) = (f \wedge g) \vee (f \wedge h)(a)$ donde la segunda igualdad sale por la distributividad de B. El desarrollo al aplicar la conexión a $b \in B$ y usando que A es distributiva nos arroja en modo análogo el resultado. Por lo tanto, $\langle Gal(A,B), \leqslant\rangle$ es una gran retícula distributiva.

3) Sean A y B grandes retículas booleanas y $f \in Gal(A,B)$. Como B es booleana, $\forall a \in A$ tal que $f(a) \in B$, $\exists g \in Gal(A,B)$, $\exists b \in B$ tales que $(f \vee g)(b) = 1(a) = a$ y $(f \wedge g)(b) = 0(a) = 0$. El desarrollo es análogo al tomar $b \in B$ y usando que A es booleana.

4) Sean A y B grandes marcos, $f \in Gal(A,B)$ y $\{g_i\}_{i\in X} \subseteq Gal(A,B)$. Usando que B es marco, tenemos que $\bigvee\limits_{i\in X}\{f \wedge g_i\}(a) = f \wedge (\bigvee\limits_{i\in X} g_i)(a)$. Análogamente con $b \in B$ y usando que A es marco. Por tanto, $\langle Gal(A,B), \leqslant\rangle$ es gran marco.

Q.E.D.

Notemos que hay una estrecha relación entre las conexiones de Galois, los operadores cerradura (interior) y los sistemas de cerrados (abiertos). En el siguiente resultado se expone la idea de cómo obtener conexiones de Galois al contar con ciertos sistemas de cerrados (abiertos) y anti-isomorfismos (isomorfismos):

Proposición 5. *Sean A y B COPOS, y $\Phi \subseteq A$ y $\Phi' \subseteq B$ sistemas de cerrados. Si Φ y Φ' son anti-isomorfos como grandes copos, entonces para cada par de anti-isomorfismos $g : \Phi \to \Phi'$ y $h : \Phi' \to \Phi$ existe una única $f \in Gal(A, B)$ tal que $f - cerr = \Phi$, $cerr - f = \Phi'$, $f_+|_\Phi = g$ y $f^+|_{\Phi'} = h$.*

Demostración. Tomando las hipótesis y lo que sabemos de los sistemas de cerrados, sabemos que para cada uno de esos sistemas existe un operador cerradura. Sean $\varphi : A \to A$ y $\varphi' : B \to B$ dos operadores cerradura tales que $\varphi(A) = \Phi$ y $\varphi'(B) = \Phi'$. Tomamos $g : \Phi \to \Phi'$ y $h : \Phi' \to \Phi$ los anti-isomorfismos.
Definiendo las asignaciones $f_+ : A \to B$ y $f^+ : B \to A$ como $f_+(a) = g(\varphi(a))$ y $f^+(b) = h(\varphi'(b))$ tenemos lo buscado:
f_+ y f^+ ya invierten el orden por cómo se definen. Resta mostrar que sus composiciones son inflatorias. Como para cada $a \in A$ se cumple que $a \leqslant \varphi(a)$, entonces $f_+(a) \geqslant f_+(\varphi(a))$ y $\varphi(a) = f^+(f_+(a)) \leqslant f^+(f_+(\varphi(a)))$ porque $f^+(f_+(a)) = h\varphi'(g(\varphi(a))) = hg(\varphi(a)) = \varphi(a)$, donde la tercera igualdad se obtiene porque φ' en Φ' es la igualdad. Así que f^+f_+ es creciente (análogamente para f_+f^+).
Tenemos que $f = \langle f_+, f^+\rangle \in Gal(A, B)$ con $f - cerr = \Phi$ y $cerr - f = \Phi'$. Además $f_+ \restriction_\Phi = g$ y $f^+ \restriction_{\Phi'} = h$.
(*Unicidad*) Si hay $k \in Gal(A, B)$ tal que $k - cerr = \Phi$ y $cerr - k = \Phi'$, $k_+ \restriction_\Phi = g$ y $k^+ \restriction_{\Phi'} = h$, para cada $a \in A$ se cumple que $a \leqslant k^+k_+(a) \leqslant k^+k_+(\varphi(a)) = \varphi(a)$. Así $k^+k_+(a) = \varphi(a)$ y $k_+(a) = k_+k^+k_+(a) = k_+(\varphi(a))$, por lo que $k_+(a) = k_+(\varphi(a)) = g(\varphi(a)) = f_+(a)$ (similarmente $k^+(b) = f^+(b)$). Por tanto $k = f$.
Q.E.D.

Hasta aquí, recordemos que nuestro objetivo es preparar los resultados adecuados para poder estudiar las conexiones de Galois entre ciertos conglomerados de objetos. Para esto, requerimos exponer las condiciones que ciertos conglomerados de objetos cumplen para tener acceso al estudio de determinadas conexiones de Galois que nos interesarán después. En este punto, se requiere de una nueva noción que presentaremos ahora:

Definición 14. *Sean A y B dos clases. Una **polaridad** es una conexión de Galois entre los* *conglomerados* $\langle \wp(A), \subseteq \rangle$ *y* $\langle \wp(B), \subseteq \rangle$.[21]

Debido a cómo hemos definido las conexiones de Galois aquí, estamos listos para exponer un resultado muy importante para llevar a cabo nuestro estudio. La generalidad de este resultado tiene como ventaja adicional que nos permite explorar minuciosamente el conglomerado $\wp(A \times B)$ para las clases A y B:

Teorema 6. *(Teorema de polaridades) Sean* A *y* B *conglomerados parcialmente ordenados, entonces existe un isomorfismo de orden entre los conglomerados* $\langle \wp(A \times B), \subseteq \rangle$ *y* $\langle Gal(\wp(A), \wp(B)), \subseteq \rangle$.

Demostración. La idea de fondo es definir las siguientes asignaciones:
$\lambda : Gal(\wp(A), \wp(B)) \to \wp(A \times B)$ donde $\lambda(f) = \{(a,b) \in A \times B \mid b \in f_+(\{a\})\}$[22]
$\mu : \wp(A \times B) \to Gal(\wp(A), \wp(B))$ dada como $\mu(R) = \langle f_R, f^R \rangle$ donde:
$f_R(U) = \{b \in B \mid (a,b) \in R \forall a \in U\}$ para toda $U \in \wp(A)$
$f^R(V) = \{a \in A \mid (a,b) \in R \forall b \in V\}$ para toda $V \in \wp(B)$
Se verifica por las definiciones de f_+ y f^+ que $\langle f_+, f^+ \rangle \in Gal(\wp(A), \wp(B))$. Veamos el resto de propiedades:
(λ preserva orden) Sean $f, g \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ tales que $f \leqslant g$. Entonces $f_+(U) \subseteq g_+(U)$, y para todo $(a,b) \in \lambda(f)$ se cumple que $b \in f_+(\{a\}) \subseteq g_+(\{a\})$ y así $(a,b) \in \lambda(g)$. Luego $\lambda(f) \subseteq \lambda(g)$.
(μ preserva orden) Para $R, S \in \wp(A \times B)$ tales que $R \subseteq S$ y $U \in \wp(A)$, si $b \in f_R(U)$ entonces $(a,b) \in R \subseteq S$, por tanto $b \in f_S(U)$. Entonces $f_R \leqslant f_S$ (análogo: $f^R \leqslant f^S$). Luego $\mu(R) \leqslant \mu(S)$.
(μ y λ son inversas entre sí) Para $f \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ se cumple que $\mu(\lambda(f)) = \mu(\{(a,b) \in A \times B \mid b \in f_+(\{a\})\})$. Para $R = \{(a,b) \in A \times B \mid b \in f_+(\{a\})\}$ y $U \in \wp(A)$ se tiene que $f_R(U) = \{b \in B \mid (a,b) \in R\, \forall a \in U\} = \{b \in B \mid b \in f_+(\{a\}), \forall a \in U\} = f_+(U)$ (similarmente: $f^R(V) = f^+(V)$ para $V \in \wp(B)$). Por tanto $\mu(\lambda(f)) = f$. Desarrollos similares arrojan que $\lambda(\mu(R)) = \lambda(\langle f_R, f^R \rangle) = R$.
Q.E.D.

La idea central detrás de la demostración del Teorema de polaridades está en definir de manera

[21] Véase la definición 1.26 en *Ibíd.* Cabe notar que para el caso de considerar $Gal_i(A,B)$, debemos considerar el conglomerado $\langle \wp(B)^{op}, \subseteq \rangle$. Lo anterior para considerar una conexión de Galois entre las potencias de dos clases cualesquiera ordenadas por la contención, pues esa es la forma más general de extraer una conexión de ese estilo. Véase la def. 4.1 de Fernández (2011), p. 29.

[22] Podríamos igualmente haber definido esto con $a \in f^+(\{b\})$.

adecuada un par de asignaciones convenientes para establecer el isomorfismo buscado. Nosotros presentamos las asignaciones aquí del siguiente modo. Se define $\lambda : Gal(A, B) \to \wp(A \times B)$ como $\lambda(f) = \{(a, b) \in A \times B \,|\, b \in f_+(\{a\})\}$, lo cual está igualmente bien definido si hacemos $\lambda(f) = \{(a, b) \in A \times B \,|\, a \in f^+(\{b\})\}$. Por otra parte, sea $\mu(R) : \wp(A \times B) \to Gal(A, B)$ dada como $\mu(R) = (f)_R = \langle f_R, f^R\rangle$ donde $f_R(U) = \{b \in B \,|\, (a, b) \in R \,\forall a \in U\}$ para cualquier $U \in \wp(A)$, y $f^R(V) = \{a \in A \,|\, (a, b) \in R \,\forall b \in V\}$ para cualquier $V \in \wp(B)$. La definición de μ en cualquier relación R hace que las asignaciones f_R y f^R sean antítonas y que sus respectivas composiciones entre ellas sean operadores cerradura. Después, es rutina el verificar que las asignaciones λ y μ son inversas entre ellas, quedando demostrado el Teorema.[23] Además, el Teorema de polaridades nos permite tener un aspecto adicional sobre familias de relaciones de $A \times B$. Si $\{R_i\}_{i\in X} \subseteq \wp(A \times B)$, a la relación $\bigcap_{i\in X} R_i = R$ le toca la polaridad $(f)_R = \bigwedge_{i\in X}(f)_{R_i}$ que es el ínfimo de las polaridades $\{(f)_{R_i}\}_{i\in X} \subseteq Gal(\wp(A), \wp(B))$.

En este punto, debe ser claro que las conexiones de Galois particulares están fuertemente ligadas a los órdenes que los conjuntos (clases o conglomerados) poseen. Esto es más notorio al fijarnos que, en el Teorema de polaridades, se dijo que las imágenes de las partes residuadas y residuales se ven como los elementos que se comportan como cierta relación R indica. Las propiedades de los operadores cerradura y la composición entre partes residuadas y residuales nos informan cómo las conexiones de Galois respetan el orden de los objetos de los conjuntos. La siguiente proposición hará uso del siguiente modo conveniente en que se pueden ver a todos los miembros de $Gal(A, B)$ como generados por un cierto tipo de conexión. Para cada $a \in A$ y $b \in B$ se define $p_{a,b} : A \to B$ como

$$p_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x = 0 \\ b \; si \; 0 < x \leqslant a \\ 0 \; si \; x \nleqslant a \end{cases} \tag{1}$$

Proposición 7. *Sean A y B grandes retículas. Entonces para cada $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \in Gal(A, B)$. Además, para toda $f \in Gal(A, B)$, existen $\{a_i\}_{i\in X} \subseteq A$ y $\{a_j\}_{j\in Y} \subseteq B$ tales que f es el supremo de $\{\langle p_{a_i,b_j}, p_{b_j,a_i}\rangle\}_{i\in X\; j\in Y} \subseteq Gal(A, B)$.*

Demostración. El objetivo es mostrar que

[23] Como parte de los resultados de este teorema, para $R \in \wp(A \times B)$ se denota $\mu(R)$ como $(f)_R = \langle f_R, f^R\rangle$.

$f = \bigvee_{x \in A} \{\langle p_{b,a}, p_{a,b} \rangle \mid a = f^+ f_+(x), b = f_+(x)\}$.

Para $x \in A$ tal que $a = f^+ f_+(x), b = f_+(x)$, $p_{a,b}(x) = f_+(x) = b$ porque $x \leqslant f^+ f_+(x) = a$. Pero para todo $y \in A$ tal que $y \neq x, 0$ se cumple que $p_{a,b}(y) \leqslant p_{a,b}(x)$ porque si $y \nleqslant x \leqslant f^+ f_+(x) = a$ entonces $p_{a,b}(y) = 0$, y si $y < x$ con $f^+ f_+(x) = a$ entonces $p_{a,b}(y) = b = p_{a,b}(x)$. Si $y \leqslant x$ entonces $p_{a,b}(x) \leqslant p_{a',b'}(y)$, donde $a' = f^+ f_+(y)$ y $b' = f_+(y)$ porque $b \leqslant f_+(y) = b'$. Así, $p_{a,b}(y)$ toma su valor máximo en $a = f^+ f_+(x), b = f_+(x)$.

Para $y \in A$ se tiene que $\bigvee_{x \in A} \{p_{a,b}(y) \mid a = f^+ f_+(x), b = f_+(x)\} = f_+(y)$.

Algo similar puede decirse para $p_{b,a}$: Si $z \in B$ entonces $p_{b,a}(z)$ toma su valor máximo en $b = f_+ f^+(z)$ y $f^+(z) = a$. Así se cumple que $\bigvee_{x \in A} \{p_{b,a}(z) \mid a = f^+ f_+(x), b = f_+(x)\} = f^+(z)$.

Por lo tanto se tiene que

$f = \bigvee_{x \in A} \{\langle p_{b,a}, p_{a,b} \rangle \mid a = f^+ f_+(x), b = f_+(x)\}$.

Q.E.D.

Con esta última proposición y el Teorema de polaridades, hemos alcanzado los puntos importantes en el inicio del estudio de las relaciones entre colecciones de *R-Mod*, prerradicales entre los miembros de *R-Mod* y clases de (pre)torsión y libres de (pre)torsión que forman teorías de torsión. Recordemos que nuestro estudio gira alrededor de la cuestión de cómo entender las colecciones de *R-Mod* cuando el anillo que subyace a los módulos es de determinada forma, o cuando se tiene más información de los *R-prerradicales* entre dichos módulos. Y ahora contamos con una manera precisa en términos de asignaciones especiales de estudiar lo que ocurre en estas colecciones de R-módulos y R-prerradicales que exponen las relaciones especiales entre ellos. Veremos después que algunos de los conceptos y resultados que tenemos ahora (como la noción de polaridad) se pueden generalizar para obtener información precisa en una etapa más global que incluye el estudio de lo que consideraríamos como $\wp(R - Mod)$ y $\wp(R - pr)$, pero antes convendrá que nos fijemos en cómo trabajar con los prerradicales más profundamente. En esto último nos concentraremos a continuación.

Capítulo 3

Sobre Prerradicales y R-módulos

Anteriormente dimos en los preliminares las definiciones de R-módulo y R-prerradical para algún anillo R. Ahora, para poder comenzar nuestro estudio sobre conexiones de Galois entre esos dos tipos de objetos, requerimos de más teoría y resultados que nos serán útiles.[24]

Nos enfocaremos en examinar algunas propiedades y resultados adicionales sobre prerradicales que debemos tener en cuenta. Empezaremos por recordar que, para un $\sigma \in R-pr$, $\sigma(R)$ siempre es un ideal bilateral del anillo R (deberemos recordarlo para algunos aspectos que surgirán después). Además, tenemos la siguiente asignación dado un prerradical cualquiera:

Definición 15. *Sea $\sigma \in R-pr$. El* ***coprerradical*** *de σ es la asignación $\sigma^* : R-Mod \to R-Mod$ definida como $\sigma^*(M) = M/\sigma(M)$, y a cada morfismo $f : M \to N$ le asigna el morfismo $\sigma^*(f) : M/\sigma(M) \to N/\sigma(N)$. Así, σ induce el funtor σ^*.*

Ahora veremos que, en general, los prerradicales se comportan bien respecto a las sumas directas de R-módulos. Pero no tanto respecto a los productos directos. No obstante, esta ventaja puede llevarse al caso más general en donde se pueden considerar otras categorías además de R-Mod:

Proposición 8. *Sean $\sigma \in R-pr$ y $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, entonces se tiene que:*
1. $\sigma(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) = \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.
2. $\sigma(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leqslant \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

[24]Muchos resultados concernientes al estudio de prerradicales en Teoría de Módulos que estaremos considerando aquí se hallan expuestos en Kash (1982) y, principalmente, Stenström (1975). Para la exposición de los resultados pertinentes a este trabajo, me baso en la presentación que se hace en Cerda (2016) (salvo algunas excepciones donde, por ejemplo, cambio la notación a una más común a la usada en los cursos superiores de álgebra moderna).

Demostración. Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R-Mod$ y $\sigma \in R-pr$. Veamos que se cumplen las propiedades dichas:

(1) Para cada $\beta \in \Lambda$ tenemos las asignaciones canónicas de inclusión y proyección como sigue: $\iota_\beta : M_\beta \to \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ y $\rho_\beta : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \to M_\beta$. De modo que se cumple lo siguiente

(I) $\iota_\beta(\sigma(M_\beta)) \leqslant \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$

(II) $\rho_\beta(\sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)) \leqslant \sigma(M_\beta)$

(Caso $\leqslant$) Tomamos $\varphi \in \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$. Por (II), todo β cumple que $\rho_\beta(\varphi) \in \sigma(M_\beta)$. Así que $\varphi \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$ y se deduce que $\sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leqslant \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

(Caso $\geqslant$) Tomemos $\varphi \in \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leqslant \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$. Como $sop(\varphi) < \infty$ se escribe $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \iota_{\alpha_k}(\rho_{\alpha_k}(\varphi))$ donde $sop(\varphi) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Tenemos que $\varphi_\beta = \rho_\beta(\varphi) \in \sigma(M_\beta)$, y por (I) se tiene que $\iota_{\beta_k}(\varphi_{\beta_k}) \in \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$. Entonces $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \iota_{\alpha_k}(\varphi\alpha_k)$. Por lo que $\sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \geqslant \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

(2) Consideramos las proyecciones canónicas $\rho_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \to M_\beta$. Tomamos $\varphi \in \sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$, entonces se cumple que $\rho_\beta(\sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)) \leqslant \sigma(M_\beta)$, y se deduce $\varphi_\beta = \rho_\beta(\varphi) \in \sigma(M_\beta)$, luego $\varphi \in \prod_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$. Por tanto $\sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)) \leqslant \prod_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

Q.E.D.

Además, por la manera en que hemos definido a los prerradicales en la Definición 3 de este trabajo, tenemos el siguiente orden parcial $\preceq$ para la colección R-pr: $\sigma \preceq \tau$ si y sólo si para todo $M \in R-Mod$, $\sigma(M) \leqslant \tau(M)$. La Definición 4 nos ha dado la forma en que podemos hablar de supremos e ínfimos, pues un rápido análisis de aquella definición nos indica que $(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$ y $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$. Las Definiciones 4 y 13 nos dan que $\langle R-pr, \preceq, \wedge, \vee\rangle$ es una $\wedge$-gran semirretícula completa, y por la forma de construir el supremo que se mostró en el párrafo posterior a la Definición 13 de este trabajo, tenemos que $\langle R-pr, \preceq, \wedge, \vee\rangle$ es una gran retícula completa.[25] A continuación, veremos el modo usual en que se suele hablar de los prerradicales que están en medio de algún par específico de estos. Con la idea de orden parcial que señalamos para R-pr, de hecho podemos hablar de la noción de intervalo de prerradicales del siguiente modo: para cada $\sigma, \tau \in R-pr$ se tiene el intervalo $[\sigma, \tau] = \{\eta \in R-pr \mid \sigma \preceq \eta \preceq \tau\}$.

Ahora introduciremos un par especial de prerradicales que son muy importantes debido a su papel en varios resultados. Además, tales prerradicales constituyen una parte esencial en el

[25] Ésta es de hecho la proposición 1.41 en Cerda (2016), la cual no está demostrada ahí, pero nótese que lo que hemos dicho en las últimas líneas antes de esta afirmación constituye la idea central de la demostración.

entendimiento de R-pr cuando se estudia más a fondo como estructura reticular. Todo esto se empezará a ver con más detalle empezando con la siguiente definición:

Definición 16. *Sean $M \in R-Mod$ y $N \leqslant M$. Para cada $K \in R-Mod$ se tienen los siguientes prerradicales:*
1. $\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N) \,|\, f : M \to K\}$.
2. $\omega_N^M(K) = \bigcap\{g^{-1}(N) \,|\, g : K \to M\}$.

Hacer notar que las asignaciones de esta definición son prerradicales no es muy complicado. Aquí haremos el caso de α, siendo el caso de ω muy parecido:
(i) Si $K \in R - Mod$, es inmediato notar que $\alpha_N^M(K) \leqslant K$.
(ii) Veamos que si $f : K \to L$ es un morfismo, entonces $f(\alpha_N^M(K)) \subseteq \alpha_N^M(L)$: Sabemos que $f(\alpha_N^M(K)) = f(\sum\{g(N) \,|\, g : M \to K\}) = \sum\{fg(N) \,|\, g : M \to K\}$, pero $\alpha_N^M(L) = \sum\{h(N) \,|\, h : M \to L\}$ y se cumple que $fg : M \to L$ es un morfismo $\forall g \in Hom_R(M, K)$. Luego $f(\alpha_N^M(K)) \subseteq \alpha_N^M(L)$.

Existe una gran variedad de ejemplos de uso de estos prerradicales, pues dependen fuertemente de qué módulos estén siendo considerados en los índices de su definición.[26] Requerimos además de la siguiente noción:

Definición 17. *Sean $M \in R-Mod$ y $N \leqslant M$. Se dice que N es un <u>submódulo</u> <u>totalmente invariante</u> de M si y sólo si para todo $f : M \to M$ se cumple que $f(N) \leqslant N$. En adelante denotaremos esta relación como $\leqslant_{t.i.}$.*

La invariancia total de los módulos se relaciona con la existencia de algún prerradical de modo que la aplicación de éste en un módulo que contenga al módulo totalmente invariante dé como imagen el submódulo totalmente invariante. Esta es la idea de la siguiente proposición:

Proposición 9. *Sea $M \in R - Mod$. Entonces N es un submódulo totalmente invariante de M si y sólo si existe $\sigma \in R - pr$ tal que $\sigma(M) = N$.*
Más aún, se tiene que $N \leqslant_{t.i.} M$ si y sólo si $\alpha_N^M(M) = N = \omega_N^M(M)$.

[26]Pero podemos dar unos ejemplos que resultan más conocidos con ayuda de otras asignaciones que fijan uno de los índices. Estos son la <u>traza</u> $Tr_M() = \alpha_M^M$ y el <u>rechazo</u> $Re_M() = \omega_0^M$.

Demostración. Comenzaremos demostrando la primera parte de esta proposición:

($\Rightarrow$) Si $N \leqslant_{t.i.} M$ entonces $\alpha_N^M(M) = \sum\{f(N) \mid f : M \to M\} \leqslant N$. Además notemos que como $Id_M : M \to M$ es un morfismo, entonces $N \leqslant \sum\{f(N) \mid f : M \to M\} = \alpha_N^M(M)$. Por lo que se sigue $\sigma = \alpha_N^M$ es el buscado.

($\Leftarrow$) Sea $\sigma \in R - pr$, $\sigma(M) = N$ y $f : M \to M$. Entonces se cumple que $f(N) = f(\sigma(M)) \leqslant \sigma(M) = N$ y así $N \leqslant_{t.i.} M$..

Ahora, para la segunda parte, el razonamiento anterior nos arroja que para la primera igualdad ya tenemos la demostración para los prerradicales α_N^M. Por lo que resta mostrar que la segunda igualdad en el lado derecho del bicondicional se sostiene: Si $N \leqslant_{t.i.} M$, entonces $\omega_N^M(M) = \bigcap\{f^{-1}(N) \mid f : M \to M\} \leqslant N$. Y como $Id_M(N) = N$, entonces $N \leqslant \bigcap\{f^{-1}(N) \mid f : M \to M\} = \omega_N^M(M)$.

Q.E.D.

Notemos que, debido a la dualidad de la Definición 16, podemos tener un resultado análogo al descrito por la primera parte de la proposición anterior para los prerradicales ω.

Ahora daremos un resultado que ayuda a comprender la relación que hay entre la invariancia total de módulos con los prerradicales de la Definición 16.[27] Para demostrarlo sólo requerimos de unos pocos conceptos y resultados que ya hemos visto antes en este trabajo:

Proposición 10. *Sean $M \in R - Mod$ y $N \leqslant_{t.i.} M$. Entonces $\sigma(M) = N$ si y sólo si $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sabemos de la Definición 16 para α y del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & K \\
N = \sigma(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f_{\restriction}"] & \sigma(K) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

que $f(\sigma(M)) = f(N) \leqslant \sigma(K)$. Entonces $\alpha_N^M(K) \leqslant \sigma(K)$, esto $\forall K \in R - Mod$, y se tiene que $\alpha_N^M \preceq \sigma$. Y de manera análoga tenemos que:

[27] De hecho, la importancia de este resultado es latente en vista de que permite obtener una buena cantidad de resultados en el estudio de retículas atómicas y coatómicas.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] & M \\ \sigma(K) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "g\restriction"] & \sigma(M) = N \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

cumpliéndose que $g(\sigma(K)) \leqslant N$, es decir que $\sigma(K) \leqslant g^{-1}(N)$, también $\forall K \in R-Mod$. Luego $\sigma \preceq \omega_N^M$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$. Como $N \leqslant_{t.i.} M$, se cumple que $\alpha_N^M(M) = N = \omega_N^M(M)$ por la Proposición 9. Entonces $N = \alpha_N^M(M) \leqslant \sigma(M) \leqslant \omega_N^M(M) = N$ y se cumple que $\sigma(M) = N$.

Q.E.D.

La Proposición 10 es de importancia considerable en la teoría de prerradicales, pues nos indica una importante relación que se cumple para la propiedad de invariancia total en términos de comparación entre prerradicales σ con los α, ω. Dependiendo de qué R-módulos M estemos considerando, se tiene que todo prerradical σ es el supremo de una familia de α's e ínfimo de una familia de ω's. Esta idea es recuperada en la siguiente proposición:

Proposición 11. *Sea $\sigma \in R-pr$. Entonces σ puede escribirse como* $\sigma = \bigvee_{_RM} \alpha_{\sigma(M)}^M = \bigwedge_{_RM} \omega_{\sigma(M)}^M$.

Demostración. Veamos la primera igualdad: Por un lado, tenemos que $\alpha_{\sigma(M)}^M(K) = \sum\{f(\sigma(M)) \mid f : M \to K\}$, y al ser $\sigma \in R-pr$, sabemos que para todo $f : M \to K$ se cumple que $f(\sigma(M)) \leqslant \sigma(K)$. Entonces $\alpha_{\sigma(M)}^M(K) \leqslant \sigma(K)$ y así $\bigvee_{_RM} \alpha_{\sigma(M)}^M \leqslant \sigma$. Llamemos a esto (1).

Por otro lado, se cumple que $\alpha_{\sigma(K)}^K(K) = \sigma(K)$ de la Definición 16. Entonces $\sigma(K) = \alpha_{\sigma(K)}^K(K) \leqslant \bigvee_{_RM} \alpha_{\sigma(M)}^M(K)$. Llamemos a esto (2). De (1) y (2) tenemos la primera igualdad.

La segunda igualdad sale de manera similar a la anterior, haciendo los cambios necesarios para contemplar el uso de los prerradicales $\omega_{\sigma(M)}^M$.

Q.E.D.

Estaremos considerando un par extra de operaciones entre prerradicales de ahora en adelante, además del ínfimo y supremo de estos. Ambas operaciones son binarias, así que tomaremos $\sigma, \tau \in R-pr$ para definirlas:

(1) El *producto* de σ y τ es $(\sigma\tau)(M) = \sigma(\tau(M))$ para todo $_RM$;

(2) El *coproducto* de σ y τ es $(\sigma : \tau)(M)$ y es el submódulo de $_RM$ tal que $(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) =$

$\tau(M/\sigma(M))$.

Veamos la justificación de que ambas operaciones son cerradas, es decir que el producto y coproducto de prerradicales así definidos son de hecho prerradicales.

(Caso $\sigma\tau$) Se cumplen las propiedades de ser prerradical:

(i) Como σ y τ son prerradicales, para cualquier ${}_RM$ se cumple que $(\sigma\tau)(M) = \sigma(\tau(M)) \leqslant \tau(M) \leqslant M$.

(ii) $\forall f \in Hom_R(M, N)$ se cumple que $f(\sigma\tau)(M) = f(\sigma(\tau(M))) \subseteq \sigma(\tau(M))$.

(Caso $(\sigma : \tau)$) Se cumplen las propiedades de ser prerradical:

(i) La misma definición del coproducto nos dice que $(\sigma : \tau)(M)$ es un submódulo de ${}_RM$.

(ii) Tomamos un morfismo $f : M \to N$ y definimos $\widehat{f} : M/\sigma(M) \to N/\sigma(N)$ como $\widehat{f}(m + \sigma(M)) = f(m) + \sigma(N)$. $\widehat{f}$ es un morfismo puesto que f lo es y $f(\sigma(M)) \subseteq \sigma(N)$. Entonces, como τ es un prerradical, podemos considerar $\widehat{f}\restriction: \tau(M/\sigma(M)) \to \tau(N/\sigma(N))$ y la definición del coproducto nos da que $\tau(M/\sigma(M)) = (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M)$ y $\tau(N/\sigma(N)) = (\sigma : \tau)(N)/\sigma(N)$. De esas igualdades tenemos que $\widehat{f} \restriction ((\sigma : \tau)(M)/\sigma(M)) \subseteq (\sigma : \tau)(N)/N$, pero $\widehat{f} \restriction ((\sigma : \tau)(M)/\sigma(M)) = (f((\sigma : \tau)(M)) + \sigma(N)))/\sigma(N)$. Luego $f((\sigma : \tau)(M)) + \sigma(N) \subseteq (\sigma : \tau)(N)$, pero como $f(\sigma : \tau)(M)) \subseteq f((\sigma : \tau)(M)) + \sigma(N)$, entonces $f((\sigma : \tau)(M)) \subseteq (\sigma : \tau)(M)$.

Como veremos después, el producto y coproducto de prerradicales nos servirán para darle más estructura a la colección R-pr equipada con tales operaciones y las de ínfimo y supremo, lo cual permitirá exponer importantes relaciones con las teorías de R-torsión.[28] Ahora, podemos apreciar cómo estas operaciones se relacionan con sus componentes prerradicales gracias al orden parcial que se define en R-pr. Siendo $\sigma, \tau \in R - pr$, podemos notar que $\sigma\tau \preceq \sigma, \tau \preceq (\sigma : \tau)$, y de hecho veremos en la siguiente observación una propiedad importante acerca de la relación de orden dada entre prerradicales y las operaciones de producto y coproducto con los ínfimos y supremos:

(♣) $\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$.

Estas relaciones se demuestran de la siguiente manera:

(caso $\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau$) Tomemos un ${}_RM$. Primero notemos que $\sigma(\tau(M)) \leqslant \tau(M)$. Ahora consideramos el siguiente diagrama conmutativo

[28] Es importante señalar que ahora mismo se pueden presentar propiedades interesantes al respecto del producto y coproducto. En el caso de éste último, por ejemplo, cumple con la propiedad universal del "pullback" o producto fibrado. En Stenström (1975), cap. 6 se puede consultar esto con más detalle.

$$\begin{tikzcd}
\tau(M) \arrow[r, "\iota"] & M \\
\sigma(\tau(M)) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota\restriction"] & \sigma(M) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

y se tiene que $\sigma(\tau(M)) \subseteq \sigma(M)$. Por lo que tenemos que $\sigma(\tau(M)) \leqslant \sigma(M) \wedge \tau(M)$.

(caso $\sigma \wedge \tau \preceq \sigma \vee \tau$) Es inmediato que para todo ${}_RM$ se cumple que $\sigma(M) \cap \tau(M) \subseteq \sigma(M) + \tau(M)$, por lo que se tiene la relación buscada.

(caso $\sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$) Veamos que para todo ${}_RM$ se cumple $\sigma(M) + \tau(M) \subseteq (\sigma : \tau)(M)$: Siendo ρ la proyección natural, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] & M/\sigma(M) \\
\tau(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\rho\restriction"] & \tau(M/\sigma(M)) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

y no olvidemos que $\tau(M/\sigma(M)) = (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M)$. Tenemos que $\rho \restriction (\tau(M)) = (\tau(M) + \sigma(M))/\sigma(M) \subseteq (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M)$. Por lo que $\sigma(M) + \tau(M) \subseteq (\sigma : \tau)(M)$.

Los siguientes prerradicales que veremos serán muy importantes para estudiar algunas formas que tienen ciertas teorías de torsión:

Definición 18. *Sea $\sigma \in R-pr$. σ es un:*

1. Radical si para cada ${}_RM$, se tiene que $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$.

2. Idempotente si para cada ${}_RM$, se tiene que $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$.

3. Exacto izquierdo si para cada sucesión exacta $0 \to M \to N \to L \to 0$, se tiene que $0 \to \sigma(M) \to \sigma(N) \to \sigma(L)$ es exacta.

4. t-radical si para cada ${}_RM$, se cumple que $\sigma(M) = \sigma(R)M$.

Contaremos con las siguientes colecciones de prerradicales sobre el anillo R en nuestro estudio:

1. *R-idem* es el conglomerado de prerradicales idempotentes.
2. *R-rad* es el conglomerado de radicales.
3. *R-radidem* es el conglomerado de radicales idempotentes.
4. *R-prei* es el conglomerado de prerradicales exactos izquierdos.
5. *R-rei* es el conglomerado de radicales exactos izquierdos.

Con la Definición 18 y los conglomerados recién señalados, ya podemos presentar algunos resultados relacionados con tipos de prerradicales y propiedades de los R-módulos. Podemos empezar dando las siguientes observaciones $\bigstar$:

(i) Para un anillo R, un ideal $I \leqslant R$, se cumple que $\alpha_I^R(R) = \sum\{f(I) \mid f : R \to R\} = I$.

(ii) En la misma situación y con un módulo ${}_RM$, $\alpha_I^R(M) = IM = \alpha_I^R(R)M$.

(iii) Todo t-radical es un radical.

Demostración.(i) Esto lo tenemos al notar que se cumple la siguiente afirmación: $I \leqslant_{t.i.} R$ sii I es un ideal bilateral.

($\Rightarrow$) Como I es t.i., habremos terminado al mostrar que $I = IR$: Tomamos el endomorfismo $(\ ,r) : R \to R$ como $(\ ,r)(x) = xr$. Como I es t.i., $(\ ,R)(I) \leqslant I$ y así, para cada $r \in R$ y $a \in I$ se tiene que $ar = (\ ,r)(a) \in I$.

($\Leftarrow$) Sea I un ideal bilateral de R. Tomemos el siguiente prerradical: $(I\cdot \ ) : R-Mod \to R-Mod$ como $(I\cdot \ )(M) = IM$. Para cada $f \in Hom(R,R)$ se tiene que en $f \restriction: I = IR = (I\cdot \ )(R) \to (I\cdot \ )(R)$, $f(I) \subseteq I$.

Como el ideal I es bilateral, es totalmente invariante y la Definición 17 nos da $\alpha_I^R(R) = I$.

(ii) La invariancia total de I nos da, por lo visto en (i), que $\alpha_I^R(M) = IM = \alpha_I^R(R)M$.

Las observaciones (i) y (ii) nos dan que los prerradicales α_I^R son t-radicales.

(iii) Si σ es un t-radical entonces para todo ${}_RM$ se tiene, por la definición de t-radical, que $\sigma(M/\sigma(M)) = I(M/IM) = 0$. Por lo que σ es un radical.

Antes de dar el siguiente resultado, conviene notar lo siguiente. La afirmación que expresa la equivalencia de $I \leqslant_{t.i.} R$ con que I es un ideal bilateral de R, y que fue usada para demostrar la observación (ii) anterior, nos permite deducir: Para cualquier $\sigma \in R-pr$, como el anillo R es él mismo un R-módulo, tenemos que $\sigma(R)$ es un submódulo de R, pero también para cualquier morfismo $f : R \to R$ el prerradical σ nos da que $f(\sigma(R)) \leqslant \sigma(R)$, y esto satisface la Definición 17 de invariancia total, por lo que $\sigma(R) \leqslant_{t.i.} R$, y por la afirmación de equivalencia se tiene que $\sigma(R)$ es un ideal bilateral de R. Esto último nos servirá en lo sucesivo durante las demostraciones de diversos resultados.

Proposición 12. *$\sigma \in R-prei$ si y sólo si para todo ${}_RM$ y ${}_RN \leqslant {}_RM$ se tiene que $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Nos fijamos en el siguiente diagrama conmutativo: con la proyección ρ y por la hipótesis de σ prerradical exacto izquierdo, el segundo renglón es exacto:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & M & \xrightarrow{\rho} & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle\iota} & & \uparrow{\scriptstyle\iota} & & \uparrow{\scriptstyle\iota} & & \\ 0 & \longrightarrow & \sigma(N) & \xrightarrow{\iota\restriction} & \sigma(M) & \xrightarrow{\rho\restriction} & \sigma(M/N) & & \end{array}$$

Entonces se cumple que $\sigma(N) = Ker(\rho \restriction) = Ker(\rho) \cap \sigma(M) = N \cap \sigma(M)$.

$(\Leftarrow)$ Debemos mostrar que $0 \to \sigma(M) \to \sigma(N) \to \sigma(L)$ es exacta para cualquier sucesión exacta $0 \to M \to N \to L \to 0$. Pero sabemos de la teoría de módulos que cualquier sucesión exacta $0 \to M \to N \to L \to 0$ puede verse como $0 \to N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N \to 0$ para $N \leqslant M$. Por esto, para mostrar que $\sigma \in R-prei$, nos basta mostrar que si $N \leqslant M$ entonces $0 \to \sigma(N) \hookrightarrow \sigma(M) \twoheadrightarrow \sigma(M/N)$, con las restricciones a la inclusión $\iota \restriction$ y a la proyección $\rho \restriction$ respectivamente, es exacta. Pero como $ker(\rho \restriction) = ker(\rho) \cap \sigma(M) = N \cap \sigma(M)$, y como por hipótesis $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$, entonces $ker(\rho \restriction) = \sigma(N)$ y la sucesión $0 \to \sigma(N) \hookrightarrow \sigma(M) \twoheadrightarrow \sigma(M/N)$ es exacta. Por lo que $\sigma \in R-prei$.

Q.E.D.

Corolario 13. *Si $\sigma \in R-prei$, entonces $\sigma \in R-idem$.*

Demostración. Para ${}_RM$, se hace $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \cap \sigma(M) = \sigma(M)$. Luego $\sigma \in R-idem$.
Q.E.D.

Con las siguientes proposiciones, tendremos una propiedad útil para manejar supremos e ínfimos de productos y coproductos de prerradicales, además de contar con una manera equivalente de manejar t-radicales con epimorfismos y prerradicales α. En lo sucesivo, también tendrán importantes usos cuando estudiemos las conexiones de Galois sobre R-radidem y ciertas teorías de torsión:

Proposición 14. *Sean $\tau \in R-pr$ y $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}} \subseteq R-pr$. Entonces:*
1. $(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)\tau = \bigvee_{\alpha\in\mathcal{C}}(\sigma_\alpha\tau)$.
2. $(\tau : \bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}}(\tau : \sigma_\alpha)$.

Demostración. (1) Para ${}_RM$:
$$(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)\tau(M) = (\sum_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)\tau(M) = \sum_{\alpha\in\mathcal{C}}(\sigma_\alpha(\tau(M))) = \sum_{\alpha\in\mathcal{C}}(\sigma_\alpha\tau(M)) = \bigvee_{\alpha\in\mathcal{C}}(\sigma_\alpha\tau(M)).$$
(2) Para ${}_RM$, sabemos que $(\tau : \bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)(M)$ es el submódulo de M tal que $(\tau : \bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)(M)/\tau(M) =$

$\bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}}\sigma_\alpha(M/\tau(M)) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{C}}\sigma_\alpha(M/\tau(M)) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{C}}(\tau:\sigma_\alpha)(M)/\tau(M) = \bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}}(\tau:\sigma_\alpha)(M)/\tau(M)$. Por lo tanto se cumple (2).

Q.E.D.

Proposición 15. *Dado $\sigma \in R-pr$, son equivalentes:*

1. σ preserva epimorfismos.

2. σ es un t-radical.

3. $\sigma = \alpha_I^R$ con $I \leqslant R$ un ideal bilateral.

Demostración. (3) $\Rightarrow$ (2)

Sea $\sigma = \alpha_I^R$. Sabemos de las propiedades de los t-radicales α_I^R que $\sigma(M) = \alpha_I^R(M) = IM = \alpha_I^R(R)M$. Luego σ es un t-radical.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Tomando a σ un t-radical y $f : M \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo se cumple que:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ \sigma(R)M = \sigma(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f\restriction"] & \sigma(N) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

y $f(M) = N$, $f(\sigma(M)) = f(\sigma(R)M) \leqslant \sigma(N)$. Usando que f es un epimorfismo y $\sigma(R) \leqslant R$, se tiene que $f(\sigma(R)M) = \sigma(R)f(M) = \sigma(R)N$ y al ser σ un t-radical, $\sigma(R)N = \sigma(N)$. Por tanto $f\restriction$ es un epimorfismo.

(1) $\Rightarrow$ (3)

Supongamos que σ preserva epimorfismos. Habremos terminado si mostramos que $\alpha_{\sigma(R)}^R = \sigma$, es decir que $I = \sigma(R)$ es el indicado:

($\leq$) Se tiene que σ es prerradical, ya que $f(\sigma(R)) \subseteq \sigma(M)$ y esto $\forall f : R \to M$ debido a que $\sigma \in R-pr$. Por lo que tenemos la primera relación.

($\geq$) Sabemos que todo ${}_RM$ es imagen homomórfica de un módulo libre, es decir que existe un epimorfismo $\varphi : R^{(X)} \twoheadrightarrow M$ para un conjunto X. Por la Proposición 8, se cumple que $\sigma(R^{(X)}) = \sigma(R)^{(X)}$, y tenemos para cada $x \in X$ un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\iota_x"] & R^{(X)} \arrow[r, "\varphi"] & M \\ \sigma(R) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota_x\restriction"] & \sigma(R)^{(X)} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varphi\restriction"] & \sigma(M) \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

y $\varphi \restriction$ es epimorfismo por (1). Ahora, sea $r \in \sigma(M)$. Se tiene que existen $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ y $\{r_{x_1}, ..., r_{x_n}\} \subseteq \sigma(R)$ tales que $r = \sum_{i=1}^{n}(\varphi \restriction \circ \iota_{x_1} \restriction)(r_{x_i})$. Entonces los morfismos $(\varphi \circ \iota_{x_i}) : R \to M$ hacen que $r \in \sum\{(\varphi \circ \iota_{x_i})(\sigma(R))\}_{i=1}^{n} \leqslant \sum\{f(\sigma(R)) \mid f : R \to M\}\alpha^R_{\sigma(R)}(M)$, así que $\sigma(M) \leqslant \alpha^R_{\sigma(R)}(M)$.
Q.E.D.

Nos encaminamos a presentar ciertas nociones y resultados que serán muy convenientes para la relación entre ciertas teorías de torsión y algunos conglomerados de prerradicales obtenidos de un modo especial. Antes de proceder a presentar las definiciones necesarias, recordemos un par de hechos relevantes acerca del producto y coproducto de prerradicales específicos, a saber: (i) Dados $\sigma, \tau \in R-idem$ se cumple que $(\sigma : \tau) \in R-idem$; (ii) Dados $\sigma, \tau \in R-rad$ se cumple que $\sigma\tau \in R-rad$.[29] A continuación presentaremos algunos resultados preliminares acerca de productos y coproductos de prerradicales.

Lema 16. *Si $t, r \in R-pr$ son tales que $t \preceq r$ con $t \in R-idem$, entonces $tr = rt = t$.*

Demostración. Para ver la segunda igualdad, por la definición de prerradical, para todo ${}_RM$ se cumple que este diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
t(M) \arrow[r, "\iota"] & M \\
r(t(M)) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota\restriction"] & t(M) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

por lo que $r(t(M)) \leqslant t(M)$ y así $rt \preceq t$.
Por otra parte, aplicando t por la derecha a $t \preceq r$, tenemos $t = tt \preceq rt$. Así $t \preceq rt$. Por lo que $rt = t$.
Para ver la primera igualdad, nuevamente por la definición de prerradical, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
r(M) \arrow[r, "\iota"] & M \\
t(r(M)) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota\restriction"] & t(M) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

[29] Ambos resultados se hallan presentados en Stenström (1975), cap. 6.

lo cual nos da que $\iota \restriction (t(r(M))) = t(r(M)) \leqslant t(M)$ y así $tr \preceq t$.

Por otra parte, aplicando t por la izquierda a $t \preceq r$, tenemos $t = tt \preceq tr$. Así $t \preceq tr$. Por tanto $tr = t$.

Las dos igualdades anteriores nos dan que $tr = rt = t$.

Q.E.D.

Lema 17. *$r \in R - rad$ si y sólo si $\forall N \leqslant r(M)$, $r(M/N) = r(M)/N$.*

Demostración. ($\Rightarrow$)

Vamos a mostrar la igualdad por doble contención.

(caso $\supseteq$) Tomemos el epimorfismo $p : M \to M/N$ y notemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] & M/N \\ r(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "p\restriction"] & r(M/N) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

entonces $p \restriction (r(M)) \subseteq r(M/N)$, pero $p \restriction (r(M)) = (r(M)) + N)/N = r(M)/N$ donde la segunda igualdad sale por $N \leqslant r(M)$. Por lo que $r(M)/N \subseteq r(M/N)$.

(caso $\subseteq$) Por la hipótesis, $N \leqslant r(M) \leqslant M$ y así $r(M)/N \leqslant M/N$. Entonces por el tercer teorema de isomorfismo, $f \circ p : M/N \to (M/N)/(r(M)/N) \to M/r(M)$ con el morfismo inyectivo f. Sea $g = f \circ p$ y tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M/N \arrow[r, "g"] & M/r(M) \\ r(M/N) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "g\restriction"] & r(M/r(M)) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

y por ser $r \in R - rad$ entonces $r(M/r(M)) = 0$. Entonces $g(r(M/N)) \subseteq 0$ y esto nos arroja $r(M/N) \subseteq ker(g) = ker(f \circ p) = p^{-1}(ker(f)) = p^{-1}(0) = ker(p)$. Por lo que $r(M/N) \subseteq ker(p) = r(M)/N$.

($\Leftarrow$)

Si suponemos que $r(M/N) = r(M)/N$ para todo $N \leqslant r(M)$, en particular $r(M/r(M)) = r(M)/r(M) = 0$. Por lo que $r \in R - rad$.

Q.E.D.

Lema 18. *Si $r, t \in R-pr$ son tales que $r \preceq t$ y $t \in R-rad$, entonces $r : t = t : r = t$.*

Demostración. Veamos primero que $r : t = t$:
Como sabemos que para todo ${}_RM$ se cumple que $r(M) \leqslant t(M)$, aplicamos la definición de coproducto para tener que $(r : t)(M)/r(M) = t(M/r(M)) = t(M)/r(M)$ y la segunda igualdad sale por el Lema 17. Entonces $(r : t)(M)/r(M) = t(M)/r(M)$, de lo que se sigue que $r : t = t$.
Veamos ahora que $t : r = t$:
De la definición de coproducto y la hipótesis $r \preceq t$ tenemos para todo ${}_RM$ que $(t : r)(M)/t(M) = r(M/t(M)) \leqslant t(M/t(M)) = 0$ donde la última igualdad sale porque $t \in R-rad$. Entonces $(t : r)(M) = t(M)$ y se sigue que $t : r = t$.
Q.E.D.

Ahora estamos listos para considerar un par de prerradicales que serán de utilidad en lo sucesivo, particularmente para trabajar con clases de pretorsión y libres de pretorsión. Comenzaremos dando la siguiente definición:

Definición 19. *(i) Para $\mathscr{C} \in R-pretors$ las clases de pretorsión, se define el prerradical: $r_{\mathscr{C}} : R-Mod \to R-Mod$ como $r_{\mathscr{C}}(M) = \sum\{N \leqslant M \mid N \in \mathscr{C}\}$.*
(ii) Para $\mathscr{C} \in R-lpretors$ las clases libres de pretorsión, se define el prerradical: $r^{\mathscr{C}} : R-Mod \to R-Mod$ como $r^{\mathscr{C}}(M) = \bigcap\{N \leqslant M \mid M/N \in \mathscr{C}\}$.

La verificación de que ambos $r_{\mathscr{C}}, r^{\mathscr{C}} \in R-pr$ se tiene por las definiciones de ambos y por las propiedades que $\mathscr{C}$ cumple para cada uno de ellos. Hacemos $sub(M)$ la colección de todos los submódulos de un R-módulo M. Veamos:
(i) Veamos primero que $r^{\mathscr{C}}$ es un prerradical:
Primero, la definición de submódulo N de M nos permite notar que $r^{\mathscr{C}}(M) \leqslant M$.
Segundo, si tenemos un morfismo $f : A \to B$ y si $L \leqslant B$ entonces se puede definir un monomorfismo $g : A/f^{-1}(L) \to B/L$ como $g(a + f^{-1}(L)) = f(a) + L$. Y como antes ya hemos visto que $r^{\mathscr{C}}(N) \leqslant N$, entonces hay un monomorfismo $M/f^{-1}(r^{\mathscr{C}}(N)) \to N/r^{\mathscr{C}}(N)$ con $N/r^{\mathscr{C}}(N) \in \mathscr{C}$, y así $M/f^{-1}(r^{\mathscr{C}}(N)) \in \mathscr{C}$. Por la definición de $r^{\mathscr{C}}(M)$, tenemos que $r^{\mathscr{C}}(M) \subseteq f^{-1}(r^{\mathscr{C}}(N))$, es decir, $f(r^{\mathscr{C}}(M)) \subseteq r^{\mathscr{C}}(N)$.
(ii) Para ver que $r_{\mathscr{C}}$ es un prerradical:

Primero, por la definición de submódulo y suma de submódulos, tenemos que para todos los submódulos N de M pasa que $\sum N \leqslant M$. Por lo que $r_{\mathscr{C}}(M) \leqslant M$.
Segundo, si tomamos un morfismo $f : M \to N$, como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes y por dualidad con (i), tenemos que $f(r_{\mathscr{C}}(M)) \subseteq r_{\mathscr{C}}(N)$.

Tenemos, además, la siguiente observación:
(i) Como tomamos $\mathscr{C} \in R - lpretors$, si hacemos $A = \{N\}_{N \in sub(M)}$ la colección de todos los submódulos de M tales que M/N están en $\mathscr{C}$, entonces como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo productos directos tenemos que $\prod\limits_{N \in A} M/N \in \mathscr{C}$, además tenemos un morfismo $\alpha : M \to \prod\limits_{N \in A} M/N$ dado como $m \longmapsto (m + N)_{N \in A}$ y cuyo núcleo es $\bigcap\limits_{N \in A} N$, por lo que tenemos un monomorfismo $\overline{\alpha} : M/\bigcap\limits_{N \in A} N \to \prod\limits_{N \in A} M/N$. Por lo que $M/\bigcap\limits_{N \in A} N \in \mathscr{C}$.
(ii) Como tomamos $\mathscr{C} \in R - pretors$, si hacemos $B = \{N\}_{N \in sub(M)}$ la colección de todos los submódulos de M que están en $\mathscr{C}$, entonces como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo sumas directas tenemos que $\bigoplus\limits_{N \in B} N \in \mathscr{C}$, además que existe un epimorfismo $\bigoplus\limits_{N \in B} N \to \sum\limits_{N \in B} N$ que a cada juego de coordenadas $(n) \longmapsto \sum\limits_{n \in N} n$. Por lo que $\sum\limits_{N \in B} N \in \mathscr{C}$.

Veremos que los prerradicales de la Definición 19 arrojarán varios resultados importantes. Comenzaremos por presentar las siguientes propiedades para ambos prerradicales:

Proposición 19. *(1) $r_{\mathscr{C}} \in R - idem$ y $r_{\mathscr{C}}(M)$ es el mayor submódulo de M en $\mathscr{C}$.*
(2) $r^{\mathscr{C}} \in R - rad$ y $r^{\mathscr{C}}(M)$ es el menor submódulo de M tal que el cociente de M con este submódulo está en $\mathscr{C}$.

Demostración. (1) La parte (i) de la Definición 19 nos permite notar que $r_{\mathscr{C}}(r_{\mathscr{C}}(M)) = r_{\mathscr{C}}(M)$ de inmediato. Ahora, si tenemos un $N \leqslant M$ tal que $N \in \mathscr{C}$ entonces se cumple que $N \leqslant \sum L$ de todos los $L \leqslant M$ tales que $L \in \mathscr{C}$. Por lo que $r_{\mathscr{C}}(M)$ es el mayor submódulo de M en $\mathscr{C}$.
(2) Calculamos $r^{\mathscr{C}}(M/r^{\mathscr{C}}(M)) = \bigcap\{N/r^{\mathscr{C}}(M) \leqslant M/r^{\mathscr{C}}(M) \mid M/N \in \mathscr{C}\}$. Por la parte (ii) de la Definición 19, nos damos cuenta que $r^{\mathscr{C}}(M/r^{\mathscr{C}}(M)) = r^{\mathscr{C}}(M)/r^{\mathscr{C}}(M) = 0$ y tenemos que $r^{\mathscr{C}}(M/r^{\mathscr{C}}(M)) = 0$. Ahora, si tenemos un $K \leqslant M$ tal que $M/K \in \mathscr{C}$, por cómo se define $r^{\mathscr{C}}(M)$, tenemos que $\bigcap N \leqslant K$ para todos los $N \leqslant M$ tales que $M/N \in \mathscr{C}$. Por lo que $r^{\mathscr{C}}(M)$ es el menor submódulo de M tal que el cociente de M con tal submódulo está en $\mathscr{C}$.
Q.E.D.

Usando la Definición 19, daremos un par de nuevos prerradicales que se pueden construir a partir de miembros particulares $r \in R - pr$. Para definirlos, nos apoyaremos en las clases de R-módulos $\mathbb{T}_r$ y $\mathbb{F}_r$ y que después veremos que son clases de pretorsión y libres de pretorsión, respectivamente.

Definición 20. *Sea* $r \in R - pr$*:*
(i) $\widehat{r} : R - Mod \to R - Mod$ *es dado como* $\widehat{r}(M) = \sum\{N \leqslant M \mid r(N) = N\}$*. Es decir,* $\widehat{r} = r_{\mathbb{T}_r}$*.*
(ii) $\overline{r} : R - Mod \to R - Mod$ *es dado como* $\overline{r}(M) = \bigcap\{N \leqslant M \mid r(M/N) = 0\}$*. Es decir,* $\overline{r} = r^{\mathbb{F}_r}$*.*

Definición 21. *Para* $\sigma \in R - pr$*, se tienen las siguientes clases de R-módulos:*
1. $\mathbb{T}_\sigma = \{_R M \mid \sigma(M) = M\}$*.*
2. $\mathbb{F}_\sigma = \{_R N \mid \sigma(N) = 0\}$*.*

Nuestro objetivo ahora es mostrar que, dado cualquier $r \in R - pr$, siempre le podemos encontrar el mayor prerradical idempotente por debajo y el menor radical por encima. A continuación se presentan las siguientes proposiciones:

Teorema 20. *Dado* $r \in R - pr$*, resulta:*
1. $\widehat{r} \preceq r$*.*
2. $\widehat{r} \in R - idem$*.*
3. $\widehat{r}$ *es el mayor idempotente por debajo de* r*.*

Demostración. (1) El inciso (i) de la Definición 20 nos permite notar de inmediato que, para cualquier $_R M$, como $\widehat{r}(M) = \sum\{N \leqslant M \mid r(N) = N\}$, entonces $\widehat{r} \preceq r$.
(2) Como $\widehat{r} = r_{\mathbb{T}_r}$, por (1) de la Proposición 19 tenemos que $\widehat{r} \in R - idem$.
(3) Si tomamos un $s \in R - idem$ tal que $s \preceq r$, como vale el Lema 16, entonces $\widehat{r} \preceq s = r$ y tenemos el resultado.
Q.E.D.

Teorema 21. *Dado* $r \in R - pr$*, resulta:*
1. $r \preceq \overline{r}$*.*
2. $\overline{r} \in R - rad$*.*
3. $\overline{r}$ *es el menor radical encima de* r*.*

Demostración. (1) Como $0 \leqslant M$ es el menor de los submódulos de M y sabemos que $M = M/0$, la parte (ii) de la Definición 20 nos permite notar de inmediato que $r(M) \leqslant \overline{r}(M)$, por lo que $r \preceq \overline{r}$.

(2) Como $\overline{r} = r^{\mathbb{T}_r}$, por la parte (2) de la Proposición 19 tenemos que $\overline{r} \in R - rad$.

(3) Supongamos que hay un $s \in R - rad$ tal que $r \preceq s$. Como tenemos el Lema 18, se cumple que $r = s \preceq \overline{r}$.

Q.E.D.

Con la siguiente proposición, podemos decir más acerca de las potencias y copotencias cuando el prerradical en cuestión cumple ciertas propiedades:

Teorema 22. *Sea $r \in R - pr$. Resulta:*

1. Si r es idempotente, $\overline{r}$ también lo es.

2. Si r es radical, $\widehat{r}$ también lo es.

Demostración. (1) Si $r \in R - idem$, por las partes (1) y (3) del Teorema 20 se tiene que $r = \widehat{r}$. De la parte (1) del Teorema 21 se tiene que $r = \widehat{r} \preceq \overline{r}$. El resultado ahora se sigue por el Lema 16.

(2) Si $r \in R - rad$, por las partes (1) y (3) del Teorema 21 se tiene que $r = \overline{r}$. Por la parte (1) del Teorema 20 se tiene que $\widehat{r} \preceq \overline{r} = r$. El resultado ahora se sigue por el Lema 18.

Q.E.D.

Llegados a este punto, conviene que notemos que hay una manera equivalente de trabajar con los prerradicales de la Definición 20. Esas maneras son:

(i) ***Potencias:*** *$r^1 = r$, $r^2 = rr, \ldots, r^{n+1} = rr^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para el caso de ordinales sucesores $\lambda + 1$ se define $r^{r+1} = rr^{\lambda}$, y en el caso de λ un ordinal límite se define $r^{\lambda} = \bigwedge_{\beta<\lambda} r^{\beta}$.*

Tenemos así $\widehat{r} = \bigwedge_{\lambda \in OR} r^{\lambda}$.

(ii) ***Copotencias:*** *$r_{(1)} = r$, $r_{(2)} = (r : r), \ldots, r_{(n)} = (r : r_{(n-1)})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para el caso de ordinales sucesores $\lambda + 1$ se define $r_{(\lambda+1)} = (r : r_{(\lambda)})$, y en el caso de λ un ordinal límite se define $r_{(\lambda)} = \bigvee_{\beta<\lambda} r_{(\beta)}$.*

Tenemos así $\overline{r} = \bigvee_{\lambda \in OR} r_{(\lambda)}$.

Veremos que las propiedades anteriores de un prerradical, así como sus potencias y copotencias, son importantes no sólo para extraer información acerca de dicho prerradical, sino para obtener isomorfismos entre los conglomerados R-radidem y T-tors, y R-radidem y L-tors. Esto brindará apoyo al estudio de las conexiones de Galois entre T-tors y L-tors en términos de prerradicales con determinadas propiedades.

Prerradicales, $\boldsymbol{T}$-tors y $\boldsymbol{L}$-tors

Las nociones y resultados que presentamos a continuación nos encaminarán a la obtención de las correspondencias biunívocas que esperamos obtener entre los radicales idempotentes con las clases de torsión y libres de torsión de módulos. Antes de dar la siguiente proposición, nos enfocaremos en dar algunos resultados preliminares que serán útiles para la demostración de la misma.

Empecemos por recordar qué significa que un módulo $_RM$ sea generado o cogenerado por una familia de módulos. Si $\mathscr{C} \subseteq R - Mod$ y se tiene un $_RM$ entonces:[30]
(i) $\mathscr{C}$ *genera* a $_RM$ si existe un epimorfismo $\bigoplus_I U_i \twoheadrightarrow M$ para una $\{U_i\}_I \subseteq \mathscr{C}$;
(ii) $\mathscr{C}$ *cogenera* a $_RM$ si existe un monomorfismo $M \rightarrowtail \prod_I U_i$ para una $\{U_i\}_I \subseteq \mathscr{C}$.
Así, tenemos las clases de R-módulos $Gen(\mathscr{C})$ y $Cog(\mathscr{C})$ de los R-módulos generados por $\mathscr{C}$ y los R-módulos cogenerados por $\mathscr{C}$, respectivamente. Ahora daremos los siguientes resultados:

Lema 23. *Sea $\mathscr{C} \subseteq R - Mod$:*
1. $Gen(\mathscr{C})$ es cerrada bajo epimorfismos y sumas directas.
2. $Cog(\mathscr{C})$ es cerrada bajo monomorfismos y productos directos.

Demostración. Por las definiciones de $Gen(\mathscr{C})$ y $Cog(\mathscr{C})$, haremos el caso de (1) y (2) resultará dual:
Veamos que $Gen(\mathscr{C})$ es cerrado bajo epimorfismos. Sea $M \in Gen(\mathscr{C})$ y tomemos un epimorfismo $f : M \twoheadrightarrow N$. Por definición de $Gen(\mathscr{C})$, hay un epimorfismo $g : \bigoplus_I U_i \twoheadrightarrow M$, por lo que se tiene el epimorfismo $fg : \bigoplus_I U_i \twoheadrightarrow N$ y se tiene que $N \in Gen(\mathscr{C})$.
Veamos que $Gen(\mathscr{C})$ es cerrada bajo coproductos. Sea $\{M_\alpha\}_Y \subseteq Gen(\mathscr{C})$. Entonces existen epimorfismos $f_\alpha : \bigoplus_{I_\alpha} U_i \twoheadrightarrow M_\alpha \to 0$ para unos subconjuntos $\{U_i\}_{I_\alpha}$ de $\mathscr{C}$ y cada $\alpha \in Y$. Por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $\bigoplus f_\alpha : \bigoplus_Y (\bigoplus_{I_\alpha} U_i) \to \bigoplus_Y M_\alpha$ con $Im(\bigoplus f_\alpha) = \bigoplus_Y Im(f_\alpha) = \bigoplus_Y M_\alpha$. Por lo que $\bigoplus_Y U_i \twoheadrightarrow \bigoplus_Y M_\alpha \to 0$ con $\{U_i\} \subseteq \mathscr{C}$ y $\bigoplus_Y M_\alpha \in Gen(\mathscr{C})$.

[30]Desde ahora, convenimos en que la flecha para denotar un monomorfismo es $\rightarrowtail$, mientras que la flecha para denotar un epimorfismo es $\twoheadrightarrow$ cada vez que aparezcan tales flechas.

Como hemos mencionado, para (2) basta tomar dualmente lo hecho en (1), usando el monomorfismo $0 \to M \rightarrowtail N$ para la cerradura bajo monomorfismos, y el uso de la propiedad universal del producto para la cerradura bajo productos directos.

Q.E.D.

Lema 24. *Sea $\mathscr{C} \subseteq R-Mod$. Para ${}_RM$ se tiene que:*

1. $tr_{\mathscr{C}}(M)$ es el mayor submódulo de M tal que es generado por $\mathscr{C}$.

2. $re_{\mathscr{C}}(M)$ es el menor submódulo de M tal que $M/re_{\mathscr{C}}(M)$ es cogenerado por $\mathscr{C}$.

Demostración. (1) Buscamos demostrar que $tr_{\mathscr{C}}(M) \in Gen(\mathscr{C})$.

Sea $U \in \mathscr{C}$ y $f : U \to M$ un morfismo. Notemos que $f' : U \twoheadrightarrow Im(f)$ es un epimorfismo con $U \in \mathscr{C}$, así que $Im(f) \in \mathscr{C}$. Por lo que tenemos que $\{Im(f) \mid f : U \to M,\ U \in \mathscr{C}\} \subseteq Gen(\mathscr{C})$, y como por el Lema 23, $Gen(\mathscr{C})$ es cerrada bajo sumas directas, $\bigoplus\{Im(f) \mid f : U \to M,\ U \in \mathscr{C}\} \in Gen(\mathscr{C})$. Definimos $\varphi : \bigoplus Im(f) \to \sum Im(f)$ como $\varphi((x_i)) = \sum\limits_{x_i \neq 0} x_i$ y esta asignación es un epimorfismo por construcción. Pero por el Lema 23, $Gen(\mathscr{C})$ es cerrada bajo epimorfismos, se tiene que $\sum Im(f) \in Gen(\mathscr{C})$.

Ahora demostramos que si $N \leqslant M$ y $N \in Gen(\mathscr{C})$ entonces $N \subseteq tr_{\mathscr{C}}(M)$.

Como $N \in Gen(\mathscr{C})$, se cumple que existe un epimorfismo $f : \bigoplus U_i \twoheadrightarrow N \to 0$ para un $\{U_i\}_I \subseteq \mathscr{C}$. Utilizando las inclusiones canónicas η_j con $j \in I$, tenemos que $\eta_j : U_j \rightarrowtail \bigoplus_I U_i$, $N \hookrightarrow M$ donde $g_j = \iota \circ f \circ \eta_j$. Entonces se obtiene la familia $\{g_j : U_j \to M\}_{j \in I}$ de morfismos, y por la propiedad universal del coproducto, existe un $\varphi : \bigoplus_I U_i \to M$ tal que $\forall j \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
U_j \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, "\eta_j"] & M \\
\bigoplus_I U_i \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Se tiene que $Im(\varphi) = \sum\limits_I Im(g_j)$. Notamos que $Im(\varphi) = \sum\limits_I Im(g_j) = \sum \iota(Im(f \circ \eta_j) = \sum Im(f \circ \eta_j) = \sum f(Im(\eta_j) = f(\sum Im(\eta_j)) = f(\bigoplus\limits_I U_i) = N$. Por lo que $N = \sum Im(g_j)$, pero como $\sum Im(g_j) \subseteq \sum\{Im(f) \mid f : U \to M,\ U \in \mathscr{C}\}$, se tiene que $N \subseteq tr_{\mathscr{C}}(M)$.

(2) Buscamos demostrar que $M/re_{\mathscr{C}}(M) \in Cog(\mathscr{C})$.

Sea $U \in \mathscr{C}$ y un morfismo $f : M \to U$. Del primer teorema de isomorfismo sabemos que

$\overline{f} : M/ker(f) \rightarrowtail U$ es un monomorfismo con $U \in \mathscr{C}$. Entonces $M/Ker(f) \in Cog(\mathscr{C})$ pues por el Lema 23 $Cog(\mathscr{C})$ es cerrada bajo monomorfismos. Así que tenemos $\{M/ker(f) \,|\, f : M \to U,\ U \in \mathscr{C}\} \subseteq Cog(\mathscr{C})$, pero por el Lema 23 sabemos que $Cog(\mathscr{C})$ es cerrada bajo productos directos. Por lo que $\prod\{M/ker(f) \,|\, f : M \to U,\ U \in \mathscr{C}\} \in Cog(\mathscr{C})$. Aplicamos lo anterior a la familia $\{U_i\}_I \subseteq \mathscr{C}$ definiendo un $\varphi : \prod\{M/ker(f) \,|\, f : M \to U,\ U \in \mathscr{C}\} \to \prod U_i$ tal que para cada $x := (...x + ker(f_i)...)$, $\varphi(x) = (...\overline{f_i}(x_i)...)$ donde para cada entrada de la i-ada el respectivo $\overline{f_i}$ es el i-ésimo monomorfismo del respectivo $f_i : M \to U_i$, y como cada entrada de la i-ada es un monomorfismo entonces φ es un monomorfismo. Por lo que, como $M/re_{\mathscr{C}}(M) \leqslant \prod\{M/ker(f) \,|\, f : M \to U,\ U \in \mathscr{C}\}$ y para la inclusión canónica se tiene que $\varphi \circ \iota$ es un monomorfismo, entonces $M/re_{\mathscr{C}}(M) \in Cog(\mathscr{C})$.

Ahora demostramos que si $N \leqslant M$ es tal que $M/N \in Cog(\mathscr{C})$ entonces $re_{\mathscr{C}}(M) \leqslant N$.

Supongamos que hay $N \leqslant M$ tal que $M/N \in Cog(\mathscr{C})$. De lo anterior, existe un monomorfismo $f : M/N \rightarrowtail \prod U_i$ para un $\{U_i\}_I \subseteq \mathscr{C}$. Observemos que si $j \in I$ entonces se tienen los epimorfismos: $\rho : M \twoheadrightarrow M/N$, $\pi_j : \prod U_i \twoheadrightarrow U_j$. Hacemos $g_j = \pi_j \circ f \circ \rho$, obteniendo con ello la familia de morfismos $\{g_j : M \to U_j\}_I$. Por la propiedad universal del producto, existe un $\varphi : M \to \prod U_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g_j"] \arrow[dr, "\varphi"] & U_j \\ & \prod_I U_i \arrow[u, "\pi_j"'] \end{tikzcd}$$

Además que $ker(\varphi) = \bigcap_I ker(g_j)$. Ahora, tenemos que: $ker(\varphi) = \bigcap_I ker(g_j) = \bigcap_I ker(\pi_j \circ f \circ \rho) = \bigcap_I \rho^{-1}(ker(\pi_j \circ f)) = \rho^{-1}(\bigcap_I ker(\pi_j \circ f)) \leqslant N$ pues ρ, π_j son las proyecciones canónicas y f es monomorfismo sii $ker(f) = \{\overline{0}\}$ sii $\forall x \in ker(f)$ se cumple que $x \in N$. Por lo que $\bigcap_I ker(g_j) \subseteq N$, pero $re_{\mathscr{C}}(M) \subseteq \bigcap_I ker(g_j) \subseteq N$. Así que $re_{\mathscr{C}}(M) \subseteq N$.
Q.E.D.

Corolario 25. *Sea $\mathscr{C} \subseteq R - Mod$. Entonces:*

1. $M \in Gen(\mathscr{C})$ si y sólo si $tr_{\mathscr{C}}(M) = M$.

2. $M \in Cog(\mathscr{C})$ si y sólo si $re_{\mathscr{C}}(M) = 0$.

Demostración. (1) (caso $\Rightarrow$) Como $tr_{\mathscr{C}} \in R - pr$, ya se tiene que $tr_{\mathscr{C}}(M) \subseteq M$. Ahora, sea $M \in Gen(\mathscr{C})$. Por el Lema 24, se tiene que $tr_{\mathscr{C}}(M)$ es el mayor submódulo de M tal que está en $Gen(\mathscr{C})$, entonces $M \subseteq tr_{\mathscr{C}}(M)$. Así que $tr_{\mathscr{C}}(M) = M$.

(caso $\Leftarrow$) Tenemos que $tr_{\mathscr{C}}(M) = M$, y por el Lema 24 $tr_{\mathscr{C}}(M) \in Gen(\mathscr{C})$. Luego $M \in Gen(\mathscr{C})$.

(2) (caso $\Rightarrow$) Supongamos que $M \in Cog(\mathscr{C})$. Sabemos que $M = M/0 \in Cog(\mathscr{C})$, pero del Lema 24 se tiene que $re_{\mathscr{C}}(M)$ es el menor submódulo de M tal que $M/re_{\mathscr{C}}(M) \in Cog(\mathscr{C})$. Como $0 \leqslant M$ y es el menor, entonces $re_{\mathscr{C}}(M) = 0$.

(caso $\Leftarrow$) Suponemos que $re_{\mathscr{C}}(M) = 0$. Como por el Lema 24 tenemos que $M/re_{\mathscr{C}}(M) \in Cog(\mathscr{C})$, entonces $M/re_{\mathscr{C}}(M) = M/0 = M \in Cog(\mathscr{C})$.

Q.E.D.

Corolario 26. *Sea $\mathscr{C} \subseteq R-Mod$. Entonces:*

1. $tr_{\mathscr{C}} \in R-idem$.

2. $re_{\mathscr{C}} \in R-rad$.

Demostración. (1) Como por el Lema 24 $tr_{\mathscr{C}}(M) \in Gen(\mathscr{C})$, del Corolario 25 se tiene que $tr_{\mathscr{C}}(tr_{\mathscr{C}}(M)) = tr_{\mathscr{C}}(M)$. Por lo tanto para cualquier ${}_RM$ se tiene que $tr_{\mathscr{C}}(tr_{\mathscr{C}}(M)) = tr_{\mathscr{C}}(M)$.

(2) Como por el Lema 24 $M/re_{\mathscr{C}}(M) \in Cog(\mathscr{C})$, del Corolario 25 se tiene que $re_{\mathscr{C}}(M/re_{\mathscr{C}}(M)) = 0$, pero sabemos que $re_{\mathscr{C}}(M/re_{\mathscr{C}}(M)) = (re_{\mathscr{C}} : re_{\mathscr{C}})(M)/re_{\mathscr{C}}(M)$. Por lo tanto $(re_{\mathscr{C}} : re_{\mathscr{C}}) = re_{\mathscr{C}}$.

Q.E.D.

Lema 27. *1. Si $\{r_\alpha\}_I \subseteq R-idem$, entonces $\bigvee\limits_I r_\alpha \in R-idem$.*

2. Si $\{r_\alpha\}_I \subseteq R-rad$, entonces $\bigwedge\limits_I r_\alpha \in R-rad$.

Demostración. (1) Tomemos $\{r_\alpha\}_I \subseteq R-idem$. Queremos que $(\bigvee\limits_I r_\alpha)\cdot(\bigvee\limits_I r_\alpha) = \bigvee\limits_I r_\alpha$. Si ${}_RK$ entonces $\bigvee\limits_I r_\alpha(K) = \bigvee\limits_I r_\alpha \cdot r_\alpha(K) = \bigvee\limits_I r_\alpha(r_\alpha(K)) \leqslant \bigvee\limits_I r_\alpha(\sum\limits_I r_\alpha(K)) = \bigvee\limits_I (r_\alpha(\bigvee\limits_I r_\alpha))(K) = (\bigvee\limits_I r_\alpha)\cdot(\bigvee\limits_I r_\alpha)(K) = \bigvee\limits_I r_\alpha(\sum\limits_I r_\alpha(K)) \leqslant \sum\limits_I r_\alpha(K) = \bigvee\limits_I r_\alpha(K)$ donde la última desigualdad sale porque $\bigvee_I r_\alpha \in R-pr$ y todo prerradical r cumple que $r(M) \leqslant M$. Por lo que se tiene que $\bigvee\limits_I r_\alpha(K) \leqslant (\bigvee\limits_I r_\alpha)\cdot(\bigvee\limits_I r_\alpha)(K) \leqslant \bigvee\limits_I r_\alpha(K)$.

(2) Suponemos que tenemos un módulo ${}_RK$ y $\{r_\alpha\}_I \subseteq R-rad$. Nos interesa mostrar que $(\bigwedge\limits_I r_\alpha : \bigwedge\limits_I r_\alpha) = \bigwedge\limits_I r_\alpha$. Pero por el inciso (2) de la Proposición 14, basta mostrar que $\bigwedge\limits_I (\bigwedge\limits_I r_\alpha : r_\alpha) = \bigwedge\limits_I r_\alpha$.

Si $\alpha \in I$ entonces $r_\alpha \preceq (\bigwedge\limits_I r_\alpha : r_\alpha)$, entonces $r_\alpha \preceq \bigwedge\limits_I (\bigwedge\limits_I r_\alpha : r_\alpha)$. Por tanto $\bigwedge\limits_I r_\alpha \preceq$

$\bigwedge_I(\bigwedge_I r_\alpha : r_\alpha)$.
Por otro lado, como $\bigwedge_I r_\alpha \preceq r_\alpha$, $(\bigwedge_I r_\alpha : s) \preceq (r_\alpha : s)$ $\forall s \in R-pr$, en particular $(\bigwedge_I r_\alpha : r_\alpha) \preceq (r_\alpha : r_\alpha)$. Entonces $(\bigwedge_I r_\alpha : r_\alpha) \preceq r_\alpha$ y así $\bigwedge_I(\bigwedge_I r_\alpha : r_\alpha) \preceq r_\alpha$ por definición de ínfimo, luego se tiene que $\bigwedge_I(\bigwedge_I r_\alpha : r_\alpha) \preceq \bigwedge_I r_\alpha$.
Q.E.D.

Lema 28. *Sea $r \in R-pr$. Entonces:*
(1) $r \in R-idem$ sii $r = \bigvee\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\}$.
(2) $r \in R-rad$ sii $r = \bigwedge\{\omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_r\}$.

Demostración. (1) Veamos la ida: Notemos que si $M \in \mathbb{T}_r$ entonces $r(M) = M$. Así que, usando la Proposición 10 tenemos $\alpha_M^M \preceq r$ y esto es para todo $M \in \mathbb{T}_r$. Por lo que $\bigvee\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\} \preceq r$.
Para obtener la otra desigualdad, notemos que como r es idempotente, para cualquier ${}_RK$ se tiene que $r(r(K)) = r(K)$, por lo que $r(K) \in \mathbb{T}_r$. Como $r(K) = \alpha_{r(K)}^{r(K)}(r(K)) \leqslant \alpha_{r(K)}^{r(K)}(K) \leqslant \bigvee\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\}$, entonces $r(K) \leqslant \bigvee\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\}(K)$. Por lo tanto $r \preceq \bigvee\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\}$.
Para el regreso: sabemos que $\alpha_M^M = tr_{\{M\}}$ y la traza es idempotente por (1) del Corolario 26, así que $\alpha_M^M \in R-idem$. Por lo que $\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\} \subseteq R-idem$ y del Lema 27 se cumple que $\bigvee\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\} \in R-idem$.
(2) Veamos la ida: sea $r \in R-rad$. Si $M \in \mathbb{F}_r$ entonces $r(M) = 0$, así que $r \preceq \omega_0^M$. Por lo que para todo ${}_RM$ se tiene que $r \preceq \omega_0^M$, y así $r \preceq \bigwedge\{\omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_r\}$.
Para obtener la otra desigualdad, para cualquier ${}_RK$ se cumple que $r(K/r(K)) = 0$ porque r es radical, entonces $K/r(K) \in \mathbb{F}_r$. Nuestra afirmación es que $\omega_0^{K/r(K)} \preceq r(K)$. Consideramos el epimorfismo natural $\rho : K \twoheadrightarrow K/r(K)$ y sabemos por la definición de prerradical aplicada a ω que la restricción $\rho\restriction: \omega_0^{K/r(K)}(K) \twoheadrightarrow \omega_0^{K/r(K)}(K/r(K))$ es homomorfismo y $\omega_0^{K/r(K)}(K/r(K)) = 0$. Por lo que $\rho(\omega_0^{K/r(K)}(K)) \subseteq 0$, es decir que $\omega_0^{K/r(K)}(K) \subseteq ker(\rho) = r(K)$. Luego, $\bigwedge\{\omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_r\}(K) \leqslant \omega_0^{K/r(K)}(K) \leqslant r(K)$.
Para el regreso: sabemos que $\omega_0^M = re_{\{M\}}$ y el rechazo es radical por (2) del Corolario 26, así que $\{\omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_r\} \subseteq R-rad$ y del Lema 27 se tiene que $\bigwedge\{\omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_r\} \in R-rad$.
Q.E.D.

Anteriormente hemos considerado las clases de torsión (o libres de torsión) asociadas a un prerradical, $\mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{F}_\sigma$. Con la definición de esas clases, dado el prerradical arbitrario σ, consideremos las clases $\mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{F}_\sigma$ mediante el par de asignaciones naturales $\sigma \mapsto \mathbb{T}_\sigma$ y $\sigma \mapsto \mathbb{F}_\sigma$. Se puede verificar sin complicaciones que la asignación para $\mathbb{T}_\sigma$ preserva el orden, mientras que la asignación para $\mathbb{F}_\sigma$ lo invierte. Por lo que si $\sigma \preceq \tau$ entonces $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{F}_\sigma \supseteq \mathbb{F}_\tau$. Además, por la Definición 21 y las propiedades de los prerradicales, se deduce que $\mathbb{T}_\sigma$ es clase de pretorsión y que $\mathbb{F}_\sigma$ es clase libre pretorsión:

Proposición 29. *Dado $r \in R-pr$, se cumple que:*

1. $\mathbb{T}_r$ es una clase de pretorsión.

2. $\mathbb{F}_r$ es una clase libre de pretorsión.

Demostración. (1) Tomamos el $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ epimorfismo y $M \in \mathbb{T}_r$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] & N \\
M = r(M) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varphi\restriction"] & r(N) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

como $\varphi(M) = N$ y $\varphi(r(M)) = \varphi(M) \leqslant r(N)$, se deduce que $N \subseteq r(N)$. Por lo que $N \in \mathbb{T}_r$ y $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo epimorfismos.

Ahora, para ver que se cumple la cerradura bajo sumas directas, la Proposición 8 nos da directamente esta propiedad.

(2) Tomamos el $\varphi : N \rightarrowtail M$ monomorfismo con $M \in \mathbb{F}_r$:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\varphi"] & M \\
r(N) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varphi\restriction"] & r(M) = 0 \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

se tiene que $r(N) = 0$ pues $\varphi(r(N)) \subseteq 0$. Por lo que $ker(\varphi\restriction) = r(N)$ y $\mathbb{F}_r$ es cerrada bajo monomorfismos.

Ahora, para ver la cerradura bajos productos directos, nuevamente la Proposición 8 nos da directamente esta propiedad.

Q.E.D.

Es importante notar que estas clases de R-módulos son clases de pretorsión y libres de pretorsión, respectivamente, por la importancia que este hecho desempeña en el estudio acerca de estos objetos relacionados con la Teoría de Módulos. Pero también por la importancia que esto desempeñará posteriormente en este trabajo y la relación que guarda con los prerradicales. Antes de ofrecer algunos de los importantes resultados acerca de las correspondencias entre ciertos conglomerados de prerradicales y clases de módulos, daremos este resultado preliminar que nos será de ayuda:

Lema 30. *Si $\sigma \in R-radidem$ entonces:*
(1) $\mathbb{T}_\sigma$ es clase de torsión.
(2) $\mathbb{F}_\sigma$ es clase libre de torsión.

Demostración. (1) Por la parte (1) de la Proposición 29, tenemos que $\mathbb{T}_\sigma$ ya es clase de pretorsión. Sólo resta mostrar que es cerrada bajo extensiones: Tomamos la sucesión exacta $0 \to N \to M \to L \to 0$ con $N, L \in \mathbb{T}_\sigma$ y M un R-módulo. Como σ es radical idempotente, se cumple que $M/\sigma(M)$ es libre de torsión y tenemos la siguiente sucesión exacta $0 \to Hom(L, M/\sigma(M)) \to Hom(M, M/\sigma(M)) \to Hom(N, M/\sigma(M))$ donde $0 = Hom(L, M/\sigma(M)) = Hom(N, M/\sigma(M))$ y se tiene que $Hom(M, M/\sigma(M)) = 0$. Por lo que $M = \sigma(M)$ y $M \in \mathbb{T}_\sigma$. Esto nos da que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo extensiones y por tanto es clase de torsión.
(2) Aplicando un razonamiento análogo al anterior, tenemos que $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo extensiones.
Q.E.D.

A continuación daremos los resultados en que se presentan las asignaciones entre los radicales idempotentes y las clases T-tors y L-tors que nos dan los isomorfismos buscados:

Proposición 31. *Existe un isomorfismo de orden entre R-radidem y T-tors.*

Demostración. Consideraremos el par de asignaciones $\Phi : R-radidem \to T-tors$ dada por $\Phi(\sigma) = \mathbb{T}_\sigma$, y $\Psi : T-tors \to R-radidem$ dada por $\Psi(\mathbb{T}) = \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M$. La definición de estas asignaciones implica que ambas preservan el orden. Analizaremos la asignación Φ para ver que tiene las propiedades deseadas. Empezamos por notar que por el Lema 30, $\mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{F}_\sigma$ son clases de torsión y libre de torsión, respectivamente. Ahora mostraremos que Φ es biyectiva.
Veamos que Φ es inyectiva: Supongamos que $\Phi(\sigma) = \mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_\tau = \Phi(\tau)$. Veamos que $\sigma = \tau$.
($\preceq$) Sea ${}_R K$. El Lema 30 nos arroja que $\mathbb{T}_\sigma$ es clase de torsión. Por el inciso (1) del Lema 27 tenemos que $\sigma = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M \in R-idem$. Por el inciso (1) del Teorema 22 se tiene que

$\overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M} \in R-radidem$, y como aquí se tiene que $\sigma = \overline{\sigma}$, entonces $\sigma(K) \leqslant \overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M(K)}$, pero como $\mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_\tau$, entonces $\sigma(K) \leqslant \overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M(K)} = \overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\tau} \alpha_M^M(K)}$, y de la Proposición 10 y que τ es radical idempotente se cumple que $\overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\tau} \alpha_M^M(K)} \leqslant \tau(K)$. Por lo que $\sigma(K) \leqslant \tau(K)$.

($\geq$) Sea ${}_RK$. Nuevamente, por el inciso (1) del Lema 27 tenemos que $\tau = \bigvee_{M\in\mathbb{T}_\tau} \alpha_M^M \in R-idem$. Por el inciso (1) del Teorema 22 se tiene que $\overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\tau} \alpha_M^M} \in R-radidem$, y como aquí se tiene que $\tau = \overline{\tau}$, entonces $\tau(K) \leqslant \overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\tau} \alpha_M^M(K)}$, pero $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{T}_\sigma$ y así $\tau(K) \leqslant \overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\tau} \alpha_M^M(K)} = \overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M(K)}$. Usando la Proposición 10 que σ es radical idempotente, tenemos que $\overline{\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M(K)} \leqslant \sigma(K)$. Por lo tanto, $\tau(K) \leqslant \sigma(K)$.

De lo anterior, concluimos que Φ es inyectiva.

Resta mostrar la suprayectividad de Φ. Por la Proposición 29 y el Lema 30, sabemos que en una teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$, $\mathbb{T}$ es cerrada bajo epimorfismos, sumas directas y extensiones, y así cada ${}_RM$ tiene un mayor elemento en $\mathbb{T}$. Consideremos la siguiente asignación: $t : R-Mod \to R-Mod$ dado como $M \mapsto t(M)$ el mayor submódulo de M que está en $\mathbb{T}$. Tal asignación es prerradical por la definición que se le está dando, y podemos darnos cuenta de que para todo ${}_RM$ se tiene que $t(t(M)) = t(M)$ debido a que ese prerradical evaluado en el mayor submódulo de M nos devuelve el mayor submódulo de M. Según la Definición 21, podemos considerar $\mathbb{T}_t$ y $\mathbb{F}_t$ y buscamos que, para la teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$, se cumpla que $\mathbb{T}_t = \mathbb{T}$ y $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}$. Veamos que tenemos esas contenciones:

(Caso $\mathbb{T}_t = \mathbb{T}$) Para mostrar la $\subseteq$, como $t(M) = M$ es el mayor submódulo de M que está en $\mathbb{T}$, ya se cumple lo que buscamos.

Para mostrar la $\supseteq$, de la definición de teorías de torsión sabemos que un $M \in \mathbb{T}$ sii $Hom(M, F) = 0$ para cualquier $F \in \mathbb{F}$. Notemos que $M \in \mathbb{T}$ sii $t(M) = M$. Por lo que al mostrar esta equivalencia tendremos la contención buscada:

(caso $\Rightarrow$) Como $M \in \mathbb{T}$, el mayor submódulo suyo en $\mathbb{T}$ es el mismo, entonces $t(M) = M$.

(caso $\Leftarrow$) Suponemos $t(M) = M$. Pero esto significa que M es el mayor submódulo de M en $\mathbb{T}$. Luego se tiene que $M \in \mathbb{T}$.

(Caso $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}$) Para mostrar $\subseteq$, como $t(M) = 0$, todo morfismo que sale de ${}_RN \in \mathbb{T}$ es tal que debe ser el morfismo cero. Entonces $M \in \mathbb{F}$.

Para mostrar la $\supseteq$, de la definición de teorías de torsión sabemos que un $N \in \mathbb{F}$ sii $Hom(T, N) = 0$ para cualquier $T \in \mathbb{T}$. Notemos que $N \in \mathbb{F}$ sii $t(N) = 0$. Mostremos esta equivalencia para obtener la contención buscada:

(caso $\Rightarrow$) Si $N \in \mathbb{F}$, como t es un prerradical tenemos que $t(N) \in \mathbb{T}$ y también $t(N) \leqslant N$. Entonces $t(N) = 0$.

(caso $\Leftarrow$) Sea que $t(N) = 0$ y $T \in \mathbb{T}$ con un morfismo $f : T \to N$. Entonces $f(T) \leqslant N$, pero como $T \in \mathbb{T}$, también $f(T) \in \mathbb{T}$. Luego $f(T) \leqslant t(N) = 0$, así que $f = \widehat{0}$ y $N \in \mathbb{F}$.

A continuación, veamos que también $t \in R{-}rad$. Si tomamos $L/t(M) \in \mathbb{T}$ y $L/t(M) \leqslant M/t(M)$ tenemos en la sucesión exacta $0 \to t(M) \to L \to L/t(M) \to 0$ que $L \in \mathbb{T}$, pero por la definición de t, se tiene que $t(M) = L$. Por lo que $t(M/t(M)) = 0$ lo cual equivale a que $t \in R - rad$.

Con lo anterior, queda demostrado que para cualquier $\mathbb{T}$, tenemos que existe $\Phi(t) = \mathbb{T}_t = \mathbb{T}$ y Φ es suprayectiva.

Q.E.D.

Haciendo los cambios duales a la demostración anterior, obtenemos la demostración para la siguiente proposición:

Proposición 32. *Existe un anti-isomorfismo de orden entre R-radidem y L-tors.*

Pues proponiendo las asignaciones $\Phi' : R - radidem \to L - tors$ como $\Phi'(\tau) = \mathbb{F}_\tau$, y $\Psi' : L - tors \to R - radidem$ como $\Psi'(\mathbb{F}) = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N$, hacemos las verificaciones en el mismo sentido de la Proposición 31 para hacer notar que Φ' es el isomorfismo buscado con $\Psi' = \Phi'^{-1}$.

Notemos que de las dos proposiciones anteriores tenemos el siguiente caso especial útil acerca de las teorías de torsión y los radicales idempotentes:

Proposición 33. *Sea* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *una teoría de torsión, entonces* $\bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N$ *es un radical idempotente.*

Demostración. Sabemos de las proposiciones 31 y 32 que $\Psi(\mathbb{T}) = \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M$ y $\Psi'(\mathbb{F}) = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N$, respectivamente. Al ser isomorfismo y anti-isomorfismo, respectivamente, se cumple que $\Psi(\mathbb{T}) = \Psi'(\mathbb{F})$.

Q.E.D.

Este resultado nos permite obtener en modo sencillo una de las correspondencias buscadas para nuestro estudio de la clasificación de teorías de torsión con prerradicales:

Teorema 34. *Existe una correspondencia biunívoca entre R-radidem y el conglomerado de las teorías de torsión.*

Demostración. Como la Proposición 33 nos arroja que toda teoría de torsión está asociada a un radical idempotente, usamos el hecho de que tenemos el radical idempotente para ofrecer la siguiente asignación. La asignación $\Delta : \sigma \in R - radidem \mapsto (\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\sigma)$ es la buscada, pues cada uno de los componentes cumple con ser clase de torsión y libre de torsión, respectivamente. De la Proposición 29, tenemos que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo epimorfismos y sumas directas, y $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo monomorfismos y productos directos. De la definición de ambas clases se tiene que $\{0\} = \mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{F}_\sigma$. Nos resta mostrar que se cumple el último axioma para que $(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\sigma)$ sea una teoría de torsión, en efecto: Tomando un ${}_RM$, se tiene la sucesión exacta $0 \to \sigma(M) \to M \to M/\sigma(M) \to 0$, y como $\sigma \in R - radidem$ entonces $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ y así $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$; como $\sigma \in R - radidem$ entonces $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ y así $M/\sigma(M) \in \mathbb{F}_\sigma$. Entonces $(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\sigma)$ cumple el último axioma y es teoría de torsión.
Usando el razonamiento dado en la Proposición 31 con $t : R - Mod \to R - Mod$ definida como $t(M)$ el mayor submódulo de ${}_RM$ que está en $\mathbb{T}$, y como vimos que toda teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F}) = (\mathbb{T}_t, \mathbb{F}_t)$, la asignación $\Gamma : (\mathbb{T}, \mathbb{F}) \mapsto t \in R - radidem$, donde Γ cumple con ser la inversa de la asignación Δ.
Por lo que la asignación $\Delta : \sigma \in R - radidem \mapsto (\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\sigma)$ es el isomorfismo buscado.
Q.E.D.

El siguiente resultado a presentar será útil para poder cambiar el tratamiento dado para clases de torsión (y dualmente, clases libres de torsión) en términos de ciertos supremos de prerradicales que son radicales idempotentes, y viceversa.

Proposición 35. *Sea $\mathscr{C} \in \wp(R - Mod)$. Entonces:*

1. $\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M$ es idempotente y $\overline{\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M} = \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M$ donde $\mathbb{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$, es decir, si $\mathscr{C}$ es clase de torsión entonces $\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M$ es radical idempotente.

2. $\bigwedge_{N \in \mathscr{C}} \omega_0^N$ es radical y $\widehat{\bigwedge_{N \in \mathscr{C}} \omega_0^N} = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N$ donde $\mathbb{F}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathscr{C}$, es decir, si $\mathscr{C}$ es clase libre de torsión entonces $\bigwedge_{N \in \mathscr{C}} \omega_0^N$ es radical idempotente.

Demostración. (1) Sabemos que para ${}_RK$ se tiene que $\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M(K) = \sum_{M \in \mathscr{C}} (\sum\{f(M) \mid f : M \to K\}$. También $\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M(\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M(K)) = \sum_{M \in \mathscr{C}} (\sum\{g(M) \mid g : M \to \sum_{M \in \mathscr{C}} (\sum\{f(M) \mid f : M \to$

$K\}))\})$. Por lo que buscamos la igualdad $\sum\limits_{M\in\mathscr{C}}(\sum\{f(M)\mid f:M\to K\} = \sum\limits_{M\in\mathscr{C}}(\sum\{g(M)\mid g:M\to \sum\limits_{M\in\mathscr{C}}(\sum\{f(M)\mid f:M\to K\})\}))$.

Veamos que para cada ${}_RM$ se tiene que α_M^M es idempotente: Sabemos de la Definición 16 que $\alpha_M^M = tr_{\{M\}}$. Del inciso (1) del Corolario 26, sabemos que $tr_{\{M\}} = \alpha_M^M \in R-idem$. Del inciso (1) del lema 28 tenemos, para $\mathscr{C}\in\wp(R-Mod)$, que $\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M \in R-idem$.

Ahora, tomemos $\mathbb{T}$ la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$. Para ver que $\overline{\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M} = \bigvee\limits_{M\in\mathbb{T}}\alpha_M^M$ lo haremos por doble desigualdad:

(caso $\preceq$) Como $\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M$ es idempotente por el desarrollo anterior, por inciso (1) del Teorema 22 tenemos que $\overline{\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M}$ es idempotente, y por inciso (3) del Teorema 21 tenemos que $\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M \preceq \overline{\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M}$. Como $\mathscr{C}\subseteq\mathbb{T}$, tenemos que $\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M(K) = \sum\limits_{M\in\mathscr{C}}(\sum\{f(M)\mid f:M\to K\} \subseteq \overline{\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M} \subseteq \sum\limits_{M\in\mathbb{T}}(\sum\{f(M)\mid f:M\to K\} = \bigvee\limits_{M\in\mathbb{T}}\alpha_M^M(K)$. Por lo tanto, $\overline{\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M} \preceq \bigvee\limits_{M\in\mathbb{T}}\alpha_M^M$.

(caso $\succeq$) Recordemos algunos datos importantes ahora. El inciso (1) del Lema 28 nos dice que un $\sigma\in R-idem$ si y sólo si $\sigma = \bigvee\limits_{N\in\mathbb{T}_{\alpha_M^M}}\alpha_N^N$. Ahora bien, para $\mathscr{C}=\{M\}$ se cumple que $\mathbb{T}_{\alpha_M^M} = Gen(M)$, esto porque al tomar un $N = \alpha_M^M(N) = \sum\{f(M)\mid f:M\to N\}$ y esta última igualdad sale por el inciso (1) del corolario 25 con $tr_M(N) = N$ visto antes. Ahora notemos que para cualquier familia $\{f_i : M\to N\}_{i\in I}$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M^I \arrow[r, "\oplus f_i"] & N \\
M_i \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f_i"] &
\end{tikzcd}$$

donde $\forall i\in I, M_i = M$. Y en nuestro caso, como $N\in Gen(M)$, tenemos que:

$$\begin{tikzcd}
M^{(X)} \arrow[r, "\varphi-epi"] & N \\
M_x \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi\restriction_{M_x}"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que para cada $N\in Gen(\{M\})$ se cumple la situación anterior. Ampliando esto a $\mathscr{C}$ tenemos que $\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M = \bigvee\limits_{N\in\mathbb{T}_{\bigvee_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M}}\alpha_N^N$ donde $\mathbb{T}_{\bigvee_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M} = Gen(\mathscr{C})$. La copotencia $\overline{\bigvee\limits_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M}$ cumple con ser radical idempotente por lo visto en el desarrollo anterior, y de la correspondencia entre $R-radidem$ y $\mathbb{T}-tors$ dada en la Proposición 31 tenemos que $\mathbb{T}_{\bigvee_{M\in\mathscr{C}}\alpha_M^M}$ es una clase de

torsión que se corresponde con $\mathscr{C}$. Y como por hipótesis $\mathbb{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$, tenemos que $\bigvee_{M\in\mathbb{T}} \alpha_M^M \preceq \overline{\bigvee_{M\in\mathscr{C}} \alpha_M^M}$.
(2) Para tener esta parte, notemos que todo el desarrollo de la parte 1 utilizó las primeras partes de los lemas y corolarios mencionados ahí. Por lo que las correspondientes segundas partes nos arrojan en modo análogo que $\bigwedge_{N\in\mathscr{C}} \omega_0^N$ es radical. Además, $\widehat{\bigwedge_{N\in\mathscr{C}} \omega_0^N} = \bigwedge_{N\in\mathbb{F}} \omega_0^N$ con $\mathbb{F}$ con $\mathbb{F}$ la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathscr{C}$ se obtiene análogamente por la Proposición 32 que da la correspondencia entre $R-radidem$ y $\mathbb{L}-tors$.
Q.E.D.

A partir de las correspondencias dadas en los resultados recientes, podemos empezar a explorar algunas otras correspondencias que se dan entre ciertas clases de prerradicales con ciertos componentes de cierta clase de teorías de torsión. La siguiente proposición nos servirá para relacionar la exactitud por un lado de un prerradical con la parte de torsión asociada a alguna teoría:

Proposición 36. *Dado $\sigma \in R-pr$, son equivalentes:*
1. $\sigma \in R-prei$.
2. Para todo $_RM$ y todo $N \leqslant M$ se tiene que $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$.
3. σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos (monomorfismos).

Demostración. De la Proposición 12 tenemos la equivalencia de (1) y (2). Resta ver que se cumple la equivalencia con (3):
(caso (2) $\Rightarrow$ (3)) Sea un $_RM$. Como $\sigma(M) \leqslant M$ y vale (2), entonces $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)\cap\sigma(M) = \sigma(M)$ y σ es idempotente.
Además, notemos que para $A \leqslant B$ y $\sigma(B) = B$, tenemos que $\sigma(A) = A \cap \sigma(B) = A \cap B = A$, lo cual muestra que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos.
(caso (3) $\Rightarrow$ (2)) Nótese por un lado que, para $A \subseteq B$, $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$. Además $\sigma(A) \subseteq A$ y así $\sigma(A) \subseteq A \cap \sigma(B)$.
Por otro lado, como σ es idempotente, para todo $_RM$, se tiene que $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ y se tiene que $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$, pero $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos y tenemos que $\sigma(N) = N\ \forall N \leqslant \sigma(M)$.
Entonces, considerando $\sigma(B)\cap A \subseteq A$ con $A \in \mathbb{T}_\sigma$, se tiene que $\sigma(A) \supseteq \sigma(\sigma(B)\cap A) = \sigma(B)\cap A$.
Por lo que $\sigma(A) = A \cap \sigma(B)$ y $\sigma \in R-prei$ por la Proposición 12.
Q.E.D.

La propiedad (3) de $\mathbb{T}_\sigma$ en la Proposición 36 que habla acerca de la cerradura bajo submódulos es lo que entendemos como una clase de pretorsión hereditaria. Haciendo uso de razonamientos usados en los recientes resultados y con lo que sabemos de los prerradicales exactos izquierdos, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 37. *Existe una correspondencia biunívoca entre R-prei y el conglomerado de todas las clases de pretorsión hereditarias. Dicha correspondencia se puede acotar a una entre R-rei y las clases de torsión hereditarias.*

Demostración. Sabemos del Corolario 13 que todo prerradical exacto izquierdo es idempotente. Si denotamos por R-TORS al conglomerado de las teorías de torsión y por R-tors al conglomerado de las teorías de torsión hereditarias, por el Teorema 34 tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
R-TORS \arrow[r] & R-radidem \arrow[r] & R-TORS \\
R-tors \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\restriction"] & R-prei \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\restriction"] & R-tors \arrow[u, "\iota"]
\end{tikzcd}$$

Y sustituyendo la clase R-prei por la R-rei en el diagrama anterior, obtenemos la correspondiente biyección con las clases de torsión hereditarias. Esto nos da la correspondencia biunívoca buscada.

Q.E.D.

Con la proposición anterior, ahora tenemos una parte de la clasificación de teorías de torsión en términos de prerradicales con ciertas propiedades. Veremos después que, al considerar anillos de ciertas características, la relación que hay entre las teorías de torsión y los R-prerradicales refleja los cambios provocados por determinado anillo. Pero antes, veremos más a detalle la relación guardada entre las teorías de torsión y prerradicales con las conexiones de Galois por medio de otro resultado importante que será nuestro siguiente objetivo. Para ello, comenzaremos por presentar a detalle los conceptos y nociones preliminares para esto.

Hacia una generalización de la relación entre R-Mod, R-pr y las conexiones de Galois *Gal*. El Teorema de Domenach-Leclerc

Cuando se presentó el Teorema de polaridades, se hizo énfasis en que su utilidad radica en la conexión de Galois entre la clase de un producto de colecciones de objetos, A y B, con el producto entre las clases de tales colecciones, $\wp(A)$ y $\wp(B)$. Nuestro objetivo es llevar la construcción de ese tipo de conexiones de Galois más lejos por medio de las siguientes nociones que generalizan las colecciones de objetos y las asignaciones entre ellos para formar más tipos de conexiones de Galois.

Comenzamos con la presentación de los siguientes conceptos:

Definición 22. *Para A un conjunto, $\varphi : \wp(A) \to \wp(A)$ un operador cerradura y $\Phi \subseteq Im(\varphi)$, si Φ cumple:*
1. $A \in \Phi$,
2. $\Phi' \subseteq \Phi$ implica que $\bigcap \Phi' \in \Phi$,
entonces Φ es una <u>familia de Moore</u> y (A, φ) es un espacio cerradura.

Definición 23. *Sean (A, φ) y (B, φ') dos espacios cerradura con familias de Moore Φ y Φ', respectivamente. Decimos que una relación $R \in \wp(A \times B)$ es <u>bicerrada</u> con respecto a Φ y Φ' si satisface:*
1. Para todo $a \in A$, $aR \in \Phi'$, donde $aR = \{b \in B \mid (a, b) \in R\}$.
2. Para todo $b \in B$, $Rb \in \Phi$, donde $Rb = \{a \in A \mid (a, b) \in R\}$.
El conjunto de las relaciones bicerradas se denota como $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.

Nuevamente, los conceptos de familia de Moore y relación bicerrada son aplicables a conjuntos, clases y conglomerados. Además, estos nuevos conceptos recuperan varias de las propiedades que se tienen para el caso de los conjuntos y las relaciones dadas por los productos cartesianos tratados por las polaridades. Podemos comenzar a apreciar esto con lo siguiente. Si tomamos un par de espacios cerradura (A, φ) y (B, φ') con sus correspondientes familias de Moore Φ y Φ', entonces: i) de $A \in \Phi$ y $B \in \Phi'$ se sigue que $a(A \times B) = \{b \in B \mid (a, b) \in A \times B\} = B \in \Phi'$ para cada $a \in A$, y $(A \times B)b = \{a \in A \mid (a, b) \in A \times B\} = A \in \Phi$ para cada $b \in B$, y así $A \times B \in R_{\varphi\varphi'}$; ii) si $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R_{\varphi\varphi'}$, entonces para cada $a \in A$ y $\alpha \in \Lambda$ tenemos que $aR_\alpha \in \Phi'$, de lo cual se sigue que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} aR_\alpha \in \Phi'$ y se cumple también $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} aR_\alpha = a(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha)$, y análogamente:

$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha b \in \Phi$ y también $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha b = (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha)b$ para cada $b \in B$, por lo que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha \in R_{\varphi\varphi'}$.

Así como en el Teorema de Polaridades, exhibimos las asignaciones que permitirán establecer la correspondencia biunívoca entre familias de Moore y relaciones bicerradas. Tomando (A, φ) y $(B, \varphi^{'})$ dos espacios cerradura con familias de Moore Φ y $\Phi^{'}$, respectivamente, las asignaciones son las siguientes:

$\mu : \wp(A \times B) \to \Phi'^{\Phi} \times \Phi^{\Phi^{'}}$ dada como $\mu(R) = \langle \mu_1(R), \mu_2(R) \rangle$ y estas componentes son dadas como:

$\mu_1(R) : \Phi \to \Phi^{'}$ definida como $\mu_1(R)(U) = \varphi^{'}(\bigcap_{a\in U} aR)$, $U \in \Phi$.

$\mu_2(R) : \Phi^{'} \to \Phi$ definida como $\mu_2(R)(V) = \varphi(\bigcap_{b\in V} Rb)$, $V \in \Phi^{'}$.

También se definen las asignaciones:

$\nu_1 : \Phi'^{\Phi} \to \wp(A \times B)$ definida como $\nu_1(f) = \{(a, b) \in A \times B \,|\, b \in f(\varphi(\{a\}))\}$.

$\nu_2 : \Phi^{\Phi^{'}} \to \wp(A \times B)$ definida como $\nu_2(g) = \{(a, b) \in A \times B \,|\, a \in g(\varphi^{'}(\{b\}))\}$.

La siguiente proposición expone algunas propiedades que las asignaciones anteriores cumplen:

Proposición 38. *Sean (A, φ) y (B, φ') dos espacios cerradura con Φ y Φ' sus familias de Moore correspondientes. Entonces:*

1) Para cada $R \in \wp(A \times B)$ se cumple que $\mu_1(R)$ y $\mu_2(R)$ son antítonas.

2) μ_1 y μ_2 son isótonas.

3) ν_1 y ν_2 son isótonas.

4) Si $R \in R_{\varphi\varphi'}$ entonces $\mu(R) \in Gal(\Phi, \Phi')$.

5) Si $f \in Gal(\Phi, \Phi')$ entonces $\nu_1(f_+) = \nu_2(f^+)$ y $\nu_1(f_+) \in R_{\varphi\varphi'}$.

Demostración. (1) Para $R \in \wp(A \times B)$ y $U, U' \in \wp(A)$ tales que $U \subseteq U'$, se cumple que $\bigcap_{a\in U} aR \supseteq \bigcap_{a\in U'} aR$. Entonces $\mu_1(R)(U) = \varphi'(\bigcap_{a\in U} aR) \supseteq \varphi'(\bigcap_{a\in U'} aR) = \mu_1(R)(U')$. Luego $\mu_1(R)$ es antítona (del mismo modo $\mu_2(R)$).

(2) Sean $R, S \in \wp(A \times B)$ con $R \subseteq S$. Para todo $a \in A$, $aR \subseteq aS$, entonces $\bigcap_{a\in U} aR \subseteq \bigcap_{a\in U} aS$ con $U \in \wp(A)$. Entonces $\mu_1(R)(U) = \varphi'(\bigcap_{a\in U} aR) \subseteq \varphi'(\bigcap_{a\in U} aS) = \mu_1(S)(U)$. De modo que μ_1 (similar con μ_2) es isótona.

(3) Tomamos $f_1, f_2 \in \Phi'^{\Phi}$ tales que $f_1 \leqslant f_2$. De la preservación de orden de φ se cumple que: $\{(a, b) \in A \times B \,|\, b \in f_1(\varphi(\{a\}))\} \subseteq \{(a, b) \in A \times B \,|\, b \in f_2(\varphi(\{a\}))\}$. Por las asignaciones ν dadas, se sigue que $\nu_1(f_1) \subseteq \nu_1(f_2)$ y ν_1 preserva el orden (del mismo modo, ν_2 preserva el orden).

(4) Sea $R \in R_{\varphi\varphi'}$. De (1) sabemos que $\mu_1(R) : \Phi \to \Phi'$ y $\mu_2(R) : \Phi' \to \Phi$ son antítonas. Veamos que las composiciones entre ellas son operadores cerradura: Sea $U \in \Phi$, $\mu_1(R)(U) = \varphi'(\bigcap_{a\in U} aR)$ y $\mu_2(R)(\mu_1(R)(U)) = \varphi(\bigcap_{b\in\mu_1(R)(U)} Rb) \supseteq U$. Por tanto, $\mu_2(R) \circ \mu_1(R)$ es operador cerradura (del mismo modo $\mu_1(R) \circ \mu_2(R)$ lo es). Así, por la definición de conexión de Galois $\mu(R) = \langle \mu_1(R), \mu_2(R) \rangle \in Gal(\Phi, \Phi')$.

(5) Sea $f \in Gal(\Phi, \Phi')$. Análogo al Teorema de Polaridades, se tiene que: $\nu_1(f_+) = \{(a, b) \in A \times B \,|\, b \in f_+(\varphi(\{a\}))\} = \{(a, b) \in A \times B \,|\, a \in f^+(\varphi(\{b\}))\} = \nu_2(f^+)$. Así $\nu_1 = \nu_2$

Para $a \in A$ se tiene que $a\nu_1(f_+) = \{b \in B \,|\, b \in f_+(\varphi(\{a\}))\} \in \Phi'$ (Similarmente $\nu_1(f_+)b \in \Phi$).

Luego $\nu_1(f_+) \in R_{\varphi\varphi'}$.

Q.E.D.

Las propiedades dadas en la Proposición 38 se requieren para dar el resultado que generaliza la situación del Teorema de Polaridades. La generalización a obtenerse nos permitirá analizar en términos de conexiones de Galois diferentes colecciones de relaciones bicerradas, lo cual será muy útil en vista de que hay diversas formas de tener espacios cerradura con sus respectivas familias de Moore aparte de la particular en términos de la identidad que se da en el Teorema de Polaridades.

Teorema 39. *(Teorema de Domenach-Leclerc). Sean A y B dos conjuntos. Sean (A, φ) y (B, φ') dos espacios cerradura con Φ y Φ' sus respectivas familias de Moore. Entonces existe un isomorfismo de orden entre $\langle R_{\varphi\varphi'}, \subseteq \rangle$ y $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \leqslant \rangle$.*

Demostración. Sean $R \in R_{\varphi\varphi'}$ y $f \in Gal(\Phi, \Phi')$. De la Proposición 38 sabemos que $\mu(R) \in Gal(\Phi, \Phi')$ y $\nu_1(f_+) = \nu_2(f^+) \in R_{\varphi\varphi'}$. Definimos $\nu : Gal(\Phi, \Phi') \to \wp(A \times B)$ como $\nu(f) = \nu_1(f_+) = \nu_2(f^+)$. Usamos la Proposición 38 para mostrar que $\nu\mu$ y $\mu\nu$ son las respectivas identidades:

(Caso $\nu\mu(R) = R$)

Para la $\subseteq$: Sea $(a, b) \in \nu\mu(R)$ y tomemos $\mu(R) = (f)_R$. Entonces $\nu\mu(R) = \nu((f)_R) = \{(a, b) \,|\, b \in f_R(\varphi(\{a\}))\}$. Luego $b \in f_R(\varphi(\{a\})) = \bigcap_{x\in\varphi(\{a\})} xR \subseteq aR$, lo que implica que $(a, b) \in R$, pues $a \in \varphi(\{a\})$. Así $\nu\mu(R) \subseteq R$.

Para la $\supseteq$: Para $b \in aR$ se tiene que $(a, b) \in R$, entonces $\{a\} \subseteq Rb$ y así $\varphi(\{a\}) \subseteq Rb$. Para $x \in \varphi(\{a\})$ se sigue que $x \in Rb$, $(x, b) \in R$ y $b \in xR$.

Entonces $aR \subseteq \bigcap_{x\in\varphi(\{a\})} xR = \varphi'(\bigcap_{x\in\varphi(\{a\})} xR) = f_R(\varphi(\{a\}))$. Luego $b \in f_R(\varphi(\{a\}))$ y así $(a, b) \in$

$\nu\mu(R)$ y $R \subseteq \nu\mu(R)$.

Por tanto $\nu\mu(R) = R$

(Caso $\mu\nu(f) = f$)

Para $f \in Gal(\Phi, \Phi')$ se cumple, para todo $U \in \Phi$, que $U = \bigcup_{a \in U} \varphi(\{a\}) = \varphi(\bigcup_{a \in U} \varphi(\{a\}))$. Entonces $f_+(U) = \bigcap_{a \in U} f_+(\varphi(\{a\})) = \bigcap_{a \in U} a\nu(f) = f_{\nu(f)}(U)$. Entonces $f_+ = f_{\nu(f)} \restriction_{\Phi,\Phi'}$ y análogamente: $f^+ = f^{\nu(f)} \restriction_{\Phi,\Phi'}$. De la Proposición 38 se tiene que $\mu\nu(f) = (f)_{\nu(f)} \restriction_{\Phi,\Phi'} = f$.

Por tanto: $\langle R_{\varphi\varphi'}, \subseteq\rangle \cong \langle Gal(\Phi, \Phi'), \leqslant\rangle$.

Q.E.D.

¿Cómo es que el Teorema de Domenach-Leclerc constituye una generalización del de polaridades? Tomamos $\varphi : \wp(A) \to \wp(A)$ y $\varphi' : \wp(B) \to \wp(B)$ como la identidad (que es un operador cerradura), $\Phi = \wp(A)$ y $\Phi' = \wp(B)$. Así $R_{\varphi\varphi'} = \wp(A \times B)$ y para cada $R \in R_{\varphi\varphi'}$ y $f \in Gal(\Phi, \Phi')$ se tiene que $f_R(\{a\}) = aR$ y $f^R(\{b\}) = Rb$. La demostración del Teorema de Domenach-Leclerc nos da como resultado el Teorema de polaridades.

A partir de ahora, nos dedicaremos a llevar estas nociones al terreno de los módulos sobre un anillo R para explorar el tipo de conexiones de Galois que pueden darse cuando consideremos ciertas relaciones bicerradas y la información que se extrae de ello.

Capítulo 4

Preliminares en Teoría de Categorías

El Teorema de Domenach-Leclerc será un recurso importante para establecer el esquema general en que se da una conexión de Galois entre ciertos espacios cerradura conformados por R-módulos y otros espacios de R-prerradicales. Antes de proceder con esto, requerimos dar las siguientes propiedades que se tienen con ciertas relaciones bicerradas, inducidas por los morfismos entre R-módulos.

No se podrá avanzar mucho más en lo anterior sin antes introducir un terreno de estudio dado por la Teoría de Categorías, pues con ello contemplaremos las relaciones bicerradas que nos interesa analizar por medio de familias de Moore y espacios cerradura.[31]

Convenimos en usar la definición usual de categoría: Dos colecciones una de las cuales es la de objetos y la otra la de morfismos (flechas) entre tales objetos que cumplen con los axiomas básicos de la composición entre morfismos y la identidad. Consideraremos categorías de los tipos siguientes:

Definición 24. *La categoría $\mathcal{A}$ cumple con ser:*

I) ***Completa*** *si todos los diagramas pequeños de $\mathcal{A}$ tienen límite en $\mathcal{A}$.*

II) ***Cocompleta*** *si todos los diagramas pequeños de $\mathcal{A}$ tienen colímite en $\mathcal{A}$.*

III) ***Bicompleta*** *si $\mathcal{A}$ es completa y cocompleta.*

Definición 25. *La categoría $\mathcal{A}$ es* ***preaditiva*** *si:*

I) La operación $Hom_{\mathcal{A}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{A}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$ es bilineal.

II) Para cualesquiera objetos $A, B \in \mathcal{A}$, $Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ es un grupo abeliano.

[31] Esta sección es meramente introductoria y puede ser omitida por aquellos lectores que tengan el conocimiento acerca de lo que es una categoría, categorías bicompletas y propiedades de funtores. Es importante destacar que, aunque las definiciones y resultados que se presentan en esta sección encuentran su generalidad en el marco de la Teoría de Categorías, para los fines de este trabajo y evitar salirnos del contexto de la Teoría de Módulos, a partir de ahora estaremos pensando los resultados y sus demostraciones presentados para los módulos, prerradicales, teorías de torsión, etc.

La categoría se vuelve ***aditiva*** *si cada par de objetos tiene producto y coproducto.*

Definición 26. *Una categoría $\mathcal{A}$ es* ***abeliana*** *si es preaditiva y cumple:*
I) $\mathcal{A}$ tiene objeto cero.
II) Cada par de objetos en $\mathcal{A}$ tiene producto y coproducto.
III) Todo morfismo de $\mathcal{A}$ tiene kernel y cokernel.
IV) Cada monomorfismo es kernel de algún morfismo.
V) Cada epimorfismo es cokernel de algún morfismo.

La Definición 26 nos da como resultado que en las categorías abelianas se cumple que todo morfismo $h : A \to B$ se factoriza como $h = fg$ donde f es un monomorfismo y g es un epimorfismo. Lo anterior nos permite definir ciertas categorías, en las que se cumple esa factorización para cada morfismo entre objetos, como categorías **exactas**. Las categorías abelianas son exactas por definición. Además, los conceptos de sucesión exacta y funtor exacto tienen su fundamento en la exactitud vista desde las categorías.

Tomamos nuestro entendimiento básico de lo que es ser un funtor entre categorías $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (esto es, una asignación que relaciona los objetos y morfismos de $\mathcal{A}$ con los de $\mathcal{B}$, respectivamente) y notemos que los funtores y los morfismos respetan los productos y coproductos entre categorías. Para la familia $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in X}$ de morfismos, se tiene que:

$Im(\prod_{i\in X} f_i) \cong \prod_{i\in X} Im(f_i)$ y $Ker(\prod_{i\in X} f_i) \cong \prod_{i\in X} Ker(f_i)$
$Im(\bigoplus_{i\in X} f_i) \cong \bigoplus_{i\in X} Im(f_i)$ y $Ker(\bigoplus_{i\in X} f_i) \cong \bigoplus_{i\in X} Ker(f_i)$

Estas propiedades nos permiten mostrar de inmediato que los productos y coproductos preservan la exactitud de las sucesiones de objetos en categorías bicompletas.

Proposición 40. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta y $\{0 \to N_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} L_i \to 0\}_{i\in X}$ una familia de sucesiones exactas en $\mathcal{A}$. Entonces las sucesiones:*
I) $0 \to \bigoplus_{i\in X} N_i \xrightarrow{\bigoplus f_i} \bigoplus_{i\in X} M_i \xrightarrow{\bigoplus g_i} \bigoplus_{i\in X} L_i \to 0$
II) $0 \to \prod_{i\in X} N_i \xrightarrow{\prod f_i} \prod_{i\in X} M_i \xrightarrow{\prod g_i} \prod_{i\in X} L_i \to 0$
son exactas.

Demostración. Las propiedades de los productos y coproductos nos dan que $Ker(\bigoplus_{i\in X} g_i) = \bigoplus_{i\in X} Ker(g_i) = \bigoplus_{i\in X} Im(f_i) = Im(\bigoplus_{i\in X} f_i)$, y para cada $i \in X$, los f_i son monomorfismos y los g_i son epimorfismos, y esto implica que $\bigoplus_{i\in X} f_i$ es monomorfismo y $\bigoplus_{i\in X} g_i$ es epimorfismo.

Entonces la sucesión en (I) es exacta (en modo análogo se tiene que (II) es exacta).
Q.E.D.

Otra noción que será de utilidad en el estudio que haremos en este trabajo es la de par adjunto. Antes, recordemos que un funtor F es **covariante** si preserva todos los objetos y morfismos entre categorías, siendo que si en $\mathcal{A}$ se tiene el morfismo $f : A \to B$ entonces F cumple que $F(f) : F(A) \to F(B)$; dualmente un funtor G es **contravariante** si preserva todos los objetos pero invierte los morfismos entre categorías, siendo que si en $\mathcal{A}$ se tiene el morfismo $f : A \to B$ entonces G cumple que $G(f) : G(B) \to G(A)$. Además, un funtor covariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es **exacto izquierdo** (dualmente, **exacto derecho**) si para cada sucesión exacta $0 \to N \to M \to L \to 0$ en $\mathcal{A}$, se cumple que $0 \to F(N) \to F(M) \to F(L)$ es exacta en $\mathcal{B}$ (dualmente, $F(N) \to F(M) \to F(L) \to 0$ es exacta en $\mathcal{B}$). Esta definición nos arroja de inmediato la propiedad general de que los funtores exactos izquierdos (o derechos) que cumplen con esa propiedad de exactitud por un lado es equivalente a que para toda sucesión exacta $0 \to N \to M \to L$ en $\mathcal{A}$ (dualmente, $N \to M \to L \to 0$ en la misma categoría) se cumple que $0 \to F(N) \to F(M) \to F(L)$ es exacta en $\mathcal{B}$ (dualmente, $F(N) \to F(M) \to F(L) \to 0$ en la misma categoría).

Proposición 41. *Para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas bicompletas y $\{F_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\}_{i\in X}$ una familia de funtores covariantes, $\prod_{i\in X} F_i$ y $\bigoplus_{i\in X} F_i$ son funtores covariantes.*

Demostración. Se define $\prod_{i\in X} F_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ como $(\prod_{i\in X} F_i)(M) = \prod_{i\in X} F_i(M)$ para todo $M \in \mathcal{A}$, y a cada morfismo $f : M \to N$ le asigna el morfismo $(\prod_{i\in X} F_i)(f) : (\prod_{i\in X} F_i)(M) \to (\prod_{i\in X} F_i)(N)$ dado como: $((\prod_{i\in X} F_i)(f))(M) = (\prod_{i\in X}(F_i(f)))(M) = \prod_{i\in X}(F_i(f))(M)$. Se cumple que $(\prod_{i\in X} F_i)(1_M) = 1_{\prod_{i\in X} F_i(M)}$ y para los morfismos $f : N \to M$ y $g : M \to L$ se tiene $(\prod_{i\in X} F_i)(g \circ f) = (\prod_{i\in X} F_i(g)) \circ (\prod_{i\in X} F_i(f))$. Por lo que $\prod_{i\in X} F_i$ es un funtor covariante (y en modo similar $\bigoplus_{i\in X} F_i$).
Q.E.D.

Proposición 42. *Sea $\{F_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\}_{i\in X}$ una familia de funtores.*
I. Si F_i es exacto izquierdo para todo $i \in X$, entonces $\prod_{i\in X} F_i$ y $\bigoplus_{i\in X} F_i$ son exactos izquierdos.
II. Si F_i es exacto derecho para todo $i \in X$, entonces $\prod_{i\in X} F_i$ y $\bigoplus_{i\in X} F_i$ son exactos derechos.

Demostración. Sea $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{A}$. Para mostrar (I), tomamos la sucesión $\prod_{i\in X} F_i(N) \xrightarrow{\prod_{i\in X} F_i(f)} \prod_{i\in X} F_i(M) \xrightarrow{\prod_{i\in X} F_i(g)} \prod_{i\in X} F_i(L)$. Para ca-

da $i \in X$, en las sucesiones exactas $0 \to F_i(N) \xrightarrow{F_i(f)} F_i(M) \xrightarrow{F_i(g)} F_i(L) \to 0$, como cada F_i es exacto izquierdo, tenemos que cada $F_i(f)$ es un monomorfismo. Entonces se tiene que $Ker(\prod_{i\in X} F_i(f)) = \prod_{i\in X} Ker(F_i(f)) = 0$ y así $Im(\prod_{i\in X} F_i(f)) = \prod_{i\in X} Im(F_i(f)) = \prod_{i\in X} Ker(F_i(g)) = Ker(\prod_{i\in X} F_i(g))$. Por lo que $\prod_{i\in X} F_i$ es exacto izquierdo (análogamente, $\bigoplus_{i\in X} F_i$ es exacto izquierdo).
La demostración para (II) se tiene haciendo los cambios relevantes a lo dicho en (I).
Q.E.D.

Recordemos que en las categorías tenemos objetos que se definen como límites (dualmente, colímites) si cumplen con ser los objetos terminales (dualmente, iniciales) en un cono (dualmente, cocono) de la categoría. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserva un límite $\mathcal{L} = \{J \xrightarrow{l_i} D_i\}$ de $D : J \to \mathcal{A}$ siempre que $F(\mathcal{L}) = \{F(J) \xrightarrow{F(l_i)} F(D_i)\}$ sea un límite de $F \circ D : J \to \mathcal{B}$ (dualmente, sabemos que al voltear las flechas, F preservará colímites). Requerimos esto para hablar de lo siguiente:

Definición 27. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías completas. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es* ***continuo(cocontinuo)*** *si preserva todos los límites (colímites) pequeños.*

La propiedad de exactitud por un lado nos permite tener el siguiente resultado respecto a la asignación Hom que sabemos es un tipo de funtor que será muy recurrente en este trabajo:

Proposición 43. *Sean $\mathcal{A} \subseteq R-Mod$ una categoría abeliana y $E : 0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ una sucesión en $\mathcal{A}$ que no es necesariamente exacta. Si para cada $M \in \mathcal{A}$ se cumple que la sucesión $0 \to Hom_{\mathcal{A}}(M, N') \xrightarrow{f*} Hom_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{g*} Hom_{\mathcal{A}}(M, N'')$ es exacta, entonces la sucesión E es exacta.*

Demostración. Supongamos que E no fuera exacta, entonces se tiene que $Im(f) \subsetneq Ker(g)$ (pues E es sucesión y por lo menos se tiene la contención entre esos módulos). Sea $gf \neq 0$, pero por la exactitud de la sucesión con Hom, se tiene que $g^*f^* = 0$, y se tiene que $Ker(g^*) = Im(f^*)$, luego se cumple que hay un morfismo $k : M \to N'$ para todo $M \in \mathcal{A}$ tal que $g^*f^*(k) = 0$ y en particular $kgf = 0$, y por hipótesis de $gf \neq 0$ sólo puede ser porque $k = 0$ para todo $M \in \mathcal{A}$, en particular para M = N', lo que contradice que $1_{N'} \in Hom_{\mathcal{A}}(N', N')$. Por lo que $gf = 0$ y E es exacta.
Q.E.D.

Esta propiedad[32] nos servirá para estudiar cómo el funtor Hom puede ser entendido como una relación bicerrada, con lo que se hace posible usar lo que sabemos acerca de familias de Moore y conexiones de Galois para estudiar ese funtor. Requeriremos del siguiente concepto acerca de pares de funtores:

Definición 28. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Una* ***adjunción*** *de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ es una terna $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ donde F y G son funtores $\mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B}$ con F de ida y G de regreso y φ es una función que asigna a cada par de objetos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ una biyección $\varphi_{A,B} : Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \cong Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ que es una transformación-isomorfismo natural entre F y G. $\langle F, G \rangle$ se llama* ***par adjunto*** *con F el adjunto izquierdo y G el adjunto derecho.*

La información que sabemos de la Proposición 43 acerca del funtor Hom nos ayudará a demostrar la siguiente proposición.

Proposición 44. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas. Si $\langle F, G \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un par adjunto, entonces F es exacto derecho y G es exacto izquierdo.*

Demostración. Haremos el caso para la exactitud derecha de F, siendo el caso de la exactitud izquierda de G análogo. Sea $A' \to A \to A'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{A}$. Aplicando el funtor $Hom_{\mathcal{A}}(\ , G(B))$ tenemos que la sucesión:
$0 \to Hom_{\mathcal{A}}(A'', G(B)) \to Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \to Hom_{\mathcal{A}}(A', G(B))$
es exacta en $\mathcal{A}$. Por la adjunción $\langle F, G \rangle$ y los isomorfismos naturales:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{A}}(A'', G(B)) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{A}}(A', G(B)) \\
0 \arrow[r] & Hom_{\mathcal{A}}(F(A''), B) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & Hom_{\mathcal{A}}(F(A), B) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & Hom_{\mathcal{A}}(F(A'), B) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

se tiene que para toda $B \in \mathcal{B}$ la sucesión $0 \to Hom_{\mathcal{B}}(F(A''), B) \to Hom_{\mathcal{B}}(F(A), B) \to Hom_{\mathcal{B}}(F(A'), B)$ es exacta. La Proposición 43 nos da que $F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$ es exacta y así F es exacto derecho.
Q.E.D.

[32]Vale la pena notar que la propiedad se sigue cumpliendo con el funtor $Hom_{\mathcal{A}}(\ , N)$ que fija por el lado derecho al módulo N.

Otras propiedades se deducen de la definición de par adjunto que hemos presentado.[33]

Requerimos la covariancia y contravariancia de funtores para hacer notar lo siguiente. Para una familia de objetos $\{M_\alpha\}$ en la categoría $\mathcal{A}$, los morfismos proyección $\rho_\beta : \prod M_\alpha \to M_\beta$, e inclusión $\iota_\beta : M_\beta \to \bigoplus M_\alpha$ para productos y coproductos tienen la siguiente propiedad: Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor covariante, entonces los homomorfismos $F(\rho_\beta) : F(\prod M_\alpha) \to F(M_\beta)$ inducen el homomorfismo $\prod F(\rho_\alpha) : F(\prod M_\alpha) \to \prod F(M_\beta)$, y los homomorfismos $F(\iota_\beta) : F(M_\beta) \to F(\bigoplus M_\alpha)$ inducen el homomorfismo $\bigoplus F(\iota_\alpha) : \bigoplus F(M_\alpha) \to F(\bigoplus M_\alpha)$; si $F' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor contravariante, entonces los homomorfismos $F'(\rho_\beta) : F'(M_\beta) \to F'(\prod M_\alpha)$ inducen el homomorfismo $\bigoplus F'(\rho_\alpha) : \bigoplus F'(M_\alpha) \to F'(\prod M_\alpha)$, y los homomorfismos $F'(\iota_\beta) : F'(\bigoplus M_\alpha) \to F'(M_\beta)$ inducen el homomorfismo $\prod F'(\iota_\alpha) : F'(\bigoplus M_\alpha) \to \prod F'(M_\alpha)$. Ahora procedemos a dar las siguientes definiciones:

Definición 29. *Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor covariante y $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor contravariante.*

1. F es un funtor ***covariante casi continuo*** *si:*

(i) F es exacto izquierdo.

(ii) Para cada familia indexada con un conjunto $\{M_\alpha\}$ de objetos en $\mathcal{A}$, el homomorfismo inducido $\prod F(\rho_\alpha) : F(\prod M_\alpha) \to \prod F(M_\alpha)$ es monomorfismo.

2. F es un funtor ***covariante casi cocontinuo*** *si:*

(i) F es exacto derecho.

(ii) Para cada familia indexada con un conjunto $\{M_\alpha\}$ de objetos en $\mathcal{A}$, el homomorfismo inducido $\bigoplus F(\iota_\alpha) : \bigoplus F(M_\alpha) \to F(\bigoplus M_\alpha)$ es epimorfismo.

3. G es un funtor ***contravariante casi continuo*** *si:*

(i) G es exacto izquierdo.

(ii) Para cada familia indexada con un conjunto $\{M_\alpha\}$ de objetos en $\mathcal{A}$, el homomorfismo inducido $\prod G(\iota_\alpha) : G(\bigoplus M_\alpha) \to \prod G(M_\alpha)$ es monomorfismo.

4. G es un funtor ***contravariante casi cocontinuo*** *si:*

(i) G es exacto derecho.

(ii) Para cada familia indexada con un conjunto $\{M_\alpha\}$ de objetos en $\mathcal{A}$, el homomorfismos inducido $\bigoplus G(\rho_\alpha) : \bigoplus G(M_\alpha) \to G(\prod M_\alpha)$ es epimorfismo.

La definición anterior es lo suficientemente general para asegurar que la casi continuidad

[33] Por ejemplo, de la definición de par adjunto y de la proposición 44 se puede deducir que, el par adjunto $\langle F, G\rangle$ en categorías abelianas bicompletas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es tal que F preserva los límites pequeños y G preserva los colímites pequeños.

(dualmente, la casi cocontinuidad) es una propiedad funtorial que puede estar presente en ambos tipos de funtores (covariantes y contravariantes). No es difícil notar que todo funtor continuo (cocontinuo) (covariante o contravariante) es un funtor casi continuo (casi cocontinuo).[34] Veremos ahora que la continuidad y cocontinuidad son preservadas bajo productos y coproductos.

Proposición 45. *Sean $\{F_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\}_{i\in X}$ y $\{G_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\}_{i\in X}$ familias de funtores indexadas por un conjunto.*

1. Si F_i es covariante (contravariante) casi cocontinuo para todo $i \in X$, entonces $\bigoplus F_i$ es covariante (contravariante) casi cocontinuo.

2. Si G_i es covariante (contravariante) casi continuo para todo $i \in X$, entonces $\prod G_i$ es covariante (contravariante) casi continuo.

Demostración. Notemos que al demostrar cualquiera de (1) o (2), se hacen los cambios relevantes para que el otro quede demostrado, así que demostraremos (1).
Por la Proposición 42, ya tenemos que $\bigoplus F_i$ es exacto derecho. Ahora, sea la familia de objetos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $\mathcal{A}$ que está indexada por un conjunto. Por hipótesis, para cada $i \in X$ el homomorfismo inducido $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(\iota_\alpha) : \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(M_\alpha) \to F_i(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ es un epimorfismo. Llamamos ψ_i a cada uno de esos epimorfismos y obtenemos que $\psi : \bigoplus\limits_{i\in X}\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(M_\alpha) \to \bigoplus\limits_{i\in X} F_i(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ es epimorfismo. Como sabemos que $\bigoplus\limits_{i\in X}\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(M_\alpha) \cong \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus\limits_{i\in X} F_i(M_\alpha)$, tenemos que el homomorfismo inducido $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda}(\bigoplus\limits_{i\in X} F_i)(\iota_\alpha)$ es un epimorfismo. Luego $\bigoplus F_i$ es un funtor covariante casi cocontinuo (para la contravariancia es similar).
Q.E.D.

Proposición 46. *Tomamos $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores.*

1. Si F y G son covariantes casi continuos, entonces GF es covariante casi continuo.

2. Si F y G son covariantes casi cocontinuos, entonces GF es covariante casi cocontinuo.

3. Si F es covariante casi continuo y G es contravariante casi cocontinuo, entonces GF es contravariante casi cocontinuo.

4. Si F es covariante casi cocontinuo y G es contravariante casi continuo, entonces GF contravariante casi continuo.

5. Si F es contravariante casi continuo y G es contravariante casi cocontinuo, entonces GF es

[34] Esto es así por que la continuidad de funtores covariantes (contravariantes) es equivalente a que sean exactos izquierdos y preserven todos los productos (lleven todos los coproductos a productos). La respectiva propiedad dual de cocontinuidad también respeta las respectivas nociones duales dichas para la continuidad.

covariante casi cocontinuo.

6. Si F es contravariante casi cocontinuo y G es contravariante casi continuo, entonces GF es covariante casi continuo.

7. Si F es contravariante casi continuo y G es covariante casi continuo, entonces GF es contravariante casi continuo.

8. Si F es contravariante casi cocontinuo y G es covariante casi cocontinuo, entonces GF es contravariante casi cocontinuo.

Demostración. Todos los incisos respetan la propiedad de que la composición de funtores es funtor, y por la Proposición 42 se cumple que GF sea exacto izquierdo o derecho según sea el caso en cada inciso.

En cada inciso se recurre a la propiedad universal del producto y coproducto para tener la propiedad restante de GF. Por ejemplo, en el caso de (1), para cualquier familia indexada de objetos $\{M_\alpha\}$ de $\mathcal{A}$ y las proyecciones $\rho_\beta : \prod M_\alpha \to M_\beta$, el homomorfismo inducido $\prod F(\rho_\alpha) : F(\prod M_\alpha) \to \prod F(M_\alpha)$ es monomorfismo por hipótesis. Como G es casi continuo, $G(\prod F(\rho_\alpha)) : GF(\prod M_\alpha) \to G(\prod F(M_\alpha))$ es monomorfismo, y para la familia $\{F(M_\alpha)\}$ y las proyecciones $q_\beta : \prod F(M_\alpha) \to F(M_\beta)$, el homomorfismo inducido $\prod G(q_\alpha) : G(\prod F(M_\alpha)) \to \prod GF(M_\beta)$ también es monomorfismo. Así, $\prod G(q_\alpha) \circ G(\prod F(\rho_\alpha))$ es monomorfismo, pero por la propiedad universal del producto, éste es el homomorfismo inducido $\prod(GF)(\rho_\alpha) : (GF)(\prod M_\alpha) \to \prod GF(M_\alpha)$, por lo que GF es caso continuo. Los demás incisos salen similar con ese desarrollo.

Q.E.D.

Terminamos esta sección con la noción de **bifuntor**, la cual simplemente es una asignación especial que funciona como los funtores estándar pero que toma en su dominio un producto de categorías, esto es: $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Después daremos un par de resultados útiles al respecto de los bifuntores. Primero especificamos cómo entender un bifuntor casi continuo.

Definición 30. *Un bifuntor $K : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un **bifuntor casi continuo** o bifuntor CA si:*

1. Para cada objeto $M \in \mathcal{A}$, $K(M, \ )$ es un funtor covariante casi continuo.

2. Para cada objeto $N \in \mathcal{B}$, $K(\ , N)$ es un funtor contravariante casi continuo.

Ahora veamos que se cumplen las siguientes propiedades para los bifuntores casi continuos.

Proposición 47. *Si $G : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ es un funtor covariante casi continuo y $K(\ ,\ ) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor CA, entonces $K(\ , G(\ )) : \mathcal{A} \times \mathcal{B}' \to \mathcal{C}$ es un bifuntor CA.*

Demostración. Veamos que $K(\ , G(\ ))$ cumple las condiciones de la Definición 30:
(1) Para $M \in \mathcal{A}$, $K(M, G(\ )) = K(\ ,\ ) \circ G : \mathcal{B}' \to \{M\} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un funtor covariante casi continuo porque G y $K(M,\ )$ son covariantes casi continuos, luego por el inciso (1) de la Proposición 46 se obtiene el resultado.
(2) Para $N \in \mathcal{B}$, $K(\ , G(N)) : \mathcal{A}^{op} \times \{N\} \to \mathcal{C}$ es un funtor contravariante casi continuo porque $K(\ ,\ )$ lo es.
Por tanto, se cumple que $K(\ , G(\ ))$ es un bifuntor CA.
Q.E.D.

Proposición 48. *Si $F : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ es un funtor covariante casi cocontinuo y $K(\ ,\ ) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor CA, entonces $K(F(\ ),\ ) : (\mathcal{A}')^{op} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor CA.*

Demostración. Se hace análogo a la demostración de la Proposición 47, salvo que para demostrar que se cumple la condición (2) de la Definición 30, se usa el inciso (4) de la Proposición 46. Por tanto $K(F(\ ),\ )$ es bifuntor CA.
Q.E.D.

El bifuntor Hom y teorías de torsión inducidas

Ahora que tenemos el Teorema de Domenach-Leclerc, nos concentraremos en el siguiente funtor que será estudiado como relación bicerrada y las conexiones de Galois que se pueden dar entre conglomerados de módulos y otros objetos. Las relaciones bicerradas a estudiar son aquellas que se pueden obtener con el funtor Hom que informa sobre los morfismos entre objetos de una categoría específica (módulos, en nuestro caso), y tales relaciones serán llamadas $\mathcal{H}$ y $\mathbb{h}$. Esas relaciones servirán para hablar acerca de teorías de torsión y teorías de torsión hereditarias inducidas, respectivamente, por el funtor Hom. Recordemos que Hom nos da los morfismos entre un par de objetos, así que definimos la relación $\mathcal{H} := \{(M, N) \in \mathcal{A}^2 \mid Hom_{\mathcal{A}}(M, N) = 0\}$. ¿Por qué requerimos la relación $\mathcal{H}$ para nuestro estudio? Su importancia radica en que nos permitirá tener la conexión $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$ con las familias de Moore $(f)_{\mathcal{H}} - cerr$ y $cerr - (f)_{\mathcal{H}}$. A continuación, daremos algunas propiedades acerca de $(f)_{\mathcal{H}}$ y las familias de Moore mencionadas.

El funtor Hom tomado en su forma más general, para categorías abelianas $\mathcal{A}$, se entiende simplemente como la relación $\mathcal{H}$ definida anteriormente. Sabemos que la conexión de Galois inducida por la relación $\mathcal{H}$ es $(f)_{\mathcal{H}} =< f^{\mathcal{H}}, f_{\mathcal{H}} >$. Para $\mathcal{C} \in \wp(\mathcal{A})$, comenzamos por notar que:
$f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = \{N \in \mathcal{A} \,|\, Hom_{\mathcal{A}}(M,N) = 0, \; \forall M \in \mathcal{C}\}$
$f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = \{M \in \mathcal{A} \,|\, Hom_{\mathcal{A}}(M,N) = 0, \; \forall N \in f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})\}$.
Las siguientes propiedades nos serán de utilidad en lo sucesivo:

Proposición 49. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta y $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$. Para cada colección $\mathcal{C} \in \wp(\mathcal{A})$:*
1. $f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es una clase de torsión.
2. $f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es una clase libre de torsión.

Demostración. Se mostrará (1) y eso dará herramientas para tener (2) debido a la dualidad de propiedades involucradas:
(Cerradura bajo epimorfismos) Tomamos $g : M \to L$ un epimorfismo con $M \in f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ y $L \in \mathcal{A}$. Para $N \in \mathcal{C}$ se sigue que $Hom_{\mathcal{A}}(L,N) \to Hom_{\mathcal{A}}(M,N)$ es un monomorfismo con $Hom_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$, por lo que $Hom_{\mathcal{A}}(L,N) = 0$ y $L \in f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$.
(Cerradura bajo coproductos) Tomando $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ y $N \in \mathcal{C}$, para cada $\alpha \in \Lambda$ se cumple que $Hom_{\mathcal{A}}(M_\alpha, N) = 0$, por lo que $Hom_{\mathcal{A}}(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, N) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} Hom_{\mathcal{A}}(M_\alpha, N) = 0$. Por lo que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$.
(Cerradura bajo extensiones) Tomamos una sucesión exacta $0 \to M'' \to M \to M' \to 0$ con $M', M'' \in f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ y $M \in \mathcal{A}$. Para $N \in \mathcal{C}$ tenemos que la sucesión $0 \to Hom_{\mathcal{A}}(M',N) \to Hom_{\mathcal{A}}(M,N) \to Hom_{\mathcal{A}}(M'',N)$ es exacta con
$Hom_{\mathcal{A}}(M'',N) = Hom_{\mathcal{A}}(M',N) = 0$, por lo que $Hom_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$ y $M \in f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$.
Se tiene así que $f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es una clase de torsión (y en modo similar se muestra que $f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es clase libre de torsión).
Q.E.D.

Proposición 50. *Sea $\mathcal{A} \subseteq R-Mod$. Para $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$ se cumple que $(f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}), f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$ y $(f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}), f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$ son teorías de torsión.*

Demostración. Nuevamente, haremos el primer caso y el otro caso se hace similarmente. Verificamos que la pareja $(f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}), f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$ cumple con la definición de ser teoría de torsión:
i) De $M \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \cap f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$, se sigue que $Hom_{\mathcal{A}}(M,M) = 0$, lo que implica que $M = 0$.

ii) De la Proposición 49 se sigue que $f^{\mathcal{H}}(f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$ es clase de torsión y cerrada bajo epimorfismos.
iii) De la Proposición 49 se sigue que $f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es clase libre de torsión y cerrada bajo monomorfismos.
iv) Sean $A \in \mathcal{A}$ y $\tau = \bigwedge_{N \in f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})} \omega_0^N$ que por la Proposición 35 es un radical idempotente. Sea $0 \to \tau(A) \to A \to A/\tau(A) \to 0$ una sucesión exacta. De la Definición 21 y Proposición 32 se tiene que $A/\tau(A) \in f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ porque $\tau(A/\tau(A)) = 0$. Sólo resta mostrar que $\tau(A) \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$: Para $N \in f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(\tau(A), N)$, se tiene que $f(\tau(\tau(A))) = f(\tau(A)) \leqslant \tau(N) = 0$. Así $f = 0$ y $Hom_{\mathcal{A}}(\tau(A), N) = 0$ para cualquier $N \in f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$. Por lo tanto $\tau(A) \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$.
Se tiene así que $(f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}), f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$ es teoría de torsión (dualmente $(f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}), f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$ es teoría de torsión).
Q.E.D.

El par anterior de proposiciones nos dan información para trabajar con conexiones de Galois que son inducidas por $f^{\mathcal{H}}$ y $f_{\mathcal{H}}$. El modo en que inducimos una teoría de torsión en general viene con ayuda de $(f)_{\mathcal{H}}$.

Definición 31. *Una* ***teoría de torsión*** *para una categoría abeliana bicompleta $\mathcal{A}$ es una pareja $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ de clases de objetos de $\mathcal{A}$ tales que $f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ y $f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.*

Con esta definición y lo que sabemos de las familias de Moore, se tiene el siguiente resultado acerca de $(f)_{\mathcal{H}}$ que usaremos desde ahora:

Proposición 51. *Sea $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$. Entonces:*
i) $(f)_{\mathcal{H}} - cerr = T - tors$.
ii) $cerr - (f)_{\mathcal{H}} = L - tors$.

Demostración. Ambos puntos salen de modo inmediato por la proposición 49 y la Definición 31. Procedemos:
(i) La Proposición 49 da que $(f)_{\mathcal{H}} - cerr \subseteq T - tors$. Ahora, para $\mathbb{T} \in T - tors$ se tiene que $\mathbb{T} = \{M \in \mathcal{A} \,|\, Hom_R(M, N) = 0, \ \forall N \in \mathbb{F}\} = f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F})$ con $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ una teoría de torsión. Así $\mathbb{T} \in (f)_{\mathcal{H}} - cerr$ con lo que se tiene $(f)_{\mathcal{H}} - cerr \supseteq T - tors$.
(ii) La Proposición 49 da que $cerr - (f)_{\mathcal{H}} \subseteq L - tors$. Ahora, para $\mathbb{F} \in L - tors$ se tiene que $\mathbb{F} = \{N \in \mathcal{A} \,|\, Hom_R(M, N) = 0, \ \forall M \in \mathbb{T}\} = f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T})$ con $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ una teoría de torsión. Así

$\mathbb{F} \in cerr - (f)_{\mathcal{H}}$ con lo que se tiene $cerr - (f)_{\mathcal{H}} \supseteq L - tors$.

Q.E.D.

Ahora daremos una propiedad que tiene una cierta familiaridad con una que se cumple entre las asignaciones entre extensiones de campos y grupos de automorfismos dados en la Teoría de Galois estándar. Esta propiedad se enuncia en su forma más general para el caso de categorías en donde se tenga la conexión inducida $(f)_{\mathcal{H}}$ que hemos estado analizando.

Proposición 52. *Sea* $\mathcal{C} \in \wp(\mathcal{A})$. *Entonces:*

i) $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ *es la menor clase de torsión que contiene a* $\mathcal{C}$.

ii) $f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ *es la menor clase libre de torsión que contiene a* $\mathcal{C}$.

Demostración. Aplicando lo que sabemos de operadores cerradura y teorías de torsión, obtenemos ambos incisos. Haremos el (i), siendo el (ii) similar:

(i) Sabemos que $\mathcal{C} \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ por ser $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}$ un operador cerradura. Para $\mathbb{T}$ tal que $\mathbb{T} \supseteq \mathcal{C}$, se cumple que $\mathcal{C} \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ de la Definición 22, lo cual implica que $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.

(ii) La demostración de (i) nos da los elementos para tener que $f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.

Q.E.D.

La relación $\mathbb{h}$ también posee varias de las propiedades que hemos visto que se cumplen para $\mathcal{H}$. La relación $\mathbb{h}$ servirá para hablar más adelante de un tipo especial de teoría de torsión, pero antes recordemos algunos datos que serán de utilidad después. Comenzamos con recordar que $E(N)$ es la cápsula inyectiva de un R-módulo N.[35] Ahora tomamos $\mathbb{h} = \{(M, N) \in (R - Mod)^2 \mid Hom_R(M, E(N)) = 0\}$. Esta relación así introducida nos permitirá hablar de la conexión de Galois adecuada para expresar teorías de torsión hereditarias. De la definición de cápsula inyectiva debemos recordar que, para familias $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq R - Mod$, se cumple $E(\prod_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha) \cong \prod_{\alpha \in \Lambda} E(N_\alpha)$, y esto nos permite tener que $Hom_R(M, E(\prod_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha)) \cong Hom_R(M, \prod_{\alpha \in \Lambda} E(N_\alpha)) \cong \prod_{\alpha \in \Lambda} Hom_R(M, E(N_\alpha))$.[36]

[35] El modo usual para introducir cápsulas inyectivas es por medio de otras nociones preliminares. Sin embargo, en Eckman-Schöpf (1956) se halla un resultado que sirve para tener 3 formas equivalentes de entender una cápsula inyectiva: Sean ${}_RQ$ y $M \leqslant Q$. Equivalen: (a) ${}_RQ$ es extensión esencial máxima de M; (b) ${}_RQ$ es inyectivo y $M \subseteq_e Q$; (c) ${}_RQ$ es una extensión mínima inyectiva de M. Se suele denotar a dicho $Q = E(M)$.

[36] La segunda relación de isomorfismo es dada por el lema 4.3.3 de Kash (1978).

Proposición 53. *Sea* $(f)_{\mathbb{h}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$. *Para cada* $\mathcal{C} \in \wp(R - Mod)$:

i) $(f)^{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ *es una clase de torsión hereditaria.*

ii) $(f)_{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ *es una clase libre de torsión hereditaria*

Demostración. Usando el hecho de que $Hom_R(M, E(N)) = 0$ implica que $Hom_R(M, N) = 0$ para módulos $_RM$ y $_RN$, la demostración resulta como en la Proposición 49, quedando pendientes los siguientes dos puntos:

($(f)^{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo monomorfismos) Sean $f : L \to M$ un monomorfismo, con $M \in (f)^{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$, $L \neq 0$ y $N \in \mathcal{C}$. Si $g \in Hom_R(L, E(N))$, entonces $g(L) \cap N = 0$ porque $Hom_R(M, E(N)) = 0$ y f monomorfismo implican que $g = 0$. Así $L \in (f)^{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ y se concluye que $(f)^{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ es una clase de torsión hereditaria.

($(f)_{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas) Sean $N \in (f)_{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ y $M \in \mathcal{C}$. Sea $g \in Hom_R(M, E(N))$. Como $g(M) \leqslant E(N)$ y $Hom_R(M, N) = 0$, entonces $g(M) \cap N = 0$. Así $g(M) = 0$. Luego $E(N) \in (f)_{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ y $(f)_{\mathbb{h}}(\mathcal{C})$ es clase libre de torsión hereditaria.

Q.E.D.

Ahora procedemos a ofrecer la definición de teoría de torsión que involucra la relación $\mathbb{h}$. Eso nos permitirá obtener ventajas cuando atendamos el problema de conexiones de Galois inducidas por teorías de torsión en que haya cápsulas inyectivas como componentes.

Definición 32. *Una* ***teoría de torsión hereditaria*** *para una categoría abeliana bicompleta* $\mathcal{A}$ *es una pareja* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *de clases de objetos de* $\mathcal{A}$ *tales que* $f_{\mathbb{h}}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ *y* $f^{\mathbb{h}}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.

Nuevamente, tenemos que la siguiente propiedad se cumple para las familias de cerrados inducidas por las componentes residual y residuada de la conexión de Galois inducida por la relación $\mathbb{h}$.

Proposición 54. *Sea* $(f)_{\mathbb{h}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$. *Entonces:*

i) $(f)_{\mathbb{h}} - cerr = T - torsh$.

ii) $cerr - (f)_{\mathbb{h}} = L - torsh$.

Demostración. Basta con sustituir la relación $\mathbb{h}$ por la $\mathcal{H}$ en la demostración de la Proposición 51 para tener los resultados.

Q.E.D.

No es difícil apreciar que las clases de torsión hereditarias son clases de torsión y las clases libres de torsión hereditarias son clases libres de torsión. Veremos ahora una relación entre $(f)_{\mathbb{h}}$ y $(f)_{\mathcal{H}}$.

Proposición 55. *La relación* $\mathbb{h}$ *es bicerrada con respecto a* $T-tors$ *y* $L-tors$.

Demostración. La Proposición 53 nos da que, para todo ${}_RM$, $f^{\mathbb{h}}(\{M\}) = \mathbb{h}M$ es una clase de torsión hereditaria y $f_{\mathbb{h}}(\{M\}) = M\mathbb{h}$ es una clase libre de torsión hereditaria. Sabemos así que $f^{\mathbb{h}}(\{M\}) \in T-tors$ y $f_{\mathbb{h}}(\{M\}) \in L-tors$, por lo que $\mathbb{h}$ es bicerrada con respecto a $T-tors$ y $L-tors$.
Q.E.D.

Notemos que lo anterior nos permite deducir que $\mathbb{h} \subseteq \mathcal{H}$ y también: $(f)_{\mathbb{h}} - cerr \subseteq (f)_{\mathcal{H}} - cerr$ y $cerr - (f)_{\mathbb{h}} \subseteq cerr - (f)_{\mathcal{H}}$. Veamos ahora bajo qué condiciones se pueden generalizar algunas de estas propiedades para tener teorías de torsión inducidas por relaciones bicerradas a su vez inducidas por otras relaciones.

El propósito es obtener información al respecto de una relación $R \in \wp(A \times B)$ que induce familias de Moore $\Phi = (f)_R - cerr$ y $\Phi' = cerr - (f)_R$ y los operadores cerradura serían de la forma $\varphi = f^R f_R$ y $\varphi' = f_R f^R$. Anteriormente, se mencionó a las conexiones $(f)_{\mathcal{H}}$ y $(f)_{\mathbb{h}}$ tales que esta última es una forma particular de inducir teorías de torsión con una propiedad extra (siendo $\mathcal{H}$ la relación general que induce teorías de torsión), lo cual ejemplificaba el Teorema de Domenach-Leclerc por medio de las propiedades que se han venido estudiando con los resultados expuestos en esta sección. Ahora, estudiaremos las condiciones en que esto se puede generalizar aún más.

El análisis que haremos es necesario en el sentido de que la relación $\mathbb{h} \subseteq \mathcal{H}$ no implica las contenciones entre las familias de cerrados para cualesquiera dos relaciones que se tengan. De hecho un rápido análisis nos dará la justificación de que en general, para toda $R \in \wp(A \times B)$, se tiene que $(f)_{A\times B} - cerr \subseteq (f)_R - cerr$ y $cerr - (f)_{A\times B} \subseteq cerr - (f)_R$: Sea $R \in \wp(A \times B)$, si tomamos $U \in \wp(A)$ entonces $f_{A\times B}(U) = \{b \in B \,|\, (a,b) \in A \times B, \ \forall a \in U\} = B$ y así $cerr - (f)_{A\times B} = \{B\}$; por otro lado, $f_{\varnothing}(B) = \{b \in B \,|\, (a,b) \in R, \ \forall a \in \varnothing\} = B$ y se tiene que $B \in cerr - (f)_R$. Por lo que $cerr - (f)_{A\times B} \subseteq cerr - (f)_R$ (y en modo similar se cumple que $(f)_{A\times B} - cerr \subseteq (f)_R - cerr$ cambiando los elementos en U por los de $V \in \wp(B)$). Así, ahora requerimos una relación en las conexiones de Galois que nos permita rescatar el comportamiento que tienen $\mathcal{H}$ y $\mathbb{h}$ en otras relaciones de interés.

Definición 33. *Para A y B grandes COPOS, se define la relación $\preceq$ en $Gal(A, B)$ como $f \preceq g$ si y sólo si $f - cerr \subseteq g - cerr$ y $cerr - f \subseteq cerr - g$. La relación $\preceq$ induce una relación de equivalencia $\sim$ en $Gal(A, B)$ y se tiene un orden inducido en $Gal(A, B)/\sim$.*

Podemos empezar a extraer algunas propiedades acerca de relaciones bicerradas con ayuda de la definición del orden en $Gal(A, B)$. Si tenemos que $R \in \wp(A \times B)$ con $(f)_R \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ la polaridad correspondiente, con $\Phi = (f)_R - cerr$ y $\Phi' = cerr - (f)_R$ las familias de Moore que corresponden a los operadores cerradura $\varphi = f^R f_R : A \to A$ y $\varphi' = f_R f^R : B \to B$. De esto podemos deducir lo siguiente:
(Propiedad (*)) $S \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ *sii* $(f)_S \preceq (f)_R$.[37]
El preorden dado en la Definición 33 nos servirá para establecer cuándo tenemos una relación bicerrada respecto a otra relación dada. Además, el Teorema de Polaridades nos dará que el preorden de la Definición 33 induce un preorden en $\wp(A \times B)$.

Definición 34. *Sean A y B dos clases y $R, S \in \wp(A \times B)$. Se define la relación $\preceq$ en $\wp(A \times B)$ como: $S \preceq R$ sii $(f)_S \preceq (f)_R$. Este preorden induce una relación de equivalencia $\sim$ en $\wp(A \times B)$ dada como: $S \sim R$ sii $(f)_S \sim (f)_R$.*
*1. Diremos que S es **bicerrada** con respecto a R sii $S \preceq R$.*
*2. Diremos que $g \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ es **bicerrada** con respecto a $(f)_R$ sii $g \preceq (f)_R$.*

Definición 35. *Sean A y B dos grandes COPOS y $f, g \in Gal(A, B)$. Se dice que g es **bicerrada** con respecto a f sii $g \preceq f$.*

No es complicado notar la similitud de la definición de relación bicerrada entre conexiones de Galois con la definición de relación bicerrada cuando tenemos que las familias de Moore son $\Phi = (f)_R - cerr$ y $\Phi' = cerr - (f)_R$ y los operadores cerradura son los dados por la relación R.
Ahora tendremos a consideración los siguientes conglomerados:
1. $[f]_\preceq := \{g \in Gal(A, B) \mid g \preceq f\}$ (conexiones bicerradas con respecto a f).
2. $[f]_\sim := \{g \in Gal(A, B) \mid g \sim f\}$.
3. $[R]_\preceq := \{S \in \wp(A \times B) \mid S \preceq R\}$.
4. $[R]_\sim := \{S \in \wp(A \times B) \mid S \sim R\}$.

De la propiedad (*) tenemos el siguiente resultado. Como podemos ver que $[R]_\preceq = \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ para cada $R \in \wp(A \times B)$, donde los operadores cerradura son $\varphi = f^R f_R$ y $\varphi' = f_R f^R$ y las familias de

[37] Notar esto no es muy complicado en vista de que se aplica la definición de las relaciones bicerradas.

Moore se ven como $\Phi = (f)_R - cerr$ y $\Phi' = cerr - (f)_R$, se cumplen las condiciones del Teorema de Domenach-Leclerc con el preorden $\preceq$ dado: $\langle Gal((f)_R - cerr, cerr - (f)_R), \leqslant\rangle \cong \langle [R]_{\preceq}, \subseteq\rangle$. Utilizando lo que sabemos de anteriores proposiciones, se cumple que para toda $R \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$, $(f)_R - cerr \subseteq T - tors$ y $cerr - (f)_R \subseteq L - tors$. O sea que para cada $\mathcal{C} \subseteq \wp(R - mod)$ se cumple que $f^R(\mathcal{C})$ es clase de torsión y $f_R(\mathcal{C})$ es clase libre de torsión. Empezamos a investigar la estructura de la colección $Gal(\Phi, \Phi')$ explorando las condiciones que deben satisfacerse para que las familias de Moore Φ y Φ' sean anti-isomorfas entre ellas. Como el Teorema de Domenach-Leclerc no dice cuándo esto debe cumplirse, partiremos de algunos resultados que darán la información acerca de este punto.

Definición 36. *Sean A y B COPOS. Para $f = \langle f_+, f^+\rangle \in Gal(A, B)$, decimos que f es un* ***anti-isomorfismo*** *cuando f_+ y f^+ son anti-isomorfismos.*

Con la Proposición 7 y la asignación $p_{a,b} : A \to B$ notemos la siguiente observación. Para cada $a \in A$ y $b \in B$, $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \in Gal(A, B)$ se cumple que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle - cerr = \{0, a, 1\}$ y $cerr - \langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle = \{0, b, 1\}$. Ahora daremos el siguiente resultado acerca de condiciones equivalentes para el anti-isomorfismo de interés.

Proposición 56. *Para A y B COPOS y $f \in Gal(A, B)$, son equivalentes:*
1. f es anti-isomorfismo.
2. f es un elemento mayor de $\langle Gal(A, B), \preceq\rangle$.
3. $f - cerr = A$ y $cerr - f = B$.

Demostración. Los resultados saldrán por medio de las definiciones y propiedades que ya han sido demostradas antes en este trabajo:
((1) $\Rightarrow$ (2)) Tomando $f \in Gal(A, B)$ un anti-isomorfismo, se tiene que $f^+(B) = A$ y $f_+(A) = B$ y así para toda $g \in Gal(A, B)$, se tiene que $g - cerr \subseteq A = f^+(B)$ y $cerr - g \subseteq B = f_+(A)$, es decir $g \preceq f$. Entonces f es un elemento mayor de $\langle Gal(A, B), \preceq\rangle$.
((2) $\Rightarrow$ (3)) Si f es un elemento mayor de $\langle Gal(A, B), \preceq\rangle$ y suponiendo que $f - cerr \subsetneq A$, tenemos que toda $g \in Gal(A, B)$ cumple que $g \preceq f$, particularmente $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \preceq f$ para cualquier $a \in A$ y $b \in B$ por la Proposición 7. Anteriormente especificamos que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle - cerr = \{0, a, 1\}$ y $cerr - \langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle = \{0, b, 1\}$. Si hay un $a \in A \backslash f - cerr$, entonces para cualquier $b \in B$ tenemos que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \in Gal(A, B)$ que por la observación anterior a esta proposición cumple que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle - cerr \nsubseteq f - cerr$ por $a \notin f - cerr$, así $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \npreceq f$ lo cual dice que f no es elemento

mayor en $\langle Gal(A,B),\preceq\rangle$, contradiciendo la hipótesis. Luego $f-cerr=A$ (un razonamiento similar con la hipótesis de $b\in B\backslash cerr-f$ muestra que $cerr-f=B$).
((3) $\Rightarrow$ (1)) La definición de cerrados de f nos da que f es un anti-isomorfismo.
Q.E.D.

Proposición 57. *Sea $f_+ : A\to B$ un anti-isomorfismo de grandes retículas, entonces f_+ es la parte residuada de una conexión de Galois $f\in Gal(A,B)$. En este caso, $f=\langle f_+,f^+\rangle$ es un elemento mayor de $\langle Gal(A,B),\preceq\rangle$ y el conjunto de elementos mayores es $[f]_\sim$.*

Demostración. Nuestro objetivo es usar el procedimiento visto en la Proposición 3 de este trabajo para justificar que f_+ es parte de una conexión de Galois. Primero, sean $f_+ : A\to B$ y $S\subseteq A$, entonces para todo $s\in S$ se cumple que $s\leqslant\bigvee S$ y así $f_+(\bigvee S)\leqslant f_+(s)$, luego $f_+(\bigvee S)\leqslant\bigwedge f_+(S)$.
La biyectividad de f arroja la existencia de un único $x\in A$ tal que $f_+(x)=\bigwedge f_+(S)\in B$. Luego $\forall s\in S$ se cumple que $(f_+(x)\leqslant f_+(s))$ si y sólo si $x\geqslant s$, haciendo que $x\geqslant\bigvee S$, lo que implica que $\bigwedge f_+(S)=f_+(x)\leqslant f_+(\bigvee S)$.
Así $f_+(\bigvee S)=\bigwedge f_+(S)$ y f_+ es la parte residuada de $f=\langle f_+,g=f^+\rangle$ con $g:B\to A$ dada como $g(b)=\bigvee\{a\in A\,|\,f_+(a)\geqslant b\}$. Además, como A y B son retículas completas, se cumple que $f^+f_+=Id_A$ y $f_+f^+=Id_B$. La Proposición 56 nos da que $f=\langle f_+,f^+\rangle$ es un elemento mayor de $\langle Gal(A,B),\preceq\rangle$.
Si g es un elemento mayor de $\langle Gal(A,B),\preceq\rangle$, entonces $f-cerr=A\subseteq g-cerr$ y $cerr-f=B\subseteq cerr-g$ y se tiene que $f\preceq g$ y $g\preceq f$, es decir que $f\sim g$ por ser f un elemento mayor. Luego $g\in[f]_\sim$.
Q.E.D.

Ahora podemos ver el resultado que nos arroja las condiciones para que las familias Φ y Φ' sean anti-isomorfas entre ellas. En palabras que aterrizan lo visto hasta ahora, tener el anti-isomorfismo es equivalente a que $Gal(A,B)$ tenga elemento mayor según la Proposición 56, y ahora daremos las condiciones para que exista ese elemento en las conexiones de Galois.

Proposición 58. *Sean A y B clases. Sean (A,φ) y (B,φ') espacios cerradura con familias de Moore correspondientes Φ y Φ'. Entonces $\langle Gal(A,B),\preceq\rangle$ tiene elemento mayor si y sólo si existe una $f\in Gal(\wp(A),\wp(B))$ tal que $f-cerr=\Phi$ y $cerr-f=\Phi'$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponemos que $\langle Gal(A,B),\preceq\rangle$ tiene elemento mayor. La proposición 56 nos da que Φ y Φ' son anti-isomorfos. La Proposición 5 nos da que hay $f\in Gal(\wp(A),\wp(B))$ tal que $f-cerr=\Phi$ y $cerr-f=\Phi'$.
($\Leftarrow$) Sea $f\in Gal(\wp(A),\wp(B))$ tal que $f-cerr=\Phi$ y $cerr-f=\Phi'$. Es consecuencia de la Proposición 2 que Φ y Φ' son anti-isomorfas como grandes COPOS. Nuevamente, la Proposición 56 nos da que $\langle Gal(A,B),\preceq\rangle$ tiene elemento mayor.
Q.E.D.

Las Proposiciones 56 y 58, así como el Teorema de Polaridades y el Teorema de Domenach-Leclerc nos permitirán sumarizar los siguientes resultados de modo conveniente, obteniendo así una primera parte de la clasificación que buscamos.

Proposición 59. *Sean A y B clases. Sean $R\in\wp(A\times B)$ y $(f)_R\in Gal(\wp(A),\wp(B))$. Consideramos los espacios cerradura (A,φ) y (B,φ') con familias de Moore correspondientes Φ y Φ' dadas por $\varphi=f^Rf_R$ y $\varphi'=f_Rf^R$. Entonces:*
1. Existe una correspondencia biunívoca entre $[(f)_R]_\sim$ y los anti-isomorfismos entre Φ y Φ'.
2. Existe una correspondencia biunívoca entre $[(f)_R]_\sim$ y $[R]_\sim$.
3. Existe un isomorfismo de orden entre $[(f)_R]_\preceq$ y $[R]_\preceq$.

Demostración. (1) De la propiedad (*), la Definición 34 y el Teorema de polaridades sabemos que para toda $g\sim(f)_R$, $R\sim\lambda(g)=\{(a,b)\mid b\in g_+(\{a\})\}$ y que $[(f)_R]_\sim\cong\langle\mathcal{R}_{\varphi\varphi'},\subseteq\rangle\cong\langle Gal(\Phi,\Phi'),\preceq\rangle$. Se sigue que para cada $g\sim(f)_R$ se tiene que $g_+:\Phi\to\Phi'$ y $g^+:\Phi'\to\Phi$ los cuales son anti-isomorfismos. Por la Proposición 5 se cumple que $[(f)_R]_\sim\cong Gal(\Phi,\Phi')$.
(2) La propiedad (*) y la Definición 34 dan este resultado.
(3) Como $\varphi=f^Rf_R$ y $\varphi'=f_Rf^R$, se tiene que $f\in Gal(\Phi,\Phi')$ cumple con que $\Phi=f-cerr$ y $\Phi'=cerr-f$. La Proposición 58 nos da que $\langle Gal(\Phi,\Phi'),\leqslant\rangle$ tiene mayor elemento, digamos h. La Proposición 56 nos da que h es anti-isomorfismo y $h-cerr=\Phi$ y $cer-h=\Phi'$, se cumple para toda $f\in Gal(\wp(A),\wp(B))$ que $\langle Gal(\Phi,\Phi'),\leqslant\rangle\cong\langle[R]_\subseteq,\subseteq\rangle$. Luego $[f]_\preceq\cong[R]_\preceq$.
Q.E.D.

Ahora nos encaminaremos a obtener una generalización del Teorema de Domenach-Leclerc en la que no sea necesario tomar potencias de colecciones específicas (conjuntos, clases o conglomerados). Esta generalización será hecha partiendo de ciertos supuestos, entre ellos el contar por lo menos con ciertos sistemas de cerrados.

Definición 37. *Tomamos* $\langle A, \Phi\rangle$ *y* $\langle B, \Phi'\rangle$ *con* A *y* B *retículas completas,* $\Phi \subseteq A$ *y* $\Phi' \subseteq B$ *son sistemas de cerrados con* φ *y* φ' *los operadores cerradura correspondientes. Entonces:*
$[\Phi, \Phi']_{\leq} := \{g \in Gal(A, B) \mid g - cerr \subseteq \Phi,\ cerr - g \subseteq \Phi'\}$.
Los elementos de $[\Phi, \Phi']_{\leq}$ *son las* ***conexiones de Galois bicerradas*** *con respecto a* Φ *y* Φ'.

Anteriormente hemos hablado de relaciones bicerradas con respecto a otras relaciones, por lo que dar la generalización del Teorema de Domenach-Leclerc seguirá una estrategia similar en este caso de conexiones de Galois bicerradas con respecto a otras.
Veamos el siguiente resultado que nos permite saber cómo restringir conexiones de Galois entre copos a subcopos de ellos. Antes de esto, convenimos en que, para $f \in Gal(A, B)$ y $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, se denota la **restricción-correstricción** de f a A' y B' como $f \restriction_{A',B'}$.

Proposición 60. *Sean* A *y* B *copos y* $f \in Gal(A, B)$. *Sean* $A' \subseteq A$ *y* $B' \subseteq B$ *tales que* $f_+(A') \subseteq B'$ *y* $f^+(B') \subseteq A'$. *Entonces f induce una única* $\boldsymbol{f} \in Gal(A', B')$ *tal que* $f \restriction_{A',B'} = \boldsymbol{f}$.

Demostración. Tomamos $f \in Gal(A, B)$ con $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ tales que $f_+(A') \subseteq B'$ y $f^+(B') \subseteq A'$. Entonces $b \leqslant f_+(a)$ si y sólo si $a \leqslant f^+(b)$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, en particular para los $a' \in A'$ y $b' \in B'$. Luego hacemos $f \restriction_{A',B'} = \mathbf{f}$ y tenemos el resultado.
Q.E.D.

Podemos robustecer más la definición de espacio cerradura del modo siguiente. Un **espacio cerradura** es una terna $\langle A, \Phi, \varphi\rangle$ donde $\varphi : A \to A$ es un operador cerradura y $\Phi = Im(\varphi)$ es su sistema de cerrados. Notemos que, en realidad, no estamos cambiando la definición de espacio cerradura que teníamos desde antes, sino que estamos considerando explícitamente los sistemas de cerrados cuando consideramos dichos espacios. Con esto, ahora podemos pasar al resultado que buscamos.

Teorema 61. *(Teorema de Domenach-Leclerc generalizado). Sean* $\langle A, \Phi, \varphi\rangle$ *y* $\langle B, \Phi', \varphi'\rangle$ *espacios cerradura. Entonces existe un isomorfismo de orden entre*
$\langle [\Phi, \Phi']_{\leq}, \leqslant\rangle$ *y* $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \leqslant\rangle$.

Demostración. Para los espacios cerradura dados, consideremos las siguientes asignaciones: $\alpha : [\Phi, \Phi']_{\leq} \to Gal(\Phi, \Phi')$ dada por $\alpha(g) = \mathbf{g}$ con $\mathbf{g}$ la restricción-correstricción según la proposición inmediata anterior;

$\beta : Gal(\Phi, \Phi') \to [\Phi, \Phi']_{\leq}$ dada por $\beta(h) = \mathbf{h} = \langle \mathbf{h}_+, \mathbf{h}^+ \rangle$ con $\mathbf{h}_+ : A \to B$ dada como $\mathbf{h}_+(a) = h_+(\varphi(a))$, $\mathbf{h}^+ : B \to A$ dada como $\mathbf{h}^+(b) = h^+(\varphi'(b))$. Esta forma de $\mathbf{h}$ es única por la Proposición 38.

Las Proposiciones 60 y 38 nos dan que α y β están bien definidas. Resta mostrar que son inversas una de la otra.

Sea $h \in Gal(\Phi, \Phi')$. Haciendo $\alpha(\beta(h)) = \alpha(\mathbf{h}) = h$, pues h es sólo la restricción-correstricción y $h = \mathbf{h}$. Luego $\alpha\beta = Id$

Sea $g \in [\Phi, \Phi']_{\leq}$. Haciendo $\beta(\alpha(g)) = \beta(\mathbf{g}) = g$, donde $\mathbf{g}$ es la restricción-correstricción de g, y así esta extensión es única. Por lo tanto, $\beta\alpha = Id$.

El desarrollo del Teorema de Domenach-Leclerc muestra que α y β preservan el orden.

Así, se tiene que $\langle [\Phi, \Phi']_{\leq}, \leqslant \rangle \cong \langle Gal(\Phi, \Phi'), \leqslant \rangle$.

Q.E.D.

Como un caso particular del Teorema de Domenach-Leclerc generalizado, tenemos el siguiente resultado acerca de los espacios cerradura $\langle A, \varphi, f - cerr \rangle$ y $\langle B, \varphi', cerr - f \rangle$ con $\varphi = f^+ f_+$ y $\varphi' = f_+ f^+$.

Proposición 62. *Sean A y B retículas completas y $f \in Gal(A, B)$. Entonces existe un isomorfismo de orden entre $\langle [f]_{\leq}, \leqslant \rangle$ y $\langle Gal(f - cerr, cerr - f), \leqslant \rangle$.*

Demostración. Haciendo $\Phi = f - cerr$ y $\Phi' = cerr - f$, como $\langle A, \varphi, f - cerr \rangle$ y $\langle B, \varphi', cerr - f \rangle$ son espacios cerradura, y de la Definición 37 sabemos que $[\Phi, \Phi']_{\leq} := \{g \in Gal(A, B) \mid g - cerr \subseteq \Phi,\ cerr - g \subseteq \Phi'\}$, por el Teorema de Domenach-Leclerc generalizado, para toda restricción-correstricción $g \in [f]_{\leq}$ existe un isomorfismo de orden

$\langle [f]_{\leq}, \leqslant \rangle \cong \langle Gal(f - cerr, cerr - f), \leqslant \rangle$.

Q.E.D.

Para el caso de que las retículas sean $A = \wp(A')$ y $B = \wp(B')$ y $f \in Gal(A, B)$, por las Definiciones 34 y 35, el Teorema de Domenach-Leclerc generalizado y la Proposición 62, tenemos los siguientes isomorfismos:

$\langle [f]_{\leq}, \leqslant \rangle \cong \langle [\Phi, \Phi']_{\leq}, \leqslant \rangle \cong \langle Gal(f - cerr, cerr - f), \leqslant \rangle \cong \langle \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}, \subseteq \rangle$.

Los Teoremas de Polaridades, de Domenach-Leclerc y su generalización, nos han permitido expandir la correspondencia de Galois dada entre grupos y extensiones de campos, a escenarios donde se analiza la correspondencia entre familias de cerrados dadas por espacios cerradura y las conexiones de Galois entre ellos. ¿Cómo es que esto arroja información acerca de otras familias de objetos relevantes, como los R-prerradicales según una determinada relación bicerrada? La labor ahora será investigar y responder a esa pregunta con una clasificación de teorías de torsión y prerradicales dados por un anillo R, y las conexiones de Galois entre ellos.

Capítulo 5

Conexiones de Galois en R-teorías de torsión

La situación del Teorema de Domenach-Leclerc generalizado es el requisito para comenzar la presentación de la clasificación de teorías de torsión dadas por una relación $\mathbf{R}$ que sea bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$. Primero extenderemos el concepto de teoría de torsión dado en la Definición 31 para pensar en teorías de torsión dadas por relaciones bicerradas por $\mathcal{H}$.
Según lo que sabemos de las teorías de torsión, éstas se componen de parejas $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ de clases de objetos tales que $f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ y $f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$. Dado lo que hemos visto en el capítulo anterior acerca de relaciones bicerradas inducidas por otras relaciones, ahora tendremos la siguiente definición:

Definición 38. *Sea $\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. Una **R-teoría de torsión** es una pareja $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ de clases de R-módulos tales que $f_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ y $f^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.*

Sabemos que las teorías de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ se llaman hereditarias si $\mathbb{T}$ es cerrada bajo monomorfismos y $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Con esto, resulta claro que las $\mathcal{H}$-teorías de torsión son las teorías de torsión, y las $\mathbb{h}$-teorías de torsión son las teorías de torsión hereditarias. Usando varias proposiciones anteriores de este trabajo, obtenemos el siguiente resultado ciertamente ya familiar.

Proposición 63. *Para cada $\mathscr{C} \in \wp(R - Mod)$ se cumple que:*

1. $\overline{\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M} = \bigvee_{M \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \alpha_M^M = \bigwedge_{N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N.$
2. $\widehat{\bigwedge_{N \in \mathscr{C}} \omega_0^N} = \bigwedge_{N \in f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N = \bigvee_{M \in f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \alpha_M^M.$

Demostración. (1) Por la parte (1) de la Proposición 35, se cumple que $\overline{\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M} = \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M$, donde $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{T}$ la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$. De la Proposición 50, $(f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}), f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$

es teoría de torsión, y de la Proposición 52, $f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$. Se sigue que $\bigvee_{M\in\mathbb{T}} \alpha_M^M = \bigvee_{M\in f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \alpha_M^M$ y de la Proposición 33 se sigue que $\bigvee_{M\in\mathbb{T}} \alpha_M^M = \bigwedge_{N\in\mathbb{F}} \omega_0^N = \bigwedge_{N\in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N$. Por lo que $\overline{\bigvee_{M\in\mathscr{C}} \alpha_M^M} = \bigvee_{M\in f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \alpha_M^M = \bigwedge_{N\in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N$.
(2) Aplicando la parte (2) de la Proposición 35 y la Proposición 50, se cumple que $(f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}), f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$ es teoría de torsión, y de la Proposición 52 $f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathscr{C}$. Al usar la Proposición 33 se obtiene que $\widehat{\bigwedge_{N\in\mathscr{C}} \omega_0^N} = \bigwedge_{N\in f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N = \bigvee_{M\in f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \alpha_M^M$.
Q.E.D.

Según lo que se dice en la Proposición 52, para la relación $\mathcal{H}$ se cumple que $f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C} \in \wp(R-Mod)$. Sin embargo, al cambiar la relación bicerrada $\mathbf{R}$, puede suceder que $f^{\mathbf{R}}f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C})$ no sea la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$. Particularmente, las colecciones R-mod constituyen un ejemplo de este punto:
Si $\mathbf{R} = (R-Mod)^2$, entonces para toda $\mathscr{C} \in \wp(R-Mod)$
$f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C}) = \{N \in R-Mod \mid (M,N) \in (R-Mod)^2,\ \forall M \in \mathscr{C}\} = R-Mod$;
$f^{\mathbf{R}}f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C}) = \{M \in R-Mod \mid (M,N) \in (R-Mod)^2,\ \forall N \in f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C})\} = R-Mod$.
Así que $f^{\mathbf{R}}f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C}) = R-Mod$ es el menor miembro de los $(f)_{\mathbf{R}}-cerr$ que contiene a $\mathscr{C}$, pero puede no ser la menor clase de torsión con esa propiedad. Considerando $\mathscr{C} = \{0\}$, se cumple que $\{0\} \subseteq f^{\mathbf{R}}f_{\mathbf{R}}(\{0\}) = R-Mod$, pero cualquier otra clase de torsión $\mathbb{T} \subsetneq R-mod$ también contiene a $\mathscr{C}$.[38] Vemos pues que $\mathcal{H}$ recupera exitosamente la propiedad dicha en la Proposición 52, lo que le permite algunas ventajas importantes.
Recordemos que, por la relación de orden dada en los prerradicales, para todo ${}_RM$ se cumple que $\alpha_M^M \preceq \overline{\alpha_M^M}$. También $f_{\mathcal{H}}(\{M\}) = \mathbb{F}_{\alpha_M^M} = \mathbb{F}_{\overline{\alpha_M^M}}$ y $f^{\mathcal{H}}(\{M\}) = \mathbb{T}_{\omega_0^M} = \mathbb{T}_{\widehat{\omega_0^M}}$. Con esto, ahora damos el siguiente resultado.

Proposición 64. *Para ${}_RM$, se cumple que:*
1. $\mathbb{T}_{\overline{\alpha_M^M}}$ *es la menor clase de torsión que contiene a* $\{M\}$.
2. $\mathbb{F}_{\widehat{\omega_0^M}}$ *es la menor clase libre de torsión que contiene a* $\{M\}$.

Demostración. (1) De la parte (1) de la Proposición 52, sabemos que $f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}(\{M\})$ es la menor clase de torsión que contiene a $\{M\}$, es decir, $f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}_{\alpha_M^M})$. Se sigue, por la definición de $f^{\mathcal{H}}$, que $f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}_{\alpha_M^M}) = \mathbb{T}_{\omega_0^M}$, y por la parte (1) de la Proposición 63 se cumple que $\mathbb{T}_{\omega_0^M} = \mathbb{T}_{\overline{\alpha_M^M}} =$

[38] La propiedad de dualidad en $(f)_{\mathbf{R}}$ nos permite notar de inmediato que $f_{\mathbf{R}}f^{\mathbf{R}}(\mathscr{C})$ puede no ser la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathscr{C}$.

$f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}(\{M\})$.
(2) Usando que $f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\{M\})$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\{M\}$, y por las partes (2) de las Proposiciones 52 y 63 se sigue que $\mathbb{F}_{\alpha_M^M} = \mathbb{F}_{\widehat{\omega_0^M}} = f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\{M\})$.
Q.E.D.

Como para toda $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$ se cumple que $f^{\mathbf{R}}(R-Mod)$ es clase de torsión y $f_{\mathbf{R}}(R-Mod)$ es clase libre de torsión, usamos esto para definir los siguientes prerradicales asociados a ambas clases de R-módulos. Más aún, con esta definición tendremos que dichos prerradicales son radicales idempotentes. Se tiene que los siguientes son prerradicales por la nota inmediata posterior a la Definición 16.

Definición 39. *Sea $\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$, entonces:*
1. $\sigma_{\boldsymbol{R}} = Tr_{f^{\boldsymbol{R}}(R-Mod)} = \bigvee_{M \in f^{\boldsymbol{R}}(R-Mod)} \alpha_M^M$.
2. $\tau_{\boldsymbol{R}} = Rej_{f_{\boldsymbol{R}}(R-Mod)} = \bigwedge_{M \in f_{\boldsymbol{R}}(R-Mod)} \omega_0^N$.

Como para toda $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$, se cumple que $\sigma_{\mathbf{R}}, \tau_{\mathbf{R}} \in R-radidem$ por la Proposición 35, y como $f^{\mathbf{R}}$ y $f_{\mathbf{R}}$ son antítonas, se cumple que:
(i) $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}}} = f^{\mathbf{R}}(R-Mod) = \bigcap((f)_{\mathbf{R}} - cerr)$.
(ii) $\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}}} = f_{\mathbf{R}}(R-Mod) = \bigcap(cerr-(f)_{\mathbf{R}})$.

Se tiene que cada $\mathbb{T}_\sigma \in (f)_{\mathbf{R}} - cerr$ cumple que $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}}} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$ y así $\sigma_{\mathbf{R}} \preceq \sigma$ por la Proposición 31; del mismo modo, $\mathbb{F}_\tau \in cerr-(f)_{\mathbf{R}}$ cumple que $\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}}} \subseteq \mathbb{F}_\tau$ y así $\tau \preceq \tau_{\mathbf{R}}$ por la Proposición 32. Lo anterior permite definir dos conglomerados de radicales idempotentes, para $(f)_{\mathbf{R}} - cerr$ y $cerr-(f)_{\mathbf{R}}$, que serán útiles después: Para $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$, se tienen
(i) $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] = \{\sigma \in R-radidem \,|\, \mathbb{T}_\sigma \in (f)_{\mathbf{R}} - cerr\}$.
(ii) $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] = \{\tau \in R-radidem \,|\, \mathbb{F}_\tau \in cerr-(f)_{\mathbf{R}}\}$.
Tenemos las inclusiones $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] \subseteq [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] \cap R-radidem$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \subseteq [[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \cap R-radidem$. La siguiente situación muestra un caso donde la igualdad no siempre se da:
Al tomar $\sigma, \tau \in R-radidem$, tales que $\sigma \neq \tau$, de la Proposición 7 se cumple que $\mathbb{T}_\sigma$, $\mathbb{F}_\tau$ dan $\langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle \in Gal(T-tors, L-tors)$, y así tenemos que la relación $\mathbf{R}_{\langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle}$ es bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$ porque se cumple que $\langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle - cerr = \{\{0\}, \mathbb{T}_\sigma, R-mod\}$ y $cerr - \langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle = \{\{0\}, \mathbb{F}_\tau, R-Mod\}$. Se cumple así que:
$[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] = \{0, \sigma, 1\}$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] = \{0, \tau, 1\}$, con $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle}$, $\sigma_{\mathbf{R}} = 0$ y $\tau_{\mathbf{R}} = 1$.
Lo anterior nos da que $\{0, \tau, 1\} = [[0, 1]] \subsetneq [0, 1] \cap R-radidem = R-radidem$ porque

$\sigma \in R - radidem$, pero $\sigma \notin \{0, \tau, \tau_{\mathbf{R}}\}$, pues $\sigma \neq \tau$. Del mismo modo, $\{0, \sigma, 1\} = [[0, 1]] \subsetneq R - radidem$ porque $\tau \notin \{0, \sigma, \sigma_{\mathbf{R}}\}$. Por lo que:

1. $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] = [[0, 1]] \neq [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] \cap R - radidem = R - radidem$.
2. $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \neq R - radidem$.

Definición 40. *Sea $\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. Se tiene que:*

1. El intervalo $[[\sigma_{\boldsymbol{R}}, 1]]$ se ***llena*** *si se cumple $[[\sigma_{\boldsymbol{R}}, 1]] = [[\sigma_{\boldsymbol{R}}, 1]] \cap R - radidem$.*

2. El intervalo $[[0, \tau_{\boldsymbol{R}}]]$ se ***llena*** *si se cumple $[[0, \tau_{\boldsymbol{R}}]] = [[0, \tau_{\boldsymbol{R}}]] \cap R - radidem$.*

Notemos que tenemos lo siguiente: Para cada $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ se cumple que $f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_\tau$ donde $\tau = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$, y similarmente para $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ se cumple que $f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_\sigma$ donde $\sigma = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$. Esto y la Proposición 33 nos ayudarán a tener el siguiente resultado acerca de isomorfismos de orden entre radicales idempotentes inducidos por $\mathbf{R}$.

Proposición 65. *Sea $\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. Entonces existe un isomorfismo de orden entre $[[0, \tau_{\boldsymbol{R}}]]$ y $[[\sigma_{\boldsymbol{R}}, 1]]$.*

Demostración. En forma similar a lo hecho en resultados anteriores, definimos un par de asignaciones convenientemente como sigue:

$\lambda_{\mathbf{R}} : [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] \to [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ como $\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$;

$\mu_{\mathbf{R}} : [[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \to [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ como $\mu_{\mathbf{R}}(\tau) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$.

Se cumple que $\lambda_{\mathbf{R}}$ y $\mu_{\mathbf{R}}$ están bien definidas, además que de las definiciones de supremo e ínfimo de prerradicales que conocemos, y de las propiedades de familias $\mathbb{T}$ y $\mathbb{F}$, se tiene que ambas asignaciones preservan el orden. Además, la Proposición 33 y las definiciones de $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ nos dan que $\bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $\bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$.

Veamos que ambas asignaciones son inversas una de la otra:

Sea $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$, luego $\mu_{\mathbf{R}}(\lambda_{\mathbf{R}})(\sigma) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)})} \alpha_M^M = \sigma$ porque $\mathbb{T}_\sigma = f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma) = f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)})$.

En forma análoga, tenemos que para cada $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ se cumple que $\lambda_{\mathbf{R}}(\mu_{\mathbf{R}})(\tau) = \tau$. Por tanto $\mu_{\mathbf{R}}$ y $\lambda_{\mathbf{R}}$ son isomorfismos.

Q.E.D.

Las asignaciones dadas en la proposición anterior nos serán de utilidad para dar una correspondencia entre clases de R-módulos y radicales idempotentes en un sentido similar al de las Proposiciones 31 y 32. Tal correspondencia será como una conexión de Galois isótona sobre R-radidem, la cual se verá que es una extensión única construida sobre $\lambda_{\mathbf{R}}$ y $\mu_{\mathbf{R}}$.

Proposición 66. *Sea* $\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. *Sean* $\lambda_{\boldsymbol{R}}, \mu_{\boldsymbol{R}} : R-radidem \to R-radidem$ *dadas como* $\lambda_{\boldsymbol{R}}(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$ *y* $\mu_{\boldsymbol{R}}(\tau) = \bigvee_{M \in f^{\boldsymbol{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$. *Entonces* $\langle \lambda_{\boldsymbol{R}}, \mu_{\boldsymbol{R}} \rangle \in Gal_i(R-radidem, R-radidem)$, *y se tiene que* $Im(\mu_{\boldsymbol{R}}) = [[\sigma_{\boldsymbol{R}}, 1]]$ *y* $Im(\lambda_{\boldsymbol{R}}) = [[0, \tau_{\boldsymbol{R}}]]$.

Demostración. La Proposición 65 nos permite deducir que $\lambda_{\mathbf{R}}$ y $\mu_{\mathbf{R}}$ preservan el orden. Ahora veamos que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ es un operador cerradura y $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es un operador interior:

(caso $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$) Sea $\sigma \in R-radidem$. Se cumple que $\mathbb{T}_\sigma \subseteq f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)$ y así tenemos

$$\sigma = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M \preceq \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\lambda(\sigma)})} \alpha_M^M = \mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma).$$

Se sigue que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ es creciente. También $f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}$ es un operador cerradura y preserva el orden. Por tanto, para $\sigma, \eta \in R-radidem$ tales que $\sigma \preceq \eta$ se cumple que $f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma) \subseteq f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\eta)$ y se cumple que

$$\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M \preceq \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\eta)} \alpha_M^M = \mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\eta)$$

es decir, que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ preserva el orden. Además

$$\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma))} \alpha_M^M = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M = \mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)$$

lo cual dice que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)$ es un operador idempotente. Por lo que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)$ es un operador cerradura.

(caso $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$) Sea $\tau \in R-radidem$. Se cumple que $\mathbb{T}_\tau \subseteq f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\tau)$ y tenemos que

$$\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\tau) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\mu(\tau)})} \omega_0^N \preceq \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N \preceq \bigwedge_{N \in \mathbb{F}_\tau} \omega_0^N = \tau$$

por lo que $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es decreciente. Además, como $f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}$ es un operador cerradura, para todo $\sigma, \eta \in R-radidem$ tales que $\sigma \preceq \eta$ se cumple que $f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\sigma) \supseteq f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)$ y se cumple que

$$\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N \preceq \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\eta)} \omega_0^N = \lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\eta)$$

y $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ preserva el orden. Además

$$\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\tau)) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau))} \omega_0^N = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N = \lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\tau)$$

y $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es idempotente. Por lo que es un operador interior.

Se cumple que $\langle \lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}} \rangle \in Gal_i(R-radidem, R-raadidem)$. La Proposición 65 nos da que $Im(\mu_{\mathbf{R}}) = [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $Im(\lambda_{\mathbf{R}}) = [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$.

Q.E.D.

La proposición anterior nos permite deducir lo siguiente.

Proposición 67. *Sea $\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. Entonces:*

1. $[[\sigma_{\boldsymbol{R}}, 1]]$ *es cerrado bajo ínfimos arbitrarios.*

2. $[[0, \tau_{\boldsymbol{R}}]]$ *es cerrado bajo supremos arbitrarios.*

Por lo que $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ son grandes retículas completas.

Demostración. (1) Tomamos $\{\sigma_i\}_{i\in X} \subseteq [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$. La demostración de la Proposición 66 nos da que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}} : R-radidem \to R-radidem$ es un operador cerradura, la misma Proposición 66 nos da que $Im(\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}) = Im(\mu_{\mathbf{R}}) = [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ es una gran retícula completa. Particularmente, $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\bigwedge_{i\in X}\sigma_i) = \bigwedge_{i\in X}\sigma_i \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$, por lo que es cerrado bajo ínfimos arbitrarios.
(2) Como $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es un operador interior por la Proposición 66, el razonamiento hecho en (1) se aplica para obtener que $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ es gran retícula completa y cerrado bajo supremos arbitrarios.
Q.E.D.

Podemos aplicar el Teorema de Domenach-Leclerc a las familias de Moore $(f)_{\mathcal{H}} - cerr = T-tors$ y $cerr-(f)_{\mathcal{H}} = L-tors$ con los operadores cerradura $f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}$ y $f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}$ para tener que $\langle[\mathcal{H}]_{\leq}, \subseteq\rangle \cong \langle Gal(T-tors, L-tors), \leqslant\rangle$. La Proposición 66 es útil en la obtención del siguiente resultado.

Proposición 68. *Existe un isomorfismo de orden entre* $\langle Gal(T-tors, L-tors), \leqslant\rangle$ *y* $\langle Gal_i(R-radidem, R-radidem), \leqslant\rangle$.

Demostración. Podemos proceder como en la Proposición 66 y definir $\Psi : Gal(T-tors, L-tors) \to Gal_i(R-radidem, R-radidem)$ como $\Psi(f) = \langle\lambda_f, \mu_f\rangle$ donde $\lambda_f(\sigma) = \bigwedge_{N\in f_+(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$ y $\mu_f(\tau) = \bigvee_{M\in f^+(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$. Sustituyendo $(f)_{\mathbf{R}}$ por f en la demostración de la Proposición 66, tenemos que λ_f y μ_f preservan el orden, $\lambda_f\mu_f$ es operador interior y $\mu_f\lambda_f$ es un operador cerradura. Por lo que Ψ está bien definida.
Resta mostrar que Ψ preserva el orden. Pero si tomamos $f, g \in Gal(T-tors, L-tors)$ tales que $f \leqslant g$, $\Psi(f) = \langle\lambda_f, \mu_f\rangle$ y $\Psi(g) = \langle\lambda_g, \mu_g\rangle$, como se cumple que $f_+(\mathbb{T}_\sigma) \subseteq g_+(\mathbb{T}_\sigma)$ y $f^+(\mathbb{F}_\tau) \subseteq g^+(\mathbb{F}_\tau)$ y las propiedades de supremos e ínfimos, entonces tenemos que $\lambda_f(\sigma) \succeq \lambda_g(\sigma)$ y $\mu_f(\tau) \preceq \mu_g(\tau)$. Así que $\Psi(f) \leqslant \Psi(g)$ y Ψ preserva el orden.
Ahora, sea $\Theta : Gal_i(R-radidem, R-radidem) \to Gal(T-tors, L-tors)$ dada como

$\Theta(g) = \langle f_+, f^+ \rangle$ donde $f_+(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{g_+(\sigma)}$ y $f^+(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{g^+(\tau)}$.

Las propiedades de $\mathbb{T}$ y $\mathbb{F}$ nos dan que f_+ y f^+ invierten el orden.

(f^+f_+ es un operador cerradura) Sea $\mathbb{T}_\sigma \in T - tors$, como g es conexión de Galois, se cumple que $\sigma \preceq g^+g_+(\sigma)$ pues g^+g_+ es un operador cerradura, entonces $f^+f_+(\mathbb{T}_\sigma) = f^+(\mathbb{F}_{g^+(\sigma)}) = \mathbb{T}_{g^+g_+(\sigma)} \supseteq \mathbb{T}_\sigma$. Por lo que f^+f_+ es un operador cerradura.

(f_+f^+ es un operador interior) Sea $\mathbb{F}_\tau \in L - tors$, como g es conexión de Galois, se cumple que $g_+g^+(\tau) \preceq \tau$ por ser g_+g^+ un operador interior, entonces $f_+f^+(\mathbb{F}_\tau) = f_+(\mathbb{T}_{g^+(\tau)}) = \mathbb{F}_{g_+g^+(\tau)} \supseteq \mathbb{F}_\tau$. Por lo que f_+f^+ es un operador interior.

(Θ preserva el orden) Para $f, g \in Gal_i(R - radidem, R - radidem)$ tales que $f \leqslant g$, $f_+(\sigma) \succeq g_+(\sigma)$ y $f^+(\tau) \preceq g^+(\tau)$. Por lo que: $\mathbb{T}_{f^+(\tau)} \subseteq \mathbb{T}_{g^+(\tau)}$ y $\mathbb{F}_{f_+(\sigma)} \subseteq \mathbb{F}_{g_+(\sigma)}$. Por lo que $\Theta(f) \leqslant \Theta(g)$ y Θ preserva el orden.

(Ψ y Θ son inversas una de la otra)

Sea $f \in Gal(T - tors, L - tors)$. Tomemos $g = \Theta(\Psi(f)) = \Theta(\langle \lambda_f, \mu_f \rangle)$. Para $\mathbb{T}_\sigma \in T - tors$ se tiene que $g_+(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\lambda_f(\sigma)} = f_+(\mathbb{T}_\sigma)$ y $g^+(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{\mu_f(\tau)} = f^+(\mathbb{F}_\tau)$. Por lo que $\Theta(\Psi(f)) = f$ y $\Theta\Psi = Id$.

Ahora, para $\langle \lambda, \mu \rangle \in Gal_i(R - radidem, R - radidem)$, sea $g = \Psi(\Theta(\langle \lambda, \mu \rangle))$, donde

$$g_+(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_+(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}_{\lambda(\sigma)}} \omega_0^N = \lambda(\sigma)$$

$$g^+(\tau) = \bigvee_{M \in f^+(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_{\mu(\tau)}} \alpha_M^M = \mu(\tau)$$

Así $\Psi(\Theta(\langle \lambda, \mu \rangle)) = \langle \lambda, \mu \rangle$ y $\Psi\Theta = Id$.

Se concluye que Ψ y Θ son isomorfismos de orden.

Q.E.D.

De inmediato podemos deducir el siguiente resultado que vendrá a ser útil posteriormente en la clasificación de conexiones de Galois inducidas entre colecciones cuando el anillo tiene ciertas características (como ser artiniano semisimple).

Proposición 69. *Hay un isomorfismo de orden entre las grandes retículas* $\langle [\mathcal{H}]_\leq, \subseteq \rangle$ *y* $\langle Gal_i(R - radidem, R - radidem), \leqslant \rangle$.

Demostración. Como una consecuencia del Teorema de Domenach-Leclerc tenemos que hay un isomorfismo de orden entre $[\mathcal{H}]_\leq$ y $Gal(T - tors, L - tors)$, la Proposición 68 nos da un isomorfismo de orden entre $Gal(T - tors, L - tors)$ y $Gal_i(R - radidem, R - radidem)$ lo cual nos da el resultado buscado.

Q.E.D.

La Proposición 66 nos permite definir una asignación $\zeta : [\mathcal{H}]_{\leq} \to (R - radidem)^2$ como sigue:

$\zeta(\mathbf{R}) = \{(\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma), \lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)) \mid \sigma \in R - radidem\} = \{(\mu_{\mathbf{R}}(\tau), \lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\tau)) \mid \tau \in R - radidem\} = \{(\sigma, \lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)) \mid \sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]\} = \{(\mu_{\mathbf{R}}(\tau), \tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]\}$;

donde $\langle \lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}} \rangle \in Gal_i(R - radidem, R - radidem)$, con $\zeta(\mathbf{R})$ siendo las parejas de prerradicales que corresponden a las $\mathbf{R}$-teorías de torsión, es decir, $(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)})$ y $(\mathbb{T}_{\mu_{\mathbf{R}}(\tau)}, \mathbb{T}_\tau)$ son $\mathbf{R}$-teorías de torsión con $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$. Notemos que ζ es inyectiva y que $\mathcal{H} = \bigcup_{\sigma \in R-radidem} (\mathbb{T}_\sigma \times \mathbb{F}_\sigma)$.

Veamos ahora un par de ejemplos de relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ en términos de los resultados que hemos visto recientemente:

1. $\mathbb{h}, \mathcal{H} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. En estos casos

$[[\sigma_{\mathcal{H}}, 1]] = R - radidem = [[0, \tau_{\mathcal{H}}]]$ y $[[\sigma_{\mathbb{h}}, 1]] = R - rad \cap R - prei = [[0, \tau_{\mathbb{h}}]]$.

2. $(R - Mod)^2 \in [\mathcal{H}]_{\leq}$, pues para toda $\mathcal{C} \in \wp(R - Mod)$

$f_{(R-Mod)^2}(\mathcal{C}) = \{N \in R - Mod \mid (M, N) \in (R - Mod)^2\ \forall M \in R - Mod\} = R - Mod = \mathbb{F}_0$ y también $f^{(R-Mod)^2}(\mathcal{C}) = R - Mod = \mathbb{T}_1$. Así:

$(f)_{(R-Mod)^2} - cerr \subseteq (f)_{\mathcal{H}} - cerr$ y $cerr - (f)_{(R-Mod)^2} \subseteq cerr - (f)_{\mathcal{H}}$.

Se tiene que $\sigma_{(R-Mod)^2} = 1$ y $\tau_{(R-Mod)^2} = 0$. Se sigue que $[[\sigma_{(R-Mod)^2}, 1]] = \{1\}$ y $[[0, \tau_{(R-Mod)^2}]] = \{0\}$.

Relaciones bicerradas, bifuntores casi continuos, teorías de torsión y prerradicales

Hasta ahora hemos desarrollado diversas nociones alrededor de varias retículas (de conjuntos, clases o conglomerados) de interés para la Teoría de Módulos con el objetivo de mostrar cómo se presentan diversas conexiones de Galois entre tales colecciones. Lo anterior fue hecho en parte por la ventaja que esas conexiones de Galois ofrecen para obtener información de determinada retícula en términos de otra que sea mejor conocida. Extender los Teoremas de Polaridades y de Domenach-Leclerc en general ha servido para obtener las conexiones de Galois cuando se cumplen determinadas condiciones para ciertos objetos. Ahora vamos a analizar los casos más generales de relaciones de bicerradas y bifuntores (casi continuos) que arrojan información relevante de estudio acerca de determinadas retículas, perfilando el estudio al caso de la relación $\mathcal{H}$ y el bifuntor Hom_R con R un anillo específico.

Ahora estamos en posición de ofrecer los elementos que nos servirán para dar la clasificación de los conglomerados de objetos con estructura reticular de interés en términos de conexiones de Galois. Como ya hemos comenzado a hacer en secciones anteriores, centraremos la atención en la categoría R-Mod y en cómo emplearemos lo que hemos revisado acerca de bifuntores CA con lo tenido hasta la generalización del Teorema de Domenach-Leclerc.

La serie de resultados que siguen permitirán apreciar las propiedades que se tienen al relacionar bifuntores con la categoría R-Mod. Para esto, partiremos de lo que sabemos acerca de teoría de categorías[39] junto con varios resultados y nociones que hemos alcanzado. Para empezar, consideraremos bifuntores sobre R-Mod y cómo asociar una relación $\mathbf{R} \in (R-Mod)^2$ a esos bifuntores: Para cualquier bifuntor $K(\ ,\ ) : (R-Mod)^{op} \times R-Mod \longrightarrow R-mod$, se define la relación $\mathbf{R}_K = \{({}_RM, {}_RN) \mid K(M,N) = 0\}$. Veamos que se cumple lo siguiente.

Proposición 70. *Si* $K(\ ,\ ) : (R-Mod)^{op} \times R-Mod \longrightarrow R-Mod$ *es un bifuntor CA, entonces* $\boldsymbol{R}_K \in [\mathcal{H}]_{\leq}$.

Demostración. Sabemos que una consecuencia del Teorema de Domenach-Leclerc es que $[\mathcal{H}]_{\leq}$ y $Gal(T-tors, L-tors)$ son isomorfos. Así, tendremos el resultado al mostrar que cada miembro de $(f)_{\mathbf{R}_K}-cerr$ es clase de torsión, y cada miembro de $cerr-(f)_{\mathbf{R}_K}$ es clase libre de torsión. Tomamos $\mathcal{C} \in \wp(R-Mod)$.

1. ($f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo epimorfismos) Sea $M \in (f)^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$, un módulo ${}_RM''$ y $g : M \to M''$ un epimorfismo. Si $N \in \mathcal{C}$ entonces $K(M,N) = 0$. Como $K(\ ,N)$ es funtor contravariante exacto izquierdo, $K(g,N) : K(M'',N) \to K(M,N)$ es monomorfismo y así, $K(M'',N) = 0$. Por lo que $M'' \in (f)^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$.
2. ($f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo coproductos) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ y $N \in \mathcal{C}$. Se cumple que $K(M_\alpha, N) = 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Como $K(\ ,N)$ es funtor contravariante casi continuo, el homomorfismo inducido $\prod K(i_\alpha, N) : K(\bigoplus M_\alpha, N) \to \prod K(M_\alpha, N)$ es monomorfismo. Así que, como $\prod K(M_\alpha, N) = 0$, entonces $K(\bigoplus M_\alpha, N) = 0$ y se tiene que $\bigoplus M_\alpha \in f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$.
3. ($f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones) Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta en R-mod tal que $M', M'' \in f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ y $N \in \mathcal{C}$. Como $K(\ ,N)$ es funtor contravariante exacto izquierdo, la sucesión:

$0 \to K(M'',N) \xrightarrow{K(g,N)} K(M,N) \xrightarrow{K(f,N)} K(M',N)$

es exacta. Como $K(M'',N) = K(M'N) = 0$, se tiene que $K(M,N) = 0$. Así $M \in f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$.

[39] Lo cual fue presentado en la primera sección del capítulo anterior.

Por lo tanto, $f^{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es clase de torsión.

4. ($f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo monomorfismos) Sea $N \in (f)_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$, un $M \in \mathcal{C}$ y $g : N' \to N$ un monomorfismo. Luego $K(M,N) = 0$. Como $K(M, \ )$ es funtor covariante exacto izquierdo, $K(M,g) : K(M,N') \to K(M,N)$ es monomorfismo y $K(M,N') = 0$. Entonces $N' \in f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$.

5. ($f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo productos) Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ y $M \in \mathcal{C}$. Se cumple que $K(M,N_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Como $K(M, \ )$ es funtor covariante casi continuo, el homomorfismo inducido $\prod K(M,p_\alpha) : K(M,\prod N_\alpha) \to \prod K(M,N_\alpha)$ es monomorfismo. Así, como $\prod K(M,N_\alpha) = 0$, entonces $K(M,\prod N_\alpha) = 0$. Se sigue que $\prod N_\alpha \in f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$.

6. ($f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones) Sea $0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$ una sucesión exacta en R-mod tal que $N', N'' \in f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$, $M \in \mathcal{C}$ y un ${}_RN$. Como $K(M, \ )$ es funtor covariante exacto izquierdo, la sucesión:

$0 \to K(M,N') \xrightarrow{K(M,f)} K(M,N) \xrightarrow{K(M,g)} K(M,N'')$

es exacta. Como $K(M,N') = K(M,N'') = 0$, entonces $K(M,N) = 0$. Así que $N \in f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$.

Por lo tanto, $f_{\mathbf{R}_K}(\mathcal{C})$ es clase libre de torsión.

Aplicando el teorema de Domenach-Leclerc, tenemos que $\mathbf{R}_K \in [\mathcal{H}]_{\leq}$.

Q.E.D.

Ahora, pretendemos analizar el bifuntor CA $Hom_R(\ , \ )$ dentro de los resultados que estaremos contemplando. Sabemos de la Proposición 70 que tenemos un modo de estudiar relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$, y la misma definición de bifuntor CA nos dice lo que tiene que ocurrir para que al fijar las entradas de $Hom_R(\ , \ )$ bajo funtores nos resulte en funtores casi continuos (véase la Definición 29). Tenemos lo siguiente: (i) para cualquier funtor covariante casi cocontinuo $F : R-Mod \to R-Mod$, denotamos por $\mathbf{R}^F$ a la relación bicerrada inducida por el bifuntor AC $Hom_R(F(\ ), \ )$; (ii) para cualquier funtor covariante casi continuo $G : R-Mod \to R-Mod$, denotamos por $\mathbf{R}_G$ a la relación bicerrada $Hom_R(\ ,G(\ ))$. Así tenemos:

$\mathbf{R}^F = \{(M,N) \in (R-Mod)^2 \,|\, Hom_R(F(M),N) = 0\}$

$\mathbf{R}_G = \{(M,N) \in (R-Mod)^2 \,|\, Hom_R(M,G(N)) = 0\}$

y estas relaciones cumplen con varias propiedades importantes.[40] El siguiente resultado nos dice que esas relaciones bicerradas se comportan bien respecto de productos y coproductos de funtores.

[40]Empezamos por notar que $\mathbf{R}^F = \mathbf{R}^{F'}$ cuando $F \cong F'$, y $\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_{G'}$ cuando $G \cong G'$.

Proposición 71. *Sean $\{F_i\}_{i\in X}$ y $\{G_j\}_{j\in Y}$ familias indexadas de funtores casi cocontinuos y casi continuos, respectivamente. Entonces:*

1. $\boldsymbol{R}^{\bigoplus F_i} = \bigcap \boldsymbol{R}^{F_i}$.

2. $\boldsymbol{R}_{\prod G_j} = \bigcap \boldsymbol{R}_{G_j}$.

Demostración. Por la Proposición 45, tenemos que $\bigoplus F_i$ y $\prod G_j$ son funtores covariantes casi cocontinuo y casi continuo, respectivamente, por lo que $\mathbf{R}^{\bigoplus F_i}$ y $\mathbf{R}_{\prod G_j}$ son relaciones bicerradas. Sabemos de la definición del bifuntor Hom que las intersecciones de imágenes de los funtores F y G de R-módulos se comportan bien con respecto a la intersección de R-módulos, por lo que se sigue el resultado.
Q.E.D.

Del mismo modo, se cumple lo dicho en el resultado anterior cuando se toman productos y coproductos de un funtor consigo mismo.

Corolario 72. *Sean $F : R - Mod \to R - Mod$ un funtor covariante casi cocontinuo y $G : R - Mod \to R - Mod$ un funtor covariante casi continuo. Entonces:*

1. $\boldsymbol{R}^{F^X} = \boldsymbol{R}^F$.

2. $\boldsymbol{R}_{G^X} = \boldsymbol{R}_G$.

Demostración. Volvemos a aplicar la Proposición 45 y tenemos el resultado por la propiedad del bifuntor Hom de comportarse bien con intersecciones de R-módulos.
Q.E.D.

Desde ahora, y a menos que se indique diferente, seguiremos considerando a F un funtor covariante casi cocontinuo y G un funtor covariante casi continuo. Empezaremos por describir las conexiones de Galois correspondientes a las relaciones $\mathbf{R}^F$ y $\mathbf{R}_G$. Estableceremos la siguiente notación para hablar sobre imágenes directa e inversa de funtores: para cualquier funtor $H : R - Mod \to R - Mod$ y cualquier $\mathcal{C} \subseteq R - Mod$, $\overrightarrow{H}(\mathcal{C})$ denota a la clase de todos los módulos de la forma $H(M)$ para un $M \in \mathcal{C}$, y $\overleftarrow{H}(\mathcal{C})$ denota a la clase de todos los módulos ${}_RM$ tales que $H(M) \in \mathcal{C}$. En modo natural, H define dos asignaciones que preservan el orden $\overrightarrow{H}, \overleftarrow{H} : \wp(R - Mod) \longrightarrow \wp(R - Mod)$. Ahora veremos el siguiente resultado.

Proposición 73. *Sea $\mathcal{C} \subseteq R - Mod$. Entonces:*

1. $f_{\boldsymbol{R}^F}(\mathcal{C}) = f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathcal{C}))$.

2. $f^{\boldsymbol{R}^F}(\mathcal{C}) = \overleftarrow{F}(f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$.

3. $f_{\boldsymbol{R}_G}(\mathcal{C}) = \overleftarrow{G}(f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$.

4. $f^{\boldsymbol{R}_G}(\mathcal{C}) = f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G}(\mathcal{C}))$.

Demostración. (1) Para cualquier ${}_RN$, $Hom_R(F(M), N) = 0$ para cualquier $M \in \mathcal{C}$ si y sólo si $Hom_R(M, N) = 0$ para cualquier $M \in \overrightarrow{F}(\mathcal{C})$ si y sólo si $N \in f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathcal{C}))$.

(2) Para cualquier ${}_RM$ se tiene que $Hom_R(F(M), N) = 0$ para cualquier $N \in \mathcal{C}$ si y sólo si $F(M) \in f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$.

(3) Para cualquier ${}_RN$ se tiene que $Hom_R(M, G(N)) = 0$ para cualquier $M \in \mathcal{C}$ si y sólo si $G(N) \in f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$.

(4) Para cualquier ${}_RM$, $Hom_R(M, G(N)) = 0$ para cualquier $N \in \mathcal{C}$ si y sólo si $Hom_R(M, N) = 0$ para cualquier $N \in \overrightarrow{G}(\mathcal{C})$ si y sólo si $M \in f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G}(\mathcal{C}))$.

Q.E.D.

La situación de la Proposición 73 se ve diagramáticamente como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\wp(R-Mod) \arrow[r, "f_{\mathbf{R}^F}"] \arrow[d, "\overrightarrow{F}"] & \wp(R-Mod) \\
\wp(R-Mod) \arrow[ur, "f_{\mathcal{H}}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \wp(R-Mod) \arrow[d, "\overleftarrow{F}"] \\
\wp(R-Mod) \arrow[ur, "f^{\mathcal{H}}"] \arrow[r, "f^{\mathbf{R}^F}"] & \wp(R-Mod)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \wp(R-Mod) \arrow[d, "\overleftarrow{G}"] \\
\wp(R-Mod) \arrow[ur, "f_{\mathcal{H}}"] \arrow[r, "f_{\mathbf{R}^G}"] & \wp(R-Mod)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\wp(R-Mod) \arrow[r, "f^{\mathbf{R}_G}"] \arrow[d, "\overrightarrow{G}"] & \wp(R-Mod) \\
\wp(R-Mod) \arrow[ur, "f^{\mathcal{H}}"] &
\end{tikzcd}$$

Podemos aplicar los resultados de la Proposición 73 para tener las siguientes propiedades acerca de sistemas de cerrados de conexiones de Galois inducidas por relaciones bicerradas a su vez inducidas por bifuntores CA del siguiente modo.

Proposición 74. *Sean $(f)_{\boldsymbol{R}^F}$ y $(f)_{\boldsymbol{R}_G}$ conexiones de Galois de las relaciones bicerradas $\boldsymbol{R}^F$ y $\boldsymbol{R}_G$, respectivamente. Entonces:*

1. $(f)_{\boldsymbol{R}^F} - cerr = \{\overleftarrow{F}(\mathbb{T}) \mid \mathbb{T} \in T - tors\}$.

2. $cerr - (f)_{\boldsymbol{R}^F} = \{f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \subseteq \overrightarrow{F}(R - Mod)\}$.

3. $(f)_{\boldsymbol{R}_G} - cerr = \{f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \subseteq \overrightarrow{G}(R - Mod)\}$,

4. $cerr - (f)_{\boldsymbol{R}_G} = \{\overleftarrow{G}(\mathbb{F}) \mid \mathbb{F} \in F - tors\}$.

Demostración. (1) Sabemos del Teorema de Domenach-Leclerc generalizado 61 y la Proposición 62 que $(f)_{\mathbf{R}^F} - cerr = T - tors$ para las $\mathbf{R}^F$-teorías de torsión. Como $(f)_{\mathbf{R}^F} - cerr = Im(f^{\mathbf{R}^F})$, de la parte (2) de la Proposición 73 se sigue que $\forall A \in (f)_{\mathbf{R}^F} - cerr$, $A = \overleftarrow{F}((f)^{\mathbf{R}^F}(B))$ para una $B \in T - tors$. Luego $(f)_{\mathbf{R}^F} - cerr = \{\overleftarrow{F}(\mathbb{T}) \mid \mathbb{T} \in T - tors\}$.

(2) Nuevamente, por el Teorema de Domenach-Leclerc generalizado 61 y la Proposición 62, se cumple que $cerr - (f)_{\mathbf{R}^F} = Im(f_{\mathbf{R}^F}) = F - tors$ para $\mathbf{R}^F$-teorías de torsión. Por la parte (1) de la Proposición 73 se sigue que $\forall \mathcal{C} \in cerr - (f)_{\mathbf{R}^F}$, $\mathcal{C} = f_{\mathbf{R}^F}(\mathcal{D}) = f_{\mathcal{H}}(\mathcal{E})$ con $\mathcal{E} \subseteq R - Mod$. Por tanto $cerr - (f)_{\mathbf{R}^F} = \{f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \subseteq \overrightarrow{F}(R - Mod)\}$.

(3) y (4) salen por dualidad aplicando las partes (4) y (3) de la Proposición 73 al funtor G.

Q.E.D.

Proposición 75. *1. El conglomerado de las $\boldsymbol{R}^F$-teorías de torsión es:*

$\{(\mathbb{T}, f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathbb{T})) \mid \mathbb{T} \in (f)_{\boldsymbol{R}^F} - cerr\} = \{(\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\boldsymbol{R}^F}]]\}$.

2. El conglomerado de las $\boldsymbol{R}_G$-teorías de torsión es:

$\{f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G}(\mathbb{F})) \mid \mathbb{F} \in cerr - (f)_{\boldsymbol{R}_G}\} = \{(\mathbb{T}_\sigma, \overleftarrow{G}(\mathbb{T}_\sigma) \mid \sigma \in [[\sigma_{\boldsymbol{R}_G}, 1]]\}$.

Demostración. (1) Teniendo en cuenta que $[[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]] = \{\tau \in R{-}radidem \mid \mathbb{F}_\tau \in cerr{-}(f)_{\mathbf{R}^F}\}$, y como $(f)_{\mathbf{R}^F}$ es conexión de Galois, $\mathbb{F}_\tau = f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathbb{T})$ con $\mathbb{T} \in (f)_{\mathbf{R}^F} - cerr$. Por las partes (1) y (2) de la Proposición 74 se cumple la igualdad descrita.

(2) Dualmente, considerando la igualdad $[[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]] = \{\sigma \in R - radidem \mid \mathbb{T}_\sigma \in (f)_{\mathbf{R}_G} - cerr\}$, de las partes (3) y (4) de la Proposición 74 tenemos la igualdad buscada.

Q.E.D.

Proposición 76. *1. $\overleftarrow{F}$ preserva clases de torsión.*

2. $\overleftarrow{G}$ preserva clases libres de torsión.

Demostración. (1) Tomamos $\mathbb{T} \subseteq R-Mod$ tal que $\mathbb{T} \in T-tors$. Como $(f)_{\mathcal{H}}$ es conexión de Galois, tomando $((f)^{\mathcal{H}})^{-1}$ de modo natural, y por la parte (2) de la Proposición 73, se cumple que $\overleftarrow{F}(\mathbb{T}) = f^{\mathbf{R}^F}((f^{\mathcal{H}})^{-1}(\mathbb{T})) \in T-tors$.
(2) Lo tenemos por dualidad tomando $\overleftarrow{G} = f_{\mathbf{R}_G}((f_{\mathcal{H}^{-1}}))$ y por la la parte (3) de la Proposición 73.
Q.E.D.

Proposición 77. *1.* $\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$ *es la menor clase de torsión tal que* $\overrightarrow{F}(R-Mod) \subseteq \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$.
2. Si $\overrightarrow{F}(R-Mod)$ *es una clase de torsión, entonces* $[[0,\tau_{\mathbf{R}^F}]] = [[0,\tau_{\mathbf{R}^F}]] \cap R-radidem$ *y* $cerr-(f)_{\mathbf{R}^F} = \{\mathbb{F} \in L-tors \,|\, \mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}} \subseteq \mathbb{F}\}$.
3. $\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}$ *es la menor clase libre de torsión tal que* $\overrightarrow{G}(R-Mod) \subseteq \mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_F}}$.
4. Si $\overrightarrow{G}(R-Mod)$ *es una clase libre de torsión, entonces* $[[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]] = [[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]] \cap R-radidem$ *y* $(f)_{\mathbf{R}_G}-cerr = \{\mathbb{T} \in T-tors \,|\, \mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}} \subseteq \mathbb{T}\}$.

Demostración. (1) $f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(R-Mod)) = f^{\mathcal{H}}(f_{\mathbf{R}^F}(R-Mod)) = f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}) = \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$.
(2) Si $\overrightarrow{F}(R-Mod)$ es una clase de torsión, entonces $\overrightarrow{F}(R-Mod) = \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$ por (1). Si $\tau \in R-radidem$ tal que $\tau \preceq \tau_{\mathbf{R}^F}$, entonces $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}} = \overrightarrow{F}(R-Mod)$ y por la Proposición 74, $\mathbb{F}_\tau = f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}_\tau) \in cerr-(f)_{\mathbf{R}^F}$ y así $\tau \in [[0,\tau_{\mathbf{R}^F}]]$. Por lo que cualquier clase libre de torsión $\mathbb{F}_\tau \supseteq \mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$ está en $cerr-(f)_{\mathbf{R}^F}$.
(3) y (4) salen aplicando las nociones duales y la proposición 74 como en el caso anterior.
Q.E.D.

Veamos en el siguiente ejemplo cómo se aplican algunos de los resultados que hemos alcanzado. En la descripción de los elementos relevantes dados por las conexiones de Galois es en donde se aprecia su uso para estudiar las estructuras algebraicas dadas por cierto funtor.
Sea $R = \mathbb{Z}$, y sea $G = t$ el radical torsión: Para cualquier grupo abeliano M, $t(M)$ es su subgrupo de torsión, es decir es el subgrupo de los elementos del grupo que tienen orden finito.
La razón por la que t es un radical es:
$t(M/t(M)) = \{gt(M) \in M/t(M) \,|\, (gt(M))^k = \overline{0},\ k \in \mathbb{N}\}$, pero $g^k t(M) = \overline{0}$ si y sólo si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $(g^k t(M))^l = g^{kl}t(M) = 0$, por lo que $g^{kl} \in t(M)$. Por tanto, $t(M/t(M)) = t(M)/t(M) = \overline{0}$ y $t \in \mathbb{Z}-rad$.
La razón por la que t es idempotente es directo de la definición de t.
El funtor t cumple que $t(N) = N \cap t(M)$ para $N \leqslant M$, por lo que es exacto izquierdo por la Proposición 12, y la Definición 29 nos da que t y es covariante casi continuo. Pero no es

continuo por no preservar productos arbitrarios. Entonces el funtor G se puede trabajar con las proposiciones dadas en esta sección y tener la relación bicerrada $\mathbf{R}_G$, que a su vez nos define los intervalos que aparecen a continuación. Primero, los conglomerados de clases cerradas de módulos asociados a $\mathbf{R}_G$ son:

1. $(f)_{\mathbf{R}_G} - cerr$ son las clases de torsión $\{M \in \mathbb{Z} - Mod \,|\, Hom_{\mathbb{Z}}(M, C) = 0,\ \forall C \in \mathcal{C}\}$, donde $\mathcal{C}$ es una subclase de la clases de grupos abelianos de torsión.

2. $cerr - (f)_{\mathbf{R}_G}$ son las clases libres de torsión $\{M \in \mathbb{Z} - Mod \,|\, t(M) \in \mathbb{F}\}$, donde $\mathbb{F} \in L - tors$. La colección son las clases libres de torsión $\mathbb{F}_{\sigma t}$ donde $\sigma \in \mathbb{Z} - radidem$.

El conglomerado de todas las $\mathbf{R}_G$-teorías de torsión son los pares

$(\{M \in \mathbb{Z} - Mod \,|\, Hom_{\mathbb{Z}}(M, t(N)) = 0,\ \forall N \in \mathbb{F}\}, \mathbb{F})$, con $\mathbb{F} \in cerr - (f)_{\mathbf{R}_G}$.

En modo equivalente, los pares son de la forma $(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\sigma t})$ con $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]]$.

Con estos resultados tenemos lo necesario para estudiar los conglomerados reticulares de interés en términos de relaciones bicerradas inducidas y morfismos entre objetos. A continuación veremos cómo emplear estas herramientas en situaciones más específicas dentro de R-Mod, siempre cuidando de establecer los elementos mínimos para poder empezar a hablar de bifuntores CA y sistemas de cerrados.

Pares adjuntos, R-bimod y anillos cocientes. Conexiones de Galois inducidas por relaciones bicerradas inducidas

A continuación veremos los resultados anteriores al respecto de relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos y R-bimódulos. Si tenemos que $\langle F, G\rangle : R - Mod \to R - Mod$ es un par adjunto, entonces F es covariante cocontinuo y G es covariante continuo. Las Proposiciones 47 y 48 nos dicen que $Hom_R(F(\ ),\ )$ y $Hom_R(\ , G(\ ))$ son bifuntores CA. Un resultado general de la Teoría de Módulos[41] nos dice que existe $L \in R - bimod$ e isomorfismos naturales $F \cong L \otimes_R$ y $G \cong Hom_R(L,\ )$. Por lo que el par adjunto $\langle F, G\rangle$ es representado en modo único salvo isomorfismo por el bimódulo ${}_R L_R$. Más aún, como $Hom_R(F(M), N) \cong Hom_R(M, G(N))$ para todos los $M, N \in R - mod$, entonces las relaciones bicerradas inducidas por los bifuntores CA son las mismas, esto es $\mathbf{R}^F = \mathbf{R}_G$. Gracias al bimódulo L, podemos denotar las dos relaciones con $\mathbf{R}_{[L]}$.

[41] Conocido como Teorema de Watts-Eilenberg, este resultado suele verse en varia partes. En este trabajo hemos presentado algunas de esas partes en la sección preliminar sobre teoría de categorías. Una presentación adecuada puede hallarse en el apéndice B de Cerda (2016) así como en los trabajos de Eilenberg (1960) y Watts (1960).

Algunas de las propiedades que hemos visto se cumplen para estas relaciones bicerradas inducidas por R-bimódulos.

Proposición 78. *1. Para cualquier familia* $\{L_i\}_{i\in X} \subseteq R-bimod$*,* $\boldsymbol{R}_{[\bigoplus L_i]} = \bigcap \boldsymbol{R}_{L_i}$.
2. Para cualquier $L \in R-bimod$ *y cualquier conjunto* X*,* $\boldsymbol{R}_{[L^{(X)}]} \subseteq \boldsymbol{R}_{[L]}$.
3. Sean $L, K \in R-bimod$*. Si L genera a K entonces* $\boldsymbol{R}_{[L]} \subseteq \boldsymbol{R}_{[K]}$.

Demostración. (1) Como para cada $i \in X$, $F_i \cong L_i \otimes_R$, entonces $\bigoplus F_i \cong \bigoplus L_i \otimes_R$. Se aplica la parte (1) de la Proposición 71 para obtener el resultado.
(2) La parte (1) del Corolario 72 nos permite obtener el resultado.
(3) Si L genera a K, existe un epimorfismo $L^{(X)} \twoheadrightarrow K$. Por lo que para cada ${}_RM$ se cumple que $L^{(X)} \otimes_R M \twoheadrightarrow K \otimes_R M$ es un epimorfismo y $Hom_R(K \otimes_R M, N) \rightarrowtail Hom_R(L^{(X)} \otimes_R M, N)$ es un monomorfismo con $N \in R-mod$. Tenemos así que $\mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[L^{(X)}]} \subseteq \mathbf{R}_{[L]}$.
Q.E.D.

La generación de un bimódulo a partir de otro induce un preorden en R-bimod. Tal preorden induce una relación de equivalencia $L \sim K$ la cual se entiende como que L y K se generan mutuamente. Esto afecta a los prerradicales α que vimos antes del siguiente modo: $\alpha_L^L = \alpha_K^K$. La relación de equivalencia nos permite dar una partición de R-bimod en el siguiente sentido: Para ${}_RL_R$, $[L]_\sim$ es la clase equivalencia de L, y $R-bimod/\sim$ es el conglomerado de todas esas clases de equivalencia, y tal conglomerado puede ordenarse parcialmente de manera natural con el preorden dado en términos de la generación de bimódulos, esto es, $[L]_\sim \preceq [K]_\sim$ si L genera a K. La parte (3) de la Proposición 78 permite definir una asignación que preserva el orden $\Psi : R-bimod/\sim \longrightarrow [\mathcal{H}]_\preceq$ dada por $\Psi([L]_\sim) = \mathbf{R}_{[L]}$.
Los últimos resultados acerca de las relaciones bicerradas $\mathbf{R}^F$ y $\mathbf{R}_G$ nos permiten examinar las conexiones de Galois que surgen cuando se tiene una relación bicerrada $\mathbf{R}_{[L]}$ inducida por un bimódulo ${}_RL_R$. El siguiente resultado es el análogo correspondiente al dado en la proposición 73.[42]

Proposición 79. *Sea* $\langle F, G\rangle : R-Mod \to R-Mod$ *un par adjunto representado por el bimódulo* ${}_RL_R$*. Para cada* $\mathcal{C} \subseteq R-Mod$*:*
1. $f_{\boldsymbol{R}_{[L]}}(\mathcal{C}) = f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathcal{C})) = \overleftarrow{G}(f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$.
2. $f^{\boldsymbol{R}_{[L]}}(\mathcal{C}) = f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G}(\mathcal{C})) = \overleftarrow{F}(f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}))$.

[42] Incluso se sigue cumpliendo la conmutatividad de los diagramas que se presentaron después de esa proposición, sólo cambiando las apariciones de $\mathbf{R}^F$ y $\mathbf{R}_G$ por $\mathbf{R}_{[L]}$.

Demostración. El razonamiento hecho en la Proposición 73 funciona aquí cambiando las apariciones de $\mathbf{R}^F$ y $\mathbf{R}_G$ por $\mathbf{R}_{[L]}$.
Q.E.D.

Proposición 80. *Sea $\langle F, G\rangle : R-Mod \to R-Mod$ un par adjunto representado por el bimódulo ${}_RL_R$. Entonces:*
1. $f_{\boldsymbol{R}_{[L]}} - cerr = \{\overleftarrow{F}(\mathbb{T}) \,|\, \mathbb{T} \in T-tors\} = \{f^{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \,|\, \mathcal{C} \subseteq \overrightarrow{G}(R-Mod)\}$.
2. $cerr - f_{\boldsymbol{R}_{[L]}} = \{\overleftarrow{G}(\mathbb{F}) \,|\, \mathbb{F} \in L-tors\} = \{f_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) \,|\, \mathcal{C} \subseteq \overrightarrow{F}(R-Mod)\}$.

Demostración. El razonamiento dado en la Proposición 74 funciona aquí al cambiar las apariciones de $\mathbf{R}^F$ y $\mathbf{R}_G$ por $\mathbf{R}_{[L]}$.
Q.E.D.

Proposición 81. *Sea $\langle F, G\rangle : R-Mod \to R-Mod$ un par adjunto representado por el bimódulo ${}_RL_R$. El conglomerado de todas las $\boldsymbol{R}_{[L]}$-teorías de torsión es:*
$\{(\mathbb{T}_\sigma, \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)) \,|\, \sigma \in [[\sigma_{\boldsymbol{R}_{[L]}}, 1]]\} = \{(\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_\tau), \,|\, \tau \in [[0, \tau_{\boldsymbol{R}_{[L]}}]]\}$.

Demostración. El razonamiento aplicado en la Proposición 75 nos da el resultado al cambiar las apariciones de $\mathbf{R}^F$ y $\mathbf{R}_G$ por $\mathbf{R}_{[L]}$.
Q.E.D.

Sabemos de la relación mostrada entre las clases de torsión y libres de torsión con los radicales idempotentes, la Definición 40 y los resultados relacionados vistos, que podemos tomar la descripción de conexiones de Galois isótonas $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[L]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[L]}}\rangle$ sobre R-radidem según la relación $\mathbf{R}_{[L]}$, donde las partes residuada y residual se definen como sigue:

$$\lambda_{\mathbf{R}_{[L]}}(\sigma) = \bigwedge_{N \in \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)} \omega_0^N \text{ para cualquier } \sigma \in R-radidem;$$

$$\mu_{\mathbf{R}_{[L]}}(\tau) = \bigvee_{M \in \overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\tau)} \alpha_M^M \text{ para cualquier } \tau \in R-radidem.$$

Esta descripción para las conexiones de Galois nos servirá para estudiar algunos ejemplos cuando se toman anillos y funtores de cierto tipo, pues los resultados alcanzados hasta aquí servirán para arrojar información tanto de teorías de torsión como de prerradicales vía conexiones de Galois. Comenzamos por explorar las propiedades extraídas por las conexiones de Galois dadas por relaciones bicerradas cuando consideramos anillos cocientes. Dado un ideal $I \leqslant R$, consideremos el par adjunto $\langle R/I\otimes_R\ , Hom_R(R/I,\ )\rangle$.[43] Veremos que el par adjunto puede verse en términos de prerradicales convenientes a continuación. Dado $\sigma \in R-pr$, recordemos que tenemos el coprerradical $\sigma^* : R-mod \longrightarrow R-mod$ definido como $\sigma^*(M) = M/\sigma(M)$. Según la observación hecha después de la Definición 18, se cumple que $(\alpha_I^R)^*(M) = M/\alpha_I^R(M) = M/IM$. Ahora, una noción que conviene recordar es la de *totalizador* de un prerradical σ, el cual es el menor prerradical τ tal que $(\sigma : \tau) = 1$. Para los siguientes resultados, requeriremos de lo siguiente: para ${}_RM$, $t(\alpha_I^R)(M) = \{x \in M \mid Ix = 0\}$.[44]. Procedemos de la siguiente manera:

Proposición 82. *Para $\sigma \in R-pr$, se tiene que $t(\sigma) = \bigvee\{\alpha_M^M \mid \sigma(R)(M) = 0\}$.*

Demostración. Procederemos por partes, primero mostrando que $t(\sigma) \in R-idem$. Para esto, consideremos lo siguiente:

Para ${}_RM$, tenemos que, como por definición $(\sigma : t(\sigma)) = 1$, se cumple $t(\sigma)(M/\sigma(M)) = (\sigma : t(\sigma))(M)/\sigma(M) = M/\sigma(M)$. Entonces, por la definición de coproducto, se tiene que $(\sigma : t(\sigma)t(\sigma))(M)/\sigma(M) = t(\sigma)t(\sigma)(M/\sigma(M)) = t(\sigma)(M/\sigma(M)) = M/\sigma(M))$. Entonces $(\sigma : t(\sigma)t(\sigma))(M) = M$, es decir que $(\sigma : t(\sigma)t(\sigma)) = 1$, y la definición del totalizador y la Observación ♣ nos permiten deducir que $t(\sigma) \preceq t(\sigma)t(\sigma) \preceq t(\sigma)$. Por tanto, $t(\sigma) \in R-idem$.

Por la parte (1) del Lema 28, se tiene que $t(\sigma) = \bigvee\{\alpha_M^M \mid t(\sigma)(M) = M\}$. Ahora tenemos los siguientes desarrollos:

($\preceq$) Sabemos que $R/I-Mod = \{M \in R-Mod \mid IM = 0\}$.[45] Por lo que si tomamos un módulo N tal que $\sigma(R)N = 0$, entonces $N \in R/I-Mod$. Similar a como hicimos en la implicación de (1) a (3) en la Proposición 15, tenemos que N es imagen homomórfica de algún módulo libre, es decir que existen un conjunto X y un epimorfismo $\rho : (R/\sigma(R))^{(X)} \to N$. Ahora, ρ es un $R/\sigma(R)$-morfismo y requerimos que también sea un R-morfismo, por lo que recordamos que tenemos el epimorfismo canónico $R \twoheadrightarrow R/I$ dado como $r \mapsto r+I$ para todo ideal I, y verificamos que se cumplen las propiedades de ser un R-morfismo para ρ:

(i) Sean $f, g \in (R/\sigma(R))^{(X)}$, entonces $\rho(f+g) = \rho(f)+\rho(g)$, pues sabemos que ρ abre sumas por ser un $R/\sigma(R)$-morfismo.

(ii) Sean $r \in R$ y $f \in (R)^{(X)}$, entonces $\rho(a\cdot f) = \sum_{x\in sop(f)} (a\cdot f)(x)\cdot x = \sum_{x\in sop(f)} ((a+\sigma(R))\cdot f)(x)\cdot x = (a+\sigma(R))\cdot \sum_{x\in sop(f)} f(x)\cdot x = a\cdot\rho(f)$, y las igualdades tercera y quinta salen por el epimorfismo canónico, y la cuarta igualdad porque ρ es un $R/\sigma(R)$-morfismo.

[43] Aquí recordemos que el producto tensorial de módulos usual es un funtor.

[44] Donde el conjunto de la derecha es el *anulador* de I en M

[45] Este es un resultado general que puede encontrarse como el Corolario 2.12 en Anderson, Fuller (1992).

Por tanto, vemos que ρ es un R-morfismo. Ahora, sabemos que $t(\sigma)(R/\sigma(R)) = (\sigma : t(\sigma))(R)/\sigma(R) = R/\sigma(R)$. Haciendo $t(\sigma)(N) = t(\sigma)(\rho((R/\sigma(R))^{(X)}))$, como ρ es un epimorfismo, entonces para todo $n \in N$ tenemos que $n = \sum_{x\in sop(f)} (a_x + \sigma(R))x$ donde $f \in (R/\sigma(R))^{(X)}$, pero como por el resultado del ρ epimorfismo, sabemos que $X \subseteq N$ es un conjunto de generadores de N y así $n = \sum_{x\in sop(f)} (a_x + \sigma(R))x = \sum_{x\in sop(f)} (a_x x + \sigma(R)) = (\sum_{x\in sop(f)} a_x x) + \sigma(R)$ donde la última igualdad sale por la hipótesis de que $\sigma(R)N = 0$, entonces $t(\sigma)(N) = t(\sigma)(\rho((R/\sigma(R))^{(X)})) = t(\sigma)(\rho(R^{(X)})/\sigma(R)) = (\sigma : t(\sigma))(\rho(R^{(X)})/\sigma(R) = \rho(R^{(X)})/\sigma(R) = (\rho(R/\sigma(R))^{(X)} = N$. Por lo tanto, $\bigvee\{\alpha_M^M \,|\, \sigma(R)(M) = 0\} \preceq t(\sigma)$.

($\succeq$) Para cualquier ${}_RK$, recordemos de la demostración de (1) del Lema 28 que $\alpha_{K/\sigma(K)}^{K/\sigma(K)}(K/\sigma(K)) = K/\sigma(K)$. Entonces $(\sigma : \alpha_{K/\sigma(K)}^{K/\sigma(K)})(K)/\sigma(K) = \alpha_{K/\sigma(K)}^{K/\sigma(K)}(K/\sigma(K)) = K/\sigma(K)$. Por lo que $(\sigma : \alpha_{K/\sigma(K)}^{K/\sigma(K)})(K) = K$. Pero como estamos suponiendo que $\sigma(R)(K/\sigma(K)) = 0$, tenemos que $K = (\sigma : \alpha_{K/\sigma(K)}^{K/\sigma(K)})(K) \leqslant (\bigvee\{(\sigma : \alpha_M^M) \,|\, \sigma(R)(M)) = 0\})(K) = (\sigma : \bigvee\{\alpha_M^M \,|\, \sigma(R)(M) = 0\})(K)$ y la última igualdad sale porque el supremo de prerradicales se comporta bien con el coproducto según la parte (2) de la Proposición 14. Pero por la definición de totalizador y de coproducto como submódulo de K, lo anterior nos da que $(\sigma : \bigvee\{\alpha_M^M \,|\, \sigma(R)(M) = 0\}) = 1$ y esto nos permite deducir que $t(\sigma) \preceq \bigvee\{\alpha_M^M \,|\, \sigma(R)(M) = 0\}$.

Con estas desigualdades, concluimos el resultado de la proposición.

Q.E.D.

Corolario 83. $t(\alpha_I^R)(M) = \{x \in M \,|\, Ix = 0\}$.

Demostración. Por la Proposición 82, tenemos que $t(\alpha_I^R) = \bigvee\{\alpha_M^M \,|\, \alpha_I^R(R)(M) = 0\}$. Y por la parte (ii) de la Observación $\bigstar$, tenemos que $\bigvee\{\alpha_M^M \,|\, \alpha_I^R(M) = 0\} = \{\alpha_M^M \,|\, IM = 0\}$. De esto se sigue que $t(\alpha_I^R)(M) = \{x \in M \,|\, Ix = 0\}$.

Q.E.D.

De lo anterior, podemos notar que $t(\alpha_I^R) \in R - rad$ puesto que, para todo ${}_RM$, se cumple que $t(\alpha_I^R)(M/t(\alpha_I^R)(M)) = 0$. Lo anterior es necesario porque daremos un resultado que nos permitirá relacionar los resultados de conexiones de Galois dadas por relaciones bicerradas con el par adjunto que dimos antes, $\langle R/I\otimes_R \,, Hom_R(R/I, \;)\rangle$. Comenzaremos por lo siguiente.

Proposición 84. *Sea $I \leqslant R$ un ideal. Entonces* $t(\alpha_I^R) = \alpha_{R/I}^{R/I}$.

Demostración. Para un ${}_RN$ y $n \in t(\alpha_I^R)(N)$, se tiene que $In = 0$. Definimos $\overline{d_n} : R/I \to N$ como $\overline{d_n}(r+I) = rn$. Este es un R-morfismo bien definido: Si $r + I = s + I$, entonces $r - s \in I$, pero $(r-s)n = rn - sn = 0$, entonces $\overline{d_n}(r+I) = rn = sn = \overline{d_n}(s+I)$. Ahora: $\overline{d_n}(1+I) = n1 = n$ y se cumple que $n \in \alpha_{R/I}^{R/I}(N)$. Y como $\overline{d_n} \in \{f : R/I \to N\}$, entonces tenemos que $n \in \alpha_{R/I}^{R/I}(N)$, por lo que $t(\alpha_I^R) \leqslant \alpha_{R/I}^{R/I}$.
Ahora, si $n \in \alpha_{R/I}^{R/I}(N)$ entonces $n = f_1(r_1+I)+f_2(r_2+I)+...+f_k(r_k+I)$ para unos $f_i : R/I \to N$, con $i = 1, ..., k$. Entonces, si tomamos $a \in I$ y hacemos $an = af_1(r_1 + I) + af_2(r_2 + I) + ... + af_k(r_k+I) = f_1(ar_1+I)+f_2(ar_2+I)+...+f_k(ar_k+I)$ porque los f_i son morfismos de anillos para cada $i = 1, ..., k$, pero como I es un ideal de R, entonces $ar_i \in I$ para cada $i = 1, ..., k$, entonces $f_i(ar_i + I) = f_i(0 + I)$ y tenemos que $f_1(ar_1 + I) + f_2(ar_2 + I) + ... + f_k(ar_k + I) = 0$, entonces $an = 0$ y como $a \in I$ fue arbitrario, entonces se tiene que $In = 0$. Por lo que $t(\alpha_I^R) \geqslant \alpha_{R/I}^{R/I}$.
Por tanto $t(\alpha_I^R) = \alpha_{R/I}^{R/I}$.
Q.E.D.

Proposición 85. *Sea $I \leqslant R$ un ideal. Entonces $t(\alpha_I^R) = Hom_R(R/I, \ )$.*

Demostración. Por la hipótesis, R/I es un R-bimódulo y se tiene que $Hom_R(R/I, M) \in R-mod$ para todo ${}_RM$. Sea un ${}_RN$ y usamos el homomorfismo $\overline{d_n}$ de la Proposición 84 para definir las siguientes asignaciones:
$\varphi : Hom_R(R/I, N) \to t(\alpha_I^R)(N)$ como $\varphi(f) = f(1 + I)$,
$\psi : t(\alpha_I^R)(N) \to Hom_R(R/I, N)$ como $\psi(x) = \overline{d_x}$.
Para $f \in Hom_R(R/I, N)$, $\psi(\varphi(f)) = \psi(f(1 + I)) = \overline{d_{f(1+I)}} = f$.
Para $x \in t(\alpha_I^R)(N)$, $\varphi(\psi(x)) = \varphi(\overline{d_x}) = \overline{d_x}(1 + I) = 1x = x$.
Se cumple que $\psi\varphi$ y $\varphi\psi$ dan la identidad y $t(\alpha_I^R) = Hom_R(R/I, \ )$.
Q.E.D.

Proposición 86. *Sea $I \leqslant R$ un ideal derecho. Entonces:*
1. Para cada ${}_RM$ existe un isomorfismo $\varphi_M : R/I \otimes_R M \to M/IM$ tal que para cada $r+I \in R/I$ y $m \in M$ se tiene que $\varphi_M((r + I) \otimes m) = rm + IM$.
2. Para cada morfismo $f : N \to M$, existe un morfismo $f^\sharp : N/IN \to M/IM$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R/I \otimes_R N \arrow[r, "R/I\otimes f"] \arrow[d, "\varphi_N"] & R/I \otimes_R M \arrow[d, "\varphi_M"'] \\ N/IN \arrow[r, "f^\sharp"] & M/IM \end{tikzcd}$$

Demostración. (1) Basta mostrar que φ_M dada es biyectiva:
(inyectiva) Sean $r + I \in R/I$ y $m \in M$ tales que $\varphi_M((r + I) \otimes m) = \bar{0}$. Como $Ker(\varphi_M) = \{x \in R/I \otimes_R M \mid \varphi_M(x) \in IM\}$, entonces $\varphi_M((r + I) \otimes m) = rm + IM = 0 + IM$, lo cual implica que $rm \in IM$ y así $Ker(\varphi_M) = IM$.
(suprayectiva) Sea $m + IM \in M/IM$, haciendo $\varphi_M((1 + I) \otimes m) = m + IM$ y se tiene que $Im(\varphi_M) = M/IM$.
(2) Definiendo $f^\sharp(n + IN) = \varphi_M((r + I) \otimes f(n))$, se cumple que:
$\varphi_M(R/I \otimes f)((r + I) \otimes n) = \varphi_M((r + I) \otimes f(n)) = rf(n) + IM$ por lo hecho en (1);
$f^\sharp(\varphi_N((r + I) \otimes n) = f^\sharp(rn + IN) = \varphi_M((r + I) \otimes f(n)) = rf(n) + IM$.
Por tanto, $\varphi_M \circ (R/I \otimes f) = f^\sharp \circ \varphi_N$.
Q.E.D.

Con ayuda de estos últimos resultados, podemos deducir inmediatamente lo que buscamos:

Proposición 87. *Para cada ideal $I \leqslant R$, existen los isomorfismos naturales:*
1. $(\alpha_I^R)^* \cong R/I\otimes_R$.
2. $t(\alpha_I^R) \cong Hom_R(R/I, \ )$.

Demostración. (1) Se cumple que $(\alpha_I^R)^*(M) = M/\alpha_I^R(M) = M/IM \cong R/I \otimes_R M$, donde el isomorfismo es dado por la Proposición 86.
(2) Esto se tiene ya por la Proposición 85.
Q.E.D.

Gracias a la Proposición 87, las asignaciones $(\alpha_I^R)^*$ y $t(\alpha_I^R)$ nos ayudan a estudiar la relación bicerrada $\mathbf{R}_{R/I}$ en términos del par adjunto $\langle(\alpha_I^R)^*, t(\alpha_I^R)\rangle$ y los resultados generales acerca de las conexiones de Galois entre intervalos de prerradicales y teorías de torsión. Ahora podemos deducir las siguientes propiedades de conexiones de Galois para dicha relación bicerrada.

Proposición 88. *1. Para cualquier $\sigma \in R-radidem$, $f_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}$.*
2. Para cualquier $\tau \in R-radidem$, $f^{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)}$.

Demostración. (1) Para cualquier ${}_RN$, tenemos que $N \in \overleftarrow{t(\alpha_I^R)}(\mathbb{F}_\sigma)$ si y sólo si $t(\alpha_I^R)(N) \in \mathbb{F}_\sigma$ si y sólo si $\sigma t(\alpha_I^R)(N) = 0$. Las Proposiciones 79 y 87 nos permiten tener: $f_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma) = \overleftarrow{t(\alpha_I^R)}(\mathbb{F}_\sigma) = \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}$.
(2) Para cada ${}_RM$ tenemos que $M \in \overleftarrow{(\alpha_I^R)^*}(\mathbb{T}_\tau)$ si y sólo si $(\alpha_I^R)^*(M) \in \mathbb{T}_\tau$ si y sólo si $\tau(M/\alpha_I^R(M)) = M/\alpha_I^R(M)$. Por las Proposiciones 79 y 87: $f^{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{F}_\tau) = \overleftarrow{(\alpha_I^R)^*}(\mathbb{T}_\tau) = \mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)}$.
Q.E.D.

Proposición 89. *1.* $(f)_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}} - cerr = \{\mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)} \mid \tau \in R - radidem\}$.
2. $cerr - (f)_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}} = \{\mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)} \mid \sigma \in R - radidem\}$.

Demostración. La definición de los sistemas de cerrados y la Proposición 88 nos dan este resultado.
Q.E.D.

Debido a la construcción de los sistemas de cerrados, se tiene que el menor miembro de $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}} - cerr$ es $\mathbb{T}_{\alpha_I^R}$ y el menor miembro de $cerr - (f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$ es $\mathbb{F}_{t(\alpha_I^R)}$. Según las construcciones de $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]]$ dadas inmediatamente después de la Definición 39, se tiene que $\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \widehat{\alpha_I^R}$ y $\tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \overline{t(\alpha_I^R}$.

Proposición 90. *El conglomerado de todas las $\boldsymbol{R}_{[R/I]}$-teorías de torsión es:*
$\{(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}) \mid \sigma \in [[\sigma_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}, 1]]\} = \{(\mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)}, \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}]]\}$.

Demostración. Aplicando la Proposición 81, tenemos el resultado.
Q.E.D.

Por la Definición 39, la construcción de los sistemas de cerrados y lo recién comentado, tenemos que para cada $\sigma \in R - radidem$, se tiene que $\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma)$ es el único radical idempotente tal que $\mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma)} = f_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}$, y para cada $\tau \in R - radidem$ se tiene que $\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau)$ es el único radical idempotente tal que $\mathbb{T}_{\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau)} = f^{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)}$. Sabiendo esto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 91. *La conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}, \mu_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}} \rangle$ sobre R-radidem se describe:*
$\lambda_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \overline{\sigma t(\alpha_I^R)}$, $\forall \sigma \in R - radidem$;
$\mu_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\tau) = (\widehat{\alpha_I^R : \tau})$, $\forall \tau \in R - radidem$.

Demostración. El razonamiento en ambos casos es similar, por lo que haremos el caso de λ: Según la Definición 39, tenemos que $\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma) = Rej_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma) = \bigcap_{N \in f_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$. Ahora, por las Proposiciones 88 y 89 se tiene que $f_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)} = \mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma)}$ tal que $\mathbb{F}_{t(\alpha_I^R)}$ es el menor miembro de $cerr - (f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$. Por la Proposición 90, sabemos que $\mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}$ es el supremo de las $\mathbb{F}_\sigma$ con $\sigma \in [\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]$ y por las igualdades dadas por la Definición 39, tenemos que: $\overline{\sigma t(\alpha_I^R)} = \bigvee_{\lambda \in ORD} \sigma t(\alpha_I^R)_\lambda = \sigma \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \bigcap_{N \in f_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N = \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma)$.
Q.E.D.

Nuevamente, tenemos los siguientes resultados como consecuencia de las propiedades de los intervalos de radicales y los sistemas de cerrados.

Proposición 92. *Si $I \leqslant R$ es idempotente, entonces:*
1. $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]] = [\alpha_I^R, 1] \cap R - radidem$.
2. $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]] = [0, t(\alpha_I^R)] \cap R - radidem$.
3. $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}} - cerr = \{\mathbb{T} \in T - tors \,|\, \mathbb{T}_{\alpha_I^R} \subseteq \mathbb{T}\}$.
4. $cerr - (f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \{\mathbb{F} \in L - tors \,|\, \mathbb{F}_{t(\alpha_I^R)} \subseteq \mathbb{T}\}$.

Demostración. Todos los resultados se obtienen directamente de la Proposición 77.
Q.E.D.

Recordemos que, como $\alpha_I^R, t(\alpha_I^R) \in R - radidem$, se cumple que para todo $\tau \in R - radidem$, $(\alpha_I^R : \tau) \in R - radidem$ y para todo $\sigma \in R - radidem$, $\sigma t(\alpha_I^R) \in R - radidem$. Antes de dar las siguientes propiedades, requerimos un par de resultados propios de la teoría de módulos. Éstos son dados a continuación:

Lema 93. *$r \in R - pridem$ si y sólo si $r = r \cdot (r : s)$ $\forall s \in R - pr$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Esta dirección ya se tiene puesto que al tomar $s = 0$ tenemos que $(r : 0) = r$.
($\Rightarrow$) Suponemos que $r \in R - pridem$. Veamos que se cumple la igualdad por doble desigualdad:
($\geq$) Para cualquier $s \in R - pr$, se cumple que $r \cdot (r : s) \preceq r \wedge (r : s) \preceq r$ por la Observación ♣.
($\leq$) Por la Observación ♣ se cumple que $r \preceq (r : s)$ para cualquier $s \in R - pr$, entonces $r = r \cdot r \preceq r \cdot (r : s)$.

Por lo tanto, tenemos que $r = r \cdot (r : s)$ $\forall s \in R - pr$.

Q.E.D.

Lema 94. *1) Si $r, t \in R - rad$ entonces $rt \in R - rad$.*

2) Si $r, t \in R - pridem$ entonces $(r : t) \in R - pridem$.

Demostración. (1) Sean $r, t \in R - rad$ y tomemos un par de R-módulos ${}_RN$, ${}_RM$ tales que $N \leqslant rt(M)$. Sabemos que para cualquier ${}_RA$, $rt(A) \leqslant r(A), t(A)$, entonces: $rt(M/N) = r(t(M/N)) = r(t(M)/N) = rt(M)/N$ donde la última igualdad es por el Lema 17. Por tanto, $rt \in R - rad$.

(2) Sean $r, t \in R - pridem$. Veremos que $(r : t) = (r : t)(r : t)$ desarrollando la definición:

Para cualquier ${}_RM$, $(r : t)(r : t)(M)$ es el submódulo de $(r : t)(M)$ que contiene a $r((r : t)(M))$ tal que

$(r : t)(r : t)(M)/r((r : t)(M)) = t((r : t)(M)/r((r : t)(M)))$. Ahora, $(r : t)(M)$ es el submódulo de M que contiene a $r(M)$ tal que $(r : t)(M)/r(M) = t(M/r(M))$, pero $(r : t)(M)/r(M) = (r : t)(M)/r(r : t)(M)$ por ser $r \in R - pridem$ y el Lema 93. Entonces $t(M/r(M)) = (r : t)(M)/r(r : t)(M)$ y al aplicar t a ambos lados de esa igualdad y por el Lema 93: $(r : t)(M)/r(M) = t(M/r(M)) = tt(M/r(M)) = t((r : t)(M)/r(r : t)(M)) = (r : t)(r : t)(M)/r((r : t)(M))$. Por lo que $(r : t) = (r : t)(r : t)$ y $(r : t) \in R - pridem$.

Q.E.D.

Proposición 95. *Sean $\sigma, \tau \in R - pr$.*

1. Si σ es un t-radical y τ es un radical, entonces $(\sigma : \tau) \in R - rad$.

2. Si $\sigma \in R - pridem$ y $\tau \in R - prei$, entonces $\sigma\tau \in R - prei$.

Demostración. (1) Para cualquier ${}_RM$, se tiene que $\sigma(M) \leqslant (\sigma : \tau)(M)$ y se puede dar un epimorfismo $M/\sigma(M) \twoheadrightarrow M/(\sigma : \tau)(M)$. Como σ es t-radical, por la Proposición 15, preserva epimorfismos y así $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$, de lo que se sigue que $\sigma(M/(\sigma : \tau)(M)) = 0$. Como $\tau \in R - rad$, tenemos que: $(\sigma : \tau) : (\sigma : \tau) = ((\sigma : \tau) : \sigma) : \tau = (\sigma : \tau) : \tau = \sigma : (\tau : \tau) = (\sigma : \tau)$. Luego $(\sigma : \tau) : \sigma = (\sigma : \tau)$ y $(\sigma : \tau) \in R - rad$.

(2) Como $\tau \in R - prei$, para ${}_RM$ se cumple: $\tau(\sigma\tau(M)) = \sigma\tau(M) \cap \tau(\tau(M)) = \sigma\tau(M) \cap \tau(M) = \sigma\tau(M)$.

Tenemos que $\tau\sigma\tau = \sigma\tau$. Como σ es idempotente, tenemos que $\sigma\tau\sigma\tau = \sigma\sigma\tau = \sigma\tau$ y así $\sigma\tau \in R - pridem$.

Q.E.D.

Tenemos lo siguiente como consecuencia.

Proposición 96. *Si $I \leqslant R$ es idempotente, entonces:*

1. Para cada $\tau \in R - radidem$, $(\alpha_I^R : \tau) \in R - radidem$.

2. Para cada $\sigma \in R - radidem$, $\sigma t(\alpha_I^R) \in R - radidem$.

Demostración. (1) Por la Proposición 15, α_I^R es un t-radical y de la Proposición 95 se tiene que $(\alpha_I^R : \tau) \in R - rad$. Ahora, como I es idempotente, se tiene que α_I^R es idempotente y de la parte (2) del Lema 94 tenemos que $(\alpha_I^R : \tau) \in R - radidem$.
(2) Como $t(\alpha_I^R) \cong Hom(R/I, \ )$ es funtor covariante casi continuo, es exacto izquierdo y por la Proposición 95 se tiene que $\sigma t(\alpha_I^R) \in R - prid$. La idempotencia de I y la parte (1) del Lema 94 dan que $\sigma t(\alpha_I^R) \in R - radidem$.
Q.E.D.

Notemos pues que la idempotencia del ideal es importante para que en este caso de la relación bicerrada $\mathbf{R}_{[R/I]}$ tengamos los siguientes resultados, todos ellos deducibles de las Proposiciones 91, 92 y 90, respectivamente.

Proposición 97. *Si $I \leqslant R$ es idempotente, la conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}, \mu_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}} \rangle$ sobre R-radidem se describe:*

$\lambda_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \sigma t(\alpha_I^R)$, $\forall \sigma \in R - radidem$;

$\mu_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\tau) = (\alpha_I^R : \tau)$, $\forall \tau \in R - radidem$.

Proposición 98. *Si $I \leqslant R$ es idempotente, entonces hay un isomorfismos de orden:*

$[\alpha_I^R, 1] \cap R - radidem \cong [0, t(\alpha_I^R] \cap R - radidem$.

Proposición 99. *Si $I \leqslant R$ es idempotente, el conglomerado de todas las $\boldsymbol{R}_{[R/I]}$-teorías de torsión es:*

$\{(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}) \mid \sigma \in [[\sigma_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}, 1]] \cap R - radidem\} = \{(\mathbb{T}_{(\alpha_I^R : \tau)}, \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}]] \cap R - radidem\}$.

Elementos para una clasificación de conexiones de Galois inducidas por relaciones bicerradas y prerradicales

¿Qué tienen en común la mayoría de los resultados que hemos dado acerca de los elementos de las conexiones de Galois para relaciones bicerradas inducidas, por una parte por ciertos pares adjuntos y bimódulos, y por otra parte por anillos cocientes R/I? Podemos rastrear ciertas características importantes desde el momento que se presentan bifuntores, y clases de R-torsión, por una parte, y morfismos entre conglomerados de prerradicales con ciertas características sobre determinados anillos, por otra. Esto no es accidental, pues notemos que hemos requerido de elementos mínimos para establecer los resultados posteriores a los mencionados debido a que las conexiones de Galois inducidas siguen instanciando las propiedades que se han venido presentando desde la Proposición 70 en adelante. Por lo que podemos concluir que el estudio acerca de sistemas de cerrados y operadores cerradura que constituyen las conexiones de Galois pertinentes entre ciertas colecciones de objetos con una estructura relevante (es decir, una estructura reticular) puede ser desempeñado al fijar la atención en la información que se obtiene por medio de los resultados generales que hemos expuesto. Es especialmente notorio que, en el caso de R-Mod, es muy útil el uso de los funtores de producto tensorial, $\otimes$, y Hom_R, para tener al alcance las herramientas necesarias que nos permitan acceder a las conexiones de Galois que clasifican las relaciones bicerradas y los prerradicales que nos permiten la comparación entre los sistemas de cerrados dados por esos conglomerados. Listamos ahora los elementos requeridos para ofrecer una clasificación de teorías de torsión y prerradicales en términos de conexiones de Galois:

1. Dado un bifuntor CA, K, se tiene que $\mathbf{R}_K \in [\mathcal{H}]_{\leq}$ (Proposición 70).
2. Los funtores F y G fijados en las entradas de Hom_R dan relaciones $\mathbf{R}^F$ y $\mathbf{R}_G$ bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$.
3. Las partes residuada y residual de $(f)_{\mathbf{R}^F}$ y $(f)_{\mathbf{R}_G}$ siempre son en términos de $f^{\mathcal{H}}$ y $f_{\mathcal{H}}$ aplicadas a los funtores F y G (Proposición 73).
4. Las familias de cerrados de $(f)_{\mathbf{R}^F}$ y $(f)_{\mathbf{R}_G}$ siempre son en términos de $f^{\mathcal{H}}$ y $f_{\mathcal{H}}$, y las imágenes directas e inversas de los funtores F y G lo son en términos de colecciones $\mathcal{H}$ de R-Mod y clases de torsión y libres de torsión (Proposición 74).
5. Las $\mathbf{R}^F$-teorías de torsión y las $\mathbf{R}_G$-teorías de torsión son dadas en términos de prerradicales en $[[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]$ y $[[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]]$ (Proposición 75).
6. Las imágenes inversas de funtores F que fijan $Hom_R(F(\ ),\ )$ preservan clases de torsión; las imágenes inversas de funtores G que fijan $Hom_R(\ , G(\ ))$ preservan clases libres de torsión (Proposición 76).
7. Las clases de torsión inducidas por $\mathbf{R}^F$ determinan los prerradicales en $[[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]$ y las clases libres de torsión; las clases libres de torsión inducidas por $\mathbf{R}_G$ determinan los prerradicales en $[[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]]$ y las clases de torsión (Proposición 77).

Ahora, daremos un ejemplo de los resultados que se pueden obtener con los elementos de las conexiones de Galois para un anillo específico. El anillo que nos interesa analizar es un anillo R artiniano semisimple (el ser semisimple ya implica la propiedad ser artiniano), que según varias definiciones equivalentes, puede decirse que posee las propiedades: (i) El R-módulo $_RR$ es artiniano si todo conjunto no vacío de submódulos de $_RR$ tiene elemento mínimo ("se estaciona"); (ii) El R-módulo $_RR$ es semisimple si puede verse como suma de módulos simples.[46]
Los siguientes enunciados son equivalentes y servirán para nuestro estudio:

1. R es un anillo semisimple y se tiene que $|R - simp| = n$.
2. R-pr es una retícula booleana de 2^n elementos.
3. Para cada $\sigma \in R - pr$, $\sigma = \bigvee_{S \in \mathcal{S}} \alpha_S^S$ para un $\mathcal{S} \subseteq R - simp$.

Por la parte (1) de la Proposición 35, tenemos que, en este caso, todo $\sigma \in R - pr$ es un radical idempotente.

A continuación daremos algunos resultados acerca de lo que cumplen los conglomerados de teorías de torsión y prerradicales cuando se procede sobre un anillo semisimple. Para esto, haremos uso de los hechos recién expuestos así como de varios de los resultados anteriormente alcanzados.
Comenzamos con el siguiente resultado acerca del tamaño de $[\mathcal{H}]_{\leq}$ cuando el anillo es semisimple.

Proposición 100. *Si R es un anillo semisimple con* $|R - simp| = n$, *entonces* $[\mathcal{H}]_{\leq}$ *es una retícula booleana de tamaño* 2^{n^2}.

Demostración. Como tenemos que R es un anillo semisimple con $|R - simp| = n$. Por la parte (1) de la Proposición 35, sabemos que $R - pr = R - radidem$, y también es una retícula booleana de 2^n elementos. Por las Proposiciones 31 y 32, tenemos que T-tors y L-tors son retículas booleanas isomorfas a $\wp(X_n)$ donde $X_n = \{1, ..., n\}$. Usando las asignaciones del Teorema 6 de Polaridades y la Proposición 68 tenemos los siguientes isomorfismos:
$[\mathcal{H}]_{\leq} \cong Gal(T - tors, L - tors) \cong Gal(\wp(X_n), \wp(X_n)) \cong \wp(X_n \times X_n)$
donde el tamaño de $\wp(X_n \times X_n)$ es 2^{n^2}.
Q.E.D.

Para anillos semisimples, todos sus ideales son idempotentes. Esto quedará mostrado con el

[46] Otra caracterización de los anillos semisimples R es que $Rad(R) = 0$. De esto se tiene como resultado que un anillo es artiniano y su radical es cero si y sólo si es semisimple.

siguiente resultado:

Lema 101. *Sea R un anillo semisimple, entonces todo ideal $I \leqslant R$ es idempotente.*

Demostración. Como R es semisimple, entonces $R = \bigoplus_{i=0}^{n} A_i$ con ${}_RA_i \leqslant_R R$ simples $\forall i = 0, ..., n$. Y por otra propiedad de los anillos semisimples, existe un conjunto $\{e_0, ..., e_n\}$ de elementos de R que son idempotentes ortogonales tales que $A_i = Re_i$ $\forall i = 0, ..., n$. Entonces debemos mostrar que todos los ideales A_i son de la forma $A_i = Re_i = Re_iRe_i = A_iA_i$.
Como hemos tomado los ideales como bilaterales, entonces todo $I \leqslant R$ satisface que $IR = I$. Entonces Re bilateral cumple que $(Re)R = Re$. Con esto procedemos a mostrar que $Re_i = Re_iRe_i$ por doble contención:
$(\subseteq)$ Sea $z \in Re_i$, entonces existe $x \in R$ tal que $z = xe_i$, pero como $z = xe_i = xe_ie_i = (xe_ix)e_i = xe_ixe_i = zz$, esto por la idempotencia de e_i y por la igualdad $(Re)R = Re$, entonces $z \in Re_iRe_i$.
$(\supseteq)$ Sea $z \in Re_iRe_i$, entonces existen $x, y \in R$ tales que $z = xe_iye_i$, pero por $Re_i = (Re_i)R$, existe $w \in R$ tal que $xe_iye_i = we_ie_i$. Se cumple que $z = xe_iye_i = we_ie_i = we_i$, donde la última igualdad es por la idempotencia de e_i, y así tenemos que $z \in Re_i$.
Por lo tanto, $Re_i = Re_iRe_i$ y A_i es idempotente $\forall i = 0, ..., n$.
Q.E.D.

Con ayuda de este resultado, ahora podemos deducir los siguientes resultados de inmediato.

Proposición 102. *Si R es anillo semisimple e $I \leqslant R$ es un ideal. Entonces:*
1. $[[\sigma_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}, 1]] = [\alpha_I^R, 1]$ y $[[0, \tau_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}]] = [0, t(\alpha_I^R)]$.
2. La conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}, \mu_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}} \rangle$ sobre R-radidem $=$ R-pr se describe:
$\lambda_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \sigma t(\alpha_I^R) = \sigma \wedge t(\alpha_I^R)$, $\forall \sigma \in R - radidem$;
$\mu_{\boldsymbol{R}_{[R/I]}}(\tau) = (\alpha_I^R : \tau) = \alpha_I^R \vee \tau$, $\forall \tau \in R - radidem$.
3. Esta conexión de Galois induce los isomorfismos de retículas:
$[\alpha_I^R, 1] \cong [0, t(\alpha_I^R)]$ y $[0, \alpha_I^R] \cong [t(\alpha_I^R), 1]$.

Demostración. Como el anillo es semisimple, podemos aplicar el Lema 101 para tener que todos sus ideales $I \leqslant R$ son idempotentes. Por lo que las partes (1) y (2) son resultado de aplicar la Proposición 92; la parte (3) es consecuencia de aplicar la Proposición 97.
Q.E.D.

El último isomorfismo se tiene porque, al ser R un anillo semisimple, si $I \leqslant R$ es un ideal, entonces existe un ideal J tal que $R = I \oplus J$, y de la Proposición 82 tenemos que $t(\alpha_I^R) = \alpha_J^R$ y $\alpha_I^R = t(\alpha_J^R)$. Cualquier R-módulo M cumplirá que $M = IM \oplus JM$ y también que $M/IM = JM$. Así $(\alpha_R^I)^* = \alpha_J^R$. La Proposición 87 nos da, para cualquier ideal J, un isomorfismo natural entre los funtores $J \otimes_R$ y α_J^R. Según el concepto de relaciones bicerradas inducidas por un bimódulo, en este caso para J que es bilateral, tenemos que $\mathbf{R}_{[J]} = \{(M,N) \in (R-Mod)^2 \,|\, Hom_R(JM,N) = 0\}$.
Recordemos la asignación $\Psi : R - bimod/ \sim \longrightarrow [\mathcal{H}]_\leq$ definida como $\Psi([L]_\sim) = \mathbf{R}_{[L]}$ la cual preserva el orden. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 103. *Si R es un anillo semisimple, entonces $\Psi : R - bimod/ \sim \longrightarrow [\mathcal{H}]_\leq$ es inyectiva.*

Demostración. Si tenemos el bimódulo ${}_RL_R$ y un ${}_RN$, de las propiedades del producto tensorial tenemos que $Hom_R(L,N) = 0$ si y sólo si $Hom_R(L \otimes_R R, N) = 0$. Por lo que estamos en la situación de la Proposición 79 y se tiene que $\mathbb{F}_{\alpha_L^L} = f_{\mathbf{R}_{[L]}}(\{R\})$. De modo que, si $L, K \in R-bimod$ tales que $\mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[K]}$, entonces $\mathbb{F}_{\alpha_L^L} = f_{\mathbf{R}_{[L]}}(\{R\}) = f_{\mathbf{R}_{[K]}}(\{R\}) = \mathbb{F}_{\alpha_K^K}$. Pero como R es semisimple, por la equivalencia de (1) con (3) de los anillos semisimples mencionada antes, y por la parte (1) de la Proposición 35, tenemos que $\alpha_L^L, \alpha_K^K \in R-radidem$ y la conexión de Galois entre familias de R-radidem nos da que $\alpha_L^L = \alpha_K^K$, es decir, $[L]_\sim = [K]_\sim$.
Q.E.D.

Para los anillos R semisimples se tiene que todos los módulos en R-bimod son sumas directas de ideales de R, más aún los ideales son mínimos.[47] Tomemos $I_1, ..., I_n$ tales ideales mínimos, con $|R - simp| = n$ y siendo R de forma $R = \prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(D_i)$ donde cada $M_{n_i}(D_i)$ es una matriz con entradas en un respectivo D_i anillo con división.[48] Sea también $\mathcal{I}(R)$ la retícula de ideales de R. Como R es semisimple, $\mathcal{I}(R)$ es retícula booleana de 2^n elementos y cada ideal $I \leqslant R$ puede escribirse como $I = \bigoplus_{i\in A} I_i$ para $A \subseteq \{1, ..., n\}$. Será útil tener el siguiente resultado.

[47]Este resultado se puede obtener con un desarrollo teórico sobre los módulos en un anillo semisimple con ayuda de varios resultados presentados en Bourbaki (1958). Es especialmente recomendable la revisión de la sección 7 en que se presentan resultados relevantes sobre anillos semisimples, y la sección 8 en donde se manejan R-módulos sobre tales anillos. En esta última sección es particularmente notorio el Teorema 1 de Wedderburn en p. 131, y los comentarios acerca de ideales bilaterales mínimos y máximos en p. 137

[48]Este es un resultado conocido como Teorema de Molein-Wedderburn-Artin.

Proposición 104. *Si R es un anillo semisimple, entonces hay un anti-isomorfismo de orden: $\Phi : \mathcal{I}(R) \to R - bimod/\sim$ definido como $\Phi(I) = [I]_\sim$.*

Demostración. Primero veamos que Φ invierte el orden: Si $I, J \leqslant R$ son tales que $J \subseteq I$ entonces, como R es semisimple, la inclusión $J \hookrightarrow I$ se escinde, así que I genera a J y se tiene que $[I]_\sim \preceq [J]_\sim$. Por lo que Φ invierte el orden en este caso.
Veamos que Φ es inyectiva: Si I y J son tales que $\Phi(I) = \Phi(J)$ entonces $[I]_\sim = [J]_\sim$ y esto es que I y J se generan mutuamente por la definición de la relación $\sim$. Ahora, tomando que I genera a J, entonces hay un epimorfismo $I^{(X)} \twoheadrightarrow J$. Sean $I = \bigoplus_{i\in A} I_i$ y $J = \bigoplus_{j\in B} I_j$. Para cada $j \in B$ se cumple que hay un epimorfismo $g_j : I^{(X)} \twoheadrightarrow I_j$ y para cada $i \in A$ hay un monomorfismo $l_i : I_i \rightarrowtail I^{(X)}$. Para cada $j \in B$ se cumple que hay un $i_0 \in A$ tal que $g_j \circ l_{i_0} \neq 0$. Por ser el anillo semisimple, todo R-módulo es inyectivo, por lo que hay un morfismo $f : R \to R$ tal que $f = h_j \circ g_j \circ l_{i_0}$ donde $h_j : I_j \hookrightarrow R$ es un inclusión, e I_{i_0} e I_j son ideales mínimos. Así, $I_{i_0} = f(I_{i_0}) = I_j$. Por lo que $B \subseteq A$ y así $J \subseteq I$. Haciendo el caso análogo cuando J genera a I, tenemos que Φ es inyectiva.
Veamos que Φ es suprayectiva: Esto se tiene ya, pues si $[L]_\sim \in R - bimod/\sim$, entonces $L \cong \bigoplus_{i\in A} I_i^{(X_i)}$ con $A \subseteq \{1, ..., n\}$. Así $[L]_\sim \cong [\bigoplus_{i\in A} I_i]_\sim$ y esto nos da el resultado.
Q.E.D.

Un par de datos importantes sobre las dos asignaciones son los siguientes. $(\Psi \circ \Phi)(I) = \mathbf{R}_{[I]}$ y la imagen de Ψ puede ser descrita como la imagen de $\Psi \circ \Phi$. La Proposición 78 nos permite tener que para cada $I \in \mathcal{I}(R)$ con $I = \bigoplus_{i\in A} I_i$, $(\Psi \circ \Phi)(I) = \bigcap_{i\in A} \mathbf{R}_{[I_i]}$.

Proposición 105. *Si R es un anillo semisimple, entonces:*

1. $R - bimod/\sim$ es una retícula booleana de 2^n elementos.

2. $Im(\Psi) = \{\bigcap_{i\in A} \boldsymbol{R}_{[I_i]} \mid A \subseteq \{1, ..., n\}\}$ es una retícula booleana de 2^n elementos.

Demostración. (1) Como R es semisimple, cada ideal I suyo se ve como $I = \bigoplus_{i\in A} I_i$ para un $A \subseteq \{1, ..., n\}$, siendo I_i un ideal mínimo $\forall i$. Por lo que al tomar $\mathcal{I}(R)$ la retícula de ideales de R, todo ${}_RM_R$ se ve como $M = \bigoplus_{i\in A} I_i$ y $\mathcal{I}(R)$ es booleana y $|\mathcal{I}(R)| = 2^n$. Por el anti-isomorfismo Φ de la Proposición 104, se tiene que $R - bimod/\sim$ es retícula booleana y $|R - bimod| = 2^n$.
(2) Por el anti-isomorfismo Φ, se tiene que $Im(\Psi) = Im(\Psi \circ \Phi)$. Además para todo $I \in \mathcal{I}(R)$, $I = \bigoplus_{i\in A} I_i$, se cumple que $(\Psi \circ \Phi)(I) = \bigcap_{i\in A} \mathbf{R}_{[I_i]}$. Por la Proposición 104, tenemos que la correstricción $\Psi \restriction^{Im(\Psi)}: \Phi(\mathcal{I}(R)) \longrightarrow Im(\Psi)$ cumple que $Im(\Psi)$ es retícula booleana y $|Im(\Psi)| = 2^n$.

Q.E.D.

Notemos que, por la definición de Ψ, el mayor elemento de $Im(\Psi)$ es $(\Psi\circ\Phi)(0) = (R{-}mod)^2$ y el menor elemento de $Im(\Psi)$ es $(\Psi\circ\Phi)(R) = \mathcal{H}$. Veremos que $Im(\Psi)$ abarca todo un intervalo de $[\mathcal{H}]_{\leq}$. Para eso requerimos el siguiente resultado.

Lema 106. *Sea* $\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. *Si* $\{M_i\}_{i\in A}$ *y* $\{N_j\}_{j\in B}$ *son colecciones de R-módulos tales que* $(M_i, N_j) \in \boldsymbol{R}$ *para todos los índices i,j, entonces* $(\bigoplus_{i\in A} M_i, \bigoplus_{j\in B} N_j) \in \boldsymbol{R}$.

Demostración. Para todo $i \in A$ y $j \in B$ se cumple que $M_i \in f^{\mathbf{R}}(\{N_j\})$, que es clase de torsión puesto que $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. Luego $\bigoplus_{i\in A} M_i f^{\mathbf{R}}(N_j)$ y se cumple que $(\bigoplus_{i\in A} M_i, N_j) \in \mathbf{R}$. Pero esto implica que $N_j \in f_{\mathbf{R}}(\{\bigoplus_{i\in A} M_i\})$ que es clase libre de torsión por $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. Luego $\bigoplus_{j\in B} N_j \in f_{\mathbf{R}}(\{\bigoplus_{i\in A} M_i\})$ y así $(\bigoplus_{i\in A} M_i, \bigoplus_{j\in B} N_j) \in \mathbf{R}$.
Q.E.D.

Proposición 107. *Si R es un anillo semisimple, entonces:*
$Im(\Psi) = \{\boldsymbol{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq} \mid \mathcal{H} \subseteq \boldsymbol{R}\}$.

Demostración. Sea $R - simp = \{S_1, ..., S_n\}$ y $I_1, ..., I_n$ los ideales mínimos de R y sea $X_n = \{1, ..., n\}$. Sea $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}$. Consideremos $C = \{i \in X_n \mid (S_i, S_i) \notin \mathbf{R}\}$ y sea $I = \bigoplus_{i\in C} I_i$. Notemos que para cada $S \in R - simp$, hay un monomorfismo $S \rightarrowtail I$ si y sólo si $(S, S) \notin \mathbf{R}$. Se afirma que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{[I]} = \bigcap_{i\in C} \mathbf{R}_{I_i}$ y lo veremos por doble contención.
$(\subseteq)$ Suponemos, para una contradicción, que $(M, N) \in \mathbf{R}$ y $S \in R - simp$ es tal que hay monomorfismos $S \rightarrowtail IM$ y $S \rightarrowtail N$, esto por la definición de la relación bicerrada $\mathcal{H}$. Como $(M, N) \in \mathbf{R}$, tenemos que $M \in f^{\mathbf{R}}(\{N\})$, que es clase de torsión por $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\leq}$. Como R es semisimple, el monomorfismo $S \rightarrowtail M$ se escinde y hay un epimorfismo $M \twoheadrightarrow S$. Luego $S \in f^{\mathbf{R}}(\{N\})$ y $(S, N) \in \mathbf{R}$. También se tiene que $N \in f_{\mathbf{R}}(\{S\})$. Por lo que $(S, S) \in \mathbf{R}$ lo que contradice que haya un monomorfismo $S \rightarrowtail I$. Por lo que si $S, T \in R - simp$ son tales que hay monomorfismos $S \rightarrowtail IM$ y $T \rightarrowtail N$, entonces $S \neq T$. Luego $Hom(IM, N) = 0$ y $(M, N) \in \mathbf{R}_{[I]}$.
$(\supseteq)$ Si $(M, N) \in \mathbf{R}_{[I]}$ con R semisimple, entonces $M \cong \bigoplus_{i\in A} S_i^{(X_i)}$ y $N \cong \bigoplus_{j\in B} S_j^{(Y_j)}$, con $A, B \subseteq X_n$ y $X_i, Y_j \neq \varnothing$ para todos los $i \in A$ y $j \in B$. Si tomamos índices i y j tales que $i = j$, entonces $Hom(IM, N) = 0$ y así hay monomorfismos $S_i \rightarrowtail M$ y $S_i \rightarrowtail N$, por lo que no hay un monomorfismo $S_i \rightarrowtail I$, es decir $(S_i, S_i) \in \mathbf{R}$. Por otra parte, si $i \neq j$, entonces $Hom(S_i, S_j) = 0$ y

como $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}$ tenemos que $(S_i, S_j) \in \mathbf{R}$.
Así que se cumple la afirmación, y por el Lema 106 tenemos que $(M, N) \in \mathbf{R}$.
Q.E.D.

Con esto terminamos de notar cómo las propiedades de las conexiones de Galois (relaciones bicerradas, sistemas de cerrados y prerradicales) nos han permitido tener toda esta información sólo suponiendo que el anillo R es semisimple. Para otros tipos de anillos podemos estudiar qué condiciones mínimas se requieren para tener el análisis en términos de conexiones de Galois.

Así, concluimos este trabajo resaltando la importancia de los elementos a considerar en las Proposiciones 70 a 77. Tal como hemos estudiado en esta sección, las características del anillo R sobre el que se consideran los R-Módulos determinará en buena medida cuáles propiedades se presentan en las conexiones de Galois entre las R-teorías de torsión, los R-prerradicales y las relaciones bicerradas inducidas por el bifuntor Hom. Pero ahora que tenemos los elementos listados por los resultados mencionados, efectuar los estudios de los conglomerados de R-teorías de torsión, los R-prerradicales y las relaciones bicerradas inducidas por el bifuntor Hom en términos de conexiones de Galois arroja información acerca de las propiedades de tales conglomerados que puede resultar muy útil en investigaciones subsecuentes acerca de anillos R y R-módulos específicos.

Bibliografía

1. Bourbaki, N., *Algébre (Elements de Mathématique), Chapitre 8: Modules et Anneux Semi-Simples*, Heidelberg, Berlin: Springer-Berlag.

2. Cerda, E. R., *Conexiones de Galois bicerradas y su aplicación a las teorías de torsión*, tesis, UAMI, 2016.

3. Dickson, S. E., "A torsion theory for abelian categories" en *Trans. Amer. Math. Soc.*, Núm. 121, 1966. P. 223-235.

4. Erné, A. M. M., Koslowski, J., y Strecker, G. E., "A primer on Galois conections" en *Ann. New York Acad. Sci.*, Núm. 704, 1993. P. 103-125.

5. Fernández-Alonso, R. y Cerda, E. R. (2017), *Biclosed relations with respect to torsion theories and almost continuous bifunctors*, Communications in Algebra, 45:2, 889-909, DOI: 10.1080/00927872.2016.1206343

6. Fernández-Alonso, R., "De la teoría de Galois a las teorías de torsión" en *Miscelánea Matemática*, Núm. 53. SMM, 2011. P. 23-32.

7. Howie, J. M., *Fields and Galois Theory*, Springer, Londres, 2006.

8. Kasch, F., *Modules and Rings* (tr. Wallace, D. A. R.), Academic Press, Londres, 1982.

9. Stenström, B., *Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.

10. Zaldivar, F., *Teoría de Galois*, Anthropos, UAM. México, 1996.