



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

ACOPLAMIENTO DE LA DERIVADA FRACCIONARIA
ESPACIAL Y TEMPORAL EN LA ECUACIÓN DE
FLUJO CON TRIPLE POROSIDAD Y TRIPLE
PERMEABILIDAD

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
PRESENTA:

FERNANDO JAVIER ALCÁNTARA LÓPEZ
TUTOR PRINCIPAL:

DR. CARLOS FUENTES RUIZ
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ
FACULTAD DE CIENCIAS
DR. JESÚS LÓPEZ ESTRADA
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACOPLAMIENTO DE LA DERIVADA FRACCIONARIA
ESPACIAL Y TEMPORAL EN LA ECUACIÓN DE FLUJO
CON TRIPLE POROSIDAD Y TRIPLE PERMEABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

FERNANDO JAVIER ALCÁNTARA LÓPEZ

DIRECTOR:

DR. CARLOS FUENTES RUIZ

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ

DR. JESÚS LÓPEZ ESTRADA



Ciudad de México, México, Agosto, 2023

Dedicatoria ...

A mi madre, por siempre estar ahí con su constante ánimo y hasta sus jalones de orejas.

*A Abigail, quien sin su soporte este trabajo no hubiera alcanzado la forma que alcanzó,
por esos recuerdos que siempre seguirán en mí.*

*Al Dr. Carlos Fuentes Ruiz, gracias por todo el apoyo; por cada conversación y
discusión siempre sobre la misma belleza, la ciencia.*

Agradecimientos

Al profesor Dr. Carlos Fuentes Ruiz quien desde licenciatura plantó la curiosidad y deseo de aprender Cálculo Fraccionario. Muchas gracias por sus múltiples palabras de aliento, por estar cuando las horas de trabajo se hacían largar, por tantas discusiones sobre ciencia siempre resaltando su belleza y encanto.

A mi comité tutorial, a mi comité sinodal y a los coautores de los trabajos en los que he contribuido: gracias por sus sabias palabras, sus conocimientos rigurosos y precisos. Gracias por su paciencia, por compartir sus conocimientos de manera profesional e invaluable, por su dedicación perseverancia y tolerancia.

A mi madre, las palabras son escasas para expresar mi sentir y para agradecer todo lo que has hecho. Gracias por ser tú y siempre creer en mí.

Notación

En este manuscrito se utilizan las siguientes abreviaturas::

${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f$	Integral fraccionaria de Riemann-Liouville por izquierda
${}^{RL}I_{b-}^{\alpha}f$	Integral fraccionaria de Riemann-Liouville por derecha
${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f$	Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por izquierda
${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f$	Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por izquierda
${}^CD_{a+}^{\alpha}f$	Derivada fraccionaria de Caputo por izquierda
${}^CD_{b-}^{\alpha}f$	Derivada fraccionaria de Caputo por derecha
${}_xW_{\infty}^{-\nu}f(x)$	Integral fraccionaria de Weyl
$W^{\nu}f(x)$	Derivada fraccionaria de Weyl
ρ	Densidad del fluido [kg/m^3]
$\tilde{\theta}$	Contenido volumétrico de agua
q	Caudal de fluido por unidad de área del medio poroso [m/s]
t	Tiempo [s]
Υ	Término de fuente o sumidero
k	Permeabilidad del medio poroso [m^2]
μ	Viscosidad dinámica del fluido [$Pa \cdot s$]
p	Presión del medio poroso [Pa]
g	Aceleración gravitacional [m/s^2]
D	Profundidad como función de las coordenadas espaciales [m]
ϕ	Porosidad del medio [m^3/m^3]
c	Compresibilidad del medio poroso [Pa^{-1}]
r	Distancia al pozo [m]

P_i	Presión inicial constante [Pa]
r_w	Radio del pozo [m]
h	Espesor del yacimiento [m^2]
Q_0	Caudal del fluido extraído [$m^3 \cdot s^{-1}$]
B_0	Factor de formación del fluido RB/STB
p_D	Presión adimensional
t_D	Tiempo adimensional
r_D	Distancia adimensional
q_D	Caudal de fluido adimensional
p_{Dw}	Presión adimensional en la frontera del pozo
m	Subíndice asociado a la matriz
f	Subíndice asociado a fracturas
v	Subíndice asociado a vóculos
ϕ_j	Porosidad del sistema poroso j para $j = m, f, v$ [m^3/m^3]
q_j	Caudal de fluido por unidad de área del sistema poroso j para $j = m, f, v$ [m/s]
p_j	Presión del medio poroso j para $j = m, f, v$ [Pa]
k_j	Permeabilidad del medio poroso j para $j = m, f, v$ [m^2]
c_j	Compresibilidad del medio poroso j para $j = m, f, v$ [Pa^{-1}]
a_{ij}	Coefficientes de transferencia en cada interfaz ij para $ij = mf, mv, vf$ [$Pa^{-1} \cdot s^{-1}$]
p_{Dj}	Presión adimensional del medio poroso j para $j = m, f, v$
p_{Dw}	Presión adimensional en la frontera del pozo
ω_j	Coefficiente de almacenamiento del medio poroso j para $j = m, f, v$
κ_j	Permeabilidad adimensional del medio poroso j para $j = m, f, v$
λ_{ij}	Coefficiente de flujo interporoso adimensional en la interfaz ij para $ij = mf, mv, vf$
s_j	Término de skin del medio poroso j para $j = m, f, v$
C_D	Coefficiente de almacenamiento adimensional en el pozo
α_j	Oren de la derivada temporal fraccionaria del medio poroso j para $j = m, f, v$
τ	Parámetro incluido para mantener el balance dimensional en el sistema fraccionario [s]
τ_D	Parámetro resultado de adimensionalizar τ
$\frac{\partial^{\alpha_j} p_{Dj}}{\partial t_D^{\alpha_j}}$	${}^C D_{0+}^{\alpha_j} p_{Dj}$

α	Oren de la derivada temporal fraccionaria del medio poroso
β	Oren de la derivada espacial fraccionaria del medio poroso
$\mathbf{q}_{\beta,D}$	Ley de Darcy fraccionaria espacial
δ	Parámetro incluido para mantener el equilibrio dimensional al incluir gradiente fraccionario espacial [m]
$\delta_{\beta,D}$	Parámetro resultado de adimensionalizar δ
d_{mf}	Dimensión de masa fractal
θ	Índice de conductividad

Índice general

Agradecimientos	II
Notación	III
Prefacio	XII
1 Introducción	1
§1.1 Antecedentes	1
§1.2 Justificación	5
§1.3 Descripción del problema	6
§1.4 Hipótesis	6
§1.5 Objetivos	6
§1.6 Estructura de la tesis	7
2 Cálculo fraccionario	9
§2.1 Integral Fraccionaria	9
§2.2 Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville	10
§2.3 Derivada Fraccionaria de Caputo	12
§2.4 Cálculo Fraccionario de Weyl	15
§2.4.1 Integral Fraccionaria de Weyl	15
§2.4.2 Buenas Funciones	16
§2.4.3 Derivada Fraccionaria de Weyl	17
§2.5 Esquemas numéricos fraccionarios	17
§2.5.1 Aproximación numérica de los operadores fraccionarios	18
§2.5.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias numéricas	22

§2.5.3	Método de diferencias finitas fraccionario	24
3	Ecuación de flujo con derivada temporal fraccionaria	28
§3.1	Modelos clásicos	28
§3.1.1	Ecuación de flujo para un medio poroso	28
§3.1.2	Ecuación triple porosidad y triple permeabilidad	32
§3.2	Modelos fraccionarios temporales	51
§3.2.1	Caso de estudio 1	53
§3.2.2	Caso de estudio 2	57
4	Ecuación de flujo con gradiente fraccionario	62
§4.1	Ley de Darcy fraccionaria espacial	62
§4.2	Modelo con porosidad simple	64
§4.2.1	Ecuación de flujo simple con gradiente fraccionario	65
§4.2.2	Comparación de modelo de flujo con gradiente fraccionario y modelo en un medio poroso fractal	70
§4.3	Modelo con triple porosidad	71
5	Ecuación de flujo con gradiente fraccionario y derivada temporal frac- cionaria	78
6	Conclusiones y trabajos futuros	81
A	Quasi-Analytical Model of the Transient Behavior Pressure in an Oil Re- servoir Made up of Three Porous Media Considering the Fractional Time Derivative	84
B	Fractional Vertical Infiltration	85
C	Fractional Growth Model Applied to COVID-19 Data	86
D	Fractional Growth Model with Delay for Recurrent Outbreaks Applied to COVID-19 Data	87

E Spatial Fractional Darcy's Law on the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in Single-Porosity Naturally Fractured Reservoirs	88
---	-----------

Índice de figuras

3.1	Solución analítica, en el espacio de Laplace, del modelo adimensional de flujo para un medio poroso.	31
3.2	(a) Elemento de volumen representativo que muestra los diversos tipos de porosidad. (b) Modelo idealizado de un yacimiento con triple porosidad. . .	32
3.3	Solución al modelo de triple porosidad y triple permeabilidad de cada medio poroso, p_{Dj} para $j = m, f, v$, en el espacio r_D y diferentes valores de tiempo t_D	42
3.4	(a) Comportamiento del déficit de presión en la frontera del pozo, p_{Dw} , del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad con diferentes parámetros. (b) Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad con diferentes parámetros. (c) Parámetros utilizados en las Figuras 3.4a y 3.4b.	43
3.5	Convergencia del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad al modelo de triple porosidad y triple permeabilidad.	44
3.6	Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando ω_j para $j = m, f, v$	45
3.7	Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando λ_{mv}	46
3.8	Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando λ_{mf}	47
3.9	Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando λ_{vf}	48
3.10	Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando κ_f, κ_v y κ_m	48

3.11	Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando s_f , s_v y s_m . (a) Comportamiento considerando $s_f = s_v = s_m$. (b) Comportamiento considerando $s_f \neq s_v \neq s_m$	50
3.12	Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando C_D	50
3.13	Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema fracturado, $\alpha_v = 1$, $\alpha_m = 1$	54
3.14	Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema vugular, $\alpha_f = 1$, $\alpha_m = 1$	55
3.15	Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema vugular, $\alpha_f = 1$, $\alpha_v = 1$	56
3.16	Efectos de considerar un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, $\alpha = \alpha_f = \alpha_v = \alpha_m$	57
3.17	Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema fracturado, $\alpha_v = 1$, $\alpha_m = 1$	58
3.18	Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema vugular, $\alpha_f = 1$, $\alpha_m = 1$	58
3.19	Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema matricial, $\alpha_f = 1$, $\alpha_v = 1$	59
3.20	Efectos de considerar un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, $\alpha = \alpha_f = \alpha_v = \alpha_m$	60
3.21	Efectos de considerar un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, $\alpha = \alpha_f = \alpha_v = \alpha_m$, con constante auxiliar no trivial, i.e., $\tau_D \neq 1$	61
4.1	Idealización de la memoria espacial para incluir derivada espacial fraccionaria en el gradiente de presión.	64
4.2	Comportamiento de la presión en el espacio en diferentes tiempos y ordenes de la derivada temporal fraccionaria.	65
4.3	Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial con la derivada fraccionaria de Weyl, considerando la derivada temporal clásica $\alpha = 1$ con $\delta_{\beta,D} = 1$	66

4.4 Efecto sobre el déficit de presión y su derivada de Bourdet del efecto combinado de la derivada temporal fraccionaria y la ley de Darcy fraccionaria espacial. (a) Para $\beta < 1$, el comportamiento al variar el orden de la derivada fraccionaria de tiempo. (b) Para $\beta > 1$, el comportamiento al variar el orden de la derivada fraccionaria de tiempo. En ambos casos, $\delta_{\beta,D} = 1$ 67

4.5 Efecto de $\delta_{\beta,D}$ en la caída de presión y derivada de Bourdet del modelo de difusión fraccionaria espacial con $\alpha = 1.0$ 69

4.6 Comparación del efecto de variables espaciales fractales y la ley de Darcy fraccionaria espacial con $\delta_{\beta,D} = 1$ 70

4.7 Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial equivalente en cada sistema en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad. 73

4.8 Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial en el sistema fracturado en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad, $\beta_v = \beta_m = 1$ 74

4.9 Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial en el sistema vulgar en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad, $\beta_f = \beta_m = 1$ 75

4.10 Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial en el sistema matricial en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad, $\beta_f = \beta_v = 1$ 76

5.1 Efecto de considerar un flujo anómalo subdifusivo en el yacimiento como un todo, $\alpha = \alpha_m = \alpha_f = \alpha_v$, en la ley de Darcy fraccionaria espacial equivalente en cada medio poroso con $\beta = \beta_m = \beta_f = \beta_v < 1$. (a) Caso para flujos preferenciales, $\beta < 1$. (b) Caso para amortiguadores de flujo, $\beta > 1$ 79

Prefacio

Como productos obtenidos a lo largo del programa de doctorado del autor se encuentran:

Artículo Spatial Fractional Darcy's Law on the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in Single-Porosity Naturally Fractured Reservoirs [1]

Artículo Fractional Growth Model with Delay for Recurrent Outbreaks Applied to COVID-19 Data [2]

Artículo Fractional Growth Model Applied to COVID-19 Data [3]

Artículo Fractional Vertical Infiltration [4]

Artículo Quasi-Analytical Model of the Transient Behavior Pressure in an Oil Reservoir Made Up of Three Porous Media Considering the Fractional Time Derivative [5]

Ponencia Fractional Growth Model Applied to COVID-19 Data. 4th International Webinar on Physical Health, Nursing Care and COVID-19 Management [6]

Ponencia Infiltración Vertical Fraccionaria. 7^a Reunión Anual del Capítulo Mexicano de Interpore

Ponencia Infiltración del agua hacia el suelo desde un tubo enterrado con pared porosa. Sexto Congreso Nacional de Riego, Drenaje y Biosistemas [7]

Ponencia Modelo de un yacimiento con triple porosidad y triple permeabilidad con derivada temporal fraccionaria. VIII Encuentro Cuba-México de Métodos Numéricos y Optimización [8]

Reconocimiento Editor's choice article al trabajo Fractional Growth Model Applied to COVID-19
Data [9]

INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Para crear un plan eficiente para explotar un yacimiento, diseñar adecuadamente las instalaciones en el fondo de un pozo y en la superficie y obtener una visión más realista de las condiciones del pozo y del yacimiento que ayuden a tomar mejores decisiones para preservar la inyectividad y posterior recuperación secundaria del fluido, es necesario corregir el modelado del yacimiento que permita cubrir la heterogeneidad del fluido. Por lo tanto, las pruebas de presión son una de las principales herramientas para determinar las características del yacimiento y al mismo tiempo determinar los principales factores que influyen en la producción de hidrocarburos.

Como es bien sabido, Warren y Root [10] fueron de los pioneros en el trabajo con yacimientos naturalmente fracturados comenzando a modelar yacimientos no homogéneos, propusieron un modelo de doble porosidad al idealizar al yacimiento como un conjunto de paralelepípedos rectangulares (lo que representa la matriz), mientras que la porosidad secundaria, las fracturas, forman un sistema ortogonal continuo uniformemente espaciado por los paralelepípedos; consideraron que el fluido en la matriz se encontraba en un estado de flujo cuasi-estable, mientras que el fluido en las fracturas es inestable.

Adams et al. [11] analizaron las pruebas de presión en la fase de acumulación y destacaron dos pendientes principales en ella, la primera relacionada con la permeabilidad de la matriz y la segunda relacionada con la permeabilidad del sistema fractura-matriz.

Kazemi [12], por otro lado, generalizó el trabajo de Warren y Root asumiendo que el fluido en todo el yacimiento es inestable; además, Kazemi consideró en su modelo que todas las fracturas son horizontales y uniformemente distribuidas.

Moench [13] estudió los trabajos de Warren y Kazemi y desarrolló una teoría que incor-

pora el término de skin presente en la interfase matriz-fractura, lo que permite generalizar los supuestos de flujo pseudoestable de Warren y Root y completamente transitorio de Kazemi. Además, se define el skin para caracterizar la condición del pozo y el grado de conectividad entre el pozo y el yacimiento, resultando que, para un skin positivo, $s > 0$, se considera daño en el pozo donde cuanto mayor es el daño, mayor es el valor del término de skin; mientras que un término de skin negativo, $s < 0$, representa un pozo estimulado [14]. Otro concepto importante es el efecto de almacenamiento del pozo, C_D , que ocurre cuando el fluido se comprime en un pozo completamente lleno; caracterizado por provocar un comportamiento lineal con pendiente 1 en los tiempos inmediatamente posteriores al inicio de la producción [15].

Varias observaciones en pruebas de pozos a presión mostraron que los modelos de doble porosidad eran insuficientes para explicar y reproducir estos comportamientos; entonces Abdassah y Ershaghi [16] desarrollaron un modelo de triple porosidad formado por dos tipos de matriz separados por capas horizontales de fracturas y demostraron que los sistemas de triple porosidad se caracterizan por varios cambios de pendiente anómalos generados por la contribución respectiva de cada bloque de matriz.

Debido a Bourdet [17], quien desarrolló un nuevo método basado en el análisis de la tasa de cambio de presión en el tiempo, se simplificó el diagnóstico del comportamiento transitorio de la presión para identificar regímenes característicos que producen líneas rectas, como enfatizó Ehlig [18].

Al analizar los comportamientos en yacimientos carbonatados naturalmente fracturados vugulares, Camacho-Velázquez et al. [19] y Fuentes-Cruz et al. [20] propusieron un modelo de triple porosidad y doble permeabilidad para pozos de penetración total y parcial. Consideraron el medio poroso como un continuo constituido por fracturas, matriz y vúgulos (donde no se distingue entre canales, cavernas y cavidades); notaron que la presencia de vúgulos afecta el comportamiento de las curvas de presión. En su modelo, permitieron una interacción entre cada uno de los medios porosos utilizando la aproximación de flujo pseudoestable.

Siguiendo este enfoque, donde el medio poroso está constituido por fracturas, matriz y vúgulos, Wu et al. [21] propusieron un modelo donde el flujo es radial y solo las fracturas

alimentan el pozo productor.

Así, se realizaron diferentes intentos de capturar la heterogeneidad en yacimientos fracturados, variando las consideraciones de flujo, geometría o idealización de tipos de medios porosos que componen el yacimiento. Al-Ahmadi et al. [22] propusieron un modelo de triple porosidad considerando la roca matriz y dos tipos diferentes de fracturas (microfracturas poco permeables y macrofracturas más permeables) para períodos de flujo transitorio y pseudoestable para flujos lineales y geometrías radiales.

Nie et al. [23] abordaron el modelo de triple porosidad considerando la forma de las cavidades como esféricas y, por lo tanto, el flujo interporoso entre la fractura y las cavidades es inestable, pero se ignoró el flujo interporoso entre la matriz y las cavidades.

Algunas variantes para hacer más robustos los modelos existentes se han realizado, como Camacho-Velazquez et al. [24], quienes retomaron su modelo propuesto para pozos total y parcialmente penetrados e incorporaron información de pruebas de presión, imagelogs, núcleos, registros de pozos, entre otros. En este trabajo, concluyeron que la comunicación vertical entre vóculos puede ser más importante que su comunicación horizontal en pozos parcialmente penetrados. O a través de métodos de optimización, como Gómez et al. [25], quienes implementaron el método de tunelado para encontrar los parámetros en el modelo de doble permeabilidad con triple porosidad y, dado el problema de múltiples mínimos, sugirieron el uso de información adicional para especificar la solución físicamente consistente.

Considerando la complejidad del medio poroso, Chang y Yortsos [26] son pioneros al considerar al medio poroso como un sistema fractal, lo que les permitió describir a los yacimientos con desorden espacial y, por lo tanto, una trayectoria de flujo de fluido compleja.

En los últimos años, el cálculo fraccionario se ha convertido en una herramienta útil que, aplicada a problemas de tipo difusión, explica el comportamiento del flujo anómalo (donde el movimiento del fluido no tiene un comportamiento de tipo browniano) demostrando que el fluido tiene memoria [5].

El estudio de Metzler et al. [27] se ha convertido en una referencia importante para estudiar el fenómeno de difusión anómala en un medio poroso cuya sistema poroso tiene

un comportamiento tipo fractal, permitiendo a un sinnúmero de investigadores explorar las implicaciones considerando diferentes enfoques [28, 29, 30, 31].

Con estos modelos se ha alcanzado una comprensión más precisa del fenómeno en yacimientos no homogéneos haciendo, en algunos casos, que la tarea de comprender este complejo fenómeno también incluya modificaciones a la ley de Darcy. Cuando se consideran flujos que no son de Darcy (procesos subdifusivos), se usa el enfoque de la derivada fraccionaria para incluir el efecto de memoria.

En este sentido, Moshrefi-Torbati y Hammond [32] concluyeron que los operadores fraccionarios se pueden agrupar como filtros con memoria parcial que varía entre los extremos de memoria completa y no memoria, según el orden de la derivada fraccionaria.

Caputo [33], al estudiar la variación en el tamaño de los poros a través de los cuales se mueve el fluido, modificó la ley de Darcy al introducir el efecto memoria mediante la inclusión de la derivada fraccionaria temporal; sin embargo, para mantener un equilibrio dimensional, modificó la definición de permeabilidad introduciendo el término de pseudo-permeabilidad.

Raghavan [34] muestra que usando las propiedades de la derivada fraccionaria, uno puede traducir la derivada fraccionaria del tiempo a la ecuación de continuidad.

Se han aplicado diversas variantes de la derivada fraccionaria temporal a la ley de Darcy. Chang et al. [35] reemplaza la derivada espacial en la ley de Darcy con la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville para cuantificar la dependencia de la trayectoria espacial de un flujo de fluido. El-Amin [36] construye la ecuación de masa fraccionaria y la combina con variantes de la ley de Darcy que incluyen agregar la derivada fraccionaria del tiempo y reemplazar la derivada espacial con la derivada fraccionaria de Caputo. Chang y Sun [37] reemplazan la derivada de tiempo con la derivada temporal fraccionaria de Caputo para describir el decaimiento de cola pesada en tiempos largos y la derivada espacial con la derivada fraccionaria espacial de Riemann–Liouville para describir la dependencia del cambio de concentración no local en una amplia gama de áreas espaciales.

Asimismo, Caputo y Plastino [38], considerando medios infinitos, añaden a la clásica ley de Darcy un término proporcional a la derivada fraccionaria espacial de tipo Caputo, que representa el efecto de la memoria espacial, es decir, el gradiente de presión que considera

el camino del fluido desde el punto de partida hasta el sitio de medición.

Obembe et al. [39], en su trabajo de revisión, muestra diversas variantes de la ley de Darcy; en particular, donde la derivada fraccionaria temporal se aplica a una combinación convexa de derivadas fraccionarias espaciales de izquierda y derecha que refleja la presencia de obstáculos de flujo, mientras que las derivadas fraccionarias espaciales consideran amortiguadores de flujo.

Finalmente, para considerar la geometría intrínseca del medio poroso, Cloot y Botha [40] reemplazan la derivada espacial en la ley de Darcy con la derivada fraccionaria de Weyl; ellos consideran que el flujo de fluido en un punto dado está gobernado no solo por las propiedades del campo de presión en una posición específica sino que también depende de la distribución espacial global de ese campo.

1.2. Justificación

La modelación de yacimientos considerando un flujo anómalo ha sido un problema ya trabajado en la literatura como se ha mostrado; sin embargo, los modelos hasta ahora desarrollados recuerdan a los inicios de la modelación de antaño donde se consideraba al yacimiento como un medio poroso homogéneo o compuesto por un medio de doble porosidad dejando de lado los avances realizados donde se consideraba que el yacimiento poroso estaba compuesto por hasta tres medios porosos con sus respectivas permeabilidades.

Por otro lado, los modelos de doble porosidad que incluyen el fenómeno de memoria a través de la derivada temporal fraccionaria asumen que el flujo anómalo en cada medio poroso es idéntico; es decir, que el orden de la derivada fraccionaria es igual en cada medio poroso lo cual es una suposición forzada que limita la captación del efecto de memoria de cada medio poroso.

Más aún, el fenómeno de difusión aplicado a yacimientos trabaja en dominios considerablemente grandes, lo cual hace que agregar información sobre la geometría del medio poroso sea un problema relevante. Si bien, considerar al medio poroso como un fractal ha permitido generalizar los modelos clásicos dando como resultado una mejora en la captación de la heterogeneidad del medio poroso; también genera la cuestión de si esta será

la única herramienta que permita captar la geometría del medio poroso a la cual, la generalización de la ley de Darcy al incluir la derivada fraccionaria de Weyl parece ser una propuesta razonable.

1.3. Descripción del problema

Se propone construir un esquema numérico robusto para aproximar la solución para la ecuación de flujo en un medio con triple porosidad y triple permeabilidad que además acople la derivada fraccionaria espacial y la derivada fraccionaria temporal, donde la derivada fraccionaria espacial sea en el sentido de Weyl y la derivada fraccionaria temporal sea en el sentido de Caputo.

1.4. Hipótesis

La solución de la ecuación de flujo con triple porosidad y triple permeabilidad con derivada fraccionaria temporal y derivada fraccionaria espacial existe y es está bien definida, donde la derivada fraccionaria temporal es en el sentido de Caputo con órdenes subdifusivos y la derivada fraccionaria espacial es en el sentido de Weyl con órdenes en el intervalo $(0, 2)$.

1.5. Objetivos

Objetivo general

Construir un método numérico robusto para solucionar la ecuación de flujo con triple permeabilidad y triple porosidad con derivada temporal y espacial fraccionaria, donde la derivada fraccionaria temporal es en el sentido de Caputo y la derivada fraccionaria espacial en el sentido de Weyl.

Objetivos específicos

- Solucionar la ecuación de flujo con triple porosidad y triple permeabilidad con derivada temporal fraccionaria en el sentido de Caputo.
- Solucionar la ecuación de flujo con triple porosidad y triple permeabilidad con derivada espacial fraccionaria en el sentido de Weyl.
- Solucionar la ecuación de flujo con triple porosidad y triple permeabilidad con derivada temporal fraccionaria en el sentido de Caputo y con derivada espacial fraccionaria en el sentido de Weyl.

1.6. Estructura de la tesis

El presente trabajo está constituido por los siguientes capítulos: el Capítulo 2 describe las herramientas del cálculo fraccionario a utilizar a lo largo del presente documento, desde las definiciones de derivadas fraccionarias junto con algunas de sus propiedades más importantes y ejemplos destacados, seguido de las aproximaciones numéricas utilizadas en la literatura.

El Capítulo 3 muestra, con la finalidad de que el presente trabajo sea lo más auto consistente posible, la ecuación de flujo clásica llamado modelo con porosidad simple previo a deducir la ecuación de flujo para un medio con triple porosidad y triple permeabilidad donde se analiza a detalle el efecto de cada uno de sus parámetros y posteriormente se generaliza este modelo con el uso de la derivada temporal fraccionaria para incluir el efecto de flujo anómalo, esto último publicado en revista internacional, véase [5].

El Capítulo 4 propone generalizar la ley de Darcy al reemplazar el gradiente por la derivada fraccionaria espacial de Weyl, se desarrolla esta propuesta y se aplica esta nueva ley al modelo con porosidad simple, donde se analiza su efecto y se compara con el modelo donde se considera un yacimiento fractal, esto fue publicado en revista internacional véase [1]; finalmente, se aplica la ley de Darcy fraccionaria espacial a la ecuación de flujo para un medio con triple porosidad y triple permeabilidad.

El Capítulo 5 muestra el resultado de combinar dos diferentes definiciones de derivada

fraccionaria al incluir, por un lado, la ley de Darcy fraccionaria espacial en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad a través de la derivada fraccionaria de Weyl y, por otro lado, el efecto de flujos anómalos a través de la derivada temporal fraccionaria con la definición de la derivada de tipo Caputo.

En el Capítulo 6 se resumen las conclusiones alcanzadas en este trabajo y se muestran los trabajos futuros a desarrollar.

Los anexos muestran la primera página de los artículos de investigación publicados en revistas internacionales.

CÁLCULO FRACCIONARIO

Con la finalidad de que este trabajo sea lo más auto consistente posible, se mostrarán las herramientas del cálculo fraccionario utilizados a lo largo de la presente tesis. En particular, se mostrarán las definiciones de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, Caputo y Weyl, sus propiedades más comunes y los métodos numéricos empleados para aproximar las definiciones mencionadas.

Para más detalles sobre la teoría relacionada a las definiciones y propiedades del cálculo fraccionario véase [41, 42, 43]. Las siguientes definiciones, teoremas y proposiciones, salvo que se especifique lo contrario, son obtenidos de las referencias ya mencionadas.

2.1. Integral Fraccionaria

Como cabría esperar, antes de mostrar la herramienta fundamental de este trabajo (la derivada fraccionaria) se mostrará la definición de integral fraccionaria de la cual proviene.

Definición 2.1.1 Sea $\Omega = [a, b]$, con $-\infty < a < b < \infty$, un intervalo finito en el eje real \mathbb{R} . Se definen las **integrales fraccionarias de Riemann-Liouville** ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f$ y ${}^{RL}I_{b-}^{\alpha} f$ de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ por

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad t > a \quad (2.1)$$

y

$$({}^{RL}I_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad t < b, \quad (2.2)$$

respectivamente, donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma de Euler. Dichas expresiones son llamadas integral fraccionaria por izquierda y por derecha respectivamente.

De la aplicación directa de la definición, se puede encontrar la expresión analítica de la integral fraccionaria de funciones polinómicas; a saber, si $\alpha \geq 0, \beta > 0$

$$\begin{aligned} ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta})(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}, \\ ({}^{RL}I_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta})(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(b-x)^{\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

Como una de las propiedades más importantes de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, se encuentra la **propiedad de semigrupo**; esta es:

$$\begin{aligned} ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f)(x) &= ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x), \\ ({}^{RL}I_{b-}^{\alpha} {}^{RL}I_{b-}^{\beta} f)(x) &= ({}^{RL}I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x), \end{aligned}$$

ya que sin esta, muchas de las aplicaciones y resultados en el cálculo fraccionario no serían posibles.

2.2. Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

La integral de Riemann-Liouville es fundamental para poder definir diversas derivadas fraccionarias; en esta sección se definirá la derivada fraccionaria del mismo nombre.

Definición 2.2.1 Sea $\Omega = [a, b]$, con $-\infty < a < b < \infty$, un intervalo finito en el eje real \mathbb{R} . Se definen las **derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville** ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f$ y ${}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f$ de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ por

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad t > a \quad (2.3)$$

y

$$({}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f)(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} ({}^{RL}I_{b-}^{n-\alpha} f)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad t < b, \quad (2.4)$$

respectivamente, donde $n = \lceil \alpha \rceil$. Dichas expresiones son llamadas derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por izquierda y por derecha respectivamente.

De la aplicación directa de la definición, se puede encontrar la expresión analítica de la derivada fraccionaria de funciones polinómicas; a saber, si $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

$$\left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}, \quad (2.5)$$

$$\left({}^{RL}D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(b-t)^{\beta-\alpha}; \quad (2.6)$$

de donde se deduce que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante es una función polinómica diferente del 0.

Proposición 2.2.1 *Algunas propiedades de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville son:*

- Si $\alpha = 0$ entonces $\left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f\right)(t) = \left({}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f\right)(t) = f(t)$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ entonces $\left({}^{RL}D_{a+}^n f\right)(t) = f^{(n)}(t)$ y $\left({}^{RL}D_{b-}^n f\right)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t)$.
- Si $\alpha + \beta > 1, n = \lceil \alpha \rceil, m = \lceil \beta \rceil$ y $\alpha + \beta < n$ entonces

$$\left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} {}^{RL}D_{a+}^{\beta} f\right)(t) = \left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(t) - \sum_{j=1}^m \left({}^{RL}D_{a+}^{\beta-j} f\right)(a+) \frac{(t-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \quad (2.7)$$

- Si $f(t) \in L_p(a, b)$ con $1 \leq p \leq \infty$, la derivada fraccionaria RL aplicada a la integral fraccionaria tiene la siguiente expresión

$$\left({}^{RL}D_{a+}^{\beta} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f\right)(t) = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha-\beta} f(t), \quad \left({}^{RL}D_{b-}^{\beta} {}^{RL}I_{b-}^{\alpha} f\right)(t) = {}^{RL}I_{b-}^{\alpha-\beta} f(t). \quad (2.8)$$

- Por otro lado, de aplicar la integral fraccionaria a la derivada fraccionaria RL, se tiene que

$$\left({}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(t-a)^{\alpha-j}, \quad (2.9)$$

$$({}^{RL}I_{b-}^{\alpha} {}^{RL}D_{b-}^{\alpha} g)(t) = g(t) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{n-j} g_{n-\alpha}^{(n-j)(b)}}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (b-t)^{\alpha-j}, \quad (2.10)$$

donde $f_{n-\alpha}(t) = {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f(t)$, $g_{n-\alpha}(t) = {}^{RL}I_{b-}^{n-\alpha} g(t)$.

- La regla de Leibniz generalizada toma la siguiente forma:

$$[{}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(fg)](t) = \sum_{j=0}^{\infty} ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha-j} f)(t)(D^j g)(t). \quad (2.11)$$

- La derivada fraccionaria RL aplicada a la composición de dos funciones es:

$$\begin{aligned} [{}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(f(g))](t) &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\ &\sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \frac{j!(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} \sum_{r=1}^j [D^i f(g)](t) \sum_{r=1}^j \prod_{r=1}^j \frac{1}{a_r!} \left(\frac{(D^r g)(t)}{r!} \right)^{a_r}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $\sum_{r=1}^j r a_r = j$ y $\sum_{r=1}^j a_r = i$.

- Para $\alpha > 0$ y $n = [\alpha]$. La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria RL es

$$(\mathcal{L} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(s) = s^{\alpha} (\mathcal{L} f)(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} D^k ({}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f)(a+) \quad (2.13)$$

donde $D^k = \frac{d^k}{dt^k}$ es la derivada clásica.

La proposición 2.2.1 muestra que la derivada fraccionaria RL, en efecto, se simplifica al caso clásico cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$; sin embargo, muchas propiedades de la derivada entera no se comportan de la misma manera con este tipo de derivada fraccionaria tal como la regla de Leibniz y más aún la regla de la cadena, ecuaciones (2.11) y (2.12) respectivamente.

2.3. Derivada Fraccionaria de Caputo

En la actualidad, una de las más populares definiciones de derivada fraccionaria es la propuesta por Caputo en 1967 [44]; si bien, este tipo de derivada fraccionaria está

estrechamente relacionada con la derivada fraccionaria de RL, sus diferencias han permitido que sea aplicado para modelar fenómenos físicos.

Definición 2.3.1 Sea $\Omega = [a, b]$, con $-\infty < a < b < \infty$. Se definen las **derivadas fraccionarias de Caputo**, ${}^C D_{a+}^\alpha f$ y ${}^C D_{b-}^\alpha f$, de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ por

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = ({}^{RL} D_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

y

$$({}^C D_{b-}^\alpha f)(t) = (-1)^n ({}^{RL} D_{b-}^{n-\alpha} D^n f)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (2.15)$$

donde $n = [\alpha]$, $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$. Dichas expresiones son llamadas derivada fraccionaria de Caputo por izquierda y por derecha respectivamente.

De la aplicación directa de la definición, y de manera semejante a la derivada fraccionaria RL, se tiene que si $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha]$ y $\beta > n - 1$ entonces

$$({}^C D_{a+}^\alpha (t-a)^\beta)(t) = \frac{\beta+1}{\beta-\alpha+1} (t-a)^{\beta-\alpha}, \quad (2.16)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha (b-t)^\beta)(t) = \frac{\beta+1}{\beta-\alpha+1} (b-t)^{\beta-\alpha}; \quad (2.17)$$

mientras que si $k = 0, 1, \dots, n-1$ entonces

$$({}^C D_{a+}^\alpha (t-a)^k)(t) = ({}^C D_{b-}^\alpha (b-t)^k)(t) = 0. \quad (2.18)$$

Nótese que, de la ecuación (2.18), la derivada fraccionaria de Caputo de una constante es cero.

Proposición 2.3.1 Algunas propiedades de la derivada fraccionaria de Caputo son:

- Si $\alpha = 0$ entonces $({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = ({}^C D_{b-}^\alpha f)(t) = f(t)$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ entonces $({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = f^{(n)}(t)$ y $({}^C D_{b-}^\alpha f)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t)$.

- La relación entre la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria RL está dada por:

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = \left({}^{RL} D_{a+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \right) (t), \quad (2.19)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha f)(t) = \left({}^{RL} D_{b-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right] \right) (t). \quad (2.20)$$

- Si $f(t) \in C[a, b]$, la derivada fraccionaria de Caputo aplicada a la integral fraccionaria tiene la siguiente expresión

$$({}^C D_{a+}^\alpha {}^{RL} I_{a+}^\alpha f)(t) = f(t), \quad ({}^C D_{b-}^\alpha {}^{RL} I_{b-}^\alpha f)(t) = f(t) \quad (2.21)$$

- Por otro lado, de aplicar la integral fraccionaria a la derivada fraccionaria de Caputo, se tiene que

$$({}^{RL} I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad (2.22)$$

$$({}^{RL} I_{b-}^\alpha {}^C D_{b-}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \quad (2.23)$$

- Para $\alpha > 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo es

$$(\mathcal{L} {}^C D_{a+}^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L} f)(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} (D^j f)(a+) \quad (2.24)$$

donde $D^k = \frac{d^k}{dt^k}$ es la derivada clásica.

De la proposición 2.3.1 se puede ver que, de manera similar a la derivada fraccionaria RL, la derivada fraccionaria de Caputo generaliza la derivada clásica para ordenes no enteros; más aún, funciona como operador inverso por la izquierda de la integral fraccionaria.

2.4. Cálculo Fraccionario de Weyl

En las secciones previas, dos de las definiciones de derivada fraccionaria más conocidas y aplicadas han sido expuestas; sin embargo, sobra decir que en la actualidad existe una gran cantidad de definiciones de derivadas fraccionarias [45, 46]; en particular, las definiciones previas son caracterizadas por tener integrales sobre dominios finitos.

A continuación, se abordará el cálculo fraccionario de Weyl donde dicha característica es desafiada al considerar dominios semi-infinitos, se describirán algunas consecuencias de esta modificación incluyendo el tipo de funciones donde el cálculo fraccionario de Weyl está definido.

2.4.1. Integral Fraccionaria de Weyl

Definición 2.4.1 Se define la *integral fraccionaria de Weyl*, ${}_xW_\infty^{-\nu}f(x)$, de orden $\nu \in \mathbb{R}$ con $\nu > 0$ por

$${}_xW_\infty^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^\infty (\xi - x)^{\nu-1} f(\xi) d\xi \quad x > 0. \quad (2.25)$$

En la ecuación (2.25) se puede simplificar la notación de la integral fraccionaria de Weyl haciendo ${}_xW_\infty^{-\nu}f(x) \equiv W^{-\nu}f(x)$, ya que el límite superior en la integral no cambiará y el argumento de la integral es el mismo que la función f .

De la aplicación directa de la definición, se puede encontrar la expresión analítica de la integral fraccionaria de Weyl de algunas funciones; a saber

- Si $f(x) = e^{-ax}$ con $a \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$W^{-\nu} [e^{-ax}] = a^{-\nu} e^{-ax} \quad (2.26)$$

- Si $f(x) = \cos ax$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y $0 < \nu < 1$ entonces

$$W^{-\nu} [\cos ax] = a^{-\nu} \cos \left(ax + \frac{1}{2}\pi\nu \right) \quad (2.27)$$

- Si $f(x) = \sin ax$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y $0 < \nu < 1$ entonces

$$W^{-\nu} [\sin ax] = a^{-\nu} \sin \left(ax + \frac{1}{2} \pi \nu \right) \quad (2.28)$$

- Si $f(x) = x^{-\mu}$ con $0 < \nu < \mu$ entonces

$$W^{-\nu} x^{-\mu} = \frac{\Gamma(\mu - \nu)}{\Gamma(\mu)} x^{\nu - \mu} \quad (2.29)$$

2.4.2. Buenas Funciones

Pese a que se ha demostrado que existen funciones a las cuales se les puede aplicar la integral fraccionaria de Weyl, aún queda abierta la pregunta sobre la caracterización de condiciones necesarias y/o suficientes para que la integral fraccionaria de Weyl exista.

Definición 2.4.2 *Supón que $f(x)$ es integrable sobre cualquier subintervalo finito de $J = [0, \infty)$ y si $f(x)$ se comporta como $x^{-\mu}$ para x suficientemente grande, entonces la integral fraccionaria de Weyl de f de orden ν existe si*

$$0 < \nu < \mu. \quad (2.30)$$

Lo anterior nos da una condición necesaria y suficiente para asegurar la existencia de la integral fraccionaria de Weyl; sin embargo, si se desea que la integral fraccionaria de Weyl, $W^{-\nu} f(x)$, exista para todo $\nu > 0$ entonces una condición más estricta debe cumplirse.

Definición 2.4.3 *Se define la clase de **buenas funciones**, \mathcal{S} , a las funciones f que son infinitamente diferenciables y tal que la función f y sus derivadas son de orden t^{-N} para todo $N \in \mathbb{N}$.*

La definición 2.4.3 da una condición suficiente para la existencia de la integral fraccionaria de Weyl; esto es, si $f \in \mathcal{S}$ entonces la integral fraccionaria de Weyl de orden ν existe para cualquier $\nu > 0$ y más aún $W^{-\nu} f \in \mathcal{S}$.

Proposición 2.4.1 *Algunas propiedades de la integral fraccionaria de Weyl son:*

1. Sea $\nu, \mu > 0$ entonces $W^{-\nu} [W^{-\mu} f(x)] = W^{-(\nu+\mu)} f(x)$.
2. Se define $W^0 \equiv I$, el operador identidad, entonces $W^0 W^{-\mu} f(x) = W^{-\mu} f(x)$.
3. Sea $E^n = (-1)^n \frac{d}{dx}$ y $f \in \mathcal{S}$ con $\nu > 0$ entonces $E^n [W^{-\nu} f(x)] = W^{-\nu} [E^n f(x)]$.

Es necesario destacar la propiedad 3 de la proposición 2.4.1 la cual sobresale sobre las propiedades de los otros operadores fraccionarios mostrados hasta el momento; esto es, la derivada entera puede entrar y salir del operador integral fraccionaria de Weyl.

2.4.3. Derivada Fraccionaria de Weyl

Definición 2.4.4 Sea $\nu > 0$, $n = \lceil \nu \rceil$ y $v = n - \nu$. Sea f una función para la cual $W^{-v} f$ existe y tiene n derivadas continuas, entonces se define la **derivada fraccionaria de Weyl**, $W^\nu f(x)$, de orden ν como

$$W^\nu f(x) = E^n [W^{-v} f(x)]. \quad (2.31)$$

Nótese que en la definición anterior, no se impone ninguna condición sobre f por lo que no necesariamente debe pertenecer a la clase \mathcal{S} ; sin embargo, si $f \in \mathcal{S}$ entonces $W^\nu f(x) \in \mathcal{S}$.

Proposición 2.4.2 Algunas propiedades de la derivada fraccionaria de Weyl son:

- Si $\nu = p \in \mathbb{N}$ entonces $W^p f(x) = E^p f(x)$.
- Para cualquier ν , $W^{-\nu} W^\nu f(x) = f(x) = W^\nu W^{-\nu} f(x)$.
- Si $f \in \mathcal{S}$ y $u, \nu > 0$ entonces $W^\nu [W^u f(x)] = W^{u+\nu} f(x)$.
- $W^0 [W^u f(x)] = W^u f(x)$

2.5. Esquemas numéricos fraccionarios

La ecuación de flujo es una ecuación diferencial que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad general,

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{q}) = \rho\mathcal{T}, \quad (2.32)$$

donde ρ es la densidad, θ es el contenido de humedad volumétrico con $0 < \theta \leq \phi$, ϕ es la porosidad, \mathcal{T} es un término de fuente y sumidero, t es el tiempo y \mathbf{q} es la ley de Darcy, a saber,

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu}\kappa(p) (\nabla p - \rho g \nabla D), \quad (2.33)$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido, κ es la permeabilidad, p es la presión, g es la aceleración gravitacional y D es la profundidad del pozo en función de las coordenadas espaciales.

En general, las ecuaciones (2.32)-(2.33) no tienen solución analítica salvo condiciones muy particulares; debido a esto, es necesario utilizar métodos numéricos para aproximar las soluciones de los diversos modelos que se presentarán.

Si bien, la ecuación (2.32) es una ecuación diferencial parcial, si se considera el caso $\mathbf{q} = 0$ entonces la ecuación deviene a una ecuación diferencial ordinaria. Por tanto, una revisión sobre los métodos numéricos más utilizados tanto para ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias (EDOF) y el método de diferencias finitas fraccionario (MDFFF) se mostrará en esta sección.

2.5.1. Aproximación numérica de los operadores fraccionarios

Supóngase que se tiene una partición uniforme del intervalo $[0, b]$ como sigue:

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad (2.34)$$

con $t_i = ih$ y $h = \frac{b}{m}$ para $i = 0, \dots, m$.

Previo a continuar, el lector habrá notado que en las definiciones de integral fraccionaria y las diversas derivadas fraccionarias no se dio ninguna condición sobre el tipo de función a la cual se le puede aplicar dicho operador fraccionario. Sin embargo, al abordar la parte numérica algunas condiciones deben imponerse a la función para poder aplicar alguna

aproximación y así obtener el orden del error.

Aproximación numérica de la integral fraccionaria

A continuación, se mostrarán las aproximaciones numéricas para la integral fraccionaria por izquierda, ecuación (2.1); las aproximaciones numéricas para la integral fraccionaria por derecha se deducen de manera semejante.

Proposición 2.5.1 *La aproximación numérica para la integral fraccionaria de la función $y(t)$ se expresa como sigue:*

- Si $y(t) \in C^2[0, b]$ entonces

$$({}^{RL}I_0^\alpha y)(t) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{i=0}^m W_{1,i} y(t_i) + O(h^2). \quad (2.35)$$

- Si $y(t) \in C^4[0, b]$ entonces

$$({}^{RL}I_0^\alpha y)(t) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 4)} \sum_{i=0}^m W_{2,i} y(t_i) + \frac{h^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 4)} \sum_{i=0}^m \tilde{W}_{2,i} y'(t_i) + O(h^4). \quad (2.36)$$

- Si $y(t) \in C^2[0, b]$ entonces

$$({}^{RL}I_0^\alpha y)(t) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 4)} \sum_{i=0}^m W_{3,i} y(t_i) + \frac{h^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 4)} \sum_{i=0}^m \tilde{W}_{3,i} m_{1,i} + O(h^4). \quad (2.37)$$

En la proposición anterior, los términos $W_{1,i}$, $W_{2,i}$, $\tilde{W}_{2,i}$, $W_{3,i}$, $\tilde{W}_{3,i}$ y $m_{1,i}$ son definidos en [47].

Aproximación numérica de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Los esquemas numéricos para aproximar la derivada fraccionaria RL por izquierda que se presentan aquí hacen uso de la relación entre la derivada fraccionaria RL con la derivada fraccionaria de Caputo, ecuación (2.19).

Proposición 2.5.2 *La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se puede aproximar numéricamente de las siguientes formas [48, 49]:*

- Si $0 < \alpha < 1$ y $\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{-\alpha} y'(s) ds$ es aproximada por $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} (t_{k+1} - s)^{-\alpha} ds$. El esquema L1 establece

$${}^{RL}D_{t_0}^{\alpha} y(t_{k+1}) = \frac{y(t_0)(t_{k+1} - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k} [y(t_{j+1}) - y(t_k)] + O(h^{2-\alpha}) \quad (2.38)$$

donde $b_{j,k} = (k - j + 1)^{1-\alpha} - (k - j)^{1-\alpha}$ para $j = 0, \dots, k$

- Si $1 < \alpha < 2$ y $y''(t_{k+1} - s)$ es aproximado por $\frac{y(t_{k-j-1}) - 2y(t_{k-j}) + y(t_{k+1-j}))}{h^2}$. El esquema L2 establece

$${}^{RL}D_{t_0}^{\alpha} y(t_{k+1}) = \frac{y(t_0)(t_{k+1} - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \frac{y'(t_0)(t_{k+1} - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \sum_{j=0}^k b_j [y(t_{k-j-1}) - 2y(t_{k-j}) + y(t_{k+1-j})] + O(h^{3-\alpha}) \quad (2.39)$$

donde $b_j = (j + 1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}$.

- Si $1 < \alpha < 2$ y $y''(t_{k+1} - s)$ es aproximado por $\frac{y(t_{k-j-1}) - y(t_{k-j}) + y(k+2-j) + y(t_{k+1-j}))}{2h^2}$. El esquema L2C establece

$${}^{RL}D_{t_0}^{\alpha} y(t_{k+1}) = \frac{y(t_0)(t_{k+1} - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \frac{y'(t_0)(t_{k+1} - t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{h^{-\alpha}}{2\Gamma(3 - \alpha)} \sum_{j=0}^k b_j [y(t_{k-j-1}) - y(t_{k-j}) + y(k+2-j) + y(t_{k+1-j})] + O(h^{3-\alpha}) \quad (2.40)$$

donde $b_j = (j + 1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}$.

Aproximación numérica de la derivada fraccionaria de Caputo

De manera similar, se mostrarán las aproximaciones numéricas más utilizadas para la derivada fraccionaria de Caputo por izquierda.

Proposición 2.5.3 *La derivada fraccionaria de Caputo se puede aproximar numéricamente de las siguientes formas [48, 49]:*

- Si $0 < \alpha < 1$ y $\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{-\alpha} y'(s) ds$ es aproximada por $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} (t_{k+1} - s)^{-\alpha} ds$. El esquema L1 establece

$${}^C D_{t_0}^\alpha y(t_{k+1}) = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{j=0}^k b_j [y(t_{k+1-j}) - y(t_{k-j})] + O(h^{2-\alpha}) \quad (2.41)$$

donde $b_j = (j+1)^{1-\alpha} - (j)^{1-\alpha}$ para $j = 0, \dots, k$

- Si $1 < \alpha < 2$ y $y''(t_{k+1} - s)$ es aproximado por $\frac{y(t_{k-j-1}) - 2y(t_{k-j}) + y(t_{k+1-j}))}{h^2}$. El esquema L2 establece

$${}^C D_{t_0}^\alpha y(t_{k+1}) = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \sum_{j=0}^k b_j [y(t_{k-j-1}) - 2y(t_{k-j}) + y(t_{k+1-j})] + O(h^{3-\alpha}) \quad (2.42)$$

donde $b_j = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}$.

- Si $1 < \alpha < 2$ y $y''(t_{k+1} - s)$ es aproximado por $\frac{y(t_{k-j-1}) - y(t_{k-j}) + y(k+2-j) + y(t_{k+1-j}))}{2h^2}$. El esquema L2C establece

$${}^C D_{t_0}^\alpha y(t_{k+1}) = \frac{h^{-\alpha}}{2\Gamma(3 - \alpha)} \sum_{j=0}^k b_j [y(t_{k-j-1}) - y(t_{k-j}) + y(k+2-j) + y(t_{k+1-j})] + O(h^{3-\alpha}) \quad (2.43)$$

donde $b_j = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}$.

Aproximación numérica de la derivada fraccionaria de Weyl

Derivado de la definición de derivada fraccionaria de Weyl, ecuación (2.4.4), la problemática de aproximarla numéricamente deviene del límite en la integral. Si bien es posible aproximar numéricamente integrales en intervalos infinitos [50, 51], de las propiedades para que la derivada fraccionaria de Weyl exista permiten hacer uso de una propiedad más elegante.

Antes de mostrar la forma en que se trató este problema, se introducirá un principio utilizado en la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y Caputo, [43].

Definición 2.5.1 Sea $t \gg a$. El principio de memoria corta, [43], toma en consideración el comportamiento de la función $f(t)$ en el "pasado reciente", esto es, en lugar de considerar el intervalo $[a, t]$ se considera el intervalo $[t - L, t]$ donde L es la longitud de memoria; por tanto

$${}^C D_{a+}^\alpha f(t) \approx {}^C D_{(t-L)+}^\alpha f(t). \quad (2.44)$$

Nótese que aunque la ecuación (2.44) es expresada para la derivada fraccionaria de Caputo, la expresión para la derivada fraccionaria RL es análoga.

El principio de memoria corta es aplicable a los operadores fraccionarios por izquierda. En este trabajo se propone un principio semejante aplicado a los operadores fraccionarios por derecha, este nuevo principio será llamado principio de memoria recortada.

Definición 2.5.2 Sea $t \ll b$ y $b \gg 0$. El principio de memoria recortada descarta el comportamiento de la función $f(t)$ en el "futuro distante"; esto es, en lugar de considerar el intervalo $[t, b]$, se considera el intervalo $[t, t + L]$ donde L es la longitud de memoria; por tanto

$${}^C D_{b-}^\alpha f(t) \approx {}^C D_{(t+L)-}^\alpha f(t). \quad (2.45)$$

El principio de memoria recortada, aunque es expresada en términos de la derivada fraccionaria de Caputo, también aplica para la derivada fraccionaria RL. Más aún, si se hace $b \rightarrow \infty$ entonces el principio de memoria recortada es aplicable directamente a la derivada fraccionaria de Weyl y queda como sigue

$${}_t W_\infty^{-\nu} f(t) \approx {}_t W_{t+L}^{-\nu} f(t). \quad (2.46)$$

2.5.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias numéricas

Considérese la siguiente ecuación diferencial ordinaria fraccionaria no necesariamente lineal

$${}^C D_{a+}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t > 0, \quad y^{(i)}(a) = y_0^{(i)} \text{ para } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.47)$$

donde $n = \lceil \alpha \rceil$.

En la actualidad existen diversos trabajos que prueban la existencia y unicidad de la ecuación (2.47); en particular, la referencia clásica es dada por Diethelm y Ford [52]. Sin embargo, numéricamente existen principalmente dos diferentes formas de resolver este modelo.

Integral de tipo Volterra

Aplicando la integral fraccionaria al modelo (2.47) y la propiedad mostrada en la ecuación (2.19) se obtiene la ecuación de tipo Volterra

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j y_0^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \quad (2.48)$$

donde para aproximar numéricamente la integral mostrada en la ecuación previa, se pueden utilizar diversas reglas de cuadratura [53, 49, 54].

Métodos multipaso fraccionarios

Por otro lado, los métodos Adams–Bashforth han sido generalizados para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias [55, 56, 57]; esto es, considerando el método numérico

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j y(t_{n-j}) = h^\alpha \sum_{j=0}^n \gamma_j f(t_{n-j}, y(t_{n-j})); \quad (2.49)$$

donde $\rho(\zeta)$, $\sigma(\zeta)$ definen, respectivamente, los primer y segundo polinomios característicos como

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^n \gamma_j \zeta^j. \quad (2.50)$$

Diversos trabajos han sido dedicados para encontrar condiciones para determinar la consistencia y estabilidad del método (2.49) y por tanto, su convergencia; para más detalles, véase las referencias mencionadas al inicio de esta subsección.

2.5.3. Método de diferencias finitas fraccionario

Como en el caso de los esquemas numéricos para ecuaciones diferenciales parciales, la teoría de von Neumann es utilizada para probar la estabilidad y consistencia del método de diferencias finitas aplicado a ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias, [58, 59, 60, 61].

Definiciones clásicas

En este apartado se enunciarán algunas definiciones clásicas tomadas de [62].

Definición 2.5.3 *Dada una ecuación diferencial parcial $Pu = f$, y un esquema en diferencias finitas, $P_{k,h}v = f$, decimos que el esquema es **consistente** con la ecuación diferencial parcial si para cualquier función suave $\phi(x, t)$*

$$P\phi - P_{k,h}\phi \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k, h \rightarrow 0. \quad (2.51)$$

Definición 2.5.4 *Un esquema en diferencias finitas $P_{k,h}v_m^n = 0$ es **estable** en una región Λ si existe $J \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cualquier tiempo positivo T existe una constante C_T tal que*

$$\|v^n\|_h \leq C_T \sum_{j=0}^J \|v^j\|_h \quad (2.52)$$

donde $\|w\|_h = (h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |w_m|^2)^{1/2}$ es la norma l^2 y para $0 \leq nk \leq T$ y $(k, h) \in \Lambda$.

Finalmente

Teorema 2.5.1 (Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer) *Un esquema en diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial consistente, para el cual el problema de valor inicial está bien planteado, es convergente si y sólo si es estable.*

Aplicación al caso fraccionario

En este apartado se resolverá la ecuación de difusión con derivada temporal fraccionaria para ejemplificar la aplicación de la teoría de von Neumann a las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Considérese la ecuación diferencial con derivada temporal fraccionaria

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \quad (2.53)$$

con $0 < \alpha < 1$. Condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ para $0 \leq x \leq 1$ y condición de frontera de tipo Dirichlet, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ para $t \geq 0$.

Sean $X, M \in \mathbb{Z}^+$ y considérese un mallado uniforme definido por $h = 1/X$ y $k = 1/M$. La partición del intervalo $[0, 1]$ está dada por $x_i = ih$ para $i = 0, \dots, X$; mientras que la partición del intervalo $[0, T]$ está dada por $t_n = nk$ para $n = 0, \dots, TM$. Se denotarán los valores de las funciones u y f en la malla como $u_i^n = u(x_i, t_n)$ y $f_i = f(x_i)$

Aplicando el esquema $L1$ para aplicar la derivada temporal fraccionaria y el esquema central para la derivada espacial; el modelo (2.53) deviene

$$\sigma_{\alpha, k} \sum_{j=1}^n \omega_j^\alpha (u_i^{n-j+1} - u_i^{n-j}) + O(k) = \frac{1}{h^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + O(h^2) \quad (2.54)$$

para $i = 1, \dots, X - 1$, $\sigma_{\alpha, k} = k^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1-\alpha}$ y $\omega_j^\alpha = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}$. Sin mayor esfuerzo se puede observar que el esquema mostrado es consistente.

El esquema implícito es definido como

$$\sigma_{\alpha, k} \sum_{j=1}^n \omega_j^\alpha (U_i^{n-j+1} - U_i^{n-j}) = \frac{1}{h^2} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n). \quad (2.55)$$

Reescribiendo el esquema, se tiene que para $n = 1$:

$$-\gamma U_{i-1}^1 + (\sigma_{\alpha, k} + 2\gamma) U_i^1 - \gamma U_{i+1}^1 = \sigma_{\alpha, k} U_i^0 \quad (2.56)$$

con $\gamma = 1/h^2$ y $i = 1, \dots, X - 1$. Mientras que, para $n \geq 2$:

$$-\gamma U_{i-1}^n + (\sigma_{\alpha, k} + 2\gamma) U_i^n - \gamma U_{i+1}^n = \sigma_{\alpha, k} U_i^{n-1} - \sigma_{\alpha, k} \sum_{j=2}^n \omega_j^\alpha (U_i^{n-j+1} - U_i^{n-j}) \quad (2.57)$$

con $i = 1, \dots, X - 1$, condiciones de frontera $U_0^n = U_X^n = 0$ y condición inicial $U_i^0 = f_i$.

Para probar la estabilidad, se busca la solución de la forma $U_j^n = \xi_n e^{iwjh}$. Por tanto, la ecuación anterior deviene

$$-\gamma \xi_n e^{iw(j-1)h} + (\sigma_{\alpha,k} + 2\gamma) \xi_n e^{iwjh} - \gamma \xi_n e^{iw(j+1)h} = \sigma_{\alpha,k} \xi_{n-1} e^{iwjh} - \sigma_{\alpha,k} \sum_{j=2}^n \omega_j^\alpha (\xi_{n-j+1} e^{iwjh} - \xi_{n-j} e^{iwjh})$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene que

$$\xi_n (\sigma_{\alpha,k} + 2\gamma(1 - \cos(wh))) = \sigma_{\alpha,k} \xi_{n-1} - \sigma_{\alpha,k} \sum_{j=2}^n \omega_j^\alpha (\xi_{n-j+1} - \xi_{n-j}) \quad (2.58)$$

o bien

$$\xi_n = \frac{\xi_{n-1} - \sum_{j=2}^n \omega_j^\alpha (\xi_{n-j+1} - \xi_{n-j})}{1 + \frac{2\gamma}{\sigma_{\alpha,k}} (1 - \cos(wh))} \quad (2.59)$$

Nótese que $1 + \frac{2\gamma}{\sigma_{\alpha,k}} (1 - \cos(wh)) \geq 1$ para todo α, n, w, h, k lo que implica que

$$\xi_1 \leq \xi_0 \quad (2.60)$$

$$\xi_n \leq \xi_{n-1} + \sum_{j=2}^n \omega_j^\alpha (\xi_{n-j} - \xi_{n-j+1}), \quad n \geq 2 \quad (2.61)$$

Así, para $n = 2$, se tiene que

$$\xi_2 \leq \xi_1 + \omega_2^\alpha (\xi_0 - \xi_1) \quad (2.62)$$

y por la positividad de los coeficientes

$$\xi_2 \leq \xi_1 \quad (2.63)$$

Repetiendo el proceso, se tiene que $\xi_j \leq \xi_{j-1}$ para $j = 1, \dots, n$. Puesto que $\xi_n = |U_j^n| \leq \xi_0 = |U_j^0| = |f_j|$, se tiene que $\|U^n\|_{l^2} \leq \|f\|_{l^2}$ con lo cual se tiene la estabilidad

del esquema numérico; más aún, puesto que es para cualquier h, k entonces el esquema es incondicionalmente estable.

ECUACIÓN DE FLUJO CON DERIVADA TEMPORAL FRACCIONARIA

En este capítulo se mostrarán los primeros resultados originales de este trabajo doctoral; esto es, la ecuación de triple porosidad y triple permeabilidad con derivadas enteras y la ecuación de triple porosidad y triple permeabilidad con derivadas temporales fraccionarias llamado modelo triple-triple.

3.1. Modelos clásicos

Con la finalidad de mantener un orden previo a mostrar los resultados mencionados, se mostrará la ecuación de flujo para un medio poroso.

3.1.1. Ecuación de flujo para un medio poroso

Considérese la ecuación de continuidad genérica

$$\frac{\partial (\rho \tilde{\theta})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = \rho \Upsilon \quad (3.1)$$

y la ley de Darcy genérica

$$\mathbf{q} = -\frac{k(p)}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \quad (3.2)$$

donde $\tilde{\theta}$ es el contenido volumétrico de fluido; $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ es el caudal de fluido por unidad de área de medio poroso, o flujo de Darcy, con sus componentes en las direcciones del espacio (x, y, z) ; t es el tiempo; ρ es la densidad del fluido; μ es la viscosidad dinámica del fluido; g la aceleración gravitacional; Υ es un término de fuente y representa un volumen

aportado de fluido por unidad de volumen de medio porosos en la unidad de tiempo; p es la presión; D es la profundidad como una función de las coordenadas espaciales, generalmente asimilada a la coordenada vertical z ; k es el tensor de permeabilidad del medio poroso parcialmente saturado y depende de la presión. Las relaciones $\tilde{\theta}(p)$ y $k(p)$ son las características fluido-dinámicas del medio.

La ecuación general de transferencia de fluido resulta de la combinación de las ecuaciones anteriores; a saber

$$\frac{\partial (\rho \tilde{\theta})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\rho k(p)}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \right) + \rho \mathcal{Y}. \quad (3.3)$$

Nótese que, cuando el medio poroso está totalmente saturado de fluido el contenido volumétrico total de fluido $\tilde{\theta}$ deviene a ϕ , la porosidad del medio.

Cuando el fluido es considerado de densidad, viscosidad y permeabilidad constantes, con $D = z$ y se supone que en el medio poroso no hay ganancia ni pérdida de fluido, $\mathcal{Y} = 0$, entonces la ecuación anterior se simplifica a

$$\phi c \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \Delta p, \quad c = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (3.4)$$

donde c es la compresibilidad del medio poroso.

En el caso en que la base del pozo coincida con la frontera inferior del manto, la ecuación de transferencia de fluido puede ser simplificada expresándola en coordenadas polares; esto es

$$\phi c \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3.5)$$

donde r es la distancia radial.

Para completar el modelo, considérese la condición inicial

$$p(r, t = 0) = P_i; \quad (3.6)$$

donde P_i es la presión inicial, constante en todo el yacimiento; la condición de frontera exterior

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = 0 \quad (3.7)$$

y la condición de frontera interior

$$\lim_{r \rightarrow r_w} 2\pi hr \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = Q_0 B_0 \quad (3.8)$$

donde r_w es el radio del pozo, h es el espesor del yacimiento, Q_0 es el caudal del fluido extraído, B_0 es el factor de formación del fluido.

El modelo compuesto por las ecuaciones (3.5)–(3.8) contiene diversos parámetros que dependen de cada yacimiento; por tanto, con la finalidad de presentar resultados generales, se creará el modelo adimensional.

Considérense las siguientes variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad p_D = \frac{2\pi hk}{Q_0 B_0 \mu} (P_i - p); \quad \mathbf{q}_D = \frac{2\pi hr_w}{Q_0 B_0} \mathbf{q}; \quad t_D = \frac{k}{\phi c r_w^2 \mu} t \quad (3.9)$$

entonces el modelo (3.5)–(3.8) deviene

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \quad (3.10)$$

$$p_D(r_D, t_D = 0) = 0; \quad (3.11)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0; \quad (3.12)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 1} r_D \mathbf{q}_D(r_D, t_D) = -1. \quad (3.13)$$

La solución a este modelo ha sido ampliamente estudiado en la literatura y su solución analítica puede encontrarse fácilmente aplicando la transformada de Laplace encontrando así su solución en términos de funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie; para la solución en el espacio real, se utiliza el algoritmo numérico de Stephest [63].

La Figura 3.1 muestra la solución del modelo (3.10)–(3.13) para la presión adimensional en la frontera del pozo, $p_{Dw}(t_D) := p_D(r_D = 1, t_D)$ en línea continua, además de su derivada

de Bourdet, $p'_{Dw}(t_D)$, en línea discontinua [17].

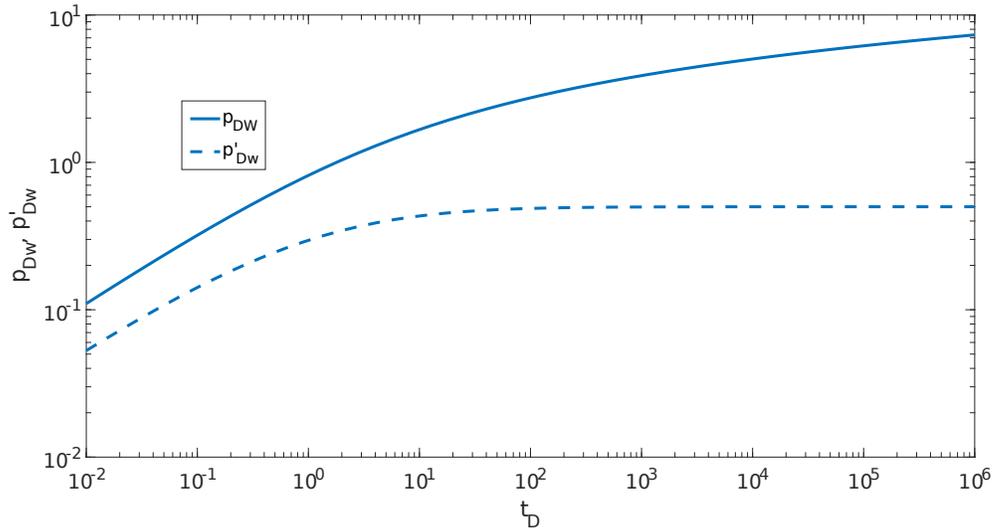


Figura 3.1: Solución analítica, en el espacio de Laplace, del modelo adimensional de flujo para un medio poroso.

Si bien el modelo anterior permite calcular el flujo para yacimientos convencionales. En los yacimientos no convencionales existe una gran variedad de tipos clasificados por su porosidad y permeabilidad. La Figura 3.2 muestra un elemento de volumen que muestra los diferentes tipos de porosidades a considerar desde diferentes perspectivas; la Figura 3.2a muestra el elemento de volumen como se puede extraer del yacimiento, donde se pueden observar los sistemas fracturado, vugular y la matriz así como su interacción, [64]; mientras que, la Figura 3.2b muestra la idealización de un elemento de volumen representativo del yacimiento.

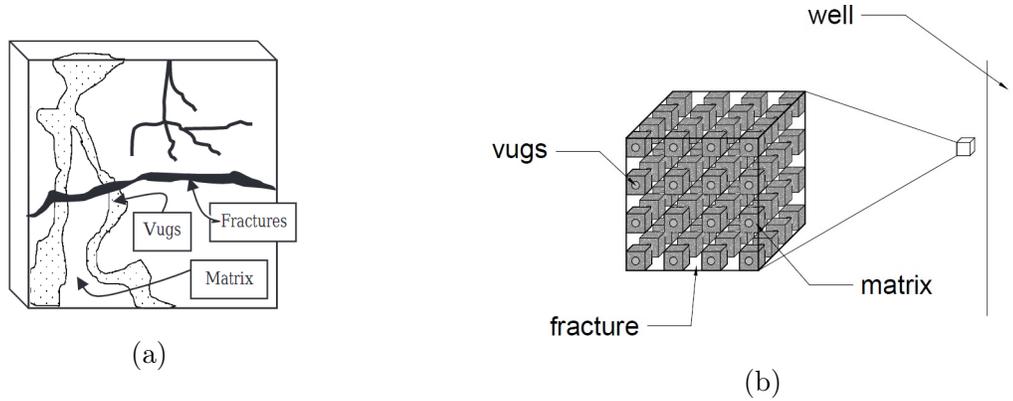


Figura 3.2: (a) Elemento de volumen representativo que muestra los diversos tipos de porosidad. (b) Modelo idealizado de un yacimiento con triple porosidad.

En particular, los yacimientos naturalmente fracturados son yacimientos heterogéneos compuestos por bloques de matriz separados entre sí por fracturas; donde los bloques de matriz están hechos de la roca original que estaba presente antes de que ocurriera la fractura y se caracteriza por su baja permeabilidad y baja porosidad, mientras que el sistema fracturado es caracterizado por su alto flujo pero baja capacidad de almacenamiento. Si además consideramos los vóculos, que son cavidades, espacios vacíos o grandes poros; entonces se concluye que en un yacimiento naturalmente fracturado puede tener hasta tres tipos de porosidades diferentes con sus respectivas permeabilidades asociadas.

3.1.2. Ecuación triple porosidad y triple permeabilidad

En esta subsección, se propone un nuevo modelo para capturar la alta heterogeneidad del flujo monofásico en yacimientos naturalmente fracturados vugulares donde se consideran los tres tipos de porosidades; a saber, fracturas, vóculos y matriz.

Deducción del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad

Suponga que el yacimiento está formado por tres medios porosos: medios fracturados, medios vugulares y matriz. Sea ϕ la porosidad de todo el yacimiento, ϕ_f la porosidad del sistema fracturado, ϕ_v la porosidad del sistema vugular y ϕ_m la porosidad de la matriz; entonces

$$\phi = \phi_m + \phi_f + \phi_v. \quad (3.14)$$

Sea \mathbf{q} el flujo Darcy de todo el yacimiento, \mathbf{q}_f el flujo Darcy del sistema fracturado, \mathbf{q}_v el flujo Darcy del sistema vugular y \mathbf{q}_m el flujo de Darcy de la matriz, entonces

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_m + \mathbf{q}_f + \mathbf{q}_v. \quad (3.15)$$

Considerando la ecuación de continuidad genérica y la ley de Darcy, ecuaciones (3.1)–(3.2), y suponiendo que el yacimiento está saturado con fluido, la ecuación general de transferencia de flujo para cada medio poroso es

$$\frac{\partial(\rho\phi_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{q}_m) = \rho\Upsilon_m, \quad \mathbf{q}_m = -\frac{1}{\mu}k_m(p_m)(\nabla p_m - \rho g\nabla D); \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial(\rho\phi_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{q}_f) = \rho\Upsilon_f, \quad \mathbf{q}_f = -\frac{1}{\mu}k_f(p_f)(\nabla p_f - \rho g\nabla D); \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial(\rho\phi_v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{q}_v) = \rho\Upsilon_v, \quad \mathbf{q}_v = -\frac{1}{\mu}k_v(p_v)(\nabla p_v - \rho g\nabla D). \quad (3.18)$$

Para obtener la ecuación de transferencia de flujo para todo el yacimiento, ecuación (3.3), a partir de las ecuaciones (3.16)–(3.18), se debe cumplir que

$$\Upsilon = \Upsilon_m + \Upsilon_f + \Upsilon_v. \quad (3.19)$$

Suponiendo que en el yacimiento no hay ganancia o pérdida de fluido, entonces $\Upsilon = 0$ y consecuentemente

$$\Upsilon_m = \Upsilon_{mf} + \Upsilon_{mv}; \quad (3.20)$$

$$\Upsilon_f = -\Upsilon_{mf} + \Upsilon_{vf}; \quad (3.21)$$

$$\Upsilon_v = -\Upsilon_{mv} - \Upsilon_{vf}. \quad (3.22)$$

Finalmente, suponiendo un flujo interporoso pseudoestable

$$\Upsilon_{mf} = a_{mf} (p_f - p_m); \quad (3.23)$$

$$\Upsilon_{mv} = a_{mv} (p_v - p_m); \quad (3.24)$$

$$\Upsilon_{vf} = a_{vf} (p_v - p_f). \quad (3.25)$$

Por lo tanto, con $D = z$, el modelo de triple permeabilidad y triple porosidad es

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \nabla \left(\frac{k_m}{\mu} \nabla p_m \right) + a_{mf} (p_f - p_m) + a_{mv} (p_v - p_m), \quad c_m = \frac{1}{\phi_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_m}; \quad (3.26)$$

$$\phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} = \nabla \left(\frac{k_f}{\mu} \nabla p_f \right) - a_{mf} (p_f - p_m) + a_{vf} (p_v - p_f), \quad c_f = \frac{1}{\phi_f} \frac{\partial \phi_f}{\partial p_f}; \quad (3.27)$$

$$\phi_v c_v \frac{\partial p_v}{\partial t} = \nabla \left(\frac{k_v}{\mu} \nabla p_v \right) - a_{mv} (p_v - p_m) - a_{vf} (p_v - p_f), \quad c_v = \frac{1}{\phi_v} \frac{\partial \phi_v}{\partial p_v}. \quad (3.28)$$

Considerando el modelo (3.26)–(3.28) y suponiendo además que: el pozo penetra completamente en el yacimiento, el medio poroso es monofásico saturado de petróleo, el flujo interporoso entre cada medio poroso es pseudoestable, la densidad y la viscosidad son constantes, la permeabilidad en cada medio poroso es constante, la presión inicial P_i es constante en todo el yacimiento y asumiendo simetría radial; el modelo adimensional se convierte en:

$$\omega_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Dm}}{\partial r_D} \right) + \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}), \quad (3.29)$$

$$\omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} = \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}), \quad (3.30)$$

$$\omega_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_D} = \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}) - \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}) \quad (3.31)$$

donde $\omega_m = 1 - \omega_f - \omega_v$ y $\kappa_m = 1 - \kappa_f - \kappa_v$. Las variables adimensionales están dadas por

$$p_{Dj} = \frac{2\pi h(k_m + k_f + k_v)(P_i - p_j)}{Q_0 B_0 \mu}; \quad \omega_j = \frac{\phi_j c_j}{\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v}; \quad r_D = \frac{r}{r_w}; \quad (3.32)$$

$$\kappa_j = \frac{k_j}{k_m + k_f + k_v}; \quad \lambda_{ij} = \frac{a_{ij} \mu r_w^2}{k_m + k_f + k_v}; \quad t_D = \frac{t(k_m + k_f + k_v)}{\mu r_w^2 (\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v)}; \quad (3.33)$$

donde $j = m, f, v$ y $ij = mf, mv, vf$. En el modelo de triple permeabilidad y triple porosidad, se consideran condiciones de contorno de flujo constante, es decir:

$$\lim_{r_D \rightarrow 1} r_D \left(\kappa_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial r_D} + \kappa_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} + \kappa_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) = -1; \quad (3.34)$$

$$p_{Dw}(t_D) = p_{Dm}(r_D, t_D)|_{r_D=1} = p_{Df}(r_D, t_D)|_{r_D=1} = p_{Dv}(r_D, t_D)|_{r_D=1}; \quad (3.35)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Dm} = \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df} = \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Dv} = 0. \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) representa la condición de frontera exterior cuando se considera un yacimiento infinito. Finalmente, al adimensionalizar el modelo se obtienen condiciones iniciales triviales; es decir

$$p_{Dj}(r_D, t_D = 0) = 0, \quad \text{para } j = m, f, v. \quad (3.37)$$

Solución del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad

A continuación, la triple permeabilidad y la triple porosidad el modelo se resolverá, ecuaciones (3.29)–(3.31), con las condiciones de contorno (3.34)–(3.36).

La transformada de Laplace aplicada a las ecuaciones (3.29)–(3.31) deviene

$$\begin{aligned} \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{Dm}}{\partial r_D} \right) - [u\omega_m + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}] \bar{p}_{Dm} + \\ \omega_m p_{Dm}(0) + \lambda_{mf} \bar{p}_{Df} + \lambda_{mv} \bar{p}_{Dv} = 0, \\ \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) - [u\omega_f + \lambda_{mf} + \lambda_{vf}] \bar{p}_{Df} + \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\omega_f p_{Df}(0) + \lambda_{mf} \bar{p}_{Dm} + \lambda_{vf} \bar{p}_{Dv} = 0, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right) - [u\omega_v + \lambda_{mv} + \lambda_{vf}] \bar{p}_{Dv} + \\ \omega_v p_{Dv}(0) + \lambda_{mv} \bar{p}_{Dm} + \lambda_{vf} \bar{p}_{Df} = 0; \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde u es la variable de Laplace y \bar{p}_{Dj} con $j = m, f, v$ es la transformada de Laplace aplicada a p_{Dm} , p_{Df} y p_{Dv} respectivamente.

La solución a cada una de las ecuaciones del modelo general (3.38)–(3.40) se expresa como un combinación de funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipo [65]; sin embargo, al ser un yacimiento semi-infinito, su solución se expresa como

$$\bar{p}_{Dm}(u, r_D) = AK_0(\alpha(u)r_D), \quad (3.41)$$

$$\bar{p}_{Df}(u, r_D) = BK_0(\alpha(u)r_D), \quad (3.42)$$

$$\bar{p}_{Dv}(u, r_D) = CK_0(\alpha(u)r_D). \quad (3.43)$$

De la sustitución de las ecuaciones anteriores, en el modelo (3.38)–(3.40), el sistema matricial es obtenido

$$\begin{bmatrix} \kappa_m \alpha^2 - m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & \kappa_f \alpha^2 - m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & \kappa_v \alpha^2 - m_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_m p_{Dm}(0) \\ \omega_f p_{Df}(0) \\ \omega_v p_{Dv}(0) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

donde

$$\begin{aligned} m_1(u) &= u\omega_m + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}, & m_2 &= \lambda_{mf}, & m_3 &= \lambda_{mv}, \\ m_4(u) &= u\omega_f + \lambda_{mf} + \lambda_{vf}, & m_5 &= \lambda_{vf}, & m_6(u) &= u\omega_v + \lambda_{mv} + \lambda_{vf}. \end{aligned}$$

Para obtener soluciones no triviales, se debe satisfacer que

$$\begin{aligned}
 & \kappa_m \kappa_f \kappa_v \alpha^6 - [\kappa_m (\kappa_f m_6 + \kappa_v m_4) + \kappa_f \kappa_v m_1] \alpha^4 + \\
 & + [\kappa_m (m_4 m_6 - m_5^2) + (\kappa_f m_6 + \kappa_v m_4) m_1 - \kappa_v m_2^2 - \kappa_f m_3^2] \alpha^2 \\
 & - m_1 m_4 m_6 + m_1 m_5^2 + m_2^2 m_6 + 2m_2 m_3 m_5 + m_3^2 m_4 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Con condiciones iniciales triviales, la Ecuación (3.45) debe ser cumplida; para el caso con condiciones iniciales no triviales, la Ecuación (3.44) siempre tiene una solución trivial si la Ecuación (3.45) no se cumple.

Estas consideraciones muestran el gran desafío que se presenta al abordar un modelo de triple permeabilidad y triple porosidad por la generalización realizada al considerar que la permeabilidad de la matriz es significativa.

En lo sucesivo, se supondrá que $p_{Dj} = 0$ para $j = m, f, v$.

La ecuación (3.45) es equivalente a una ecuación de tercer grado, $\bar{\alpha} = \alpha^2$. En general, la solución de la ecuación de tercer grado depende del valor del discriminante $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$; en particular, para los parámetros de un yacimiento carbonatado naturalmente fracturado vugular con triple porosidad y triple permeabilidad, se tiene que $D < 0$, lo que significa que las raíces de (3.45) son todos números reales. Por tanto, aplicando las fórmulas de Tartaglia-Cardano [66], la solución es

$$\alpha_k^2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} - \frac{a}{3}, \quad \cos \theta = \frac{-q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}}, \tag{3.46}$$

con $p = b - \frac{a^2}{3}$, $q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$ y

$$a = -\frac{(1 - \kappa_f - \kappa_v) (\kappa_f m_6 + \kappa_v m_4) + \kappa_f \kappa_v m_1}{(1 - \kappa_f - \kappa_v) \kappa_f \kappa_v}; \tag{3.47}$$

$$b = \frac{(1 - \kappa_f - \kappa_v) (m_4 m_6 - m_5^2) + (\kappa_f m_6 + \kappa_v m_4) m_1 - \kappa_v m_2^2 - \kappa_f m_3^2}{(1 - \kappa_f - \kappa_v) \kappa_f \kappa_v}; \tag{3.48}$$

$$c = \frac{-m_1 m_4 m_6 + m_1 m_5^2 + m_2^2 m_6 + 2m_2 m_3 m_5 + m_3^2 m_4}{(1 - \kappa_f - \kappa_v) \kappa_f \kappa_v}. \tag{3.49}$$

Por lo tanto, la solución para la presión proviene de reemplazar (3.46) en las Ecuaciones

(3.41)–(3.43); en consecuencia, la solución en cada medio poroso \bar{p}_{Dj} para $j = m, f, v$ se reescribe como una combinación lineal de función de Bessel en cada solución α_k , a saber

$$\bar{p}_{Dm}(u, r_D) = A_1 K_0(\alpha_1(u)r_D) + A_2 K_0(\alpha_2(u)r_D) + A_3 K_0(\alpha_3(u)r_D), \quad (3.50)$$

$$\bar{p}_{Df}(u, r_D) = B_1 K_0(\alpha_1(u)r_D) + B_2 K_0(\alpha_2(u)r_D) + B_3 K_0(\alpha_3(u)r_D), \quad (3.51)$$

$$\bar{p}_{Dv}(u, r_D) = C_1 K_0(\alpha_1(u)r_D) + C_2 K_0(\alpha_2(u)r_D) + C_3 K_0(\alpha_3(u)r_D). \quad (3.52)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en el Sistema (3.38)–(3.40), obtenemos un sistema matricial con infinitas soluciones, similar al Sistema (3.44) para $[A_i, B_i, C_i]^T$ por $i = 1, 2, 3$. Haciendo $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ en ese sistema matricial, por lo que alcanza

$$A_i = \frac{m_3 (\kappa_f \alpha_i^2 - m_4) - m_2 m_5}{m_2^2 - [(1 - \kappa_f - \kappa_v) \alpha_i^2 - m_1] [\kappa_f \alpha_i^2 - m_4]}, \quad (3.53)$$

$$B_i = \frac{-m_3 - A_i [(1 - \kappa_f - \kappa_v) \alpha_i^2 - m_1]}{m_2}, \quad (3.54)$$

para $i = 1, 2, 3$. Así, el Sistema (3.41)–(3.43) se expresa de la siguiente manera

$$\bar{p}_{Dm}(u, r_D) = A_1 D_1 K_0(\alpha_1 r_D) + A_2 D_2 K_0(\alpha_2 r_D) + A_3 D_3 K_0(\alpha_3 r_D), \quad (3.55)$$

$$\bar{p}_{Df}(u, r_D) = B_1 D_1 K_0(\alpha_1 r_D) + B_2 D_2 K_0(\alpha_2 r_D) + B_3 D_3 K_0(\alpha_3 r_D), \quad (3.56)$$

$$\bar{p}_{Dv}(u, r_D) = D_1 K_0(\alpha_1 r_D) + D_2 K_0(\alpha_2 r_D) + D_3 K_0(\alpha_3 r_D); \quad (3.57)$$

donde D_1, D_2, D_3 son constantes determinadas por las condiciones de contorno y α_i es la raíz positiva de α_i^2 para $i = 1, 2, 3$.

Para obtener las constantes asociadas D_1, D_2, D_3 , nótese que, al sustituir las soluciones obtenidas, las Ecuaciones (3.55)–(3.57) en las condiciones de contorno, Ecuaciones (3.34) y (3.35), la se alcanza el siguiente sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 E_1 K_1(\alpha_1) & \alpha_2 E_2 K_1(\alpha_2) & \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3) \\ (A_1 - 1)K_0(\alpha_1) & (A_2 - 1)K_0(\alpha_2) & (A_3 - 1)K_0(\alpha_3) \\ (B_1 - 1)K_0(\alpha_1) & (B_2 - 1)K_0(\alpha_2) & (B_3 - 1)K_0(\alpha_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

donde

$$E_i = [(1 - \kappa_f - \kappa_v) A_i + \kappa_f B_i + \kappa_v], \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \quad (3.59)$$

Por tanto, la solución analítica en el espacio de Laplace, para la presión en la frontera del pozo, $r_D = 1$, con variables adimensionales para un medio monofásico con triple permeabilidad y triple porosidad es:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{Dw}(u) &= D_1 K_0(\alpha_1) + D_2 K_0(\alpha_2) + D_3 K_0(\alpha_3) \\ &= A_1 D_1 K_0(\alpha_1) + A_2 D_2 K_0(\alpha_2) + A_3 D_3 K_0(\alpha_3) \\ &= B_1 D_1 K_0(\alpha_1) + B_2 D_2 K_0(\alpha_2) + B_3 D_3 K_0(\alpha_3). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Para calcular la presión en el espacio real, se utilizó el algoritmo Stehfest [63].

La presión adimensional considerando término de skin en el medio fracturado, medio vugular y roca matriz, se calcula mediante

$$p_{Dw}(t_D) = p_{Dm,Df,Dv}|_{r_D=1} - s_{m,f,v} r_D \left. \frac{\partial p_{Dm,Df,Dv}}{\partial r_D} \right|_{r_D=1}. \quad (3.61)$$

Al usar esta condición en lugar de (3.35), se determinan las constantes D_1 , D_2 y D_3 y se llega al siguiente sistema matricial

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_1 E_1 K_1(\alpha_1) & \alpha_2 E_2 K_1(\alpha_2) & \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3) \\
 (A_1 - 1)K_0(\alpha_1) + & (A_2 - 1)K_0(\alpha_2) + & (A_3 - 1)K_0(\alpha_3) + \\
 \alpha_1 K_1(\alpha_1)(s_m A_1 - s_v) & \alpha_2 K_1(\alpha_2)(s_m A_2 - s_v) & \alpha_3 K_1(\alpha_3)(s_m A_3 - s_v) \\
 (B_1 - 1)K_0(\alpha_1) + & (B_2 - 1)K_0(\alpha_2) + & (B_3 - 1)K_0(\alpha_3) + \\
 \alpha_1 K_1(\alpha_1)(s_f B_1 - s_v) & \alpha_2 K_1(\alpha_2)(s_f B_2 - s_v) & \alpha_3 K_1(\alpha_3)(s_f B_3 - s_v)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 D_1 \\
 D_2 \\
 D_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1/u \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (3.62)$$

dando la solución para el déficit de presión

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{Dw}|_{C_D=0} &= D_1 K_0(\alpha_1) + D_2 K_0(\alpha_2) + D_3 K_0(\alpha_3) + \\
 & s_v (D_1 \alpha_1 K_1(\alpha_1) + D_2 \alpha_2 K_1(\alpha_2) + D_3 \alpha_3 K_1(\alpha_3)). \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

Para incluir el efecto del almacenamiento en el pozo, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\bar{p}_{Dw} = \frac{1}{u^2 C_D + 1/\bar{p}_{Dw}|_{C_D=0}}. \quad (3.64)$$

Debe notarse que, es posible encontrar algunas aproximaciones analíticas para el comportamiento en tiempos cortos del déficit de presión. Recordando que $\lim_{x \rightarrow \infty} K_1(x)/K_0(x) = 1$ entonces el comportamiento asintótico en el espacio de Laplace es

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{p}_{Dw} = \frac{1}{u^{3/2}} [\sqrt{\omega_m \kappa_m} + \sqrt{\omega_f \kappa_f} + \sqrt{\omega_v \kappa_v}]^{-1}. \quad (3.65)$$

Esta expresión puede ser fácilmente llevada al espacio real, donde se obtiene el comportamiento asintótico en tiempos cortos para el déficit de presión, a saber

$$\lim_{t_D \rightarrow 0} p_{Dw} = \sqrt{\frac{t_D}{\pi}} [(\sqrt{\omega_m \kappa_m} + \sqrt{\omega_f \kappa_f} + \sqrt{\omega_v \kappa_v}) / 2]^{-1}. \quad (3.66)$$

Análisis del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad

A continuación se aplicarán las ecuaciones (3.60), (3.63) y (3.64) para mostrar la solución del modelo (3.29)–(3.31) con condiciones de contorno (3.34)–(3.36); en particular, se

analizará el efecto de cada parámetro en el déficit de presión en la frontera del pozo.

Considerando el flujo de fluidos en yacimientos con triple porosidad, el déficit de presión p_{Dw} puede separarse en tres fases principales: fase de tiempo corto, donde el efecto de almacenamiento del pozo, C_D , se muestra a través del comportamiento de línea recta con pendiente 1, seguido del efecto del término de skin, s_m, s_f, s_v , y finalizando con la llamada fase dominada por fracturas, comportamiento que se exhibe en tiempos cortos si los efectos anteriores fueran nulos. La fase de transición, donde cada medio poroso domina el déficit de presión en el pozo, comenzando con la fase dominada por el sistema de fracturas, hasta que pierde su dominio y lo cede al sistema vugular y finaliza con la fase dominada por el sistema matricial; en particular, el efecto de los coeficientes de flujo interporoso, λ_{ij} con $ij = mf, mv, vf$, indican el momento en que cada medio poroso termina su dominio, reflejándose en un comportamiento en forma de "V", formando, en su conjunto, lo que se denomina comportamiento en forma de "W" cuando dichos comportamientos no se combinan. Finalmente, la fase de estabilidad, cuando se alcanza la fase de estabilidad del sistema matriz y el déficit de presión crece a un ritmo constante, reflejándose en su derivada a través de una línea horizontal.

La Figura 3.3 muestra los resultados del déficit de presión, $p_{Dj}(r_D, t_D)$, para cada medio poroso: medios fracturados, medios vugulares y medios matriz, es decir $j = f, v, m$, en diferentes valores de tiempo adimensional, t_D . Para tiempos cortos, el valor de presión para el sistema fracturado es similar a la presión para el sistema vugular, siendo mayor la presión en el sistema vugular como consecuencia de la mayor capacidad de almacenamiento del sistema vugular en comparación con el sistema fracturado.

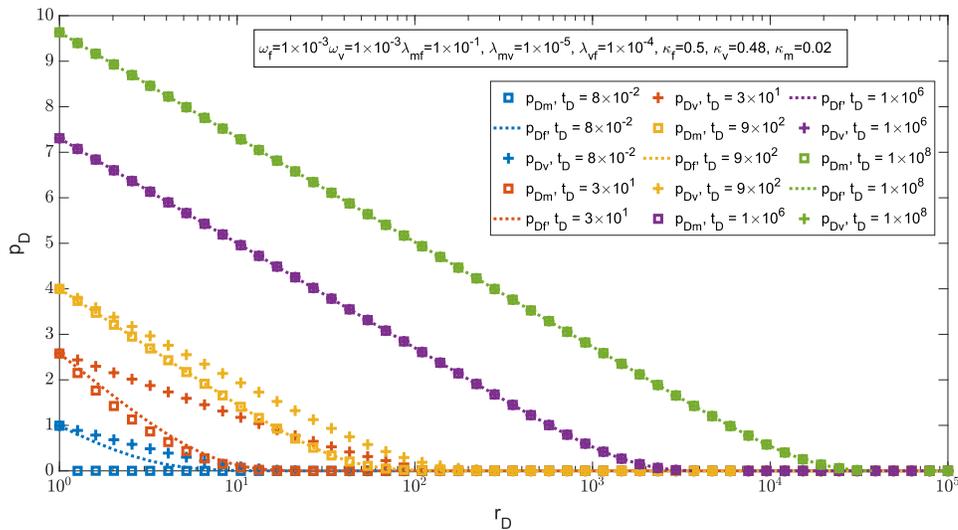


Figura 3.3: Solución al modelo de triple porosidad y triple permeabilidad de cada medio poroso, p_{Dj} para $j = m, f, v$, en el espacio r_D y diferentes valores de tiempo t_D .

En tiempos transitorios se observa que el valor de presión para el sistema matriz aumenta hasta parecerse al valor de presión del sistema fracturado lo que indica el inicio de la fase de transición para pasar de la fase dominada por el sistema fracturado a la fase dominada por el sistema vular. En tiempos largos, el valor del déficit de presión para los tres medios porosos coincide en todo el espacio, lo que indica que se ha alcanzado el período de estabilidad.

La Figura 3.4 muestra la solución del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad en la frontera del pozo $p_{Dw}(t_D)$ para diferentes valores de los parámetros. La Figura 3.4a muestra el déficit de presión en escala semilogarítmica donde se observa el efecto esperado por la triple porosidad donde el déficit de presión esboza tres líneas rectas que delimitan su comportamiento.

La Figura 3.4b muestra en escala log-log los mismos resultados donde se incluye en líneas discontinuas la derivada de Bourdet del déficit de presión; los resultados muestran el clásico comportamiento en forma de "W" en la derivada de Bourdet que puede observarse en tiempos cortos, para algunos casos, o en tiempos largos para otros casos, justo antes de que la presión alcance la fase de estabilidad; en algunos casos, este efecto se sobrecarga mostrando un comportamiento en forma de "V". Finalmente, la Figura 3.4c muestra el conjunto de parámetros utilizado para generar las Figuras 3.4a y 3.4b.

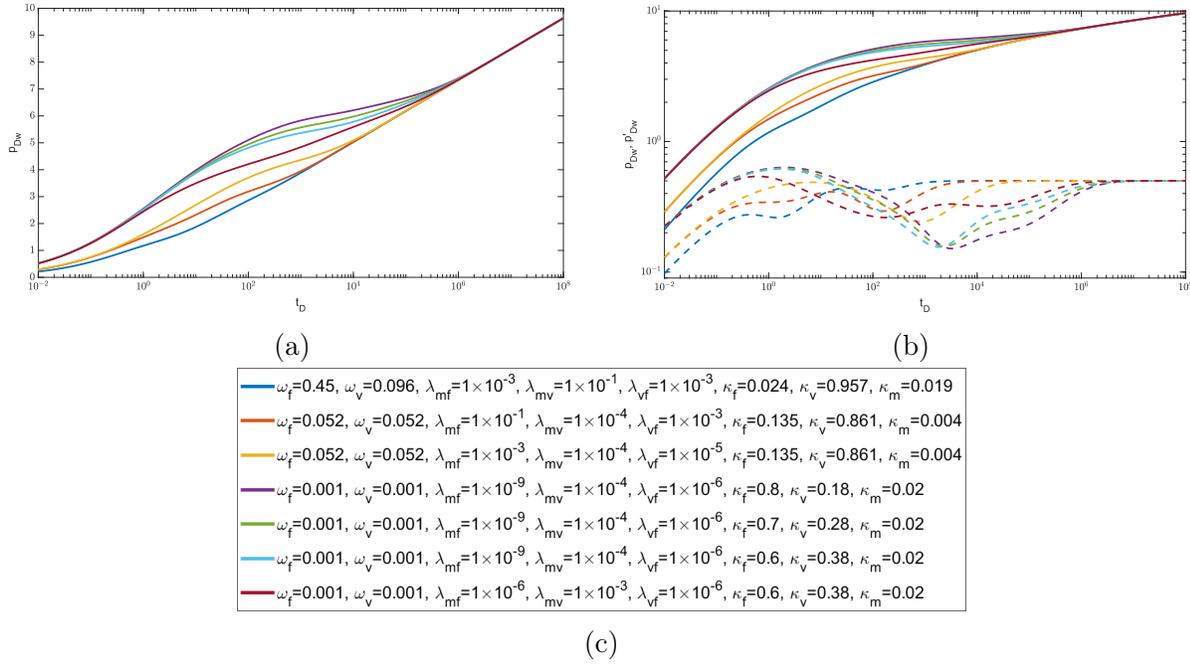


Figura 3.4: (a) Comportamiento del déficit de presión en la frontera del pozo, p_{Dw} , del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad con diferentes parámetros. (b) Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad con diferentes parámetros. (c) Parámetros utilizados en las Figuras 3.4a y 3.4b.

Cabe recalcar que, en lo sucesivo y a menos que se haga explícito lo contrario, las líneas continuas en las Figuras denotarán el déficit de presión en la frontera del pozo mientras que las líneas discontinuas denotarán su derivada de Bourdet.

A manera de validación del modelo propuesto, la Figura 3.5 muestra el comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet haciendo $\kappa_m \rightarrow 0$. Se observa que a medida que κ_m decrece, ambos, el déficit de presión y su derivada de Bourdet tienden al modelo de triple porosidad y triple permeabilidad, [19].

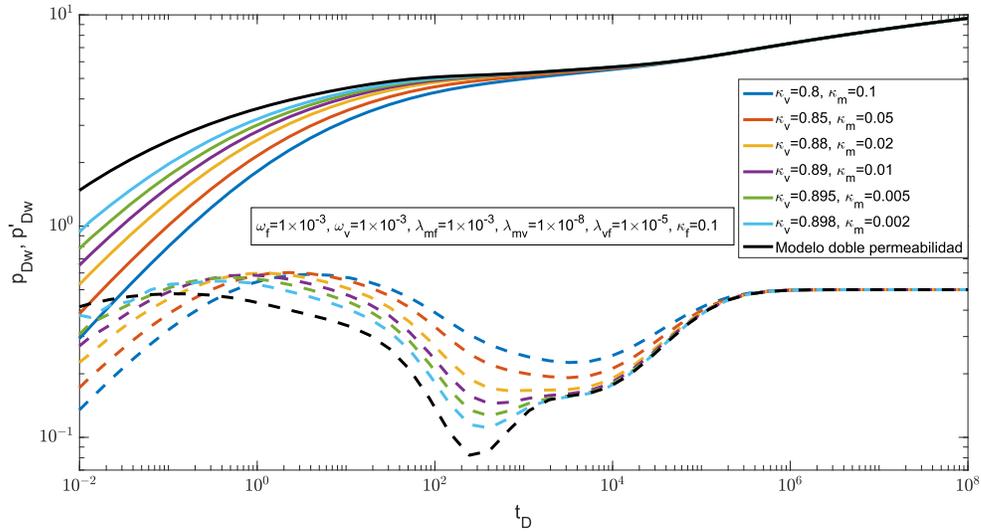


Figura 3.5: Convergencia del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad al modelo de triple porosidad y triple permeabilidad.

La Figura 3.6 muestra el comportamiento del déficit de presión p_{Dw} al variar el coeficiente de almacenamiento ω_j para $j = m, f, v$. Se observa que el valor de ω_v es determinante para el déficit de presión en tiempos cortos donde a mayor valor de este parámetro mayor será el déficit de presión seguido por el valor de $\omega_m = 1 - \omega_f - \omega_v$ donde, de forma análoga, a mayor valor de este parámetro mayor será el déficit de presión. Durante la fase de transición se observa el comportamiento con forma de "W" en la derivada de Bourdet, donde los tiempos de inicio y final así como la transición entre crestas se mantiene constante.

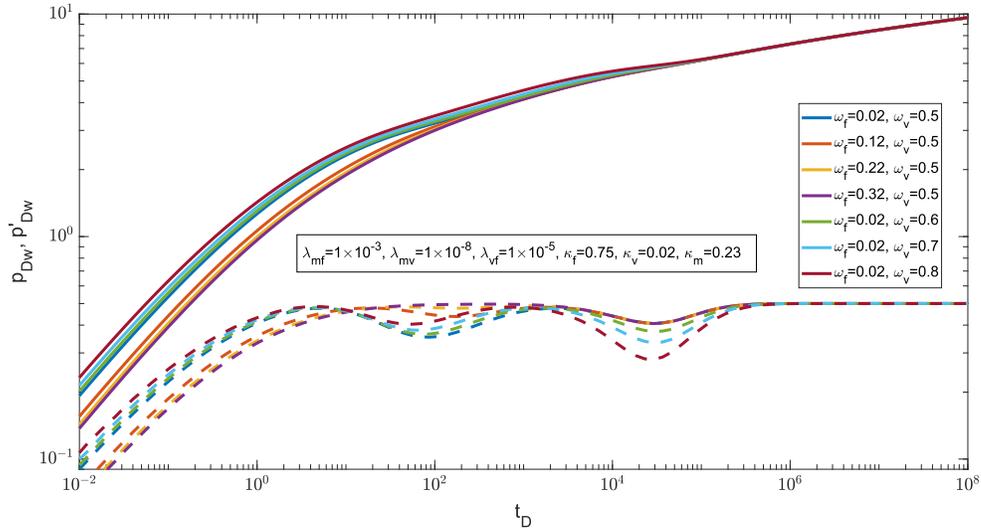


Figura 3.6: Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando ω_j para $j = m, f, v$.

Dicho esto, los parámetros ω_j determinan la profundidad de cada cresta donde la profundidad de la primera cresta es determinada por ω_m y ω_f demostrando el efecto de pasar por la fase dominada por fracturas a la fase dominada por vórgulos; mientras que la profundidad de la segunda cresta es determinada por ω_v donde a mayor valor de este parámetro mayor profundidad de la cresta demostrando el efecto de la fase dominada por vórgulos antes de alcanzar la fase de estabilidad.

Los coeficientes de flujo interporoso λ_{ij} con $ij = mf, mv, vf$ determinan la forma en la que cada medio poroso alimenta a los demás mostrándose en la derivada de Bourdet con el comportamiento con forma de "W" donde el efecto de cada coeficiente de flujo determina el momento en que cada cresta aparece y la duración de esta misma y por tanto, el tiempo que tarda en alcanzarse el periodo de estabilidad.

La Figura 3.7 muestra el comportamiento del déficit de presión p_{Dw} al variar el coeficiente de flujo interporoso λ_{mv} . Para valores altos de este parámetro se observa con claridad el comportamiento con forma de "W" donde la primera cresta se muestra con mayor prontitud cuanto mayor sea el valor de λ_{mv} , retrasando su aparición cuanto menor es el valor del parámetro; la segunda cresta no es afectada por el valor de este parámetro salvo para valores menores a 1×10^{-4} , donde se observa que la primer cresta comienza a combinarse con esta cresta mostrándose con un comportamiento más pronunciado donde

el comportamiento con forma de "W" desaparece para finalmente culminar en una única cresta que puede retrasar la fase de estabilidad.

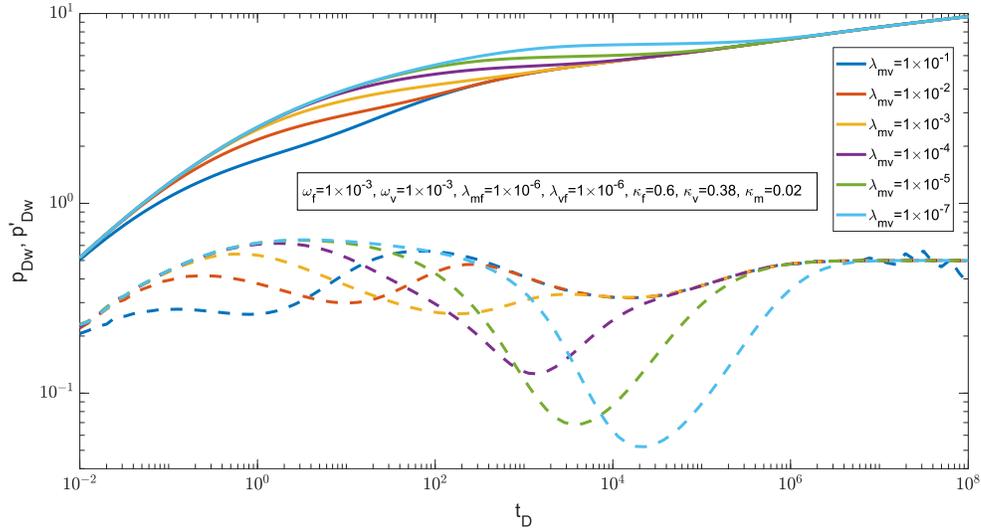


Figura 3.7: Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando λ_{mv} .

La Figura 3.8 muestra el comportamiento del déficit de presión p_{Dw} al variar el coeficiente de flujo interporoso λ_{mf} . Para valores extremos de este parámetro se observa con claridad el comportamiento con forma de "W" donde, de manera similar a lo observado al variar λ_{mv} , la primer cresta se muestra con mayor prontitud cuanto mayor sea el valor de λ_{mv} y retrasando su aparición cuanto menor es el valor del parámetro llegando a mostrarse incluso posterior a la segunda cresta cuando $\lambda_{mv} \rightarrow 0$; se observa que la segunda cresta no es afectada por el efecto de este parámetro salvo en los valores de λ_{mf} donde la primer cresta se combina con esta cresta mostrando un comportamiento más pronunciado haciendo que el comportamiento con forma de "W" desaparezca para mostrar una única cresta. Finalmente, se observa que cuando $\lambda_{mv} \rightarrow 0$, ocasionando que la cresta aparezca en segundo lugar, el efecto de esta cresta puede ocasionar que la fase de estabilidad llegue a ser afectada en gran medida retrasando su aparición.

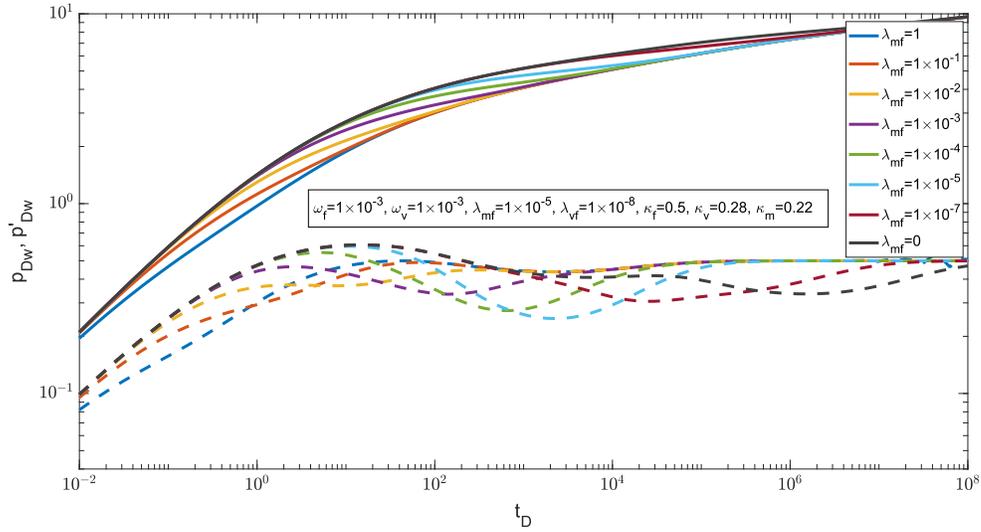


Figura 3.8: Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando λ_{mf} .

La Figura 3.9 muestra el comportamiento del déficit de presión p_{Dw} al variar el coeficiente de flujo interporoso λ_{vf} . A diferencia de los efectos causados por λ_{mf} y λ_{mv} donde el aporte de fluido por parte de la matriz hacia el medio fracturado y vugular se ve afectado respectivamente, el efecto de λ_{vf} representa el aporte de fluido por parte del sistema vugular al sistema fracturado. Para valores muy pequeños de este parámetro se observa el comportamiento con forma de "W" donde la primer cresta se encuentra alrededor de $t_D \approx 10^0$ y la segunda cresta se encuentra alrededor de $t_D \approx 10^4$; se observa que cuanto mayor sea el valor de este parámetro con mayor prontitud se presentará la segunda cresta hasta comenzar a combinarse con la primer cresta mostrando un comportamiento más pronunciado donde el comportamiento con forma de "W" desaparece para finalmente mostrar una única cresta lo que ocasiona que la fase de estabilidad se presente con mayor prontitud.

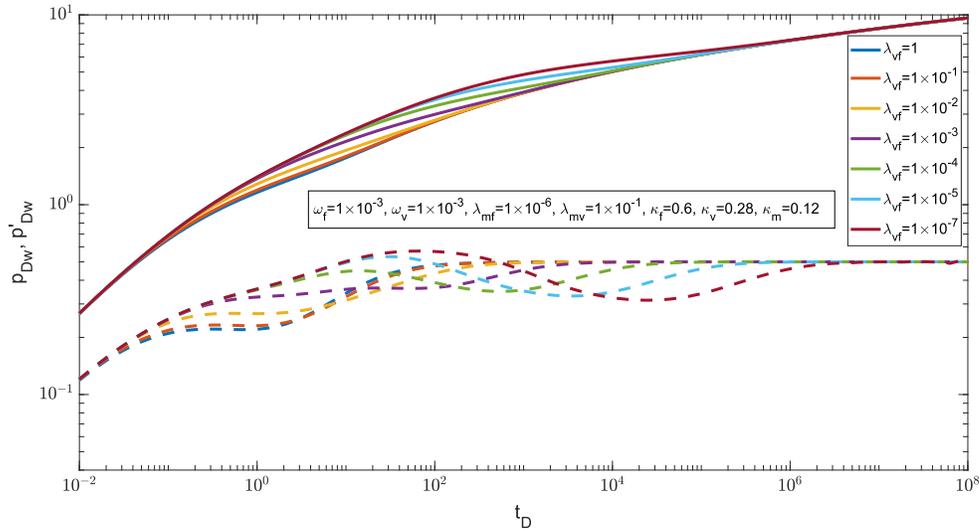


Figura 3.9: Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando λ_{vf} .

La Figura 3.10 muestra el comportamiento del déficit de presión p_{Dw} al variar las razones de permeabilidad κ_j para $j = f, v, m$ para evidenciar el efecto de la razón de permeabilidad de la matriz κ_m .

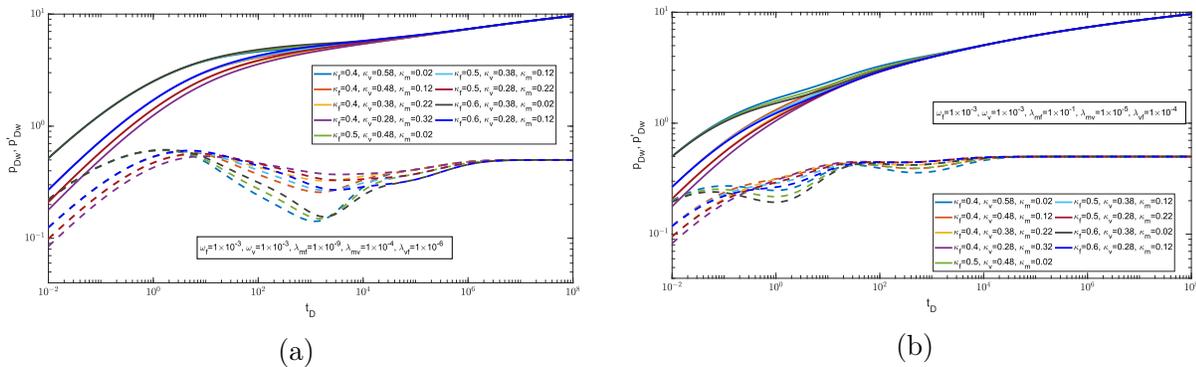


Figura 3.10: Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando κ_f , κ_v y κ_m .

Se puede observar que el valor de κ_m es determinante en tiempos cortos, donde a mayor valor de κ_m menor el valor del déficit de presión siendo; más aún, en tiempos cortos el efecto de κ_m es tal que, para los diversos valores en los parámetros, el déficit de presión se agrupa de acuerdo a los valores de κ_m : 0.02, 0.12, 0.32 y 0.22 ignorando por completo los valores de los otros parámetros hasta que se comienza la fase de transición. La Figura 3.10a muestra el comportamiento con forma de "W" de manera clara y con suficiente espacio

de la fase de tiempos cortos para permitir observar el efecto de κ_m en esta fase; mientras que la Figura 3.10b muestra el comportamiento con forma de "W" con mayor claridad donde cada cresta no es influida por la otra. En la fase de transición, se observa que al fijar κ_f en la fase dominada por fracturas, el aumento de κ_m muestra un aumento en el déficit de presión reflejándose en la derivada de Bourdet como una transición más suave mientras que al fijar κ_v el aumento de κ_m muestra una disminución del déficit de presión reflejándose en unas crestas más marcadas por parte del comportamiento en forma de "W"; posteriormente, en la fase dominada por vórgulos, el efecto de κ_m es menos marcado debido a la baja capacidad de flujo del sistema matricial.

El término de skin, o término de daño, representan el daño o estímulo que pudiera existir en el medio poroso en la frontera del pozo. La Figura 3.11 muestra el comportamiento del déficit de presión p_{Dw} al variar los valores de los términos de skin s_m , s_f y s_v . La Figura 3.11a muestra el comportamiento del déficit de presión suponiendo un término de skin igual para cada medio poroso, $s_m = s_f = s_v$; se observa que el mayor efecto se da en tiempos cortos donde el déficit de presión tiene un gran aumento hasta la fase de transición, a partir de la cual la razón de cambio de presión es semejante.

Por otro lado, la Figura 3.11b muestra el efecto, de manera independiente, de cada término de skin en el déficit de presión. En comparación con el caso clásico, con términos de skin nulos, el efecto de s_f ocasiona un ligero aumento en el déficit de presión llegando a alargar la fase de tiempos cortos impactando así a la fase de transición llegando a acortar su duración y finalmente alcanzando la fase de estabilidad en un menor tiempo. Por otro lado, el efecto de s_v es similar al efecto de s_f en el déficit de presión en la fase de tiempos cortos, aunque su efecto en la fase de transición es considerablemente mayor ya que llega a retrasar las fases dominadas por fracturas y por vórgulos y por tanto, retrasando la fase de estabilidad. El efecto de s_m es el mayor y más notorio al aumentar considerablemente el déficit de presión en la fase de tiempos cortos, no obstante, este efecto hace que la fase de transición se presente con antelación pronunciando las crestas correspondientes a las fases dominadas por fracturas y por vórgulos aunque termina alcanzando los mismos valores de déficit de presión e incluso llegando a la fase de estabilidad en tiempos semejantes al caso clásico.

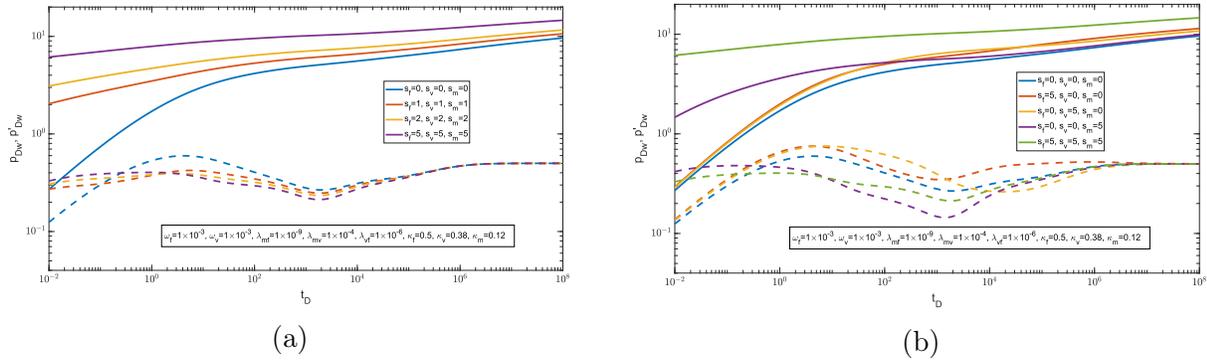


Figura 3.11: Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando s_f , s_v y s_m . (a) Comportamiento considerando $s_f = s_v = s_m$. (b) Comportamiento considerando $s_f \neq s_v \neq s_m$.

La Figura 3.12 muestra el comportamiento del déficit de presión p_{Dw} al variar el coeficiente del efecto de almacenamiento en el pozo C_D .

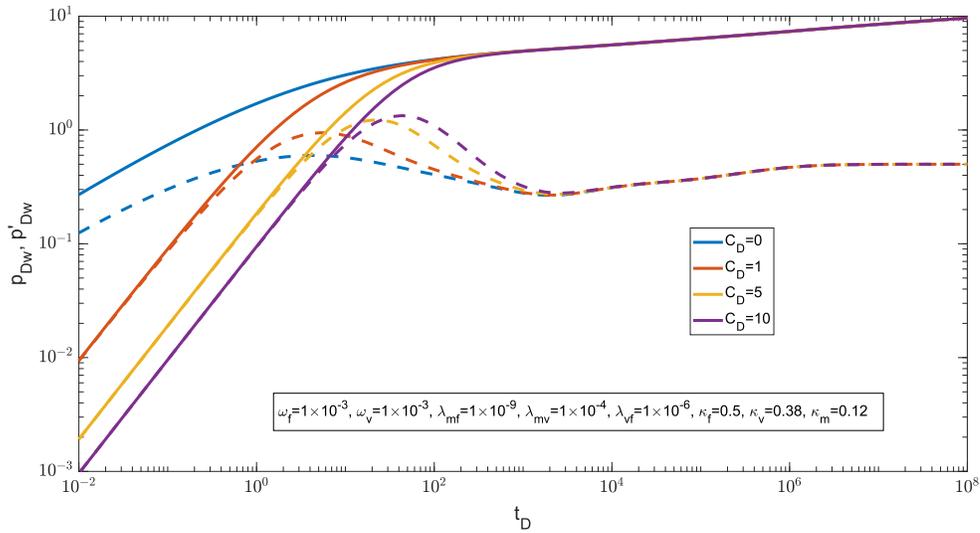


Figura 3.12: Comportamiento del déficit de presión y su derivada de Bourdet variando C_D .

Se observa que cuanto mayor sea el valor de este parámetro mayor será el efecto al decrementar el déficit de presión alargando así la fase de tiempos cortos, aunque este efecto desaparece durante la fase de transición, donde llega a los mismos valores de déficit de presión que en el caso clásico, con $C_D = 0$, y continuando así a partir de ese momento.

3.2. Modelos fraccionarios temporales

La sección anterior, presentó los modelos de flujo para un medio poroso y el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad clásicos, es decir, con derivada temporal entera. En esta sección se generalizará el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad para incluir la derivada temporal fraccionaria en el sentido de Caputo.

Al considerar dichos argumentos, se incluye el fenómeno de memoria en el flujo del fluido, considerando así entonces que el flujo del fluido en el yacimiento es anómalo, se incluye la derivada temporal en la ecuación de flujo de cada medio poroso, ecuaciones (3.29)–(3.31), obteniendo el siguiente sistema adimensional en coordenadas radiales:

$$\omega_m \tau_D^{\alpha_m - 1} \frac{\partial^{\alpha_m} p_{Dm}}{\partial t_D^{\alpha_m}} = \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Dm}}{\partial r_D} \right) + \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}), \quad (3.67)$$

$$\omega_f \tau_D^{\alpha_f - 1} \frac{\partial^{\alpha_f} p_{Df}}{\partial t_D^{\alpha_f}} = \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}), \quad (3.68)$$

$$\omega_v \tau_D^{\alpha_v - 1} \frac{\partial^{\alpha_v} p_{Dv}}{\partial t_D^{\alpha_v}} = \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) - \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}) - \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}) \quad (3.69)$$

donde $0 < \alpha_j < 2$ para $j = m, f, v$ y las variables adimensionales utilizadas para este sistema son iguales a las mostradas en las ecuaciones (3.32) y (3.33) incluyendo

$$\tau_D = \frac{\tau(k_m + k_f + k_v)}{\mu r_w^2 (\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v)} \quad (3.70)$$

donde τ es un coeficiente incluido para mantener el equilibrio dimensional en el sistema fraccionario y $\frac{\partial^{\alpha_j} p_{Dj}}{\partial t_D^{\alpha_j}} = {}^C D_{0+}^{\alpha_j} p_{Dj}$ es la derivada temporal fraccionaria en el sentido de Caputo de orden α_j para $j = m, f, v$.

En general, cuando el orden de la derivada fraccionaria es < 1 , se dice que el flujo anómalo es subdifusivo, mientras que si el orden de la derivada fraccionaria es > 1 , se dice que el flujo anómalo es superdifusivo. Las ecuaciones (3.67)–(3.69) con condiciones iniciales y de contorno (3.34)–(3.36) se denominará modelo de triple porosidad y triple permeabilidad fraccionario.

La Proposición 2.3.1 brinda la forma para aplicar la transformada de Laplace a la

derivada fraccionaria de Caputo, lo cual implica que es posible resolver analíticamente el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad fraccionaria en el espacio de Laplace.

Aplicando la transformada de Laplace al modelo de triple porosidad y triple permeabilidad fraccionario, se tiene que

$$\kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{Dm}}{\partial r_D} \right) - [u^{\alpha_m} \omega_m \tau_D^{\alpha_m - 1} + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}] \bar{p}_{Dm} + \lambda_{mf} \bar{p}_{Df} + \lambda_{mv} \bar{p}_{Dv} = 0 \quad (3.71)$$

$$\kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) - [u^{\alpha_f} \omega_f \tau_D^{\alpha_f - 1} + \lambda_{mf} + \lambda_{vf}] \bar{p}_{Df} + \lambda_{mf} \bar{p}_{Dm} + \lambda_{vf} \bar{p}_{Dv} = 0 \quad (3.72)$$

$$\kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right) - [u^{\alpha_v} \omega_v \tau_D^{\alpha_v - 1} + \lambda_{mv} + \lambda_{vf}] \bar{p}_{Dv} + \lambda_{mv} \bar{p}_{Dm} + \lambda_{vf} \bar{p}_{Df} = 0 \quad (3.73)$$

Nótese que el modelo fraccionario en el espacio de Laplace es muy semejante al modelo clásico en el mismo espacio; más aún, las soluciones de las ecuaciones anteriores también son expresables como combinación de funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipo, donde al considerarse un yacimiento semi-infinito se obtiene que

$$\bar{p}_{Dm}(u, r_D) = AK_0(\alpha(u)r_D), \quad (3.74)$$

$$\bar{p}_{Df}(u, r_D) = BK_0(\alpha(u)r_D), \quad (3.75)$$

$$\bar{p}_{Dv}(u, r_D) = CK_0(\alpha(u)r_D); \quad (3.76)$$

al sustituir estas ecuaciones en el modelo (3.71)–(3.73) se obtiene un sistema matricial congruente con el mostrado en la ecuación (3.44), donde la única variación se encuentra en los términos m_1 , m_4 y m_6 ; a saber

$$m_1(u) = u^{\alpha_m} \tau_D^{\alpha_m - 1} \omega_m + \lambda_{mf} + \lambda_{mv},$$

$$m_4(u) = u^{\alpha_f} \tau_D^{\alpha_f - 1} \omega_f + \lambda_{mf} + \lambda_{vf},$$

$$m_6(u) = u^{\alpha_v} \tau_D^{\alpha_v - 1} \omega_v + \lambda_{mv} + \lambda_{vf}.$$

Por consiguiente, para encontrar la solución del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad fraccionario se siguen las técnicas algebraicas mostradas en la sección anterior concluyendo que la solución para este modelo se expresa como en la ecuación (3.60), si además se agrega el término de skin entonces la solución se expresa como en la ecuación (3.63) y finalmente, la ecuación (3.64) expresa la solución del modelo fraccionario si se incluye el efecto del almacenamiento en el pozo.

Sin embargo, las aproximaciones asintóticas para el comportamiento en tiempos cortos del déficit de presión al incluir la derivada temporal fraccionaria varían, dando como resultado la siguiente ecuación en el espacio de Laplace

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{p}_{Dw} = \frac{1}{u} \left[\sqrt{\omega_m \kappa_m u^{\alpha_m} \tau_D^{\alpha_m - 1}} + \sqrt{\omega_f \kappa_f u^{\alpha_f} \tau_D^{\alpha_f - 1}} + \sqrt{\omega_v \kappa_v u^{\alpha_v} \tau_D^{\alpha_v - 1}} \right]^{-1}. \quad (3.77)$$

A continuación se analizará la solución del modelo (3.67)–(3.69) con condiciones de contorno (3.34)–(3.36); en particular, se analizará el efecto de α_f , α_v y α_m considerando una permeabilidad en el sistema matricial mínima y una permeabilidad considerable en el mismo sistema.

3.2.1. Caso de estudio 1

La Figura 3.13 considera que el fluido tiene un comportamiento anómalo solo en el sistema fracturado; es decir, en las Ecuaciones (3.67)–(3.69), el orden de la derivada fraccionaria para el sistema vugular y la matriz es $\alpha_v = \alpha_m = 1$. La Figura muestra como el efecto del flujo anómalo influye en el fenómeno a partir de tiempos cortos, fase dominada por fracturas, aquí para flujos superdifusivos, se muestra con mayor fuerza, en comparación con el caso de flujos subdifusivos, donde el efecto de la derivada fraccionaria del tiempo apenas se distingue.

La fase transitoria es particularmente insensible al flujo anómalo del sistema fracturado; sin embargo, se puede observar un fenómeno adicional entre la fase transitoria y la fase de estabilidad para flujos subdifusivos. Este fenómeno se caracteriza por una caída en la tasa de aumento de presión que afecta la segunda cresta del característico comportamiento en

forma de "W" cuando $\alpha_f \rightarrow 0$ afectando la fase de estabilidad, tanto en su aparición como en la tasa de crecimiento.

A lo largo de la evolución del fenómeno, la derivada temporal fraccionaria impacta en el efecto de flujos interporosos; en particular, para el flujo anómalo en el sistema fracturado, el coeficiente de flujo interporoso entre la matriz y la fractura, λ_{mf} , se ve afectado. Por lo tanto, para flujos subdifusivos, la alimentación al sistema fracturado es más lenta, lo que explica la caída de presión en lugar de alcanzar la estabilidad.

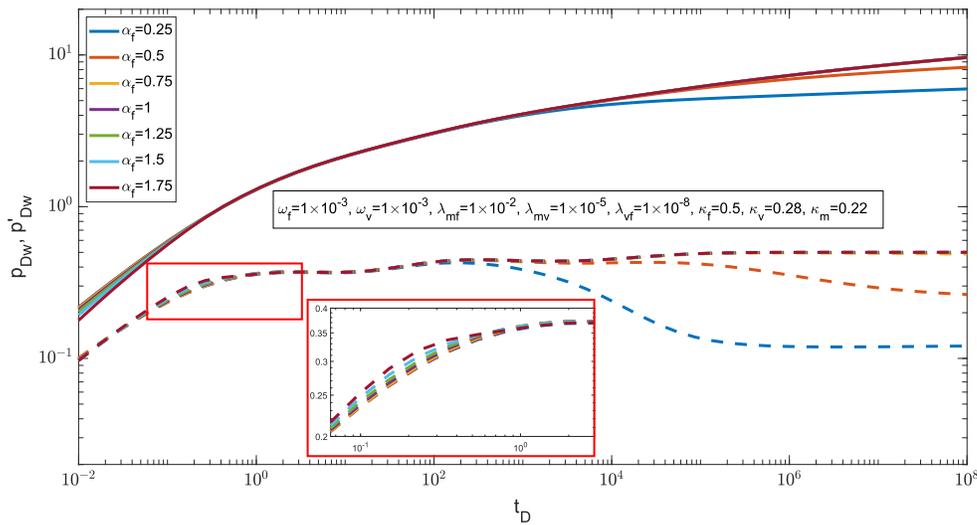


Figura 3.13: Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema fracturado, $\alpha_v = 1$, $\alpha_m = 1$.

La Figura 3.14 considera que el fluido tiene un comportamiento anómalo solo a través del sistema vulgar, es decir, en las Ecuaciones (3.29)–(3.31), el orden de la derivada fraccionaria para el sistema de fracturas y la matriz es $\alpha_f = \alpha_m = 1$. La Figura muestra el efecto del flujo anómalo vulgar a partir de la fase dominada por fracturas cuyo comportamiento es análogo al caso del flujo anómalo en el sistema fracturado; sin embargo, su efecto es más duradero, afectando la fase transitoria.

Durante la fase transitoria, el flujo anómalo influye en el comportamiento característico en forma de "W"; en particular, en el efecto del coeficiente de flujo interporoso entre la matriz y el sistema vulgar, λ_{mv} , aumentando su efecto para flujos superdifusivos e inhibiéndolo para casos subdifusivos, como se muestra en la primera cresta del comportamiento en forma de "W".

La parte final de la fase transitoria es inmune al flujo anómalo del sistema vulgar; sin embargo, y análogamente al caso de flujo anómalo en el sistema fracturado, se observa una caída en la derivada de Bourdet del déficit de presión que afecta a la segunda cresta del comportamiento característico en forma de "W" en el caso de flujos subdifusivos que afectan la fase de estabilidad .

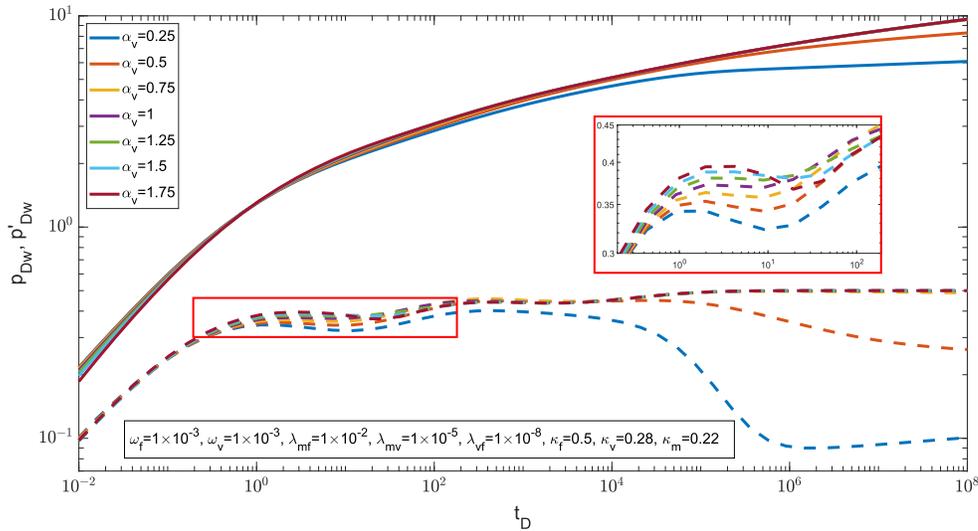


Figura 3.14: Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema vulgar, $\alpha_f = 1$, $\alpha_m = 1$.

La Figura 3.15 muestra el caso de un flujo anómalo en la matriz, haciendo que el orden de la derivada fraccionaria del tiempo para el sistema fracturado y el sistema vulgar sea $\alpha_f = \alpha_v = 1$. El efecto que tiene el flujo anómalo de la matriz sobre los coeficientes de flujo interporoso, λ_{mf} y λ_{mv} , altera considerablemente el comportamiento característico en forma de "W", alterando por completo la fase transitoria; esto afecta la forma de las crestas del comportamiento en forma de "W", así como el tiempo en el que ocurren.

En particular, para flujos superdifusivos, la fase de estabilidad se retrasa debido a la sobreexcitación que reciben los medios porosos provenientes de la matriz; mientras que para flujos subdifusivos se observa el mismo fenómeno de caída en la tasa de aumento de presión visto en los casos anteriores.

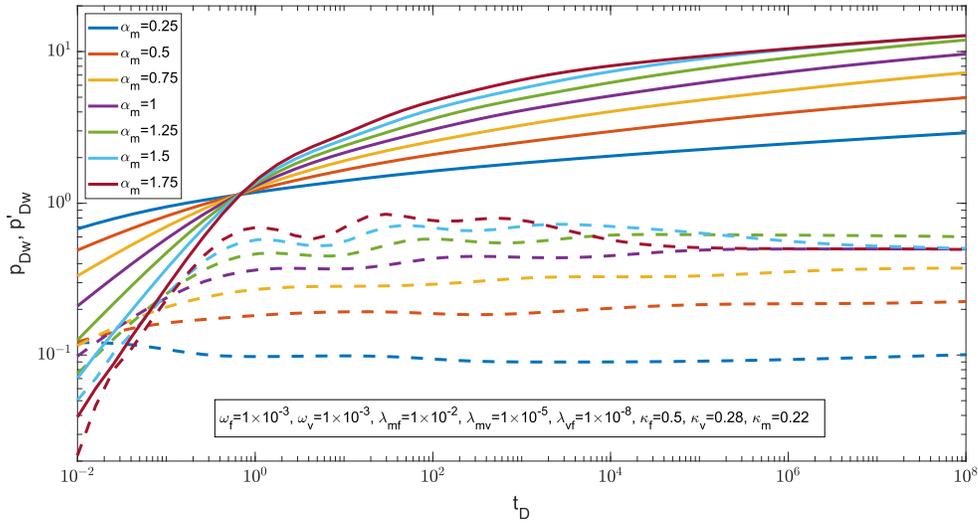


Figura 3.15: Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema vulgar, $\alpha_f = 1$, $\alpha_v = 1$.

La Figura 3.16 muestra los resultados de considerar un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso; a saber, en los sistemas fracturado, vulgar y matricial; es decir, $\alpha = \alpha_f = \alpha_v = \alpha_m$. Al igual que en el caso de flujo anómalo en cada medio poroso, afecta la fase dominada por las fracturas; al considerar el flujo anómalo en todo el medio poroso, mostrará, con mayor impacto, su efecto en tiempos cortos.

Como era de esperar, del efecto causado por el flujo anómalo vulgar y aumentado por los flujos anómalos de los otros medios porosos, la fase dominada por fracturas culmina con un mayor impacto que repercute en el inicio de la fase de transición.

La fase de transición tiene un impacto combinado por el flujo anómalo de cada medio poroso, resultante del impacto a los coeficientes de flujo interporoso λ_{ij} con $ij = mf, mv, vf$.

Finalmente, la fase de estabilidad se alcanza rápidamente para los casos superdifusivos debido al efecto combinado de flujos anómalos que genera un aumento en la derivada de Bourdet en contraste con el efecto de flujos anómalos independientes donde la tasa de aumento de presión tiende a ser la misma que en el caso no anómalo; mientras que para los casos subdifusivos la fase de estabilidad se retrasa, mostrando un comportamiento como en los casos ya descritos.

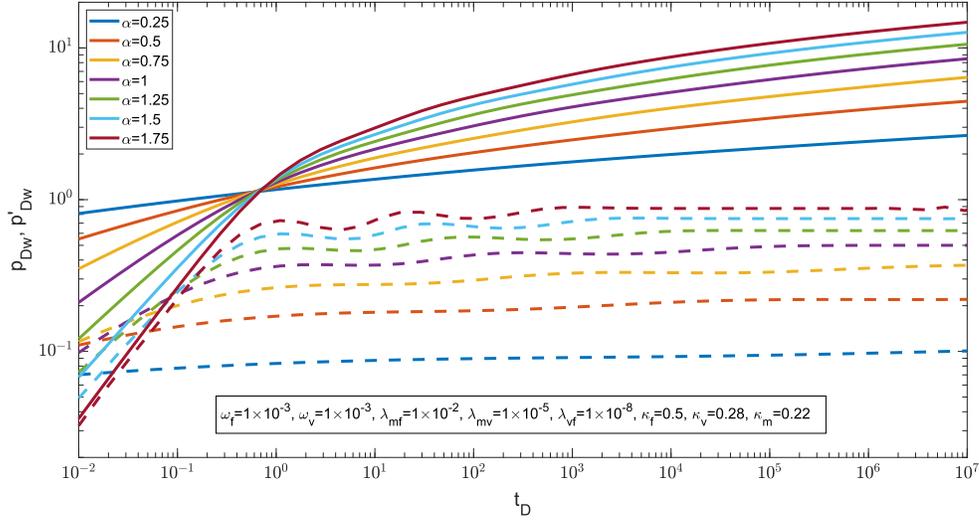


Figura 3.16: Efectos de considerar un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, $\alpha = \alpha_f = \alpha_v = \alpha_m$.

3.2.2. Caso de estudio 2

Los casos anteriores mostraron el efecto de un flujo anómalo aislado a cada medio poroso y un flujo anómalo en todo el medio poroso, combinado con una permeabilidad notablemente significativa en la matriz. A continuación, se describirá el mismo fenómeno, destacando el efecto de la permeabilidad en la matriz, contrastando los resultados anteriores con los resultados de una permeabilidad casi despreciable en la matriz, es decir $\kappa_m \approx 0$.

La Figura 3.17 muestra el efecto combinado de una permeabilidad casi insignificante con el efecto del flujo anómalo en el sistema fracturado. En particular, tener una matriz casi impermeable aumenta el efecto generado por los coeficientes de flujo interporoso, a saber, λ_{mf} y λ_{mv} , donde el comportamiento característico en forma de "W" es más notable.

Al tener un comportamiento en forma de "W" más marcado, el efecto que tiene el flujo anómalo del sistema fracturado sobre los efectos generados por los coeficientes de flujo interporoso es aún mayor mostrando, para flujos subdifusivos, el fenómeno descrito en el caso de estudio 1; mientras que, para flujos superdifusivos, se muestra una mitigación típica del efecto de flujo interporoso λ_{mf} cuando $\alpha_f \rightarrow 2$, precipitando la fase de estabilidad.

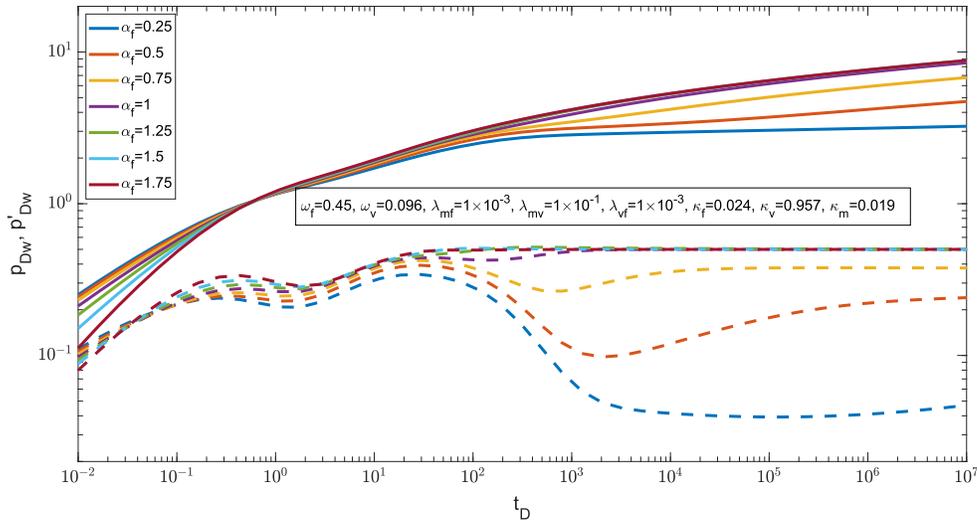


Figura 3.17: Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema fracturado, $\alpha_v = 1$, $\alpha_m = 1$.

La Figura 3.18 muestra el efecto creado por un flujo anómalo en el sistema fracturado; donde la fase dominada por fracturas, al ser más marcada, prolonga su duración aumentando la primera cresta que conforma el comportamiento en forma de "W" característico de la fase de transición, que impacta directamente en la cresta siguiente; sin embargo, el flujo anómalo no afecta todo el comportamiento en forma de "W", por lo que el final de la fase transitoria y la fase de estabilidad son como en el caso anterior.

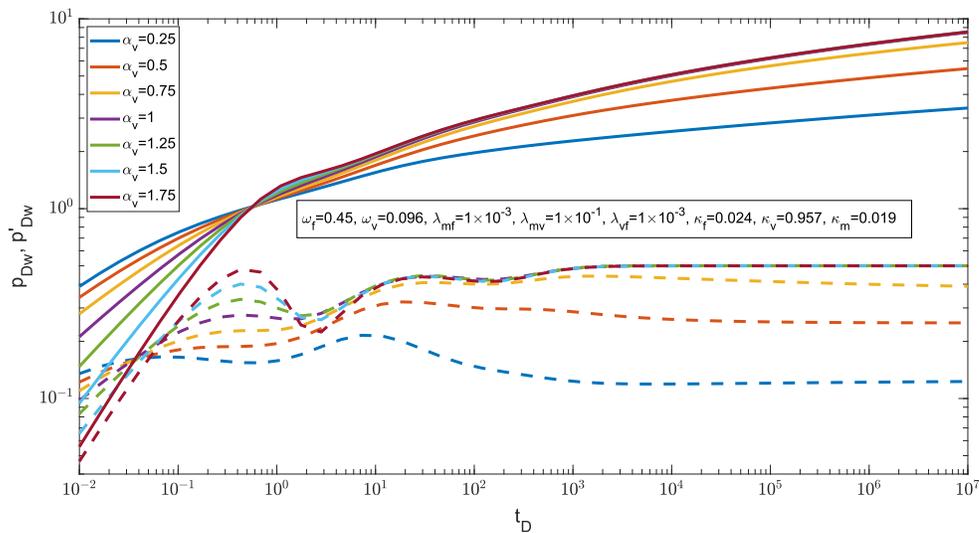


Figura 3.18: Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema vuglar, $\alpha_f = 1$, $\alpha_m = 1$.

Como en la Figura 3.15, la Figura 3.19 muestra el efecto del flujo anómalo en la matriz. En particular, cuando se comparan los efectos de la permeabilidad en la matriz en casos no anómalos; se observa que al disminuir el valor de permeabilidad en la matriz, además de impactar la fase dominada por fracturas, aumenta el efecto sobre los flujos interporosos, pronunciándose el característico comportamiento en forma de "W" en la fase de transición; en consecuencia, se retrasa el tiempo en que se alcanza la fase de estabilidad.

Así, el flujo anómalo en la matriz potencia los efectos generados por la permeabilidad de la matriz al alterar la forma en que el sistema fracturado y el sistema vugular son alimentados por la matriz. En particular, los flujos superdifusivos aceleran el momento en que aparecen las crestas y valles del característico comportamiento en forma de "W" al sobre estimular dichas crestas y valles; mientras que para comportamientos subdifusivos, el flujo sigue el mismo comportamiento descrito en el caso anterior.

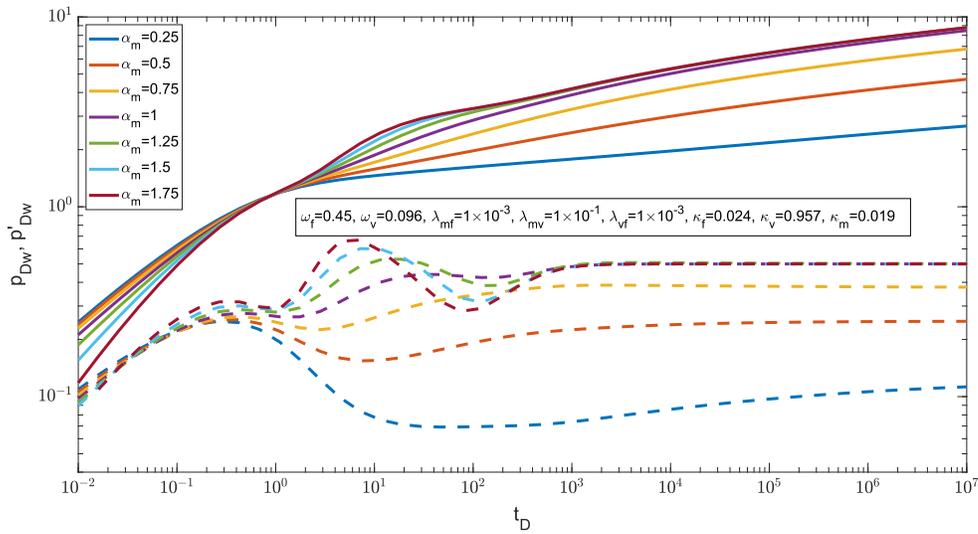


Figura 3.19: Efectos de considerar el flujo anómalo solo en el sistema matricial, $\alpha_f = 1$, $\alpha_v = 1$.

La Figura 3.20 muestra el efecto de flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, donde, como se discutió en el caso anterior, se genera un efecto combinado al considerar un flujo anómalo en cada medio poroso; además, considerando una permeabilidad casi despreciable en la matriz, muestra un efecto que suaviza la fase dominada por las fracturas, impactando, como consecuencia, el tiempo en que comienza la fase de transición.

De la misma forma que se ha comentado anteriormente, la variación de la permeabilidad

influye en el efecto que provocan los coeficientes de flujo interporoso, por lo que, al sumar el fenómeno de flujo anómalo, se sobre estimulan las crestas y valles que conforman el comportamiento característico.

Finalmente, la fase de estabilidad es invariable al efecto sobre la variación de la permeabilidad en la matriz, por lo que el efecto del flujo anómalo es análogo al comentado en el caso anterior.

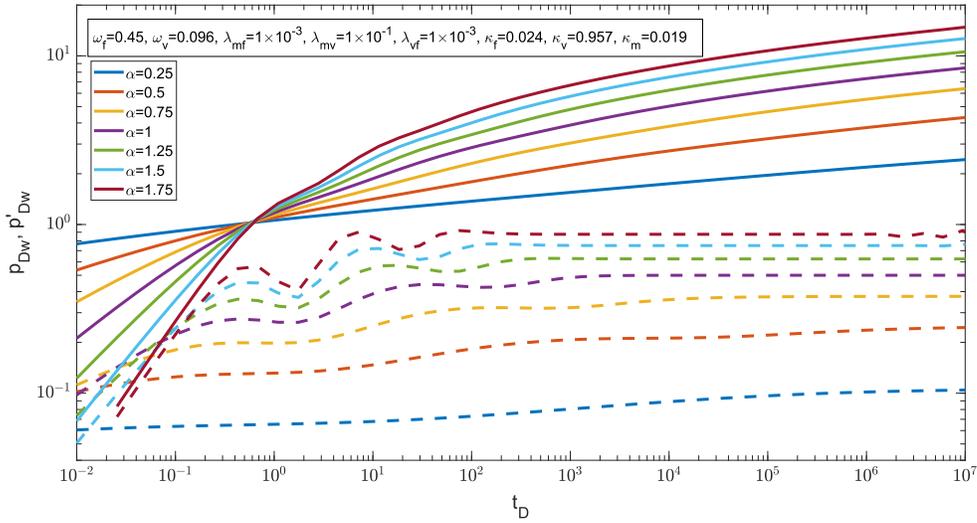


Figura 3.20: Efectos de considerar un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, $\alpha = \alpha_f = \alpha_v = \alpha_m$.

La Figura 3.21 muestra los resultados de asumir un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, considerando además un coeficiente adimensional no trivial $\tau_D \neq 1$. Como se puede comprobar en la ecuación (3.77), el coeficiente adimensional τ_D impacta fuertemente en la fase dominada por las fracturas y consecuentemente en las fases posteriores, presentándose principalmente como un retraso.

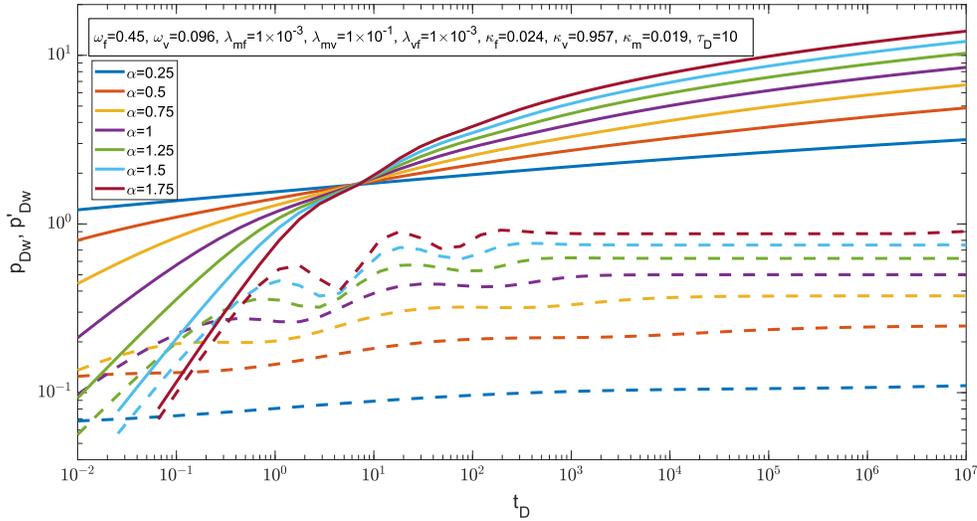


Figura 3.21: Efectos de considerar un flujo anómalo idéntico en cada medio poroso, $\alpha = \alpha_f = \alpha_v = \alpha_m$, con constante auxiliar no trivial, i.e., $\tau_D \neq 1$.

Como se observa comparando los casos de estudio anteriores, al eliminar el supuesto de permeabilidad de matriz despreciable y considerarlo significativo, $\kappa_m \neq 0$, se agrega un grado de libertad con respecto a los modelos existentes en la literatura, permitiendo modelar un conjunto más amplio de yacimientos heterogéneos que los que se pueden obtener con modelos de triple porosidad y doble permeabilidad, haciendo $\kappa_m = 0$; modelos de triple porosidad y permeabilidad simple, haciendo $\kappa_f = 0$ para flujo primario en el sistema fracturado y $\kappa_f = 1$ para flujo primario en el sistema vular; y modelos de doble porosidad. Por otro lado, cada estudio de caso explora flujos anómalos que no se limitan a flujos subdifusivos como en la literatura existente; adicionalmente, se permite que el orden de la derivada fraccionaria sea diferente en cada medio poroso, mostrando resultados particulares de cada medio poroso, explotando la idea de que, al considerar un medio poroso con flujo anómalo, cada medio poroso puede tener flujos anómalos particulares y diferentes de los de los medios porosos circundantes.

ECUACIÓN DE FLUJO CON GRADIENTE FRACCIONARIO

Ahora que la ecuación de flujo en un medio con triple porosidad y triple permeabilidad ha sido presentado y examinado el efecto de la derivada temporal fraccionaria en es sentido de Caputo, capítulo 3; se continuará a presentar el efecto del gradiente fraccionario el cual generaliza la ley de Darcy al sustituir el gradiente espacial por la derivada espacial de Weyl.

4.1. Ley de Darcy fraccionaria espacial

Considerando un pozo completamente penetrado en un yacimiento infinito con un solo sistema de porosidad, es decir, un sistema fracturado Tipo I de Nelson [67], presión inicial, permeabilidad, densidad y viscosidad constantes. Además, consideramos que el flujo de fluido en un punto dado está gobernado no solo por las propiedades del campo de presión en esa posición específica, sino que también depende de la distribución espacial global de ese campo y, por último, consideramos que la simetría radial es válida.

El modelo en variables adimensionales con derivada fraccionaria en el tiempo para la ecuación de transferencia de fluidos, resultante de la combinación de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy, en coordenadas radiales y considerando un medio poroso euclidiano, está dado por

$$\tau_D^{\alpha-1} \frac{\partial^\alpha p_D}{\partial t_D^\alpha} = -\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} (r_D \mathbf{q}_D), \quad \mathbf{q}_D = -\frac{\partial p_D}{\partial r_D}; \quad (4.1)$$

En la ecuación (4.1), la derivada fraccionaria temporal es la derivada fraccionaria de Caputo, $\frac{\partial^\alpha p_D}{\partial t_D^\alpha} \equiv {}^C D_{0+}^\alpha p_D$, con $0 < \alpha \leq 1$; donde se consideran las siguientes condiciones

iniciales y de contorno.

- Condición inicial

$$p_D(r_D, t_D = 0) = 0. \quad (4.2)$$

- Condición de frontera interior

$$\lim_{r_D \rightarrow 1} r_D \mathbf{q}_D(r_D, t_D) = -1. \quad (4.3)$$

- Condición de frontera exterior

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0. \quad (4.4)$$

Las variables adimensionales se expresan como sigue:

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad p_D = \frac{2\pi h \kappa}{Q_0 B_0 \mu} (P_i - p); \quad \mathbf{q}_D = \frac{2\pi h r_w}{Q_0 B_0} \mathbf{q};$$

$$t_D = \frac{\kappa}{\phi c r_w^2 \mu} t; \quad \tau_D = \frac{\kappa}{\phi c r_w^2 \mu} \tau;$$

donde τ es una constante introducida con el fin de mantener el equilibrio dimensional.

Sin embargo; al considerar que el flujo no está directamente relacionado con el gradiente de presión instantáneo en el sitio de medición, sino con el gradiente de presión que considera el camino del fluido desde el punto de partida hasta el sitio de medición, [38], el cual será conocido como memoria espacial, tiene sentido entonces reemplazar el gradiente de presión por la derivada espacial fraccionaria, Figura 4.1.

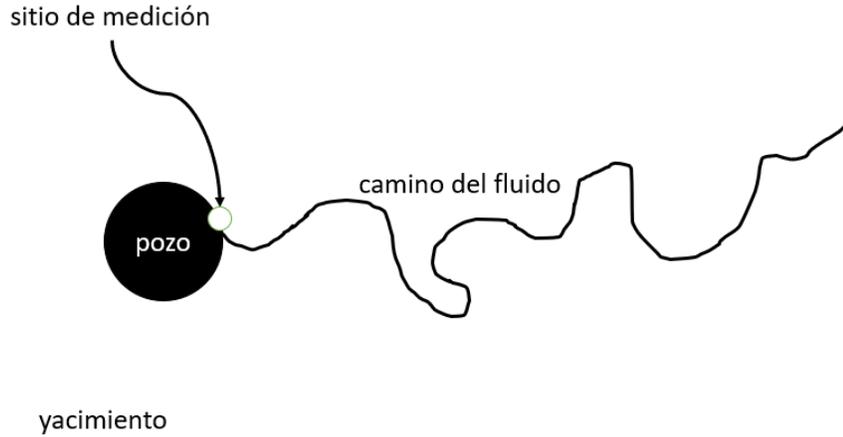


Figura 4.1: Idealización de la memoria espacial para incluir derivada espacial fraccionaria en el gradiente de presión.

Por ello, se propone modificar la ley de Darcy sustituyendo la derivada fraccionaria de Weyl por la derivada espacial donde se obtiene la siguiente ley de Darcy fraccionaria espacial; a saber

$$\mathbf{q}_{\beta,D} = -\delta_{\beta,D} \frac{\partial^\beta}{\partial r_D^\beta} p_D, \quad \text{con } \frac{\partial^\beta}{\partial r_D^\beta} p_D := -W^\beta p_D \quad \text{y } \delta_{\beta,D} = r_w^{1-\beta} \delta^{\beta-1}; \quad (4.5)$$

donde $0 < \beta < 2$ y δ es un término constante incluido para mantener el equilibrio dimensional en la ecuación de flujo. Nótese que al hacer $\beta = 1$, $\frac{\partial^\beta}{\partial r_D^\beta} p_D = \frac{\partial}{\partial r_D} p_D$ y, por lo tanto, se recupera la ley de Darcy clásica.

A continuación, se mostrará el efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial, ecuación (4.5), en la ecuación de flujo considerando un medio poroso; además, también se mostrará el efecto de esta nueva ley en la ecuación de flujo en un medio con triple porosidad y triple permeabilidad.

4.2. Modelo con porosidad simple

Como se mostró en el capítulo 2, no es posible aplicar la derivada fraccionaria de Weyl a toda función por lo que es necesario demostrar si es posible aplicar este operador al

déficit de presión adimensional p_D . La Figura 4.2 muestra la solución de las ecuaciones (4.1) y condiciones iniciales y de contorno (4.2)–(4.4), es decir, el comportamiento de la caída de presión, p_D , a lo largo espacio para diferentes tiempos y valores del orden de la derivada temporal fraccionaria, α .

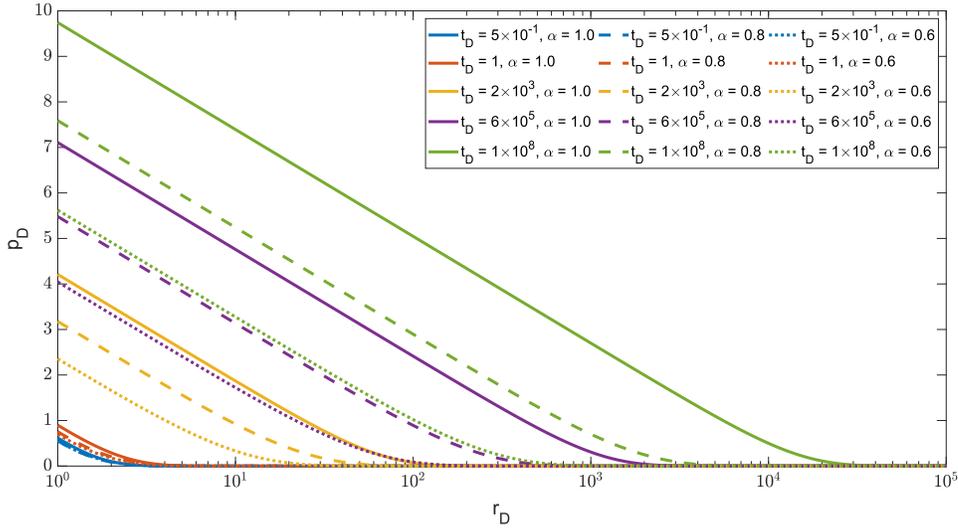


Figura 4.2: Comportamiento de la presión en el espacio en diferentes tiempos y ordenes de la derivada temporal fraccionaria.

La Figura 4.2 muestra el comportamiento decreciente de la caída de presión en el espacio y, por lo tanto, muestra que es válido aplicar la derivada fraccionaria de Weyl a p_D .

4.2.1. Ecuación de flujo simple con gradiente fraccionario

Dada la ecuación de continuidad, la primera ecuación en (4.1), la ley de Darcy tradicional, \mathbf{q}_D , se reemplaza por la ley de Darcy fraccionaria espacial, Ecuación (4.5), donde se obtiene el modelo de difusión fraccionada espacial, a saber

$$\tau_D^{\alpha-1} \frac{\partial^\alpha p_D}{\partial t_D^\alpha} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \delta_{\beta,D} \frac{\partial^\beta p_D}{\partial r_D^\beta} \right). \quad (4.6)$$

Como consecuencia de la ley de Darcy fraccionaria espacial, la condición de contorno interior también se modifica, a saber

$$\lim_{r_D \rightarrow 1} r_D \mathbf{q}_{\beta, \mathbf{D}}(r_D, t_D) = -1. \tag{4.7}$$

Por tanto, el modelo espacial de difusión fraccionaria a resolver es el constituido por las Ecuaciones (4.2), (4.4), (4.6) y (4.7).

Con estas modificaciones se pretende que el flujo de fluido en un punto dado del medio poroso esté gobernado por la distribución espacial global del campo de presión y no sólo por el comportamiento en la vecindad directa de la presión alrededor de ese punto.

El modelo de difusión fraccionaria espacial se resolvió mediante el método de diferencias finitas, considerando un esquema implícito en el tiempo y Crank–Nicholson en el espacio.

La Figura 4.3 muestra la solución numérica para resolver el modelo de difusión fraccionada espacial considerando la derivada temporal clásica, $\alpha = 1$, y variando el orden en la ley fraccionaria de Darcy, β . Se muestran la solución en el pozo, $p_{wD} = p_D(r_D = 1, t_D)$, y su derivada semilogarítmica de Bourdet, p'_{wD} [17].

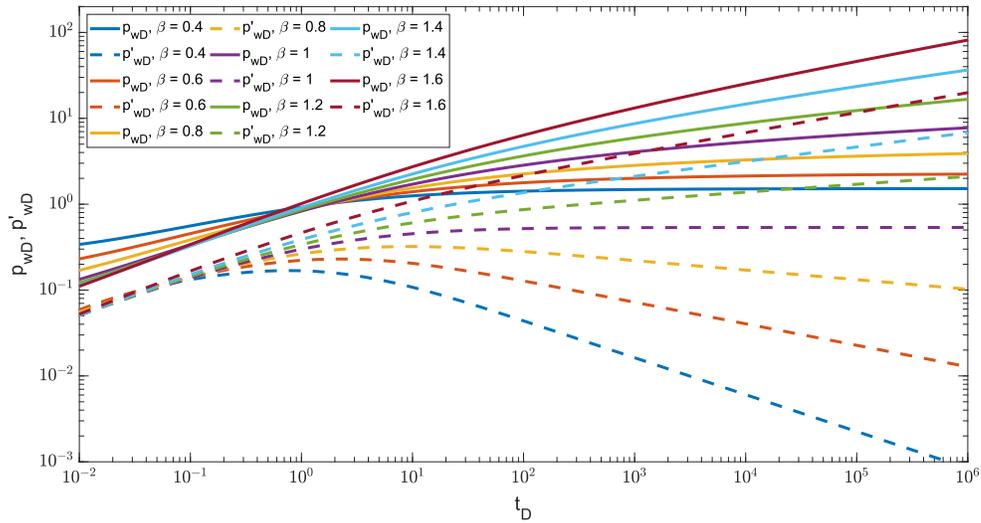


Figura 4.3: Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial con la derivada fraccionaria de Weyl, considerando la derivada temporal clásica $\alpha = 1$ con $\delta_{\beta, D} = 1$.

En la Figura 4.3, se pueden describir dos características importantes al modificar β en la ley de Darcy fraccionaria espacial.

En tiempos cortos, la caída de presión es menor que la caída de presión del caso clásico, $\beta = 1$, que corresponde a un orden superior en la ley fraccionaria espacial de

Darcy; mientras que si β es menor que uno (es decir, caso clásico), se obtendrá una mayor caída de presión. Sin embargo, en la derivada de Bourdet, β en la ley de Darcy fraccionaria espacial no parece tener un impacto notable, excepto manteniendo un comportamiento de ley de potencia con una pendiente de 0.5.

En tiempos largos, cuando $\beta < 1$, la caída de presión es menor que en el caso clásico y su respectiva derivada de Bourdet muestra una disminución siguiendo un comportamiento de ley de potencia, mostrando una mayor conectividad de poros que proporcionan caminos de flujo preferenciales; mientras que para $\beta > 1$, la caída de presión es mayor que en el caso clásico siguiendo un comportamiento de ley de potencia, y lo mismo sucede con la derivada de presión. Ambos comportamientos de ley de potencia son paralelos, lo que evidencia la creación de amortiguadores de flujo en el medio poroso.

La Figura 4.4 muestra el efecto combinado de la derivada temporal fraccionaria y la ley de Darcy fraccionaria espacial, es decir, para diferentes valores de β en la ley de Darcy fraccionaria espacial, sobre la caída de presión y su derivada de Bourdet para diferentes valores del orden de la derivada fraccionaria del tiempo, α .

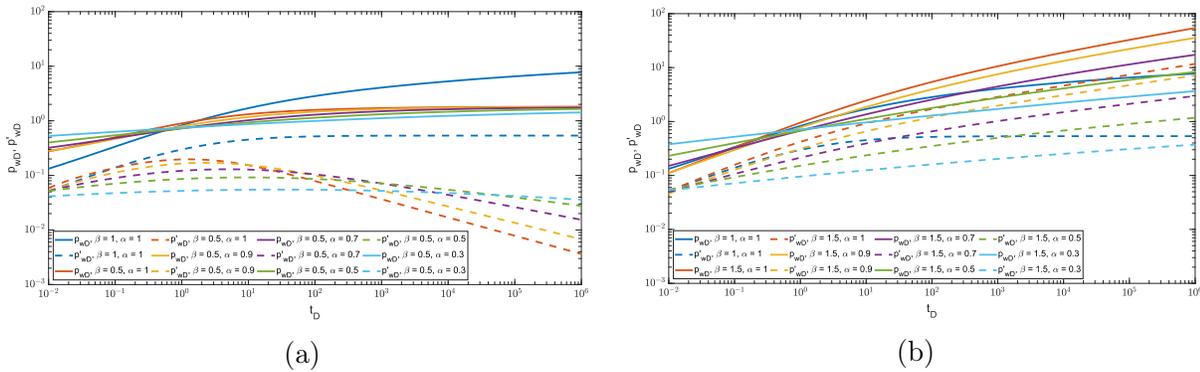


Figura 4.4: Efecto sobre el déficit de presión y su derivada de Bourdet del efecto combinado de la derivada temporal fraccionaria y la ley de Darcy fraccionaria espacial. (a) Para $\beta < 1$, el comportamiento al variar el orden de la derivada fraccionaria de tiempo. (b) Para $\beta > 1$, el comportamiento al variar el orden de la derivada fraccionaria de tiempo. En ambos casos, $\delta_{\beta,D} = 1$.

Es necesario resaltar que los resultados mostrados en la Figura 4.4 demuestran la compatibilidad de dos definiciones diferentes de derivada fraccionaria; es decir, la derivada fraccionaria de Caputo para la derivada temporal y la derivada fraccionaria de Weyl para la

derivada espacial en la ley de Darcy, lo que permite modelar mejor un fenómeno complejo al hacer que cada derivada fraccionaria capture diferentes características de este fenómeno.

La Figura 4.4a muestra para $\beta < 1$ el efecto de variar el orden de la derivada temporal fraccionaria, α . En el caso de la derivada temporal entera, $\alpha = 1$, el efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial crea una mayor caída de presión a corto plazo que rápidamente pierde su efecto, haciendo que la caída de presión a largo plazo sea menor cuanto menor sea α es; esto es consecuencia de una mayor conectividad de los poros que proporcionan rutas de flujo preferenciales. En el caso de $\beta = 0.5$, Figura 4.4a, podemos observar que la influencia de α no es tan grande como la observada en la derivada de presión, donde observamos comportamientos de ley de potencia en tiempos tardíos, lo que podría ser una indicación de restricciones de flujo.

La Figura 4.4b muestra para $\beta > 1$ el efecto de variar el orden de la derivada fraccionaria del tiempo, α , sobre el déficit de presión y su derivada de Bourdet. Para el caso de una derivada temporal entera, $\alpha = 1$; en tiempos cortos, la ley de Darcy fraccionaria espacial hace que la velocidad del flujo del fluido tenga un comportamiento similar al caso con ley de Darcy clásica, es decir, un comportamiento de flujo lineal; sin embargo, la caída de presión es menor. Posteriormente, para tiempos largos, la caída de presión es menor que en el caso clásico, cuanto menor es α ; esto es causado por el desplazamiento de los poros muertos que crean caminos de flujo preferenciales, lo que se refleja en el aumento de la velocidad del flujo y, por lo tanto, en la disminución de la caída de presión. Al incorporar el efecto memoria del flujo de fluido, se observa la dependencia de la presión anterior con las presiones posteriores; es decir, el flujo del fluido recibe un aumento en el fenómeno que se refleja en la disminución de la caída de presión y su derivada de Bourdet.

Es importante señalar que en todos los casos con $\beta = 1.5$ y α menor o igual a uno, Figura 4.4bb, en tiempos largos, existe un comportamiento de ley de potencia paralela tanto para la caída de presión como para su derivada de Bourdet. Este comportamiento es similar al comportamiento fractal, y ambos casos son expresiones de difusión anómala; en este caso hay superdifusión por efecto memoria, y en el caso fractal hay subdifusión.

La Figura 4.5 muestra el efecto de $\delta_{\beta,D}$, la variable adimensional introducida en la ley de Darcy fraccionaria espacial para mantener el equilibrio dimensional en la ecuación de

flujo fraccionaria, para los casos $\beta < 1$ y $\beta > 1$ con $\alpha = 1$.

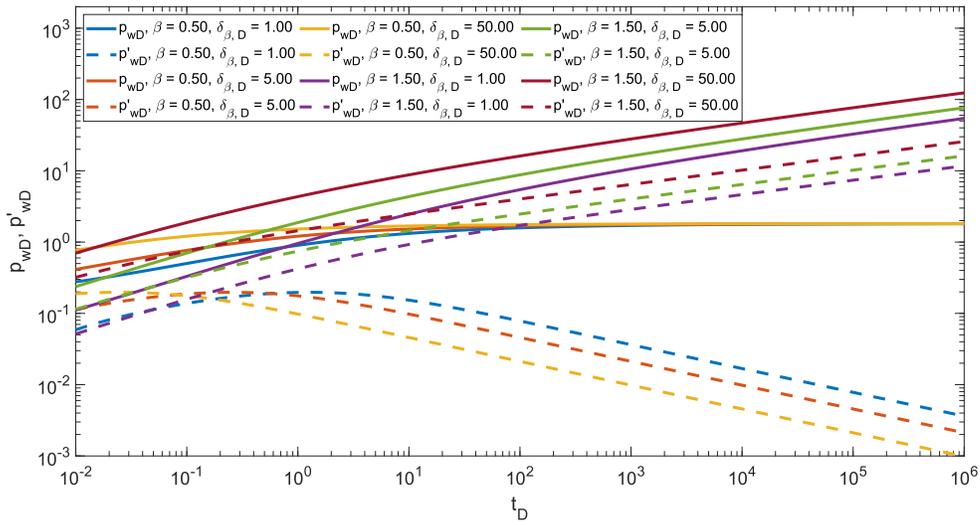


Figura 4.5: Efecto de $\delta_{\beta,D}$ en la caída de presión y derivada de Bourdet del modelo de difusión fraccionaria espacial con $\alpha = 1.0$.

El efecto de $\delta_{\beta,D}$ es notable a lo largo de todo el fenómeno. Para $\beta < 1$ y en tiempos cortos, se observa que a mayor valor de $\delta_{\beta,D}$, mayor valor de p_{wD} , afectando también la fase de transición, presentándose en diferentes momentos para cada valor de $\delta_{\beta,D}$ y finalmente alcanzando el mismo valor de p_{wD} en la fase de estabilidad. La derivada de Bourdet muestra que aunque en tiempos cortos, cuanto mayor sea el valor de $\delta_{\beta,D}$ mayor será p'_{wD} y más rápido será el decremento en p'_{wD} a tal grado que al llegar a la fase de estabilidad, se demostrará que a mayor valor de $\delta_{\beta,D}$, menor valor de p'_{wD} , mostrando también un comportamiento paralelo para todos los valores de $\delta_{\beta,D}$.

Por otro lado, para $\beta > 1$ en tiempos cortos, se observa que al igual que en el caso anterior, a mayor $\delta_{\beta,D}$, mayor es el valor de p_{wD} , cambiando la tasa de crecimiento en la fase de transición y posteriormente teniendo una tasa de crecimiento constante para cada valor de $\delta_{\beta,D}$. Este comportamiento se mantiene en la derivada de Bourdet, donde, en tiempos cortos, a mayor valor de p'_{wD} , mayor $\delta_{\beta,D}$, seguido de un crecimiento paralelo de la diferentes valores de $\delta_{\beta,D}$, cambiando la tasa de crecimiento durante la fase transitoria hasta alcanzar un crecimiento constante y paralelo para los diferentes valores de $\delta_{\beta,D}$.

4.2.2. Comparación de modelo de flujo con gradiente fraccionario y modelo en un medio poroso fractal

Considerando las mismas hipótesis del modelo anterior: un pozo completamente penetrado en un yacimiento infinito con un solo sistema de porosidad, es decir, un sistema fracturado Tipo I de Nelson, presión inicial, permeabilidad, densidad y viscosidad constantes; si en cambio, se considera un medio poroso fractal, es decir, un yacimiento fractal, el modelo es

$$\frac{\partial^\alpha p_D}{\partial t_D^\alpha} = -\frac{1}{r_D^{d_{mf}-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} (r_D^\gamma \mathbf{q}_D), \quad \mathbf{q}_D = -\frac{\partial p_D}{\partial r_D}, \quad (4.8)$$

donde $\gamma = d_{mf} - \theta - 1$. Adicionalmente se define $\nu = \frac{1-\gamma}{\theta+2}$ [68].

La Figura 4.6 muestra, por un lado, el modelo de Razminia et al. [28], que considera un yacimiento fractal, Ecuaciones (4.8)–(4.4); y por otro lado, el modelo de difusión fraccionada espacial, Ecuaciones (4.2), (4.4), (4.6) y (4.7).

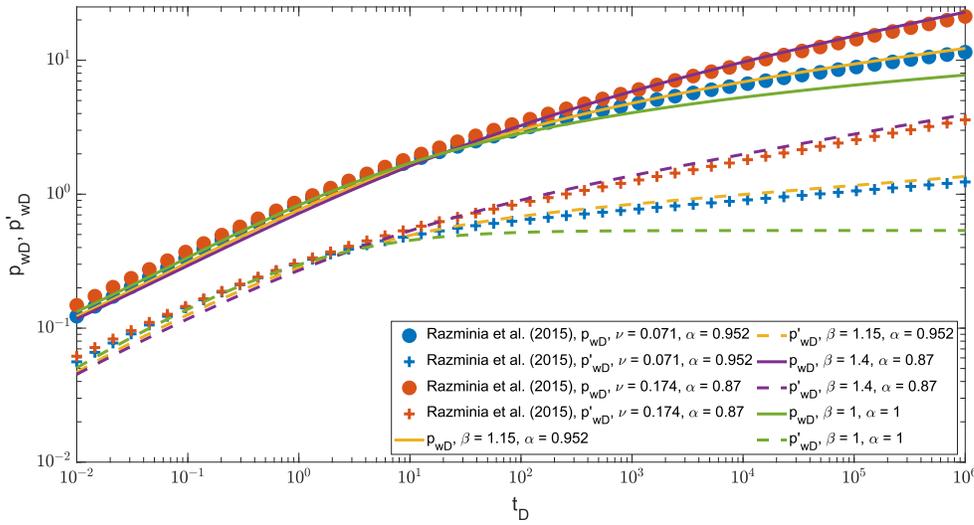


Figura 4.6: Comparación del efecto de variables espaciales fractales y la ley de Darcy fraccionaria espacial con $\delta_{\beta,D} = 1$.

El propósito es comparar, a través de los resultados mostrados, los enfoques considerados por ambos modelos. El modelo de difusión fraccionada espacial muestra una gran concordancia con los datos del modelo que considera un yacimiento fractal, tanto para la

caída de presión como para su derivada de Bourdet; por lo tanto, se puede considerar que al incluir la ley de Darcy fraccionaria espacial, se recupera la heterogeneidad del medio poroso mediante el uso del enfoque fraccionario.

Además, lo anterior tiene sentido considerando que la ley de Darcy fraccionaria espacial tiene en cuenta la geometría del medio poroso de dos maneras; por un lado, la geometría del medio poroso está implícitamente incluida a través del parámetro en la derivada fraccionaria de Weyl, β ; mientras que, por otro lado, se incluye explícitamente a través del parámetro δ , que también ayuda con el equilibrio dimensional.

Con lo anterior, se demuestra que la ley de Darcy fraccionaria espacial, al incluir la dependencia de la trayectoria del flujo del fluido, es decir, la memoria espacial, también tiene en cuenta la geometría intrínseca del medio poroso.

4.3. Modelo con triple porosidad

En esta sección se generalizará el fenómeno de difusión que incluye la ley de Darcy fraccionaria espacial en un yacimiento con triple porosidad y triple permeabilidad.

Considérese un yacimiento semi-infinito compuesto por los tres medios porosos: fracturas, vóculos y matriz. Supóngase además que el flujo de fluido en un punto en cada medio poroso está gobernado no solo por las propiedades del campo de presión en esa posición específica, sino que también depende de la distribución espacial global de ese campo, es decir, cada medio poroso tiene memoria espacial. Por lo tanto, la ecuación para el sistema fracturado, para el sistema vugular y para la matriz del medio es semejante a la mostrada en la ecuación (4.6) dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones para un medio poroso con triple porosidad y triple permeabilidad con ley de Darcy fraccionaria espacial en variables adimensionales y coordenadas polares:

$$\omega_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \delta_{\beta_m, D} \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial r_D^{\beta_m}} p_{Dm} \right) + \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}), \quad (4.9)$$

$$\omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} = \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \delta_{\beta_f, D} \frac{\partial^{\beta_f}}{\partial r_D^{\beta_f}} p_{Df} \right) - \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}) \quad (4.10)$$

$$\omega_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_D} = \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \delta_{\beta_v, D} \frac{\partial^{\beta_v}}{\partial r_D^{\beta_v}} p_{Dv} \right) - \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}) - \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}); \quad (4.11)$$

donde $\frac{\partial^{\beta_j}}{\partial r_D^{\beta_j}} p_{Dj} := -W^{\beta_j} p_{Dj}$ para $j = m, f, v$, $\omega_m = 1 - \omega_f - \omega_v$ y $\kappa_m = 1 - \kappa_f - \kappa_v$.

En las ecuaciones (4.9)–(4.11) la derivada temporal es en el sentido clásico con la finalidad de analizar primeramente el efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial en un yacimiento con triple porosidad y triple permeabilidad. Por otro lado, nótese que cada ecuación tiene asociada un orden en la derivada fraccionaria y un parámetro auxiliar diferente, β_j y $\delta_{\beta_j, D}$ para $j = m, f, v$; esto debido a que cada medio es independiente y por tanto con geometrías y características asociadas propias particulares a dicho medio poroso.

De manera similar al modelo anterior, la condición de flujo interior es modificada al incluir la ley de Darcy fraccionaria espacial; a saber,

$$\lim_{r_D \rightarrow 1} r_D \left(\kappa_m \delta_{\beta_m, D} \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial r_D^{\beta_m}} p_{Dm} + \kappa_f \delta_{\beta_f, D} \frac{\partial^{\beta_f}}{\partial r_D^{\beta_f}} p_{Df} + \kappa_v \delta_{\beta_v, D} \frac{\partial^{\beta_v}}{\partial r_D^{\beta_v}} p_{Dv} \right) = -1; \quad (4.12)$$

las condiciones de contorno y la condición inicial se mantienen:

$$p_{Dw}(t_D) := p_{Dm}(r_D = 1, t_D) = p_{Df}(r_D = 1, t_D) = p_{Dv}(r_D = 1, t_D), \quad (4.13)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Dm}(r_D, t_D) = \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df}(r_D, t_D) = \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Dv}(r_D, t_D) = 0, \quad (4.14)$$

$$p_{Dm}(r_D, t_D = 0) = p_{Df}(r_D, t_D = 0) = p_{Dv}(r_D, t_D = 0) = 0. \quad (4.15)$$

Como se observó en la Figura 3.3, el déficit de presión en cada medio poroso a lo largo del espacio y del tiempo tiene un comportamiento decreciente; más aún, pertenece a la clase de buenas funciones, por lo que tiene sentido aplicar la derivada fraccionaria de Weyl al déficit de presión de cada medio poroso.

A continuación se analizarán los resultados del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad con ley de Darcy fraccionaria espacial, ecuaciones (4.9)–(4.11) con condiciones iniciales y de frontera mostrados en las ecuaciones (4.12)–(4.15); este modelo se resolvió mediante el método de diferencias finitas, considerando un esquema implícito en el tiempo

y Crank–Nicholson en el espacio.

La Figura 4.7 muestra el efecto de aplicar la ley de Darcy fraccionaria espacial suponiendo una memoria espacial equivalente a los tres sistemas porosos, es decir, $\beta = \beta_f = \beta_m = \beta_v$ con $\beta \in (0, 2)$.

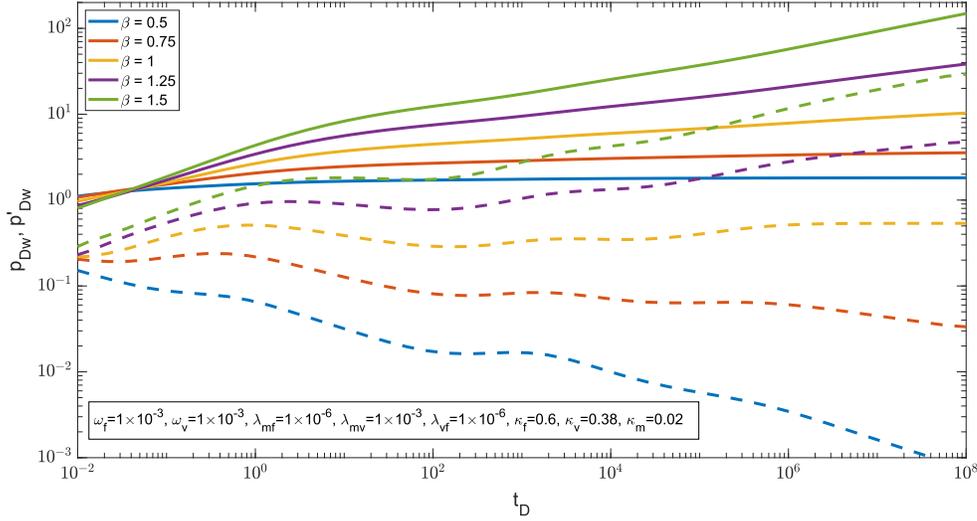


Figura 4.7: Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial equivalente en cada sistema en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad.

El caso con $\beta = 1$ representa el caso clásico con ley de Darcy clásica, la cual muestra el comportamiento descrito en la sección 3.1.2 con forma de "W" en la derivada de Bourdet la cual es el resultado de los procesos que ocurren en tiempos cortos como la fase dominada por fracturas, el efecto de skin, el efecto del coeficiente de almacenamiento, etc.; los procesos en tiempos transitorios como lo son la transición entre el dominio de fases que se observa en la derivada de Bourdet como un valle con comportamiento con forma de "V" cuya duración y pronunciamiento es función de los diversos parámetros tales como la permeabilidad de cada medio poroso κ_j para $j = m, f, v$, la capacidad de almacenamiento ω_j para $j = m, f, v$, los términos de transferencia λ_{ij} para $ij = mf, fv, mv$ y los procesos en tiempos largos como la fase de estabilidad cuando el déficit de presión alcanza una tasa de crecimiento constante.

Para cada caso mostrado en la Figura 4.7, se observa que los procesos que constituyen el fenómeno de difusión en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad suceden en los mismos tiempos, t_D , y tienen la misma duración; esto es, para cada valor de β es

congruente la duración de la fase de tiempos cortos, la duración de cada transición de fase que genera el comportamiento con forma de "V" y lo que podría considerarse como fase de estabilidad. Se observa como el valor de la memoria espacial, β , está ligada estrechamente a la trayectoria del fluido ya que, para los casos donde $\beta > 1$ se observa que a mayor valor de β mayor es el déficit de presión creciendo esta diferencia con el tiempo; este efecto se observa durante las diferentes fases del fenómeno y en particular se observa que, cuando se alcanza la fase de estabilidad en el caso clásico ($\beta = 1$), la derivada de Bourdet para los otros casos muestra un crecimiento constante o crecimiento estable indicando que el flujo ha encontrado una trayectoria fija con la que el flujo continuará su comportamiento lo cual es explicado por la creación de amortiguadores de flujo en el medio poroso. Para los casos donde $\beta < 1$, se observa un déficit de presión menor en comparación al caso clásico, $\beta = 1$, obteniendo una presión aún menor cuando menor es el valor de β ; como se mencionó, los tiempos de transición entre fases y su duración son congruentes con los del caso clásico; sin embargo, para la fase de estabilidad, se muestra como la derivada de Bourdet comienza a tener un decremento a razón constante.

Las Figuras 4.8–4.10 muestran el efecto de la ley de Darcy fraccionaria aplicada a un solo medio poroso, a saber, el medio fracturado, el medio vugular y la matriz del medio respectivamente.

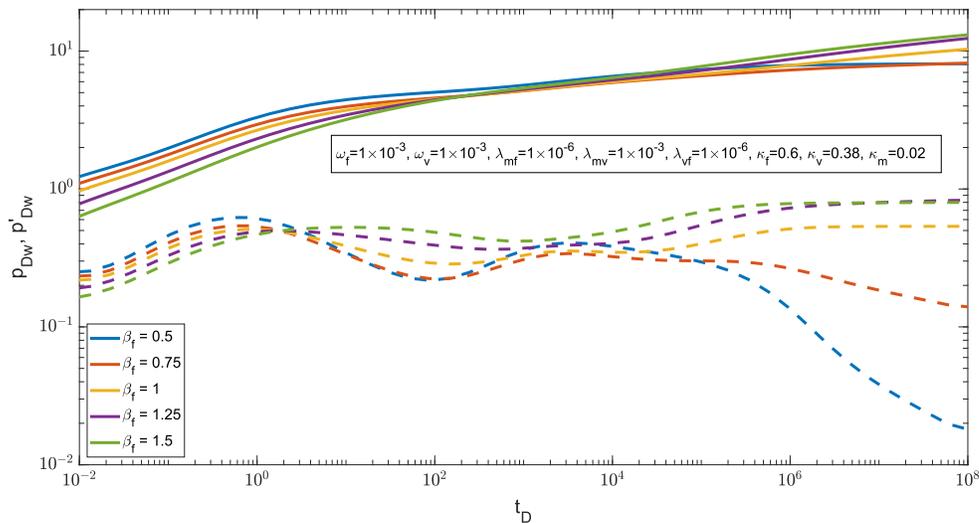


Figura 4.8: Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial en el sistema fracturado en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad, $\beta_v = \beta_m = 1$.

La Figura 4.8 muestra el efecto del gradiente fraccionario en el medio fracturado dejando a los otros medios porosos con un gradiente clásico. Se observa su efecto a lo largo de todo el fenómeno debido a que el medio fracturado es el medio poroso con mayor flujo aunque con baja capacidad de almacenamiento. Para tiempos cortos se observa que cuanto mayor sea el valor de β_f menor será el déficit de presión hasta el comienzo de la fase de transición donde el efecto de la fase dominada por fracturas y la fase dominada por vórgulos se ven fuertemente afectadas por el gradiente fraccionario salvo en el tiempo en el que se presentan y la duración de las fases; esto es, pronunciando o decrementando el comportamiento en forma de "V" dependiendo del valor de β_f el cual también es resultado de otros parámetros. Finalmente, para la fase de estabilidad, cuando $\beta_f > 1$ se observa en la derivada de Bourdet un comportamiento paralelo al caso clásico pero con un valor mayor lo que se traduce a un aumento en la razón de crecimiento en el déficit de presión; mientras que para $\beta_f < 1$ se observa un decremento tanto en el déficit de presión como en la razón de cambio en la derivada de Bourdet resultado de una mayor conectividad de poros que proporcionan caminos de flujo preferenciales.

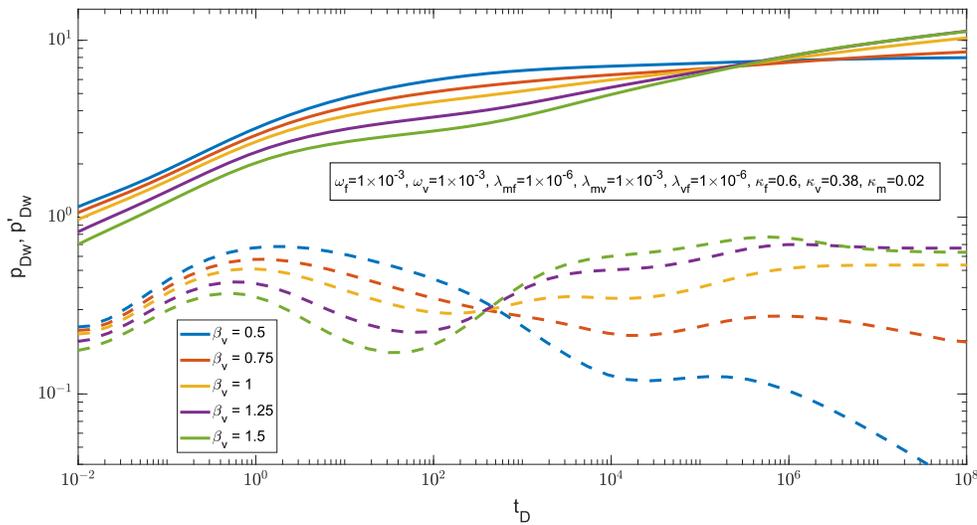


Figura 4.9: Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial en el sistema vugular en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad, $\beta_f = \beta_m = 1$.

La Figura 4.9 muestra el efecto del gradiente fraccionario aplicado al medio vugular dejando al medio fracturado y a la matriz del medio con un gradiente clásico. Se muestra que cuando mayor sea la conectividad de poros que genera flujos preferenciales; es decir,

cuanto menor sea el valor de β_v , mayor será el déficit de presión en tiempos cortos y en parte de la fase de transición; más aún durante la fase de transición se observa en la derivada de Bourdet como el efecto del flujo preferencial en el medio vugular impacta en la fase dominada por fracturas haciendo que la derivada de la presión p'_{Dw} sea menor cuanto mayor sea β_v e invirtiendo este comportamiento al pasar a la fase dominada por vugulos. En el caso mostrado, el flujo preferencial mantiene un mayor déficit de presión durante la fase de transición hasta el inicio de la fase de estabilidad donde el comportamiento se invierte; esto es, a mayor valor de β_v , mayor será el déficit de presión en la fase de estabilidad.

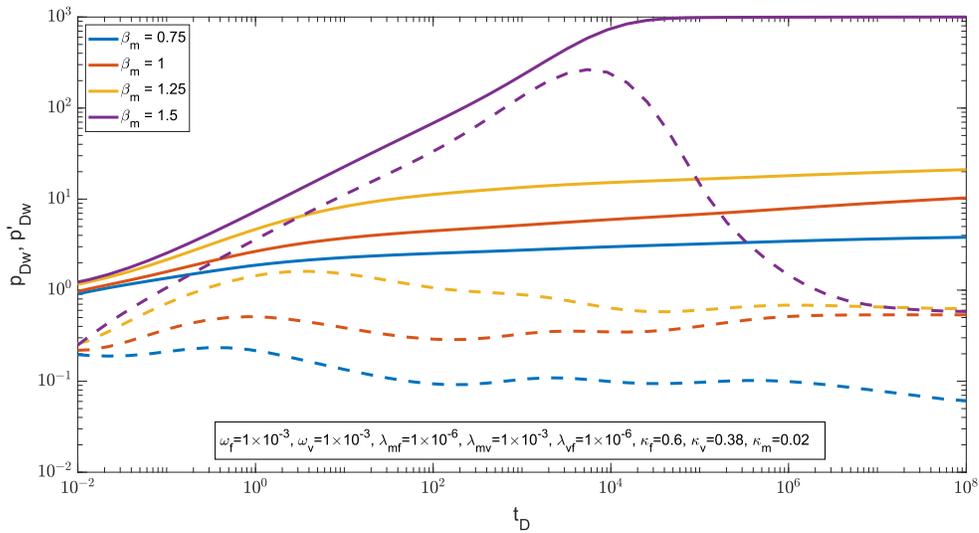


Figura 4.10: Efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial en el sistema matricial en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad, $\beta_f = \beta_v = 1$.

La Figura 4.10 muestra el efecto del gradiente fraccionario aplicado a la matriz del medio dejando al medio fracturado y al medio vugular con un gradiente clásico. Se observa que cuanto mayor sea el valor de β_m mayor será el déficit de presión donde para el caso $\beta_m = 1.5$ se alcanza un mayor incremento. En la derivada de Bourdet se observa que, para $\beta_m < 1$ el incremento en la conectividad de poros hace que el valor de p'_{Dw} decremente en comparación al caso clásico en mayor medida cuanto mayor pase el tiempo t_D afectando todas las fases del fenómeno; mientras que, para $\beta_m > 1$ se observa que el efecto del gradiente fraccionario impacta fuertemente en la fase de tiempos cortos retrasando el inicio de la fase de transición donde para el caso de $\beta_m = 1.5$ la fase de tiempos cortos ha sido

ampliado superponiéndose a la fase de transición mientras que la fase de estabilidad se ha mantenido para estos casos.

En esta sección se mostró, a través de ejemplos sintéticos, el efecto de la ley de Darcy fraccionaria espacial aplicado a cada medio poroso de manera individual mostrando su impacto en las diferentes fases del fenómeno de difusión; desde la fase en tiempos cortos hasta la fase de transición impactando de diferente manera la fase dominada por fracturas y la fase dominada por vóculos; más aún, cuando la ley de Darcy fraccionaria espacial es aplicado a todo el medio poroso como un todo, su efecto repercute hasta la fase de estabilidad.

ECUACIÓN DE FLUJO CON GRADIENTE FRACCIONARIO Y DERIVADA TEMPORAL FRACCIONARIA

En este capítulo se generalizará el fenómeno de difusión al combinar el efecto del gradiente fraccionario espacial con la derivada temporal fraccionaria.

Considérese un yacimiento semi-infinito compuesto por los tres medios porosos: fracturas, vóculos y matriz. Supóngase además que el flujo de fluido en un punto en cada medio poroso está gobernado no solo por las propiedades del campo de presión en esa posición específica, sino que también depende de la distribución espacial global de ese campo, es decir, cada medio poroso tiene memoria espacial. Más aún, al considerar un flujo de fluido anómalo a través del efecto de memoria temporal. Por lo tanto, la ecuación para el sistema fracturado, para el sistema vugular y para la matriz del medio es semejante a la mostrada en la ecuación (4.6) dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones para un medio poroso con triple porosidad y triple permeabilidad con ley de Darcy fraccionaria espacial y derivada temporal fraccionaria en variables adimensionales y coordenadas polares:

$$\tau_D^{\alpha_m-1} \omega_m \frac{\partial^{\alpha_m-1} p_{Dm}}{\partial t_D^{\alpha_m-1}} = \kappa_m \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \delta_{\beta_m, D} \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial r_D^{\beta_m}} p_{Dm} \right) + \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}) \quad (5.1)$$

$$\tau_D^{\alpha_f-1} \omega_f \frac{\partial^{\alpha_f-1} p_{Df}}{\partial t_D^{\alpha_f-1}} = \kappa_f \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \delta_{\beta_f, D} \frac{\partial^{\beta_f}}{\partial r_D^{\beta_f}} p_{Df} \right) - \lambda_{mf} (p_{Df} - p_{Dm}) + \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}) \quad (5.2)$$

$$\tau_D^{\alpha_v-1} \omega_v \frac{\partial^{\alpha_v-1} p_{Dv}}{\partial t_D^{\alpha_v-1}} = \kappa_v \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \delta_{\beta_v, D} \frac{\partial^{\beta_v}}{\partial r_D^{\beta_v}} p_{Dv} \right) - \lambda_{mv} (p_{Dv} - p_{Dm}) - \lambda_{vf} (p_{Dv} - p_{Df}) \quad (5.3)$$

donde $\frac{\partial^{\beta_j}}{\partial r_D^{\beta_j}} p_{Dj} := -W^{\beta_j} p_{Dj}$ es con la derivada fraccionaria de Weyl de orden $0 < \beta_j < 2$ y $\frac{\partial^{\alpha_j} p_{Dj}}{\partial t_D^{\alpha_j}} = {}^C D_{0+}^{\alpha_j} p_{Dj}$ es la derivada temporal fraccionaria en el sentido de Caputo de orden $0 < \alpha_j < 1$ para $j = m, f, v$, $\omega_m = 1 - \omega_f - \omega_v$ y $\kappa_m = 1 - \kappa_f - \kappa_v$.

Nótese que cada ecuación tiene asociada un orden en la derivada fraccionaria y un parámetro auxiliar diferente, β_j , $\delta_{\beta_j, D}$, α_j y $\tau_D^{\alpha_j - 1}$ para $j = m, f, v$.

A continuación se analizarán los resultados del modelo de triple porosidad y triple permeabilidad con ley de Darcy fraccionaria espacial, ecuaciones (5.1)–(5.3) con condiciones iniciales y de frontera mostrados en las ecuaciones (4.12)–(4.15); este modelo se resolvió mediante el método de diferencias finitas, considerando un esquema implícito en el tiempo y Crank–Nicholson en el espacio.

La Figura 5.1 muestra el efecto de aplicar la ley de Darcy fraccionaria espacial en combinación con un flujo anómalo subdifusivo, ambos efectos aplicados a todo el medio poroso como un todo; esto es, suponiendo una memoria espacial equivalente a los tres sistemas porosos con $\beta = \beta_m = \beta_f = \beta_v$, y un efecto de memoria temporal equivalente en los tres sistemas porosos con $\alpha = \alpha_m = \alpha_f = \alpha_v$.

Cabe destacar que los resultados mostrados son consecuencia de utilizar dos diferentes definiciones de derivada fraccionaria; cada definición es propuesta por la naturaleza del fenómeno de difusión en yacimientos naturalmente fracturados vulgares.

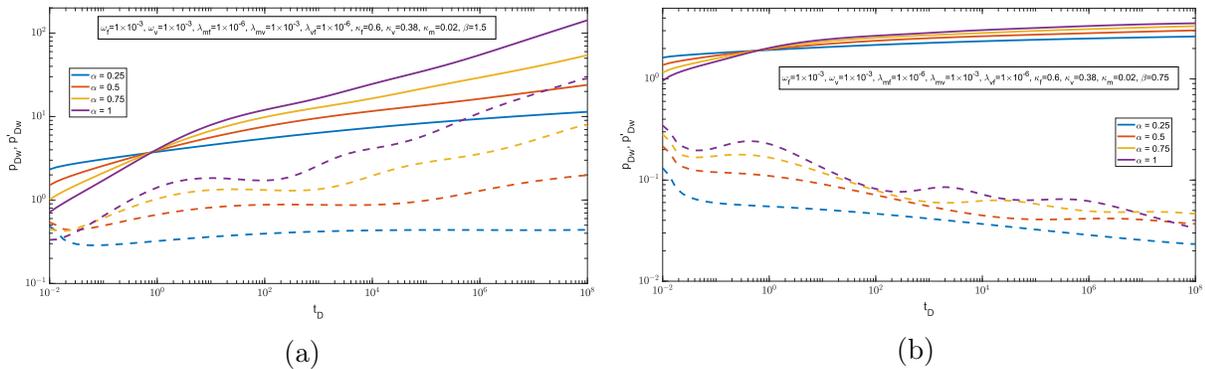


Figura 5.1: Efecto de considerar un flujo anómalo subdifusivo en el yacimiento como un todo, $\alpha = \alpha_m = \alpha_f = \alpha_v$, en la ley de Darcy fraccionaria espacial equivalente en cada medio poroso con $\beta = \beta_m = \beta_f = \beta_v < 1$. (a) Caso para flujos preferenciales, $\beta < 1$. (b) Caso para amortiguadores de flujo, $\beta > 1$.

La Figura 5.1a muestra el efecto de flujo anómalo subdifusivo al considerar el caso con

amortiguadores de flujo en cada medio poroso, $\beta > 1$. Se observa como el efecto del flujo preferencial, $\beta = 1.5$, genera un incremento en el déficit de presión a lo largo de todo el fenómeno en comparación con el caso clásico $\beta = 1.0$ manteniendo el comportamiento de la fase en tiempos cortos, de la fase de transición y el comportamiento en la llamada fase de estabilidad; donde en particular para la fase de transición, mantiene el comportamiento en forma de "W" tanto en el momento de aparición como en su duración. Añadido a este efecto, el flujo subdifusivo incrementa el déficit de presión cuanto menor sea el valor de α en la fase de tiempos cortos; sin embargo, después de esta fase, el fenómeno tiene una memoria cada vez más corta haciendo que el fenómeno sea suavizado o ralentizado disminuyendo el déficit de presión cuando menor sea el valor de α mientras que en la derivada de Bourdet se observa como se va alargando y retrasando cada cresta generada por el comportamiento en forma de "W" .

La Figura 5.1b muestra el efecto de flujo anómalo subdifusivo al considerar un flujo preferencial en cada medio poroso, $\beta < 1$. Se observa como el efecto del flujo preferencial, $\beta = 0.75$, genera un decremento en tanto en el déficit de presión como en su derivada de Bourdet a lo largo de todo el fenómeno en comparación con el caso clásico $\beta = 1.0$. Añadido a este efecto y de forma análoga al caso con $\beta > 1$, el flujo subdifusivo incrementa el déficit de presión cuanto menor sea el valor de α en la fase de tiempos cortos; sin embargo, después de esta fase, el fenómeno tiene una memoria cada vez más corta haciendo que el fenómeno sea suavizado o ralentizado disminuyendo el déficit de presión cuando menor sea el valor de α mientras que en la derivada de Bourdet se observa como se va alargando y retrasando cada cresta generada por el comportamiento en forma de "W" .

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El presente trabajo es resultado de una labor multidisciplinaria donde se combinan conocimientos de matemáticas e ingeniería petrolera al proponer un nuevo modelo para capturar la alta heterogeneidad en yacimientos naturalmente fracturados vugulares, modelo de triple porosidad y triple permeabilidad incorporando los efectos de flujo anómalo y memoria espacial.

Desde el enfoque matemático el modelo de triple porosidad ha sido, por un lado, modificado para incluir el efecto de flujo anómalo a través de la derivada fraccionaria de Caputo obteniendo su solución de manera analítica en el espacio de Laplace para ambos casos: flujos subdifusivos y flujos superdifusivos. Por otro lado, se propone modificar la definición de gradiente incorporando la derivada fraccionaria de Weyl; más aún, dado que la derivada fraccionaria de Weyl se expresa como una integral impropia, se ha creado un principio, análogo al principio de memoria corta, denominado principio de memoria recordada el cual permite realizar las aproximaciones numéricas. Con la derivada fraccionaria de Weyl se ha obtenido la ley de Darcy fraccionaria espacial y ha sido aplicada tanto al modelo de difusión como al modelo de triple porosidad y triple permeabilidad. Finalmente, se han combinado ambas definiciones de derivadas fraccionarias (derivada fraccionaria por la izquierda de Caputo y derivada fraccionaria de Weyl) proponiendo la ecuación de flujo con gradiente fraccionario y derivada temporal fraccionaria mostrando su solución y comportamiento ante diversos datos sintéticos.

Desde el punto de vista de la ingeniería petrolera; se ha considerado un yacimiento naturalmente fracturado de Tipo I de Nelson embebido un medio poroso infinito compuesto a su vez por tres medios porosos, el sistema fracturado, el sistema vugular y la matriz del medio; se considera un fluido ligeramente compresible y propiedades petrofísicas independientes de esfuerzos. Se analiza su comportamiento en variables adimensionales y

el impacto de cada parámetro en el déficit de presión a través de la derivada de Bourdet; en particular, se estudia el efecto de una permeabilidad de la matriz no despreciable obteniendo así el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad.

Se mostró el efecto que cada medio poroso, por separado y en su conjunto, proporciona al déficit de presión al considerar flujo anómalo; en particular, se mostró el fenómeno de decaimiento en la velocidad del flujo generado por flujos subdifusivos destacando la marcada diferencia en la llamada fase de estabilidad. Para flujos superdifusivos, la fase de estabilidad es similar al caso clásico cuando el flujo anómalo es restringido a un medio poroso; mientras que, al considerar que el flujo es anómalo en todo el yacimiento, la fase de estabilidad es alterada mostrando una mayor velocidad en el déficit de presión. El modelo propuesto considera la incorporación de un término, τ , con el que se logra mantener el balance dimensional y por tanto su interpretación física.

Se mostró que al considerar que el flujo de fluido en un punto dado se rige no solo por las propiedades del campo de presión en esa posición específica, sino que también depende de la distribución espacial global de ese campo; se modificó la ley de Darcy reemplazando la derivada espacial por la derivada fraccionaria de Weyl obteniendo la ley de Darcy fraccionaria espacial. Se analizó el efecto de esta nueva ley en la ecuación de flujo y se mostró como, por un lado, puede reflejar las trayectorias de flujo preferenciales y, por otro lado, crea amortiguadores de flujo durante el fenómeno; para este caso, se mostró que el modelo propuesto no solo se asemeja a los resultados obtenidos en modelos que incorporan geometría fractal, sino que también incorpora la geometría intrínseca del medio poroso y, por tanto, permite recuperar la heterogeneidad del medio poroso con lo cual se muestra que tanto el enfoque fractal como el fraccionario representan dos formas posibles para capturar la difusión anómala. El modelo propuesto considera la incorporación de un término, $\delta_{\beta,D}$, con el que se logra mantener el balance dimensional y por tanto su interpretación física.

Finalmente, en el modelo de triple porosidad y triple permeabilidad se incorporó el efecto de flujo anómalo a través de la derivada fraccionaria de Caputo y la ley de Darcy fraccionaria a través de la derivada fraccionaria de Weyl en cada medio poroso. Se mostró como ambas definiciones de derivadas fraccionarias son compatibles y que cada efecto

impacta de forma aditiva en el déficit de presión.

Como trabajo futuro, se observa que en la ecuación de continuidad se ha estudiado el efecto de la derivada fraccionaria en la derivada temporal y en el gradiente por lo que resta la pregunta de ¿cuál sería el impacto de aplicar la derivada fraccionaria en la divergencia?, ¿qué tipo de derivada fraccionaria sería la adecuada? y ¿es posible deducir una ecuación de continuidad completamente fraccionaria? Estas preguntas están relacionadas con el trabajo descrito en la presente tesis por lo son una continuación natural que pueden ser abordados utilizando las herramientas desarrolladas y plasmadas en este escrito.

Article

Quasi-Analytical Model of the Transient Behavior Pressure in an Oil Reservoir Made Up of Three Porous Media Considering the Fractional Time Derivative

Fernando Alcántara-López ^{1,*} , Carlos Fuentes ² , Fernando Brambila-Paz ¹  and Jesús López-Estrada ¹

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, National Autonomous University of México, Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán 04510, Ciudad de México, Mexico; fernandobrambila@gmail.com (F.B.-P.); jelpze@gmail.com (J.L.-E.)

² Mexican Institute of Water Technology, Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532, Jiutepec, Morelos 62550, Mexico; cbfuentesr@gmail.com

* Correspondence: alcantalarlopez@comunidad.unam.mx

Received: 3 November 2020; Accepted: 30 November 2020; Published: 1 December 2020



Abstract: The present work proposes a new model to capture high heterogeneity of single phase flow in naturally fractured vuggy reservoirs. The model considers a three porous media reservoir; namely, fractured system, vugular system and matrix; the case of an infinite reservoir is considered in a full-penetrating wellbore. Furthermore, the model relaxes classic hypotheses considering that matrix permeability has a significant impact on the pressure deficit from the wellbore, reaching the triple permeability and triple porosity model which allows the wellbore to be fed by all the porous media and not exclusively by the fractured system; where it is considered a pseudostable interporous flow. In addition, it is considered the anomalous flow phenomenon from the pressure of each independent porous medium and as a whole, through the temporal fractional derivative of Caputo type; the resulting phenomenon is studied for orders in the fractional derivatives in $(0, 2)$, known as superdiffusive and subdiffusive phenomena. Synthetic results highlight the effect of anomalous flows throughout the entire transient behavior considering a significant permeability in the matrix and it is contrasted with the effect of an almost negligible matrix permeability. The model is solved analytically in the Laplace space, incorporating the Tartaglia–Cardano equations.

Keywords: porous media; Darcy law; well test analysis; triple porosity; Tartaglia–Cardano equations; Caputo time derivative

1. Introduction

In order to create an efficient plan to exploit a reservoir, proper design facilities at the bottom of a well and in the surface and get a more realistic overview of the conditions of wellbore and of the reservoir that help one to make better decisions to preserve the injectivity and later secondary recovery of the fluid, it is necessary to correct reservoir modeling that allows the cover of the heterogeneity of the fluid. Therefore, pressure tests are one of the main tools to determine reservoir characteristics and at the same time determine the main factors that influence hydrocarbon production.

As is well known, Warren and Root [1] were among the pioneers in work with naturally fractured reservoirs and started modeling non-homogeneous reservoirs, proposed a double porosity model and thought of the reservoir as a set of rectangular parallelepipeds (which represents the matrix rock), while the secondary porosity, the fractures, form a continuous orthogonal system uniformly spaced by

Article

Fractional Vertical Infiltration

Carlos Fuentes ¹, Fernando Alcántara-López ^{2,*}, Antonio Quevedo ¹ and Carlos Chávez ³

¹ Mexican Institute of Water Technology, Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532, Jiutepec, Morelos 62550, Mexico; cbfuentesr@gmail.com (C.F.); jose_quevedo@tlaloc.imta.mx (A.Q.)

² Department of Mathematics, Faculty of Science, National Autonomous University of México, Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán 04510, Ciudad de México, Mexico

³ Water Research Center, Department of Irrigation and Drainage Engineering, Autonomous University of Querétaro, Cerro de las Campanas SN, Col. Las Campanas 76010, Querétaro, Mexico; chagcarlos@uaq.mx

* Correspondence: alcantaralopez@comunidad.unam.mx

Abstract: The infiltration phenomena has been studied by several authors for decades, and numerical and approximate results have been shown through the asymptotic solution in short and long times. In particular, it is worth highlighting the works of Philip and Parlange, who used time and volumetric content as independent variables and space as a dependent variable, and found the solution as a power series in $t^{1/2}$ that is valid for short times. However, several studies show that these models are not applicable to anomalous flows, in which case the application of fractional calculus is needed. In this work, a fractional time derivative of a Caputo type is applied to model anomalous infiltration phenomena. Fractional horizontal infiltration phenomena are studied, and the fractional Boltzmann transform is defined. To study fractional vertical infiltration phenomena, the asymptotic behavior is described for short and long times considering an arbitrary diffusivity and hydraulic conductivity. Finally, considering a constant flux-dependent relation and a relation between diffusivity and hydraulic conductivity, a fractional cumulative infiltration model applicable to various types of soil is built; its solution is expressed as a power series in $t^{\nu/2}$, where $\nu \in (0, 2)$ is the order of the fractional derivative. The results show the effect of superdiffusive and subdiffusive flows in different types of soil.



Citation: Fuentes, C.; Alcántara-López, F.; Quevedo, A.; Chávez, C. Fractional Vertical Infiltration. *Mathematics* **2021**, *9*, 383. <https://doi.org/10.3390/math9040383>

Academic Editor: Duarte Valério
Received: 28 January 2021
Accepted: 10 February 2021
Published: 14 February 2021

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Keywords: asymptotic solution; parlange equations; Darcy's law; fractional Caputo derivative

1. Introduction

More than a century ago, Green and Ampt [1] laid the bases for describing the infiltration process; to this day, there are still open problems in the area, where existing models in the literature cannot explain laboratory results [2]. As one of the pioneers in the area, Philip [3] describes the infiltration phenomenon as a Fokker–Planck type equation. In a semi-infinite domain, homogeneous, its form is

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\theta) \nabla \theta) - \frac{dK}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (1)$$

where θ is the volumetric water content, $D(\theta)$ is the hydraulic diffusivity, $K(\theta)$ is the hydraulic conductivity, θ_0 is the initial volumetric water content, θ_s is the volumetric water content at saturation, t is the time, and z is the spatial variable taken positive downward.

In particular, when considering horizontal infiltration:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (2)$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x > 0, \quad \theta &= \theta_0, \\ t \geq 0, \quad x = 0, \quad \theta &= \theta_s, \end{aligned} \quad (3)$$

Article

Fractional Growth Model Applied to COVID-19 Data

Fernando Alcántara-López ¹, Carlos Fuentes ^{2,*}, Carlos Chávez ^{3,*}, Fernando Brambila-Paz ¹
and Antonio Quevedo ²

- ¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, National Autonomous University of Mexico, Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán 04510, Ciudad de Mexico, Mexico; alcantaralopez@comunidad.unam.mx (F.A.-L.); fernandobrambila@gmail.com (F.B.-P.)
- ² Mexican Institute of Water Technology, Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532, Jiutepec 62550, Mexico; jose_quevedo@tlaloc.imta.mx
- ³ Water Research Center, Department of Irrigation and Drainage Engineering, Autonomous University of Querétaro, Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, Querétaro 76010, Mexico
- * Correspondence: cbfuentesr@gmail.com (C.F.); chagcarlos@uaq.mx (C.C.)

Abstract: Growth models have been widely used to describe behavior in different areas of knowledge; among them the Logistics and Gompertz models, classified as models with a fixed inflection point, have been widely studied and applied. In the present work, a model is proposed that contains these growth models as extreme cases; this model is generalized by including the Caputo-type fractional derivative of order $0 < \beta \leq 1$, resulting in a Fractional Growth Model which could be classified as a growth model with non-fixed inflection point. Moreover, the proposed model is generalized to include multiple sigmoidal behaviors and thereby multiple inflection points. The models developed are applied to describe cumulative confirmed cases of COVID-19 in Mexico, US and Russia, obtaining an excellent adjustment corroborated by a coefficient of determination $R^2 > 0.999$.

Keywords: fractional Caputo derivative; sigmoidal function; Gompertz model; logistic model



Citation: Alcántara-López, F.; Fuentes, C.; Chávez, C.; Brambila-Paz, F.; Quevedo, A. Fractional Growth Model Applied to COVID-19 Data. *Mathematics* **2021**, *9*, 1915. <https://doi.org/10.3390/math9161915>

Academic Editors: Tian-Zhou Xu, Yanshan Zhang, Chun Wang and Bingzhao Li

Received: 13 June 2021
Accepted: 6 August 2021
Published: 11 August 2021

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Understanding population growth phenomena has been a task that over the time has provided various challenges to mathematicians, physicists, biologists, medics, economists and many others. From economic areas, where applying growth models to poultry allows making imperative predictions for the profitability of operations [1], to biological and medical areas, where growth models have been applied to the growth of animals, plants, yeast cells, tumors and recently to adjust and model COVID-19 pandemic data [2–5].

Several authors classify population growth models as bounded and unbounded, where bounded growth models are characterized by having a sigmoidal behavior with a fixed inflection point or a sigmoidal behavior with a non-fixed inflection point [1,2].

Among the various existing growth models, Logistics (Verhulst) and Gompertz models have been widely studied and solved by a large number of methods; some of which are: successive approximation method, singular perturbation method, Adomian decomposition method, shifted Legendre polynomials, homotopy method, see [5–15] and the references therein; where even fractal dimensions are considered for the case of the Logistics equation.

In order to model phenomena with greater precision, fractional calculus has been implemented in growth models; particularly, in the models previously described. For the Logistic model, it has been implemented in the discrete model showing chaotic fractional behavior and fractional bifurcation diagrams [12]; in the continuous model, the fractional predictor-corrector scheme is implemented [13]; reaching analytical solutions considering power law coefficients [14]; and even conformable derivatives [15], all of these considering the fractional derivative of the Caputo type.

For the Gompertz model, the Caputo-type fractional derivative is implemented in the Gompertz linearized differential equation and solved by means of the Laplace transform [5];

Article

Fractional Growth Model with Delay for Recurrent Outbreaks Applied to COVID-19 Data

Fernando Alcántara-López ¹, Carlos Fuentes ^{2,*}, Carlos Chávez ^{3,*}, Jesús López-Estrada ¹
and Fernando Brambila-Paz ¹

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, National Autonomous University of Mexico, Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán, Ciudad de Mexico 04510, Mexico; alcantaralopez@comunidad.unam.mx (F.A.-L.); jelpze@ciencias.unam.mx (J.L.-E.); fernandobrambila@gmail.com (F.B.-P.)

² Mexican Institute of Water Technology, Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532, Jiutepec 62550, Mexico

³ Water Research Center, Department of Irrigation and Drainage Engineering, Autonomous University of Querétaro, Cerro de las Campanas SN, Col. Las Campanas, Querétaro 76010, Mexico

* Correspondence: cfuentes@tlaloc.imta.mx (C.F.); chagcarlos@uaq.mx (C.C.)

Abstract: There are a great many epidemiological models that have been implemented to describe COVID-19 data; however, few attempted to reproduce the entire phenomenon due to the complexity of modeling recurrent outbreaks. In this work a fractional growth model with delay is developed that implements the Caputo fractional derivative with $0 < \beta \leq 1$. Furthermore, in order to preserve the nature of the phenomenon and ensure continuity in the derivatives of the function, a method is proposed to construct an initial condition function to implement in the model with delay. This model is analyzed and generalized to model recurrent outbreaks. The model is applied to fit data of cumulative confirmed cases from Mexico, the United States, and Russia, obtaining excellent fitting corroborated by the coefficient of determination, where $R^2 > 0.9995$ in all cases. Lastly, as a result of the implementation of the delay effect, the global phenomenon was decomposed into its local parts, allowing for directly comparing each outbreak and its different characteristics.

Keywords: multiple outbreaks; time delay; Caputo fractional derivative; Gompertz model; logistic model

MSC: 26A33; 90C32; 92-10



Citation: Alcántara-López, F.; Fuentes, C.; Chávez, C.; López-Estrada, J.; Brambila-Paz, F.

Fractional Growth Model with Delay for Recurrent Outbreaks Applied to COVID-19 Data. *Mathematics* **2022**, *10*, 825. <https://doi.org/10.3390/math10050825>

Academic Editors: James P. Braselton and Martha L. Abell

Received: 24 January 2022

Accepted: 3 March 2022

Published: 4 March 2022

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Models for growth phenomena characterize dynamics in which the elements they model grow; these elements can be animals, plants, cells, tumors, goods, services, and more recently, individuals infected with COVID-19. These models belong to areas of science such as biology, medicine, economics, physics, and mathematics. These phenomena continue to be a challenge that allows for the creation of increasingly complex models [1–5].

One of the best growth models is the Malthus model [6], where the population growth rate is proportional to the same population, and this model has unbounded growth. Considering the case of growth models with bounded growth, some of the best known models are the Verhulst or logistic model [7] and the Gompertz model [8]; for more models, see [1,2]. These models have sigmoidal behavior and thereby an inflection point, which can be fixed, as in the logistic and Gompertz models, or nonfixed, which is determined from additional parameters of the model.

Previous models were solved by several methods [4,5,9–17] and the references therein; these have also been subject to variations such as the incorporation of delay in order to more accurately reflect reality in the phenomena [18,19].

Fractional calculus, although it is as old as the calculus itself, has recently been applied in all areas of knowledge; in particular, for growth models, the order of the fractional derivative is an indicator of how the phenomenon is behaving in relation to classical

Article

Spatial Fractional Darcy's Law on the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in Single-Porosity Naturally Fractured Reservoirs

Fernando Alcántara-López ¹, Carlos Fuentes ^{2,*}, Rodolfo G. Camacho-Velázquez ³, Fernando Brambila-Paz ¹ and Carlos Chávez ^{4,*}

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, National Autonomous University of Mexico, Circuito Exterior S/N, Mexico City 04510, Mexico; alcantaralopez@comunidad.unam.mx (F.A.-L.); fernandobrambila@gmail.com (F.B.-P.)

² Mexican Institute of Water Technology, Paseo Cuauhnáhuac Num. 8532, Jiutepec 62550, Mexico

³ Engineering Faculty, National Autonomous University of Mexico, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, Mexico City 04510, Mexico; camachovrodolfo@gmail.com

⁴ Water Research Center, Department of Irrigation and Drainage Engineering, Autonomous University of Querétaro, Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, Querétaro 76010, Mexico

* Correspondence: cbfuentesr@gmail.com (C.F.); chagcarlos@uaq.mx (C.C.)

Abstract: Due to the complexity imposed by all the attributes of the fracture network of many naturally fractured reservoirs, it has been observed that fluid flow does not necessarily represent a normal diffusion, i.e., Darcy's law. Thus, to capture the sub-diffusion process, various tools have been implemented, from fractal geometry to characterize the structure of the porous medium to fractional calculus to include the memory effect in the fluid flow. Considering infinite naturally fractured reservoirs (Type I system of Nelson), a spatial fractional Darcy's law is proposed, where the spatial derivative is replaced by the Weyl fractional derivative, and the resulting flow model also considers Caputo's fractional derivative in time. The proposed model maintains its dimensional balance and is solved numerically. The results of analyzing the effect of the spatial fractional Darcy's law on the pressure drop and its Bourdet derivative are shown, proving that two definitions of fractional derivatives are compatible. Finally, the results of the proposed model are compared with models that consider fractal geometry showing a good agreement. It is shown that modified Darcy's law, which considers the dependency of the fluid flow path, includes the intrinsic geometry of the porous medium, thus recovering the heterogeneity at the phenomenological level.

Keywords: Weyl fractional derivative; Caputo fractional derivative; fractal porous media; naturally fractured reservoir



Citation: Alcántara-López, F.; Fuentes, C.; Camacho-Velázquez, R.G.; Brambila-Paz, F.; Chávez, C. Spatial Fractional Darcy's Law on the Diffusion Equation with a Fractional Time Derivative in Single-Porosity Naturally Fractured Reservoirs. *Energies* **2022**, *15*, 4837. <https://doi.org/10.3390/en15134837>

Academic Editors: Yuming Liu and Bo Zhang

Received: 12 June 2022

Accepted: 28 June 2022

Published: 1 July 2022

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

The modeling of physical phenomena is always a complex task in which hypotheses and idealizations are used in order to implement already studied laws or similar models. In particular, modeling the transient pressure behavior in naturally fractured reservoirs is a task that has been studied and worked on by various researchers over decades, where the heterogeneity of the porous medium and anomalous fluid flow has been a challenge for which more complex models have been generated and implemented, obtaining results that constantly improve the understanding of the phenomenon.

Considering the complexity of the porous medium, Chang and Yortsos [1] are the pioneers that considered the porous medium as a fractal system, allowing them to describe reservoirs with spatial disorder and, therefore, a complex fluid flow path.

In recent years, fractional calculus has become a useful tool that, applied to diffusion-type problems, explains the behavior of anomalous flow (where the movement of the fluid does not have a Brownian-type behavior) by demonstrating that the fluid has memory [2].

Bibliografía

- [1] F. Alcántara-López, C. Fuentes, R. G. Camacho-Velázquez, F. Brambila-Paz, C. Chávez, Spatial fractional darcy's law on the diffusion equation with a fractional time derivative in single-porosity naturally fractured reservoirs, *Energies* 15 (13) (2022) 4837. doi:10.3390/en15134837.
URL <http://dx.doi.org/10.3390/en15134837>
- [2] F. Alcántara-López, C. Fuentes, C. Chávez, J. López-Estrada, F. Brambila-Paz, Fractional growth model with delay for recurrent outbreaks applied to covid-19 data, *Mathematics* 10 (5) (2022) 825. doi:10.3390/math10050825.
URL <http://dx.doi.org/10.3390/math10050825>
- [3] F. Alcántara-López, C. Fuentes, C. Chávez, F. Brambila-Paz, A. Quevedo, Fractional growth model applied to covid-19 data, *Mathematics* 9 (16) (2021) 1915. doi:10.3390/math9161915.
URL <http://dx.doi.org/10.3390/math9161915>
- [4] C. Fuentes, F. Alcántara-López, A. Quevedo, C. Chávez, Fractional vertical infiltration, *Mathematics* 9 (4) (2021) 383. doi:10.3390/math9040383.
URL <https://doi.org/10.3390/math9040383>
- [5] F. Alcántara-López, C. Fuentes, F. Brambila-Paz, J. López-Estrada, Quasi-analytical model of the transient behavior pressure in an oil reservoir made up of three porous media considering the fractional time derivative, *Mathematical and Computational Applications* 25 (4) (2020) 74. doi:10.3390/mca25040074.
URL <https://doi.org/10.3390/mca25040074>

- [6] 4th international webinar on physical health, nursing care and covid-19 management (2021).
URL <https://physicaltherapy.scientificmeditech.com/>
- [7] F. Brambila-Paz, C. Fuentes, C. Chávez, A. Quevedo, F. Alcántara-López, Infiltración del agua hacia el suelo desde un tubo enterrado con pared porosa (2021).
URL <https://www.riego.mx/congresos/comeii2021/files/ponencias/extenso/COMEII-21024.pdf>
- [8] Viii encuentro cuba-méxico métodos numéricos y optimización (2019).
URL <http://tikhonov.fciencias.unam.mx/emno2019/Solicitudes.html>
- [9] Editor's choice articles (2022).
URL https://www.mdpi.com/journal/mathematics/editors_choice
- [10] J. Warren, P. Root, The behavior of naturally fractured reservoirs, *Society of Petroleum Engineers Journal* 3 (03) (1963) 245–255. doi:10.2118/426-pa.
- [11] A. Adams, H. Ramey Jr, R. Burgess, et al., Gas well testing in a fractured carbonate reservoir, *Journal of Petroleum Technology* 20 (10) (1968) 1–187. doi:<https://doi.org/10.2118/1839-PA>.
- [12] H. Kazemi, Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution, *Society of Petroleum Engineers Journal* 9 (04) (1969) 451–462. doi:10.2118/2156-a.
- [13] A. F. Moench, Double-porosity models for a fissured groundwater reservoir with fracture skin, *Water Resources Research* 20 (7) (1984) 831–846. doi:10.1029/wr020i007p00831.
- [14] A. C. Gringarten, D. P. Bourdet, P. A. Landel, V. J. Kniazeff, A comparison between different skin and wellbore storage type-curves for early-time transient analysis, in: *All Days*, SPE, 1979. doi:10.2118/8205-ms.
URL <https://doi.org/10.2118%2F8205-ms>

- [15] H. Ramey Jr, et al., Short-time well test data interpretation in the presence of skin effect and wellbore storage, *Journal of Petroleum Technology* 22 (01) (1970) 97–104.
- [16] D. Abdassah, I. Ershaghi, Triple-porosity systems for representing naturally fractured reservoirs, *SPE Formation Evaluation* 1 (02) (1986) 113–127. doi:10.2118/13409-pa.
- [17] D. Bourdet, J. Ayoub, Y. Pirard, Use of pressure derivative in well test interpretation, *SPE Formation Evaluation* 4 (02) (1989) 293–302. doi:10.2118/12777-pa.
- [18] C. Ehlig-Economides, et al., Use of the pressure derivative for diagnosing pressure-transient behavior, *Journal of Petroleum Technology* 40 (10) (1988) 1–280.
- [19] R. Camacho-Velázquez, M. Vásquez-Cruz, R. Castrejón-Aivar, V. Arana-Ortiz, Pressure-transient and decline-curve behavior in naturally fractured vuggy carbonate reservoirs, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 8 (02) (2005) 95–112. doi:10.2118/77689-pa.
URL <https://doi.org/10.2118%2F77689-pa>
- [20] G. Fuentes-Cruz, R. Camacho-Velazquez, M. Vasquez-Cruz, Pressure transient and decline curve behaviors for partially penetrating wells completed in naturally fractured-vuggy reservoirs, in: *All Days, SPE, 2004*. doi:10.2118/92116-ms.
URL <https://doi.org/10.2118%2F92116-ms>
- [21] Y.-S. Wu, C. Ehlig-Economides, G. Qin, Z. Kang, W. Zhang, B. Ajayi, Q. Tao, A triple-continuum pressure-transient model for a naturally fractured vuggy reservoir (nov 2007). doi:10.2118/110044-ms.
URL <https://doi.org/10.2118%2F110044-ms>
- [22] H. A. Al-Ahmadi, R. A. Wattenbarger, Triple-porosity models: One further step towards capturing fractured reservoirs heterogeneity, in: *All Days, SPE, 2011*. doi:10.2118/149054-ms.
URL <https://doi.org/10.2118%2F149054-ms>

- [23] R. Nie, Y. Meng, Z. Yang, J. Guo, Y. Jia, New flow model for the triple media carbonate reservoir, *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 25 (2) (2011) 95–104. doi:<https://doi.org/10.1080/10618562.2011.560573>.
- [24] R. Camacho-V., S. Gómez, M. Vásquez-C., N. Fuenleal-M., T. Castillo-R., G. Ramos, C. M. M., A. Mesejo, G. Fuentes-C., Well testing characterization of heavy-oil naturally fractured vuggy reservoirs, in: Day 3 Fri, September 26, 2014, SPE, 2014. doi:[10.2118/171078-ms](https://doi.org/10.2118/171078-ms).
URL <https://doi.org/10.2118%2F171078-ms>
- [25] S. Gómez, G. Ramos, A. Mesejo, R. Camacho, M. Vásquez, N. del Castillo, Well test analysis of naturally fractured vuggy reservoirs with an analytical triple porosity–double permeability model and a global optimization method, *Oil & Gas Science and Technology–Revue d’IFP Energies nouvelles* 69 (4) (2014) 653–671. doi:<https://doi.org/10.2516/ogst/2013182>.
- [26] J. Chang, Y. C. Yortsos, Pressure-transient analysis of fractal reservoirs, *SPE Formation Evaluation* 5 (01) (1990) 31–38. doi:[10.2118/18170-pa](https://doi.org/10.2118/18170-pa).
URL <https://doi.org/10.2118%2F18170-pa>
- [27] R. Metzler, W. G. Glöckle, T. F. Nonnenmacher, Fractional model equation for anomalous diffusion, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 211 (1) (1994) 13–24. doi:[10.1016/0378-4371\(94\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(94)90064-7).
URL <https://doi.org/10.1016%2F0378-4371%2894%2990064-7>
- [28] K. Razminia, A. Razminia, D. F. Torres, Pressure responses of a vertically hydraulic fractured well in a reservoir with fractal structure, *Applied Mathematics and Computation* 257 (2015) 374–380. doi:[10.1016/j.amc.2014.12.124](https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.124).
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.amc.2014.12.124>
- [29] R. Raghavan, Fractional derivatives: Application to transient flow, *Journal of Petroleum Science and Engineering* 80 (1) (2011) 7–13. doi:[10.1016/j.petrol.2011.10.003](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2011.10.003).

- [30] R. Camacho-Velázquez, G. Fuentes-Cruz, M. Vásquez-Cruz, Decline-curve analysis of fractured reservoirs with fractal geometry, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 11 (03) (2008) 606–619. doi:10.2118/104009-pa.
URL <https://doi.org/10.2118%2F104009-pa>
- [31] J. Tian, D. ke Tong, The flow analysis of fluids in fractal reservoir with the fractional derivative, *Journal of Hydrodynamics* 18 (3) (2006) 287–293. doi:10.1016/s1001-6058(06)60005-x.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fs1001-6058%2806%2960005-x>
- [32] M. Moshrefi-Torbati, J. Hammond, Physical and geometrical interpretation of fractional operators, *Journal of the Franklin Institute* 335 (6) (1998) 1077–1086. doi:10.1016/s0016-0032(97)00048-3.
- [33] M. Caputo, Diffusion of fluids in porous media with memory, *Geothermics* 28 (1) (1999) 113–130. doi:10.1016/s0375-6505(98)00047-9.
- [34] R. Raghavan, Fractional diffusion: Performance of fractured wells, *Journal of Petroleum Science and Engineering* 92-93 (2012) 167–173. doi:10.1016/j.petrol.2012.06.003.
- [35] A. Chang, H. Sun, Y. Zhang, C. Zheng, F. Min, Spatial fractional darcy’s law to quantify fluid flow in natural reservoirs, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 519 (2019) 119–126. doi:10.1016/j.physa.2018.11.040.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.physa.2018.11.040>
- [36] M. F. El-Amin, Derivation of fractional-derivative models of multiphase fluid flows in porous media, *Journal of King Saud University - Science* 33 (2) (2021) 101346. doi:10.1016/j.jksus.2021.101346.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.jksus.2021.101346>
- [37] A. Chang, H. Sun, Time-space fractional derivative models for CO₂ transport in heterogeneous media, *Fractional Calculus and Applied Analysis* 21 (1) (2018) 151–

173. doi:10.1515/fca-2018-0010.
URL <https://doi.org/10.1515%2Ffca-2018-0010>
- [38] M. Caputo, W. Plastino, Diffusion with space memory, in: *Geodesy-The Challenge of the 3rd Millennium*, Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 429–435. doi:10.1007/978-3-662-05296-9_45.
URL https://doi.org/10.1007%2F978-3-662-05296-9_45
- [39] A. D. Obembe, H. Y. Al-Yousef, M. E. Hossain, S. A. Abu-Khamsin, Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review, *Journal of Petroleum Science and Engineering* 157 (2017) 312–327. doi:10.1016/j.petrol.2017.07.035.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.petrol.2017.07.035>
- [40] A. Cloot, J. Botha, A generalised groundwater flow equation using the concept of non-integer order derivatives, *Water SA* 32 (1) (dec 2007). doi:10.4314/wsa.v32i1.5225.
URL <https://doi.org/10.4314%2Fwsa.v32i1.5225>
- [41] K. S. Miller, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, 1993.
- [42] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, *Fractional calculus: models and numerical methods*, Vol. 3, World Scientific, 2012.
- [43] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations - An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*, Elsevier, 1999. doi:10.1016/s0076-5392(99)x8001-5.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fs0076-5392%2899%29x8001-5>
- [44] M. Caputo, Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—II, *Geophysical Journal International* 13 (5) (1967) 529–539. doi:10.1111/j.1365-246x.1967.tb02303.x.
URL <https://doi.org/10.1111%2Fj.1365-246x.1967.tb02303.x>

- [45] G. S. Teodoro, J. T. Machado, E. C. de Oliveira, A review of definitions of fractional derivatives and other operators, *Journal of Computational Physics* 388 (2019) 195–208. doi:10.1016/j.jcp.2019.03.008.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.jcp.2019.03.008>
- [46] E. C. de Oliveira, J. A. T. Machado, A review of definitions for fractional derivatives and integral, *Mathematical Problems in Engineering* 2014 (2014) 1–6. doi:10.1155/2014/238459.
URL <https://doi.org/10.1155%2F2014%2F238459>
- [47] C. Li, A. Chen, J. Ye, Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation, *Journal of Computational Physics* 230 (9) (2011) 3352–3368. doi:10.1016/j.jcp.2011.01.030.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.jcp.2011.01.030>
- [48] C. Li, A. Chen, Numerical methods for fractional partial differential equations, *International Journal of Computer Mathematics* 95 (6-7) (2017) 1048–1099. doi:10.1080/00207160.2017.1343941.
URL <https://doi.org/10.1080%2F00207160.2017.1343941>
- [49] C. Li, F. Zeng, Finite difference methods for fractional differential equations, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22 (04) (2012) 1230014. doi:10.1142/s0218127412300145.
URL <https://doi.org/10.1142%2Fs0218127412300145>
- [50] R. Fazio, A. Jannelli, BVPs on infinite intervals: A test problem, a nonstandard finite difference scheme and a posteriori error estimator, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 40 (18) (2017) 6285–6294. doi:10.1002/ma.4456.
- [51] R. Fazio, A. Jannelli, Finite difference schemes on quasi-uniform grids for BVPs on infinite intervals, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 269 (2014) 14–23. doi:10.1016/j.cam.2014.02.036.

- [52] K. Diethelm, N. J. Ford, Analysis of fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 265 (2) (2002) 229–248. doi:10.1006/jmaa.2000.7194.
URL <https://doi.org/10.1006%2Fjmaa.2000.7194>
- [53] R. Garrappa, Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial, *Mathematics* 6 (2) (2018) 16. doi:10.3390/math6020016.
- [54] C. Lubich, Discretized fractional calculus, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 17 (3) (1986) 704–719. doi:10.1137/0517050.
URL <https://doi.org/10.1137%2F0517050>
- [55] L. Galeone, R. Garrappa, Explicit methods for fractional differential equations and their stability properties, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 228 (2) (2009) 548–560. doi:10.1016/j.cam.2008.03.025.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.cam.2008.03.025>
- [56] R. Lin, F. Liu, Fractional high order methods for the nonlinear fractional ordinary differential equation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 66 (4) (2007) 856–869. doi:10.1016/j.na.2005.12.027.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.na.2005.12.027>
- [57] L. Galeone, R. Garrappa, On multistep methods for differential equations of fractional order, *Mediterranean Journal of Mathematics* 3 (3-4) (2006) 565–580. doi:10.1007/s00009-006-0097-3.
URL <https://doi.org/10.1007%2Fs00009-006-0097-3>
- [58] D. A. Murio, Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations, *Computers & Mathematics with Applications* 56 (4) (2008) 1138–1145. doi:10.1016/j.camwa.2008.02.015.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.camwa.2008.02.015>
- [59] J. Q. Murillo, S. B. Yuste, On three explicit difference schemes for fractional diffusion and diffusion-wave equations, *Physica Scripta* T136 (2009) 014025. doi:10.1088/

0031-8949/2009/t136/014025.

URL <https://doi.org/10.1088%2F0031-8949%2F2009%2Ft136%2F014025>

- [60] S. B. Yuste, L. Acedo, An explicit finite difference method and a new von neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42 (5) (2005) 1862–1874. doi:10.1137/030602666.
- [61] C.-M. Chen, F. Liu, I. Turner, V. Anh, A fourier method for the fractional diffusion equation describing sub-diffusion, *Journal of Computational Physics* 227 (2) (2007) 886–897. doi:10.1016/j.jcp.2007.05.012.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.jcp.2007.05.012>
- [62] V. T., J. C. Strikwerda, Finite difference schemes and partial differential equations., *Mathematics of Computation* 55 (192) (1990) 869. doi:10.2307/2008454.
URL <https://doi.org/10.2307%2F2008454>
- [63] H. Stehfest, Algorithm 368: Numerical inversion of laplace transforms [d5], *Communications of the ACM* 13 (1) (1970) 47–49. doi:10.1145/361953.361969.
URL <https://doi.org/10.1145%2F361953.361969>
- [64] A. U. Chaudhry, Well testing methods for naturally fractured reservoirs, in: *Oil Well Testing Handbook*, Elsevier, 2004, pp. 254–286. doi:10.1016/b978-075067706-6/50098-9.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fb978-075067706-6%2F50098-9>
- [65] L. C. Andrews, *Special functions of mathematics for engineers*, Vol. 49, Spie Press, 1998.
- [66] J.-P. Tignol, *Galois' theory of algebraic equations*, World Scientific Publishing Company, 2015.
- [67] R. Nelson, *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*, Elsevier, 2001. doi:10.1016/b978-0-88415-317-7.x5000-3.
URL <https://doi.org/10.1016%2Fb978-0-88415-317-7.x5000-3>

- [68] F. Flamenco-López, R. Camacho-Velázquez, Determination of fractal parameters of fracture networks using pressure-transient data, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 6 (01) (2003) 39–47. doi:10.2118/82607-pa.

URL <https://doi.org/10.2118/82607-pa>