



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS ESPACIOS DE SOBOLEV FRACCIONARIOS Y EL  
LAPLACIANO FRACCIONARIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ADRIAN MARQUINA ICABALCETA

TUTOR

DR. ALBERTO SALDAÑA DE FUENTES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2023





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Dedicatoria

Con inmenso amor y gratitud, dedico este trabajo a mis queridos padres, quienes han sido mi apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida y me han impulsado a perseverar en los momentos más complicados. A mi amada hermana, también quiero dedicarle este trabajo, ya que ha sido mi compañera inseparable en todos los momentos difíciles, su presencia ha sido un pilar importante en mi camino. Sin ustedes no habría logrado llegar a hasta este punto.



# Agradecimientos

Al Dr. Juan Carlos Fernández Morelos, a la Dra. Judith Campos Cordero, al Dr. Luis Fernando López Ríos y al Dr. Víctor Hernández Santamaría, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a cada uno de ustedes ya que sus comentarios y sugerencias enriquecieron mi trabajo sustancialmente. Al igual agradezco sinceramente su participación como sinodales de mi tesis, como el valioso tiempo que le dedicaron a leer y corregir este trabajo.

Por otro lado, quiero agradecerle al Dr. Alberto Saldaña De Fuentes por haber aceptado en ser mi tutor y por haberme brindado su apoyo durante mi proceso de tesis. Ha sido un honor y un privilegio contar con su experiencia a lo largo de este arduo camino, al igual quiero expresar lo privilegiado que me siento por haber podido trabajar con usted y espero que en el futuro esto pueda repetirse.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. La importancia del laplaciano . . . . .	10
1.2. El laplaciano fraccionario . . . . .	11
1.3. Resultados principales . . . . .	13
<b>2. Resultados preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Espacios y funciones . . . . .	15
2.2. Teoremas importantes . . . . .	19
<b>3. El espacio de Sobolev fraccionario</b>	<b>25</b>
3.1. Resultados para espacios de Sobolev fraccionarios . . . . .	25
3.2. El espacio $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ . . . . .	45
3.3. Desigualdad de Poincaré y Teorema de Fréchet-Riesz . . . . .	46
<b>4. El laplaciano fraccionario</b>	<b>53</b>
4.1. Definición y resultados del laplaciano fraccionario . . . . .	53
4.2. Teorema de existencia y unicidad . . . . .	66





# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis está dedicada al estudio de soluciones de ecuaciones que involucran al laplaciano fraccionario de orden  $2s$ , con  $s \in (0, 1)$ , denotado por  $(-\Delta)^s$ . La referencia principal en la que nos basaremos es el artículo “*Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces*” [13]. En este trabajo demostraremos a detalle algunos de los resultados más importantes de [13], buscando presentar cada prueba lo más auto-contenida posible. Además, se darán explicaciones detalladas para que cualquier persona con conocimientos básicos de análisis sea capaz de entender dichas demostraciones sin mucho esfuerzo.

El laplaciano fraccionario  $(-\Delta)^s$  es un operador pseudo-diferencial y no local. En efecto, éste es pseudo-diferencial ya que podremos escribir al laplaciano fraccionario en términos de la transformada de Fourier y es no local ya que el valor de éste no solamente depende del valor de  $u$  en un punto en el espacio, sino que el valor del laplaciano fraccionario depende de todos los valores de  $u$  en todo punto del espacio en el que se está trabajando.

Para demostrar la existencia y unicidad de soluciones de estas ecuaciones, utilizaremos teoremas de representación en espacios de Hilbert. El propósito principal de esta tesis es demostrar las propiedades básicas de los espacios de Sobolev fraccionarios, analizar algunas propiedades del laplaciano fraccionario que explican por qué puede considerarse como un operador fraccionario a nivel intuitivo y la existencia y unicidad de soluciones a problemas lineales con condiciones de Dirichlet. Para ser más precisos, dada una función  $f$  adecuada, buscamos una solución lo suficientemente regular (en específico  $u \in C^{2s+\alpha}(\Omega) \cap C^s(\mathbb{R}^n)$ , aunque esto lo veremos en su debido momento) de la ecuación

$$(-\Delta)^s u(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \quad (1.1)$$

Donde el laplaciano fraccionario  $(-\Delta)^s$  será definido en el Capítulo 4, específicamente en la Definición 4.1.

Para demostrar esta ecuación, como ya se mencionó anteriormente, usaremos un acercamiento de espacios de Hilbert y se evita usar cualquier resultado de la teoría de interpolación.

Comenzamos por motivar la importancia del laplaciano fraccionario  $(-\Delta)^s$  y entender su origen. El laplaciano fraccionario es un operador que generaliza al laplaciano usual y sirve para modelar difusiones anómalas, por ejemplo, movimientos mediante saltos. Para apreciar la universalidad de los procesos difusivos, comenzaremos por discutir la importancia del laplaciano en la ciencia.

## 1.1. La importancia del laplaciano

A través de la historia reciente, el mundo de las matemáticas y el mundo de la física han estado íntimamente entrelazados, a tal punto que en muchas ocasiones teorías matemáticas completas han surgido por la necesidad de herramientas para poder explicar sucesos físicos. Un gran ejemplo de esta simbiosis es el operador de Laplace o mejor conocido como el laplaciano, pero ¿qué es el laplaciano?

En pocas palabras el laplaciano se define como la divergencia del gradiente de una función escalar; éste, por definición, es un operador diferencial. En principio esta definición no es muy concisa para entender qué representa el laplaciano. Entonces, para dejar más clara esta idea, primero veamos la expresión matemática del laplaciano, después las definiciones de gradiente y divergencia por separado y posteriormente tratemos de darle sentido a la definición del laplaciano.

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar, entonces su laplaciano se define como

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \quad (1.2)$$

Por un lado tenemos que el gradiente de una función escalar  $f$  es un campo vectorial que apunta en la dirección donde la razón de cambio de una función es mayor, i.e. si  $f$  describe una densidad, entonces  $\nabla f$  es un vector que apunta hacia la región de mayor densidad. Por otro lado la divergencia de un campo vectorial es una función escalar que mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante en un dominio. Notemos que, por el teorema de la divergencia, para cualquier dominio con frontera suave  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\int_{\partial V} \nabla f \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial V} \partial_\nu f \, d\sigma = \int_V \Delta f(x) \, dx,$$

donde  $\nu$  es el vector normal unitario exterior sobre  $\partial V$ . Esto nos indica que una función es armónica ( $\Delta u = 0$ ) si y sólo si el flujo asociado a la densidad  $u$  está en *equilibrio* (pues el flujo entrante y saliente alrededor de cualquier frontera  $\partial V$  es cero en promedio). De igual modo, si el laplaciano es positivo ( $\Delta u > 0$ ), entonces el flujo neto es en promedio positivo.

Mencionado lo anterior, la pregunta que surge es ¿para qué sirve el laplaciano? Este operador ha sido utilizado a lo largo de la historia para describir fenómenos como difusión (de calor o en dinámica de fluidos), potenciales eléctricos y muchas propiedades que surgen en la mecánica cuántica. Mas adelante en esta sección veremos ejemplos concretos de esto.

Una vez que ya está clara la definición del laplaciano y tenemos una idea de su utilidad, debemos hablar de su origen, ya que éste surge a partir de un problema físico y posteriormente éste se extiende al campo de las matemáticas donde también se estudia de manera independiente.

Este operador fue usado por primera vez por el matemático Pierre-Simón Laplace en su trabajo *Traité de mécanique céleste* [30] en donde usa el laplaciano para estudiar al potencial gravitacional que a su vez describe cómo las fuerzas gravitatorias varían dependiendo de la posición de un objeto en un sistema de varias masas. Al usar al laplaciano de este modo, Laplace pudo simplificar al potencial gravitacional de tal modo que pudo describir el movimiento de los planetas de manera precisa y determinar la distribución de masa y estabilidad del sistema solar.

A partir del trabajo de Laplace, el laplaciano se comenzó a usar en muchos otros campos de la física. Fourier, por ejemplo, lo utilizó para su teoría de conducción de calor, lo cual consolidó la utilidad de este operador de manera más robusta [23].

Posteriormente este operador se comenzó a usar para modelar diferentes fenómenos que hasta ese entonces permanecían sin explicación. Esto ha llevado a que el laplaciano sea una herramienta básica de muchos campos de las matemáticas, la física, la química, la biología, la ingeniería y otras disciplinas de la ciencia, por lo tanto sus aplicaciones han sido muy amplias.

Una de estas aplicaciones está en el campo de la termodinámica donde el laplaciano se utiliza para calcular de manera correcta la conducción transitoria de calor en cuerpos de composición homogénea y no homogénea [38]. Al igual, el laplaciano es útil para el estudio de campos magnéticos. Un buen ejemplo de esta aplicación está en la referencia [17], donde se usa al laplaciano para saber de manera precisa el efecto que tiene un campo magnético en la transferencia de calor cuando tenemos nanotubos de carbono suspendidos en nanofluidos. En otros campos de la ciencia, el laplaciano también ha sido útil ya que éste es utilizado en el procesamiento de imágenes para la detección de ruido en ellas [39] y detección de zonas desenfocadas/borrosas [7].

Por otro lado una aplicación interesante del laplaciano es la que surge en la mecánica cuántica, pues una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica cuántica es la ecuación de onda de Schrödinger, la cual es una ecuación diferencial parcial lineal.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V \Psi(\mathbf{r}, t),$$

(ver, [22, Chapter 3, (3.50)])

Notemos que podríamos decir que esta ecuación es una versión cuántica de la segunda Ley de Newton en el sentido de que la ecuación de Schrödinger, a partir de ciertas condiciones iniciales, nos dice cómo la ecuación de onda de un sistema cuántico cambia a través del tiempo. El laplaciano aparece en esta ecuación como un operador espacial para ecuaciones de onda en dos dimensiones o más y ayuda a modelar el comportamiento de dicha ecuación a través del tiempo.

Para aquellos que estén interesados en adentrarse más en el tema se les recomienda consultar [22], que explica de manera precisa la misma ecuación de Schrödinger, sus interpretaciones y soluciones; también para aquellos que estén interesados en saber cómo se derivó dicha fórmula, una buena referencia es [40]. Notemos que el laplaciano no sólo aparece en la ecuación de onda de Schrödinger, sino que éste también es usado para el cálculo de niveles de energía de un sistema cuántico, como se puede ver en la referencia [8]. Los niveles de energía se determinan encontrándole a la ecuación de Schrödinger una solución que está determinada por ciertas condiciones de frontera. Estas soluciones generalmente son eigenfunciones donde sus eigenvalores son los niveles de energía.

Los fenómenos discutidos previamente (y muchos otros) están vinculados por la noción de difusión incorporada en el modelo a través del laplaciano. Existen, sin embargo, variantes más complejas de estos fenómenos que involucran difusiones anómalas. Una manera de incorporar en los modelos a este tipo de difusiones es mediante el uso del laplaciano fraccionario, el cual discutiremos a continuación.

## 1.2. El laplaciano fraccionario

El laplaciano fraccionario se representa con el símbolo  $(-\Delta)^s$  y se define como

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &= C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \end{aligned}$$

donde  $B_\epsilon(x)$  se refiere a la bola de radio  $\epsilon$  centrada en  $x$ .

Primero notemos que el exponente  $s$  indica la potencia del laplaciano. Se puede considerar cualquier número real positivo para  $s$  (ajustando pertinentemente la definición, ver [1]), pero en esta tesis sólo trabajaremos con  $s \in (0, 1)$ , el cual es el caso más estudiado.

Por otro lado tenemos una constante  $C(n, s)$  la cual depende de la dimensión del espacio y del grado del operador, ésta tiene una forma muy específica, la cual se puede ver en el Capítulo 4, identidad (4.3). Esta constante sirve para consolidar el comportamiento asintótico del laplaciano fraccionario. En particular, veremos en la Proposición 4.11 que

$$(-\Delta)^s \xrightarrow{s \rightarrow 1} (-\Delta) \text{ y } (-\Delta)^s \xrightarrow{s \rightarrow 0} I_d.$$

Otra hecho que salta a la vista es el término  $P.V.$ , el cual es una abreviación de la frase *In the Principal Value Sense*. Éste es importante para que la integral esté bien definida en el punto de singularidad del núcleo  $|x - y|^{-n-2s}$ . Para entender mejor cómo funciona el  $P.V.$  se recomienda ver la Observación 4.2.

La noción del laplaciano fraccionario aparece de forma natural en la teoría de procesos estocásticos, pues  $(-\Delta)^s$  es el generador infinitesimal de un proceso de Lévy con saltos (también llamados  $\alpha$ -estables). Por esto, recomendamos ver los primeros capítulos de [10].

El laplaciano fraccionario sirve también para modelar flujos con difusión anómala, procesos de difusión debidos a desplazamientos aleatorios, modelos de olas de agua [10, Chapter 4], modelo del flujo turbulento [19], dislocación cristalina o defecto cristalino [14, 15, 10], difusión anómala o difusión por procesos de saltos aleatorios [34, Capítulo 1.4] y planteamiento de ecuaciones no locales de tipo Schrödinger [10, Capítulo 7], entre muchas aplicaciones más. Entre estas aplicaciones, una que es particularmente interesante es el modelaje del flujo turbulento a través del laplaciano fraccionario [19]. Esto es interesante, ya que se trata de resolver un problema fundamental que tiene la dinámica de medios deformables, llamado el *problema de cerradura*, en dónde hay más incógnitas que ecuaciones.

Veamos que el *problema de cerradura* es el principal motivador para usar al laplaciano fraccionario como una herramienta para modelar este flujo, de manera breve, veamos porque. Primero notemos que el *problema de cerradura* aparece al tratar de modelar al flujo turbulento a partir de modelos que usan a las ecuaciones de Navier-Stokes u otros modelos similares que se basan en ellas, ver [32]. Esto sucede ya que cualquier método que parta de estas ecuaciones siempre se va a encontrar con que hay mas incógnitas que ecuaciones a resolver. Ante esto, se han tratado de hacer modelos numéricos para tratar de verificar si Navier-Stokes sirve para modelar este flujo, el problema es que dichos modelos numéricos tardarían mucho en completarse con la tecnología actual. Por esta razón en los últimos años se han hecho modelos que incluyen difusiones anómalas (y por ende al laplaciano fraccionario), para así poder dar un sistema de ecuaciones que describa a dicho flujo y además carezca del problema de cerradura.

Éstas son solo algunas de las muchas aplicaciones que tiene el laplaciano fraccionario. Este operador ha empezado a ser más popular en los últimos años, debido a que anteriormente se usaba la teoría de interpolación. El problema es que esta teoría es muy compleja y requiere mucho estudio previo. Afortunadamente, en los últimos años se logró ver que se puede estudiar al laplaciano fraccionario, en ciertos casos, evitando parte de esta teoría y que, en su lugar, se puede usar un acercamiento más directo. Uno de los artículos principales que hacen esto es [13] y por esa razón lo tomamos como referencia principal de esta tesis. Dicho lo anterior y considerando que ya hemos dado una motivación para el laplaciano fraccionario pasamos a ver los resultados principales de esta tesis.

### 1.3. Resultados principales

En esta sección veremos como esta organizada esta tesis y discutiremos algunos resultados y su importancia para así motivar este trabajo.

Como se comentó al principio de esta introducción uno de los resultados principales es probar la existencia y unicidad de soluciones de (1.1). Para ello primero necesitamos desarrollar la teoría que rodea al espacio de Sobolev fraccionario.

Tomando esto en cuenta veamos que el espacio fraccionario de Sobolev se define como

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\} \quad \text{con } s \in (0, 1).$$

Éste, al ser un espacio de Sobolev tiene una norma, la cual se definirá en el Capítulo 3, Definición 3.1, por lo pronto no es necesario ver la forma específica de esta norma. Pero lo que si es importante, es entender que con ésta podremos probar un resultado importante, el cual dice que el espacio fraccionario de Sobolev es un espacio de Banach y de Hilbert (dándole un producto escalar adecuado y tomando que  $p = 2$ ), esto se demostrará en el Capítulo 3, Proposición 3.2.

El siguiente resultado importante que demostraremos es un tipo de encaje de Sobolev, el cual es continuo, para ser precisos lo que se va a demostrar es que si tomamos  $s \leq s'$  con  $s \in (0, 1)$  entonces  $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ . Este resultado es importante ya que nos deja ver que el comportamiento de estos espacios fraccionarios es similar al comportamiento para el espacio de Sobolev usual. Posteriormente podremos generalizar este resultado al caso donde  $s > 1$ . Todo esto se verá en el Capítulo 3, sección 3.1.

Una vez que los resultados anteriores se demuestren se pasará a probar que el espacio de funciones con soporte compacto  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . Este es un resultado de densidad y uno de los teoremas mas importantes de esta tesis. Además, vale la pena comentar que este resultado en el caso del espacio de Sobolev usual no es muy complicado de probar, pero para el caso fraccionario si lo es, como se verá al final del Capítulo 3, sección 3.1.

Con el teorema anterior, veremos que para una  $\Omega$  arbitraria no siempre podremos garantizar que el espacio de funciones con soporte compacto será denso en  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , este hecho motiva definir al siguiente espacio

$$\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega) : \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) : u(x) = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \right\},$$

el cual se demostrará que también es de Hilbert (cuando  $p=2$ ), como se puede ver en el Capítulo 3, Teorema 3.10. Este espacio es importante ya que incorpora las condiciones de frontera de Dirichlet, las cuales están presentes en el Problema (1.1).

Una vez que se defina al espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  el siguiente resultado importante de esta tesis es la desigualdad de Poincaré, Capítulo 3, sección 3.3. La importancia de este resultado es que nos va a ayudar a dar equivalencias entre las normas del espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  y el espacio de Sobolev fraccionario  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . Posteriormente pasamos a demostrar el teorema de representación de Fréchet-Riesz (Corolario 3.18) para el espacio  $\mathcal{H}_0^s(\Omega) = \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  con  $p = 2$ , el cual ayuda a dar una relación entre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$  y su espacio dual. Este es un resultado importante, ya que es útil para argumentar que existen soluciones débiles al problema de Poisson fraccionario.

Por otro lado, el Capítulo 4 esta dedicado en su mayoría a la definición del laplaciano fraccionario y la consolidación de su comportamiento. Los resultados mas importantes son:

1. La definición del laplaciano fraccionario y su explicación extensa para entender todos los elementos de su definición.
2. Una herramienta que sirve para evitar el uso del *Valor principal* en la definición del laplaciano fraccionario, Capítulo 4, Lema 4.3.
3. Un resultado de límites que consolida el comportamiento del laplaciano fraccionario cuando  $s$  tiende a cero por la izquierda y  $s$  tiende a uno por la derecha. De manera más precisa  
Sea  $n > 1$ , entonces si  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  los siguientes argumentos se cumplen:

- (i)  $\lim_{s \rightarrow 0^+} (-\Delta)^s u = u$ ,
- (ii)  $\lim_{s \rightarrow 1^-} (-\Delta)^s u = -\Delta u$ .

El cual se demuestra en el Capítulo 4, Proposición 4.11.

Por último en la tesis (y al final del Capítulo 4) demostramos el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** *(Equivale al Teorema 4.13 del Capítulo 4)*  
Sean  $s, \alpha \in (0, 1)$ . Dada  $f \in L^2(\Omega)$  existe un único  $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$  tal que

$$\frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{u+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx, \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Más aún, si  $u \in C^{2s+\alpha}(\Omega) \cap C^s(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$(-\Delta)^s u(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Una vez que se demuestre este resultado, se concluirá la tesis. Es importante notar que todos los resultados que aquí se demostrarán no hacen uso de teoría de interpolación y solamente usamos herramientas básicas de análisis y análisis funcional.

Para concluir, mencionaremos un par de observaciones respecto al Teorema 1.1. Como la existencia de la solución está garantizada por el Teorema de representación de Fréchet-Riesz, el lado derecho  $f$  también puede tomarse en el espacio  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)^*$ , es decir, en el espacio dual de  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$ . Además, si se supone que  $f \in C^\beta(\Omega)$ , entonces por la teoría de regularidad elíptica de problemas fraccionarios, se sabe que la solución satisface que  $u \in C^{2s+\alpha}(\Omega) \cap C^s(\mathbb{R}^n)$  para algún  $\alpha > 0$ , véase [35, Lemma 2.2 y Lemma 2.3].

# Capítulo 2

## Resultados preliminares

En este capítulo daremos definiciones y resultados que serán de utilidad para la tesis, sin ahondar en las definiciones. En caso de que el lector quiera saber más sobre los resultados y definiciones individuales de este capítulo se recomienda consultar las referencias proporcionadas.

### 2.1. Espacios y funciones

#### Definición 2.1.

Sea  $X$  un espacio vectorial y  $\|\cdot\|$  su norma correspondiente. Decimos que  $(X, \|\cdot\|)$  es de Banach si es completo, (ver [11, Definición 5.5]).

#### Definición 2.2.

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial  $H$  con un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que es completo respecto a la norma inducida  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ , (ver [11, Definición 15.5]).

#### Definición 2.3.

Un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , es un espacio que está compuesto por  $\Omega$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra en el conjunto  $\Omega$  y  $\mu$  la medida en  $(\Omega, \mathcal{A})$ , (ver [37, Chapter 1]).

#### Definición 2.4.

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida, por lo tanto definimos al espacio de Lebesgue  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  (o  $L^p(\Omega)$  para facilitar la notación) como un espacio de Banach en donde tenemos que si  $1 \leq p < \infty$ , entonces se cumple que

$$\int_{\Omega} |f(s)|^p d\mu(x) < \infty,$$

donde  $f$  es una función. Ahora, si  $f \in L^p(\Omega)$  y  $1 \leq p < \infty$  se define la norma  $L^p$  del siguiente modo

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(s)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Ver [37, Chapter 1]).



**Definición 2.5.**

Para  $n \in \mathbb{N}$  tomemos una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Decimos que  $f$  es rápidamente decreciente si para todo  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$  la función producto

$$x \rightarrow x^\gamma f$$

es acotada, donde  $x^\gamma = (x_1)^{\gamma_1} \dots (x_n)^{\gamma_n}$  es cualquier producto dado por las potencias de las funciones de coordenadas canónicas.

Ahora veamos la siguiente definición que se relaciona con lo anterior:

Para  $n \in \mathbb{N}$  tomemos una función suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que  $f$  tiene derivadas parciales rápidamente decrecientes si el valor absoluto del producto de cualquier derivada parcial  $\partial_\beta f$  de  $f$  con cualquier función polinomio está acotado para algunas constantes positivas  $K_{\gamma,\beta}$  es decir

$$\forall \gamma, \beta \in \mathbb{N}^n \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x^\gamma \partial_\beta f(x)\| < K_{\gamma,\beta}.$$

(Ver [27, Definition 7.1.2]).

**Definición 2.6.**

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un espacio vectorial topológico que cumple lo siguiente

- Su espacio vectorial subyacente es un subespacio de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  sobre las funciones con derivadas parciales que decaen rápidamente.
- Su topología esta inducida por las semi-normas dadas por  $p_{\gamma,\beta}(f) := \|x^\gamma \partial_\beta f(x)\|$ .  
(Notemos que ésta es la forma general, más adelante definiremos de manera más específica qué funciones usaremos en la semi-norma)

Un espacio que cumpla esto es llamado un espacio de Schwartz y lo denotamos por

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \gamma, \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x^\gamma \partial_\beta f(x)\| < K_{\gamma,\beta} < \infty\}.$$

(Ver [27, Definition 7.1.2]).

**Definición 2.7.**

Dado un espacio vectorial  $V$ , definimos a su espacio dual  $V^*$ , como el espacio que contiene al conjunto de todas las transformaciones lineales continuas  $g$  tales que  $g : V \rightarrow K$  donde  $K$  es un campo.

En este caso el espacio dual del espacio de Schwartz sería

$$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) = \{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ es lineal y continuo}\}.$$

(Ver [20, Appendix D]).

**Definición 2.8.** (Notación de multi-índice)

- Un vector de la forma  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , donde  $\alpha_i$  es un entero no negativo, es llamado un multi-índice de orden

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

- Dado un multi-índice de orden  $\alpha$  definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

- Si  $k$  es un entero no negativo entonces,

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}.$$

- Definimos a  $\alpha!$  como

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

- Definimos a  $(x - a)^\alpha$  como

$$(x - a)^\alpha = (x - a)^{|\alpha|}.$$

(Ver [20, Appendix A, Notation for derivatives]).

**Definición 2.9.**

Sea  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Decimos que  $u$  es débilmente diferenciable en  $\Omega$  si existen  $v_1, \dots, v_n \in L^1_{loc}(\Omega)$  tales que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \int_{\Omega} v_\alpha \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

para toda  $\alpha = 1, \dots, n$  y donde  $C_c^\infty(\Omega)$  es el espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en  $\Omega$  (a estas se comúnmente se les llama funciones de prueba).

Si lo escribimos en notación de índices tenemos

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi + \int_{\Omega} v_\alpha \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo que decimos que la función  $v$  es la derivada débil de la función  $u$ , (ver [11, Definición 16.2]).

**Definición 2.10.**

Sea el  $C^k(\bar{\Omega})$  el espacio compuesto por todas las funciones  $k$ -veces continuamente diferenciables en  $\Omega$ , donde  $\Omega$  es acotado. La norma de este espacio es

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

donde  $\alpha$  es un multi-índice en  $\mathbb{N}^n$ , (ver [20, Section 5, Subsection 5.1]).

**Definición 2.11.**

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado. Definimos al espacio de funciones Hölder continuas como

$$C^{m,\gamma}(\Omega) := \left\{ u \in C^m(\Omega) : D^\alpha u \in C^{0,\gamma}(\Omega) \text{ donde } |\alpha| = m \right\},$$

donde  $\alpha$  es un multi-índice en  $\mathbb{N}^n$ , (ver [20, Section 5, Subsection 5.1]).

**Definición 2.12.**

Una función  $u$  pertenece al espacio  $C^{0,\gamma}(\Omega)$ , con  $\gamma \in [0, 1]$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto, si se cumple que

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} := \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty. \quad (2.1)$$

Cuando (2.1) se cumple con  $\gamma = 1$ , decimos que  $u$  es Lipschitz continua en  $\Omega$ , (ver [20, Section 5, Subsection 5.1]).

**Definición 2.13.**

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $p \in [1, \infty]$  y  $k \in \mathbb{N}_0$ , entonces el espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  es el espacio de todas las funciones  $u \in L^p(\Omega)$  que tienen derivadas parciales débiles y que pertenecen al espacio  $L^p(\Omega)$ . Esto se cumple para todo multi-índice  $\alpha$  tal que  $|\alpha| \leq k$ . Escrito de otra manera tenemos:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega \text{ y } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}$$

Para  $k \in \mathbb{N}_0$  definimos:  $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ , (ver [11, Definición 16.11]).

**Definición 2.14.**

La transformada de Fourier es un operador continuo  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$  el cual se define de la siguiente manera.

Si  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces la transformada de Fourier  $\mathcal{F}u = \hat{u}$  esta dada por

$$\hat{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} u(x) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

y la inversa  $\mathcal{F}^{-1}u = \check{u}$  esta dada por

$$\check{u}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} u(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Si  $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$  la transformada cumple las siguientes propiedades:

- La transformada de Fourier es una aplicación lineal:  $\mathcal{F}(au + bv) = a\mathcal{F}(u) + b\mathcal{F}(v)$  con  $a$  y  $b$  números complejos cualquiera.
- La transformada de Fourier da un cambio de escala:  $\mathcal{F}\{u(ax)\}(y) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{u\}\left(\frac{y}{a}\right)$ , con  $a$  un real distinto de cero.
- La transformada de Fourier da traslaciones:  $\mathcal{F}\{u(x-a)\}(\xi) = e^{iy \cdot a} \mathcal{F}\{u\}(y)$  para todo número real  $a$ . Éste sería un cambio en el tiempo o una traslación en la variable temporal.
- La transformada de Fourier da traslaciones en la variable transformada. La cual sería una traslación en la variable frecuencia:  $\mathcal{F}\{u\}(y-a) = \mathcal{F}\{e^{ix \cdot a} f(x)\}(y)$ .
- Cumple lo siguiente para convoluciones:  $\mathcal{F}\{u * v\}(y) = \mathcal{F}\{u\}(y)\mathcal{F}\{v\}(y)$  y  $\mathcal{F}\{uv\}(y) = (\mathcal{F}\{u\} * \mathcal{F}\{v\})(y)$ .
- Además recordemos que podemos extender a la transformada de Fourier de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  a  $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ ,

(Ver [20, Section 4, Subsection 4.3.1]).

**Definición 2.15.**

Definimos a la función Gamma  $\Gamma(z) : \{Re(z) > 0\} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como la función integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

donde esta integral converge absolutamente para  $Re(z) > 0$ . Algunas propiedades útiles son:

- $\Gamma(n + 1) = n!$  para  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$
- $\Gamma(z + n) = \frac{\Gamma(-z)\Gamma(1+z)}{\Gamma(1+n-z)}$  para  $n \in \mathbb{Z}$

(Ver [6, Section 18.2]).

**Definición 2.16.**

Definimos a la función Beta como la función integral

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt,$$

con  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(z_1), Re(z_2) > 0$ .

Además es importante notar que la función  $B$  es simétrica para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  y se relaciona con la función Gamma mediante la propiedad

$$B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)}.$$

(Ver [5, Chapter 2]).

## 2.2. Teoremas importantes

**Definición 2.17.**

Un espacio de probabilidades  $(\Omega, A, \mu)$ , es un espacio medible  $(\Omega, \mu)$  con la  $\sigma$ -álgebra  $A$ , donde la medida  $\mu$  es una distribución de probabilidad, i.e.  $\mu$  debe de cumplir que

$$\int_{\Omega} d\mu = 1.$$

(Ver [12, Section 1.1, Subsection 1.1.1]).

**Lema 2.18.**

Sea  $(\Omega, A, \mu)$  un espacio de probabilidades y tomemos una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que sea medible respecto a la medida  $\mu$  y una función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que sea convexa. Entonces la siguiente desigualdad se cumple.

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu.$$

A esta desigualdad se le llama la Desigualdad de Jensen, (ver [16, Theorem 1.5.1]).

**Lema 2.19.** (*Lema de Fatou*)

Dado un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  y un conjunto  $X \in \mathcal{A}$ , tomemos  $\{f_n\}$  una sucesión  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$ -medible y no negativa de funciones  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  donde

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{para cualquier } x \in X,$$

entonces  $f$  es  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$ -medible y además la siguiente desigualdad se cumple.

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu,$$

donde  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  denota a la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos de Borel en  $[0, +\infty]$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \infty$ , (ver [20, Appendix E, Theorem 3]).

**Definición 2.20.**

Una sucesión regularizante (o de Dirac)  $(\rho_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1)}$  es una familia de funciones  $\rho_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  (espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto) donde  $\text{supp } \rho_\epsilon \subseteq \overline{B_\epsilon(0)}$  que satisface las siguientes propiedades.

1.  $(\rho_\epsilon) \geq 0$  para toda  $\epsilon$ .
2.  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(t) dt = 1$  para toda  $\epsilon$ .
3. Para todo  $r > 0$  y  $\delta > 0$  existe  $\epsilon \in (0, 1)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \rho_\epsilon(t) dt < \delta.$$

(Ver [31, Theorem 2.16]).

**Teorema 2.21.**

Sea  $(\rho_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1]}$  una sucesión regularizante (o de Dirac) y  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ .

1. Si  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  para  $p \in [1, \infty)$ , entonces  $\rho_\epsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $D^\alpha(\rho_\epsilon * f) = (D^\alpha \rho_\epsilon) * f$  para  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Además tenemos que  $\rho_\epsilon * f \rightarrow f$  en  $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .
2. Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $1 \leq p < \infty$  entonces se cumple que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_p = 0$ .

(Ver [31, Theorem 2.16] y [20, Appendix C, Theorem 7]).

**Teorema 2.22.** (*Radon-Riesz*)

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $(x_m)$  una sucesión en  $X$ . Decimos que el espacio  $X$  tiene la propiedad de Radon-Riesz si se cumple lo siguiente:

Si  $(x_m) \rightharpoonup x \in X$  y  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m\| = \|x\|$ , entonces tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x\| = 0.$$

(Ver [33, Definition 2.5.26]).

**Teorema 2.23.**

i) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sumable. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_{\partial B(x_0, r)} f dS \right) dr, \quad (2.2)$$

para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

ii) En particular

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{B(x_0, r)} f dx \right) = \int_{\partial B(x_0, r)} f dS, \quad (2.3)$$

para cada  $r > 0$ , (ver [20, Appendix C, Theorem 4]).

**Lema 2.24.** (Teorema Fundamental de Cálculo de variaciones)

Si dos funciones continuas  $f(x)$  y  $g(x)$  en un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  cumplen la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - g(x)]\varphi(x) dx = 0,$$

para toda función de prueba  $\varphi \in \Omega$ , entonces  $g(x)$  es diferenciable y cumple que la derivada de  $g(x)$  es igual a la función  $f(x)$ , (ver [25, Chapter 5, first lemma]).

**Teorema 2.25.** (Taylor en varias variables)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es  $k$  veces continuamente diferenciable en un punto  $a \in \mathbb{R}^n$ , entonces existen funciones  $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplen que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} h_\alpha(x) (x-a)^\alpha$$

con  $\lim_{x \rightarrow a} h_\alpha(x) = 0$ ,

donde la función  $h_\alpha(x)$  está definida como

$$h_\alpha(x) = \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} D^\alpha f(a + t(x-a)) dt$$

y  $|\alpha| = k$ , (ver [29, Abschnitt 2.4]).

**Corolario 2.26.**

Sea  $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$  una función  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla las hipótesis del Teorema 2.25, entonces

$$u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) = D^2 u(x) y \cdot y + R(y),$$

donde  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $|R(y)| \leq C \|u\|_{C^3(\mathbb{R}^n)} |y|^3$  para alguna  $C > 0$  independiente de  $u$ .

*Demostración.*

Primero definamos la siguiente función. Sea  $f(y) = u(x + y)$  con  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  fija y notemos que la expansión de Taylor de segundo orden (con  $a = 0$ ) es

$$\begin{aligned} f(y) = u(x + y) &= u(x) + \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha u(x)(y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!}(y)^\alpha \\ &+ \sum_{|\alpha|=3} \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} D^\alpha f(yt) dt (y)^\alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tomando la definición de la función  $h_\alpha(y)$  tenemos

$$f(y) = u(x + y) = u(x) + \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha u(x)(y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!}(y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=3} h_\alpha(y)(y)^\alpha. \quad (2.5)$$

Ahora notemos que  $f(-y) = u(x - y)$  y su expansión de Taylor de segundo orden es

$$\begin{aligned} f(-y) = u(x - y) &= u(x) - \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha u(x)(y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!}(y)^\alpha \\ &- \sum_{|\alpha|=3} \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} D^\alpha f(yt) dt (y)^\alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tomando la definición de la función  $h_\alpha(y)$  definimos  $\widehat{h}_\alpha(y) = -h_\alpha(y)$ , entonces

$$f(-y) = u(x - y) = u(x) - \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha u(x)(y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!}(y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=3} \widehat{h}_\alpha(y)(y)^\alpha. \quad (2.7)$$

Dado lo anterior sumamos las ecuaciones (2.5) y (2.7) y obtenemos lo siguiente:

$$u(x + y) + u(x - y) = 2u(x) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \partial^\alpha u(x)(y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=3} \frac{2}{\alpha!} [\widehat{h}_\alpha(y) + h_\alpha(y)](y)^\alpha.$$

Por lo tanto,

$$u(x + y) + u(x - y) - 2u(x) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \partial^\alpha u(x)(y)^\alpha + R(y), \quad R(y) := \sum_{|\alpha|=3} \frac{2}{\alpha!} [\widehat{h}_\alpha(y) + h_\alpha(y)](y)^\alpha.$$

Veamos que para calcular la suma que está arriba necesitamos tomar en cuenta que, como  $|\alpha| = 2$ ,

tenemos las siguientes opciones

$$\alpha = \begin{cases} (2, 0, \dots, 0) \text{ representa } y_1^2 \partial_{11} u(x); \\ \vdots \\ (0, \dots, 0, 2) \text{ representa } y_n^2 \partial_{nn} u(x); \\ (1, 1, 0, \dots, 0) \text{ representa } y_1 y_2 \partial_{12} u(x) \text{ y } y_2 y_1 \partial_{21} u(x); \\ \vdots \\ (1, 0, \dots, 0, 1) \text{ representa } y_1 y_n \partial_{1n} u(x) \text{ y } y_n y_1 \partial_{n1} u(x); \\ (0, 1, 1, 0, \dots, 0) \text{ representa } y_2 y_3 \partial_{23} u(x) \text{ y } y_3 y_2 \partial_{32} u(x); \\ \vdots \\ (0, 1, 0, \dots, 0, 1) \text{ representa } y_2 y_n \partial_{2n} u(x) \text{ y } y_n y_2 \partial_{n2} u(x); \\ (0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0) \text{ representa } y_3 y_4 \partial_{34} u(x) \text{ y } y_4 y_3 \partial_{43} u(x); \\ \vdots \\ (0, 1, 0, \dots, 0, 1) \text{ representa } y_2 y_n \partial_{2n} u(x) \text{ y } y_n y_2 \partial_{n2} u(x); \\ \vdots \\ (0, \dots, 1, 1) \text{ representa } y_{n-1} y_n \partial_{(n-1)n} u(x) \text{ y } y_n y_{n-1} \partial_{n(n-1)} u(x). \end{cases}$$

Por lo tanto obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) &= y_1^2 \partial_{11} u(x) + y_1 y_2 \partial_{12} u(x) + y_2 y_1 \partial_{21} u(x) + \dots + y_n^2 \partial_{nn} u(x) + R(y) \\ &= y_1^2 \partial_{11} u(x) + 2y_1 y_2 \partial_{12} u(x) + \dots + y_n^2 \partial_{nn} u(x) + R(y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ahora por otro lado analicemos la parte derecha de la ecuación. Específicamente veamos la expresión para  $D^2 u(x) y \cdot y$ .

$$\begin{aligned} D^2 u(x) y \cdot y &= \begin{pmatrix} \partial_{11} u(x) & \dots & \partial_{1n} u(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u(x) & \dots & \partial_{nn} u(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot y \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \partial_{11} u(x) + \dots + y_n \partial_{1n} u(x) \\ \vdots \\ y_1 \partial_{n1} u(x) + \dots + y_n \partial_{nn} u(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= y_1^2 \partial_{11} u(x) + y_1 y_2 \partial_{12} u(x) + y_2 y_1 \partial_{21} u(x) + \dots + y_n^2 \partial_{nn} u(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

A la ecuación anterior le sumamos el residuo  $R(y)$  y entonces vemos que ésta será exactamente la ecuación (2.8), que es lo que se quería demostrar.

Veamos ahora la cota para el residuo. Primero veamos que como  $|\alpha| = 3$ , la función  $h_\alpha(y)$  tiene la cota

$$|h_\alpha(y)| = \left| \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} D^\alpha u(x+ty) dt \right| \leq 3 \int_0^1 \|u\|_{C^3} dt = 3 \|u\|_{C^3}, \quad (2.10)$$



hacemos un proceso análogo para  $\overline{h_\alpha}$  y con esto podemos acotar a  $R(y)$  como

$$|R(y)| = \left| \sum_{|\alpha|=3} \frac{2}{\alpha!} [\overline{h_\alpha}(y) + h_\alpha(y)](y)^\alpha \right| \leq 2\|u\|_{C^3} \sum_{|\alpha|=3} |y|^3 = C\|u\|_{C^3}|y|^3. \quad (2.11)$$

para alguna constante  $C > 0$  independiente de  $u$ . □

## Capítulo 3

# El espacio de Sobolev fraccionario

Este capítulo está dedicado a definir al espacio de Sobolev fraccionario  $W^{s,p}(\Omega)$ , ver sus propiedades y demostrar algunos resultados importantes que lo involucran. Empezaremos demostrando resultados que en el caso del espacio de Sobolev usual son básicos, pero para el caso fraccionario estos resultados no son tan directos u obvios. Esto se debe a que en este caso estamos trabajando con una noción de derivada fraccionaria débil.

Esto nos ayudará como un fundamento para poder después trabajar con resultados más complejos. No es inmediato entender porque las funciones en  $W^{s,p}(\Omega)$  pueden interpretarse como “derivadas fraccionarias débiles”. Esto quedará más claro hacia el final de la tesis, pero por lo pronto basta decir que es un espacio funcional adecuado para estudiar el problema (1.1) de forma variacional, en particular el operador  $(-\Delta)^s$  no se utiliza de forma directa en las pruebas de existencia y unicidad (de soluciones débiles) sino que se emplea una forma bilineal asociada a  $(-\Delta)^s$  (a través de una fórmula de integración por partes) la cual está bien definida en espacios de Sobolev fraccionarios. Una vez que acabemos con estos resultados básicos pasaremos a algunos más importantes, entre ellos veremos encajes de Sobolev para este espacio y resultados de densidad. Todo esto es con el propósito de llegar a la Desigualdad de Poincaré y al Teorema de Representación de Fréchet-Riesz.

### 3.1. Resultados para espacios de Sobolev fraccionarios

**Definición 3.1.** (Espacios de Sobolev Fraccionario)

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $p \in [1, \infty)$  y  $s \in (0, 1)$ . Definimos el espacio de Sobolev fraccionario  $W^{s,p}(\Omega)$  como:

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : (x, y) \mapsto \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

A este espacio lo dotamos con la siguiente norma (probaremos que en efecto ésta es una norma en la Proposición 3.2).

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notemos que si solamente tomamos al segundo término de la suma anterior podemos definir una semi-norma para  $u$ , que se llama la semi-norma de Gagliardo (ver [24]) para  $u$ :

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Veamos que esta seminorma cumple  $[u]_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty$ , ya que si no fuese este el caso, la norma  $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$  no tendría sentido.

Con lo anterior ahora vemos el siguiente resultado que nos garantiza que  $W^{s,p}(\Omega)$  es un espacio de Hilbert cuando  $p = 2$ .

**Proposición 3.2.**

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $p \in [1, \infty)$  y  $s \in (0, 1)$ . Entonces, el espacio  $W^{s,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con la norma de la Definición 3.1. Además, el espacio  $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} = \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle_s, \quad \text{donde} \quad \langle u, v \rangle_s = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

y  $\langle u, v \rangle$  es el producto escalar en  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.*

Primero vemos que en  $W^{s,p}(\Omega)$  es un espacio normado.

- $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$  si sólo si  $u(x) = 0$ :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ \iff \int_{\Omega} |u|^p dx &= 0 \text{ y } \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy = 0 \\ \iff u &\equiv 0. \end{aligned}$$

El último si solo si, para la norma de  $u$  en  $L^p(\Omega)$  se cumple ya que para que una integral con integrando no negativo sea cero se necesita que el integrando no negativo sea cero en casi todas partes.

- $\|\beta u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = |\beta| \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$  para todo  $\beta \in \mathbb{R}$  y todo  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \|\beta u\|_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |\beta u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\beta u(x) - \beta u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( |\beta|^p \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + |\beta|^p \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\beta| \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\beta| \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

- $\|u + v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}$  para todo  $u, v \in W^{s,p}(\Omega)$ .

Para la función  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definimos una función  $\gamma_u(x, y) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\gamma_u(x, y) = \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}}.$$

Ahora, por la desigualdad del triangulo tenemos

$$\gamma_{u+v}(x, y) = \frac{|(u+v)(x) - (u+v)(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \leq \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} + \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} = \gamma_u(x, y) + \gamma_v(x, y),$$

para todo  $x, y \in \Omega$ .

Entonces, como definimos a la función  $\gamma_u(x, y)$ , su norma es  $\|\gamma_u(x, y)\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} = [u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ . Por lo que si aplicamos la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} [u + v]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|\gamma_{u+v}\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} \leq \|\gamma_u + \gamma_v\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} \\ &\leq \|\gamma_u\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} + \|\gamma_v\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} = [u]_{W^{s,p}(\Omega)} + [v]_{W^{s,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |u + v|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y) + v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \|u + v\|_{L^p(\Omega)}^p + [u + v]_{W^{s,p}(\Omega)}^p \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u]_{W^{s,p}(\Omega)}^p + \|v\|_{L^p(\Omega)}^p + [v]_{W^{s,p}(\Omega)}^p \\ &= \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u + v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq (\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Veamos que  $W^{s,p}(\Omega)$  es completo. Para ello tomemos una sucesión  $(u_N)_N \subset W^{s,p}(\Omega)$  que sea de Cauchy. Entonces en particular notemos que  $(u_N)_N$  será de Cauchy en  $L^p(\Omega)$  y por ende se cumple que existe  $u \in L^p(\Omega)$  tal que  $\lim_{N \rightarrow \infty} u_N = u$ .

Tomemos a la seminorma del espacio  $W^{s,p}(\Omega)$ , a  $N, m \in \mathbb{N}$  y por el Lema 2.19 tenemos

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} [u_N]_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} [u_N]_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty,$$

por lo que  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ . Ahora si aplicamos de nuevo el Lema 2.19 obtenemos que

$$\|u_m - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \|u_m - u_N\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \sup_{N \geq m} \|u_m - u_N\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Lo que indica que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$  ya que la sucesión  $(u_N)_N$  es de Cauchy.

Con esto demostramos que todas las sucesiones de Cauchy en  $W^{s,p}(\Omega)$  son convergentes en este espacio, por lo que podemos concluir que  $W^{s,p}(\Omega)$  es de Banach. Si tomamos a  $p = 2$  tenemos un espacio de Hilbert dotando al espacio  $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$  con el producto escalar  $\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} = \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle_s$ . Para ver esto sólo falta comprobar que el producto escalar definido en la Proposición 3.2 cumple las propiedades del producto escalar usual. Notemos que  $\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)}$  usa en su definición al producto escalar usual en  $L^2(\Omega)$ . Por lo tanto, basta con analizar las propiedades de  $\langle u, v \rangle_s$ .

- $\langle u, u \rangle_s \geq 0$  para todo  $u \in H^s(\Omega)$  y  $\langle u, u \rangle_s = 0$  si y sólo si  $u$  es constante.

$$i) \langle u, u \rangle_s = 0 \iff 2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0 \iff u(x) \text{ es constante.}$$

Veamos que en este caso, como el integrando es positivo, la única forma para que la integral sea cero es que el integrando sea cero para todo  $x$  y  $y$ . Esto se cumple si  $u$  es constante.

$$ii) \langle u, u \rangle_s = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \geq 0.$$

Notemos que esto implica  $\langle u, u \rangle_{H^s(\Omega)} = 0 \iff u = 0$ .

- $\langle \beta(u + f), v \rangle_s = \beta(\langle u, v \rangle_s + \langle f, v \rangle_s)$

$$\begin{aligned} \langle \beta(u + f), v \rangle_s &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\beta(u(x) + f(x) - u(y) - f(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \beta \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(f(x) - f(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \\ &= \beta(\langle u, v \rangle_s + \langle f, v \rangle_s). \end{aligned}$$

- $\langle u, v \rangle_s = \langle v, u \rangle_s$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_s &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(v(x) - v(y))(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \langle v, u \rangle_s. \end{aligned}$$

□

Ahora, ya que tenemos la definición del espacio de Sobolev fraccionario y su norma asociada, veamos que la siguiente proposición asegura que si se cumple que  $s \leq s'$  entonces el espacio  $W^{s',p}(\Omega)$  se encaja de manera continua en el espacio  $W^{s,p}(\Omega)$ . Cuando  $s$  y  $s'$  son números enteros este resultado es bien conocido, por ende nuestro propósito es ver que al igual aplica cuando tenemos exponentes fraccionarios.

**Proposición 3.3.**

Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in [1, \infty)$  y  $0 < s < s' < 1$ . Ahora, si tomamos una función  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ , entonces se cumple que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)},$$

donde  $C$  es una constante positiva que depende de  $n$ ,  $s$  y  $p$  (i.e  $C = C(n, s, p) \geq 0$ ). En particular,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega),$$

es continua.

*Demostración.*

Primero notemos que en la definición de norma que estamos usando para espacios de Sobolev fraccionarios (Definición 3.1), tenemos dos términos que se suman, primero trabajemos con el segundo término y solamente con un sumando de la fracción:  $\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}$ . Esto lo hacemos para poder dar una cota superior a la integral de la fracción anterior ya que esto será útil posteriormente. Dicho lo anterior y considerando al cambio de variable  $|x-y| = |z|$  y aplicando el Teorema 2.23 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &\leq \int_{\Omega} \left( \int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \int_1^{\infty} \int_{\partial B_1(0)} (\rho\omega)^{-n-sp} \rho^{n-1} d\omega d\rho \right) |u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Veamos que en la desigualdad anterior usamos el Teorema de Fubini, sacamos al término  $|u(x)|^p$  de la primera integral y después aplicamos el cambio de variable  $z = x-y$  solamente a la primer integral. Mientras, en la igualdad anterior consideramos al cambio de variable anteriormente comentado y aplicamos el Teorema 2.23.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \int_1^{\infty} \int_{\partial B_1(0)} (\rho\omega)^{-n-sp} \rho^{n-1} d\omega d\rho \right) |u(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \left( |\partial B_1(0)| \int_1^{\infty} \rho^{-n-sp} \rho^{n-1} d\rho \right) |u(x)|^p dx \\ &\leq C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Veamos que en la igualdad anterior estamos integrando para así obtener la medida de la esfera, cuyo valor es  $|\partial B| = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  (ver [20, Appendix A]).

Por último, en la desigualdad vemos que  $n \leq n+sp$  por lo tanto, esa integral existe, por lo que podemos acotar por una constante que depende de  $n, s$  y  $p$  multiplicada por la norma de  $u(x)$  en  $L^p(\Omega)$ .

Ahora, considerando lo anterior veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &\leq 2^p \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq 2^p \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right) \\ &\leq 2^{p+1} (C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p) = 2^p C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Notemos que, en el desarrollo anterior, obtenemos la primera desigualdad por una desigualdad básica de números reales  $|f(x) + g(x)|^p \leq 2 \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$ . Posteriormente vemos que en lo que resta del desarrollo simplemente separamos la suma de las integrales para así poder aplicar el resultado que se obtuvo al principio de esta demostración.

Ahora, por otro lado como  $0 < s < s' < 1$  es fácil ver que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \leq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \leq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dx dy. \quad (3.3)$$

Ahora si combinamos las ecuaciones (3.2) y (3.3) obtenemos:

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \leq 2^p C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+s'p}} dx dy. \quad (3.4)$$

Ahora notemos que por la norma presente en la Definición 3.1 y por las ecuaciones (3.3) y (3.4) la siguiente desigualdad es inmediata.

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{s,p}}^p &\leq 2^{p+1} C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+s'p}} dx dy \\ &= (2^{p+1} C(n, s, p) + 1) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+s'p}} dx dy \\ &= C_1(n, s, p) \left[ \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{C_1(n, s, p)} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+s'p}} dx dy \right] \\ &\leq C_1(n, s, p) \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}^p. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por lo tanto vemos que se cumple que  $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$ , lo que concluye esta demostración.  $\square$

Ahora lo que buscamos es que el resultado anterior igual se cumpla para el caso límite donde  $s' = 1$ . Antes de ver esto, tenemos que pedirle cierta regularidad a la frontera  $\partial\Omega$ . Ya que si no la pedimos, podremos tomar casos donde este resultado no será cierto (ver [13, Example 9.1]).

Para ello definamos los siguientes conjuntos:

$$Q := \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1 \text{ y } |x_n| < 1 \right\}, \quad (3.6)$$

$$Q_+ := \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1 \text{ y } 0 < x_n < 1 \right\}, \quad (3.7)$$

$$Q_0 := \left\{ x \in Q : x_n = 0 \right\}, \quad (3.8)$$

para  $k \in \mathbb{N}$  y  $\alpha \in (0, 1]$ ,

Decimos que un dominio (un conjunto abierto y conexo)  $\Omega$  es de clase  $C^{k,\alpha}$  si existe  $M \geq 0$  tal que para cualquier  $x \in \partial\Omega$  exista una bola  $B = B_r(x)$  con radio  $r$  mayor a cero y un difeomorfismo  $T : Q \rightarrow B$  que cumplan lo siguiente:

- 1)  $T \in C^{k,\alpha}(\bar{Q})$ ,  $T^{-1} \in C^{k,\alpha}(\bar{B})$  y  $\|T\|_{C^{k,\alpha}(\bar{Q})} + \|T^{-1}\|_{C^{k,\alpha}(\bar{B})} \leq M$ ,
- 2)  $T(Q_+) = B \cap \Omega$  y  $T(Q_0) = B \cap \partial\Omega$ .

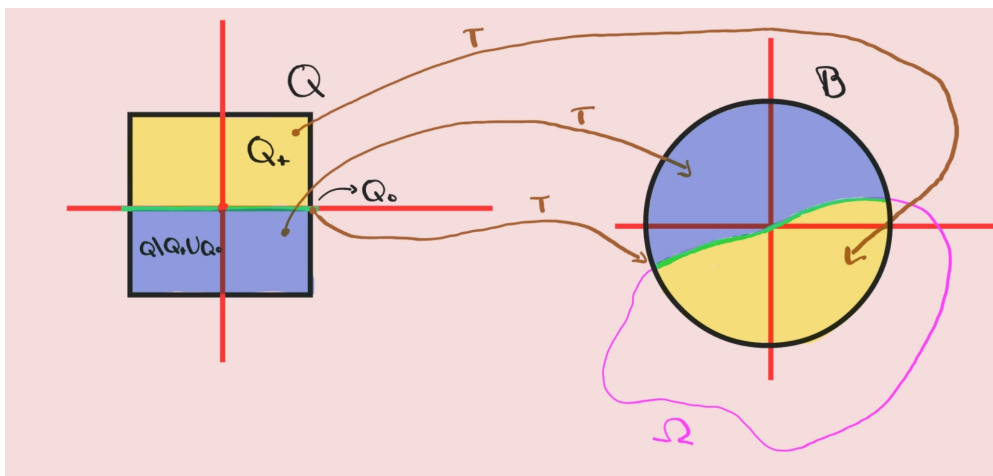
Ya que definimos lo anterior, vale la pena tomarnos unos párrafos para aclarar la importancia esto.

Primero notemos que cuando decimos que un dominio  $\Omega$  es de clase  $C^{k,\alpha}$ , además de usar la caracterización anteriormente comentada, también estamos usando la Definición 2.11. Esto es importante ya que esto nos permite darle el siguiente tipo de regularidad a  $\Omega$ .

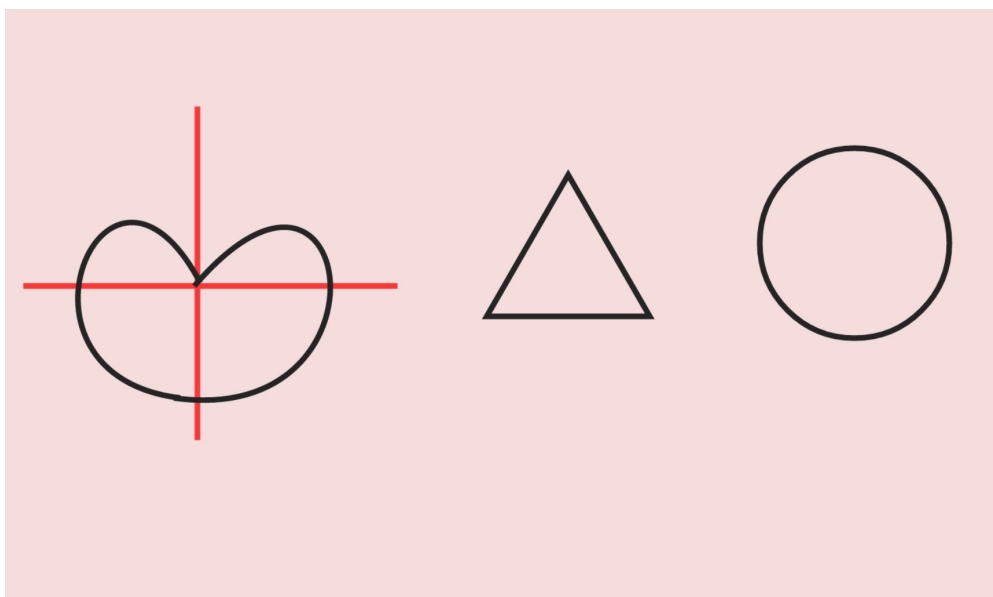
Notemos primero que el conjunto  $Q$  es un cilindro, el conjunto  $Q_+$  es la parte superior del cilindro  $Q$  y  $Q_0$  es un hiperplano que pasa por la mitad del cilindro  $Q$ . Entonces como  $\Omega$  es un espacio de Hölder resulta que tenemos a un difeomorfismo  $T$  que cumple las propiedades mencionadas arriba.

### 3.1. RESULTADOS PARA ESPACIOS DE SOBOLEV FRACCIONARIOS

Estas propiedades garantizan que el difeomorfismo mande al conjunto  $Q$  a toda la bola  $B$  que interseca a  $\Omega$ . Específicamente,  $T$  manda a  $Q_+$  a la parte de la intersección de  $B$  y  $\Omega$ , a  $Q_0$  lo manda a la parte que interseca a  $B$  y  $\partial\Omega$  y lo que resta lo manda a la parte de  $B$  que no intersecciona a  $\Omega$ . Para poder entender esto de manera más sencilla, podemos ver la siguiente imagen.



En la siguiente imagen dejamos ejemplos de los dominios de clase  $C^{0,\frac{1}{2}}$ ,  $C^{0,1}$ ,  $C^{0,\infty}$ , respectivamente.





**Proposición 3.4.**

Sea  $p \in [1, \infty)$ ,  $s \in (0, 1)$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto de clase  $C^{0,1}$  que cumpla que su frontera esté acotada y sea  $u$  una función en  $W^{s,p}(\Omega)$ . Entonces,

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (3.9)$$

donde  $C = C(n, s, p) \geq 0$  es una constante positiva que depende de  $n$ ,  $s$  y  $p$ . En particular,

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega), \quad (3.10)$$

es continua.

*Demostración.*

Tomemos una función  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  y notemos que como consideramos que  $\Omega$  es un conjunto con frontera acotada, entonces podemos extender (véase [20, Theorem 1, Section 5.4])  $u$  a la función  $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u = \tilde{u}$  en  $\Omega$  y

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde  $C = C(\Omega) > 0$  es una constante positiva que sólo depende del dominio  $\Omega$ .

Al igual que en la Proposición 3.3 la desigualdad (3.2) también se cumple, por lo tanto tenemos que:

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p. \quad (3.11)$$

Ahora lo que nos falta es ver la desigualdad para  $\Omega \cap \{|x-y| \leq 1\}$ . Para demostrar esta desigualdad los dos elementos principales que usaremos son el cambio de variable  $z = x - y$  y la desigualdad de Hölder/Jensen, pero veamos paso a paso el desarrollo.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \leq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &\leq \int_{\Omega} \int_{B_1(0)} \frac{|u(x) - u(z+x)|^p}{|z|^{n+sp}} dz dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{B_1(0)} \frac{|u(x) - u(z+x)|^p}{|z|^{n+sp+p-p}} dz dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{B_1(0)} \frac{1}{|z|^p} \frac{|u(x) - u(z+x)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dz dx. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad hicimos un cambio de variable y en lugar de tomar la intersección de  $\Omega$  con  $|x-y| \leq 1$  tomamos la bola de radio uno como dominio de integración, posiblemente haciendo la integral más grande.

Después las dos igualdades siguientes son un desarrollo aritmético simple, cuyo propósito es

obtener el resultado de la integral de  $|\nabla u(x + tz)|$ . Una vez que tenemos esto, veamos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{B_1(0)} \frac{1}{|z|^p} \frac{|u(x) - u(z+x)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dz dx &\leq \int_{\Omega} \int_{B_1(0)} \frac{1}{|z|^p} \left( \int_0^1 \frac{|\nabla u(x + tz)||z|}{|z|^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt \right)^p dz dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{B_1(0)} \left( \int_0^1 \frac{|\nabla u(x + tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt \right)^p dz dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1(0)} \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x + tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dt dz dx. \end{aligned}$$

En la desigualdad anterior aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo, pero notemos que aquí hay una desigualdad ya que en este caso elevamos el término que resulto del Teorema Fundamental del Cálculo [4, Theorem 5.3] y la desigualdad del triángulo.

La segunda desigualdad se cumple por la desigualdad de Hölder y por la desigualdad de Jensen, cualquiera de las dos funciona. Veamos cada caso:

Para el caso de la desigualdad de Jensen (Lema 2.18), tomamos a  $f(t) = \frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt$  y a  $\varphi(t) = t^p$  vemos que la desigualdad que se cumple es la siguiente:

$$\left( \int_0^1 \frac{|\nabla u(x + tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt \right)^p \leq \int_0^1 \frac{|\nabla u(x + tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dt \leq \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x + tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dt.$$

Aquí la primer desigualdad es la de Jensen y la segunda se da gracias a que  $\tilde{u}$  es la extensión de  $u$ .

Ahora, por otro lado si queremos hacer esto con la desigualdad de Hölder tomemos  $f(t) = \frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt$  y a  $g(t) = 1$  entonces la desigualdad se reduce a lo siguiente:

$$\|f(t)\|_1 \leq \|f(t)\|_p \|1\|_q.$$

Sustituyendo y elevando a la  $p$  obtenemos:

$$\left( \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x + tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt \right)^p \leq \left( \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x + tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dt \right)^{\frac{p}{p}} \left( \int_0^1 1^q \right)^{\frac{p}{q}} = \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x + tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dt.$$

Ya que tenemos claro el paso anterior con ambas desigualdades, seguimos con el resto de la demostración.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1(0)} \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x + tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dt dz dx &\leq \int_{B_1(0)} \int_0^1 \frac{\|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p}{|z|^{n+(s-1)p}} dt dz \\ &\leq C_1(n, s, p) \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\leq C_1(n, s, p) \left( \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right) \\ &= C_1(n, s, p) \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad anterior usamos el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración y aplicamos la integral para obtener la norma de  $\nabla \tilde{u}$ .

La segunda desigualdad es obvia, pero vale la pena explicar cómo se ve la constante que aparece ahí. Notemos que la constante viene de integrar al kernel en el dominio  $B_1$  respecto a  $z$  y usando el Teorema 2.23,

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |z|^{-n-(s-1)p} dz &= |\partial B_1(0)| \int_0^1 \rho^{-n-(s-1)p} \rho^{n-1} dz \\ &= |\partial B_1(0)| \frac{\rho^{(1-s)p}}{(1-s)p} \Big|_0^1 = \frac{|\partial B_1(0)|}{(1-s)p}. \end{aligned}$$

Ahora notemos que  $|\partial B_1(0)|$  es la medida de la esfera, cuyo valor es  $|\partial B| = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  (ver [20, Appendix A]). Entonces tenemos que  $C_1 = \frac{|\partial B_1(0)|}{(1-s)p}$  por lo que es una constante que solo depende de la dimensión,  $p$  y  $s$ .

La tercera desigualdad se cumple ya que le estamos sumando el término  $C_1(n, s, p) \|\tilde{u}\|_{L^p(\Omega)}^p$  y la igualdad se cumple ya que esa es la definición de norma en el espacio de Sobolev. Con esto solo nos queda la siguiente desigualdad, que es la última.

$$C_1(n, s, p) \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq C_2(s, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Donde usamos que  $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  [20, Theorem 1, Section 5.4].

Con esto obtenemos que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \leq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq C_2(s, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (3.12)$$

Entonces, tomamos las ecuaciones (3.11) y (3.12) y obtenemos que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \leq C_3(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + C_2(n, s, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq C_4(n, s, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (3.13)$$

De este modo obtenemos lo que estábamos buscando, así concluyendo nuestra demostración.  $\square$

Vale la pena comentar que el resultado anterior no será válido siempre. Basta con tomar un dominio que no sea Lipschitz para ver que esto no se cumple (ver [13, Example 9.1]).

Veamos cómo sería la definición para espacios que tienen a  $s > 1$  y  $s \notin \mathbb{N}$ . Primero notemos que podemos reescribir a  $s$  como  $s = b + \beta$  donde  $b$  es la parte entera de  $s$  y  $\beta$  es la parte decimal de  $s$ . En este caso el espacio  $W^{s,p}(\Omega)$  depende de las clases de equivalencia de funciones que cumplan  $u \in W^{b,p}(\Omega)$  y que además tenga que sus derivadas débiles  $D^\alpha u$ , con  $|\alpha| = b$ , pertenezcan al espacio  $W^{\beta,p}(\Omega)$ ,

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{b,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\beta,p}(\Omega) \text{ para } |\alpha| = b \right\}. \quad (3.14)$$

y éste es un espacio de Banach con la norma:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \|u\|_{W^{b,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=b} \|D^\alpha u\|_{W^{\beta,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.15)$$

**Corolario 3.5.**

Sea  $p \in [1, \infty)$  y  $s, s' > 1$ . Ahora tomemos un conjunto abierto  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  que sea de clase  $C^{0,1}$ . Si  $s \leq s'$  entonces

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega),$$

es continua.

*Demostración.*

Primero reescribamos a  $s$  y a  $s'$  como  $s = b + \beta$  y  $s' = b' + \beta'$ , donde  $b, b' \in \mathbb{N}$  y  $\beta, \beta' \in (0, 1)$ . Si se cumple que  $b = b'$  entonces basta con usar la Proposición 3.3 para obtener lo que queremos, ya que solo tendríamos que trabajar con la parte no entera  $\beta$  y  $\beta'$  y ese caso es precisamente la Proposición 3.3.

Si lo anterior no se cumple y tenemos que  $b + 1 \leq b'$ , hacemos uso de las Proposiciones 3.3 y 3.4 y obtenemos:

$$W^{b'+\beta',p}(\Omega) \subseteq W^{b',p}(\Omega) \subseteq W^{b+1,p}(\Omega) \subseteq W^{b+\beta,p}(\Omega).$$

Por lo tanto,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega). \quad (3.16)$$

Lo que concluye la demostración.  $\square$

Un resultado básico de espacios de Sobolev con  $s = q$  un entero, es que toda función en el espacio  $W^{q,p}(\Omega)$  puede ser aproximada por una sucesión de funciones suaves con soporte compacto. Esto es cierto para una  $s \in (0, 1)$ . Esto se demostrará en el Teorema 3.8, pero antes veamos unos lemas previos.

En el siguiente lema veremos una serie de propiedades que se cumplen para el espacio de Sobolev fraccionario.

**Lema 3.6.**

Sea  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  y  $p \in [1, \infty]$ , entonces los siguientes enunciados se cumplen:

1. Si  $g \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$  (el espacio de todas las funciones Lipschitz), entonces  $[g(u)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ .
2. Sea  $T := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $Tx := Ax + c$ , con  $A$  una matriz ortogonal y  $c \in \mathbb{R}^n$ . Entonces se cumple que  $[u \circ T]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ . En particular,  $[\cdot]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$  y  $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$  son invariantes ante traslaciones y transformaciones ortogonales.
3. Se cumple que  $C_c^{0,1}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  (donde  $C_c^{0,1}(\mathbb{R}^n)$  es el espacio de todas las funciones Lipschitz).
4. Si  $\varphi \in C_c^{0,1}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $u\varphi \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|u\varphi\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

donde  $C = C(n, s, \|\varphi\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}) > 0$ .

5. Si  $u^\pm \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  (la parte positiva y negativa de la función  $u$ , respectivamente) y  $|u| \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  entonces se cumple  $[u^\pm]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$  y  $[|u|]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ .

*Demostración.*

Inciso 1.

Como  $g \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ , existe  $C > 0$  tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y| < \infty \quad \text{para toda } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo que,

$$|g(u(x)) - g(u(y))| \leq C|u(x) - u(y)| < \infty$$

y entonces

$$\begin{aligned} [g(u)]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(u(x)) - g(u(y))|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \end{aligned} \quad (3.17)$$

pues  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Inciso 2.

Sea  $T$  como en las hipótesis. Entonces,

$$\begin{aligned} [u \circ T]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u(Ax + c)) - (u(Ay + c))|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(A(x)) - u(A(y))|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(\tilde{x}) - u(\tilde{y})|^p}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+sp}} d\tilde{x} d\tilde{y} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Detallemos los pasos anteriores

En la primera igualdad se usó la definición de seminorma y que  $u \circ T = u(A(x) + c)$ . En la segunda igualdad se hizo un cambio de variable (una traslación) y en la tercera igualdad se hizo otro cambio de variable  $\tilde{x} = A(x)$  y  $\tilde{y} = A(y)$ . Además, cómo la transformación cumple que  $A \in O(n)$  entonces se cumple que  $d\tilde{x} = dx$  y  $|A(x) - A(y)| = |x - y|$ .

Inciso 3.

Sea  $\varphi \in C_c^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ . Recordemos que  $\|\varphi\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = (\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + [\varphi]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p)^{\frac{1}{p}}$ , entonces para la norma en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  sabemos que

$$\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p < \infty, \quad (3.19)$$

porque  $\varphi$  es acotada y tiene soporte compacto  $K \subset B_{R-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$  para alguna  $R > 1$ . Además,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{B_R(0)} \int_{B_R(0)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \int_{B_{R-1}(0)} \frac{|\varphi(x)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Veamos por separado que los dos sumandos de (3.20) son finitos. Para el primer sumando si tomamos un cambio de variables en coordenadas polares (ver Teorema 2.23) y cambiamos el centro de la bola de la primer integral a  $y$  (veamos que cambiar el centro de la bola me obliga a cambiar el radio de la misma, ya que si no lo hacemos puede pasar que  $x \notin B_R(y)$ ). En este caso, el radio nuevo será  $2R$ , esto garantizará que  $x$  siempre este contenido en la bola), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} \int_{B_R(0)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy &\leq \int_{B_R(0)} \int_{B_{2R}(y)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq 2\|\varphi\|_{\infty} \int_{B_R(0)} \int_{B_{2R}(y)} |x - y|^{-n-sp+p} dx dy \\ &= C_1 \int_{B_R(0)} \int_0^{2R} \rho^{(1-s)p-1} d\rho dy \\ &= C_1 |B_R(0)| \frac{\rho^{(1-s)p}}{(1-s)p-1} \Big|_0^{2R} < \infty. \end{aligned}$$

Como  $(1-s)p$  siempre es positivo, el último término será finito. Ahora, para el segundo sumando de (3.20) observemos que  $|x - y| \geq |y| - |x| \geq |y| - (R - 1)$  para  $x \in B_{R-1}(0)$  y  $y \in B_R(0)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \int_{B_{R-1}(0)} \frac{|\varphi(x)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy &\leq \|\varphi\|_{\infty}^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \int_{B_{R-1}(0)} (|y| - R + 1)^{-n-sp} dx dy \\ &= |B_{R-1}(0)| \|\varphi\|_{\infty}^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} (|y| - R + 1)^{-n-sp} dy \\ &= |B_{R-1}(0)| |\partial B_1(0)| \|\varphi\|_{\infty}^p \int_R^{\infty} (r - R + 1)^{-n-sp} r^{n-1} dr < \infty, \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \int_R^{\infty} (r - R + 1)^{-n-sp} r^{n-1} dr &= \int_1^{\infty} r^{-1-sp} \frac{(r + R - 1)^{n-1}}{r^{n-1}} dr \\ &\leq \sup_{\rho > 1} \frac{(\rho + R - 1)^{n-1}}{\rho^{n-1}} \int_1^{\infty} r^{-1-sp} dr \\ &= \sup_{\rho > 1} \frac{(\rho + R - 1)^{n-1}}{\rho^{n-1}} \frac{r^{-sp}}{-sp} \Big|_{r=1}^{r=\infty} < \infty. \end{aligned}$$

*Inciso 4.*

Veamos que la norma  $\|\varphi u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$  es finita. En efecto, por un lado tenemos que

$$\|\varphi u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi u(x) - \varphi u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.21)$$

El primer sumando es finito,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi u|^p dx \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \|\varphi\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}^p \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p < \infty. \quad (3.22)$$

El segundo sumando lo podemos separar en dos términos más,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi u(x) - \varphi u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)(u(x) - u(y)) + u(y)(\varphi(x) - \varphi(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq 2^p \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^p |u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p |\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Al primer término le aplicamos el Teorema de Fubini-Tonelli y lo acotamos del siguiente modo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^p |u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p < \infty. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Al segundo término lo acotamos de la siguiente forma: (En el siguiente desarrollo las constantes  $C_1, \dots, C_4 > 0$  dependen a lo más de  $n, p, s$  y  $\|\varphi\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}$ .)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p |\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq C_1 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1(y)} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(y)} \frac{|u(y)|^p |\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right) \\ &\leq C_2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p \int_0^1 \rho^{(1-s)p-1} d\rho dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(y)} \frac{|u(y)|^p |\varphi(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(y)} \frac{|u(y)|^p |\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Veamos que en la segunda desigualdad, en el primer término sacamos a  $|u(y)|^p$  de la integral ya que no depende de  $x$  y aplicamos un cambio de variable, como los de los otros incisos. El segundo

término sólo lo separamos. Siguiendo con el desarrollo obtenemos la siguiente desigualdad.

$$\begin{aligned}
 & C_2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p \int_0^1 \rho^{(1-s)p-1} d\rho dy \right. \\
 & \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(y)} \frac{|u(y)|^p |\varphi(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(y)} \frac{|u(y)|^p |\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right) \\
 & \leq C_3 \left( \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p + \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p |\varphi(y)|^p \int_1^\infty \varrho^{-sp-1} dx dy \right).
 \end{aligned}$$

En donde vemos que al integrar  $\rho^{(1-s)p-1}$ , parte de lo que vamos a obtener es  $\rho^{(1-s)p}$ . Veamos que  $(1-s)p$  es siempre positivo por lo que podemos acotar por una constante y la norma de  $u$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Mientras, el segundo sumando de esta desigualdad se obtiene de acotar a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(y)} \frac{|u(y)|^p |\varphi(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy$$

Con una constante y  $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p$ . Veamos que este lo podemos acotar de este modo ya que la singularidad no es parte del dominio de integración, por lo que la norma de  $u$ , en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi$  en  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  bastan. El tercer sumando de esta desigualdad surge de sacar a  $|u(y)|^p$  y  $|\varphi(y)|^p$  de la integral y después aplicar un cambio de variable a coordenadas polares. Siguiendo tenemos,

$$\begin{aligned}
 & C_3 \left( \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p + \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p |\varphi(y)|^p \int_1^\infty \varrho^{-sp-1} dx dy \right) \\
 & \leq C_3 \left( \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p \right) \\
 & \leq C_4 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p < \infty,
 \end{aligned}$$

Aquí, en la primera desigualdad solo acotamos al tercer sumando de la línea anterior con la norma de  $u$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi$  en  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . El procedimiento para hacer esto es análogo a los pasos anteriores, específicamente al acotamiento del segundo sumando de la ecuación (3.25) y al acotamiento del primer sumando de la ecuación (3.25).

En la última desigualdad, acotamos con una constante que dependerá de  $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^p$ ,  $n$  y  $s$ .

Por lo que obtenemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p |\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq C_4 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p < \infty \quad (3.26)$$

Juntando las ecuaciones (3.22), (3.24) y (3.26) tenemos que  $\varphi u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|\varphi u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_5 \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.27)$$

para una constante  $C_5 > 0$  que depende de  $n$ ,  $p$ ,  $s$  y  $\|\varphi\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}$ .



*Inciso 5.*

Definamos a la función

$$g(t) := \begin{cases} t & \text{si } t > 0; \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Además, veamos que  $g(t)$  es Lipschitz

$$|g(x) - g(y)| = \begin{cases} |x - y| & \text{si } x, y \geq 0; \\ |y| \leq |x - y| & \text{si } x \leq 0, y \geq 0; \\ |x| \leq |x - y| & \text{si } y \leq 0, x \geq 0; \\ 0 \leq |x - y| & \text{si } x, y \leq 0. \end{cases}$$

Entonces,  $u^+ = g(t)$  y por (3.17) se obtiene que  $[u^+]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ . Argumentos análogos se usan para probar que  $[u^-]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$  y  $[|u|]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ .  $\square$

**Lema 3.7.**

Sea  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una  $\varphi \in C_c^{0,1}(\mathbb{R}^n)$  (el espacio de todas las funciones Lipschitz con soporte compacto) que cumple que

$$\|u - \varphi u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

*Demostración.*

Empecemos tomando  $m \in \mathbb{N}$  y definamos  $\varphi_m \in C_c^{0,1}(\mathbb{R}^n)$  de tal modo que esta sea radialmente simétrica y cumpla que

$$\varphi_m \equiv 1 \quad \text{en } B_m(0), \quad \varphi_m \equiv 0 \quad \text{en } B_{m+1}(0)^c, \quad 0 \leq \varphi_m \leq 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $[\varphi_m]_{C^{0,1}(\Omega)} = 1$ .

Entonces por el Lema 3.6 sabemos que existe una constante  $C = C(m, s) > 0$  que cumple que

$$\|\varphi_m u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para toda } m \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

Ahora definamos  $u_m := \varphi_m u$  y sin pérdida de generalidad tomemos que  $u \geq 0$ . Como  $0 \leq \varphi_m \leq 1$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq u - u_m \leq u$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $u - u_m = 0$  en  $B_m(0)$  porque  $\varphi_m = 1$  en  $B_m(0)$ . Por convergencia dominada,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$ ; análogamente,  $[u - u_m]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$  cuando  $m$  tiende a infinito.

Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u - \varphi_m u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \|u - \varphi_m u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + [u - \varphi_m u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \quad (3.29)$$

que es exactamente lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Teorema 3.8.**

Para toda  $s > 0$ , el espacio de funciones suaves con soporte compacto  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , i.e.  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}}$ .

*Demostración.*

Sea  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  y tomemos a  $\varphi_m \in C_c^{0,1}(\mathbb{R}^n)$  para  $m$  en los números naturales. Considerando el Lema 3.7 podemos tomar una  $\varphi_m$  que cumpla que  $\|u - \varphi_m u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{m}$ . Entonces definimos  $v_m := \varphi_m u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  donde existe una  $R_m > 0$  tal que  $v_m \equiv 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus B_{R_m}(0)$ . Ahora sea  $(\rho_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$  una sucesión regularizante y denotemos a  $v_{m,\epsilon} := \rho_\epsilon * v_m$  como el mollificador de  $v_m$ , notemos que gracias al mollificador podemos afirmar que  $v_{m,\epsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Entonces por el inciso 3) del Lema 3.6 sabemos que  $v_m \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  y por ende podemos concluir que  $v_{m,\epsilon} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $m \in \mathbb{N}$  y  $\epsilon \in (0,1]$  (ver Afirmación 1 abajo). Con esto usamos la desigualdad del triángulo para obtener

$$\begin{aligned} \|u - v_{m,\epsilon}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|u - v_{m,\epsilon} + v_m - v_m\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u - v_m\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + \|v_m - v_{m,\epsilon}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{1}{m} + \|v_m - v_{m,\epsilon}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Entonces para demostrar este teorema basta ver que  $v_{m,\epsilon} \rightarrow v_m$  en  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Primero, si tomamos  $R = R_m > 0$  con  $v_m = v_{m,\epsilon} = 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$  la convergencia  $v_{m,\epsilon} \rightarrow v_m$  se cumple en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  en virtud del Teorema 2.21, el cuál, además, garantiza la convergencia puntual casi dondequiera. Por lo tanto solo queda probar la convergencia  $[v_m - v_{m,\epsilon}]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Con este fin, demostraremos primero algunas afirmaciones.

Afirmación 1: Se cumple que  $[v_{m,\epsilon}]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq [v_m]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ .

En efecto, sean  $\varrho = t^p$  y a  $f = v_m(x-z) - v_m(y-z)$ . Usando la desigualdad de Jensen (Lema 2.18),

$$\begin{aligned} [v_{m,\epsilon}]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v_{m,\epsilon}(x) - v_{m,\epsilon}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(z) v_m(x-z) dz - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(z) v_m(y-z) dz \right|^p \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(z) [v_m(x-z) - v_m(y-z)] dz \right|^p \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \rho_\epsilon(z) dz \right) \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \end{aligned}$$

En las primeras tres igualdades solo estamos usando las definiciones de semi-norma, de  $v_{m,\epsilon}$  y factorizando.

En la cuarta igualdad definimos a  $\varrho = t^p$ ,  $f = v_m(x-z) - v_m(y-z)$  y  $d\mu = \rho_\epsilon(z) dz$  para poder reescribir lo que teníamos con la composición de funciones presente en esa igualdad y así poder hacer uso de la desigualdad de Jensen.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \rho_\epsilon(z) dz \right) \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\varrho \circ f) \rho_\epsilon(z) dz \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx dy$$

Como ya se había comentado en el paso anterior se usó la desigualdad de Jensen. Veamos que en principio no es muy claro que estamos en un espacio de probabilidad (una de las hipótesis para que la desigualdad de Jensen se cumpla), pero notemos que al tener a  $d\mu = \rho_\epsilon(z)dz$  nos garantiza que la medida es igual a uno, por lo que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio de probabilidades con  $d\mu$ .

Ya que aclaramos el paso anterior regresamos a la demostración.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\varrho \circ f) \rho_\epsilon(z) dz \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(z) [v_m(x-z) - v_m(y-z)]^p dz \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(z) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{[v_m(x-z) - v_m(y-z)]^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy dz \\ &= \|\rho_\epsilon\|_1 [v_m]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = [v_m]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Aquí en la segunda igualdad aplicamos el Teorema de Fubini para cambiar el orden de integración, lo cual da la definición de semi-norma de  $v_m$  y la norma de  $\rho_\epsilon$  en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Por lo que obtenemos,

$$[v_{m,\epsilon}]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \leq [v_m]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.31)$$

Con esto queda demostrada la afirmación 1.

Ahora, tomemos  $V_m, V_{m,\epsilon} \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  dado por

$$V_m(x, y) := \frac{v_m(x) - v_m(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \quad \text{y} \quad V_{m,\epsilon}(x, y) := \frac{v_{m,\epsilon}(x) - v_{m,\epsilon}(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}.$$

Con lo anterior podemos ver que

$$\|V_m - V_{m,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v_m(x) - v_{m,\epsilon}(x) - (v_m(y) - v_{m,\epsilon}(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy = [v_m - v_{m,\epsilon}]_{W^{s,p}(\Omega)}^p.$$

Afirmación 2: La convergencia  $\|V_{m,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \rightarrow \|V_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}$  se cumple cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En efecto, recordemos que por el Teorema 2.21 sabemos que  $v_{m,\epsilon} \rightarrow v_m$  punto a punto para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ahora tomando la afirmación anterior y el Lema 2.19 tenemos

$$\|V_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}^p \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|V_{m,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}^p \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \|V_{m,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}^p \leq [v_m]_{W^{s,p}(\Omega)} = \|V_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}^p. \quad (3.32)$$

Lo cual implica esta afirmación.

Afirmación 3:  $V_{m,\epsilon} \rightharpoonup V_m$  ( $V_{m,\epsilon}$  converge débilmente a  $V_m$ ) en  $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , cuando  $\epsilon$  tiende a cero.

En efecto, sea  $U(x, y) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  donde  $p' = \frac{p}{p-1}$  es el conjugado de  $p$ . Ahora, definimos

$$U_m(x, y) := \begin{cases} U(x, y) & \text{para } x, y \in B_m(0) \text{ tal que } |x-y| \geq \frac{1}{m} \text{ con } m \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{para cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.33)$$

Primero es importante notar que esta función garantiza que no va a haber ninguna singularidad al integrar esta función multiplicada por  $|x - y|^{-n-sp}$ , ya que la definición de la misma la elimina, y que vamos a tener integrabilidad al infinito. Además si usamos convergencia dominada tenemos que  $U_m$  converge a  $U$  en  $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  cuando  $m$  tiende a infinito.

Una vez dicho lo anterior, definimos las funciones  $h_1^m, h_2^m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$h_1^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-\frac{n}{p}-s} U_m(x, y) dy \quad y \quad h_2^m(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-\frac{n}{p}-s} U_m(x, y) dx. \quad (3.34)$$

Es importante destacar que por la forma en que las dos funciones anteriores están definidas, estas pertenecen al espacio  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $m \in \mathbb{R}^n$  y además tienen soporte compacto. Siguiendo un proceso parecido al de las dos afirmaciones anteriores notamos que como  $v_{m,\epsilon}$  converge puntualmente en casi todos lados a  $v_m$  entonces, para  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} V_{m,\epsilon}(x, y) U_m(x, y) dx dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [v_{m,\epsilon}(x) - v_{m,\epsilon}(y)] \frac{U_m(x, y)}{|x - y|^{\frac{n}{p}+s}} dx dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} v_{m,\epsilon}(x) h_1^m(x) dx - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} v_{m,\epsilon}(y) h_2^m(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v_m(x) h_1^m(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} v_m(y) h_2^m(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [v_m(x) - v_m(y)] \frac{U_m(x, y)}{|x - y|^{\frac{n}{p}+s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} V_m(x, y) U_m(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Detallemos el procedimiento anterior.

En la primera igualdad solo estamos usando la definición de la función  $V_{m,\epsilon}$ , notemos que la definición anterior combinada con la función  $U_m(x, y)$  nos da las definiciones de las funciones  $h_1^m$  y  $h_2^m$  que es lo que se está utilizando en la segunda igualdad. Aquí se están separando las integrales y límites, los cuales existen por como se definió la función  $U_m(x, y)$ .

Posteriormente en la tercera igualdad se aplica la convergencia puntual de  $v_{m,\epsilon}$ , esto por el Teorema de Convergencia Dominada.

En la cuarta igualdad sólo volvemos a juntar las integrales para que, en la quinta igualdad, podamos reescribir la ecuación con la definición de la función  $V_m$ .

Nota: Veamos que el paso anterior da la convergencia débil de  $V_{m,\epsilon}$  con una función  $U_m(x, y)$  que excluye a la singularidad en cero. Esto todavía no es suficiente para demostrar la afirmación ya que la función no es lo suficientemente general, por lo tanto veamos los siguientes pasos.

Ahora, ya comentado lo anterior veamos que tenemos la siguiente cota, dada una  $m \in \mathbb{N}$  arbitraria.

Primero veamos que la siguiente igualdad se cumple al sumar el cero  $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) -$

$V_m(x, y)]U_m(x, y) dx dy$ .

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)]U(x, y) dx dy \right| \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)]U(x, y) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)]U_m(x, y) dx dy \right|. \end{aligned}$$

Después, obtenemos la siguiente igualdad factorizando.

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)]U(x, y) - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)]U_m(x, y) dx dy \right| \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)](U(x, y) - U_m(x, y)) dx dy \right|. \end{aligned}$$

Ahora, obtenemos la siguiente desigualdad usando la desigualdad de Hölder y la segunda desigualdad, aplicando la *Afirmación 2*. Esta última, nos da la cota que buscamos.

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)](U(x, y) - U_m(x, y)) dx dy \right| \\ & \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \|V_{m,\epsilon} - V_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \|U - U_m\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \\ & \leq 2\|V_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|U - U_m\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

Ahora usando la cota anterior, tomando a  $m \rightarrow \infty$  y consideramos la convergencia de  $U_m$  a  $U$  en  $L^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  se sigue que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} [V_{m,\epsilon}(x, y) - V_m(x, y)]U(x, y) dx dy = 0, \quad (3.36)$$

Lo cual es la definición de convergencia débil para el espacio  $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

Por último si tomamos la ecuación (3.32) de la *Afirmación 2* que garantiza la convergencia de la norma de  $V_{m,\epsilon}$ , la ecuación (3.36) de la *Afirmación 3* que da la convergencia débil de  $V_{m,\epsilon}$ , la propiedad de que los espacios  $L^p$  son uniformemente convexos para  $p \in (1, \infty)$  (ver [9, Chapter 4]) y el Teorema de Radon-Riesz podemos concluir que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [v_m - v_{m,\epsilon}]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (3.37)$$

lo cual implica que  $v_{m,\epsilon}$  converge a  $v_m$  en el espacio  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . Por lo que tenemos

$$\|u - v_{m,\epsilon}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{m}. \quad (3.38)$$

Por ende tenemos que la sucesión  $v_{m,\epsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  es tal que  $v_{m,\epsilon} \rightarrow u$  en la norma  $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ , por lo que podemos afirmar que  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}}$ , como queríamos. □

*Nota:* El teorema anterior se cumple para  $p = 1$ , para ver esto lo único que hay que notar es que las afirmaciones uno y dos implican la convergencia en  $L^1$ .

### 3.2. El espacio $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$

Con el resultado anterior ya demostrado vale la pena comentar lo siguiente: Notemos que el espacio  $W_c^{s,p}(\Omega)$  denota la cerradura del espacio de las funciones de prueba  $C_c^\infty(\Omega)$  con la norma dada en la Definición 3.1. Dicho esto y en vista del teorema anterior se puede ver que  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W_c^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  pero esto es muy específico de  $\mathbb{R}^n$  ya que esto no lo podemos asegurar para una  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  arbitraria, ya que  $C_c^\infty(\Omega)$  no es denso en  $W^{s,p}(\Omega)$  en general, para ver esto con mas detalle se recomienda consultar [3, Theorem 3.31]. Esto motiva la siguiente definición.

#### Definición 3.9.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y tomemos  $p \in (1, +\infty)$  y  $s \in (0, 1)$ . Entonces, definimos el espacio

$$\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) : u(x) = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \right\}. \quad (3.39)$$

El espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  nos servirá para encontrar soluciones débiles de problemas diferenciales fraccionarios con condiciones de frontera de Dirichlet. En particular, el espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  es el análogo fraccionario del espacio homogéneo de Sobolev usual  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

En el siguiente teorema veremos que el espacio que se acaba de definir es un espacio de Banach para  $p \geq 1$  y de Hilbert para  $p = 2$ , al igual daremos una igualdad útil que ayudará a entender mejor al conjunto  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ . Este será el primer paso para poder después pasar a resultados de existencia al problema (1.1).

#### Teorema 3.10.

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto,  $p \in (1, +\infty)$  y  $s \in (0, 1)$ . El espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con la norma definida en la Definición 3.1. En particular, para  $p = 2$ ,  $\mathcal{H}_0^s(\Omega) := \mathcal{W}_0^{s,2}(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ .

*Demostración.*

Por la Proposición 3.2, el espacio  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Banach y, por el Teorema 3.8,  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}}$  es cerrado, por lo que falta ver que el espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  es cerrado y esta contenido en  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Primero veamos, que por la Definición 3.9 tenemos que  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . Ahora, veamos que  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  es cerrado. Para ello tomemos una sucesión  $(u_n)_n \subset \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  y probemos que  $u \in \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ .

Como  $(u_n)_n \rightarrow u$  en  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , en particular  $(u_n)_n \rightarrow u$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,  $(u_n)_n \rightarrow u$  para casi todo punto en  $\mathbb{R}^n$ . Además, como  $(u_n)_n \subset \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  tenemos que  $u_n(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  y como  $(u_n)_n \rightarrow u$ , entonces  $u(x) = 0$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ . Por lo tanto  $(u_n)_n \rightarrow u$  en  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ . Con esto podemos concluir que el espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  es cerrado.

Con lo anterior, podemos ver que el espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  es un subespacio cerrado y lineal de  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , que es un espacio de Banach; por lo tanto también  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  es de Banach, véase [11, Proposición 5.9]

Un argumento similar se usa para ver que  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar de  $H^s(\mathbb{R}^N)$ . Como  $H^s(\mathbb{R}^N)$  es de Hilbert y  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$  es un subespacio cerrado de  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$  es de Hilbert (ver [11, Proposición 5.9]).  $\square$

Observación: Para todo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto, se cumple que

$$\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}}.$$

Esta igualdad se demuestra de forma similar al Teorema 3.8, en el sentido de que se usan truncamientos y regularizaciones. Sin embargo, esta demostración es más delicada y técnica, ya que se necesita que el soporte de la regularización esté contenido en  $\Omega$ . Debido a que en esta tesis no usaremos este resultado de densidad, sólo nos limitaremos a dar una referencia donde se puede consultar una prueba detallada que no usa teoría de interpolación (ver [21, Theorem 6]).

**Lema 3.11.**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto y  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , entonces:

- 1) Si  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , entonces  $\varphi u \in \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ .
- 2) Si  $g \in C^{0,1}(\mathbb{R})$  con  $g(0) = 0$ ,  $u \equiv 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  y  $\Omega$  acotado, entonces  $g(u) \in \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ .
- 3) Si  $(\pm 1)u \geq 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ , entonces  $u^\mp \in \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ .
- 4) Si  $U \subset \Omega$  es abierto, entonces  $\mathcal{W}_0^{s,p}(U) \subset \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ .

*Demostración.*

Este lema es una consecuencia directa de la definición de  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  y del Lema 3.6.  $\square$

### 3.3. Desigualdad de Poincaré y Teorema de Fréchet-Riesz

**Definición 3.12.**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto con  $x \in \Omega$ . Entonces, definimos la siguiente función como

$$\kappa_{\Omega,s,p}(x) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy.$$

Nota: A esta función se le llama la “Killing measure” y generalmente se usa para incorporar las condiciones de frontera de Dirichlet en cálculos que involucran la norma.

**Lema 3.13.**

La función  $\kappa$  cumple lo siguiente:

- 1) Si  $0 < |\Omega| < \infty$ , entonces  $\frac{\omega_n^{1+\frac{sp}{n}}}{sp} (n|\Omega|)^{-\frac{sp}{n}} \leq \kappa_{\Omega,s,p}(x)$  para toda  $x \in \Omega$ , donde  $\omega_n$  es la medida de la esfera de radio uno en  $\mathbb{R}^n$ .
- 2) Si  $\Omega = (-a, b) \times \mathbb{R}^{n-1}$  para alguna  $b, a > 0$ , entonces para toda  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$  con  $x_1 \in (-a, b)$  tenemos que

$$\kappa_{\Omega,s,p}(x) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1+sp}{2})}{sp \Gamma(\frac{n+sp}{2})} [(b-x_1)^{-sp} + (x_1+a)^{-sp}]. \tag{3.40}$$

En particular, para  $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$  tenemos que  $\kappa_{\Omega, s, p}(x) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1+sp}{2})}{sp \Gamma(\frac{n+sp}{2})} x_1^{-sp}$

*Demostración.*

Empecemos demostrando el punto 1): Primero, es importante notar que como la medida de  $\Omega$  es positiva y finita entonces podemos tomar un radio  $r > 0$  tal que  $|\Omega| = |B_r(0)|$ ; donde el radio tiene la forma de  $r = (\frac{n|\Omega|}{\omega_n})^{\frac{1}{n}}$ , vemos que al definir al radio de esta manera nos aseguramos de que  $B_r(0)$  tenga el mismo volumen  $\Omega$ .

Con lo anterior podemos ver que para cada  $y \in \mathbb{R}^n$  tenemos

$$|\Omega \setminus B_r(y)| = |\Omega| - |\Omega \cap B_r(y)| = |B_r(y)| - |\Omega \cap B_r(y)| = |B_r(y) \setminus \Omega|. \quad (3.41)$$

Entonces, si tomamos un  $x \in \Omega$  tenemos

$$\kappa_{\Omega, s, p}(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy + \int_{B_r(x) \setminus \Omega} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy - \int_{\Omega \setminus B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy. \quad (3.42)$$

Ahora tomemos cada uno de los sumandos anteriores y analicémoslos.

En el primer término notemos que tomamos el cambio de variable  $z = x - y$  y centramos la bola al origen, dando la igualdad

$$\omega_n \int_r^\infty t^{-1-sp} dt = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy. \quad (3.43)$$

Donde  $\omega_n$  es la medida de la esfera de radio uno en  $\mathbb{R}^n$ .

Para el segundo y tercer término se cumple que

$$\frac{1}{|r|^{n+sp}} (|B_r(x) \setminus \Omega|) = \frac{1}{|r|^{n+sp}} \int_{B_r(x) \setminus \Omega} dy \leq \int_{B_r(x) \setminus \Omega} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy \quad (3.44)$$

y

$$-\frac{1}{|r|^{n+sp}} (|\Omega \setminus B_r(x)|) = -\frac{1}{|r|^{n+sp}} \int_{\Omega \setminus B_r(x)} dy \leq -\int_{\Omega \setminus B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy. \quad (3.45)$$

Sumando las ecuaciones (3.43), (3.44) y (3.45) obtenemos

$$\omega_n \int_r^\infty t^{-1-sp} dt + \frac{1}{|r|^{n+sp}} (|B_r(x) \setminus \Omega|) - \frac{1}{|r|^{n+sp}} (|\Omega \setminus B_r(x)|) = \frac{\omega_n}{sp} r^{-sp}. \quad (3.46)$$

Por lo tanto juntando las ecuaciones (3.42) y (3.46) obtenemos

$$\frac{\omega_n}{sp} r^{-sp} \leq \kappa_{\Omega, s, p}(x). \quad (3.47)$$

Lo cual demuestra el primer inciso.

Para el segundo inciso, analicemos la función  $\kappa_{\Omega, s, p}(x)$ . Para esta demostración estaremos considerando una dimensión  $n \geq 2$ , ya que para el caso de dimensión uno el procedimiento es análogo y más sencillo.



Si escribimos  $x = (x_1, x') \in (-a, b) \times \mathbb{R}^{n-1}$  y  $y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^n$  con  $y_1 \in \mathbb{R}$ ,  $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$  y si, además, usamos el Teorema de Fubini y la función Beta (ver Definición 2.16), lo siguiente es cierto

$$\begin{aligned} \kappa_{\Omega, s, p}(x) &= \int_{\mathbb{R} \setminus (-a, b)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [|x_1 - y_1|^2 + |x' - y'|^2]^{-\frac{n+sp}{2}} dy' dy_1 \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus (-a, b)} |x_1 - y_1|^{-n-sp} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \left|\frac{z'}{|x_1 - y_1|}\right|^2\right)^{-\frac{n+sp}{2}} dz' dy_1 \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus (-a, b)} |x_1 - y_1|^{-1-sp} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + |\nu'|^2\right)^{-\frac{n+sp}{2}} d\nu' dy_1 \end{aligned}$$

Como mencionamos anteriormente, como tenemos que  $x = (x_1, x') \in (-a, b) \times \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^n$  y  $v = (x_1 - y_1, x' - y')$  con  $v^2 = \sum_{k=0}^2 v_k^2$ , entonces, la primera igualdad parte del siguiente desarrollo,

$$\begin{aligned} |x - y|^{-n-sp} &= |x - y|^{\frac{2}{2}(-n-sp)} = |(x - y)^2|^{-\frac{n+sp}{2}} = |[(x_1, x') - (y_1, y')]^2|^{-\frac{n+sp}{2}} \\ &= |(x_1 - y_1, x' - y')^2|^{-\frac{n+sp}{2}} = |(x_1 - y_1)^2 + (x' - y')^2|^{-\frac{n+sp}{2}}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad, solo factorizamos al termino  $|x_1 - y_1|^2$  y tomamos el cambio de variable  $z' = |x' - y'|$ .

La tercera igualdad se toma el cambio de variable  $\nu' = \frac{z'}{|x_1 - y_1|}$ , esto genera que el exponente del primer término cambia de  $-n - sp$  a  $-1 - sp$  por el jacobiano en  $\mathbb{R}^{n-1}$  que sale por el cambio de variable.

Ya que aclaramos los pasos anteriores seguimos con la demostración.

$$\begin{aligned} \kappa_{\Omega, s, p}(x) &= \int_{\mathbb{R} \setminus (-a, b)} |x_1 - y_1|^{-1-sp} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + |\nu'|^2\right)^{-\frac{n+sp}{2}} d\nu' dy_1 \\ &= \omega_{n-1} \left( \int_b^\infty |y_1 - x_1|^{-1-sp} dy_1 + \int_{-\infty}^{-a} |x_1 - y_1|^{-1-sp} dy_1 \right) \int_0^\infty \frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{\frac{n+sp}{2}}} dt \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{2} \left( \int_{b-x_1}^\infty t^{-1-sp} dt + \int_{a+x_1}^\infty t^{-1-sp} dt \right) \int_0^\infty \frac{\tau^{\frac{n-1}{2}-1}}{(1+\tau)^{\frac{n+sp}{2}}} d\tau. \end{aligned}$$

Detallando los pasos previos, en la segunda igualdad, integramos en coordenadas esféricas al término  $(1 + |\nu'|^2)^{-\frac{n+sp}{2}}$  lo cual da la medida de la esfera de radio uno  $\omega_{n-1}$ . Esto, además, genera que la integral anterior salga como constante, quedando así el producto que se ve en esa igualdad.

En la tercera igualdad hacemos uso del cambio de variable  $|x_1 - y_1| = t$  y  $\tau = t^2$ . Con esto aclarado seguimos,

$$\begin{aligned} \kappa_{\Omega, s, p}(x) &= \frac{\omega_{n-1}}{2} \left( \int_{b-x_1}^\infty t^{-1-sp} dt + \int_{a+x_1}^\infty t^{-1-sp} dt \right) \int_0^\infty \frac{\tau^{\frac{n-1}{2}-1}}{(1+\tau)^{\frac{n+sp}{2}}} d\tau \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{2sp} B\left(\frac{1+sp}{2}, \frac{n-1}{2}\right) [(b-x_1)^{-sp} + (x_1+a)^{-sp}] \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1+sp}{2})}{sp \Gamma(\frac{n+sp}{2})} [(b-x_1)^{-sp} + (x_1+a)^{-sp}]. \end{aligned} \tag{3.48}$$

En la segunda igualdad, primero sustituimos a las integrales en paréntesis por la definición de la función Beta, mientras que a la integral que se encuentra sola la resolvemos. Por último en la igualdad final usamos la definición alterna de la función Beta que usa a la función Gamma, ver Definición 2.15 y Definición 2.16.

Con lo anterior se obtiene lo que se quería demostrar en el segundo inciso y de este modo finalizamos la demostración.  $\square$

Pasemos al siguiente resultado que es fundamental para la última parte de este trabajo.

**Teorema 3.14.** (*Desigualdad de Poincaré*)

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto tal que al menos una de las siguientes condiciones se cumpla:

1. Existe una  $a > 0$  tal que  $\Omega \subset (-a, a) \times \mathbb{R}^{n-1}$ , i.e., el conjunto  $\Omega$  es delgado en la dirección  $x_1$ .
2.  $|\Omega| < \infty$ .

Entonces, existe  $C' = C'(n, s, p)$  tal que

$$C\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo } u \in \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega), \quad (3.49)$$

con

$$C = \begin{cases} C'a^s, & \text{si se cumple la hipótesis 1,} \\ C'|\Omega|^{-\frac{s}{n}}, & \text{si se cumple la hipótesis 2.} \end{cases} \quad (3.50)$$

*Demostración.*

Para el primer caso, basta suponer que  $\Omega = (-a, a) \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Usaremos el inciso 4 del Lema 3.11. Si tomamos a  $u \in \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + 2 \int_{\Omega} |u(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} dy dx \\ &\geq \int_{\Omega} |u(x)|^p \kappa_{\Omega, s, p}(x) dx. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En la ecuación anterior primero se toma la Definición 3.1 con  $\Omega = \mathbb{R}^n$  y luego esa norma se descompone en varias integrales, una de ellas sobre  $\Omega \times \Omega$  mientras que el termino

$$2 \int_{\Omega} |u(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} dy dx,$$

es lo que sobra.

Ahora, por la definición de  $\Omega$ , caemos en el caso 2 del Lema 3.13 lo cual da (3.40) como una definición alterna para la función  $\kappa_{\Omega, s, p}(x)$ . De este modo podemos acotar a  $\kappa_{\Omega, s, p}(x)$  con por abajo por una constante, obteniendo

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \geq \int_{\Omega} |u(x)|^p \kappa_{\Omega, s, p}(x) dx \geq C\|u\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad (3.52)$$

donde  $C = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1+sp}{2})}{sp \Gamma(\frac{n+sp}{2})} [\inf_{z_1 \in (-a,a)} \{(a - z_1)^{-sp} + (a + z_1)^{-sp}\}]$ .

Para el segundo caso procedemos de manera similar. Supongamos que  $|\Omega| < \infty$  y que  $u \in \mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$ . Entonces

$$\begin{aligned} [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + 2 \int_{\Omega} |u(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} dy dx \\ &\geq \int_{\Omega} |u(x)|^p \kappa_{\Omega,s,p}(x) dx \geq \frac{\omega^{1+\frac{sp}{n}}}{sp} (n|\Omega|)^{-\frac{sp}{n}} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p = C \|u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned} \quad (3.53)$$

por el Lema 3.13. □

Una razón por la cual resulta tan importante la desigualdad de Poincaré es que sirve para poder dar equivalencias entre normas, esto es un resultado muy usado para el caso del espacio de Sobolev usual y cabe recalcar que esto no será una excepción para el caso del espacio de Sobolev fraccionario.

**Observación 3.15.**

*Concretamente, notemos que la Desigualdad de Poincaré nos servirá para dos cosas.*

*La primera, será ver que la seminorma  $[\cdot]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$  es una norma en el espacio  $\mathcal{W}_0^{s,p}(\Omega)$  la cual es equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ . La segunda será ver que  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$ , al ser un espacio de Hilbert con el producto escalar definido en la Proposición 3.2, induce una norma equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)}$ .*

**Observación 3.16.**

*A partir de ahora, al espacio  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$  lo dotaremos con el producto escalar (equivalente al producto definido en la Proposición 3.2)*

$$\langle u, w \rangle_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)} = \frac{C(n,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(w(x) - w(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \quad u, w \in \mathcal{H}_0^s(\Omega),$$

*y con la norma  $\|u\|_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)} := \langle u, u \rangle_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$ . Aquí,  $C(n,s)$  es una constante positiva explícitamente dada por*

$$C(n,s) = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} \right)^{-1} > 0.$$

*Cuya definición es motivada por el Lema 4.5.*

Ahora podemos pasar a enunciar el Teorema de representación de Frechet-Riesz. Primero daremos el enunciado general y después daremos la versión para el caso del espacio de Hilbert fraccionario.

**Teorema 3.17.** *(Fréchet-Riesz)*

*Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T : H \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función lineal y continua. Entonces existe un único  $u \in H$  tal que*

$$Tw = \langle u, w \rangle =: T_u w \quad \text{para todo } w \in H. \quad (3.54)$$

*Más aún, la función  $\iota : H \rightarrow \mathcal{L}(H; \mathbb{R})$  dada por  $\iota u := T_u w$  es un isomorfismo lineal y una isometría.*

*Demostración.*

Este es un resultado clásico de análisis funcional, y la demostración se puede consultar, por ejemplo, en [11].  $\square$

**Corolario 3.18.**

Sea  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$  el espacio de Hilbert definido en el Teorema 3.10 con el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)}$  y  $T \in (\mathcal{H}_0^s(\Omega))^*$  una función lineal y continua. Entonces existe un único elemento  $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$  tal que

$$T\varphi = \langle u, \varphi \rangle_{H^s(\Omega)} = \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy =: T_u\varphi, \quad (3.55)$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$ .  $\square$

Este Corolario nos será muy útil posteriormente para poder argumentar que existen soluciones para el problema de Poisson con el laplaciano fraccionario, el cual se discutirá a fondo en el siguiente capítulo.



## Capítulo 4

# El laplaciano fraccionario

Este capítulo lo dedicaremos a estudiar al laplaciano fraccionario. Comenzaremos viendo su definición, qué tipo de operador es y posteriormente pasaremos a consolidar algunos resultados importantes de este operador. Uno de los resultados centrales de este capítulo es establecer que el laplaciano fraccionario tiene un comportamiento regular, el cual, bajo ciertos límites tendrá el mismo comportamiento que el laplaciano usual (ver Proposición 4.11).

Posteriormente pasaremos al otro resultado central del capítulo, el cual es también el último resultado de esta tesis y el resultado principal de todo el trabajo. En éste, demostraremos la existencia y unicidad de soluciones a problemas lineales con condiciones de Dirichlet usando al laplaciano fraccionario (ver Teorema 4.13).

Dicho lo anterior, empecemos por la definición del laplaciano fraccionario.

### 4.1. Definición y resultados del laplaciano fraccionario

#### Definición 4.1.

Tomemos a  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (véase la Definición 2.6) con  $s \in (0, 1)$ , entonces el laplaciano  $(-\Delta)^s$  se define como

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad (4.1)$$

donde las letras *P.V.* son la abreviación de la frase en inglés “In the Principal Value Sense”. El “Principal Value” o valor principal especifica la forma en la que la integral está definida cerca de la singularidad del kernel  $|x - y|^{-n-2s}$ . El valor principal nos dice que la integral se acerca a la singularidad de forma simétrica:

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} u(x) dx.$$

Esto no garantiza que la integral siempre exista, sólo resuelve una posible ambigüedad en su definición. Para entender esto de mejor manera veamos la siguiente observación.

**Observación 4.2.**

Consideremos la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx.$$

Lo primero que podemos observar es que esta integral no es absolutamente convergente, pues sucede que  $\int_{-1}^1 \left| \frac{1}{x} \right| dx = \infty$ . Sin embargo, es posible determinar esta integral en el valor principal. Notemos que

$$P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0.$$

De esta forma, le hemos asignado un valor a la integral. Observemos que si tomamos el límite de otra manera, podríamos llegar a un valor distinto, por ejemplo

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{-2\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( - \int_{2\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx - \ln(\epsilon) \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \ln(2\epsilon) - \ln(\epsilon) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(2) + \ln(\epsilon) - \ln(\epsilon) = \ln(2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor principal es una elección que permite asignarle un valor (posiblemente infinito) a una integral que no converge absolutamente. Para más información, ver [28].

El símbolo  $B_\epsilon(x)$  se refiere a la bola de radio  $\epsilon$  centrada en  $x$ , al igual es importante comentar que “kernel” en el contexto de este texto no es lo mismo que “kernel” en el contexto de la Álgebra Lineal. Aquí por “kernel” nos referiremos a la función  $|x - y|^{-n-2s}$ .

Ya aclarado todo lo anterior procedamos a clarificar la definición de  $(-\Delta)^s$ . Notemos que el laplaciano común que conocemos se define como

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Las diferencias fundamentales entre el laplaciano usual y el fraccionario, es que el laplaciano usual es un operador local y diferencial mientras que el fraccionario es un operador no local y pseudo-diferencial.

Primero entendamos por qué es pseudo-diferencial. Un operador pseudo-diferencial es una generalización de los operadores diferenciales. La motivación para este tipo de operadores surge de manera natural por problemas físicos y probabilísticos. Éstos se definen a partir de la transformada de Fourier y de hecho se cumple que

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u)(x) \quad \text{con } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ (ver Lema 4.5)}. \quad (4.2)$$

Como un buen punto de comparación el laplaciano usual al igual es un operador pseudo-diferencial, considerando que  $\mathcal{F}(\partial_i \partial_i u(\xi)) = (i\xi_i)^2 \mathcal{F}u(\xi)$  (ver [20, Chapter 4.3, Theorem 2]) veamos que el

laplaciano usual satisface la siguiente ecuación.

$$\mathcal{F}(\Delta u(x)) = \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \mathcal{F}(u(x)) = |\xi|^2 \mathcal{F}u(x).$$

Por lo tanto,

$$-\Delta u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 \mathcal{F}u)(x).$$

Ahora entendamos por qué el laplaciano fraccionario es un operador no local. Este operador es no local, ya que el valor de éste no solamente depende del valor de  $u$  en un punto en el espacio, sino que el valor del laplaciano fraccionario depende de todos los valores de  $u$  en todo punto del espacio en el que se está trabajando. Esto es lo que hace al laplaciano fraccionario un operador no local. Para ver esto más a fondo una buena referencia es [26].

Además, otro término que salta a la vista en la Definición 4.1 es la constante  $C(n, s)$ . Ésta depende de la dimensión  $n$  y de  $s$ . De manera más específica es útil definir la constante del modo siguiente

$$C(n, s) = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1} > 0. \quad (4.3)$$

La forma de ésta constante es motivada por el Lema 4.5. Esta constante servirá para darle al laplaciano fraccionario un comportamiento asintótico consistente (ver Proposición 4.11).

El siguiente lema nos da una forma de escribir al laplaciano fraccionario sin el valor principal cuando la función involucrada sea lo suficientemente suave. Como se verá en la demostración, la parte derecha de (4.4) sí es absolutamente integrable, y por lo tanto no requiere de una integral en valor principal.

**Lema 4.3.**

Sea  $s \in (0, 1)$  y tomemos al laplaciano fraccionario  $(-\Delta)^s$  definido en (4.1). Entonces para cualquier  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se cumple que

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

*Demostración.*

Para demostrar el lema procedemos mediante un cambio de variable: tomando a  $z = y - x$  notamos que:

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= -C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) - u(x)}{|x-y|^{n+2s}} dy \\ &= -C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora tomemos  $\tilde{z} = -z$  y sustituyamos esto en lo anterior. Obtenemos entonces que:

$$(-\Delta)^s u(x) = -C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\tilde{z}) - u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2s}} d\tilde{z}. \quad (4.6)$$



Ahora notemos que si renombramos a  $\tilde{z}$  como  $z$  lo siguiente se cumple:

$$\begin{aligned}
 & 2 P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\
 &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\tilde{z}) - u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2s}} d\tilde{z} \\
 &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\
 &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) + u(x-z) - 2u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Ahora en lo último de arriba volvemos a renombrar a  $z$  como  $y$  y entonces podemos escribir al laplaciano como:

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy. \tag{4.8}$$

Notemos que esta forma de escribir al laplaciano es muy útil ya que por un lado nos mueve la singularidad al origen y por el otro nos permite quitar al valor principal, veamos por qué.

Por el Corolario 2.26,

$$\left| \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} \right| = \left| \frac{D^2 u(x) y \cdot y + R(y)}{|y|^{n+2s}} \right| \tag{4.9}$$

donde  $|R(y)| \leq C \|u\|_{C^3} |y|^3$  y  $C > 0$  es una constante positiva. Por (2.9),

$$\begin{aligned}
 |D^2 u(x) y \cdot y| &= |y_1^2 \partial_{11} u(x) + y_1 y_2 \partial_{12} u(x) + y_2 y_1 \partial_{21} u(x) + \cdots + y_n^2 \partial_{nn} u(x)| \\
 &\leq |y_1^2 \partial_{11} u(x)| + |y_1 y_2 \partial_{12} u(x)| + |y_2 y_1 \partial_{21} u(x)| + \cdots + |y_n^2 \partial_{nn} u(x)| \\
 &\leq |y|^2 (|\partial_{11} u(x)| + |\partial_{12} u(x)| + |\partial_{21} u(x)| + \cdots + |\partial_{nn} u(x)|) \\
 &\leq n^2 |y|^2 \|D^2 u\|_\infty
 \end{aligned}$$

donde  $\|D^2 u\|_\infty := \max_{i,j=1,\dots,n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_{x_i x_j} u(x)|$ . Entonces,

$$\left| \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} \right| \leq C_1 \left( \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} + \frac{1}{|y|^{n+2s-3}} \right) =: L(y), \tag{4.10}$$

para alguna  $C_1 > 0$  que depende de  $n$ ,  $\|D^2 u\|_\infty$  y  $\|u\|_{C^3}$ .

Notemos que la función  $L$  es integrable cerca del cero para cualquier  $s \in (0, 1)$  fija, pues, pasando a coordenadas esféricas,

$$\int_{B_1(0)} L(y) dy = C_2 \int_0^1 \left( \frac{1}{r^{n+2s-2}} + \frac{1}{r^{n+2s-3}} \right) r^{n-1} dr = C_2 \int_0^1 r^{-2s+1} + r^{-2s+2} dr < \infty,$$

para alguna constante  $C_2 > 0$ . Ahora, como la derivada de  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  decrece rápidamente, existe una constante  $C_3 > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \left| \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} \right| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} |u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| dy < \infty.$$

Por lo tanto, el integrando en (4.6) es absolutamente integrable y esto nos permite quitar el valor principal. Luego,

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy. \quad (4.11)$$

□

**Observación 4.4.**

En general  $(-\Delta)^s u(x)$  se puede calcular si  $u$  es  $C^{2s+\epsilon}$  en  $x$  para algún  $\epsilon > 0$  y si  $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|}{1+|y|^{n+2s}} dy < \infty$ .

Ya que acabamos de analizar al laplaciano fraccionario veamos que éste se relaciona con el espacio de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Lema 4.5.**

Sea  $s \in (0, 1)$  y  $(-\Delta)^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  el laplaciano fraccionario de la Definición 4.1. Entonces, para cualquier  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se cumple

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u)(x) \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En esta tesis no daremos una demostración detallada de este resultado (la cual se puede consultar en [13, Proposición, 3.3]) pero daremos una idea de la demostración.

Usando el Lema 4.3, tomamos la parte derecha de la ecuación (4.4) y la denotamos por  $\mathcal{L}u$

$$\mathcal{L}u = -\frac{1}{2}C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

donde  $\mathcal{L}$  es un operador lineal.

Lo que se busca hacer es encontrar el “símbolo” de este operador, el cual será una función  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que debe de cumplir la propiedad  $\mathcal{L}u(x) = \mathcal{F}^{-1}(S(\cdot)\mathcal{F}u)(x)$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ .

A partir de la definición de la transformada de Fourier, junto con sus propiedades básicas (ver la Definición 2.14), se puede probar que

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u)(\xi) = C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy (\mathcal{F}u)(\xi) =: S(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi).$$

Luego, cálculos directos muestran que

$$S(\xi) = C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = |\xi|^{2s}.$$

Para la demostración completa ver [13, Proposición, 3.3].

El siguiente resultado establece una relación entre el símbolo de Fourier y la norma del espacio de Sobolev fraccionario.

**Lema 4.6.**

Sea  $s \in (0, 1)$ , entonces el espacio de Sobolev fraccionario  $H^s(\mathbb{R}^n)$  de la Proposición 3.2 cumple que

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

En particular para cualquier  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  tenemos

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2C(n, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi,$$

donde  $C(n, s)$  es la constante definida en la ecuación (4.3).

Sólo daremos una idea de la prueba de este resultado (la demostración completa se puede consultar en [13, Proposición, 3.4]). Si tomamos a la seminorma  $[u]_{W^{s,2}}^2$  de la Definición 3.1, le aplicamos el cambio de variable  $z = x - y$ , y se usa la fórmula de Plancherel (ver [20, Section 4.3, Theorem 1]), para obtener que

$$[u]_{W^{s,2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{F} \left( \frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dz.$$

Tomamos el término anterior y usando las propiedades de la transformada de Fourier y la igualdad

$$C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = C(n, s)^{-1} |\xi|^{2s},$$

que se obtuvo en el Lema 4.5, llegamos a que

$$[u]_{W^{s,2}}^2 = 2C(n, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

La siguiente proposición establece un vínculo entre la norma del espacio de Sobolev fraccionario y el laplaciano fraccionario.

**Proposición 4.7.**

Sea  $s \in (0, 1)$  y tomemos una  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  entonces se cumple que

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2C(n, s)^{-1} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \tag{4.12}$$

donde la constante  $C(n, s)$  es la definida en (4.3).

*Demostración.*

Este teorema es consecuencia de los Lemas 4.5 y 4.6. En efecto,

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\ |\xi|^s \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \frac{1}{2} C(n, s) [u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2. \tag{4.13}$$

Es decir,  $[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2C(n, s)^{-1} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$ . □

En la siguiente definición veremos dos funciones que serán de gran utilidad a la hora de caracterizar el comportamiento del laplaciano fraccionario.

**Definición 4.8.**

Definamos  $A(n, s)$  y  $B(s)$  dos funciones tales que

$$A(n, s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1 + |\eta'|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\eta', \quad (4.14)$$

y

$$B(s) = s(1 - s) \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cot t}{|t|^{\frac{n+2s}{2}}} dt, \quad (4.15)$$

que vienen de aplicar el cambio de variable  $\eta' = \frac{\zeta'}{|\zeta_1|}$  a la constante definida en (4.3), para ver los pasos mas a detalle ver [13, Chapter 4].

Ya que tenemos las funciones definidas estas tendrán el comportamiento siguiente.

**Proposición 4.9.**

Para cualquier  $n > 1$ , si tomamos las funciones  $A(n, s)$  y  $B(s)$  como en (4.14) y (4.15) respectivamente, los argumentos siguientes se cumplen

i)  $\lim_{s \rightarrow 1^-} A(n, s) = \omega_{n-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)} d\rho < +\infty;$

ii)  $\lim_{s \rightarrow 0^+} A(n, s) = \omega_{n-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)} d\rho < +\infty;$

iii)  $\lim_{s \rightarrow 1^-} B(s) = \frac{1}{2};$

iv)  $\lim_{s \rightarrow 0^+} B(s) = 1,$

donde  $\omega_{n-2}$  denota a la medida  $(n - 2)$ -dimensional de la esfera unitaria  $S^{n-2} \in \mathbb{R}^n$ . Como consecuencia obtenemos,

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{C(n, s)}{s(1 - s)} = \left( \frac{\omega_{n-2}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1 + \rho^2)^{\frac{n}{2}+1}} d\rho \right)^{-1} \quad (4.16)$$

y

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{C(n, s)}{s(1 - s)} = \left( \omega_{n-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1 + \rho^2)^{\frac{n}{2}}} d\rho \right)^{-1}. \quad (4.17)$$

*Nota:* La demostración de esta proposición es muy extensa y sale del propósito de esta tesis por lo que se recomienda ver [13, Proposition 4.1].

Una vez definidas las funciones  $A(n, s)$  y  $B(s)$  y a su comportamiento, podemos pasar al siguiente corolario y la siguiente proposición que tienen dos propósitos: El primero es entender porqué fue útil definir la constante  $C = (n, s)$  de esa forma en (4.3) y el segundo, es ver qué pasa con el laplaciano fraccionario cuando lo sometemos bajo ciertos límites.

**Corolario 4.10.**

Si  $C(n, s)$  es la constante definida como en (4.3), entonces para cualquier  $n > 1$  se cumplen los siguientes límites.

$$(i) \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{C(n, s)}{s(1-s)} = \frac{4n}{\omega_{n-1}},$$

$$(ii) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{C(n, s)}{s(1-s)} = \frac{2}{\omega_{n-1}},$$

donde  $\omega_{n-1}$  denota la medida  $(n-1)$ -dimensional de la esfera unitaria  $S^{n-1} \in \mathbb{R}^n$

*Demostración.*

Para cualquier  $\theta \in \mathbb{R}$  que cumpla  $\theta > n-1$  definamos la siguiente función.

$$E_n(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta}{2}}} d\rho.$$

Notemos que al pedirle a  $\theta$  la condición de  $\theta > n-1$  garantizamos que la integral converge. Calculemos ahora la integral usando integración por partes.

$$\begin{aligned} E_n(\theta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta}{2}}} d\rho \\ &= (n-1)^{-1} \left[ \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta}{2}}} \right]_0^{+\infty} + \frac{\theta}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^n}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta-2}{2}}} d\rho \\ &= \frac{\theta}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^n}{(1+\rho^2)^{\frac{\theta-2}{2}}} d\rho = \frac{\theta}{n-1} E_{n-2}(\theta+2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Con esto definimos las siguientes funciones para facilitar la notación en esta demostración.

$$I_n^{(1)} := E_n(n+2) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}} d\rho, \quad (4.19)$$

$$I_n^{(0)} := E_n(n) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}} d\rho. \quad (4.20)$$

Ahora notemos que lo siguiente es cierto.

$$I_n^{(1)} = \frac{\omega_{n-1}}{2n\omega_{n-2}}, \quad (4.21)$$

$$I_n^{(0)} = \frac{\omega_{n-1}}{2\omega_{n-2}}. \quad (4.22)$$

Para demostrar las dos propiedades anteriores procederemos por inducción. Para ello veamos que la base inductiva en efecto se cumple ya que tenemos lo siguiente para  $I_n^{(1)}$ .

$$I_2^{(1)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\rho^2)^2} d\rho = \frac{\pi}{4}, \quad I_3^{(1)} = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} d\rho = \frac{1}{3}.$$

Ahora veamos que igual se cumple para  $I_n^{(0)}$

$$I_2^{(0)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\rho^2)} d\rho = \frac{\pi}{2}, \quad I_3^{(0)} = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho = 1.$$

Ahora, si usamos las ecuaciones (4.19) y (4.20) respectivamente veamos que para ver que la inducción se cumple es suficiente probar la siguiente igualdad.

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{n-1}{n} \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}}. \quad (4.23)$$

Notemos que la ecuación anterior viene de la clásica fórmula recursiva

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n-1} \omega_{n-2}. \quad (4.24)$$

Ahora, probemos que la ecuación 4.24 realmente es válida. Cabe mencionar que hay varias formas para probar este resultado, la más obvia sería tratar de calcular a  $\omega_n$  de manera directa. El problema de hacer esto es que como  $\omega_n$  es la medida  $n$ -dimensional de la esfera  $S^n$  tenemos que trabajar con integrales en variedades, lo cual no es nada sencillo además es un proceso largo. Por lo tanto procederemos con el procedimiento que se presenta abajo, el cual es más sencillo.

Para ello denotemos a la medida de Lebesgue de la bola unitaria con dimensión  $n$  con  $\bar{\omega}_n$ . Del mismo modo, tomemos la siguiente notación  $x = (\tilde{x}, x') \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ . Entonces para probar la ecuación (4.24) primero integremos en  $\mathbb{R}^{n-2}$  y después hagamos un cambio de coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_n &= \int_{|x|^2 \leq 1} dx = \int_{|x'| \leq 1} \left( \int_{|\tilde{x}|^2 \leq 1-|x'|^2} d\tilde{x} \right) dx' \\ &= \bar{\omega}_{n-2} \int_{|x'| \leq 1} (1-|x'|^2)^{\frac{(n-2)}{2}} dx' \\ &= 2\pi \bar{\omega}_{n-2} \int_0^1 \rho (1-\rho^2)^{\frac{(n-2)}{2}} d\rho = \frac{2\pi \bar{\omega}_{n-2}}{n}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ahora, por coordenadas polares en  $\mathbb{R}^n$  tenemos

$$\bar{\omega}_n = \int_{|x| \leq 1} dx = \omega_{n-1} \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho = \frac{\omega_{n-1}}{n}. \quad (4.26)$$

Entonces si tomamos (4.25) y (4.26)

$$\omega_{n-1} = n \bar{\omega}_n = 2\pi \bar{\omega}_{n-2} = \frac{2\pi \omega_{n-3}}{n-2}.$$

Por lo que si intercambiamos a  $n$  por  $n-1$  obtenemos (4.24), confirmando que esta ecuación en efecto es válida. Dicho lo anterior, podemos concluir que como (4.24) es cierta entonces, (4.23), (4.22) y (4.21) al igual son ciertas.

Por último usamos las ecuaciones (4.21) y (4.22) y la Proposición 4.9 para concluir lo siguiente.

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{C(n, s)}{s(1-s)} = \frac{2}{\omega_{n-2} I_n^{(1)}} = \frac{4n}{\omega_{n-1}}$$

y

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{C(n, s)}{s(1-s)} = \frac{1}{\omega_{n-2} I_n^{(0)}} = \frac{2}{\omega_{n-1}},$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Ahora veamos la siguiente proposición, para la cual solamente necesitaremos el Lema 4.3.

**Proposición 4.11.**

Sea  $n > 1$ . Entonces, para cualquier  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  se cumple que

- (i)  $\lim_{s \rightarrow 0^+} (-\Delta)^s u = u$ ;
- (ii)  $\lim_{s \rightarrow 1^-} (-\Delta)^s u = -\Delta u$ .

*Demostración.*

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y tomemos una  $R_0 > 0$  tal que cumpla que  $\text{supp } u \subseteq B_{R_0}(0)$  o en otras palabras tenemos que tomar una  $R_0 > 0$  que asegure que el soporte de  $u$  quede contenido en la bola de radio  $R_0$  centrada en 0. Además, definamos a  $R = R_0 + |x| + 1$ . Seguiremos el argumento del Lema 4.3 para obtener

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_{R_0}(0)} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right| &\leq \|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \int_{B_{R_0}(0)} \frac{|y|^2}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \int_0^R \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\rho^{2s-1}} d\theta d\rho \\ &= \omega_{n-1} \|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \int_0^R \frac{1}{\rho^{2s-1}} d\rho \\ &= \frac{\omega_{n-1} R^{2-2s}}{2(1-s)} \|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Detallemos las identidades y desigualdades anteriores.

La primera desigualdad se cumple por la ecuación (4.10) ya que estamos tomando la norma  $\|\cdot\|_{C^2}$  para una función  $u$  la cual esta definida en la Definición 2.10.

En la segunda desigualdad, tomamos el cambio de variable a coordenadas esféricas  $\rho^{n-1} = |y|$ , además en la primer igualdad notemos que este cambio de variable arroja al termino  $\omega_{n-1} = |S^{n-1}|$ .

Por último integramos de manera usual y obtenemos la última igualdad.

Ahora,  $|y| \geq R$  nos da que  $|x \pm y| \geq |y| - |x| \geq R - |x| > R_0$  y, por ende, tenemos que  $u(x \pm y) = 0$  pues  $|x \pm y|$  no está en el soporte de  $u$ . Entonces

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy &= u(x) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{1}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \omega_{n-1} u(x) \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2s+1}} d\rho \\ &= \frac{\omega_{n-1} R^{-2s}}{2s} u(x). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Ahora tomemos la ecuación (4.27) y el Corolario 4.10 y veamos que con esto es fácil ver que asintóticamente no hay contribuciones en la bola  $B_R$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_R} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{C(n, s)\omega_{n-1}R^{2-2s}}{4(1-s)} \|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \right| \\ &\leq \left| \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{(C_1 + 1)s(1-s)\omega_{n-1}R^{2-2s}}{4(1-s)} \|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \right| = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

En el desarrollo anterior es fácil ver que la primera desigualdad se da por la ecuación (4.27). Mientras la segunda desigualdad se da considerando el Corolario 4.10, que en resumen dice que si  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{C(n, s)}{s(1-s)} = C_1$ . De este modo, sabemos que existe un  $\epsilon > 0$  tal que si  $0 < s < \epsilon$  entonces

$$\frac{C(n, s)}{s(1-s)} \leq C_1 + 1.$$

Por lo tanto

$$C(n, s) \leq (C_1 + 1)s(1-s).$$

Por otro lado si tomamos en cuenta la ecuación (4.28), el Corolario 4.10 y el Lema 4.3 veamos que lo que pasa fuera de la bola  $B_R$  es

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} (-\Delta)^s u &= \lim_{s \rightarrow 0^+} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{C(n, s)\omega_{n-1}R^{-2s}}{2s} u(x) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{C(n, s)\omega_{n-1}R^{-2s}(1-s)}{2s(1-s)} u(x) = u(x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Lo cual prueba el inciso (i).

Para el inciso (ii) haremos algo muy similar.

Primero es importante notar que cuando  $s$  tiende a 1 no van a existir contribuciones fuera de la bola unitaria. Concretamente:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right| &\leq 4\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq 4\omega_{n-1}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2s-1}} d\rho \\ &= \frac{2\omega_{n-1}}{s} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La justificación para el paso anterior es completamente análoga a las que se hicieron para el inciso (i).



De igual manera que en el inciso anterior, tomamos en cuenta el Corolario 4.10 y la ecuación (4.32). Entonces, obtenemos que no hay contribuciones fuera de la bola unitaria, es decir

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \\ & \leq \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)(1-s)\omega_{n-1}}{s(1-s)} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ahora, veamos qué pasa en la bola unitaria. Para ello primero calculemos lo siguiente, donde  $\cdot$  denota producto punto.

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) - D^2u(x)y \cdot y}{|y|^{n+2s}} dy \right| & \leq \|u\|_{C^3(\mathbb{R}^n)} \int_{B_{R_0}} \frac{|y|^2}{|y|^{n+2s}} dy \\ & \leq \omega_{n-1} \|u\|_{C^3(\mathbb{R}^n)} \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2s-1}} d\rho \\ & = \frac{\omega_{n-1}}{3-2s} \|u\|_{C^3(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

El resultado anterior se resuelve con métodos análogos a los resultados obtenidos en el inciso (i).

Usando a (4.34) y al Corolario 2.26 obtenemos que

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \\ & = \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{D^2u(x)y \cdot y + R(y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ & = \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{D^2u(x)y \cdot y}{|y|^{n+2s}} dy + \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{R(y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ & = \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{D^2u(x)y \cdot y}{|y|^{n+2s}} dy, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned} \left| \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{R(y)}{|y|^{n+2s}} dy \right| & \leq \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{\|u\|_{C^3(\Omega)} |y|^3}{|y|^{n+2s}} \\ & = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{\|u\|_{C^3(\Omega)} |y|^3}{|y|^{n+2s}} \\ & = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{C(n, s) \|u\|_{C^3(\Omega)}}{2} \int_0^1 \rho^{3-n-2s} \\ & = \frac{\|u\|_{C^3(\Omega)}}{2} \lim_{s \rightarrow 1^-} C(n, s) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, tomémonos el tiempo para analizar bien la expresión  $D^2u(x)y \cdot y$ . Notemos que buscamos ver qué partes de esta expresión son las que van a ser cero y cuales sí van a contar en la suma. Para ello tomemos la expresión componente a componente específicamente veamos que si  $i \neq j$ ,

$$\int_{B_1} \partial_{ij}u(x)y_i y_j dy = - \int_{B_1} \partial_{ij}u(x)\tilde{y}_i \tilde{y}_j dy, \quad (4.36)$$

donde  $\tilde{y}_k = y_k$  para cualquier  $k \neq j$  y  $\tilde{y}_j = -y_j$  y por ende obtenemos que

$$\int_{B_1} \partial_{ij} u(x) y_i \cdot y_j = 0. \quad (4.37)$$

Esto se debe a la simetría de la bola en la que estamos trabajando. Ahora veamos las componentes que no son cero.

Para ello consideremos todas las permutaciones para cualquier  $i$  fija, para ello veamos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \frac{\partial_{ii} u(x) y_i^2}{|y|^{n+2s}} dy &= \partial_{ii} u(x) \int_{B_1} \frac{y_i^2}{|y|^{n+2s}} dy = \frac{\partial_{ii} u(x)}{n} \sum_{k=1}^n \int_{B_1} \frac{y_k^2}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{\partial_{ii} u(x)}{n} \int_{B_1} \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{|y|^{n+2s}} dy = \frac{\partial_{ii} u(x)}{n} \int_{B_1} \frac{|y|^2}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{\partial_{ii} u(x) \omega_{n-1}}{n} \int_{B_1} \frac{1}{|\rho|^{2s-1}} dy = \frac{\partial_{ii} u(x) \omega_{n-1}}{2n(1-s)}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Detallemos los pasos anteriores.

La primera igualdad solamente sacamos al termino  $\partial_{ii} u(x)$  de la integral, ya que no tiene dependencia de  $y$ .

En la segunda igualdad multiplicamos por el uno  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1$

En la tercera igualdad, vemos que arriba en la demostración determinamos que  $|y| > R > 0$  en particular observemos que se cumple que  $y_k > 0$  por lo tanto aquí aplica el Teorema de Fubini-Tonelli. Con este podemos intercambiar la suma y la integral.

En la cuarta igualdad sólo aplicamos la suma, después en la quinta igualdad hacemos el mismo cambio de variable que hemos estado aplicando en esta prueba  $\rho^{n-1} = |y|$ . Mientras que en la última igualdad solo se aplica la integral.

Ahora por último, usando el Lema 4.3, el Corolario 4.10 y las ecuaciones (4.33), (4.35), (4.37) y (4.38) concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^-} (-\Delta)^s u &= \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2} \int_{B_1} \frac{D^2 u(x) y \cdot y}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s)}{2n} \sum_{i=1}^n \int_{B_1} \frac{\partial_{ii}^2 u(x) y_i^2}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \lim_{s \rightarrow 1^-} -\frac{C(n, s) \omega_{n-1}}{4n(1-s)} \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 u(x) \\ &= -\Delta u(x). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para entender lo que sucedió en el desarrollo anterior demos la siguiente explicación.

En la primera igualdad tomamos el Lema 4.3 y en la segunda igualdad se hace uso de la ecuación (4.35).

En la tercer igualdad tomamos a la ecuación (4.37) para una  $i$  fija, mientras que en la cuarta igualdad se aplica la ecuación (4.38).

Por último en la igualdad final aplicamos la suma y el Corolario 4.10. Lo cual demuestra el inciso (ii). □

La proposición anterior es muy importante ya que nos deja ver cómo se comporta el laplaciano fraccionario y cómo éste, al aplicar los límites, coincide perfectamente con el laplaciano usual. En otras palabras el comportamiento del laplaciano fraccionario es completamente regular ya que el comportamiento asintótico que tiene en el cero y en el uno coincide con el laplaciano usual.

## 4.2. Teorema de existencia y unicidad

Por ahora en este capítulo solamente hemos estado trabajando con el laplaciano fraccionario, pero para el siguiente teorema regresaremos a usar resultados del capítulo anterior. Cabe recalcar que este teorema será el más importante de esta tesis, ya que engloba muchos de los resultados más importantes que hemos visto y es el que concluye este trabajo.

En el capítulo anterior el Corolario 3.18 garantiza la existencia y unicidad de soluciones en el espacio de Sobolev fraccionario, ahora este corolario lo usaremos para poder garantizar la existencia de soluciones al problema de Poisson en el espacio  $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$ . Pero primero veamos el siguiente Lema.

**Lema 4.12.**

*Si  $u \in C^{2s+\alpha}(\Omega)$  entonces*

$$\|(-\Delta)^s u\|_{C^\alpha(\Omega')} \leq C \|u\|_{C^{2s+\alpha}(\Omega)}, \quad (4.40)$$

para alguna  $C(\Omega', \Omega, \alpha, s) > 0$  y  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ .

La demostración de este lema hace uso de conceptos que salen del propósito de esta tesis. Por esa razón se le recomienda al lector consultar [1, Lemma 1.1].)

Este lema será de gran utilidad para concluir el Teorema central de esta sección. Por otro lado es importante dar la siguiente definición.

Si  $\beta > 1$  y  $\beta \notin \mathbb{N}$ , definimos  $C^\beta(\Omega) := C^{[\beta], \beta - [\beta]}(\Omega)$ , donde  $[\beta]$  representa el piso de  $\beta$ , es decir, su parte entera. Con esto ahora si veamos el teorema.

**Teorema 4.13.** *(Teorema de existencia y unicidad para  $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$ )*

*Sean  $s, \alpha \in (0, 1)$ . Dada  $f \in L^2(\overline{\Omega})$  existe un único  $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$  tal que*

$$\frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{u+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx, \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4.41)$$

*Si  $u \in C^{2s+\alpha}(\Omega) \cap C^s(\mathbb{R}^n)$ , entonces*

$$(-\Delta)^s u(x) = f(x) \quad \text{para toda } x \in \Omega. \quad (4.42)$$

*Demostración.*

El Corolario 3.18 garantiza la existencia de una solución débil  $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$  que satisface (4.41). Por lo tanto, sólo resta ver que si  $u$  es lo suficientemente suave, entonces  $u$  es una solución clásica, es decir, que satisface (4.42) punto a punto.

Sean  $u \in C^{2s+\alpha} \cap C^s(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , entonces

$$\begin{aligned} & \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} (\varphi(x) - \varphi(y)) dx dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(x) dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(y) dx dy \right] \end{aligned}$$

Antes de seguir con el desarrollo, es importante entender lo que pasa en esta igualdad. Veamos que al principio hacemos el producto que está dentro de la integral del lado izquierdo, posteriormente separamos la suma de integrales, lo cual da la suma del lado derecho de la igualdad. Notemos que en este paso aparece el Valor Principal, esto sucede ya que en el lado izquierdo de la igualdad tenemos el producto de los términos  $(u(x) - u(y))$  y  $(\varphi(x) - \varphi(y))$  donde  $u \in C^{2s+\alpha} \cap C^s(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Dada a la naturaleza de ambas funciones el producto de los términos mencionados arriba logra “quitar” la singularidad que puede aparecer en el denominador, pero al separar la suma de las integrales nos quedamos sin este producto. Entonces, para compensar el hecho de que la función  $u$  quizá no sea lo suficientemente regular para que el término  $(u(x) - u(y))$  “elimine” a la singularidad que puede aparecer en el denominador, se pone el término P.V. y de este modo garantizamos que la integral siempre estará bien definida.

Mencionado lo anterior seguimos con el desarrollo.

$$\begin{aligned} & \frac{C(n, s)}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(x) dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(y) dx dy \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(x) dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(y) dx dy \end{aligned}$$

En el paso anterior solo distribuimos la constante y la metemos a la primera integral en ambos casos. Continuando la demostración tenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(x) dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} \varphi(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} dy \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} dx \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Veamos que en este paso, en la primera doble integral aplicamos el Teorema de Fubini para cambiar el orden de las integrales, una vez hecho esto sacamos a la función  $\varphi(x)$  de la primer integral ya que esta no depende de  $y$ . En la segunda doble integral solamente sacamos a  $\varphi(y)$  ya

que ésta no depende de  $x$ . Siguiendo con la demostración tenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} dy \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} dx \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{u+2s}} dy \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s u(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Aquí a la primera doble integral la dejamos sola y en la segunda doble integral renombramos a las variables  $x$  y  $y$  de tal modo que  $x$  ahora es  $y$  y vice versa. Con esto nos damos cuenta que tenemos la misma integral dos veces, por lo que sumamos y nos quedamos sin el término  $\frac{1}{2}$ . De aquí nos damos cuenta que ya obtuvimos la definición del laplaciano fraccionario, por lo que en la última igualdad solo hacemos uso de la definición, así obteniendo lo que se deseaba.

Con esto obtenemos

$$\frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{u+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s u(x) \varphi(x) dx, \quad (4.43)$$

Y por ende también se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s u(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx. \quad (4.44)$$

y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} [(-\Delta)^s u(x) - f(x)] \varphi(x) dx = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4.45)$$

Como  $u \in C^{2s+\alpha}(\Omega) \cap C^s(\mathbb{R}^n)$ , tenemos que  $(-\Delta)^s u \in C^s(\Omega)$  (ver Lema 4.12). Entonces por el Lema 2.24 tenemos

$$(-\Delta)^s u(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad (4.46)$$

que es exactamente lo que se buscaba demostrar. □

# Bibliografía

- [1] Nicola Abatangelo, Sven Jarohs, and Alberto Saldaña. Positive powers of the laplacian: From hypersingular integrals to boundary value problems. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 17(3):899–922, 2018.
- [2] Robert A. Adams. Sobolev spaces new york. *San Francisco. Lodon: Academic Press*, 1:975, 1975.
- [3] Robert A. Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [4] Tom M. Apostol. *Calculus, volume 1*. John Wiley & Sons, 1991.
- [5] Emil Artin. *The gamma function*. Courier Dover Publications, 2015.
- [6] Joseph Bak and Donald J. Newman. Complex analysis. by joseph bak and donald j. newman/invitation to complex analysis. by ralph philip boas. *The American Mathematical Monthly*, 97(3):262–266, 1990.
- [7] Raghav Bansal, Gaurav Raj, and Tanupriya Choudhury. Blur image detection using laplacian operator and open-cv. In *2016 International Conference System Modeling & Advancement in Research Trends (SMART)*, pages 63–67. IEEE, 2016.
- [8] Bernhard. Baumgartner, Harald. Grosse, and André. Martin. The laplacian of the potential and the order of energy levels. *Physics Letters B*, 146(5):363–366, 1984.
- [9] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces, and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.
- [10] Claudia Bucur, Enrico Valdinoci, et al. *Nonlocal diffusion and applications*, volume 20. Springer, 2016.
- [11] Mónica Clapp. *Análisis matemático*. papirhos, IM-UNAM, México, 2015.
- [12] Amir Dembo. *Probability Theory: Department of Mathematics, Stanford University; June 7, 2012*.
- [13] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci. Hitchhiker’s guide to the fractional sobolev spaces. *Bulletin des sciences mathématiques*, 136(5):521–573, 2012.
- [14] Serena Dipierro, Alessio Figalli, and Enrico Valdinoci. Strongly nonlocal dislocation dynamics in crystals. *Communications in Partial Differential Equations*, 39(12):2351–2387, 2014.

- 
- [15] Serena Dipierro, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci. Dislocation dynamics in crystals: a macroscopic theory in a fractional laplace setting. *Communications in Mathematical Physics*, 333:1061–1105, 2015.
- [16] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] Abdelhalim Ebaid and Mohammed A. Al Sharif. Application of laplace transform for the exact effect of a magnetic field on heat transfer of carbon nanotubes-suspended nanofluids. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 70(6):471–475, 2015.
- [18] David Eric Edmunds and William D. Evans. *Fractional Sobolev Spaces and Inequalities*, volume 230. Cambridge University Press, 2022.
- [19] Brenden P. Epps and Benoit Cushman-Roisin. Turbulence modeling via the fractional laplacian. *arXiv preprint arXiv:1803.05286*, 2018.
- [20] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [21] Alessio Fiscella, Raffaella Servadei, Enrico Valdinoci, et al. Density properties for fractional sobolev spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math*, 40(1):235–253, 2015.
- [22] Daniel A. Fleisch. *A Student’s Guide to the Schrödinger Equation*. Cambridge University Press, 2020.
- [23] Jean Baptiste Joseph Fourier. *Théorie Analytique de la Chaleur*. Firmin Didot, 1822.
- [24] Emilio Gagliardo. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili. *Rendiconti del seminario matematico della universita di Padova*, 27:284–305, 1957.
- [25] Izrail Moiseevitch Gelfand and Richard A Silverman. *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.
- [26] Richard Herrmann. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. World Scientific, 2011.
- [27] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators I: Distribution theory and Fourier analysis*. Springer, 1990.
- [28] Ram P. Kanwal. *Linear integral equations*. Springer Science & Business Media, 1971.
- [29] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag, 2013.
- [30] Pierre Simon Laplace. *Traité de mécanique céleste*, volume 1. de l’Imprimerie de Crapelet, 1799.
- [31] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis*, volume 14. American Mathematical Soc., 2001.
- [32] Jean Mathieu and Julian Scott. *An introduction to turbulent flow*. Cambridge University Press, 2000.
- [33] Robert E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.

- 
- [34] Constantine Pozrikidis. *The Fractional Laplacian*. Chapman and Hall/CRC, 2018.
- [35] Xavier Ros-Oton and Joaquim Serra. The dirichlet problem for the fractional laplacian: regularity up to the boundary. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 101(3):275–302, 2014.
- [36] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1976.
- [37] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Functional analysis: introduction to further topics in analysis*, volume 4. Princeton University Press, 2011.
- [38] Alok Sutradhar, Glaucio H Paulino, and L.J. Gray. *Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method*, volume 26. Elsevier, 2002.
- [39] Lucas J. Van Vliet, Ian T. Young, and Guus L. Beckers. A nonlinear laplace operator as edge detector in noisy images. *Computer vision, graphics, and image processing*, 45(2):167–195, 1989.
- [40] David W. Ward and Sabine M. Volkmer. *How to derive the Schrödinger equation*. 2006.