UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

UN ACERCAMIENTO AL CÁLCULO DE ORDEN ARBITRARIO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICIENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

PRESENTA:
LÓPEZ NAVARRO RUBÉN

DIRECTOR TESIS:
ESPINOZA LOYOLA ENRIQUE

2023, Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México (FES Acatlán)

Índice general

Capítulo 1

Teoría de la medida

Casi cualquier persona con conocimientos básicos de cálculo tiene asociado el concepto de área bajo la curva con el de la integral de una función, digamos funciones reales. Esta interpretación basta para una amplia gama de funciones como los polinomios y otras funciones elementales como las funciones trigonométricas. Sin embargo, si somos más cautelosos, podemos encontrar funciones con definiciones relativamente sencillas para las cuales "el área bajo la curva"no tiene tanto sentido. Es esta perdida de sentido la que nos lleva a dos pensamientos, uno es que hay funciones que hacen que nuestra idea de estar "bajo la curva"se vea obligada a pensarse con más cuidado; el otro, que aunque no sea claro qué es estar "bajo la curva"podemos asociar una medida a esa región.

Antes de entrar de lleno a la teoría del cálculo de orden arbitrario necesitamos tener en cuenta la teoría de la medida y algunas otras ramas de las matemáticas que posteriormente veremos. Necesitamos conocer conceptos importantes como lo son los espacios de funciones L_p. Las funciones que conforman estos espacios se tratan de funciones medibles y para hablar de estas se necesitan conceptos como qué es una medida y la integración en el sentido de Lebesgue.

1.1. σ-álgebra

Inicialmente, definimos lo que es un álgebra de subconjuntos de otro conjunto.

Definición 1.1 *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X, se llama anillo de subconjuntos de X, si:*

- $E, F \in \mathcal{F} \Rightarrow E - F \in \mathcal{F}$.
- $E, F \in \mathcal{F} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{F}$.

Si además $X \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es llamada un álgebra de subconjuntos y entonces se denotará como $\mathcal{A}$.

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{S}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X, se llama σ-anillo de subconjuntos de X, si:*

- $E, F \in \mathcal{S} \Rightarrow E - F \in \mathcal{S}$.

- *Si (E_n) es una sucesión de elementos de S, entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$

Además $X \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}$ es llamada un σ-álgebra de subconjuntos.

A la pareja $(X, \mathcal{S})$ se le llamará **espacio medible** donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Algo que debemos notar es que a cualquier conjunto X lo podemos dotar de una σ-álgebra de subconjuntos de X, el siguiente ejemplo nos muestra dos σ-álgebra que se pueden asociar a cualquier conjunto X.

Ejercicio 1.1 *Los conjuntos $\mathcal{S}_1 = \{\varnothing, X\}$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{P}(X)$ son σ-álgebras de subconjuntos de X.*

Solución. En el caso de $\mathcal{S}_1$ es fácil ver que $X - \varnothing = X$ y $\varnothing - X = \varnothing$ pertenecen a $\mathcal{S}_1$. Además, las únicas dos sucesiones que se pueden hacer con este conjunto, son $X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X$ que claramente pertenece a $\mathcal{S}_1$. Por lo tanto $\mathcal{S}_1$ es una σ-álgebra.

Para el caso de $\mathcal{S}_2$ vemos que si tomamos $E, F \in \mathcal{S}_2$, es decir $E, F \subseteq X$ por definición de $\mathcal{S}_2$, entonces $E - F \subseteq E \subseteq X$ por definición de diferencia de conjuntos, por lo tanto $E - F \in \mathcal{S}_2$.Para la segunda condición, sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{S}_2$, es decir $\forall n \in \mathbb{N} : E_n \subseteq X$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq X$, es decir $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{S}_2$, por lo tanto $\mathcal{S}_2$ es una σ-álgebra. En conclusión de estos ejemplos podemos concluir que las parejas $(X, \mathcal{S}_1)$ y $(X, \mathcal{S}_2)$ son ejemplos de espacios medibles. †

Un estudio común es comenzar a enlazar estos espacios medibles por medio de funciones, posteriormente el siguiente ejemplo nos será de utilidad para cuando estemos hablando de funciones medibles. Veremos como los subconjuntos de un conjunto Y tal que sus preimagenes respecto a la función f son elementos del σ-álgebra de subconjuntos de X.

Ejercicio 1.2 *Si $f : X \to Y$ es una función y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra, entonces el conjunto*

$$K = \{F \subset Y : f^{-1}(F) \in \mathcal{S}\}$$

es una σ-álgebra de subconjuntos sobre Y.

Solución. Sean $E, F \in K$, entonces $f^{-1}(E), f^{-1}(F) \in \mathcal{S}$ por la definición de K. Ahora, como $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra tenemos que $f^{-1}(E) - f^{-1}(F) = f^{-1}(E - F) \in \mathcal{S}$ por propiedades de la preimagen y por lo tanto $E - F \in K$.
Tomemos $(E_n)_{n\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de K, entonces $\forall n \in \mathbb{N} : f^{-1}(E_n) \in \mathcal{S}$ por definición de K e inmediatamente tenemos que
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \in \mathcal{S}$ por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in K$. Además es inmediato ver qué $Y \in K$ por propiedades de la preimagen pues $X = f^{-1}(Y)$. Por lo tanto K es una σ-álgebra sobre Y. †

Proposición 1.1 *Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de σ-álgebras de subconjuntos de X, entonces $\bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$ es un σ-álgebra de subconjuntos de X.*

Demostración.

Vemos que si $E, F \in \bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$, entonces $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{F} : E, F \in \mathcal{S}$ por definición de intersección. Como $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra, entonces $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{F} : E - F \in \mathcal{S}$, por lo tanto, por definición de intersección tenemos que
$E - F \in \bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$.

Ahora, sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$, es decir, $\forall n \in \mathbb{N} : E_n \in \bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{S} \in \mathcal{F} : E_n \in \mathcal{S}$, por definición de intersección. Además $\mathcal{S}$ es un σ-álgebra, entonces tenemos que $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{F} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{S}$. Por lo tanto por definición de intersección
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$. Por último, como $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{F}$ tenemos que $X \in \mathcal{S}$ pues $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra, entonces, $X \in \bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$.

Por lo tanto $\bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra.

■

A continuación hablaremos un σ-álgebra importante pues tiene la característica de que dada una familia de subconjuntos de X se genera una σ-álgebra donde la familia está contenida en el σ-álgebra. Esto se logra gracias a la proposición anterior.

Teorema 1.1 *Sea $E \subset \mathcal{P}(X)$ arbitrario, entonces existe una* única *σ-álgebra $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:*

1. *$E \subset \mathcal{S}(E)$.*
2. *Si $\mathcal{S}$ es un σ-álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$, tal que $E \subset \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}(E) \subset S$. $\mathcal{S}(E)$ se llama la σ-álgebra generada por E.*

Demostración.

Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{S} \textit{ es } \sigma\textit{-álgebra y } E \subset \mathcal{S}\}$, sabemos que no es vacío, pues $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$.

1. Ahora sea $\mathcal{S}(E) = \bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{F}\}$, sabemos por la proposición anterior que $\mathcal{S}(E)$ es una σ-álgebra y por la definición de $\mathcal{F}$ tenemos que $E \subset \mathcal{S}(E)$.
2. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra con $E \subset \mathcal{S}$ entonces, por definición de $\mathcal{F}$ tenemos que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{S}$.

Finalmente probaremos que es única el σ-álgebra. Sea $\mathcal{S}'$ una σ-álgebra que satisface las propiedades 1 y 2 entonces $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}(E)$ y $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{S}'$, por lo tanto $\mathcal{S}(E) = \mathcal{S}'$ ■

Teorema 1.2 ***[1, Teorema 1.6, pág 8]***
Si $E, E' \in \mathcal{P}(X)$ entonces:

1. *$E \subset E' \Rightarrow \mathcal{S}(E) \subset \mathcal{S}(E')$.*
2. *Si E es una σ-álgebra, entonces $\mathcal{S}(E) = E$.*
3. *$\mathcal{S}(\mathcal{S}(E)) = \mathcal{S}(E)$.*

4. $E \subset \mathcal{S}(E')$ *y* $E' \subset \mathcal{S}(E) \Rightarrow \mathcal{S}(E) = \mathcal{S}(E')$.

Una σ-álgebra muy importante para $\mathbb{R}$ es la σ-álgebra de Borel, esta σ-álgebra es generada por por una familia o clase conformada por todos los intervalos finitos.

Definición 1.3 *Sea $\mathcal{F}$ la clase de todos los intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R}$. Esto es:*

$$\mathcal{F} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} : -\infty < a \leq b < \infty\}.$$

*El σ-**álgebra de Borel** sobre $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, es el σ-álgebra generado por la clase $\mathcal{F}$. Es decir*

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}} := \mathcal{S}(\mathcal{F}).$$

*Si $E \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ decimos que E es un **conjunto de Borel** o simplemente que es un **boreliano**.*

Algo interesante e importante de mostrar del σ-álgebra de Borel es que el σ-álgebra generada por cualquier colección de intervalos de $\mathbb{R}$ coincide con el σ-álgebra de Borel. Por ejemplo, si tomamos $E = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ podemos notar que cualquier intervalo $I \in \mathcal{F}$ puede representarse como la unión de una familia numerable de intervalos de E y que todo intervalo de E es la intersección de una familia numerable de intervalos de I. Veamos que

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right) \quad y \quad [a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right),$$

por lo que podemos ver qué $I \subset \mathcal{S}(E)$ y que $E \subset \mathcal{S}(I)$ esto por el teorema anterior y podemos concluir que $\mathcal{S}(E) = \mathcal{S}(I) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

1.2. Medidas

En teoría de la medida, existen funciones especiales a las cuales llamamos medidas. En esta sección hablaremos de dos que necesitaremos antes de empezar nuestro análisis de los espacios L_p. Ahora definiremos a la recta real extendida como $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.2.1. Positivas

Definición 1.4 *Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible. Una **medida** en $(X, \mathcal{S})$ es una función $\mu : X \to \bar{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:*

- $\mu(\varnothing) = 0$
- $\mu(E) \geqslant 0$*, para todo* $E \in \mathcal{S}$
- μ *es* $\sigma-$***aditiva****, i.e., si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de $\mathcal{S}$, entonces:*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

A la terna $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se le llamará **espacio con medida** donde X es un conjunto no vacío, $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en $(X, \mathcal{S})$. En general diremos que X es conjunto o un espacio medible si tiene un σ-álgebra y tiene una medida. Además, diremos que μ es finita si no toma el valor $+\infty$. También diremos que es σ-finita si existe una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y cada $\mu(A_n) < \infty$.

Ejercicio 1.3 *Sean $x_0 \in X$, una función $\mu : \mathcal{S} \to \{0, 1\}$ es una medida y $E \in \mathcal{S}$, con*

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 \ si \ x_0 \in E \\ 0 \ si \ x_0 \notin E \end{cases}$$

*Es llamada la **medida unitaria concentrada en** x_0.*

Solución.
En efecto:

1. $\mu(\varnothing) = 0$ es inmediata pues el vacío no tiene elementos por definición.
2. $\mu(E) \geq 0$ inmediata pues $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$.
3. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $E_n \subseteq X$ una sucesión

   - Si $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$

     Entonces $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ por definición de μ, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in E_{n_0}$. Como $x_0 \in E_{n_0}$, entonces $\mu(E_{n_0}) = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq n_0$, $\mu(E_n) = 0$. Si tomamos la suma, obtenemos:

     $$\mu(E_{n_0}) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq n_0}}^{\infty} \mu(E_n) = 1$$

     Pero como cada $\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq n_0}}^{\infty} \mu(E_n) = 0$ pues cada E_n es disjunto dos a dos.

     Entonces

     $$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 1 = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

     $$\therefore \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

   - Si $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$

     Entonces $x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ por definición de μ, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que

$x_0 \notin E_n$. Como $x_0 \notin E_n$, entonces $\mu(E_n) = 0$. Si tomamos la suma, obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$$

$$\therefore \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Por lo tanto μ es una medida en $(X, \mathcal{S})$. †

Ejercicio 1.4 *Sean medidas* $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{S} \to \bar{\mathbb{R}}$ *y* $c_1, c_2 \geq 0$, *entonces*

$$\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 : \mathcal{S} \to \bar{\mathbb{R}}$$

es una medida.

Solución.
Lo primero que veremos es que se cumple la primera propiedad.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu(\varnothing) &= (c_1\mu_1 + c_2\mu_2)(\varnothing) \\
\Rightarrow \mu(\varnothing) &= c_1\mu_1(\varnothing) + c_2\mu_2(\varnothing) \\
\Rightarrow \mu(\varnothing) &= c_1 * 0 + c_2 * 0 \\
\Rightarrow \mu(\varnothing) &= 0
\end{aligned}$$

Ahora probaremos la segunda propiedad. Sea $E \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu(E) &= (c_1\mu_1 + c_2\mu_2)(E) \\
\Rightarrow \mu(E) &= c_1\mu_1(E) + c_2\mu_2(E) \\
\Rightarrow \mu(E) &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Por último veremos la última propiedad. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta dos a dos de $\mathcal{S}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= (c_1\mu_1 + c_2\mu_2)(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \\
\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= c_1\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) + c_2\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \\
\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_n) + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E_n) \\
\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_1\mu_1(E_n) + c_2\mu_2(E_n)) \\
\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)
\end{aligned}$$

†

1.2.2. Medida exterior de Lebesgue

Como en este trabajo centraremos nuestro análisis a $\mathbb{R}$ daremos una definición de la medida a la que podríamos llamar la medida usual de $\mathbb{R}$, estamos hablando de la medida exterior de Lebesgue.

Definición 1.5 *Sean $E \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cualesquiera de $\mathbb{R}$, μ una medida $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección a lo más numerable de intervalos abiertos tal que $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, definimos a la medida exterior de E como:*

$$0 \leq m_e(E) = inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) : (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\}$$

Notese que el ínfimo se toma sobre todas las colecciones $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a lo más numerables de intervalos abiertos con $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Como $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) \geq 0$, para toda colección de intervalos abiertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $m_e(E)$ está bien definida, pues es el ínfimo de un subconjunto no vacío y acotado por abajo.

Definición 1.6 *(Caratheodory) Un subconjunto E de números reales es **medible** si y sólo si dado cualquier otro subconjunto $A \subset \mathbb{R}$*

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A - E) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c).$$

La condición de Caratheodory puede considerarse como una condición de separabilidad, es decir, un subconjunto medible E separa bien a cualquier otro conjunto en el sentido de medida exterior.
Si consideramos a la colección de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$, a la que podemos denotar como $\mathcal{M}$. Si $E \in \mathcal{M}$, entonces su medida de Lebesgue $\mu(E)$ es su medida exterior, $\mu(E) = m_e(E)$. De ahora en adelante tomaremos con base a lo ya comentado con respecto a la medida de Lebesgue que la medida de Lebesgue es $\mu([a, b]) = a - b$ y además tomaremos como la medida de Lebesgue generada por la función F es $\mu_F([a, b]) = F(a) - F(b)$.

1.3. Funciones medibles

A partir de este punto centralizaremos nuestro análisis a $\mathbb{R}$, esto debido a que es más apropiado para objetivo principal, que es hablar de cálculo de orden arbitrario. El σ-álgebra que utilizaremos será el σ-álgebra de Borel y la medida será la dada por la medida de Lebesgue.

Definición 1.7 *Sean $(X, \mathcal{S})$ y $(Y, \mathcal{S}')$ dos espacios medibles. Una función $f : X \to Y$ se llama **medible** relativa a las σ-álgebras $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ si $f^{-1}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{S}$, es decir, $f^{-1}(E') \in \mathcal{S}$ para todo $E' \in \mathcal{S}'$. Si $Y = \mathbb{R}$ y $\mathcal{S}' = \mathbb{B}_\mathbb{R}$, entonces diremos que f es $\mathcal{S}$ − **medible** si $f^{-1}(\mathbb{B}_\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$.*

Además definiremos al conjunto $\mathcal{M}(E) = \{f : E \to \mathbb{R}, f \text{ es medible}\}$, es decir el conjunto $\mathcal{M}(E)$ es el conjunto de todas las funciones medibles de E en $\mathbb{R}$. La colección de funciones no negativas y medibles de E en $\mathbb{R}$ la denotaremos como $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(E)$.

Proposición 1.2 *Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existe $E \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{S}(E) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Si $f^{-1}(E) \subset \mathcal{S}$, entonces f es medible.*

Demostración. Sabemos que el conjunto $K = \{F \subset \mathbb{R} : f^{-1}(F) \in \mathcal{S}\}$ es una σ-álgebra que por hipótesis contiene a E. Así tenemos que $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}(E) \subset K$ por el teorema 1.2, por lo tanto $f^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \subset f^{-1}(K) \subset \mathcal{S}$. ■

Corolario 1.1 *Sean $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es medible.*
2. *$f^{-1}((c, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > c\} \in \mathcal{S}, \forall c \in \mathbb{R}$.*
3. *$f^{-1}((-\infty, c]) = \{x \in X : f(x) \leq c\} \in \mathcal{S}, \forall c \in \mathbb{R}$.*
4. *$f^{-1}((-\infty, c)) = \{x \in X : f(x) < c\} \in \mathcal{S}, \forall c \in \mathbb{R}$.*
5. *$f^{-1}([c, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \leq c\} \in \mathcal{S}, \forall c \in \mathbb{R}$.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Por definición de preimagen tenemos que
$f^{-1}(c, +\infty) = \{x \in X : f(x) > c\}$ el cual es medible pues f es medible por hipótesis, entonces $f^{-1}(c, +\infty) \in \mathcal{S}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sabemos que $f^{-1}((-\infty, c]) = X - f^{-1}(c, +\infty) \in \mathcal{S}$ por definición de σ-álgebra.

3) $\Rightarrow$ 4) Sabemos que $f^{-1}((-\infty, c)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((-\infty, c - \frac{1}{n}]\right) \in \mathcal{S}$ por definición de σ-álgebra.

4) $\Rightarrow$ 5) Sabemos que $f^{-1}([c, +\infty)) = X - f^{-1}(-\infty, c) \in \mathcal{S}$ por definición de σ-álgebra.

5) $\Rightarrow$ 1) Sea $E = \{[c, +\infty) : c \in \mathbb{R}\}$, sabemos que $\mathcal{S}(E) = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Por hipótesis tenemos que $E \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ y por la proposición anterior tenemos que f es medible.
■

1.4. Funciones integrables

Antes de entrar plenamente en los espacios Lp hablaremos de funciones que son integrables con respecto a una medida, esta definición lo haremos para cualquier función en $\mathcal{M}^+$. Introduciremos convenientemente la noción de función simple.

Definición 1.8 *Una función es simple si solo tiene una cantidad finita de valores. Una función $\phi \in \mathcal{M}^+(X)$ simple puede ser representada de la forma:*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \tag{1.1}$$

Donde $a_i \in \mathbb{R}$ y χ_{E_i} es la función indicadora de E_i en X, es decir,

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in E_i \\ 0 & si\ x \notin E_i \end{cases}$$

Entre estas representaciones para ϕ existe una única representación estándar que se caracteriza por que $\forall i : a_i$ son distintos y los conjuntos E_i son subconjuntos de X disjuntos dos a dos y no vacíos tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

Definición 1.9 *Si $\phi \in \mathcal{M}^+(X)$ es una función simple con la representación estándar de la ecuación (1,2), definimos la integral de ϕ respecto a μ como:*

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \tag{1.2}$$

Tomaremos como convenciones que $(0)\cdot(+\infty) = 0$ y $(+\infty)\cdot(0) = 0$. Podemos notar como la integral de una función simple en $\mathcal{M}^+$ está bien definido (a pesar de que puede ser $+\infty$) y además cada a_i son no negativos por lo que no podemos encontrar expresiones como $(+\infty) - (+\infty)$.

1.5. Espacios L_p

Las funciones de los espacios L_p son funciones debido a que se tomarán funciones del espacio L_1 para nuestro posterior análisis sobre el cálculo de orden arbitrario.

Definición 1.10 *Sean $X \subset \mathbb{R}$, $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida y $1 \le p < \infty$. Entonces definimos al espacio $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$ como*

$$L_p(X, \mathcal{S}, \mu) := \{f : \int |f(t)|^p d\mu < \infty\} \tag{1.3}$$

Se dará la prueba de las propiedades que se ocupen de estas funciones para la prueba de los teoremas posteriores del cálculo de orden arbitrario. Primeramente, daremos la prueba a 3 desigualdades.

Proposición 1.3 ***(Desigualdad de Young)*** *Para cada $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $a, b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.4}$$

Demostración. Primero veremos qué pasa si $a = 0$ o $b = 0$, entonces ambos lados de la desigualdad son cero por lo que es cierta, además cumpliendo con la igualdad también. Ahora chequeemos que pasaría si $a > 0$ y $b > 0$, entonces por la convexidad de la función exponencial tenemos que sean $\alpha, \beta \ge 0$ con $\alpha + \beta = 1$, entonces

$$e^{\alpha x + \beta y} \le \alpha e^x + \beta e^y$$

Si hacemos los cambios de variable $\alpha = \frac{1}{p}, \beta = \frac{1}{q}$ y $x = pLn(a), y = qLn(b)$, entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} e^{\left(\frac{1}{p}\right)(pLn(a))+\left(\frac{1}{q}\right)(qLn(b))} &\leq \frac{1}{p}e^{pLn(a)} + \frac{1}{q}e^{qLn(b)} \\ e^{Ln(a)+Ln(b)} &\leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \\ \therefore ab &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

■

Teorema 1.3 ***(Desigualdad de Hölder)****Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f, g : X \to [0, +\infty]$ son funciones medibles, entonces:*

$$\int fgd\mu \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.5}$$

Demostración.
Tomemos los cambios de variable $a = \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ y $b = \left(\int g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$.
Veremos que si $a = 0$, entonces $f = 0$ y por consecuencia $fg = 0$ y por lo tanto $\int fgd\mu = 0$ por lo que cumple la desigualdad. Por otro lado, si $a = +\infty$ y $b > 0$, entonces $ab = +\infty$ por lo que se llega a qué $\int fgd\mu \leq +\infty$ lo cual es cierto y es lo que se buscaba probar. Finalmente, si $a, b \in (0, +\infty)$ entonces por la desigualdad de Young obtenemos el siguiente análisis.

$$\begin{aligned} \int \frac{fg}{ab} d\mu &\leq \int \left[\frac{1}{p}\left(\frac{f}{a}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{g}{b}\right)^q\right] d\mu \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{\int f^p d\mu}{a^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int g^q d\mu}{b^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Con los cambios de variable iniciales obtenemos que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \Rightarrow \int \frac{fg}{ab} d\mu &= \frac{\int fgd\mu}{ab} \leq 1 \\ \Rightarrow \int fgd\mu &\leq ab \\ \therefore \int fgd\mu &\leq \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

■

Teorema 1.4 ***(Desigualdad de Minkowski)****Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f, g : X \to [0, +\infty]$ son funciones medibles, entonces:*

$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.6}$$

Demostración.
Tomemos los siguientes cambios $a = \left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $b = \left(\int g^p\right)^{\frac{1}{p}}$ y $c = \left(\int (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Si tomamos $a = +\infty$ o $b = +\infty$, inmediatamente $c \leq a + b = +\infty$ por lo que se cumple la desigualdad.
Ahora, tomemos $a < +\infty$ y $b < +\infty$. Además tenemos que $f \leq (f^p + g^p)^{\frac{1}{p}}$ y $g \leq (f^p + g^p)^{\frac{1}{p}}$, entonces $f + g \leq 2(f^p + g^p)^{\frac{1}{p}}$, elevando a la p obtenemos

$$\begin{aligned}
(f+g)^p &\leq 2^p (f^p + g^p) \\
\Rightarrow \int (f+g)^p d\mu &\leq 2^p \left(\int f^p d\mu + \int g^p d\mu\right) \\
\Rightarrow \left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &\leq 2 \left(\int f^p d\mu + \int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
\Rightarrow c &\leq 2(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty
\end{aligned}$$

Antes de continuar veamos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $p + q = pq \Rightarrow p = pq - q$. Notemos que con la desigualdad de Hölder obtenemos el siguiente análisis

$$\begin{aligned}
& c^p = \int (f+g)^p d\mu = \int (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu \\
& \Rightarrow c^p = \int f(f+g)^{p-1} d\mu + \int g(f+g)^{p-1} d\mu \\
& \Rightarrow c^p \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \Rightarrow c^p \leq (a+b) \left(\int (f+g)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \Rightarrow c^p \leq (a+b) c^{p-1} \\
& \quad \therefore \left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

■

1.6. Funciones absolutamente continuas

Ahora daremos paso a un conjunto importante de funciones para el contexto de cálculo de orden arbitrario, ya que este conjunto de funciones cuenta con una definición equivalente al hecho de que exista una función que podemos considerar como su derivada en casi todos sus puntos. Comenzaremos dando unos teoremas y definiciones que necesitamos para poder demotrar la equivalencia mencionada. Para el siguiente teorema y su corolario revisar [12].

Teorema 1.5 ***(El teorema extendido de la convergencia dominada o EDCT)***
Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio con medida y sean $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles tal que $|f_n| \leq g_n$ en casi todos los puntos relativo a μ para cualquier $n \geq 1$. Suponga que

1. *$g_n \to g$ y $f_n \to f$ en casi todos los puntos relativo a μ;*
2. *$g_n, g \in L_1(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $\int |g_n| d\mu \to \int |g| d\mu$ cuando $n \to \infty$.*

Entonces, $f \in L_1(X, \mathcal{S}, \mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \tag{1.7}$$

Un caso especial del teorema anterior 1.5 es cuando tenemos que $g_n = g$ para todo $n \geq 1$, obtenemos la versión estándar del teorema de la convergencia dominada

Corolario 1.2 ***(El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue o DCT)***
Si $|f_n| \leq g$ en casi todos los puntos relativo a μ para todo $n \geq 1$, $\int |g| d\mu < \infty$ y $f_n \to f$ en casi todos los puntos relativo a μ, entonces $f \in L_1(X, \mathcal{S}, \mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \tag{1.8}$$

Gracias a este corolario podemos hablar de que si la medida de un elemento del σ-álgebra es finita entonces la integral del valor absoluto de una función en $L_1(X, \mathcal{S}, \mu)$ sobre ese conjunto también lo es. Esto lo demostraremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.4 *Sea $f \in L_1(X, \mathcal{S}, \mu)$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, por el Corolario 1.2 (DCT) existe un $t > 0$ tal que $\int_{\{|f|>t\}} |f| d\mu < \frac{\epsilon}{2}$, esto por la definicón de límite. Por lo tanto, para cualquier $A \in \mathcal{S}$ con $\mu(A) \leq \delta \equiv \frac{\epsilon}{2t}$,

$$\begin{aligned}
\int_A |f| d\mu &\leq \int_{A\cap\{|f|\leq t\}} |f| d\mu + \int_{\{|f|>t\}} |f| d\mu \\
&\leq t\mu(A) + \int_{\{|f|>t\}} |f| d\mu \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado. ■

Ahora daremos paso a un par de definiciones que nos ayudaran a platicar sobre un teorema que necesitamos para la demostración entre las equivalencias de funciones continuas que veremos más adelante.

Definición 1.11 *Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y sean μ y ν dos medidas en $(X, \mathcal{S})$. La medida μ se dice **dominada por** ν o **absolutamente continua** con respecto a ν y escrito como $\mu \ll \nu$ si*

$$\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{S} \tag{1.9}$$

Definición 1.12 *Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y sean μ y ν dos medidas en $(X, \mathcal{S})$. La medida μ es llamada **singular** con respecto a ν y escrito como $\mu \perp \nu$ si existe un conjunto $B \in \mathcal{S}$ tal que*

$$\mu(B) = 0 \quad y \quad \nu(B^c) = 0 \tag{1.10}$$

Cabe resaltar que que de la definición anterior si μ es singular con respecto a ν implica que ν es singular con respecto a μ. Ya que si μ es singular con respecto a ν, es decir, que existe un $B \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(B) = 0$ y $\nu(B^c) = 0$, para probar que esta propiedad es simétrica tomamos que $\nu(B^c) = 0$ e inmediatamente tenemos que $\mu((B^c)^c) = \mu(B) = 0$, es decir, ν es singular con respecto a μ.

Esto es, la noción de singularidad entre dos medidas μ y ν es simétrica pero la de absolutamente continua entre medidas no. Por ejemplo consideremos las medidas μ y ν definidas en $\mathbb{R}$ como:

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in E \\ 0 & \text{si } 0 \notin E \end{cases}$$

y

$$\nu(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0, \sqrt{2} \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$. Es claro que ambas medidas asignan valores discretos a los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Primero, mostraremos que ν es dominada por μ, es decir, que $\nu \ll \mu$. Para ello, tenemos que demostrar que si $\mu(E) = 0$, entonces $\nu(E) = 0$, lo cual es inmediato pues si $\mu(E) = 0$ entonces $0 \notin E$, por esto mismo y por la definición de ν tenemos que $\nu(E) = 0$. Por lo que ν es dominada por μ. Ahora para demostrar que μ no es dominada por ν, es decir, $\mu \ll \nu$ es falso, tenemos que buscar un E tal que $\nu(E) = 0$ y $\mu(E) \neq 0$. Si tomamos un E tal que $0 \in E$ y $\sqrt{2} \notin E$, entonces inmediatamente tendremos que $\nu(E) = 0$ y $\mu(E) = 1 \neq 0$. En resumen, hemos encontrado un ejemplo donde la dominancia entre medidas no es simétrica

Dadas estas definiciones podemos dar paso al siguiente teorema que abarca dos teorema el teorema de descomposición de Lebesgue y el teorema de Radon-Nikodym. Para la demostración del siguiente teorema revisar [12].

Teorema 1.6 ***(Teorema de Radon-Nikodym).***
Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y sean μ y ν dos medidas σ-finitas en $(X, \mathcal{S})$ tal que $\mu \ll \nu$.Existe una función medible no negativa h en $(X, \mathcal{S})$ tal que

$$\mu = \int_A h d\nu \quad \forall A \in \mathcal{S} \tag{1.11}$$

De este último teorema podemos sacar una definición para lo que es la derivada en el sentido de la integral de Lebesgue.

Definición 1.13 *Sean dos medidas σ-finitas μ y ν sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$ tal que $\mu \ll \mu_2$, a la función función medible no negativa h del teorema de Teorema de Radon-Nikodym se le denota como*

$$h = \frac{d\mu}{d\nu} \tag{1.12}$$

y se le llama la derivada de Radon-Nikodym de μ con respecto a ν.

Daremos paso a las ultimas definiciones que necesitamos para empezar a hablar de funciones absolutamente continuas. Por el momento estas definiciones hablan acerca de lo que se llama variación total de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con respecto a alguna partición Q sobre $[a, b]$.

Definición 1.14 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $-\infty < a < b < \infty$. Entonces para cualquier partición $Q = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}, n \in \mathbb{N}$ la variación total de f con respecto a Q es definida como*

$$T(f, Q) \equiv \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \tag{1.13}$$

Definición 1.15 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $-\infty < a < b < \infty$. La variación total de f sobre $[a, b]$ es definida como*

$$T(f, [a, b]) \equiv \sup_{Q} T(f, Q) \tag{1.14}$$

donde el supremo es tomado sobre toda partición Q sobre $[a, b]$.

Definición 1.16 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $-\infty < a < b < \infty$. Entonces f es llamado variación acotada en $[a, b]$ si $T(f, [a, b]) < \infty$. El conjunto de este tipo de funciones es denotado como $BV[a, b]$.*

Con esto ya podemos dar paso a lo que es una función absolutamente continua.

Definición 1.17 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***absolutamente continua (a.c.)*** *si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $I_j = [a_j, b_j], j = 1, 2, ..., k$ ($k \in \mathbb{N}$) son disjuntos y $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) < \delta$, entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}|f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$. Al conjunto de funciones absolutamente continuas sobre el intervalo $[a, b]$ como $AC[a, b]$.*

Proposición 1.5 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es a.c., entonces f es variación acotada.*

Demostración. Sea Q una partición sobre el intervalo $[a, b]$. Como por hipótesis f es a.c., entonces para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) < \delta$, entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}|f(b_j) - f(a_j)| < 1$.

Ahora sea M un entero tal que $M > \frac{b-a}{\delta} + 1$, buscaremos probar que $T(f, [a, b]) \leq M$. Si tomamos $\epsilon_1 > 0$, entonces $\frac{b-a}{\delta} + 1 + \epsilon_1 > T(f, Q)$ para cualquier Q, entonces $M \geq \frac{b-a}{\delta} + 1 + \epsilon_1$. Por lo tanto $T(f, [a, b]) \leq M$. Finalmente podemos concluir que f es una variación acotada. ∎

Definición 1.18 *Una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si la función $\tilde{F}$*

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & si \quad a \leq x \leq b \\ F(a) & si \quad x < a, \\ F(b) & si \quad x > b, \end{cases} \tag{1.15}$$

es absolutamente continua.

Teorema 1.7 *Una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y solo si existe una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f es Lebesgue medible e integrable con respecto a m y tal que*

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f dm, \qquad \forall x \in [a, b] \tag{1.16}$$

donde m es la medida de Lebesgue.

Demostración. Comenzaremos probaremos la segunda parte del "si y solo si". Entonces supongamos 1.16 como verdadera. Tomando $\int_{[a,b]} |f|dm < \infty$, por la proposición 1.4 entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$m([a, b]) < \delta \Rightarrow \int_{[a,b]} |f|dm < \epsilon \tag{1.17}$$

Esto es, si tomamos $I_j = (a_j, b_j) \subset [a, b]$, $j = 1, 2, ..., k$ tal que $\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^{k} |F(b_j) - F(a_j)| \leq \int_{\cup_{j=1}^{k} I_j} |f|dm < \epsilon$$

donde $m\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) = \sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) < \delta$ y 1.17 se cumplen. De este modo F es a.c.

Para la siguiente parte de la demostración tomaremos la proposición 1.5 donde si tomamos que F es a.c., implica que F es variación acotada para cualquier intervalo finito $[a, b]$. Por lo tanto esto es suficiente para establecer 1.16, asumiendo que F es a.c. y no decreciente. Sea μ_F la medida de Lebesgue generada por la función $\tilde{F}$ como en la Definición 1.18. Ahora mostraremos que μ_F es dominada por la medida de Lebesgue m. Sea $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ de tal forma que

$$(a_j, b_j) \subset [a, b], j = 1, 2, ..., k, \sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{k}(F(b_j) - F(a_j)) < \epsilon$$

Sea $A \subset (a, b)$ con $m(A) = 0$ y Lebesgue medible. Entonces existe una colección contable de intervalos abiertos disjuntos $\{I_j = (a_j, b_j) : I_j \subset [a, b]\}_{j \geq 1}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j \geq 1} I_j \qquad y \qquad \sum_{j \geq 1}(b_j - a_j) < \delta$$

De este modo tenemos que

$$\mu_F\left(A\cap\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) \leq \mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right)$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k}\mu_F(I_j) = \sum_{j=1}^{k}(F(b_j)-F(a_j)) < \epsilon$$

para todo $k\in\mathbb{N}$. Ahora desde $A\subset\bigcup_{j\geq 1} I_j$ podemos tener lo siguiente si incrementamos el valor de k, $\mu_F(A) = \lim_{k\to\infty}\mu_F\left(A\cap\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) \leq \epsilon$. Esto último es válido para cualquier $\epsilon > 0$, se sigue que $\mu_F(A) = 0$. Entonces $\mu_F \ll m$, es decir, μ_F es dominada por m. Ahora por el Teorema de Radon-Nikodym 1.6, existe una función f medible no negativa tal que para cualquier $A\subset\mathbb{R}$ Lebesgue medible implica que $\mu_F(A) = \int_{A\cap[a.b]} fdm$ y en particular para $a\leq x\leq b$,

$$\mu_F([a,x]) = F(x)-F(a) = \int_{[a,x]} fdm$$

lo que implica que 1.16 se cumple. ∎

En consecuencia de este ultimo teorema 1.7 junto con la definición 1.13 si tenemos una función F absolutamente continua, entonces tiene derivada

$$f(x) = \frac{d\mu_F([a,x])}{dm} = \frac{dF(x)}{dm}$$

es casi todos los puntos.

Hasta este momento cuando hemos hablado del concepto de integral lo hemos hecho en el sentido de Lebesgue, pero de ahora en adelante lo haremos en el sentido de Riemann. Este cambio del concepto de integral lo podemos realizar ya que la integral en el sentido de Lebesgue es una generalización del sentido de Riemann. Los espacios L_p los tomaremos de ahora en adelante sobre $E\subset\bar{\mathbb{R}}$, con la σ-álgebra de Borel y con la medida de Lebesgue y los denotaremos como $L_p(E)$.

Definición 1.19 *Denotaremos por* $AC^n[a,b]$ *(*$n\in\mathbb{N}$*) al espacio de funciones* f *en* $[a,b]$ *tales que tiene derivadas absolutamente continuas en* $[a,b]$ *hasta orden* $(n-1)$ *con* $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$*. Además tomaremos como* $AC^1[a,b] = AC[a,b]$*.*

Capítulo 2

Cálculo de orden arbitrario

2.1. Introducción

El cálculo fraccionario, es un campo de las matemáticas que toma los conceptos clásicos de derivadas e integrales del cálculo y los generaliza a derivadas e integrales de ordenes no enteros, es decir reales o complejos. En el caso cuando el orden de la derivada es un complejo le llamaremos cálculo de orden variable y esta rama es sobre la cual nos basaremos a lo largo del trabajo.
Los primeros indicios del cálculo fraccionario fueron en el año 1695 por la pregunta de L'Hopital a Leibniz sobre el significado de $\frac{d^n y}{dx^n}$ cuando n=1/2, a lo cual este último respondió "Esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes consecuencias".[5]
La primera definición de derivada fraccionaria se le debe a L. Euler (1730) por medio de la fórmula:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n}$$

Donde por propiedades de la función Gamma, se obtiene que:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{2.1}$$

Dando como respuesta a la pregunta de L'Hopital (cuando m=1)

$$\frac{d^{1/2} x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

Algo que podemos observar es que esta definición de derivada fraccionaria que además acepta $n, m \in \mathbb{C}$ tal que $Re(m-n+1) > 0$, por definición de la función Gamma. Sin embargo, esta derivada está definida solo para la función $y = x^m$, lo cual dio origen a diversas definiciones derivadas fraccionarias.
Fourier (1822), tomó la igualdad:

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cos(\lambda x - t\lambda + p\frac{\pi}{2}) dt$$

Para un p de orden arbitrario, sin embargo de estas dos definiciones tanto Euler como Fourier no proporcionaron ejemplos ni aplicaciones.

No fue hasta la llegada de Abel (1823) donde utilizó la derivada de orden $\frac{1}{2}$ para resolver la ecuación integral:

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)dt = k$$

resultante de la formulación del problema de la tautócrona, es decir, el problema de determinar la forma de una curva de modo tal que el tiempo de descenso de una masa puntual que se desliza por ella sin fricción y bajo el efecto de la gravedad sea independiente del punto de partida.[3]

Liouville (1832), al ver la solución de Abel a tal problema dio su primer intento de definir una derivada de orden fraccionario. Partió de la derivada de orden m para la función exponencial, que es de la forma:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}$$

con a un número real. Lo extendió para un orden p arbitrario, es decir:

$$D^p e^{ax} = a^p e^{ax}$$

Posteriormente asumió la derivada de orden arbitrario para funciones que pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$$

Cuya derivada de orden arbitrario tiene la forma

$$D^p f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^p e^{a_n x}$$

Sin embargo esta definición solo era válida para los valores de p en lo que la suma infinita converge. Sin embargo no se rindió y posteriormente dio una definición para las funciones de la forma $f(x) = x^{-a}$ para $x, a > 0$ de la forma:

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p \Gamma(a+p)}{\Gamma(a)} x^{-a-p}$$

Pero no logró consagrarse esta definición al ser válida para un conjunto restringido de funciones. En esos mismos escritos en 1832 Liouville postuló la siguiente forma para una integral fraccionaria:

$$(D^{-\alpha} f)(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (t)^{\alpha-1} f(x+t)dt$$

Para $Re(\alpha) > 0$. La cual se asemeja a la actual integral fraccionaria por la derecha de orden α que posteriormente postularon Riemann y Liouville. Siguiendo esta línea, una publicación de Riemann (1876)[6] da una fórmula para la integral de orden fraccionario:

$$(D^{-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \phi(x)$$

Donde debido a que el límite inferior de integración no esta definido consideró oportuno agregar la función complementaria $\phi(x)$.[6] No fue hasta la llegada de Laurent (1884) que se dio la formula definitiva para calcular una integral de orden fraccionario. Para este resultado se tomó la formula de Cauchy para la integral repetida:

$$I_a^n f(x) = \int_a^x ... \int_a^{x_{n-1}} f(t)dt...dx_1$$
$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

Para la demostración lo podemos hacer por inducción. Por ejemplo, es claro que si $I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt$. Ahora si tomamos $I_a^2 f(x)$ y cambiamos el orden de integración considerando la región de integración de la figura 2.1 obtenemos

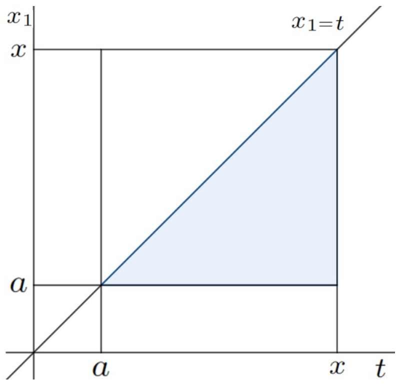

Figura 2.1: Región de integración delimitada entre a y x.

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} f(t)dtdx_1 = \int_a^x \int_t^x f(t)dx_1 dt$$
$$= \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

Ahora para considerar $I_a^3 f(x)$ primero utilizaremos el resultado anterior de $I_a^2 f(x)$ y por último volveremos a utilizar un cambio en el orden de integración

$$I_a^3 f(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} f(t)dtdx_2dx_1 = \int_a^x \int_a^{x_1} (x_1-t)f(t)dtdx_1$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$$

Con esto ahora es claro ver el comportamiento que tiene el iterar integrales sobre un función f por lo cual si lo vemos en un caso general, es decir, para $I_a^3 f(x)$ con $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad (2.2)$$

Posteriormente nacieron otras definiciones pero para esta investigación nos centraremos en esta última definición ya que Lombardero [7], Podlubny [9][10], Widyam [3] y Coronel [8] se centran el uso de la generalización de este operador para hablar de la definición diferentes tipos de derivadas.

2.2. Preliminares

Para poder adentrarnos en el el cálculo de orden arbitrario necesitamos nociones acerca de algunas funciones especiales tales como la función Gamma, la función Beta, la función de Mittag-Leffler. Estas funciones son muy imperantes en el estudio de cálculo de orden arbitrario, esto debido a que se utiliza el hecho de que la función Gamma es una generalización del factorial de un número, además del hecho de que la función de Mittag-Leffler es una generalización para la exponencial. Este hecho de la función de Mittag-Leffler es útil para poder generalizar ecuaciones diferenciales de orden arbitrario.

2.2.1. Función convolución

Definición 2.1 *Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0,\infty)$, entonces el producto especial, denotado por $f * g$ se define mediante la integral:*

$$f * g = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \tag{2.3}$$

y se llama convolución de f y g. Cabe señalar que la convolución de f y g es una función de t.

Esta operación entre funciones nos será de mucha utilidad para demostrar una propiedad muy importante para el cálculo de orden arbitrario y de orden complejo, pues esta operación da pie a la llamada integral de Riemann-Liouville.

Para la teoría de ecuaciones diferenciales es importante la transformada de Laplace pues esta técnica nos proporciona un método para obtener la solución de estas. Como sabemos si tomamos dos funciones f y g cuya transformada de Laplace existe, entonces la transformada de Laplace de la suma $f+g$ es la suma de cada una de las transformadas de Laplace. Sin embargo, la transformada de Laplace del producto fg no es el producto de las transformadas. Para la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones $f * g$ es el producto de las transformadas de Laplace de cada una de las funciones, esto es llamado el teorema de convolución.

Teorema 2.1 ***Teorema de Convolución [10, Teorema 7.4.2, pag 308]*** *Sean f, g funciones continuas por tramos sobre $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \tag{2.4}$$

En la sección previa hablamos de la formula de Cauchy para la integral iterada la cual probamos cambiando el orden de integración. Ahora daremos la demostración en el caso particular de 2.2 en el caso cuando $a = 0$, pero esta vez lo haremos partiendo de la definición de la convolución partiendo de un punto interesante. Observemos que si tomamos una función f continua por tramos en $[0,\infty)$ y además sabemos que una función constante c es continua en todo $\mathbb{R}$, en especial es continua por tramos en $[0,\infty)$ por lo que podemos considerar $c = 1$. A raíz de esto podemos realizar lo siguiente.

$$\int_0^x f(t)dt = (1 * f)(x)$$

nuevamente aplicamos la convolución y obtenemos

$$\int_0^x \int_0^\alpha f(t)dtd\alpha = (1 * (1 * f))(x)$$

$$\overbrace{\int_0^x ... \int_0^\alpha}^{n-veces} f(t)dt...d\alpha = (\overbrace{(1 * ... * 1)}^{n-veces} * f)(x)$$

$$I^n f(x) = 1^{*_n} * f$$

Demostraremos por inducción que

$$1^{*_n} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Entonces, como la convolución es un producto binario el caso base es cuando $n = 2$

$$1^{*_2} = 1 * 1 = \int_0^x dt = x$$

Ahora en general, podemos tomar el caso cuando $n = k - 1$

$$1^{*_{k-1}} = \overbrace{(1 * ... * 1)}^{k-3} * 1 * 1 = \overbrace{(1 * ... * 1)}^{k-3} * x = \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}$$

Y finalmente tomando el caso $n = k$

$$1^{*_k} = 1 * \overbrace{(1 * ... * 1)}^{k-1} = 1 * \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

Por lo tanto podemos considerar la siguiente expresión como verdadera

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{2.5}$$

2.2.2. Función Gamma

Otra función importante es la función Gamma, debido a que la definición de Riemann-Liouville, la de Caputo y la de Günwald-Letnikov utilizan esta función en sus definiciones. Además las propiedades de esta función son importantes para demostrar las propiedades de las derivadas de orden arbitrario.

Definición 2.2 *Sea $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$, llamaremos función Gamma a la siguiente expresión:*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.6}$$

Esta función integral converge para todo el plano complejo excepto a los enteros negativos y al cero.

Esta función es llamada la función factorial por qué en el caso donde $z \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\Gamma(z) = (z-1)! \tag{2.7}$$

Lo cual podemos deducir por medio de integración por partes.

Además de esta función tiene una propiedad más utilizada al menos en las demostraciones que se llevan a cabo en este trabajo, la cual es la siguiente.

Teorema 2.2 *Sea $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$, entonces*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.8}$$

Demostración. Empecemos tomando la función Gamma de $z+1$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt$$

Ahora integraremos por partes tomando a $u = t^z$, $dv = e^{-t}$, entonces tenemos que $du = zt^{z-1}$ y $v = -e^{-t}$ por lo que la integral queda

$$\Gamma(z+1) = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$
$$\Gamma(z+1) = z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

■

La demostración para la propiedad 2.7 se realiza de manera análoga aplicando la integración por partes.

2.2.3. Función Beta

Otra función importante para poder demostrar propiedades en el cálculo de orden arbitrario es la llamada función Beta, esta función esta conectada con la función Gamma previamente definida. La función Beta es definida de la siguiente manera.

Definición 2.3 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $R(z), Re(w) > 0$, entonces es llamada función Beta la función dada por la expresión:*

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1} d\tau \tag{2.9}$$

Partiendo de la definición anterior por medio del cambio de variable $v = \frac{\tau}{1-\tau}$ podemos llegar una versión alternativa que suele ser útil manejar. Si de este cambio de variable despejamos a τ, obtenemos que $\tau = \frac{v}{v+1}$ y que $d\tau = \frac{dv}{(v+1)^2}$. Reescribiendo la ecuación 2.9 obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} B(z,w) &= \int_0^\infty \left(\frac{v}{v+1}\right)^{z-1} \left(1 - \frac{v}{v+1}\right)^{w-1} \frac{dv}{(v+1)^2} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{v}{v+1}\right)^{z-1} \left(\frac{1}{v+1}\right)^{w-1} \frac{dv}{(v+1)^2} \end{aligned}$$

y finalmente simplificando términos obtenemos la que seria una definición equivalente a 2.9.

$$B(z,w) = \int_0^\infty v^{z-1}(v+1)^{-(z+w)}dv \tag{2.10}$$

Ahora bien, una característica imporante de esta función es la relación que esta tiene con la función Gamma para establecer dicha relación utilizaremos el teorema de convolución 2.4. Primero definiremos la siguiente función

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau$$

Donde podemos ver que la función $h_{z,w}(t)$ es la convolución de τ^{z-1} y τ^{w-1} e inmediatamente $h_{z,w}(1) = B(z,w)$.

Aplicando transformada de Laplace de la convolución obtenemos

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}\frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}$$

Si aplicamos transformada inversa de Laplace obtenemos

$$\begin{aligned} h_{z,w}(t) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(z+w)}{s^{z+w}}\right\} \\ h_{z,w}(t) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1} \end{aligned}$$

Si consideramos $t = 1$, obtenemos la relación entre la función Gamma y la función Beta

$$h_{z,w}(1) = B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2.11}$$

2.2.4. Función de Mittag-Leffler

Una función demasiado importante para el cálculo de orden arbitrario es la función de Mittag-Leffler la cual es una generalización de la función exponencial. La función exponencial es utilizada para el estudio de ecuaciones diferenciales, por lo que, el tener una función con un comportamiento análogo al de esta función se vuelve de vital importancia para poder establecer una teoría de ecuaciones diferenciales, en este caso de orden complejo. Se le conoce como la función de Mittag-Leffler a cualquiera de las siguientes dos funciones.

Definición 2.4 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, con $Re(\alpha) > 0$, entonces la siguiente expresión es llamada función de Mittag-Leffler*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{2.12}$$

Definición 2.5 *Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con $Re(\alpha) > 0$ y $Re(\beta) > 0$, la siguiente expresión es llamada nueva función de Mittag-Leffler*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{2.13}$$

Una propiedad para realizar ecuaciones diferenciales es la transformada de Laplace, por lo que, querer ver como se comporta la transformada de Laplace con la Función de Mittag-Leffler es natural.

Teorema 2.3 *Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con $Re(\alpha) > 0$ y $Re(\beta) > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ el orden de la derivada de la función de Mittag-Leffler*

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \mp a} \tag{2.14}$$

con $\| \pm a \| < \| s^{\alpha} \|$.

Demostración. Comenzaremos tomando la integral siguiente por definición de transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm a)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{s^{\alpha k+\beta}} \\
&= s^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pm a}{s^{\alpha}}\right)^k
\end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que $\| \pm a \| < \| s^{\alpha} \|$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})\} = s^{-\beta}\frac{1}{1 \mp \frac{a}{s^{\alpha}}}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \mp a}$$

■

Por ejemplo, para esta función de Mittag-Leffler es intuitivo lllegar a una generalización de su derivada gracias a su definición polinómica y utilizando la ecuación 2.1 dada por Euler. Con estas herramientas podemos realizar el sigiente pocedimiento.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_{\alpha,\beta}(z) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\left(\frac{d}{dz}\right)^n z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)}z^{k-n}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de igual manera de como lo hemos venido manejando este resultado lo podemos generalizar para que no solo sea una derivada en el sentido clásico por lo que podemos dar la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\psi} E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)z^{k-\psi}}{\Gamma(\alpha k+\beta)\Gamma(k-\psi+1)} \tag{2.15}$$

2.3. Integral de orden arbitrario Riemann-Liouville

Las dos definiciones de derivadas de orden arbitrario más ocupadas en la actualidad, la definición de Riemann-Liouville (1884) y la de Caputo (1967). Ambas definiciones ocupan el operador de la integral de orden arbitrario de Riemann-Liouville, es decir, a diferencia como vimos en cálculo primero definiremos lo que es una integral de orden arbitrario para posteriormente poder definir una derivada de orden arbitrario. Para esta definición, se toma como base la ecuación 2.2 obtenida del desarrollo para integrales iteradas de Cauchy.

Definición 2.6 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$, el intervalo finito [a,b]$\subset \mathbb{R}$ y $f \in L_1([a,b])$. Las integrales:*

$$({}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.16}$$

$$({}^{RL}I^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.17}$$

Con $-\infty < x < \infty$. Son llamadas las integrales de orden arbitrario de Liouville de orden α, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Como ya lo hemos mencionado, nos centraremos el estudio del operador derivada por la izquierda dado por la ecuación 2.16 por su uso en la definición diferentes tipos de derivadas. De la definición anterior, podemos reescribir la derivada de orden arbitrario por la izquierda de la siguiente manera por medio de la convolución cuando $a = 0$ como ya lo vimos en la sección de la convolución.

$$({}^{RL}I^{\alpha}_{0+}f)(x) = (\phi * f)(x) \tag{2.18}$$

con

$$\phi(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Ahora otra de estos operadores 2.16 y 2.17 se pueden extender ya que el orden α es un número complejo fijo, podemos introducir la idea de que pueda ser una función $\alpha : [0,T_1] \times [0,T_1] \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ con $({}^{RL}I^{\alpha(x,\tau)}_{a+}f)(x)$. A partir de esto hay 4 opciones viables, que la función sea un número complejo $\alpha(x,\tau) = \alpha$ que es el caso base, $\alpha(x,\tau) = q(t)$, $\alpha(x,\tau) = q(\tau)$ y $\alpha(x,\tau) = q(x-\tau)$. Cabe señalar que teniendo la variable x en la función del orden de la integral, nos da a entender que esto es para modelos que cambian con respecto al mismo tiempo que transcurre en la función f. Para la variable τ podría ser considerar un tiempo independiente a la variable x con el cual cambia el modelo.

Por naturalidad, Liouville extendió estas definiciones 2.16 y 2.17 a los semiejes $(-\infty, b]$ y $[a, \infty)$ y por ende, a todo el eje real cuando $a = -\infty$ y $b = \infty$, nacen las siguientes definiciones análogas a las anteriores:

Definición 2.7 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y $f \in L_1(\mathbb{R})$. Las integrales:*

$$({}^{RL}I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.19}$$

$$({}^{RL}I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.20}$$

Con $-\infty < x < \infty$. Son llamadas las integrales de orden arbitrario de Liouville de orden α, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

De la definición de derivada de Riemann-Liouville la ecuación 2.16 podemos ver que cumple con la linealidad con

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha (cf + dg)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} (cf + dg)(t)dt$$

Por linealidad de la integral, obtenemos

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha (cf + dg)(x) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \frac{d}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} g(t)dt$$

Y por definición de integral de orden arbitrario

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha (cf + dg)(x) = c\,{}^{RL}I_{a+}^\alpha f(x) + d\,{}^{RL}I_{a+}^\alpha g(x) \tag{2.21}$$

Con c, d constantes arbitrarias.

Además si tomamos la integral hablando de esta forma de una constante, tenemos el siguiente ejemplo

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a+}^\alpha (c) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} c\,dt \\ {}^{RL}I_{a+}^\alpha (c) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Si realizamos un cambio de variable $u = x - t$, $du = -dt$, entonces

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha (c) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(- \int_{x-a}^{0} u^{\alpha-1} du \right)$$

Cambiando los límites de integración

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha (c) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x-a} u^{\alpha-1} du$$

Evaluando la integral

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a+}^\alpha (c) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \frac{u^\alpha}{\alpha} \Big|_0^{x-a} \\ {}^{RL}I_{a+}^\alpha (c) &= c \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dada la defnción de integral de Riemann-Liouville de orden arbitrario por la izquierda en la ecuación 2.16 veremos que si tomamos el límite de la función f cuando el orden de la integral tiende a cero podemos, el límite tienda a la función f. Veremos a continuación esta demostración.

Proposición 2.1 *Sea f una función real continua en $t \geq a$. Veremos que el siguiente límite se cumple*

$$\lim_{\alpha \to 0} {}^{RL}I^{\alpha}_{a+} f(x) = f(x) \tag{2.23}$$

Demostración. Primaeramente, por hipótesis f es continua, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(x)| < \delta$$

Con eso procederemos a reescribir la ecuación 2.16 de la siguiente forma

$${}^{RL}I^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(f(t) - f(x))dt + \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt$$

Donde para primer integrar la separaremos en dos integrales para porsetriormente poder acotar con estimaciones a $|{}^{RL}I^{\alpha}_{a+} f(x) - f(x)|$, tomaremos $x - \epsilon$ que esta dentro el intervalo de dichas integrales. Para el segundo sumando simplemente utilizaremos la ecuación 2.22 por lo que tenemos la siguiente forma para ${}^{RL}I^{\alpha}_{a+} f(x)$

$$\begin{aligned} {}^{RL}I^{\alpha}_{a+} f(x) = & \overbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\epsilon} (x-t)^{\alpha-1}(f(t) - f(x))dt}^{I_1} \\ & + \overbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\epsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1}(f(t) - f(x))dt}^{I_2} \\ & + f(x) \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

Por lo que tenemos la siguiente comparación

$$|I_2| < \left| \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\epsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt \right|$$

Utilizando un cambio de varible $u = x - t$, $du = -dt$ en la nueva integral queda de la siguiente forma

$$\frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\epsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\epsilon} u^{\alpha-1} du = \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \frac{\epsilon^{\alpha}}{\alpha}$$

Lo que nos lleva a tener la siguiente estimación para I_2

$$|I_2| < \left| \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\epsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt \right| \leq \left| \frac{\delta \epsilon^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right|$$

Tomando en cuenta que $\delta \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, obtenemos que para todo α con $Re(\alpha) > 0$

$$\lim_{\epsilon \to 0} |I_2| = 0 \tag{2.24}$$

Ahora tomaremos un $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|I_2| < \epsilon_0 \tag{2.25}$$

Para todo α con $Re(\alpha) > 0$. Para un δ fijo obtenemos la siguiente comparación para I_1.

$$|I_1| \leq \left| \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\epsilon} (x-t)^{\alpha-1} dt \right|$$

Del mimso modo que con la estimación para I_2 utilizando el cambio de varible $u = x - t$, $du = -dt$ en la nueva integral queda de la siguiente forma

$$\frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\epsilon} (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_\epsilon^{x-a} u^\alpha du = \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)\alpha} (\epsilon^\alpha - (x-a)^\alpha)$$

Por lo que gracias a esto tenemos la sguiente estimación para I_1

$$|I_1| \leq \left| \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\epsilon} (x-t)^{\alpha-1} dt \right| \leq \left| \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} (\epsilon^\alpha - (x-a)^\alpha) \right|$$

De donde sigue que

$$\lim_{\alpha \to 0} |I_1| = 0 \tag{2.26}$$

Ahora considerando

$$|{}^{RL}I_{a+}^\alpha f(x) - f(x)| \leq |I_1| + |I_2| + |f(x)| \left| \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right|$$

Tomando en cuenta los límites 2.24 y 2.26 y la condición 2.25

$$\lim_{\alpha \to 0} \sup \left| {}^{RL}I_{a+}^\alpha f(x) - f(x) \right| \leq \epsilon_0$$

En especial podemos tomar ϵ_0 tan pequeño como queramos. Por lo tanto

$$\lim_{\alpha \to 0} \sup \left| {}^{RL}I_{a+}^\alpha f(x) - f(x) \right| = 0$$

y la proposición 2.1 se cumple. ■

Esta última proposición 2.1 nos facilita extender este operador integral para el caso ${}^{RL}I_{a+}^0 f(x) := f(x)$. Del mismo modo como de una integral de orden entero podemos calcular su transformada de Laplace, para esta definición de derivada Riemann-Liouville podemos hacer lo mismo. Recordemos que la transformada de Laplace de una integral es la siguiente:

$$\mathcal{L}\{\int_0^x f(t)dt\} = s^{-1}\mathcal{L}\{f(x)\} \tag{2.27}$$

Para la integral de Riemann-Liouville obtenemos una expresión similar, como lo veremos en el teorema siguiente.

Teorema 2.4 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in L_1([a,b])$, tal que $Re(\alpha) > 0$. Tenemos que la transformada de Laplace de la integral de Riemann-Liouville es de la siguiente forma:*

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}I_0^{\alpha} f(x)\} = s^{-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\} \tag{2.28}$$

Demostración. Por la forma alternativa de la definición de la integral de Riemann-Liouville 2.18 tenemos lo siguiente

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}I_0^{\alpha} f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}\{x^{\alpha-1} * f(x)\}$$

Y por el teorema de la convolución 2.4 finalmente obtenemos

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}I_0^{\alpha} f(x)\} = s^{-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\}$$

■

Ahora podemos explorar un par de ejemplos de este nuevo operador de orden complejo. Una clase de funciones muy importantes son las funciones polinómicas por lo que es natural el querer realizar la integral de orden complejo de Riemann-Liouville de una función de la forma $f(x) = x^m$.

Ejercicio 2.1 *Sea la siguiente función $f(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{C}$ con $Re(m) > -1$.*

Solución.

$${}^{RL}I_{0+}^{\alpha} x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^m dt$$

Sea $t = xs$, si derivamos este cambio de variable $dt = xds$ obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{0+}^{\alpha} x^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-xs)^{\alpha-1}(xs)^m x ds \\ &= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{m+1-1} ds \end{aligned}$$

Utilizando la definición de la dunción beta 2.9

$${}^{RL}I_{0+}^{\alpha} x^m = \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)} B(m+1,\alpha)$$

Utilizando la propiedad de la función beta 2.11

$${}^{RL}I_{0+}^{\alpha} x^m = \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+m+1)}$$

Finalmente simplificando términos tenemos la siguiente expresión.

$${}^{RL}I_{0+}^{\alpha} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} x^{\alpha+m} \tag{2.29}$$

†

Este resultado como ya lo habíamos platicado nos abre las puertas a poder calcular las integrales de orden complejo con el operador Riemann-Liouville para funciones polinómicas. Una función de esta clase que ya definimos previamente es la función de Mittag-Leffler 2.13, por lo que resulta interesante observar el comportamiento de esta función ya que es una generalizanción de la función exponencial.

Ejercicio 2.2 *Sean $\alpha, \beta, \psi \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha), Re(\beta), Re(\psi) > 0$ obtener la integral de orden complejo con el operador Riemann-Liouville de la función de Mittag-Leffler 2.13.*

Solución.

$$ {}^{RL}I^{\psi}_{0+}E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\psi)}\int_0^x (x-t)^{\psi-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt $$

Como la suma infinita converge podemos distribuir la integral sobre la suma para obtener.

$$ \begin{aligned} {}^{RL}I^{\psi}_{0+}E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{\Gamma(\psi)}\int_0^x (x-t)^{\psi-1}t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}I^{\psi}_{0+}x^k \end{aligned} $$

Finalmente utilizando el resultado del ejercicio previo 2.29 llegamos a lo siguiente.

$$ {}^{RL}I^{\psi}_{0+}E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha k+\beta)\Gamma(\psi+k+1)}x^{\psi+k} \tag{2.30} $$

†

Hasta este momento hemos visto que el realizar n veces el operador integral 2.2 acumula las n integrales sobre una función f y además podemos ver que si tomamos $n, m \in \mathbb{N}$ inmediatamente tenemos que

$$ \begin{aligned} I^n I^m f(x) &= \overbrace{\int \ldots \int}^{n-veces}\overbrace{\int \ldots \int}^{m-veces} f(x) \\ &= \overbrace{\int \ldots \int}^{n+m-veces} f(x) \\ &= I^{n+m}f(x) \end{aligned} $$

Intuitivamente surge la pregunta que si esto sigue cumpliéndose esta propiedad con estos nuevos operadores. Tomaremos para el siguiente análisis el operador dado para la ecuación 2.16 en el siguiente teorama ya que en este documento nos centraremos en este operador para su uso con la solución de ecuaciones diferenciales en el capítulo 4.

Teorema 2.5 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$, un intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y una función $f \in L_1(a, b)$, entonces*

$$ ({}^{RL}I^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = {}^{RL}I^{\beta+\alpha}_{a+}f(x) \tag{2.31} $$

Demostración. Para probar 2.31 partimos de:

$$ \begin{aligned} ({}^{RL}I^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= [{}^{RL}I^{\beta}_{a+}(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\beta-1}\int_a^t (t-v)^{\alpha-1}f(v)dvdt \end{aligned} $$

Si para esto realizamos un cambio en el orden de integración obtenemos:

$$({}^{RL}I^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(v)\int_v^x (x-t)^{\beta-1}(t-v)^{\alpha-1}dtdv$$

Analizaremos la integral que esta dentro por individual primero:

$$\int_v^x (x-t)^{\beta-1}(t-v)^{\alpha-1}dt$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} a &= (x-t)^{\beta} \\ da &= -\beta(x-t)^{\beta-1}dt \\ t &= x-a^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}$$

Entonces la integral queda de la siguiente de la siguiente de la siguiente forma de la siguiente forma:

$$\int_v^x (x-t)^{\beta-1}(t-v)^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\beta}\int_0^{(x-v)^{\beta}} (x-a^{\frac{1}{\beta}}-v)^{\alpha-1}da$$

Ahora, si realizamos este otro cambio de variable:

$$\begin{aligned} r &= x-a^{\frac{1}{\beta}}-v \\ a &= (x-r-v)^{\beta} \\ da &= -\beta(x-r-v)^{\beta-1}dr \end{aligned}$$

Reescribiendo la integral:

$$\int_v^x (x-t)^{\beta-1}(t-v)^{\alpha-1}dt = \int_0^{x-v} r^{\alpha-1}(x-v-r)^{\beta-1}dr$$

Si consideramos por último el cambio de variable:

$$\begin{aligned} r &= (x-v)s \\ dr &= (x-v)ds \end{aligned}$$

La integral se reduce a:

$$\int_v^x (x-t)^{\beta-1}(t-v)^{\alpha-1}dt = (x-v)^{\beta+\alpha-1}\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds$$

Y además sabemos que la función beta tiene la forma de la ecuación 2.9, es decir el resultado de la integral es

$$\int_v^x (x-t)^{\beta-1}(t-v)^{\alpha-1}dt = (x-v)^{\beta+\alpha-1}B(\alpha,\beta) \tag{2.32}$$

Sustituyendo este valor en el problema original obtenemos:

$$({}^{RL}I^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(v)(x-v)^{\beta+\alpha-1}dv$$

Por un lado tenemos la propiedad de la función beta 2.11, la cual podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{B(x,y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} = \frac{1}{\Gamma(x+y)}$$

Y por otro lado por definición de integral por la izquierda podemos concluir que

$$({}^{RL}I_{a+}^{\beta}\,{}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(v)(x-v)^{\beta+\alpha-1}dv$$
$$({}^{RL}I_{a+}^{\beta}\,{}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f)(x) = ({}^{RL}I_{a+}^{\beta+\alpha}f)(x)$$

■

Ya vimos previamente como se comporta este operador con la función x^m con $m \in \mathbb{C}$, ahora veremos como se comporta el operador 2.16 con una función del estilo $(x-a)^{\gamma-1}$ con $\gamma \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.6 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha) > 0$,$\gamma \in \mathbb{C}$ y un intervalo finito $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si $\gamma > 0$ y $x > a$, entonces:*

$$ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(x-a)^{\gamma+\alpha-1} \tag{2.33}$$

Demostración. Partimos de la definición de integral de orden arbitrario:

$$ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\gamma-1}dt$$

El resultado de esta integral es análogo a al de la ecuación 2.32 del teorema anterior, es decir, el resultado de la integral es

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\gamma-1}dt = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(x-a)^{\gamma+\alpha-1}$$

■

Ahora, daremos la demostración de un teorema importante para las funciones que conforman el espacio $AC^n[a,b]$ donde nos dará una forma general para este tipo de funciones. Para esta demostración haremos uso del operador 2.16 en el caso cuando $\alpha = n$. Además este teorema será utilizado para poder demostrar en la siguiente sección bajo que condiciones el operador derivada de orden arbitrario por la derecha existe.

Teorema 2.7 *El espacio $AC^n[a,b]$ consiste de solo esas funciones $f(x)$ que puedan ser representadas de la forma*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \tag{2.34}$$

Donde $f^{(n)}(t) \in L_1([a,b])$

Demostración. Por hipótesis $f \in AC^n[a,b]$, es decir tiene derivadas absolutamente continuas en $[a,b]$ hasta orden $(n-1)$, por lo que podemos hacer

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \tag{2.35}$$

Pero también f' la podemos escribir de la siguiente manera

$$f'(x) = f'(a) + \int_a^x f''(t)dt \tag{2.36}$$

Sustituyendo 2.36 en 2.35 obtenemos

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \left[f'(a) + \int_a^t f''(s)ds \right] dt$$

Distribuyendo la integral

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^t f''(s)dsdt \tag{2.37}$$

De igual manera, f'' la podemos escribir de la siguiente manera

$$f''(x) = f''(a) + \int_a^x f'''(t)dt \tag{2.38}$$

Sustituyendo 2.38 en 2.37 obtenemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^t \left[f''(a) + \int_a^s f'''(r)dr \right] dsdt$$

Distribuyendo la integral

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \int_a^t \int_a^s f'''(r)drdsdt$$

Realizando este procedimiento n veces y utilizando 2.16 finalmente obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

■

2.4. Derivada de orden arbitrario Riemann-Liouville

Del mismo modo que en cálculo vimos que la derivada era un operador que cancelaba a la integral por la izquierda, podemos definir de un modo similar a la derivada de orden arbitrario de una función.En esta sección buscaremos estudiar varias propiedades del operador derivada de orden complejo dado por Riemann-Liouville. Buscaremos ver como se comportan entre si este nuevo operador consigo mismo pero de diferente orden para observar si se preserva la propiedad conmutativa del operador derivada en el sentido clásico y ver como se comporta con el previo operador integral de orden complejo. Además veremos bajo que condiciones se garantiza la existencia de este nuevo operador derivada que definiremos.

Para la siguiente definición y más usos en este documento tomaremos como definición que $n = [Re\,(\alpha)] + 1$, con $[.]$ como la parte entera del número.

Definición 2.8 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) \geq 0$, el intervalo finito [a,b]$\subset \mathbb{R}$ y $f \in L_1(a,b)$. Las derivadas de orden arbitrario de Riemann-Liouville son:*

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = (D^{n\,RL}I^{n-\alpha}_{a+}f)(x) \tag{2.39}$$

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{b-}f)(x) = [(-D^{n})^{RL}I^{n-\alpha}_{b-}f](x) \tag{2.40}$$

Son llamadas las derivadas de orden arbitrario de Riemann-Liouville de orden α, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Tomaremos como definición que $({}^{RL}D^{-\alpha}_{a+}f)(x) = ({}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x)$ con $Re(\alpha) \geq 0$. Algo que es importante recalcar de la definición 2.39 es que cuando $\alpha \in \mathbb{N}$ la definición coincide con el operador de derivación entera. Veamos que si $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $n = \alpha + 1$, lo que nos lleva a la siguiente forma

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha+1\,RL}I^{\alpha+1-\alpha}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha+1\,RL}I^{1}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha}f)(x)$$

Además de este último análisis es claro ver que si $\alpha = 0$, entonces tenemos el operador identidad $({}^{RL}D^{0}_{a+}f)(x) = f(x)$.

Cabe señalar, de manera análoga como lo vimos en caso para integral de Riemann-Liouville, podemos considerar la función $\alpha : [0, T_1] \times [0, T_1] \subset \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{C}$ con $({}^{RL}D^{\alpha(x,\tau)}_{a+}f)(x)$ con los mismos 4 casos que ya hemos mencionado. en este documento abordaremos el caso de cuando es un número complejo y el caso cuando $\alpha(x,\tau) = q(t)$ para nuestras pruebas en el capítulo 3 en las aproximaciones numéricas para varios valores en el orden de la derivada. La definición de derivada de orden arbitrario de la ecuación 2.39 cumple la propiedad de linealidad y esta la podemos deducir de la siguiente manera.

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(cf + dg)(x) = D^{n\,RL}I^{n-\alpha}_{a+}(cf + dg)(x)$$

Por 2.21 obtenemos

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(cf + dg)(x) = D^{n}(c^{RL}I^{n-\alpha}_{a+}f + d^{RL}I^{n-\alpha}_{a+}g)(x)$$

Por linealidad de la derivada, tenemos que

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(cf + dg)(x) = (cD^{n\,RL}I^{n-\alpha}_{a+}f + dD^{n\,RL}I^{n-\alpha}_{a+}g)(x)$$

Y finalmente por definición de derivada de orden arbitrario

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(cf + dg)(x) = (c^{RL}D^{\alpha}_{a+}f + d^{RL}D^{\alpha}_{a+}g)(x) \tag{2.41}$$

Por naturalidad y del mismo modo que hicimos con las definiciones de los operadores integral 2.16 y 2.17, Liouville extendió estas definiciones 2.39 y 2.40 a los semiejes $(-\infty, b]$ y $[a, \infty)$ y por ende, a todo el eje real cuando $a = -\infty$ y $b = \infty$, nacen las siguientes definiciones análogas a las anteriores

Definición 2.9 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) \geq 0$ y $f \in L_1(\mathbb{R})$. Las derivadas de orden arbitrario son:*

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{+}f)(x) = (D^{n\,RL}I^{n-\alpha}_{+}f)(x) \tag{2.42}$$

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{-}f)(x) = [((-1)^{n}D^{n})^{RL}I^{n-\alpha}_{-}f](x) \tag{2.43}$$

Son llamadas las derivadas de orden arbitrario de Liouville de orden α, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Una observación importante es que por un lado ambas definiciones de integrales de orden arbitrario 2.39 y 2.40 no nos permite una integral de orden imaginario puro, sin embargo, no es el caso para las definiciones de derivadas de orden arbitrario debido a que $n = [Re\,(\alpha)] + 1$, cuando $[Re\,(\alpha)] = 0$ entonces $n = 1$. En otras palabras, Podemos definir derivadas de orden de la forma $i\theta$ y expresarlas de la siguiente manera.

$$({}^{RL}D^{i\theta}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-i\theta}f(t)dt$$

$$({}^{RL}D^{i\theta}_{b-}f)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_x^b (t-x)^{-i\theta}f(t)dt$$

Con $\theta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Primero veremos un resultado que a lo largo de este trabajo nos ayudará para demostrar algunas propiedades para este tipo de derivadas.

Ejercicio 2.3 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y $0 \leq j \leq n-1$ con $n = [Re(\alpha)] + 1$, entonces:*

$$D^j_t(x-t)^{\alpha-1} = (-1)^{-j}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)}(x-t)^{\alpha-j-1} \tag{2.44}$$

Solución. Para esto primero sacaremos un $(-1)^{\alpha-1}$ y como las derivadas de orden entero tiene la propiedad de linealidad, obtenemos

$$D^j_t(x-t)^{\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1}D^j_t(t-x)^{\alpha-1}$$

Utilizando la definición de Euler podemos llegar a que

$$\begin{aligned} D^j_t(x-t)^{\alpha-1} &= (-1)^{\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-1-j+1)}(t-x)^{\alpha-1-j} \\ &= (-1)^{-j}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)}(x-t)^{\alpha-1-j} \end{aligned}$$

†

Ejercicio 2.4 *Sea $f(x) = e^{-ax}$ con $a > 0$ y $0 < Re(\alpha) < 1$.*

Solución. Entonces, utilizando la definición 2.43:

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D^{\alpha}_{-}f)(x) &= {}^{RL}D^{\alpha}_{-}(e^{-ax}) \\ &= \frac{(-1)^1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^\infty (t-x)^{1-\alpha-1}(e^{-at})dt \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^\infty (t-x)^{-\alpha}e^{-at}dt \end{aligned}$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable $s = t - x$, entonces la integral se convierte en:

$$
\begin{aligned}
({}^{RL}D_{-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-a(s+x)} ds \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (e^{-ax}) \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-as} ds \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} (-a)(e^{-ax}) \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-as} ds
\end{aligned}
$$

Ahora, realizando el cambio $v = as$, entonces la integral se convierte en:

$$
\begin{aligned}
({}^{RL}D_{-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} (-a)(e^{-ax}) \int_0^\infty (\frac{v}{a})^{-\alpha} e^{-v} \frac{1}{a} dv \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} (-a)(e^{-ax})(a^{\alpha-1}) \int_0^\infty v^{-\alpha} e^{-v} dv \\
&= \frac{a^{\alpha} e^{-ax}}{\Gamma(1-\alpha)} \Gamma(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
{}^{RL}D_{-}^{\alpha}(e^{-ax}) = a^{\alpha} e^{-ax}
$$

†

Ejercicio 2.5 *Sea* $f(x) = x^{-\mu}$ *con* $0 < \alpha < \mu < 1$.

Solución. Entonces, utilizando la definición 2.43:

$$
\begin{aligned}
({}^{RL}D_{-}^{\alpha} f)(x) &= {}^{RL}D_{-}^{\alpha}(x^{-\mu}) \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty (t-x)^{-\alpha} t^{-\mu} dt
\end{aligned}
$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable $s = t - x$, entonces la integral se convierte en:

$$
({}^{RL}D_{-}^{\alpha} f)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty s^{-\alpha} (x+s)^{-\mu} ds
$$

Si ahora, realizamos el cambio $s = xv$, entonces la integral se convierte en:

$$
\begin{aligned}
({}^{RL}D_{-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (x^{-\alpha-\mu+1}) \int_0^\infty v^{-\alpha} (1+v)^{-\mu} dv \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} (-\alpha-\mu+1)(x^{-\alpha-\mu}) \int_0^\infty v^{-\alpha} (1+v)^{-\mu} dv
\end{aligned}
$$

Recordando que la función Beta tiene la forma de la ecuación 2.10 y con la propiedad 2.11:

$$
\begin{aligned}
B(x,y) &= \int_0^\infty t^{x-1} (1+t)^{-(x+y)} dt \\
&= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}
\end{aligned}
$$

Entonces la derivada de orden arbitrario queda:

$$({}^{RL}D_{-}^{\alpha}f)(x) = \frac{\alpha+\mu-1}{\Gamma(1-\alpha)}(x^{-\alpha-\mu})\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\mu+\alpha-1)}{\Gamma(\mu)}.....(*)$$

Recordando que por 2.8:

$$\Gamma(\mu+\alpha) = (\mu+\alpha-1)\Gamma(\mu+\alpha-1)$$

Por lo tanto, despejando y sustituyendo en (*) obtenemos:

$${}^{RL}D_{-}^{\alpha}(x^{-\mu}) = \frac{\Gamma(\mu+\alpha)}{\Gamma(\mu)}x^{-\alpha-\mu}$$

†

Algo que puede parecer un poco sorprendente es que como ya hablábamos, en cálculo tenemos que $D^n D^m = D^{n+m}$ en las derivadas de orden arbitrario no se cumple esto, es decir, ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta} \neq {}^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta}$ un ejemplo de esto es:

Ejercicio 2.6 *Sea* $f(x) = x^{-1/2}$

Solución.

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{0+}^{1/2}[{}^{RL}D_{0+}^{1/2}x^{-1/2}] &= {}^{RL}D_{0+}^{1/2}[D_x\,{}^{RL}I_{0+}^{\frac{1}{2}}x^{1/2}] \\ &= D_{0+}^{1/2}[D_x\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-t)^{-1/2}t^{-1/2}dt] \end{aligned}$$

Si realizamos el cambio de variable $t = xu$ obtenemos:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{0+}^{1/2}[{}^{RL}D^{1/2}x^{-1/2}] &= {}^{RL}D_{0+}^{1/2}[D_x\,{}^{RL}I_{0+}^{\frac{1}{2}}x^{1/2}] \\ &= {}^{RL}D_{0+}^{1/2}[D_x\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 (1-u)^{-1/2}u^{-1/2}du] \\ &= {}^{RL}D_{0+}^{1/2}(0) = 0 \end{aligned}$$

†

Claramente este resultado no es el que se obtiene al encontrar la derivada de primer orden de $x^{-1/2}$ en cálculo elemental. En el siguiente ejemplo veremos que esta definición de derivada tiene la característica de que la derivada de una constante c no es 0 como lo sabíamos de nuestros cursos de cálculo elemental.

Ejercicio 2.7 *Sean* $f(x) = c$ *con* c *una constante arbitraria y* $\alpha \in \mathbb{C}$ *con* $Re(\alpha) \in (0,1)$.

Solución.

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(c) = D_x^{n\,RL}I_{a+}^{n-\alpha}(c)$$

De la sección anterior de la ecuación 2.22

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(c) &= cD_x^n\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \\ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(c) &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha-n+1)}(x-a)^{n-\alpha-n} \\ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(c) &= \frac{c(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \end{aligned}$$

†

Como podemos ver del ejercicio anterior la hipótesis $Re(\alpha) \in (0,1)$ es indispensable por el hecho de si $Re(\alpha) > 1$ el argumento de la función Gamma tiene una parte real negativa, y en estos puntos la función Gamma no converge. Ahora hablaremos de algunas propiedades de las derivadas de orden arbitrario, de forma análoga que en cálculo tenemos que $D^n I^n f(x) = f(x)$ tenemos las siguientes propiedades en cálculo de orden arbitrario:

Teorema 2.8 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha), Re(\beta) \geq 0$, un intervalo finito $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y una función $f \in L_1(a,b)$, entonces*

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = f(x) \tag{2.45}$$

Demostración. Para probar 2.45 partimos de que por la definición de derivada de orden arbitrario tenemos

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = D^n\,{}^{RL}I^{n-\alpha}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f(x)$$

Y por la ecuación 2.31, entonces:

$$\begin{aligned}({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= D^n\,{}^{RL}I^{n-\alpha+\alpha}_{a+}f(x)\\ &= D^n I^n f(x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

■

Teorema 2.9 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha) > 0$ y $Re(\beta) \geq 0$, un intervalo finito $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y una función $f \in L_1(a,b)$, entonces:*

$$({}^{RL}D^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = {}^{RL}I^{\alpha-\beta}_{a+}f(x) \tag{2.46}$$

si, $Re(\alpha) \geq Re(\beta)$

$$({}^{RL}D^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = {}^{RL}D^{\beta-\alpha}_{a+}f(x) \tag{2.47}$$

si, $Re(\beta) \geq Re(\alpha)$

Demostración. Por definición tenemos:

$$({}^{RL}D^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = D^n\,{}^{RL}I^{n-\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f(x)$$

Y por la ecuación 2.31, entonces:

$$\begin{aligned}({}^{RL}D^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= D^n\,{}^{RL}I^{n-\beta+\alpha}_{a+}f(x)\\ &= {}^{RL}D^{\beta-\alpha}_{a+}f(x)\end{aligned}$$

si $Re(\beta-\alpha) \geq 0$, es decir, $Re(\beta) \geq Re(\alpha)$. Por otro lado, si $Re(\beta) \leq Re(\alpha)$, entonces $Re(\beta-\alpha) \leq 0$ y como definimos $({}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = ({}^{RL}D^{-\alpha}_{a+}f)(x)$ para $Re(\alpha) > 0$, entonces

$$\begin{aligned}({}^{RL}D^{\beta}_{a+}\,{}^{RL}I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= {}^{RL}D^{\beta-\alpha}_{a+}f(x)\\ &= {}^{RL}I^{\alpha-\beta}_{a+}f(x)\end{aligned}$$

■

Teorema 2.10 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) \in (0,1]$, un natural $r \in \mathbb{N}$ y una función $f \in L_1(a,b)$, entonces se verifica que:*

$$D^r[({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)] = ({}^{RL}D^{r+\alpha}_{a+}f)(x) \tag{2.48}$$

Demostración. Si tomamos el siguiente cambio de variable $\alpha = k - \beta$, tal que $Re(\beta) \geq 0$ y $k \geq Re(\beta)$ con k un entero. Partimos de la definición de derivada de orden arbitrario:

$$D^r[({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)] = D^{r\,RL}D^{k-\beta}_{a+}f(x)$$

Ahora por la ecuación 2.47 previamente demostrada, tenemos que

$$D^r[({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)] = D^r D^{k\,RL}I^{\beta}_{a+}f(x)$$

Por composición de derivadas, entonces

$$D^r[({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)] = D^{r+k\,RL}I^{\beta}_{a+}f(x)$$

Nuevamente por la ecuación 2.47, tenemos que

$$D^r[({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)] = {}^{RL}D^{r+k-\beta}_{a+}f(x)$$

Por último regresando el cambio de variable tenemos lo siguiente

$$D^r[({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)] = ({}^{RL}D^{r+\alpha}_{a+}f)(x)$$

■

Teorema 2.11 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha) > 0$,$\gamma \in \mathbb{R}$ y un intervalo finito $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si $\gamma > 0$ y $x > a$, entonces:*

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1} \tag{2.49}$$

Demostración. Para demostrar esto partiremos de

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\gamma-1} = D^{n\,RL}I^{n-\alpha}_{a+}(x-a)^{\gamma-1}$$

Usando la el resultado de la ecuación 2.33 obtenemos que

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n-\alpha)}D^n(x-a)^{\gamma+n-\alpha-1}$$

Ahora, por el obtenido por Euler 2.1:

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma+n-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1}$$

Por lo tanto tenemos que:

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1}$$

■

Teorema 2.12 *Sea* $f \in AC^n[a,b]$, $n = [Re(\alpha)] + 1$. *Entonces* ${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f$ *existe en casi cualquier punto de* $[a,b]$.

Demostración. Aplicando 2.39 en 2.7 obtenemos

$$\begin{aligned}({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x) &= {}^{RL}D^{\alpha}_{a+}\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\end{aligned}$$

Por la ecuación 2.16 de la definición de integral tenemos y por la ecuación 2.49

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = {}^{RL}D^{\alpha}_{a+}\,{}^{RL}I^{n}_{a+}f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{k!}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}$$

Por la ecuación 2.46 y simplificando el segundo sumando obtenemos

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = {}^{RL}I^{n-\alpha}_{a+}f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}$$

Como $f^{(n)} \in L_1(a,b)$ y el segundo sumando es una función continua en el intervalo $[a,b]$ entonces $({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)$ esta bien definido. ■

Cabe señalar del teorema anterior 2.12 que además de garantizar la existencia de ${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f$ para una función f a.c. nos da una forma general para casi cualquier punto dentro del intervalo $[a,b]$. Un hecho importante de esta forma del teorema anterior es el sumando ${}^{RL}I^{n-\alpha}_{a+}f^{(n)}(t)$ pues esta es la definición de la derivada de Caputo que exploraremos en la siguiente sección. Además de este último teorema sale inmediatamente el siguiente corolario para el caso de una derivada de orden imaginario puro.

Corolario 2.1 *Sea* $f \in AC[a,b]$, *entonces* ${}^{RL}D^{i\theta}_{a+}f$ *existe en casi cualquier punto de* $[a,b]$.

Demostración. Del teorema 2.12 tenemos el caso cuando $n = 1$, por lo tanto obtenemos la siguiente forma para $f(x)$

$$({}^{RL}D^{i\theta}_{a+}f)(x) = {}^{RL}I^{1-i\theta}_{a+}f'(t) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-i\theta)}(x-a)^{-i\theta}$$

Por lo que de manera análoga al teorema 2.12 ${}^{RL}D^{i\theta}_{a+}f$ esta bien definido. ■

Como ya vimos calcular ${}^{RL}D^{\frac{1}{2}}_{0}\,{}^{RL}D^{\frac{1}{2}}_{0}x^{-\frac{1}{2}} \neq Dx^{-\frac{1}{2}}$, por lo que podemos ver existen casos que en los que con base a la definición de Riemann-Liouville no cumple la propiedad de $D^nD^m = D^{n+m}$ que podemos ver en cualquier curso de cálculo. Esta propiedad vista desde la perspectiva de dicha definición la podemos llegar a deducir por medio del siguiente teorema. Ahora daremos como defininción lo siguiente $f_{n-\alpha}(x) := ({}^{RL}I^{n-\alpha}_{a+}f)(x)$.

Teorema 2.13 *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *con* $Re(\alpha) > 0$ *y* $Re(\beta) \geq 0$, *para cualquier punto en* $[a,b]$ *y una función* $f \in L_1(a,b)$ *y* $f_{m-\beta} \in AC^m[a,b]$. *Obtenemos la* *siguiente ecuación.*

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x) = ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta}f)(x) - \sum_{j=1}^{m}({}^{RL}D_{a+}^{\beta-j}f)(a)\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \tag{2.50}$$

Si $Re(\alpha)+Re(\beta)>0$ *tal que* $n-1<Re(\alpha)\leq n$, $m-1<Re(\beta)\leq m$ $(n,m\in\mathbb{N})$ *y* $Re(\alpha)+Re(\beta)<n$

Demostración. Partiremos con el término del lado izquierdo de la igualdad aplicando la definición de Riemann-Liouville

$$\begin{aligned}({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D_x^n\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1\,RL}D_{a+}^{\beta}f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D_x^n\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}D_t^{m\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt\end{aligned}$$

Ahora tendremos que resolver la integral que aparece en el derivando. Utilizaremos el método de integración por partes y nos apoyaremos por medio de la tabla 2.1 para observar con mejor presión los términos implicados. Tomaremos como el término a derivar a $\mu=(x-t)^{n-\alpha-1}=D_t^0(x-t)^{n-\alpha-1}$ y el término a integrar como $d\mathcal{V}=D_t^mI_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$. Entonces obtenemos que $d\mu=D_t(x-t)^{n-\alpha-1}$ y $\mathcal{V}=D_t^{m-1}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$ y tenemos en consideración que se tendrá $(-1)^0\mu\mathcal{V}$. Si aplicamos este proceso j veces obtenemos que $d\mu=D_t^j(x-t)^{n-\alpha-1}$ y $\mathcal{V}=D_t^{m-j}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$ y se tendrá
$(-1)^{j-1}\mu\mathcal{V}=(-1)^{j-1}D_t^{j-1}(x-t)^{n-\alpha-1}D_t^{m-j\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)$.

Índice	Derivada	Integral
0	$D_t^0(x-t)^{n-\alpha-1}$	$D_t^{m-0\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$
1	$D_t^1(x-t)^{n-\alpha-1}$	$D_t^{m-1\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$
2	$D_t^2(x-t)^{n-\alpha-1}$	$D_t^{m-2\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$
...	...	
$j-1$	$D_t^{j-1}(x-t)^{n-\alpha-1}$	$D_t^{m-j+1\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$
j	$D_t^j(x-t)^{n-\alpha-1}$	$D_t^{m-j\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$
...	...	
$m-1$	$D_t^{m-1}(x-t)^{n-\alpha-1}$	$D_t\,{}^{RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$
m	$D_t^m(x-t)^{n-\alpha-1}$	${}^{RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt$

Cuadro 2.1: Derivación por partes.

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}&({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x) = \\ &\quad\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D_x^n\left[\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}D_t^{j-1}(x-t)^{n-\alpha-1}D_t^{m-j\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)|_a^x\right.\\ &\quad\left.+(-1)^m\int_a^x D_t^m(x-t)^{n-\alpha-1\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt\right]\end{aligned}$$

Primero resolveremos el primer término, para ello comenzaremos hallando la derivada $D_t^{j-1}(x-t)^{n-\alpha-1}$, ocupamos la ecuación 2.44 y obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{(-1)^{j-1}\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-j+1)}(x-t)^{n-\alpha-j\,RL}D_{a+}^{\beta-j}f(t)|_a^x \\
&= -\sum_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-j+1)}(x-a)^{n-\alpha-j\,RL}D_{a+}^{\beta-j}f(a)
\end{aligned}$$

Para el segundo sumando resolveremos la integral

$$\begin{aligned}
(-1)^m\int_a^x D_t^m(x-t)^{n-\alpha-1\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt = \\
&= \int_a^x \frac{\Gamma(n-\alpha)(x-t)^{n-\alpha-m-1}}{\Gamma(n-\alpha-m)}{}^{RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-m)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-m-1\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t)dt \\
&= \Gamma(n-\alpha)^{RL}I_{a+}^{n-\alpha-m\,RL}I_{a+}^{m-\beta}f(t) \\
&= \Gamma(n-\alpha)^{RL}I_{a+}^{n-(\alpha+\beta)}f(t)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original tendremos que

$$\begin{aligned}
({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D_x^n\Big[\Gamma(n-\alpha)^{RL}I_{a+}^{n-(\alpha+\beta)}f(x)- \\
&\quad \sum_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-j+1)}(x-a)^{n-\alpha-j\,RL}D_{a+}^{\beta-j}f(a)\Big] \\
({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x)x &= D_x^{n\,RL}I_{a+}^{n-(\alpha+\beta)}f(x)- \\
&\quad \sum_{j=1}^{m}\frac{D_x^n(x-a)^{n-\alpha-j}}{\Gamma(n-\alpha-j+1)}{}^{RL}D_{a+}^{\beta-j}f(a)
\end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que $Re(\alpha)+Re(\beta)<n$, por lo tanto por definición de derivada de orden arbitrario para el primer sumando y derivando el segundo tenemos

$$\begin{aligned}
&({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x) ={}^{RL}\ D_{a+}^{\alpha+\beta}f(x)- \\
&\sum_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha-j+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha-j+1)}{\Gamma(1-\alpha-j)}(x-a)^{-\alpha-j\,RL}D_{a+}^{\beta-j}f(a) \\
&({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x) ={}^{RL}\ D_{a+}^{\alpha+\beta}f(x)-\sum_{j=1}^{m}\frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}{}^{RL}D_{a+}^{\beta-j}f(a)
\end{aligned}$$

■

De este último teorema podemos observar que si $D_{a+}^{\beta-j}f(a)=0$ entonces podemos observar que $({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f)(x)={}^{RL}\ D_{a+}^{\alpha+\beta}f(x)$. Con esta condición tenemos este operador de Riemann-Liouville se conserva la propiedad del cálculo clásico de $D^nD^m=D^{n+m}$. Ahora veremos como se comportan los operadores cuando realizamos $({}^{RL}I_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(x)$.

Teorema 2.14 *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tal que* $Re(\alpha) > 0$*, una función* $f \in L_1(a,b)$ *y* $f_{n-\alpha} \in AC^n[a,b]$ *tenemos la siguiente propiedad*

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha}\, {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} \tag{2.51}$$

Demostración. Para empezar utilizaremos la definición de integral de orden arbitrario de Riemann-Liouville en

$$\begin{aligned}({}^{RL}I_{a+}^{\alpha}\, {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (D_t^n\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f)(t)dt\end{aligned}$$

Para resolver la integral que tenemos realizaremos integración por partes. De manera análoga a la demostración pasada podemos apoyarnos en la tabla 2.2 para poder realizar nuestro análisis.

Índice	Derivada	Integral
0	$D_t^0(x-t)^{\alpha-1}$	$D_t^{n-0}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\beta} f(t)dt$
1	$D_t^1(x-t)^{\alpha-1}$	$D_t^{n-1}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\beta} f(t)dt$
2	$D_t^2(x-t)^{\alpha-1}$	$D_t^{n-2}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\beta} f(t)dt$
...	...	
j	$D_t^j(x-t)^{\alpha-1}$	$D_t^{n-j}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\beta} f(t)dt$
$j+1$	$D_t^{j+1}(x-t)^{\alpha-1}$	$D_t^{n-j-1}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\beta} f(t)dt$
...	...	
$n-1$	$D_t^{n-1}(x-t)^{\alpha-1}$	$D_t\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\beta} f(t)dt$
n	$D_t^n(x-t)^{\alpha-1}$	${}^{RL}I_{a+}^{n-\beta} f(t)dt$

Cuadro 2.2: Derivación por partes.

Al realizar la integración por partes obtenemos el siguiente resultado.

$$\begin{aligned}({}^{RL}I_{a+}^{\alpha}\, {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} &\left[\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j D_t^j (x-t)^{\alpha-1} D_t^{n-j-1}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \mid_a^x \right. \\ &\left. + (-1)^n \int_a^x D_t^n (x-t)^{\alpha-1}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f(t)dt \right]\end{aligned}$$

Analizaremos por aparte cada sumando. Comenzaremos con el primero.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j D_t^j (x-t)^{\alpha-1} D_t^{n-j-1}\, {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f(t)|_a^x$$

Utilizando el resultado de la ecuación 2.44

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{(-1)^{-j}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)}(x-t)^{\alpha-1-j}D_t^{n-j-1RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)|_a^x =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)}(x-t)^{\alpha-1-j}D_t^{n-j-1RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)|_a^x$$

Si recorremos el índice inferior a $j=1$, entonces obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)}(x-t)^{\alpha-1-j}D_t^{n-j-1RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)|_a^x =$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}D_t^{n-jRL}I_{a+}^{n-\alpha}f(a)$$

Y finalmente como definimos $f_{n-\alpha}(x) = ({}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)$ obtenemos la siguiente expresión

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)$$

Ahora, continuaremos con el análisis del segundo sumando, el cual es una integral doble si aplicamos el resultado de el de la ecuación 2.44

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x D_t^n(x-t)^{\alpha-1RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)dt =$$

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(-1)^{-n}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}(x-t)^{\alpha-n-1RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-n-1RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)dt$$

$$= {}^{RL}I_{a+}^{\alpha-nRL}I_{a+}^{n-\alpha}f(x)$$

$$= f(x)$$

Utilizando la ecuación 2.31 obtenemos

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x D_t^n(x-t)^{\alpha-1RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)dt = f(x)$$

Finalmente, si sustituimos estos resultados en la ecuación original obtenemos

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$$

■

A partir de este último teorema y utilizando una serie de transformaciones podemos llegar a una forma análoga a lo que tenemos en el cálculo clásico con la teorema de Taylor.

Corolario 2.2 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$. La siguiente forma es válida*

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n-1}\frac{({}^{RL}D_{a+}^{\alpha+j}f)(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j} + R_n(x) \tag{2.52}$$

donde $R_n(x) = ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+n}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha+n}f)(x)$.

Demostración.

Utilizando cambiando el orden de la suma del teorema anterior 2.14 obtenemos

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^{n-(n-j)}\,{}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(a)}{\Gamma(\alpha-(n-j)+1)}(x-a)^{\alpha-(n-j)}$$

Tomando $\alpha + n$ como nuevo orden para la derivada y para la integral

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+n}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha+n}f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{D^{2n-(2n-j)}\,{}^{RL}I_{a+}^{2n-(\alpha+n)}f(a)}{\Gamma(\alpha+n-(2n-j)+1)}(x-a)^{\alpha+n-(2n-j)}$$

Simplificando tenemos

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+n}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha+n}f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{D^{j}\,{}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(a)}{\Gamma(\alpha-n+j+1)}(x-a)^{\alpha-n+j}$$

Ahora restando n a los limites de la suma obtenemos

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+n}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha+n}f)(x) = f(x) - \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{D^{j+n}\,{}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(a)}{\Gamma(\alpha-n+j+n+1)}(x-a)^{\alpha-n+j+n}$$

Simplificando nuevamente obtenemos

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+n}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha+n}f)(x) = f(x) - \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{D^{j+n}\,{}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j}$$

Ahora utilizando la ecuación 2.47 ya que $j + n \geq n - \alpha$

$$({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+n}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha+n}f)(x) = f(x) - \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{{}^{RL}D_{a+}^{j+n-(n-\alpha)}f(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j}$$

Finalmente simplificando, despejamos a $f(x)$ y definiendo
$R_n(x) = ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+n}\,{}^{RL}D_{a+}^{\alpha+n}f)(x)$

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{({}^{RL}D_{a+}^{\alpha+j}f)(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j} + R_n(x)$$

■

Ahora veremos un resultado bastante interesante por que nos abre camino a pensar inmediatamente en ecuaciones diferenciales, ya que veremos como se comporta la transformada de Laplace con la derivada de orden arbitrario por la izquierda 2.39. Esto como en el cálculo clásico nos proporciona un método de solución para ecuaciones diferenciales de orden complejo. En esta nueva teoría de ecuaciones diferenciales profundizaremos en el Capítulo 4.

Teorema 2.15 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$, tenemos que*

$$\mathcal{L}\{^{RL}D^{\alpha}_{0+}y\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{y\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}y^{(k)}_{n-\alpha}(0) \tag{2.53}$$

con $y_{n-\alpha}(x) = (^{RL}I^{n-\alpha}_{0+}y)(x)$.

Demostración. Primero ocuparemos las definición de transformada de Laplace y de derivada de orden arbitrario de Riemann-Liouville

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{^{RL}D^{\alpha}_{0+}y\} &= \int_0^{\infty} e^{-st\,RL}D^{\alpha}_{0+}y(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}D^{n}_{t}\,{}^{RL}I^{n-\alpha}_{0+}y(t)dt\end{aligned}$$

Ahora, aplicaremos integración por partes para cual nuevamente nos apoyaremos con una tabla para visualizar los términos pero esta vez los acomodaremos en desde el n-ésimo termino para describir el k-ésimo.

Índice	Derivada	Integral
0	e^{-st}	$D^{n-0\,RL}_{t}I^{n-\beta}_{0+}y(t)dt$
1	$(-1)^1e^{-st}$	$D^{n-1\,RL}_{t}I^{n-\beta}_{0+}y(t)dt$
2	$(-1)^2e^{-st}$	$D^{n-2\,RL}_{t}I^{n-\beta}_{0+}y(t)dt$
...	...	
k	$(-1)^{n-k+1}e^{-st}$	$D^{k\,RL}_{t}I^{n-\beta}_{0+}y(t)dt$
...	...	
$n-1$	$(-1)^{n-1}e^{-st}$	$D_t{}^{RL}I^{n-\beta}_{0+}y(t)dt$
n	$(-1)^{n}e^{-st}$	${}^{RL}I^{n-\beta}_{0+}y(t)dt$

Cuadro 2.3: Derivación por partes.

Por lo que obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{^{RL}D^{\alpha}_{0+}y\} &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}(-s)^{n-k-1}e^{-st}D^{k}_{t}(^{RL}I^{n-\alpha}_{0+}y)(t)|_0^{\infty} \\ &+ (-1)^n\int_0^{\infty}(-s)^n e^{-st\,RL}I^{n-\alpha}_{0+}y(t)dt \\ \mathcal{L}\{^{RL}D^{\alpha}_{0+}y\} &= \sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}e^{-st}D^{k}_{t}(^{RL}I^{n-\alpha}_{0+}y)(t)|_0^{\infty} \\ &+ s^n\int_0^{\infty}e^{-st\,RL}I^{n-\alpha}_{0+}y(t)dt\end{aligned} \tag{2.54}$$

Revisemos el primer término de la suma aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}e^{-st}D^{k}_{t}(^{RL}I^{n-\alpha}_{0+}y)(t) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}D^{k}_{t}(^{RL}I^{n-\alpha}_{0+}y)(0)$$

En esta expresión tenemos que el límite del lado izquierdo tiende a 0 puesto que tenemos que $e^{-st} = 0$ cuando $t \to \infty$ y como tenemos que ${}^{Rl}I_{a+}^{n-\alpha}y$ es diferenciable en el sentido complejo, es decir, es una función analítica, entonces ${}^{Rl}I_{a+}^{n-\alpha}y$ es un valor finito. Además, por hipótesis tenemos que $y_{n-\alpha}(x) = ({}^{RL}I_{0+}^{n-\alpha}y)(x)$.

$$-\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y_{n-\alpha}^{(k)}(0)$$

Para analizar el segundo sumando primero utilizaremos la definición de integral de orden arbitrario de Riemann-Liouville.

$$(-1)^n \int_0^\infty (-s)^n e^{-st\,RL} I_{0+}^{n-\alpha} y(t) dt =$$
$$\frac{s^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t (t-v)^{n-\alpha-1} y(v) dv dt$$

Cambiaremos el orden de integración sobre la región de integración de la figura 2.2, considerando que $0 < t < \infty$ y $0 < v < t$.

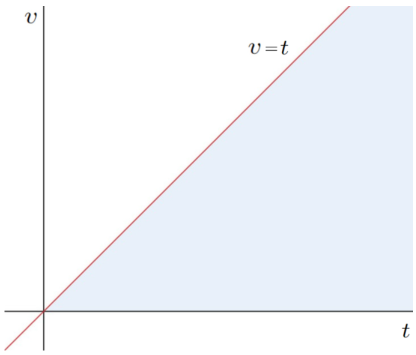

Figura 2.2: Región de integración

Obtenemos que los nuevos límites de integración son $v < t < \infty$ y $0 < v < \infty$, entonces

$$= \frac{s^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} \int_v^\infty (t-v)^{n-\alpha-1} y(v) dt dv$$
$$= \frac{s^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty y(v) \int_v^\infty (t-v)^{n-\alpha-1} e^{-st} dt dv$$

Ahora realizaremos el cambio de variable $\mu = (t-v)^{n-\alpha}$
$\Rightarrow d\mu = (n-\alpha)(t-v)^{n-\alpha-1}$. Además si despejamos a t tenemos $t = \mu^{\frac{1}{n-\alpha}} + v$.

$$= \frac{s^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty y(v) \int_0^\infty e^{-s(\mu^{\frac{1}{n-\alpha}}+v)} \frac{d\mu}{(n-\alpha)} dv$$
$$= \frac{s^n}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty e^{-sv} y(v) \int_0^\infty e^{-s\mu^{\frac{1}{n-\alpha}}} d\mu dv$$

Si ahora, hacemos el cambio de variable $x = s\mu^{\frac{1}{n-\alpha}}$. Si despejamos a μ obtenemos $\mu = \left(\frac{x}{s}\right)^{n-\alpha}$, entonces $d\mu = (n-\alpha)\frac{x^{n-\alpha-1}}{s^{n-\alpha}}dx$. Sustituyendo obtenemos.

$$\begin{aligned}
&= \frac{s^n}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty e^{-sv}y(v)\int_0^\infty e^{-x}(n-\alpha)\frac{x^{n-\alpha-1}}{s^{n-\alpha}}dxdv \\
&= \frac{s^\alpha}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty e^{-sv}y(v)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-\alpha-1}dxdv
\end{aligned}$$

Ocupando la definición de la función Gamma obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{s^\alpha}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty e^{-sv}y(v)\Gamma(n-\alpha)dv \\
&= s^\alpha\int_0^\infty e^{-sv}y(v)dv \\
&= s^\alpha\mathcal{L}\{y(v)\}
\end{aligned}$$

Finalmente si sustituimos ambos resultados en 2.54 y obtenemos

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}D_{0+}^{\alpha}y\} = s^\alpha\mathcal{L}\{y\} - \sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}y_{n-\alpha}^{(k)}(0)$$

■

Debemos de recordar que estamos trabajando sobre un espacio de funciones reales, en esta caso medibles. Al aplicar los operadores de orden arbitrario (complejos) ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}$ y ${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}$ vamos a obtener una función compleja, es decir, podemos separar estas derivadas de orden complejo en sus partes reales y sus partes imaginarias. Entonces si tomamos la derivada de orden complejo α de una función f, tenemos la siguiente forma:

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(t) = \phi_{f,a+}^{(\alpha)}(t) + i\psi_{f,a+}^{(\alpha)}(t) \tag{2.55}$$

$$({}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f)(t) = \phi_{f,b-}^{(\alpha)}(t) + i\psi_{f,b-}^{(\alpha)}(t) \tag{2.56}$$

2.5. Derivada de Caputo

Otra definición importante dentro del mundo del cálculo de orden arbitrario es la derivada de Caputo. Esta diferencia de la derivada Riemann-Liouville tiene la particularidad de que la derivada de una constante es cero, así como en las derivadas de orden natural que estamos acostumbrados en el cálculo elemental.

Definición 2.10 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) \geq 0$, el intervalo finito $[a,b] \subset \bar{\mathbb{R}}$ y $f \in L_1([a,b])$:*

$$({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f)(x) = [{}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f^{(n)}](x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \tag{2.57}$$

Para $f \in C^n([a,b])$ Es llamada la derivada de orden complejo α de Caputo

De igual forma que en la sección anterior podemos comprobar que esta definición de derivada cumple con la linealidad de la siguiente forma. Por definición de derivada de Caputo

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}(cf+dg)(x) = {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}D^n(cf+dg)(x)$$

Por linealidad de la derivada

$$^{C}D_{a+}^{\alpha}(cf+dg)(x) = {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}(cD^n f + dD^n g)(x)$$

Por la linealidad de la integral R-L

$$^{C}D_{a+}^{\alpha}(cf+dg)(x) = (c^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}D^n f + d^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}D^n g)(x)$$

Finalmente, por definición de derivada de Caputo

$$^{C}D_{a+}^{\alpha}(cf+dg)(x) = (c^{C}D_{a+}^{\alpha}f + d^{C}D_{a+}^{\alpha}g)(x)$$

De manera análoga a con el operador derivada por la izquierda de Riemann-Liouville 2.39 veremos como se comporta este nuevo operador derivada de Caputo 2.57.

Teorema 2.16 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y $n = [Re(\alpha)] + 1$, tenemos que la transformada de Laplace de la derivada de Caputo*

$$\mathcal{L}\{^{C}D_{0}^{\alpha}y(t)\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{y(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0) \tag{2.58}$$

Demostración. Comenzaremos utilizando la definición de derivada de Caputo 2.57 tenemos que

$$\mathcal{L}\{^{C}D_{0}^{\alpha}y(t)\} = \mathcal{L}\{^{RL}I_{0}^{n-\alpha}y^{n}(t)\}$$

Ahora por la transformada de Laplace de la integral de Riemann-Liouville 2.28 obtenemos

$$\mathcal{L}\{^{C}D_{0}^{\alpha}y(t)\} = s^{\alpha-n}\mathcal{L}\{y^{(n)}(x)\}$$

Finalmente, sustituyendo la transformada de Laplace de una derivada de orden entero

$$\mathcal{L}\{^{C}D_{0}^{\alpha}y(t)\} = s^{\alpha-n}\left[s^{n}\mathcal{L}\{y(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k+1}y^{(k)}(0)\right]$$

Distribuyendo el término s^{α} sobre la suma obtenemos

$$\mathcal{L}\{^{C}D_{0}^{\alpha}y(t)\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{y(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k+1}y^{(k)}(0)$$

■

Una característica importante de esta derivada que al comienzo de esta sección nombramos, es el hecho de que la derivada de una constante en este sentido, es cero al igual que las derivadas de orden entero.

Ejercicio 2.8 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $Re\,(\alpha) \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$^{C}D_{a}^{\alpha}(c) = 0 \tag{2.59}$$

Solución. Comenzaremos empleando la definición de derivada de Caputo

$$^{C}D_{a}^{\alpha}(c) = {}^{RL}I_{a}^{n-\alpha}(c)^{(n)}$$

Derivando n veces la constante c

$$^{C}D_a^{\alpha}(c) = {}^{RL}I_a^{n-\alpha}(0)$$

Finalmente, tenemos que

$$^{C}D_a^{\alpha}(c) = 0$$

†

Una propiedad muy importante de la derivada de Caputo es la conexión que existe entre este operador y la derivada Riemann-Liouville. Este enlace es muy importante al momento de plantear modelos de ecuaciones diferenciales, pues los modelos planteados con derivadas de Caputo y de Riemann-Liouville son equivalentes bajo ciertas condiciones iniciales. A continuación veremos esta relación entre operadores de orden complejo.

Teorema 2.17 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) \geq 0$) y $f \in L_1[a,b]$ una función para la que existen las derivadas de orden complejo de Caputo y de Riemann-Liouville. Entonces se verifica la siguiente relación:*

$$({}^{C}D_a^{\alpha} f)(x) = ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a) \qquad (x > a) \quad (2.60)$$

Demostración. Como sabemos la expansión por series de Taylor de una función en un punto a se ve como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1}$$

Donde a R_{n-1} lo podemos ver de la siguiente forma por medio de la definición de integral de orden complejo 2.16

$$R_{n-1} = \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t f^{(n)}(x)(x-t)^{n-1} dt = {}^{RL}I_{a+}^{n} f^{(n)}(x)$$

Ahora, utilizando la linealidad de la derivada de Riemann-Liouville

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{k+1-1} + {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\, {}^{RL}I_{a+}^{n} f^{(n)}(x)$$

Utilizando la ecuación 2.46 en el sumando de la derecha teniendo que $n \geq Re(\alpha)$ y utilizando la ecuación 2.49 en el primer sumando, tenemos

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k+1-\alpha-1} + {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x)$$

Simplificando el primer sumando y utilizando la definición de derivada de Caputo, obtenemos

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + {}^{C}D_a^{\alpha} f(x)$$

En este punto ya contamos con la conexión entre ambos operadores de orden complejo. Finalmente despejamos a la derivada de Caputo,

$$({}^{C}D_{a}^{\alpha}f)(x) = ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(a)$$

■

Con el resultado anterior establecemos una relación entre la derivada de Riemann-Liouville y la de Caputo. Cabe destacar que si $f^{(k)}(a)=0$ $(k=0,1,2,...,n-1)$ entonces $({}^{C}D_{a}^{\alpha}f)(x) = ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(x)$. Además inmediatamente del teorema anterior la euación 2.60, se puede reescribir utilizando la ecuación 2.49 en el segundo sumando, de donde obtenemos esta forma

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{k} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}$$

Con esto podemos reescribir la ecuación 2.60 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}({}^{C}D_{a}^{\alpha}f)(x) &= ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(a)\\ &= ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}{}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{k}\end{aligned}$$

Finalmente por la linealidad de la derivada de Riemann-Liouville 2.41

$$({}^{C}D_{a}^{\alpha}f)(x) = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right) \tag{2.61}$$

Resultado el cual nos deja ver que la derivada de Caputo de una función es la derivada de Riemann-Liouville aplicada sobre la resta entre la función en cuestión y su serie de Taylor hasta el $n-1$ término.

Capítulo 3

Aproximación numérica

A lo largo de este capítulo consideraremos k puntos equidistantes entre sí con $k, N \in \mathbb{N}$ y la distancia entre estos puntos $h : t_k = kh$, $(k = 0, .., N)$, en el intervalo $[a, b]$, donde $t_0 = a$ y $t_N = b$.

3.1. Diferenciación de orden entero

Para una función $f(t)$ diferenciable en $[a, b]$, consideraremos la aproximación a la derivada de primer orden $f'(t)$ en los puntos t_k, $k = 0, .., N$, usando las diferencias hacia atrás de primer orden:

$$f'(t_k) \approx \frac{1}{h}\Delta f(t_k) = \frac{1}{h}(f_k - f_{k-1}),\ k = 1, ..., N. \tag{3.1}$$

Las N fórmulas de la aproximación anterior pueden ser escritas simultáneamente en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} h^{-1}f_0 \\ h^{-1}\Delta f(t_1) \\ h^{-1}\Delta f(t_2) \\ \vdots \\ h^{-1}\Delta f(t_{N-1}) \\ h^{-1}\Delta f(t_N) \end{pmatrix} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

El vector de los valores f_k, $k = 0, ..., N$, es multiplicado por la matriz que definiremos como:

$$B_N^1 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

De manera análoga podemos realizar este procedimiento de diferencias hacia atrás para considerar una aproximación de la derivada de segundo orden:

$$f''(t_k) \approx \frac{1}{h^2}\Delta^2 f(t_k) = \frac{1}{h^2}(f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}),\ k = 2, ..., N. \tag{3.4}$$

Con la correspondiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} h^{-2}f_0 \\ h^{-2}(-2f_0+f_1) \\ h^{-2}\Delta^2 f(t_2) \\ \vdots \\ h^{-2}\Delta^2 f(t_{N-1}) \\ h^{-2}\Delta^2 f(t_N) \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Donde similarmente al caso de la primera derivada, definimos a la matriz:

$$B_N^2 = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Cabe resaltar que si tomamos el producto $B_N^1 B_N^1$ qué se puede ver como:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B_N^2$$

Que es la matriz asociada a la aproximación de la segunda derivada de la función f. Tomando como referencia el análisis anterior podemos realizar el producto de $B_N^p = B_N^1 ... B_N^1$, p veces (con $p \in \mathbb{N}$) donde obtenemos una matriz con la siguiente forma:

$$B_N^p = \frac{1}{h^p}\begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \omega_1 & \omega_0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \omega_2 & \omega_1 & \omega_0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & \omega_p & \omega_{p-1} & ... & \omega_0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \omega_p & \omega_{p-1} & ... & \omega_0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Donde cada componente de la matriz B_N^p está dado por:

$$\omega_j = (-1)^j \binom{p}{j}.\ j = 0, ..., p. \tag{3.8}$$

3.2. Integración de orden entero

Tomemos f una función integrable en $[a, b]$, consideremos la siguiente función con un $a \in \mathbb{R}$ fijo.

$$g_1(t) = \int_a^t f(t)dt \tag{3.9}$$

Donde inmediatamente por el teorema fundamental del cálculo obtenemos $g_1'(t) = f(t)$ en (a, b). Utilizando la regla del punto medio podremos hacer una aproximación a la primera integral o integral de primer orden de f en los puntos t_k:

$$g_1(t_k) \approx h \sum_{i=0}^{k-1} f_i,\ k = 1, ..., N. \tag{3.10}$$

Donde su respectiva representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} g_1(t_1) \\ g_1(t_2) \\ g_1(t_3) \\ \vdots \\ g_1(t_N) \\ g_1(t_N + h) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

De la ecuación anterior se define la matriz I_N^1 como:

$$I_N^1 = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Ahora consideremos la función g_2 con la siguiente definición para tomar la segunda integral de la función f:

$$g_2(t) = \int_a^t dt \int_a^t f(t)dt. \tag{3.13}$$

Donde tenemos que $g_2''(t) = g_1'(t) = f(t)$ en (a, b).

Usando la regla del punto medio podemos hacer una aproximación a $g_2(t_k)$ y su representación matricial son las siguientes. Tomando $g_1(t_0) = 0$:

$$g_2(t_k) \approx h^2((k-1)f_0 + (k-2)f_1 + ... + 2f_{k-3} + f_{k-2}),\ k = 2, ..., N. \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} g_2(t_2) \\ g_2(t_3) \\ \vdots \\ g_2(t_N) \\ g_2(t_N + h) \\ g_2(t_N + 2h) \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N-1 & N-2 & ... & 2 & 1 & 0 & 0 \\ N & N-1 & N-2 & ... & 2 & 1 & 0 \\ N+1 & N & N-1 & ... & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Con la matriz I_N^2:

$$I_N^2 = h^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N-1 & N-2 & ... & 2 & 1 & 0 & 0 \\ N & N-1 & N-2 & ... & 2 & 1 & 0 \\ N+1 & N & N-1 & ... & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Cabe señalar que la matriz $I_N^2 = I_N^1 I_N^1$, es decir podemos tomar $I_N^p = I_N^1 ... I_N^1$, p veces el producto que es aplicar la regla del punto medio p veces. La matriz I_N^p es la matriz correspondiente para la aproximación de la la integral de orden p, que se puede tomar como la función g_p definida como:

$$g_p(t) = \int_a^t d\tau_p \int_a^{\tau_p} d\tau_{p-1} ... \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \tag{3.17}$$

Y aplicando la regla del punto medio p veces obtenemos una matriz con la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} g_p(t_p) \\ g_p(t_{p+1}) \\ \vdots \\ g_p(t_N) \\ \vdots \\ g_p(t_N + h) \\ g_p(t_N + ph) \end{pmatrix} = h^p \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ... & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & ... & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{N-1} & ... & ... & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 \\ \gamma_N & \gamma_{N-1} & ... & ... & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_p \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Donde tenemos que:

$$I_N^p = h^p \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ... & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & ... & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{N-1} & ... & ... & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 \\ \gamma_N & \gamma_{N-1} & ... & ... & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

3.3. Diferenciación de orden complejo

A lo largo de este trabajo hemos visto que hay varias definiciones de lo que es una derivada de orden complejo como lo son la de Riemann-Liouville o la de Caputo. Estas definiciones nos proveen de una forma analítica de calcular la derivada de orden complejo de una función. Podlubny, Grünwald y Letnikov nos proveen de un par de formas para calcular esta derivada de manera numérica. Podlubny lo hace dando una generalización de los métodos de diferencias hacia atrás como los que vimos en las secciones pasadas. Por su parte Grünwald y

Letnikov realizan un análisis con la definición de derivada para una función f continua.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{3.20}$$

Tomando esta definición de derivada de primer orden hacemos lo análogo para la derivada de segundo orden

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

Si seguimos este procedimiento, obtenemos lo siguiente para la tercera derivada

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(t-3h)}{h^3}$$

y por inducción:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(x - rh) \tag{3.21}$$

Esta es la **derivada de orden natural de Grünwald-Letnikov**. Finalmente podemos definir la llamada **derivada de orden arbitrario de Grünwald-Letnikov** en un intervalo $[a', b']$ sobre un número $a \in [a', b']$

$${}_a^{GL}D_t^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{p}{r} f(x - jh) \tag{3.22}$$

Para un α arbitrario, en particular tomaremos $\alpha \in \mathbb{C}$. Para una amplia clase de funciones, importante para aplicaciones, la derivada de Grünwald-Letnikov es equivalente a la derivada de Riemann-Liouville por la izquierda (mirar [**10, sección 2.3.7, pag. 75**]).

Por su lado Podlubny toma esta visión matricial de las diferencias hacia atrás considerando f una función en $[a, b]$, tal que, $f(t) \equiv 0$ para $t < a$. A las funciones que cumplen esta propiedad son llamadas funciones casuales. Con estas condiciones Podlubny define de la siguiente forma esta aproximación a la derivada de Riemann-Liouville por la izquierda.

$${}_aD_{t_k}^{\alpha} f(t) \approx \frac{\Delta^{\alpha} f(t_k)}{h^{\alpha}} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f_{k-j}, \; k = 0, ..., N. \tag{3.23}$$

Donde esta aproximación tiene la siguiente representación matricial.

$$\begin{pmatrix} h^{-\alpha}\Delta^{\alpha} f_0 \\ h^{-\alpha}\Delta^{\alpha} f(t_1) \\ h^{-\alpha}\Delta^{\alpha} f(t_2) \\ \vdots \\ h^{-\alpha}\Delta^{\alpha} f(t_{N-1}) \\ h^{-\alpha}\Delta^{\alpha} f(t_N) \end{pmatrix} = \frac{1}{h^{\alpha}} \begin{pmatrix} \omega_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1}^{(\alpha)} & ... & \omega_2^{(\alpha)} & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & 0 \\ \omega_N^{(\alpha)} & \omega_{N-1}^{(\alpha)} & \omega_{N-2}^{(\alpha)} & ... & \omega_1^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}, \ j = 0, ..., N. \tag{3.25}$$

Como se puede observar de las aproximaciones numéricas de Podlubny y de Grünwald-Letnikov tienen un ligero parentesco en en las ecuaciones 3.22 y 3.24.

Ahora veremos estos métodos numéricos en practica, utilizaremos el lenguaje de programación Python (versión 3.9.7). Consideraremos $f(x) = sen(x)$, cuya primera y segunda derivadas se pueden ver como $f'(x) = cos(x) = sen(x+\frac{\pi}{2})$ y $f''(x) = -cos(x) = sen(x+2\frac{\pi}{2})$ respectivamente. Si realizamos n veces este proceso llegamos a que la n-ésima derivada (con $n \in \mathbb{N}$) se ve como $f^{(n)}(x) = sen(x + n\frac{\pi}{2})$. Finalmente este último resultado se toma para generalizar y dar una derivada de orden arbitrario de la función seno $f^{(\alpha)}(x) = sen(x + \alpha\frac{\pi}{2})$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

```
import numpy as np
def f(x):
        return np.sin(x)
def f_derivate(x,alpha):
        return np.sin(x + alpha*(np.pi/2))
x = np.linspace(0,10,172)
f_x = f(x)
```

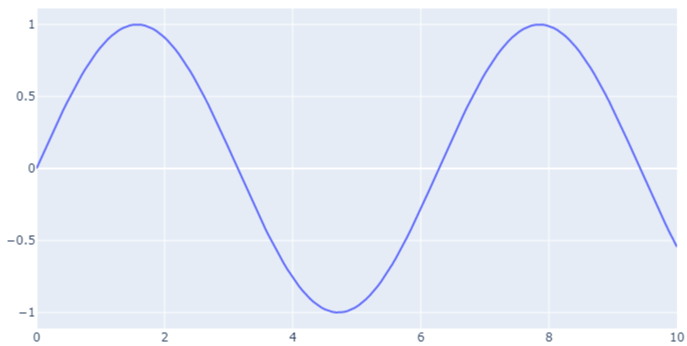

Figura 3.1: Función seno de x

Para calcular las derivadas dadas en las ecuaciones (3,22) y (3,24) debemos de traducirlas al lenguaje Python, las cuales tienen la forma siguiente

```
def Combinatorial(j:int,alpha_:complex):
        value=(sp.gamma(alpha_+1)/(sp.gamma(j+1)*sp.gamma(alpha_-j+1)))
        if np.isnan(value):
        value = 0
        return value
def Weight(j:int,alpha_:complex):
        return ( ((-1)**j)*Combinatorial(j,alpha_) )
```

```
def alpha_derivate(t, alpha):
    h = t[1] - t[0]
    f_t = np.zeros(len(t))
    matrix_weight = np.zeros( (len(t), len(t)),dtype=complex )
    for k in range(0,len(t)):
    f_t[k] = f(t[k])
    for j in range(0,k+1):
    matrix_weight[k, k-j] = Weight(j,alpha)
    matrix_weight[np.isnan(matrix_weight)] = 0
    return (1/(h**alpha)) * np.dot(matrix_weight,f_t)
def grunwald_letnikov(t_array,alpha):
    h = t_array[1] - t_array[0]
    f_alpha_derivate = np.zeros(len(t_array), dtype=complex)
    for k in range(0,len(t_array)):
    for j in range(0,int( (t_array[k] - t_array[0])/h )):
    f_alpha_derivate[k] += Weight(j,alpha) * f(t_array[k] - j*h)
    return (1/(h**alpha)) * f_alpha_derivate
```

Al tener que las derivadas de orden complejo realizan una transforman sobre funciones reales a funciones complejas. Para comparar estas funciones haremos uso de las definiciones de producto interior, norma y distancia en el sentido de vectores complejos.

Definición 3.1 *Sean u, v vectores de la forma $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ con $i = 1, ..., k \in \mathbb{N}$. Se define como producto interior entre u y v de la siguiente forma*

$$u \cdot v = u_1 \bar{v_1} + u_2 \bar{v_2} + ... + u_k \bar{v_k} \tag{3.26}$$

con $\bar{v_i}$ como el conjugado del número v_i.

Definición 3.2 *Sea u un vector de la forma $u_i \in \mathbb{C}$ con $i = 1, ..., k \in \mathbb{N}$. Se define como la norma de u de la siguiente forma*

$$\|u\| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}} \tag{3.27}$$

Definición 3.3 *Sean u, v vectores de la forma $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ con $i = 1, ..., k \in \mathbb{N}$. Se define como la distancia entre u y v de la siguiente forma*

$$d(u, v) = \|u - v\| \tag{3.28}$$

A su vez las definiciones anteriores las podemos ver de la siguiente manera en Python

```
def inner_product_complex(u,v):
    assert len(u) == len(v)
    value = 0
    for i in range(0,len(u)):
    value = value + u[i]*v[i].conjugate()
    return value
def norm_complex(u):
    return np.sqrt(inner_product_complex(u,u))
def distance_complex(u,v):
    return norm_complex( u - v )
```

Ahora, para calcular las derivadas de orden complejo de la función seno por medio de la solución analítica y los métodos numéricos ya mencionados, necesitamos tener valores $\alpha \in \mathbb{C}$. Para este trabajo tomaremos valores sobre la circunferencia de radio 0.25 centrada en 0.5 compleja. Los valores con los que probaremos son los siguientes cuatro 0, $0.33333333+0.47140452i$,$0.66666667+0.47140452i$ y 1

```
np.array([complex(x,np.sqrt(0.25—(x—0.5)**2)) for x in np.linspace(0,1,4)])
```

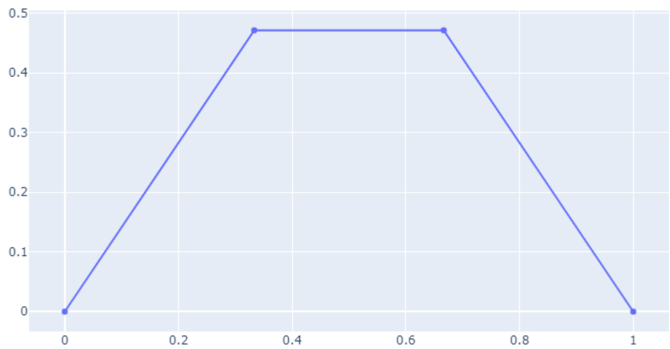

Figura 3.2: Circunferencia de radio 1 compleja

Veremos como se comportan estas funciones de Python que previamente definimos en su parte imaginaria, real y en el plano complejo en cada uno de los valores de α ya comentados.

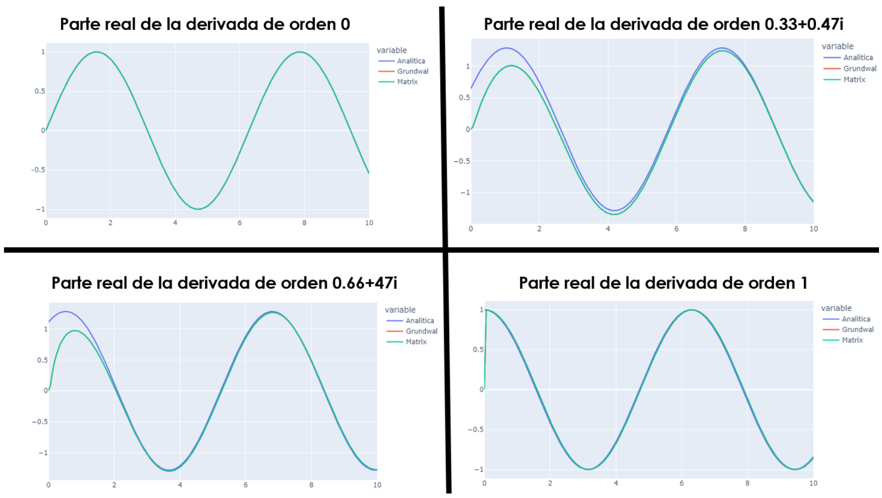

Figura 3.3: Partes reales de las derivadas de orden complejo de $sen(x)$.

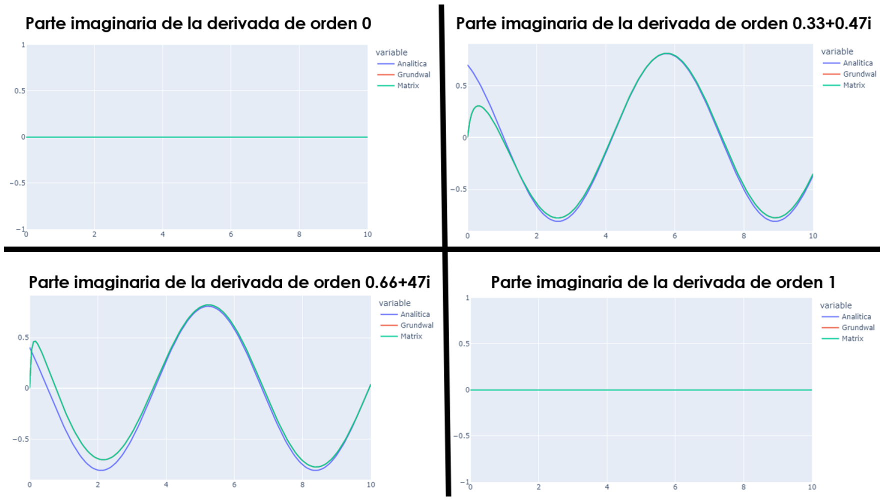

Figura 3.4: Partes imaginarias de las derivadas de orden complejo de $sen(x)$.

Lo primero que podemos notar es que tanto el método matricial de diferencias hacia atrás y Grünwald-Letnikov para esta función, en este intervalo y con estos valores que se probaron proveen la misma solución numérica. Donde en la Figura 3.4 podemos ver como cuando los valores del orden de la derivada es un real, en este caso 0 y 1, la parte imaginaria de la derivada se anula. En la figura 3.3 vemos que la parte real tiene una cierta diferencia con la solución analítica en una región cercana al cero. Además tanto la parte imaginaria como la real para los cuatro valores de α que tomammos, las soluciones están fijas en el cero al principio del intervalo, es decir, estos métodos nos están dando soluciones con condiciones iniciales fijas en el cero.

Distancia/α	0	0.33+0.47i	0.66+0.47i	1
Analítica y GL	0	2.483	2.488	0.264
Analítica y matriz	0	2.483	2.489	0.264
GL y matriz	0	0.002	0.002	5.15×10^{-14}

Cuadro 3.1: Distancias entre las curvas complejas de las derivadas de orden complejo.

Por otro lado, en el plano complejo vemos la figura 3.5 que las soluciones analíticas generan una circunferencia y en el caso de las soluciones numéricas generan espirales que comienzan en el cero complejo. Al tener las diferencias comentadas en los valores cercanos a cero vemos en la tabla 3.1 que las distancias de la solución analítica con los métodos numéricos se hacen más grandes.

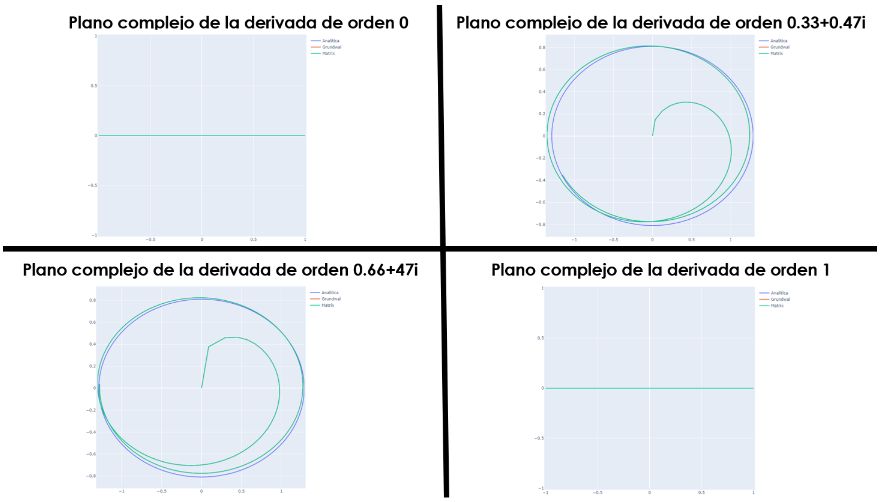

Figura 3.5: Planos complejos de las derivadas de orden complejo de $sen(x)$.

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales

4.1. Definiciones y conceptos

De la misma forma en que el estudio del cálculo ordinario nos lleva a el concepto de ecuaciones diferenciales, el cálculo de orden arbitrario nos lleva al estudio de ecuaciones diferenciales de orden arbitrario. A lo largo de este documento hemos hablado de identidades y funciones que nos prepararon el camino para poder empezar a hablar de está teoría de ecuaciones diferenciales de orden arbitrario, tales como la transformada de Laplace de de la derivadas e integrales de orden complejo y de la función de Mittag-Leffer (está ultima al ser una generalización de la función exponencial). Análogamente a la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, las ecuaciones diferenciales de orden arbitrario se dividen en ecuaciones lineales, homogéneas, no homogéneas, con coeficientes constantes o variables. Empezaremos dando una definición más general de lo que es una ecuación diferencial de orden arbitrario para luego observar casos más específicos.

Definición 4.1 *Una* ***ecuación diferencial de orden arbitrario (EDA)*** *de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) es una relación del tipo.*

$$(D_a^\alpha y)(x) = f\left[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), ..., (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)\right] \tag{4.1}$$

donde $y(x)$ es una función compleja desconocida de dominio real, $f[x, y, y_1, y_2, ..., y_{m-1}]$ es una una función conocida y $D_a^{\alpha_k}$ (k = 1,2,...,m-1) son operadores diferenciales de orden complejo verificando $0 < Re(\alpha_1) < Re(\alpha_2) < ... < Re(\alpha_{m-1}) < Re(\alpha)$ y $m \geq 2$.

Una observación de la definición anterior son las condiciones que se establecen sobre los operadores $D_a^{\alpha_k}$. Estos operadores han de ser del tipo diferencial (en otro caso hablaríamos de ecuaciones integrales o íntegrodiferenciales). Además se entiende que representan derivadas de orden complejo del mismo tipo (Riemann-Liouville, Caputo, etc.) y que tienen un límite inferior de integración a en común.

Definición 4.2 *Se denomina* ***solución*** *de la EDA anterior a cualquier función compleja de variable real que verifique la igualdad* (4,1).

Definición 4.3 *Una* ***EDA lienal*** *de orden* $\alpha \in \mathbb{C}$ *(*$Re(\alpha)) > 0$ *es una relación del tipo*

$$(D_a^{\alpha} y)(x) = a_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)(D_a^{\alpha_k} y)(x) + b(x) \tag{4.2}$$

donde $y(x)$ *es una función compleja desconocida de dominio real,* $a_k(x)$ *(*$k =$ *1,2,...,m-1) y* $b(x)$ *son funciones complejas conocidas y* $D_a^{\alpha_k}$ *(*$k =$ *1,2,...,m-1) son operadores diferenciales de orden complejo verificando* $0 < Re(\alpha_1) < Re(\alpha_2) < ... < Re(\alpha_{m-1}) < Re(\alpha)$ *y* $m \geq 2$*.*

En el estudio convencional de ecuaciones diferenciales existen un par de problemas que son muy importantes, los cuales son problemas tipo Cauchy y Dirichlet. Este tipo de problemas también surgen en el estudio de EDA. Para lo siguiente diferenciaremos explícitamente entre operadores de orden complejo, ya que hay diferencias importantes en la formulación de las condiciones iniciales. Veremos problemas tipo Cauchy para derivadas Riemann-Liouville y Caputo.

Definición 4.4 *Si utilizamos derivadas de orden complejo de Riemann-Liouville y queremos encontrar la solución* $y(x)$ *de la EDA*

$$(D_a^{\alpha} y)(x) = f\left[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), ..., (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)\right] \tag{4.3}$$

sujeta a las n *condiciones iniciales*

$$({}^{RL}D_a^{\alpha-k} y)(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (k = 1, ..., n) \tag{4.4}$$

donde $n = [Re(\alpha)] + 1$ *si* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *y* $n = \alpha$ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$*, decimos que estamos ante el problema tipo Cauchy con derivadas de orden complejo Riemann-Liouville.*

Cabe destacar que en particular, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, el problema anterior se reduce al usual problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Por otro lado si $\alpha \notin \mathbb{N}$, la n-ésima condición inicial,

$$({}^{RL}D_a^{\alpha-n} y)(a) = b_n$$

no verifica que tenga parte real positiva. Deberá ser interpretada por tanto como la integral de orden complejo

$$({}^{RL}I_a^{n-\alpha} y)(a) = b_n$$

Además, este planteamiento con derivadas Riemann-Liouville nos obliga, para garantizar la existencia y unicidad de soluciones, a establecer condiciones iniciales de orden no entero. Esto dificulta el modelado de problemas pues para este tipo de derivadas no existe una interpretación física y generan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso de práctico del cálculo de orden arbitrario. El operador de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, utiliza condiciones iniciales con derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a la manera tradicional.

Definición 4.5 *Si utilizamos derivadas de orden complejo de Caputo y queremos encontrar la solución $y(x)$ de la EDA*

$$(D_a^{\alpha} y)(x) = f\left[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), ..., (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)\right] \tag{4.5}$$

sujeta a las n condiciones iniciales

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} y\right)(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (k = 0, ..., n-1) \tag{4.6}$$

donde $n = [Re(\alpha)] + 1$, decimos que estamos ante el problema tipo Cauchy con derivadas de orden complejo Caputo.

4.2. Teoremas de existencia y unicidad

En esta sección daremos las condiciones suficientes para la existencia de soluciones únicas en problemas tipo Cauchy con derivadas de orden complejo Riemann-Liouville. En general se comprobará que las EDA pueden tener soluciones integrables , bajo condiciones similares a las del teorema de existencia y unicidad del cálculo ordinario. Más concretamente en este trabajo se analizan las soluciones sobre el espacio de funciones $L_\alpha(a, b)$ (que definiremos a continuación). Las demostraciones para los teoremas siguiente se pueden encontrar en [**11, capítulo 3, 135-219 pp**] donde las ecuaciones integrales de Volterra juegan un papel importante en la prueba, por medio de equivalencias con los problemas tipo Cauchy. Las demostraciones de estos teoremas escapan del objetivo de este trabajo.

Definición 4.6 *Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) y $(a, b) \subset \mathbb{R}$, se define el espacio de funciones $L_\alpha(a, b)$ como*

$$L_\alpha(a, b) = \{g \in L(a, b) \mid D_a^{\alpha} g \in L(a, b)\} \tag{4.7}$$

Definición 4.7 *Dada una función*
*$f[x, y_0, y_1, ..., y_{m-1}] \in (a, b) \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, decimos que cumple **la condición de Lipschitz** para las variables $y_0, y_1, ..., y_{m-1}$ cuando existe una constante $K > 0$ no dependiente de x tal que para todo $x \in (a, b)$ y para cualquier par de m-tuplas $(y_0, y_1, ..., y_{m-1}), (\bar{y_0}, \bar{y_1}, ..., \bar{y}_{m-1}) \in B$ se cumple que*

$$\mid f[y_0, y_1, ..., y_{m-1}] - f[\bar{y_0}, \bar{y_1}, ..., \bar{y}_{m-1}] \mid \leq \sum_{k=0}^{m-1} K \mid y_k - \bar{y}_k \mid \tag{4.8}$$

Teorema 4.1 ***(Riemann-Liouville)***
Dado el problema tipo Cauchy con derivadas de orden complejo de Riemann-Liouville $(4{,}3) - (4{,}4)$, si la función $f[y_0, y_1, ..., y_{m-1}]$ cumple la condición de Lipschitz $(4{,}8)$ para las variables $y_0, y_1, ..., y_{m-1}$, y además se da que
$f[y_0, y_1, ..., y_{m-1}] \in L_1(a, b)$ para cualquier $(y_0, y_1, ..., y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, se verifica que existe una solución única $y(x)$ al problema en el espacio $L_\alpha(a, b)$.

Teorema 4.2 ***(Riemann-Liouville, caso lineal)***
Sea la EDA lineal (4.2) cumpliéndose que $b(x) \in L_1(a,b)$. Si $a_k(x) \in L_\infty(a,b)$ o si $a_k(x)$ están acotadas en $[a,b]$ (para todo $k = 0, 1, ..., m-1$), entonces el siguiente problema tipo Cauchy con derivadas de orden complejo de Riemann-Liouville

$$(D_a^\alpha y)(x) = a_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)(D_a^{\alpha_k} y)(x) + b(x)$$

$$({}^{RL}D_a^{\alpha-k} y)(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (k = 1, ..., n)$$

Tiene solución única en el espacio $L_\alpha(a,b)$.

4.3. Soluciones y caso particular

4.3.1. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta muy importante para la teoría de ecuaciones diferenciales, pues este método como su nombre dice realiza una transformación sobre la ecuación diferencial y nos da una ecuación algebraica. Esto en la resolución de analítica de ecuaciones es una gran ayuda pues baja el la dificultad al dar la oportunidad de utilizar métodos de solución de ecuaciones algebraicas.

Ejercicio 4.1 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y a una constante, resolver el siguiente modelo*

$$\begin{aligned} a_0^{RL}D_t^\alpha y(t) &= f(t) \\ D^k{}_0^{RL}I_t^{n-\alpha} y(0) &= 0 \qquad \forall k = 0, ..., n \end{aligned} \tag{4.9}$$

Solución. Comenzaremos aplicando la transformada de Laplace en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a_0^{RL}D_t^\alpha y(t)\} &= F(s) \\ a\mathcal{L}\{{}_0^{RL}D_t^\alpha y(t)\} &= F(s) \end{aligned}$$

Del teorema 2,10, recordando que por notación definimos $D^k{}_0^{RL}I_t^{n-\alpha} y(0) = y_{n-\alpha}^{(k)}(0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} a\left[s^\alpha \mathcal{L}\{y\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y_{n-\alpha}^{(k)}(0)\right] &= F(s) \\ as^\alpha Y(s) &= F(s) \\ Y(s) &= \frac{F(s)}{as^\alpha} \end{aligned}$$

Ahora si aplicamos la transformada inversa de Laplace tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{as^\alpha}\right\}$$

Teniendo en cuenta el teorema 2,1 para la transformada de Laplace de una convolución

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha)}{a\Gamma(\alpha)s^{\alpha}}\right\} \\ y(t) &= f(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} \\ y(t) &= \frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \\ y(t) &= \frac{1}{a}{}_0^{RL}I_t^{\alpha} f(t) \end{aligned}$$

†

Ejercicio 4.2 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y λ una constante, resolver el siguiente modelo*

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}D_t^{\alpha} y(t) - \lambda y(t) &= h(t) \\ D^k {}_0^{RL}I_t^{n-\alpha} y(0) &= b_{k+1} \qquad \forall k = 1, ..., n \end{aligned} \tag{4.10}$$

Solución. Aplicando transformada de Laplace en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_0^{RL}D_t^{\alpha} y(t) - \lambda y(t)\} &= H(s) \\ \mathcal{L}\{{}_0^{RL}D_t^{\alpha} y(t)\} - \lambda Y(s) &= H(s) \\ s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} b_{k+1} - \lambda Y(s) &= H(s) \\ s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} b_k - \lambda Y(s) &= H(s) \\ s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} b_k - \lambda Y(s) &= H(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s^{\alpha} - \lambda)Y(s) &= H(s) + \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} b_k \\ Y(s) &= \frac{H(s)}{(s^{\alpha} - \lambda)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{s^{k-1} b_k}{(s^{\alpha} - \lambda)} \end{aligned}$$

Ahora aplicando transformada inversa de Laplace y del teorema (2,3) obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\frac{s^{\alpha-\alpha}}{(s^{\alpha} - \lambda)}\right\} + \sum_{k=1}^{n} b_k \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\alpha+k-1}}{(s^{\alpha} - \lambda)}\right\} \\ y(t) &= h(t) * t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha}) + \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) \end{aligned}$$

†

Ejercicio 4.3 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y λ una constante, resolver el siguiente modelo*

$$\begin{aligned} {}_0^{C}D_t^{\alpha} y(t) - \lambda y(t) &= h(t) \\ y^{(k)}(0) &= b_{k+1} \qquad \forall k = 1, ..., n-1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Solución. Aplicando transformada de Laplace en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha y(t) - \lambda y(t)\} &= H(s) \\
\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha y(t)\} - \lambda Y(s) &= H(s) \\
s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} b_{k+1} - \lambda Y(s) &= H(s) \\
(s^\alpha - \lambda) Y(s) &= H(s) + \sum_{k=0}^{n} s^{\alpha-k-1} b_{k+1} \\
Y(s) &= \frac{H(s)}{(s^\alpha - \lambda)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{s^{\alpha-k-1} b_{k+1}}{(s^\alpha - \lambda)}
\end{aligned}$$

Ahora aplicando transformada inversa de Laplace y del teorema (2,3) obtenemos

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\frac{s^{\alpha-\alpha}}{(s^\alpha - \lambda)}\right\} + \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-k-1}}{(s^\alpha - \lambda)}\right\} \\
y(t) &= h(t) * t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha)
\end{aligned}$$

†

De donde como vimos tanto en el ejercicio (4,2) y (4,3) si las condiciones iniciales son cero las soluciones son las mismas.

Ejercicio 4.4 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha), Re(\beta) \in (0,1)$, $Re(\alpha) > Re(\beta)$ y a, b constantes, resolver el siguiente modelo*

$$\begin{aligned}
a {}_0^{RL} D_t^\alpha y(t) + b {}_0^{RL} D_t^\beta y(t) &= h(t) \\
\left[a {}_0^{RL} I_t^{1-\alpha} y(t) + b {}_0^{RL} I_t^{1-\beta} y(t)\right] |_{t=0} &= C
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Solución. Aplicando transformada de Laplace a la ecuación anterior obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
a\mathcal{L}\{{}_0^{RL} D_t^\alpha y(t)\} + b\mathcal{L}\{{}_0^{RL} D_t^\beta y(t)\} &= H(s) \\
a\left[s^\alpha Y(s) - {}_0^{RL} I_t^{1-\alpha} y(0)\right] + b\left[s^\beta Y(s) - {}_0^{RL} I_t^{1-\beta} y(0)\right] &= H(s) \\
(as^\alpha + bs^\beta) Y(s) - \left[a {}_0^{RL} I_t^{1-\alpha} y(0) + b {}_0^{RL} I_t^{1-\beta} y(0)\right] &= H(s)
\end{aligned}$$

Por condiciones iniciales podemos tener

$$\begin{aligned}
(as^\alpha + bs^\beta) Y(s) - C &= H(s) \\
as^\beta (s^{\alpha-\beta} + \frac{b}{a}) Y(s) &= H(s) + C \\
Y(s) &= \frac{s^{-\beta} H(s)}{a(s^{\alpha-\beta} + \frac{b}{a})} + \frac{s^{-\beta} C}{a(s^{\alpha-\beta} + \frac{b}{a})} \\
Y(s) &= \frac{1}{a}\left[H(s)\frac{s^{\alpha-\beta-\alpha}}{s^{\alpha-\beta} + \frac{b}{a}} + C\frac{s^{\alpha-\beta-\alpha}}{s^{\alpha-\beta} + \frac{b}{a}}\right]
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando transformada inversa de Laplace obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{a}\left[h(t) * t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(-\frac{b}{a}t^{\alpha-\beta}) + Ct^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(-\frac{b}{a}t^{\alpha-\beta})\right]$$

†

4.3.2. Péndulo simple

Para esta subsección nos basaremos en el análisis realizado por Lombardero [7], para el péndulo simple. Este análisis lo describiremos a continuación. El péndulo simple es un sistema físico constituido por una partícula de masa m que, está suspendida sobre un punto fijo O por medio de una varilla de longitud L, puede oscilar en un plano vertical fijo por efecto de la fuerza de gravedad. La posición de la partícula en el instante t se especifica mediante el ángulo θ que la varilla forma con la vertical en ese momento.

El estudio del péndulo simple es uno de los problemas clásicos de la dinámica elemental, y todas sus componentes están determinadas desde el punto de vista matemático. Lo que pretendemos en esta subsección es realizar un análisis del movimiento del péndulo enfocado desde la óptica más extensa mediante los operadores de orden complejo, y para ello generalizaremos la idea clásica de aceleración (segunda derivada de la posición) a una derivada de orden complejo de Caputo, con ordenes con $1{,}5 \leq Re(\alpha) \leq 2$.

El péndulo simple al ser un problema idealizado hay que tener las siguientes consideraciones:

- La varilla que sujeta a la partícula carece de masa, es inextensible y siempre permanece rígida.
- El movimiento de la partícula se traza en dos dimensiones; es decir, la partícula no traza una elipse sino un arco.
- El sistema no pierde energía por defecto de la resistencia del aire ni por fricción alguna.

Para determinar la función del movimiento del péndulo de orden arbitrario empezamos buscando la ecuación diferencial de orden arbitrario que modeliza dicho movimiento. La ecuación buscada tiene por incógnita la función $\theta(t)$, que determina en radianes el ángulo de la varilla en el instante t. La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo el efecto de dos fuerzas: su propio peso (mg, donde $g = 9,80665 m/s^2$ es la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra cerca de su superficie) y la fuerza de tensión T ejercida por la varilla. Si descomponemos el peso en sus componentes tangencial y normal, observamos que la componente normal de esta fuerza se ve contrarrestada por la fuerza de tensión de la varilla. Por lo tanto, la única fuerza actuante en lo que concierne al movimiento del sistema será la componente tangencial del peso, que tendrá signo negativo por ir siempre en dirección opuesta al movimiento:

$$F(t) = -mg\, sen(\theta(t)) \tag{4.13}$$

En el modelo clásico, se introduce esta fuerza en la segunda Ley de Newton

$$F = ma \tag{4.14}$$

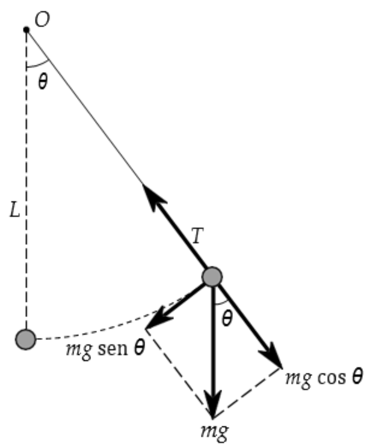

Figura 4.1: Esquema de las fuerzas que intervienen en el modelado.

Donde a es la aceleración tangencial del movimiento, y se llega así a la ecuación tradicional del péndulo. En este punto vamos a sustituir en (4,14), en la que la aceleración $a(t)$ es la derivada segunda de la función que describe la posición $r(t)$, por una fórmula alternativa más general haciendo uso de derivadas de orden complejo:

$$F = m{}^C D_0^\alpha r(t) \tag{4.15}$$

con $1{,}5 \leq Re(\alpha) \leq 2$.

Nos interesa una ecuación en la función para el ángulo de la varilla $\theta(t)$, y no en la función posición de la partícula $r(t)$. Por ser un movimiento a lo largo de un arco de circunferencia de radio L para la función de la posición estará dada por la longitud del arco que se forma con el ángulo θ. Esto quiere decir que, tenemos $r(t) = L\theta(t)$, con lo que

$${}^C D_0^\alpha r(t) = L{}^C D_0^\alpha \theta(t) \tag{4.16}$$

donde ${}^C D_0^\alpha \theta(t)$ será la aceleración angular.

Finalmente, de (4,13), (4,15) y (4,16) obtenemos

$$-mg\ sen(\theta(t)) = mL{}^C D_0^\alpha \theta(t) \tag{4.17}$$

Finalmente simplificando (4,17) obtenemos la siguiente ecuación diferencial de orden arbitrario:

$${}^C D_0^\alpha \theta(t) + \frac{g}{L} sen(\theta(t)) = 0 \tag{4.18}$$

La EDA (4,18) no tiene fácil solución, al no tratarse de una ecuación lineal debido al término no lineal $sen(\theta(t))$. Ahora, recordemos que $sen(\theta) \approx \theta$ cuando θ es pequeño; en particular, θ y $sen(\theta)$ coinciden en las dos primeras cifras decimales cuando $\theta < \pi/12$.

Por lo tanto, si nos restringimos a oscilaciones de pequeña amplitud (como las que describe, por ejemplo, el péndulo de un reloj), parece razonable simplificar nuestro modelo matemático sustituyendo $sen(\theta)$ por θ en la ecuación (4,18). La ecuación resultante se reduce a

$${}^C D_0^\alpha \theta(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0 \tag{4.19}$$

Esta EDA es del tipo del ejercicio (4,3) donde $n = 2$ y $h(t) = 0$. Si establecemos las condiciones iniciales del péndulo, es decir, el ángulo de partida θ_0 y la velocidad angular inicial v_0

$$\theta(0) = \theta_0 \tag{4.20}$$

$$\theta'(0) = v_0 \tag{4.21}$$

Entonces de la solución obtenida por el ejercicio (4,3), la solución particular, que determina la posición del péndulo en función del tiempo, es

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1}(-\frac{g}{L}t^{\alpha}) + v_0 t E_{\alpha,2}(-\frac{g}{L}t^{\alpha}) \tag{4.22}$$

Por otra parte, en este sistema es habitual considerar nula la velocidad inicial de la partícula. Esto es, en el origen el péndulo se deja oscilar sin ejercer sobre él ningún impulso. En esta situación la segunda condición inicial es

$$\theta'(0) = 0$$

Y la solución queda simplificada de la siguiente forma

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha}(-\frac{g}{L}t^{\alpha}) \tag{4.23}$$

Bibliografía

[1] Grabrinsky, G., (2010). Teoría de la medida por Guillermo Grabrinsky (No. 515.42 G7.).

[2] Bartle, R. G., (2014). The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley & Sons.

[3] Widyam, H., (2011), Applications of Fractional Calculus.

[4] Bonilla, B., Kilbas, A.A., (2003). Cálculo Fraccionario y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias.

[5] Loverro, A., (2004), Fractional Calculus: History, Deflnitions and Applications for the Engineer.

[6] Pierantozzi, T., (2006), Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estandar de difusión y de ondas.

[7] Lombardero, A., (2014), Cálculo fraccionario y dinámica newtoniana.

[8] Coronel, E., Moreno, M.T., (2016), Equivalencias entre las propiedades de las derivadas fraccionarias y las derivadas clasicas.

[9] Podlubny, I. (2000), Matrix approach to discrete fractional calculus. Fractional calculus and applied analysis, 3(4), 359-386.

[10] Podlubny, I. (1999), Fractional Differential Equations.

[11] Kilbas, A.A., Srivastava, M., Trujillo, J. (2006), Theory and Applications of Fractional Differential Equations.

[12] B. Athreya, N. Lahiri (2006), Measure Theory and Probability Theory

[13] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. (1993), Fractional Integrals and Derivates Theory and Applications