



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL EN
RELATIVIDAD NUMÉRICA CON SIMETRÍA
ESFÉRICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ERIK RODRIGO JIMÉNEZ VÁZQUEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUÉLLAR
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres Esther y Sebastián.
A mis hermanos Rocío y Raúl.
Gracias por su apoyo.*

Agradecimientos

A mis padres, Esther y Sebastián por su apoyo incondicional. Son mi ejemplo a seguir en la adversidad y mi guía de resiliencia, constancia y perseverancia.

A mis hermanos Rocío y Raúl, por las risas y su compañía en mis momentos difíciles.

A César, Adán, Luis, Pepe y William por su amistad. Atesoro el tiempo que hemos pasado platicando, caminando y divirtiéndonos. Su compañía alegre y reconforta mi ser.

Al Ing. Juan José Borrego, mi profesor de matemáticas de la preparatoria. Sin su influencia para estudiar ciencias, esto no hubiera sido posible. Él plantó la semilla que ahora florece.

A mi asesor el Dr. Miguel Alcubierre, por tener la paciencia de enseñarme y guiarme en mi trayectoria académica desde la licenciatura hasta ahora. Todo el conocimiento y habilidades que he adquirido se han consolidado con su apoyo.

Al Dr. Darío Núñez, por ser un segundo guía académico. Las discusiones en su oficina han enriquecido mi formación.

Al Dr. Olivier Sarbach, por la revisión exhaustiva de este escrito. Sus comentarios me ayudaron a refinar la comprensión de algunos temas.

Índice general

Prefacio	IX
1. Preliminares	1
1.1. Descomposición 3+1	1
1.1.1. Ecuaciones ADM	3
1.1.2. Formulaci3n BSSN	5
1.1.3. Formalismo BSSN generalizado	7
1.1.4. Formalismo 3+1 en simetría esférica	9
1.1.5. Sistema BSSN en simetría esférica	11
1.2. Elecci3n de norma y evoluci3n de agujeros negros	12
1.2.1. Condiciones de norma que evitan choques de características	13
1.2.2. Detecci3n de horizontes de agujeros negros	13
1.3. Condiciones de frontera	15
1.3.1. Condiciones de frontera en simetría esférica	15
1.4. M3todos num3ricos	18
1.4.1. Diferencias finitas	18
1.4.2. M3todo de l3neas	20
1.4.3. Convergencia de la soluci3n	21
1.4.4. Disipaci3n artificial	22
2. Colapso cr3tico gravitacional	23
2.1. Universalidad	23
2.2. Simetrías	24
2.3. Escalamiento	24
2.4. Trabajos previos	25
2.4.1. Campo escalar real sin masa acoplado m3nimamente	25
2.4.2. Campo escalar real masivo acoplado m3nimamente	28
2.4.3. Campo escalar complejo masivo acoplado m3nimamente	29
2.5. T3cnicas num3ricas para la evoluci3n de fen3menos cr3ticos	30
2.6. Determinaci3n de la amplitud cr3tica	31
2.7. C3lculo de los exponentes cr3ticos	32

3. Colapso crítico gravitacional de un campo no mínimamente acoplado	35
3.1. Ecuaciones de evolución	36
3.1.1. Marco de Jordan	36
3.1.2. Marco de Einstein	37
3.1.3. Descomposición 3+1 (en el marco de Jordan)	38
3.2. Condiciones de norma para un acople no mínimo	40
3.3. Datos iniciales en simetría esférica	41
3.4. Resultados numéricos	42
3.5. Análisis en el marco de Einstein	52
3.6. Conclusiones	55
4. Colapso crítico gravitacional de un campo escalar complejo masivo	57
4.1. Ecuaciones de evolución	57
4.2. Datos iniciales	59
4.3. Caracterizando la solución crítica de tipo I	60
4.4. Resultados numéricos	61
4.4.1. Resultados para el colapso de tipo II	61
4.4.2. Resultados para el colapso de tipo I	62
4.5. Conclusiones	72
5. Transiciones de fase del campo escalar	75
5.1. Ecuaciones de evolución adimensionales	75
5.2. Datos iniciales	77
5.3. Resultados numéricos	77
5.4. Conclusiones	83
A. Gráficas de convergencia	87
A.1. Gráficas de convergencia del capítulo 3	87
A.2. Gráficas de convergencia del capítulo 4	91
A.2.1. Colapso tipo II	91
A.2.2. Colapso tipo I	93
Bibliografía	95

Prefacio

Las ecuaciones de Einstein para describir la gravedad, están escritas en un elegante lenguaje geométrico, apesar esto, únicamente se conocen soluciones analíticas en espaciotiempos estáticos o estacionarios con ciertos grados de simetría. Al modelar un sistema astrofísico arbitrario mediante las ecuaciones de Einstein, es casi imposible encontrar una solución matemática exacta a ellas y por ello surge la necesidad de resolver el sistema utilizando aproximaciones numéricas.

La relatividad numérica estudia cómo obtener soluciones a las ecuaciones de Einstein por medio de métodos numéricos usando códigos computacionales altamente sofisticados [99]. Dentro de sus mayores contribuciones al estudio de sistemas astrofísicos, se encuentra la creación de un catálogo de señales de ondas gravitacionales que en conjunto con los observatorios de LIGO y métodos de aprendizaje automático por computadoras, permitieron corroborar la existencia de ondas gravitacionales, siendo la primera detección directa de ondas gravitacionales por LIGO, la generada por la colisión de dos agujeros negros de 29 y 36 masas solares [2016].

Actualmente la relatividad numérica ha alcanzado un estado de madurez a tal punto que ahora se tienen algunos métodos y técnicas estandarizadas para la evolución de la colisión de agujeros negros [101, 122] y versiones simplificadas de colisiones de sistemas binarios de estrellas de neutrones o colisiones de agujeros negros con estrellas de neutrones [98, 100]. Si bien, el problema completo no se ha resuelto aún, en parte debido a que en contraste con los agujeros negros donde el espacio es vacío, incluir todos los detalles relevantes al tipo de materia sería muy complicado de simular y además porque se desconocen las ecuaciones de estado en condiciones de extrema densidad y presión [81].

Las herramientas construidas en el desarrollo de la relatividad numérica, se han empleado para explorar otras áreas de estudio. Entre ellas se encuentran: gravitación en N dimensiones [47, 121, 128], cosmología [26, 126] y el colapso gravitacional [58, 116, 117, 119], siendo este último el tema de interés a presentar en las siguientes páginas, en particular el régimen de transición entre el colapso de datos iniciales a la formación de un agujero negro o su dispersión dejando un espaciotiempo del tipo Minkowski.

El estudio del colapso gravitacional es motivado por la observación de distintos fenómenos producidos por el colapso estelar. El trabajo pionero de Christodolodu y Klainerman sobre la estabilidad no lineal del espacio de Minkowski, muestra que per-

turbaciones pequeñas eventualmente se dispersan hasta dejar un espacio plano[45] y el análisis numérico de May y White, que analizan el colapso de estrellas politrópicas, muestra que para algunas condiciones iniciales la estrella colapsa a un agujero negro o se contraen hasta explotar y liberar materia [90]. Con la suficiente concentración de materia o energía, un dato inicial colapsa a un agujero negro, y dada la complejidad de la transición entre la formación o no de un agujero negro, se justifica el uso de códigos computacionales, los cuales simulan a un laboratorio en el sentido de que nos permiten variar los parámetros del sistema para identificar a los relevantes en la dinámica.

Matthew Choptuik, por medio de simulaciones numéricas del campo real escalar sin masa acoplado mínimamente a la gravedad, descubrió un caso interesante en el colapso gravitacional [41]. Para una familia uniparamétrica con parámetro p de datos iniciales, existe un valor crítico p^* que separa a los datos que colapsan a un agujero negro de los que no. Los datos iniciales cuyo valor del parámetro sea menor al crítico, la evolución se mantiene regular y dispersándose a infinito. Por otro lado, para valores mayores a p^* , la solución colapsa a un agujero negro. La ventana para valores entre $p < p^*$ (valores subcríticos) y $p > p^*$ (valores supercríticos) se conoce como el espacio crítico para el modelo propuesto. Las soluciones cercanas al punto crítico además muestran otras características: Para datos iniciales subcríticos o supercríticos, su evolución se aproxima a una solución universal en el sentido de que es la misma para todos los datos iniciales e independiente de la familia que los parametriza. En el estudio original de M. Choptuik la solución universal, llamada también solución crítica, es periódica en un espacio logarítmico, teniendo como periodo Δ , y en el caso particular del campo escalar $\Delta \sim 3.44$. La segunda propiedad es que la masa de los agujeros negros en el caso supercrítico escalan de la forma $M \propto (p - p^*)^\gamma$, donde γ es universal y es conocido como el exponente crítico, que en el caso del campo escalar $\gamma \sim 0.37$.

El comportamiento crítico se ha observado en distintos modelos de materia, por mencionar algunos: fluidos perfectos [92], campos de Yang-Mills [42], estrellas de neutrones [93, 94], colapso de ondas gravitacionales [72], ondas electromagnéticas [24] y el sistema Einstein-Vlasov [5, 97, 104]. Debido al alto costo computacional que requieren las simulaciones para encontrar el punto crítico del modelo, mayormente los estudios se han realizado en simetría esférica, algunos en simetría axial [3, 17, 22, 34, 53, 83, 120] y muy pocos en un espacio completo 3D [46, 50, 69]. Si bien, las evoluciones son realizadas en el formalismo 3+1 de relatividad, las ecuaciones ADM están incompletas a menos que se incluyan las variables de norma que son el lapso y vector de corrimiento. La elección de norma tiene un gran impacto en la estabilidad de las soluciones numéricas, principalmente en las que son supercríticas, dado que al formarse un agujero negro, las funciones de norma pueden garantizar una evolución exitosa al poder continuar la evolución en las regiones en que se ha colapsado el espacio-tiempo [7, 72, 83].

Desde el descubrimiento del colapso crítico, a pesar de las distintas formas de atacar el problema y el aumento en recursos de cómputo, se ha tenido muy poco avance en entender el fenómeno. Aún se desconoce cuál es el tipo de comportamiento crítico que tendrá un modelo de materia, sin embargo su estudio es útil pues permite construir espacios en los que se tienen regiones de gran curvatura aún cuando no se forman

agujeros negros y que en el límite forma una singularidad desnuda como resultado del proceso de un ajuste fino en las condiciones para los datos iniciales [127].

Preliminares

1.1. Descomposición 3+1

Existen distintos formalismos para realizar la evolución temporal de las ecuaciones de Einstein. La formulación que se utilizará en este trabajo es la formulación 3+1 de Arnowitt, Deser y Misner [18] que consiste en foliar el espaciotiempo en hipersuperficies espacialoides. A partir de ahora asumiremos que la signatura de la métrica es Lorentziana $(-, +, +, +)$ y utilizaremos unidades geométricas, en las que $G = c = 1$. Para la descomposición, asumiremos que el espacio es globalmente hiperbólico, es decir que la unión de su dominio pasado y futuro cubre al espaciotiempo completo. Utilizando este hecho utilizamos una familia de hipersuperficies del tipo espacial Σ_t que cubre a todo el espaciotiempo y están parametrizadas por una función t (que no necesariamente coincide con el tiempo propio de algún observador). Asociado a las hipersuperficies se introduce un campo vectorial n^μ normal unitario a Σ_t que induce una métrica sobre las hipersuperficies:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (1.1)$$

que además es un operador de proyección sobre estas. A la descomposición se añade la función de lapso $\alpha(t, x^i)$ que mide el tiempo propio entre observadores en dirección normal a la hipersuperficie (observadores eulerianos):

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (1.2)$$

Por último, se introduce el vector de corrimiento o *shift* β^i tangente a las hipersuperficies que mide el cambio en las coordenadas de los observadores eulerianos:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^i) dt. \quad (1.3)$$

Es importante mencionar que la foliación del espaciotiempo no es única, por lo que la función de lapso α y el vector de corrimiento β^i son libres de definición, es decir son *condiciones de norma*.

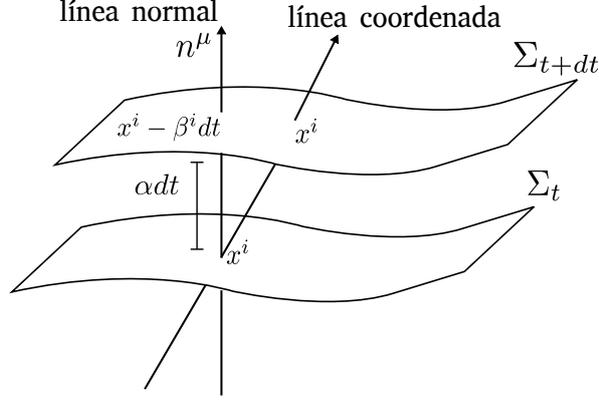


Figura 1.1: Descomposición del espaciotiempo en el lenguaje 3+1. Las funciones de normal α y β nos proporcionan el cambio en el tiempo entre observadores eulerianos y el cambio en las coordenadas espaciales.

Con los ingredientes anteriores, el elemento de línea del espacio tiempo es entonces

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.4)$$

donde se asume que $\beta_i := \gamma_{ij} \beta^j$ y en general los índices de todos los tensores puramente espaciales son subidos o bajados con la métrica γ_{ij} . Los índices griegos, α, β, \dots correrán de 0, 1, 2, 3 y los latinos i, j, \dots pueden tomar los valores 1, 2, 3. En estas coordenadas el vector normal y la uno forma tiene componentes:

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (1.5)$$

Por último se introduce un elemento que distingue entre la curvatura intrínseca asociada inherentemente a la estructura del espaciotiempo (la variedad) y la extrínseca que se asocia a la forma en que las hipersuperficies se encajan en el mismo. El primer tipo de curvatura se calcula mediante el tensor de Riemann asociado a $g_{\mu\nu}$, mientras que el segundo tipo se calcula mediante el transporte paralelo del vector normal a lo largo de la hipersuperficie.

La curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ se define mediante el operador de proyección

$$K_{\mu\nu} := -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu, \quad (1.6)$$

donde

$$P_\alpha^\beta := \delta_\alpha^\beta + n_\alpha n^\beta. \quad (1.7)$$

A partir de su definición es posible mostrar que la curvatura extrínseca es la derivada de Lie de la métrica espacial a lo largo del vector normal,

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu},$$

obteniendo la ecuación de evolución para la métrica espacial γ_{ij}

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (1.8)$$

donde D_i es la derivada covariante asociada a la métrica γ_{ij} . Las ecuaciones de Einstein adaptadas a las hipersuperficies se obtienen utilizando las ecuaciones de *Gauss-Codazzi* y *Codazzi-Mainardi*

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu} K_{\beta\mu}, \quad (1.9)$$

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}. \quad (1.10)$$

Empleadas en contracciones del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, se obtienen dos identidades

$$2G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

$$G_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\mu} n^\nu = (3)\nabla^\alpha K - (3)\nabla_\mu K^{\alpha\mu}. \quad (1.12)$$

Al utilizar (1.11) y (1.12) en las ecuaciones de Einstein resultan en la constricción hamiltoniana

$$H := \frac{1}{2} \left({}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \right) - 8\pi\rho = 0, \quad (1.13)$$

y la de momentos

$$M^\alpha := D_\mu (K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu} K) - 8\pi j^\alpha = 0, \quad (1.14)$$

con

$$\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad j^i := -P^{i\mu} n^\nu T_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

donde ρ la densidad de energía local y j^i la densidad de momentos ambos medidos por observadores Eulerianos. Son constricciones porque no dependen de segundas derivadas temporales y son independientes de la elección de norma α y β^i debiéndose cumplir sobre cada hipersuperficie en todo tiempo.

1.1.1. Ecuaciones ADM

Las ecuaciones de constricción son cuatro de las diez ecuaciones de campo de Einstein, las restantes deben ser ecuaciones de evolución y se obtienen al proyectar el tensor de Riemann y contraerlo dos veces con el vector normal:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{n}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha. \quad (1.16)$$

Esta relación involucra a la función lapso α y una derivada de Lie de la curvatura extrínseca a lo largo del vector normal $\mathcal{L}_{\vec{n}}$, la cual nos dará un término que involucra

1. PRELIMINARES

la evolución en el tiempo. Utilizando las relaciones de Gauzz-Codazzi (1.9) y varias manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] , \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde $S_{\mu\nu} := P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ es el tensor de esfuerzos medido por los observadores eulerianos ($S := S_\mu^\mu$). A este sistema de ecuaciones de evolución, se le conoce como ecuaciones ADM (por Arnowitt, Dessler y Missner). Si bien, esta no es la forma original con que la presentaron, la expresión (1.17) se debe a York [129] y se denominan como las ecuaciones ADM estándar o formulación ADM a la York. Las diferencias principales entre ambas formas se debe a que en la formulación ADM las variables son la métrica γ_{ij} y su canónica conjugada π_{ij} .

Ambas ecuaciones describen el mismo fenómeno físico, pero matemáticamente no son equivalentes debido a que el espacio fase de soluciones es distinto y solo son equivalentes en una sección del mismo en la que se satisfacen las constricciones. Por otro lado, al realizar simulaciones numéricas, debido al error introducido, el que una solución sea estable ante las perturbaciones o no es crucial puesto que ambos esquemas son iguales solo si la solución satisface las constricciones. Otro punto importante es que ambas formas no son matemáticamente equivalentes en el concepto de hiperbolicidad de las ecuaciones diferenciales [10], concepto que se revisará a continuación.

Formulaciones bien puestas y sistemas hiperbólicos

Dos conceptos que se usarán en esta sección introductoria, es el de un sistema bien puesto y el de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólico. El primer concepto hace referencia a que un problema de valores iniciales se dice bien puesto si su solución existe, es única y además depende de forma continua de las condiciones iniciales. Esta última propiedad se matemáticamente se traduce en que dada la norma de la solución $u(t, x)$ esta puede ser acotada del producto de la condición inicial por una exponencial que es función del tiempo en la forma:

$$\|u(t, x)\| \leq k e^{\sigma t} \|u(0, x)\| , \quad (1.18)$$

con k, σ independientes de las condiciones iniciales.

El siguiente concepto es el de un sistema hiperbólico. Un sistema de evolución de primer orden o segundo orden (al introducir variables auxiliares) se puede escribir en la forma:

$$\partial_t \vec{u} + \mathbb{M}^i \nabla_i \vec{u} = \vec{S}(\vec{u}) , \quad (1.19)$$

donde \vec{u} representa el vector solución de funciones, \mathbb{M}^i es la matriz característica del sistema y $\vec{S}(\vec{u})$ el término de fuente que es función de \vec{u} pero no de sus derivadas. Un sistema en la forma (1.19) se dice hiperbólico si para cualquier covector s_i , $s_i \mathbb{M}^i$ tiene eigenvalores reales, pero además se refina la clasificación como:

- Débilmente hiperbólico: Si es hiperbólico, pero $s_i \mathbb{M}^i$ no tiene un conjunto completo de eigenvectores.
- Fuertemente hiperbólico: Si es hiperbólico y $s_i \mathbb{M}^i$ tiene un conjunto completo de eigenvectores y eigenvalores para cualquier dirección en todo el espacio.
- Simétricamente hiperbólico: Si \mathbb{M}^i son matrices simétricas.
- Simetrizable hiperbólico: Si \mathbb{M}^i puede ser simetrizable.

La importancia de esta clasificación es que solamente, los sistemas, fuertemente, simétrico y simetrizable hiperbólicos son un problema bien puesto.

La formulación ADM con condiciones algebraicas para la función del lapso α y vector de corrimiento β^i no es un sistema fuertemente hiperbólico. Una forma de que el sistema sea fuertemente hiperbólico es elegir adecuadamente una condición dinámica para el lapso y el vector de corrimiento, y otra es elegir ecuaciones en derivadas parciales del tipo elíptico para ambas variables de norma [113]. Una explicación más detallada acerca de los conceptos de hiperbolicidad y sistemas bien puestos se puede encontrar en [63, 84].

1.1.2. Formulación BSSN

En 1987 Oohara, Nakamura y Kojima presentaron una reformulación de las ecuaciones ADM usando una descomposición conforme, mostrando que la estabilidad era mejor comparada a las ecuaciones ADM originales [91]. Trabajos posteriores de Baumgarte y Shapiro [25] mostraron que la descomposición conforme tenía una estabilidad superior en casos de prueba, como consecuencia la formulación ganó popularidad y actualmente usada en la mayoría de códigos de relatividad numérica.

La formulación actualmente más usada es basada en los trabajos de Shibata, Nakamura, Baumgarte y Shapiro y es conocida como Formulación BSSN. En ella se introduce un factor conforme

$$\tilde{\gamma}_{ij} := e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (1.20)$$

en el que el factor ϕ se elige tal que el determinante de la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$ sea igual a uno

$$\phi = \frac{1}{12} \ln \gamma, \quad (1.21)$$

con γ el determinante de la métrica física γ_{ij} . La ecuación de evolución para ϕ se obtiene a partir de (1.8), utilizando que la derivada del determinante de una matriz A , satisface $\partial_\mu \det A = \det A \operatorname{tr}(A^{-1} \partial_\mu A)$ obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K,$$

1. PRELIMINARES

donde se ha definido $d/dt := \partial_t - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}}$ y usado el hecho de que ϕ es una densidad tensorial de peso 1/6.¹ Adicionalmente se definen el tensor de curvatura extrínseca conforme sin traza como una variable independiente

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right), \quad (1.22)$$

y las funciones de conexión conforme

$$\tilde{\Gamma}^i := \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (1.23)$$

En las nuevas variables $\{\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}\}$, las ecuaciones de evolución se obtienen de las expresiones (1.8) y (1.17).

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij}, \quad (1.24)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \{-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]\}^{TF} \\ &+ \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik} \tilde{A}_j^k \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\frac{d}{dt} K, = -D_i D^i \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\rho + S), \quad (1.27)$$

donde TF se refiere a la parte sin traza de la cantidad entre llaves y los índices de los tensores se bajan y suben con la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij} = e^{4\phi} \gamma_{ij}$. Si bien, las ecuaciones ahora están en términos de cantidades conformes, en la ecuación para \tilde{A}_{ij} y K aparecen derivadas covariantes respecto a la métrica física γ_{ij} , para calcularlas se necesitan los símbolos de Christoffel

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \frac{1}{3} \left(\delta_j^k \Gamma_{jm}^m + \delta_j^k \Gamma_{im}^m - \gamma_{ij} \gamma^{kl} \Gamma_{lm}^m \right) 2(\delta_i^k \partial_j \phi + \delta_j^k \partial_i \phi - \gamma_{ij} \gamma^{kl} \partial_l \phi), \quad (1.28)$$

con $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ los símbolos de Christoffel de la métrica conforme. Con esto

$$\tilde{\Gamma}^i = e^{4\phi} \Gamma^i + 2\tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \phi. \quad (1.29)$$

En la evolución para \tilde{A}_{ij} se necesita el tensor de Ricci asociado a la métrica física γ_{ij} , al realizar los cálculos, el tensor de Ricci tiene dos contribuciones

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\phi, \quad (1.30)$$

¹Recordemos que de forma general, la derivada de Lie de una densidad tensorial T con peso ω está dada por

$$\mathcal{L}_{\tilde{\beta}} T = \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} T \Big|_{\omega=0} + \omega T \partial_k \beta^k.$$

donde \tilde{R}_{ij} es el tensor de Ricci asociado a la métrica conforme y ϕ son términos asociados al factor ϕ

$$R_{ij}^\phi = -2\tilde{D}_i\tilde{D}_j\phi - 2\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}^k\tilde{D}_k\phi + 4\tilde{D}_i\phi\tilde{D}_j\phi - 4\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}^k\phi\tilde{D}_k\phi, \quad (1.31)$$

Por último las constricciones hamiltoniana (1.13) y de momentos (1.14) toman la forma

$$R = \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3}K^2 + 16\pi\rho, \quad (1.32)$$

$$\partial_j\tilde{A}^{ij} = -\tilde{\Gamma}_{jk}^i\tilde{A}^{jk} - 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi + \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK + 8\pi e^{4\phi}j^i, \quad (1.33)$$

Las funciones de conexión (1.23) permiten tener un mejor control sobre las condiciones de shift y al ser introducidas como variables independientes, el tensor de Ricci \tilde{R}_{ij} se escribe como un operador laplaciano $\tilde{\gamma}^{lm}\partial_l\partial_m\tilde{\gamma}_{ij}$

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{lm}\partial_l\partial_m\tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i}\partial_j)\tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k\tilde{\Gamma}_{(ij)k} + \tilde{\gamma}^{lm}\left(2\tilde{\Gamma}_{l(i}\tilde{\Gamma}_{j)km} + \tilde{\Gamma}_{im}^k\tilde{\Gamma}_{klj}\right), \quad (1.34)$$

y las segundas derivadas de la métrica se escriben con las funciones de conexión $\tilde{\Gamma}^i$.

La introducción de las variables conformes de conexión $\tilde{\Gamma}^i$ como variables independientes, tienen la ventaja de que en el lado derecho de la ecuación (1.27), las segundas derivadas de la métrica conforme que aparece en el tensor de Ricci (1.34) contiene un término que es similar a un operador laplaciano aplicado a la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$ y los demás términos con segundas derivadas de $\tilde{\gamma}_{ij}$ han sido reescritas en términos de la primera derivada de $\tilde{\Gamma}^i$.

Al ser $\tilde{\Gamma}^i$ promovidas como variables independientes, debemos agregar su correspondiente ecuación de evolución que se obtiene de las ecuaciones (1.8) y (1.23), sin embargo resulta que son altamente inestables [10]. Una versión estable de la ecuación de evolución se obtiene usando la constricción de momentos (1.33) y la expresión final queda como:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{jk}\partial_j\partial_k\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j\partial_k\beta^k - 2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha + 2\alpha\left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i\tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi\tilde{j}^i\right), \quad (1.35)$$

donde $\tilde{j}^i = e^{4\phi}j^i$. En resumen, el sistema BSSN queda conformado por las ecuaciones (1.25),(1.26),(1.27), (1.27) y (1.35).

1.1.3. Formalismo BSSN generalizado

Dado el interés en analizar el colapso crítico en espacios con simetría esférica, se debe reescribir el formalismo BSSN en coordenadas curvilíneas porque las ecuaciones (1.25),(1.26),(1.27), (1.27) y (1.35) solo son válidas en coordenadas cartesianas en el que $\det\gamma = 1$, además de que la formulación BSSN original no es covariante.

1. PRELIMINARES

La forma de generalizar la formulación a coordenadas curvilíneas consiste en introducir una métrica de fondo $\hat{\gamma}_{ij}$ conocida a todo tiempo y fija [15]. Denotando como \hat{T} a las variables conformes tenemos las cantidades en el formalismo BSSN

$$\hat{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (1.36)$$

$$\phi = \frac{1}{12} \ln(\gamma/\hat{\gamma}), \quad (1.37)$$

$$\hat{A}_{ij} = e^{-4\phi} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right), \quad (1.38)$$

y se pedirá que $\hat{\gamma}(t=0) = \overset{\circ}{\gamma}$, con $\overset{\circ}{\gamma}$ el determinante de la métrica plana en las coordenadas elegidas. Al hacer este cambio se sugiere dos tipos de evolución para $\hat{\gamma}$:

1. $\partial_t \hat{\gamma} = 0$. Llamada la versión ‘‘Lagrangiana’’, en esta elección el determinante se mantiene constante a lo largo de las curvas integrales de t .
2. $\partial_t \hat{\gamma} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{\gamma} = 0$. La versión ‘‘Euleriana’’, $\hat{\gamma}$ permanece constante a lo largo de los observadores Eulerianos.

Claramente estas dos elecciones coinciden cuando el vector de corrimiento es cero, pero en general no lo son. La evolución para $\hat{\gamma}$ se describe mediante

$$\partial_t \hat{\gamma} = \sigma \left(2\hat{\gamma} \hat{\nabla}_m \beta^m \right), \quad (1.39)$$

con $\sigma = 0, 1$ para la versión Lagrangiana y Euleriana respectivamente. Usando la métrica de fondo se define una nueva variable de conexión

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^i &:= \hat{\gamma}^{jk} \hat{\Delta}_{jk}^i = \hat{\gamma}^{jk} \left(\hat{\Gamma}_{jk}^i - \hat{\Gamma}_{jk}^i \right) \\ &= -\overset{\circ}{\nabla}_j \hat{\gamma}^{ij} - \frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \ln(\hat{\gamma}/\overset{\circ}{\gamma}), \end{aligned} \quad (1.40)$$

que ahora sí es un vector a diferencia de $\tilde{\Gamma}^i$. Con la definición anterior, se tiene la constricción

$$\mathcal{C}_{\Delta}^i := \hat{\Delta}^i + \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{\gamma}^{ij} + \frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \ln(\hat{\gamma}/\overset{\circ}{\gamma}) = 0. \quad (1.41)$$

Las constricciones hamiltoniana y de momentos en términos de las nuevas variables toman la forma

$$H = \frac{1}{2} \left(R - \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} + \frac{2}{3} K^2 \right) - 8\pi\rho = 0, \quad (1.42)$$

$$M_i = \hat{\nabla}_j \hat{A}_i^j + 6\hat{A}_i^j \partial_j \phi - \frac{2}{3} \partial_i K - 8\pi j_i = 0. \quad (1.43)$$

Por último, las ecuaciones de evolución son

$$\frac{d}{dt}\hat{\gamma}_{ij} = -2\alpha\hat{A}_{ij} - \frac{2}{3}\sigma\hat{\gamma}_{ij}\hat{\nabla}_m\beta^m, \quad (1.44)$$

$$\frac{d}{dt}\phi = -\frac{1}{6}\alpha K + \frac{1}{6}\sigma\hat{\nabla}_m\beta^m, \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left\{ \alpha R_{ij} - {}^{(3)}\nabla_i^{(3)}\nabla_j\alpha - 8\pi\alpha S_{ij} \right\}^{TF} \\ &+ \alpha \left(K\hat{A}_{ij} - 2\hat{A}_{ka}\hat{A}_b^k \right) - \frac{2}{3}\sigma\hat{A}_{ij}\hat{\nabla}_m\beta^m, \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\frac{d}{dt}K = \alpha \left(\hat{A}_{ij}\hat{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2 \right) - {}^{(3)}\nabla^2\alpha + 4\pi\alpha(\rho + S), \quad (1.47)$$

con $d/dt = \partial_t - \mathcal{L}_{\hat{\beta}}$. La ecuación de evolución asociada a los vectores $\hat{\Delta}^i$ es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\Delta}^i &= \hat{\gamma}^{jk}\hat{\nabla}_j\hat{\nabla}_k\beta^i - 2\hat{A}^{ij}\partial_j\alpha - \alpha(2 - \xi)\hat{\nabla}_j\hat{A}^{ij} + 2\alpha\hat{A}^{jk}\hat{\Delta}_{jk}^i \\ &+ \alpha\xi \left(6\hat{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\hat{\gamma}^{ij}\partial_j K - 8\pi\hat{\gamma}^{im}j_m \right) \\ &+ \frac{\sigma}{3} \left[\hat{\nabla}^i \left(\hat{\nabla}_m\beta^m \right) + 2\hat{\Delta}^i\hat{\nabla}_m\beta^m \right], \end{aligned} \quad (1.48)$$

en el que se toma $\xi > 1/2$ para tener un sistema fuertemente hiperbólico [124]. En la práctica se toma $\xi = 2$, con esta condición, todos los campos no asociados a la norma se propagan a lo largo de los conos de luz.

1.1.4. Formalismo 3+1 en simetría esférica

En simetría esférica, emplearemos las coordenadas esféricas usuales (r, θ, φ) y adaptada a la simetría la métrica puede ser escrita como

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r\beta^r)dt^2 + \beta_r dr dt + A dr^2 + r^2 B d\Omega^2, \quad (1.49)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ el elemento de ángulo sólido y donde $A = A(t, r)$ y $B = B(t, r)$. Se ha considerado que los campos vectoriales únicamente tienen una componente radial y solo dependen de las coordenadas (t, r) . Además definimos las componentes de la curvatura extrínseca como,

$$K_A := K_r^r, K_B := K_\theta^\theta = K_\varphi^\varphi, \quad (1.50)$$

y las cantidades auxiliares

$$D_A := \partial_r \ln A, \quad D_B := \partial_r \ln B. \quad (1.51)$$

Regularización en el origen

El sistema de coordenadas esféricas no está bien definido en $r = 0$ por lo que en el origen pueden aparecer cantidades que no estén bien definidas dado que tienen un factor de $1/r$. La regularidad de la métrica en el origen asegura las cancelaciones analíticas de los términos problemáticos pero no de forma numérica.

La primer condición que se piden a las variables $\{A, B, D_A, D_B, K_A, K_B\}$ es que deben estar bien definidas en el origen [13], obteniendo que en $r = 0$ deben ser de la forma

$$\begin{aligned} A &\sim A^0 + \mathcal{O}(r^2), & B &\sim B^0 + \mathcal{O}(r^2), \\ D_A &\sim \mathcal{O}(r), & D_B &\sim \mathcal{O}(r), \\ K_A &\sim K_A^0 + \mathcal{O}(r^2), & K_B &\sim K_B^0 + \mathcal{O}(r^2), \end{aligned} \quad (1.52)$$

donde $\{A^0, B^0, K_A^0, K_B^0\}$ son funciones regulares dependientes del tiempo. Estas condiciones se pueden implementar de forma numérica, por ejemplo en un método de diferencias finitas tomando una malla desplazada $\Delta/2$ con Δ el espacio de discretización¹, tomar un punto fantasma en $-\Delta/2$ e imponer que las funciones $\{A, B, K_A, K_B\}$ sean pares y D_A, D_B impares en $r = 0$.

La segunda condición surge de observar las expresiones para las constricciones hamiltoniana y de momentos en simetría esférica

$$\begin{aligned} H &= -\partial_r D_B + \frac{1}{r^2 B} (A - B) + AK_B (2K_A + K_B) \\ &+ \frac{1}{r} (D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} - 8\pi A\rho = 0, \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$M = -\partial_r K_B + (K_A - K_B) \left[\frac{1}{r} + \frac{D_B}{2} \right] - 4\pi j_A = 0, \quad (1.54)$$

con $j_A := j_r$. De las expresiones anteriores notamos que existen términos que van como $(A - B)/r$ y $(K_A - K_B)/r$ que podrían diverger, por lo que se pide además

$$A - B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad K_A - K_B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad (1.55)$$

teniendo que $A^0 = B^0$ y $K_A^0 = K_B^0$, es decir el espacio es localmente plano en el origen. La forma de introducir estas condiciones es definir nuevas variables λ y K_λ que se promueven a variables independientes

$$\lambda := \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{A}{B} \right), \quad (1.56)$$

$$K_\lambda := \frac{1}{r^2} (K_A - K_B), \quad (1.57)$$

y sus ecuaciones de evolución se obtienen directamente de reemplazar las ecuaciones para A, B, K_A, K_B .

¹Aquí Δ representa el espaciado de la malla numérica y no al exponente de ecos.

1.1.5. Sistema BSSN en simetría esférica

En el formalismo BSSN adaptado a la simetría, el elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r \beta^r) dt^2 + \beta_r dr dt + \psi^4 (A dr^2 + r^2 B d\Omega^2), \quad (1.58)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ el elemento de ángulo sólido. Por simplicidad, podemos redefinir las componentes del tensor de curvatura extrínseca sin traza A_i^j

$$A_A := \hat{A}_r^r, \quad A_B := \hat{A}_\theta^\theta, \quad (1.59)$$

teniendo además que al ser un tensor sin traza se cumple $A_A + 2A_B = 0$ pudiendo considerar únicamente a una de las componentes. En general, podemos tomar la misma convención de nombres del tensor de curvatura extrínseca sin traza para cualquier tensor T_i^j : $T_r^r = T_A$, $T_\theta^\theta = T_B$. Las ecuaciones de evolución del sistema BSSN en simetría esférica son

$$\partial_t \phi = \beta^r \partial_r \phi + \frac{\sigma}{6} \hat{\nabla}_m \beta^m - \frac{1}{6} \alpha K, \quad (1.60)$$

$$\partial_t A = \beta^r \partial_r A + 2A \partial_r \beta^r - \frac{2}{3} \sigma A \hat{\nabla}_m \beta^m - 2\alpha A A_A, \quad (1.61)$$

$$\partial_t B = \beta^r \partial_r B + 2B \frac{\beta^r}{r} - \frac{2}{3} \sigma B \hat{\nabla}_m \beta^m - 2\alpha B A_B, \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K &= \beta^r \partial_r K - \nabla^2 \alpha + \alpha \left(A_A^2 + 2A_B^2 + \frac{1}{3} K^2 \right) \\ &\quad + 4\pi \alpha (\rho + S_A + 2S_B), \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \partial_t A_A &= \beta^r \partial_r A_A - \left((\nabla \nabla \alpha)_A - \frac{1}{3} \nabla^2 \alpha \right) + \alpha \left(R_A - \frac{1}{3} R \right) \\ &\quad + \alpha K A_A - \frac{16\pi}{3} \alpha (S_A - S_B) \\ &\quad + \frac{\sigma}{3} \left(\frac{1}{A} \partial_r (\hat{\nabla}_m \beta^m) + 2\hat{\Delta}^r \hat{\nabla}_m \beta^m \right) \\ &\quad - \frac{2}{A} (A_A \partial_r \alpha + \alpha \partial_r A_A) + 2\alpha \left(A_A \hat{\Delta}^r - \frac{2}{rB} (A_A - A_B) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha \xi}{A} \left[\partial_r A_A - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_A \partial_r \phi \right. \\ &\quad \left. + (A_A - A_B) \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) - 8\pi j_r \right], \end{aligned} \quad (1.64)$$

donde $(\nabla \nabla)_A \alpha := \nabla^r \nabla_r \alpha$ y $\nabla^2 \alpha$ son:

$$(\nabla \nabla)_A \alpha = \frac{1}{A e^{4\phi}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r A}{2A} + 2\partial_r \phi \right) \right], \quad (1.65)$$

$$\nabla^2 \alpha = \frac{1}{A e^{4\phi}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r A}{2A} - \frac{\partial_r B}{B} - 2\partial_r \phi - \frac{2}{r} \right) \right]. \quad (1.66)$$

1.2. Elección de norma y evolución de agujeros negros

Evolucionar agujeros negros requiere de poder lidiar con las singularidades de curvatura en su interior. En una simulación es suficiente con usar coordenadas que eviten la singularidad, sin embargo, este enfoque puede desarrollar patologías en las coordenadas impidiendo tener simulaciones estables de larga duración. La elección adecuada de las variables de norma pueden asegurar la evolución exitosa de estos espacios, siendo una de las elecciones usuales para el lapso pedir que evolucione de acuerdo a las soluciones de la familia Bona-Masso [31]

$$\frac{d}{dt}\alpha = -\alpha^2 f(\alpha)K, \quad (1.67)$$

con $f(\alpha)$ una función positiva que asegura que la velocidad de los campos de norma $v_g = \sqrt{\alpha f \gamma^{ii}}$ sea real y el sistema de ecuaciones sea fuertemente hiperbólico. La elección de f para evolucionar agujeros negros es $f = N/\alpha$ con N una constante, en particular $N = 2$. Si $\beta^i = 0$ la solución es de la forma $\alpha = h(x^i) + \ln \gamma^{N/2}$ llamada foliación $1 + \log$, que en la práctica se ha mostrado robusta para la evolución de agujeros negros pues evita la singularidad física [33]. Dicha propiedad ocurre al hacer que el lapso tienda a cero en la singularidad, alentando la evolución en la región interior del agujero negro pero continuando en su exterior, siendo este comportamiento conocido como el colapso del lapso. El lapso $1 + \log$, aunque evita la singularidad, provoca el fenómeno de estiramiento de la malla numérica, debido a que en el interior la evolución se ve casi congelada pero en su exterior se continúa la evolución ocasionando que la malla se distorsione.

El vector de corrimiento, puede elegirse cero, pero en presencia de un agujero negro el horizonte crecerá rápidamente, dado que los observadores eulerianos van cayendo al agujero negro y eventualmente arruinará la simulación. Una elección común para el vector de corrimiento es

$$\partial_t^2 \beta^i = \xi \partial_t \hat{\Gamma}^i - \eta \partial_t \beta^i, \quad (1.68)$$

donde ξ es un parámetro de la velocidad de propagación de los modos longitudinales del shift y η agrega términos de disipación para evitar oscilaciones grandes. Típicamente se elige $\xi = 3/4$ para que los modos longitudinales se propaguen a la velocidad de la luz de forma asintótica y $\eta = 2/M_{ADM}$ pues tiene dimensiones del inverso de longitud y debe ser reescalado con la masa ADM del espaciotiempo. Esta elección es conocida como Gamma-Driver y fue propuesta por Alcubierre et. al. [12].

Adicional a la elección de norma, se emplea el método de las punturas de Campanelli et.al. [40], definiendo la función

$$\chi := \psi^{-4} = e^{-4\phi}, \quad (1.69)$$

cuya ecuación de evolución es

$$\partial_t \chi - \beta^i \partial_i \chi = \frac{2}{3} \chi (\alpha K - \partial_i \beta^i). \quad (1.70)$$

1.2.1. Condiciones de norma que evitan choques de características

Como se ha escrito en los antecedentes, el estudio del fenómeno crítico regularmente se realiza en el régimen subcrítico, debido a que cuando se forma un agujero negro las simulaciones dejan de funcionar al formarse singularidades en la curvatura. Un tipo de singularidades surge por el enfoque de las líneas normales a las hipersuperficies Σ_t que ocurre cuando la dinámica es muy fuerte. Bona et. al. mostró que la familia Bona-Masso evita el enfoque de las líneas normales [33] y Alcubierre mostró el comportamiento que debe seguir $f(\alpha)$ a medida que α se aproxima a cero [8]. La elección del lapso $1 + \log$ garantiza que la singularidad se evite de forma fuerte al detener la evolución del lapso en un tiempo coordinado finito en la región singular.

El segundo tipo de singularidades se debe a la elección de norma. A pesar de que la elección de la familia Bona-Masso provee un sistema que es fuertemente hiperbólico, se pueden presentar singularidades en las soluciones que son patologías debida a la elección de la norma [7, 8, 9, 14]. Este tipo de singularidades ocurre cuando las líneas características asociadas a la propagación de la norma se intersectan y ocurre en regiones donde las hipersuperficies espaciales dejan de ser suaves. Por la similitud de las ondas de choques en hidrodinámica se les llama *choques de norma*.

A diferencia de las ondas de choque en hidrodinámica que pueden continuar su evolución por medio de constricciones físicas (conocidas como condición de entropía), los choques de norma no deben ser extendidos dado que son una patología del sistema coordinado elegido y no se tiene una restricción física para determinar su continuación.

Alcubierre muestra que una condición general para evitar choques de norma es elegir a f de la forma [8]

$$1 - f - \frac{\alpha}{2} \frac{df}{d\alpha} = 0, \quad (1.71)$$

el cual es trivialmente integrado para f

$$f(\alpha) = 1 + \kappa/\alpha^2, \quad (1.72)$$

con κ una constante. Como caso particular, la elección de $\kappa = 0$ provee la foliación armónica $d\alpha/dt = -\alpha^2 K$. Notemos que la elección $f = 2/\alpha$ (lapso $1 + \log$) no satisfacen la ecuación (1.71). Aunque $1 + \log$ estándar ($N = 2$) satisface la condición a primer orden en ϵ si se toma $\alpha = 1 + \epsilon$. Si $\kappa \neq 0$, $f \sim \alpha^{-2}$ para valores pequeños de α y se evitará de forma fuerte la singularidad (como se vio en las singularidades coordinadas). Con esta elección del lapso, α puede tomar valores negativos, y la evolución del sistema será consistente si la evolución converge.

1.2.2. Detección de horizontes de agujeros negros

Un horizonte de eventos (HE) es una propiedad global de un espacio-tiempo asintóticamente plano, siendo definido como el conjunto de puntos en los que ninguna geodésica causal con dirección al futuro puede alcanzar al futuro infinito nulo (\mathcal{J}^+). Por su estructura global es necesario conocer por completo la evolución del sistema para determinar

si existe o no un horizonte de eventos, por lo cual es una limitante en una simulación numérica al solo contar con un número finito de datos.

En relatividad numérica se utiliza un concepto alternativo llamado un horizonte aparente (HA) que se define en una hipersuperficie espacialoide como la superficie más externa atrapada marginalmente, en otras palabras, el horizonte aparente es la superficie más externa tal que la expansión de geodésicas nulas salientes es cero. A diferencia de los horizontes de eventos, en la práctica, la propiedad local de los horizontes aparentes nos permite localizarlos en cada hipersuperficie durante la evolución. Un resultado de Hawking y Ellis [67] garantiza que si se cumple la conjetura de censura cósmica y se satisface la condición de energía nula, si existe un HA entonces se tiene un HE en su exterior, que coincide con el HA si el espaciotiempo es estacionario.

Algoritmo de búsqueda

Existen diversos algoritmos de encontrar horizontes aparentes que pueden consultarse en [123]. Sin embargo en espacios con simetría esférica se reduce a encontrar el cero de una función y en simetría axial consiste en resolver una ecuación diferencial ordinaria.

En la descripción matemática se considera una hipersuperficie suave Σ a un tiempo constante y sea S una superficie embebida en Σ con un vector normal s^μ apuntando al exterior. La métrica inducida sobre la superficie S es

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu. \quad (1.73)$$

La expansión de las geodésicas nulas está dada por el cambio del área en la dirección nula saliente \vec{l} ,

$$\vec{l} := \vec{n} + \vec{s}. \quad (1.74)$$

En esta dirección, el cambio del área está dada por la traza de la derivada de Lie de la métrica inducida $h_{\mu\nu}$

$$H = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\vec{l}} h_{\mu\nu}, \quad (1.75)$$

que en términos de cantidades 3+1 es [21]

$$H = D_i s^i + K_{ij} s^i s^j - K. \quad (1.76)$$

El HA es la superficie más exterior tal que $H = 0$ sobre toda S . Suponiendo que el horizonte es parametrizado como la superficie de nivel de una función escalar F tal que $F(x^i) = 0$, el vector normal a la superficie es

$$s^i = \frac{D^i F}{\sqrt{|D^j F D_j F|}}, \quad (1.77)$$

obteniendo que la expansión es

$$H = \left(\gamma^{ij} - \frac{D^i F D^j F}{|D^m F D_m F|} \right) \left(\frac{D_i D_j F}{\sqrt{|D^j F D_j F|}} - K_{ij} \right) = 0. \quad (1.78)$$

En simetría esférica con coordenadas (r, θ, φ) la métrica espacial puede escribirse como

$$dl^2 = A(t, r)dr^2 + B(t, r)r^2d\Omega^2, \quad (1.79)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ el elemento de ángulo sólido. Tomando al vector normal \vec{s} como $\vec{s} = (1/\sqrt{A}, 0, 0)$ la ecuación para encontrar un horizonte aparente se reduce a

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) - 2K_\theta^\theta = 0. \quad (1.80)$$

Como únicamente tenemos la dependencia espacial en r de las componentes de la métrica y de la curvatura extrínseca, resolver esta ecuación se reduce a evaluar la función del lado izquierdo en el dominio numérico y encontrar el cero de ella.

1.3. Condiciones de frontera

Las ecuaciones de Einstein tratadas como un problema de valores iniciales (IVP), al escribirse en su forma hiperbólica, se le otorga una gran estabilidad para evolucionar distintos sistemas de interés [54, 70]. Pudiendo asegurar por medio de un resultado de ecuaciones diferenciales parciales, que si un sistema tiene hiperbolicidad fuerte entonces esté bien puesto. Dichas propiedades están formuladas para sistemas sin fronteras, por lo que en la práctica se debe de tener cuidado con las condiciones de frontera que se introducen pues podría arruinar las propiedades de hiperbolicidad de las ecuaciones. Para las ecuaciones de Einstein escritas como un problema de valores iniciales con condiciones de frontera (PVICF) y con condiciones de frontera adecuadas, se tiene que el problema está bien puesto, aunque trasladado al formalismo BSSN los avances han sido pocos [96].

En relatividad numérica se deben introducir fronteras artificiales al tener un dominio finito para la simulación del sistema. En general las condiciones de frontera introducidas no están bien adaptadas a las constricciones y a pesar de que el PVICF esté bien puesto, la violación de las constricciones en la frontera se propaga a todo el dominio numérico. Intentos de resolver el problema han surgido tras analizar la estructura característica de las ecuaciones [19, 37, 38, 39] para problemas muy particulares en el formalismo BSSN. Por otro lado, en el formalismo generalizado armónico se tiene la implementación de este tipo de constricciones para un sistema binario de agujeros negros [87, 105, 107].

1.3.1. Condiciones de frontera en simetría esférica

Como caso particular, en simetría esférica se ha implementado una forma de poner las condiciones a la frontera que si preservan las constricciones [16]. Analizando la estructura característica del sistema BSSN en simetría esférica, suponiendo que en la frontera el vector de corrimiento se anula (que en la práctica no siempre es cierto pero

para fronteras lejanas su valor es muy pequeño) y que el lapso evoluciona con una familia Bona-Masso, definimos las variables

$$q := \partial_r \ln \alpha, \quad (1.81)$$

$$D_A := \frac{1}{2} \partial_r \ln A, \quad (1.82)$$

$$\chi := \partial_r \phi, \quad (1.83)$$

$$D_B := \frac{1}{2} \partial_r \ln B, \quad (1.84)$$

con las que se definen los campos

$$\omega^D := D_A + 2D_B, \quad (1.85)$$

$$\omega^q := q - 6f\chi - f(D_A + 2D_B), \quad (1.86)$$

$$\omega^\Delta := \Delta^r - 8\chi/A - (D_A + 2D_B)/A, \quad (1.87)$$

donde la velocidad de propagación a lo largo de los observadores normales para ω^D es nula y para ω^q y ω^Δ es $-\beta^r$. El campo asociado a la norma es

$$\omega_\pm^\alpha = e^{2\phi} \sqrt{Af} K \pm q, \quad (1.88)$$

con velocidad de propagación $\lambda_\pm^\alpha = -\beta^r \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{f/A}$ y como $f(\alpha)$ puede ser más grande que 1, la norma puede propagarse a velocidades mayores a la de la luz. Los últimos dos campos son

$$\omega_\pm^l = e^{2\phi} \sqrt{A} \left(A_A - \frac{2}{3} K \right) \pm \frac{2}{3} (D_A - D_B - A\Delta^r + 2\chi), \quad (1.89)$$

con velocidades de propagación

$$\lambda_\pm^l = -\beta^r \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{1/A}, \quad (1.90)$$

correspondientes a la velocidad coordinada de los rayos de luz que entran y salen.

Condiciones de frontera para los campos que no se propagan

El campo ω^D independientemente de la elección de norma, no se propaga en la dirección normal, mientras que los campos ω^q y ω^Δ no se propagan en caso de un vector de corrimiento nulo. Como q, D_A, D_B, χ son variables auxiliares y no se obtienen directamente de las ecuaciones BSSN, en la práctica se evolucionan las variables α, A, B, χ en todo el dominio sin aplicar una condición a la frontera con diferencias finitas ladeadas. Las condiciones a la frontera para Δ^r pueden aplicarse de dos formas: La primera es simplemente evolucionarla hasta la frontera. La segunda consiste en calcular ω^Δ en la frontera en un paso de tiempo anterior y con su ecuación de evolución calcularlo en el nuevo paso de tiempo y reconstruir Δ^r a partir de ella habiendo calculado A, B, ϕ , siendo el primer método por ser más simple es el que se emplea en OllinSphere.

Condiciones de frontera para los campos de norma

Los campos de norma ω_{\pm}^{α} tienen una velocidad de propagación $\lambda_{\pm}^{\alpha} = -\beta^r \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{f/A}$ y en el caso de vector de corrimiento nulo, observamos que uno de los campos viaja hacia afuera del dominio y otro hacia adentro. Por causalidad solo podemos dar condiciones de frontera para el campo entrante. Si el vector de corrimiento es cero, la ecuación para el lapso es una ecuación del tipo onda

$$\partial_t^2 \alpha - \alpha^2 f \nabla^2 \alpha = \alpha^3 f \left[K^2 \left(2f + \alpha f' - \frac{1}{3} \right) - \frac{3}{2} A_a^2 + 4\pi(\rho + S) \right], \quad (1.91)$$

así que en la región asintóticamente plana el lapso se comporta como una onda esférica

$$\alpha \simeq 1 + g(r - vt)/r, \quad (1.92)$$

con g una función desconocida y $v = \alpha e^{-2\phi} \sqrt{f/A}$. La condición de frontera de este tipo se conoce como de tipo Sommerfeld.

$$(\partial_t + v\partial_r)[r(\alpha - 1)] \simeq 0. \quad (1.93)$$

En la práctica este tipo de condiciones de frontera introduce reflexiones espurias que son minimizadas al alejar las fronteras numéricas.

Condiciones de frontera adaptadas a las constricciones

Los campos restantes ω_{\pm}^l no pueden únicamente tener condiciones de frontera de tipo Sommerfeld si pedimos que las condiciones de frontera cumplan con las constricciones hamiltoniana y de momentos. La forma de implementarlo es construir la derivada radial de los campos ω_{\pm}^l y notar que se puede escribir en términos de las constricciones

$$\partial_r \omega_{\pm}^l = \sqrt{A} e^{2\phi} M \mp \left(\frac{Ae^{4\phi} H}{6} + \frac{\partial_r C_{\Delta}}{2} \right) + P_{\pm}, \quad (1.94)$$

con H, M, C_{Δ} las constricciones hamiltoniana, de momentos, la constricción para las variables Delta y P_{\pm} una función que solo depende de derivadas espaciales de primer orden de la métrica o terminos de la curvatura extrínseca. Luego, si en la frontera se satisfacen las constricciones, la expresion se simplifica a

$$\partial_r \omega_{\pm}^l = P_{\pm}. \quad (1.95)$$

Similarmente se obtiene la derivada temporal

$$\partial_t \omega_{\pm}^l = \left(\beta^r \mp \frac{\alpha}{\sqrt{A} e^{2\phi}} \right) \left[\sqrt{A} e^{2\phi} M \mp \left(\frac{Ae^{4\phi} H}{6} + \frac{\partial_r C_{\Delta}}{2} \right) \right] + Q_{\pm}, \quad (1.96)$$

con Q_{\pm} teniendo las mismas propiedades que P_{\pm} . Con ambas expresiones se combinan en una ecuación de evolución para ω_{\pm}^l

$$\partial_t \omega_{\pm}^l + \left(-\beta^r \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A} e^{2\phi}} \right) \partial_r \omega_{\pm}^l = Q_{\pm} + \left(-\beta^r \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A} e^{2\phi}} \right) P_{\pm}. \quad (1.97)$$

La forma más sencilla de implementar esta condición de frontera para ω_-^l es calcular Q_- en la frontera en el mismo paso de tiempo y usar la ecuación de evolución para ω_-^l y después reconstruir el término de la curvatura extrínseca A_A .

1.4. Métodos numéricos

En relatividad numérica resolvemos las ecuaciones utilizando métodos numéricos y como el sistema BSSN es un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico, utilizaremos métodos que resuelven adecuadamente este sistema. Considerando al espaciotiempo como un continuo, resolver el sistema de ecuaciones significa encontrar una función que satisfaga las relaciones entre sus derivadas con condiciones a la frontera a todo tiempo, implicando que debemos de conocer un número de datos ilimitados pero para aproximarlos con una solución numérica es necesario reducir el número de variables desconocidas a un valor finito.

El método que usaremos para resolver el sistema de ecuaciones BSSN es el método de diferencias finitas, que consiste en reducir el dominio continuo del espacio-tiempo a un conjunto de puntos discretos denominados malla computacional. La distancia entre dos puntos consecutivos temporales se denota por Δt y la distancia entre dos puntos adyacentes espaciales Δx . Posteriormente reemplazamos los operadores diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas que aproximen los operadores en los puntos de la malla, obteniendo así un sistema de ecuaciones en cada punto que también involucra a sus vecinos.

1.4.1. Diferencias finitas

Los operadores diferenciales en diferencias finitas son obtenidas por medio de un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de interés (x, t) . Sea u una función con k derivadas continuas. Denotamos por (n, m) al punto $(t = n\Delta t, x = m\Delta x)$ y por u_m^n a la función u evaluada en (n, m) . A los operadores en diferencias finitas les asociamos un orden de aproximación, así si el error del operador es $\Delta, \Delta^2, \Delta^4, \dots$, diremos que es un operador de primer, segundo, cuarto orden y así sucesivamente. Adicionalmente podemos tener operadores en diferencias finitas centrados o ladeados a la izquierda o derecha, dependiendo de si usamos los vecinos a la izquierda, derecha o una cantidad igual en ambas direcciones. Lo importante en el orden de las aproximaciones, es que en el límite continuo $\Delta \rightarrow 0$, el operador discretizado debe aproximarse al operador exacto, siendo así una aproximación consistente.

Como las ecuaciones de Einstein son ecuaciones en derivadas parciales a segundo orden, únicamente nos interesarán los operadores para la primera y segunda derivada. Los códigos Ollin del grupo emplean aproximaciones a segundo y cuarto orden, por lo que únicamente escribiré los operadores a esas aproximaciones.

Operadores en diferencias

- Hacia adelante

$$\Delta_x^+ u_m^n := (u_{m+1}^n - u_m^n), \quad (1.98)$$

- Hacia atrás

$$\Delta_x^- u_m^n := (u_m^n - u_{m-1}^n), \quad (1.99)$$

Operadores en diferencias finitas para la derivada de primer orden

- Diferencias centradas

$$\partial_x u \approx \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.100)$$

$$\partial_x u \approx \frac{-u_{m+2}^n + 8u_{m+1}^n - 8u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{12\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (1.101)$$

- Diferencias laterales a la izquierda

$$\partial_x u \approx \frac{3u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.102)$$

$$\partial_x u \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{25}{12}u_m^n - 4u_{m-1}^n + 3u_{m-2}^n - \frac{4}{3}u_{m-3}^n + \frac{1}{4}u_{m-4}^n \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (1.103)$$

- Diferencias laterales a la derecha

$$\partial_x u \approx \frac{-3u_m^n + 4u_{m+1}^n - u_{m+2}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.104)$$

$$\partial_x u \approx \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{25}{12}u_m^n + 4u_{m+1}^n - 3u_{m+2}^n + \frac{4}{3}u_{m+3}^n - \frac{1}{4}u_{m+4}^n \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (1.105)$$

Operadores en diferencias finitas para la derivada de segundo orden

- Diferencias centradas

$$\partial_x^2 u \approx \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.106)$$

$$\partial_x^2 u \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[-\frac{1}{12}u_{m-2}^n + \frac{4}{3}u_{m-1}^n - \frac{5}{2}u_m^n + \frac{4}{3}u_{m+1}^n - \frac{1}{12}u_{m+2}^n \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (1.107)$$

- Diferencias ladeadas a la derecha

$$\partial_x^2 u \approx \frac{1}{\Delta x^2} [2u_m^n - 5u_m^n + 4u_m^n - u_m^n] + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.108)$$

$$\partial_x^2 u \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{15}{4}u_m^n - \frac{77}{6}u_{m+1}^n + \frac{107}{6}u_{m+2}^n - 13u_{m+3}^n + \frac{61}{12}u_{m+4}^n - \frac{5}{6}u_{m+5}^n \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (1.109)$$

- Diferencias ladeadas a la izquierda

$$\partial_x^2 u \approx \frac{1}{\Delta x^2} [-2u_m^n + 5u_m^n - 4u_m^n + u_m^n] + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.110)$$

$$\partial_x^2 u \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[-\frac{15}{4}u_m^n + \frac{77}{6}u_{m+1}^n - \frac{107}{6}u_{m+2}^n + 13u_{m+3}^n - \frac{61}{12}u_{m+4}^n + \frac{5}{6}u_{m+5}^n \right] + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (1.111)$$

Aunque únicamente se ha escrito los operadores de derivadas espaciales, las temporales son análogos, únicamente se deben intercambiar $\Delta x \rightarrow \Delta t$ y $m \rightarrow n$.

Al escribir los operadores en diferencias finitas temporales y espaciales se tendrá un sistema de ecuaciones algebraicas que únicamente resta resolver, en el caso del código numérico empleado se resuelve utilizando el método de líneas que se describirá más abajo. Es importante mencionar que la elección de los parámetros de discretización Δt y Δx no puede ser arbitrario. Un sistema discretizado con diferencias finitas es estable en el sentido de que si escribimos a nuestra solución u_m^n como una descomposición de Fourier $u_m^n = \xi^n e^{ikm\Delta x}$ con k el número de onda, el modo de Fourier debe satisfacer $|\xi| \leq 1$ para tener una solución bien comportada que esté acotada. Por medio de un análisis de estabilidad de Von Neumann [10], si la ecuación es del tipo onda $\partial_t^2 \phi = v^2 \partial_x^2 \phi$, un requisito pero no suficiente para tener estabilidad es $v\Delta t \leq \Delta x$, conocida como condición de Courant-Friedrich-Lewy (CFL). La condición CFL se ve modificada para una ecuación de onda en N-dimensiones, siendo el criterio de estabilidad $v\Delta t \leq 1/\sqrt{N}\Delta x$.

1.4.2. Método de líneas

En el código numérico, los operadores en diferencias finitas son aplicados únicamente a la parte espacial de las ecuaciones, la evolución temporal se realiza con el método de líneas, el cual usa el hecho de que el sistema se puede escribir en la forma

$$\partial_t u = \mathcal{S}(u), \quad (1.112)$$

donde \mathcal{S} es un operador diferencial que actúa sobre el espacio. Si usamos un método de diferencias finitas, podemos obtener un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{S}\mathbf{u}, \quad (1.113)$$

donde \mathbf{u} es un vector construido de los valores de la función u en cada punto de la malla. La ecuación (1.113) puede resolverse utilizando el método de Crank-Nicholson iterativo que es un método a segundo orden o el método Runge-Kutta a cuarto orden. Para fuentes lineales, el método iterativo puede ser reescrito en la forma

$$\bar{u}^{*(l)} = u^n + \frac{\Delta t}{2} S(\bar{u}^{*(l-1)}), \quad l = 1, \dots, N-1, \quad (1.114)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t S(\bar{u}^{*(N-1)}), \quad (1.115)$$

con $u^{*(l)}$ y $\bar{u}^{*(l)}$ relacionadas por $\bar{u}^{*(l)} = (u^n + u^{*(l)})$. En sistemas lineales, el método iterativo de Crank-Nicholson tiene las siguientes propiedades [10]

1. Un sistema estable se obtiene al considerar al menos tres pasos ($N \geq 3$). El caso $N = 2$ es suficiente para obtener una precisión a segundo orden pero es inestable. La estabilidad de las iteraciones vienen en un número par de pasos: 1 y 2 son inestables, 3 y 4 son estables, 5 y 6 son inestables y el patrón continua.
2. Las iteraciones convergen solo si la condición CFL es válida, de otra forma las iteraciones divergen.

Ambos puntos nos permiten concluir de que tomar tres iteraciones es suficiente para obtener un sistema estable dado que obtenemos un sistema a segundo orden que es estable mientras la condición CFL no se viole.

El segundo método es del tipo Runge-Kutta, el cual es estable si el orden de aproximación es mayor a dos. En el código se emplea el método a cuarto orden

$$k_1 = S(u^n), \quad (1.116)$$

$$k_2 = S(u^n + k_1 \Delta t / 2), \quad (1.117)$$

$$k_3 = S(u^n + k_2 \Delta t / 2), \quad (1.118)$$

$$k_4 = S(u^n + k_3 \Delta t), \quad (1.119)$$

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (1.120)$$

que es estable mientras la condición CFL sea válida.

1.4.3. Convergencia de la solución

Por último, otra propiedad relevante es la convergencia de la solución, dado que es importante verificar que cuando aumentamos la resolución numérica, nuestra solución se aproxima a la correcta. Si el parámetro de discretización es Δ la solución $u(t, x)$ puede ser escrita como serie de potencias de Δ

$$u_\Delta(t, x) = u(t, x) + \Delta e_1(t, x) + \Delta^2 e_2(t, x) + \dots, \quad (1.121)$$

con $e_n(t, x)$ las funciones error para distintos órdenes de Δ . La convergencia de la solución se verifica tomando la solución a distintas resoluciones u_{Δ_1} , u_{Δ_2} tales que

$\Delta_1/\Delta_2 = r$. Luego se compara con la solución exacta del problema. Si el método de discretización es de orden n entonces el cociente debe cumplir:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u - u_{\Delta_1}}{u - u_{\Delta_2}} = r^n. \quad (1.122)$$

Lo anterior es útil siempre y cuando se cuente con la solución exacta del problema. Frecuentemente este no es el caso, de lo contrario no se necesitaría una aproximación numérica. En caso de no contar con la solución exacta, se comprueba la autoconvergencia de la solución tomando tres soluciones u_{Δ_1} , u_{Δ_2} y u_{Δ_3} con distintas resoluciones Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 tales que $\Delta_1/\Delta_2 = \Delta_2/\Delta_3 = r$. Si el método de discretización es de orden n entonces el cociente debe cumplir:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u_{\Delta_1} - u_{\Delta_2}}{u_{\Delta_2} - u_{\Delta_3}} = r^n. \quad (1.123)$$

Es importante mencionar que para el método de diferencias finitas, se tiene el *teorema de equivalencia de Lax* [82]:

Dado un problema de valores iniciales bien puesto, y una aproximación por diferencias finitas consistente, entonces estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia.

Por lo cual, aún cuando no se cuente con la solución exacta del problema, el tener un esquema estable garantiza que la solución numérica convergerá a la solución exacta del problema.

1.4.4. Disipación artificial

Al resolver ecuaciones diferenciales pueden presentarse algunas inestabilidades debido a que el análisis de estabilidad para los métodos numéricos se realizan para la ecuación de onda en un espacio plano, pero que al aplicar los métodos a las ecuaciones de Einstein a pesar de que se escriben en una forma hiperbólica, son mucho más complejas. Una forma de lidiar con esto es introducir de forma artificial un término de disipación. La forma estándar para agregar disipación a un método de diferencias finitas es conocida como *disipación de Kreiss-Oliger* [80]. Suponiendo que el sistema se puede escribir como

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n), \quad (1.124)$$

con S un operador de diferencias finitas espacial. La modificación que se realiza al esquema de diferencias finitas es

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (-1)^N \Delta_x^{2N} (u_m^n), \quad (1.125)$$

donde $\Delta_x^{2N} := (\Delta_x^+ \Delta_x^-)^N$ es el operador de diferencias finitas centradas de orden $2N$ y ϵ el parámetro de disipación. En el límite continuo, el término de disipación se anulan como Δx^{2N-1} , por lo cual, para tener un esquema consistente se debe pedir que $2N - 1$ sea igual o mayor al orden de discretización. Para un esquema a segundo y cuarto orden, el orden de disipación debe ser de cuarto y sexto orden respectivamente.

Colapso crítico gravitacional

Entendemos por colapso crítico gravitacional al estudio de la dinámica de un espacio-tiempo en el umbral de formación de un agujero negro. Dicho espacio-tiempo es generado por la evolución de una familia de datos iniciales, la cual está parametrizada por p , y que evolucionan de acuerdo con las ecuaciones de Einstein más las ecuaciones asociadas a la dinámica de la materia. En el régimen crítico, el espacio-tiempo tiene dos comportamientos: Para valores pequeños de p la evolución permanece regular y la materia se radia dejando un espacio plano, para p lo suficientemente grande, el espacio colapsa y forma un agujero negro de masa M_{BH} .

Inspirado en la física estadística, la masa del agujero negro puede interpretarse como un parámetro de orden, pudiendo clasificar a la dinámica en dos tipos. Una transición del tipo I es aquella en el que la masa del agujero cambia de forma discontinua, si $p < p^*$ no se forma agujero negro, en $p = p^*$ se tiene un valor mínimo para la masa y para $p > p^*$ los valores de la masa crecen de forma monótona. En un colapso del tipo II, la masa del agujero negro tiende a cero conforme $p \rightarrow p^*$, diciendo que la masa del agujero negro se vuelve infinitesimal y a diferencia del colapso tipo I, la masa del agujero no tiene un valor mínimo y en el valor $p = p^*$ no existe un agujero negro. En este tipo de transición la masa del agujero negro sigue la relación $M_{BH} \propto |p - p^*|^\gamma$ con γ el exponente crítico. Además del comportamiento anterior, las transiciones están caracterizadas por tres propiedades: universalidad, simetrías y escalamiento.

2.1. Universalidad

La universalidad se refiere a que para una pequeña región del espacio-tiempo, todas las soluciones cercanas a la solución crítica se aproximan a la crítica y es independiente en la forma que p parametriza a la familia de datos iniciales, únicamente dependiendo del modelo de materia. En el espacio fase, cualquier solución que comience cerca de la superficie crítica, su evolución se mantendrá casi paralela a ella y a medida que se acerque al punto crítico su evolución demorará más en esa vecindad mientras más cerca el parámetro inicial esté del valor crítico y posteriormente se dispersa o colapsa.

De forma simplificada, en esta vecindad la distancia de p al valor crítico será lo único relevante para la evolución dado que podrían considerarse como una perturbación del punto crítico. La propiedad está presente en el colapso tipo II (al menos en lo que se han reportado) y en algunos tipo I.

2.2. Simetrías

La simetría de traslación temporal la presentan las soluciones tipo I, pudiendo ser continua o discreta. En el primer caso, la solución es estacionaria y en el segundo es periódica, siendo la frecuencia de oscilación parte de la solución y puede ser obtenida por medio de un problema de valores propios[59]. Las soluciones tipo II tienen una simetría de escala (de homotecia) que también puede ser continua o discreta. La simetría continua regularmente aparece en problemas donde los procesos son invariantes ante una escala, mientras que en la simetría discreta, las soluciones tipo II tienen un periodo en forma de exponente Δ conocido como ecos, que cuando la solución se escribe en coordenadas adaptadas a la autosimilitud, las soluciones son oscilatorias con periodo Δ y cada oscilación representa una disminución en la escala por un factor e^Δ .

En un espacio-tiempo con autosimilitud y con simetría continua, se define un vector homotético ξ tal que

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 2g_{ab}, \quad (2.1)$$

de tal forma que en coordenadas adaptadas a la simetría $x^\mu = (\tau, x^i)$ se tiene

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.2)$$

obteniendo que los coeficientes de la métrica serán

$$g_{\mu\nu}(\tau, x^i) = e^{-2\tau} \tilde{g}_{\mu\nu}(x^i), \quad (2.3)$$

donde τ es un logaritmo negativo de una escala espaciotemporal y las coordenadas espaciales son alrededor del punto crítico que se encuentra en $\tau \rightarrow \infty$. Un espacio con autosimilitud y simetría discreta en coordenadas adaptadas tendrá la forma

$$g_{\mu\nu}(\tau, x^i) = e^{-2\tau} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tau, x^i), \quad (2.4)$$

tal que $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tau, x^i)$ es de periodo Δ . El signo menos en (2.2) es una convención, suponiendo que en el futuro se tendrá escalas menores.

2.3. Escalamiento

El escalamiento se observa en el comportamiento de algunas cantidades en el límite $p \rightarrow p^*$. Las relaciones de escalamiento pueden obtenerse de la teoría de perturbaciones alrededor de la solución crítica [60], mostrando que los exponentes críticos están

relacionados de forma inversa con el exponente de Lyapunov del sistema ¹. La forma de escalamiento depende de la simetría: si es continua, en el colapso tipo I, sea τ el tiempo en que una solución cercana a la crítica permanece cercana a la solución crítica, entonces:

$$\tau \propto -\gamma \ln |p - p^*|, \quad (2.5)$$

donde γ es llamado el exponente de escalamiento temporal; en un colapso de tipo II, la masa del agujero negro sigue la relación

$$M_{\text{BH}} \propto C |p - p^*|^\gamma, \quad (2.6)$$

donde γ es el exponente crítico y C depende de la familia de datos iniciales.

Si la simetría es discreta, entonces el escalamiento de la masa se ve ligeramente modificado [59]. En una escala logarítmica, la relación (2.6) es una línea recta, pero en el caso de la simetría discreta, se agrega una función periódica alrededor de la recta en la forma

$$\ln M = \gamma \ln (p - p^*) + c + f [\ln (p - p^*)], \quad (2.7)$$

donde f es una función con periodo Δ . Otras cantidades relevantes como los escalares de curvatura, cerca de la amplitud crítica escalan en la misma forma que la masa del agujero negro, pero el exponente es igual a la dimensión de la unidad de longitud que les corresponde. Por ejemplo el escalar de Ricci tiene unidades de *longitud*⁻² y por ello escala como -2γ .

2.4. Trabajos previos

Se han explorado distintas condiciones de materia para observar el fenómeno crítico, y hasta la fecha no se ha encontrado ningún ejemplo en el que no se presente este fenómeno. En este escrito únicamente me limitaré a mencionar los más relevantes para las secciones que se presentarán más adelante. Siendo estos el campo escalar real y complejo con autointeracción acoplado mínimamente a la gravedad, además se han tomado como base para verificar que el código Ollin pueda reproducirlos de forma consistente. En [1, 61] se puede encontrar una recopilación más detallada con otros tipos de materia.

2.4.1. Campo escalar real sin masa acoplado mínimamente

La primera evidencia numérica del comportamiento crítico fue descubierta por Mathew Choptuik [41], en el estudio del colapso en simetría esférica para el campo escalar

¹El exponente de Lyapunov mide la estabilidad de un sistema ante cambios en las condiciones iniciales. Para una trayectoria en el espacio fase parametrizado por t , y puntos separados una distancia infinitesimal δ , el exponente de Lyapunov χ cuantifica la tasa de separación como $F(t, x + \delta) - F(t, x) \approx \delta e^{\chi t}$. Si $\chi > 0$ las trayectorias divergen, mientras que si $\chi < 0$ permanecen cercanas entre ellas.

2. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL

sin masa con acoplamiento mínimo. Choptuik usa distintas familias de condiciones iniciales y observa colapso del tipo II con simetría discreta. Siendo un caso particular el mostrado en la figura 2.1 donde se muestra el escalamiento de la masa de los agujeros negros para la familia de datos iniciales para el campo escalar ϕ . En esta figura la familia de datos iniciales usada es

$$\phi = \phi_0 r^3 \exp(-[(r - r_0)/\delta]^q), \quad (2.8)$$

con r el radio de área, y cuyos parámetros que definen a una familia de soluciones es ϕ_0 , r_0 y q .

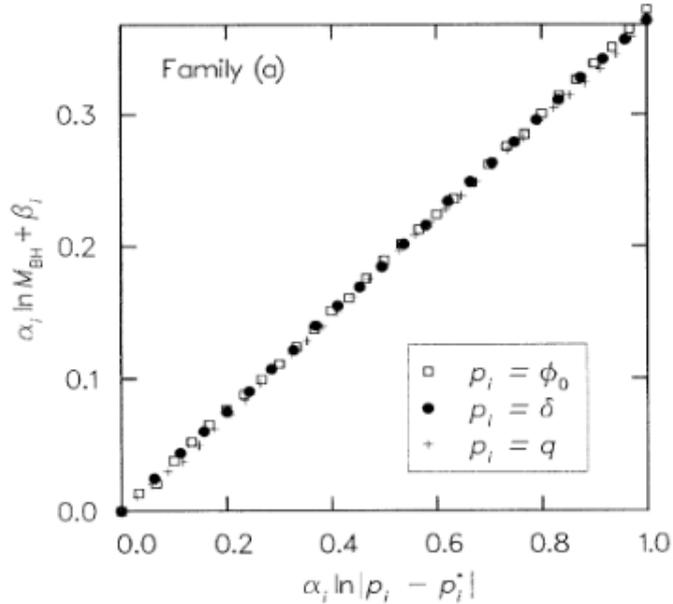


Figura 2.1: Escalamiento de la masa para los agujeros negros. Variando una vez por cada recta los parámetros ϕ_0 , δ y q . Las rectas se han normalizado en las abscisas. Imagen obtenida de [41].

En la figura 2.2 se muestran los ecos de la solución cerca de la crítica para una variable X para la familia de datos iniciales (2.8), donde se han definido las variables

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \ln(kr) = \ln r + \kappa, \\ \tau &\equiv \ln[k(T_0^* - T_0)] = \ln(T_0^* - T_0) + \kappa, \end{aligned} \quad (2.9)$$

con r el radio en coordenadas esféricas y T_0 el tiempo propio de un observador central.

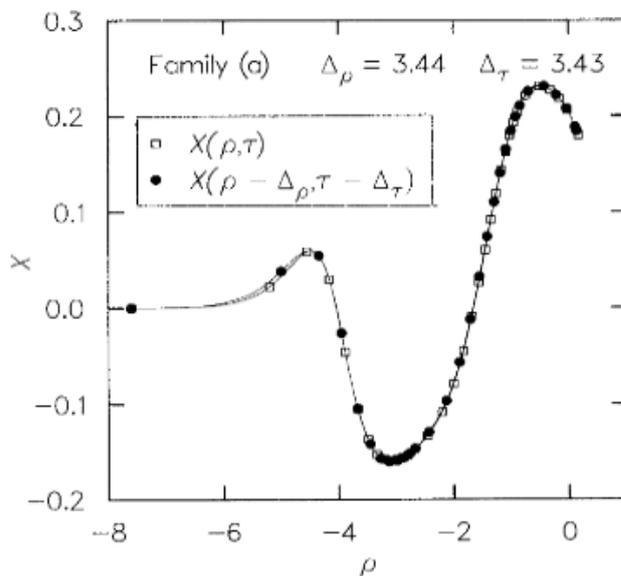


Figura 2.2: Reescalamiento de la variable X para una solución cerca de la crítica. La variable X con cuadros claros está graficada en un tiempo propio central T_0 y la gráfica de X con círculos oscuros está graficada en un tiempo $T_0 + e^{\Delta\tau}$ pero en una escala $e^{\Delta\rho} \simeq 30$ veces más pequeña. Imagen obtenida de [41].

Choptuik obtiene que los exponentes críticos son $\gamma \simeq 0.37$ y $\Delta \simeq 3.44$, que además han sido confirmado de otras formas tanto numéricas [6, 55, 62, 64, 102, 106] y un cálculo semianalítico planteando el problema como uno de eigenvalores [59]. En los trabajos [59, 73] se muestra que en este espacio el escalamiento de la masa de los agujeros negros debe de tener una oscilación de periodo $\Delta/2\gamma$.

En la práctica obtener una masa estable de un agujero negro es más difícil debido al tiempo que toma para estabilizarse, por lo cual prefiere analizarse el régimen subcrítico. En [56] se muestra que el máximo del escalar de Ricci escala con la potencia $-0.747 \simeq -2\gamma$ y tiene el periodo de oscilación $4.63 \simeq \Delta/2\gamma$, figuras 2.3 y 2.4.

Desde el descubrimiento de Choptuik, se han realizado estudios en otros espacios. El campo escalar sin masa en simetría axial es estudiado en [43] mostrando que el comportamiento es similar al esférico, obteniendo exponentes $\gamma \simeq 0.28 - 0.41$ y $\Delta \simeq 2.9 - 3.5$ con la peculiaridad de que sobre el eje se producen dos regiones separadas que localmente se comportan como la solución crítica en simetría esférica contradiciendo al resultado de [89] que muestra que los únicos modos que son relevantes son los esféricos. Aunque los resultados eran preliminares dada la precisión, en [23] se obtiene resultados similares. En [50, 69] se estudia el colapso del campo escalar sin masa en un espacio 3D sin simetrías para el régimen subcrítico y supercrítico, encontrando que el comportamiento es similar al caso en simetría esférica al obtener exponentes críticos $\gamma \simeq 0.37 - 0.38$ y $\Delta \simeq 3.1 - 3.3$.

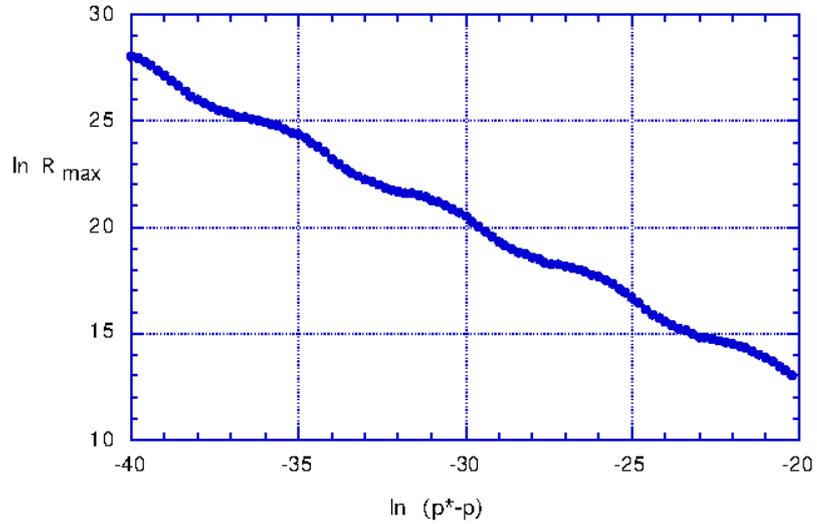


Figura 2.3: Representación en escala logarítmica del máximo del escalar de Ricci contra la diferencia de amplitud de la solución y la crítica ($p^* - p$). La curva puede ser ajustada por una recta de pendiente -2γ . Imagen obtenida de [56].

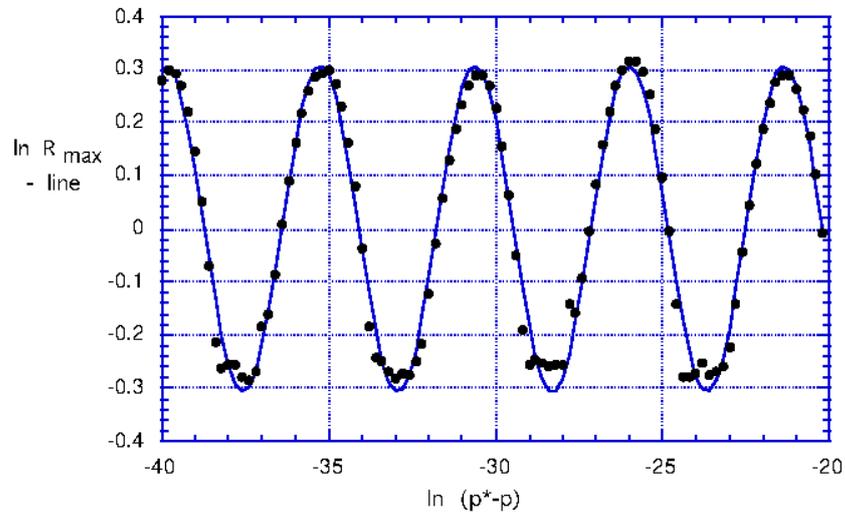


Figura 2.4: Diferencia de un ajuste lineal con la curva mostrada en la figura 2.3. Las oscilaciones tienen un periodo $\Delta/2\gamma$. Imagen obtenida de [56]

2.4.2. Campo escalar real masivo acoplado mínimamente

El colapso del campo escalar con masa en simetría esférica es estudiado en [35] por Brady, Chambers y Gonçalves. Usando un potencial $V(\phi) = m^2\phi^2$, con m la masa del

campo. Este caso presenta los dos tipos de colapso, siendo relevantes la longitud de Compton del campo $\lambda_C = h/mc$ y su extensión radial λ . Se obtiene una transición del tipo II cuando $\lambda \ll \lambda_C$, y transiciones del tipo I cuando $\lambda \gg \lambda_C$. La solución crítica para el colapso tipo II corresponde a la encontrada por Choptuik en el caso del campo escalar real sin masa, mientras que la solución crítica para el colapso tipo I son las soluciones construidas por Seidel y Suen conocidas como estrellas solitónicas oscilantes [114], también llamados oscilatonos. Los oscilatonos son soluciones a la ecuación de Einstein-Klein-Gordon autogravitantes, periódicas, asintóticamente planas, y esféricamente simétricas. Además, dado que no existe una corriente conservada, estas soluciones tienden a dispersarse. Para una masa m dada, Suen y Seidel construyen una familia de soluciones posibles, la cual se divide en dos ramas, una estable y otra inestable, cuya separación está marcada por una masa crítica $M_c = 0.605m_{Planck}^2/m$ y compacidad $C = 0.14$. El lado estable corresponde a estrellas que al perturbarse permanecen en esta rama. Dependiendo del tamaño de la perturbación, si esta es pequeña, permanecerá oscilando con el modo fundamental ω , mientras que si es grande, la estrella expulsa materia y se mueve a un oscilaton estable de menor masa. Por el lado inestable, ante cualquier tipo de perturbación, esta migrará a la rama estable o colapsará a un agujero negro. La solución crítica para el colapso de tipo I corresponde a un oscilaton en esta rama.

2.4.3. Campo escalar complejo masivo acoplado mínimamente

Un comportamiento similar se encuentra para el campo escalar complejo con masa, usando un potencial $V(\phi) = m^2|\phi|^2$. En el estudio realizado por Hawley y Choptuik [68], muestran que la solución crítica corresponde soluciones estacionarias de la ecuación de Einstein-Klein-Gordon conocidas como estrella de Bosones [78, 86, 108, 125].

Estas soluciones son esféricamente simétricas y con coeficientes métricos estáticos. Además, el campo complejo tiene una dependencia armónica en la forma

$$\phi(t, r) = \varphi(r)e^{i\omega t}, \quad (2.10)$$

con ω una frecuencia angular real y $\varphi(r)$ una función real que únicamente depende del radio r . La masa máxima de este tipo de estrella es $M_{max} = 0.633m_{Planck}^2/m$, con un valor máximo del campo $\varphi_{max} = \varphi(0) \approx 0.271$ [57, 115] (aunque este valor depende de la normalización usada). Este valor central divide a las configuraciones de estrellas de bosones en dos ramas, una estable y otra inestable. Si $\varphi(0) < \varphi_{max}$ la estrella es estable bajo perturbaciones pequeñas, mientras que si $\varphi(0) > \varphi_{max}$ las configuraciones son inestables. Además, se tienen estados excitados dependiendo del número de nodos en la dirección radial.

Las soluciones críticas obtenidas por Hawley y Choptuik corresponden a una estrella de bosones en la rama inestable en su estado base. En [68], dichas soluciones fueron obtenidas al perturbar una estrella de bosones estable con un pulso de campo escalar real sin masa interactuando únicamente de forma gravitacional. Encuentran además, que el exponente crítico γ para el colapso tipo I, es el inverso de la parte imaginaria del

exponente del modo inestable obtenido mediante teoría de perturbaciones lineal para la estrella correspondiente.

2.5. Técnicas numéricas para la evolución de fenómenos críticos

Cerca de la amplitud crítica, la dinámica es altamente sensible a las condiciones iniciales, por lo que dadas las relaciones de escalamiento (2.5) y (2.6) uno desea obtener la cantidad $|p^* - p|$ tan pequeña como sea posible y así obtener de forma precisa los exponentes críticos. En la práctica no se puede tener un ajuste infinito de la amplitud crítica dado que se está limitado por la precisión de máquina y la resolución del dominio numérico empleado.

En las simulaciones se ha observado que la evolución cerca de la amplitud crítica es muy violenta, siendo necesario que un código numérico pueda evolucionar con suficiente resolución los detalles. Aunque se podría utilizar un dominio de resolución constante a lo largo de toda la malla, sería una forma impráctica de utilizar los recursos de cómputo disponibles, dado que la parte más violenta de las evoluciones ocurren cerca del origen y adicionalmente uno debe de mantener las fronteras numéricas alejadas para disminuir el error introducido. Los estudios descritos anteriormente usualmente tienen integrado el método de refinamiento de mallas adaptativas [27] el cual subdivide el dominio numérico en regiones pequeñas de alta resolución conforme la evolución lo requiera. Desafortunadamente la mayoría de estos códigos no son de licencia libre por lo que únicamente nos limitaremos a usar los códigos numéricos del grupo Ollin. Particularmente el código OllinSphere está construido para evolucionar las ecuaciones de Einstein en el formalismo BSSN en simetría esférica. Este código se ha utilizado por ejemplo en [11, 109].

La estructura principal de OllinSphere consta de mallas anidadas (niveles de refinamiento) con una resolución fija. La malla exterior tiene una frontera localizada en r_{max} con una resolución Δr . El nivel N tiene una frontera localizada en $r_{max}/2^{N-1}$ con resolución $\Delta r/2^{N-1}$, manteniendo esta estructura fija a lo largo de toda la evolución. Este refinamiento por mallas anidadas es particularmente útil si se estudia colapso de tipo I. Por un lado, permite ajustar el número de niveles necesarios para identificar la formación de un agujero negro y por otro, podemos ajustar la resolución de la malla exterior para alejar las fronteras y así su influencia numérica no afecte la estabilidad de la solución.

Sin embargo, si se necesita mayor resolución en el origen de coordenadas el método anterior puede resultar ineficiente, dado que se necesitan demasiadas cajas para alcanzar la precisión deseada en el origen, siendo este el caso al estudiar el colapso crítico del tipo II. Aún cuando se permita aumentar arbitrariamente el número de niveles, las fronteras de cada nivel se ve reducida por un factor de 2, haciendo que si N es grande, la frontera de las mallas más finas esté demasiado cerca del origen y sea una fuente de

error numérico, debido a las interpolaciones entre las fronteras de los niveles.

Una alternativa a usar los niveles de refinamiento es realizar una transformación en la coordenada radial r a \tilde{r} , para que aún cuando se use un código con una malla igualmente espaciada en \tilde{r} no lo sea en r .

La forma en que se implementa esta transformación de coordenadas es mediante una relación diferencial

$$\frac{dr}{d\tilde{r}} = \frac{k}{1 + e^{\beta\tilde{r}^2 + \delta}}, \quad (2.11)$$

con esta transformación, si $\tilde{r} \rightarrow \infty$, $r \rightarrow k\tilde{r}$. Gráficamente esta relación se asemeja a una sigmoide pero con una dependencia cuadrática para \tilde{r} . La relación (2.11) no se puede integrar de forma analítica por lo que se resuelve de forma numérica. Para tener idea de lo que representa esta transformación, si realizamos un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\tilde{r} = 0$, podemos observar el comportamiento en el origen

$$\frac{dr}{d\tilde{r}} = \frac{k}{1 + e^\delta} - \frac{\beta e^\delta \tilde{r}^2}{(1 + e^\delta)^2} + \mathcal{O}(\tilde{r}^4). \quad (2.12)$$

Cualitativamente δ controla la resolución cerca del origen, por lo que $\delta > 0$, mientras que β la velocidad con que el término $e^{\beta r^2 + \delta}$ debe aproximarse a cero, y por ello $\beta < 0$. Usualmente $k = 1$, para que cuando $\tilde{r} \rightarrow \infty$, se tenga $r \rightarrow \tilde{r}$.

Como el código OllinSphere tiene la siguiente estructura para la métrica espacial

$$ds^2 = A(t, r)dr^2 + B(t, r)r^2d\Omega, \quad (2.13)$$

con $d\Omega$ el diferencial de ángulo sólido, al realizar la transformación de coordenadas se tiene

$$ds^2 = A(t, \tilde{r}) \left(\frac{dr}{d\tilde{r}} \right)^2 d\tilde{r}^2 + B(t, \tilde{r})r^2d\Omega. \quad (2.14)$$

Ahora se debe escribir (2.14) en la forma (2.13) pero en términos de la coordenada \tilde{r}

$$ds^2 = \tilde{A}d\tilde{r}^2 + \tilde{B}\tilde{r}^2d\Omega, \quad (2.15)$$

con $\tilde{A}(t, \tilde{r}) = A(t, \tilde{r}) \left(\frac{dr}{d\tilde{r}} \right)^2$ y $\tilde{B}(t, \tilde{r}) = B(t, \tilde{r})r^2/\tilde{r}^2$. Para obtener los datos iniciales, usualmente se considera una métrica conforme plana, haciendo $A=B=1$ y con ello $\tilde{A} = \left(\frac{dr}{d\tilde{r}} \right)^2$ y $\tilde{B} = r^2/\tilde{r}$.

2.6. Determinación de la amplitud crítica

Para una familia de soluciones parametrizada por p , al buscar la amplitud crítica p^* , inicialmente se proponen dos valores: el valor donde se observa dispersión de la condición inicial p_d y p_c el valor para el que se observa colapso. El intervalo $[p_d, p_c]$ se

2. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL

refinará mediante un bisección del intervalo hasta la precisión deseada para encontrar el parámetro crítico p^* y se reportará la precisión alcanzada mediante el parámetro:

$$\delta p = \frac{p_c - p_d}{p_d} . \quad (2.16)$$

El colapso de la condición inicial se obtendrá al encontrar un horizonte aparente por el método antes descrito, mientras que la dispersión se observa cuando $\alpha \rightarrow 1$ a tiempos tardíos. La búsqueda de la amplitud crítica se realizará en tres distintas resoluciones para observar convergencia, pero los exponentes críticos solo se obtendrán de los datos con mejor resolución debido a que son sensibles al error numérico.

En un espacio logarítmico se obtendrán datos igualmente espaciados en el parámetro $\ln |p^* - p|$ para el escalar de Ricci evaluado en el origen. Los exponentes críticos serán las pendientes de las rectas en el espacio logarítmico.

En simetría esférica usaremos una malla rectangular igualmente espaciada en r con parámetro de discretización Δr y con paso de tiempo adaptativo, esto es en cada paso de tiempo se calcula Δt tal que respete la condición CFL con $v^r = -\beta^r \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{f/A}$ como la velocidad de propagación de los campos de norma.

2.7. Cálculo de los exponentes críticos

Los fenómenos de tipo I son los más sencillos de evolucionar debido a que los agujeros negros no tienen radios pequeños, y por ello no se necesita de tanta resolución numérica. Para ajustar la relación (2.5), tomaremos el tiempo de vida τ de la solución como el tiempo propio de un observador en el origen $r = 0$ en el que se detecta un agujero negro (un horizonte aparente) por primera vez en la evolución.

Caso contrario es en el colapso crítico gravitacional del tipo II. Dado que los agujeros negros formados son infinitesimales, es complicado obtener de forma precisa su masa hasta que este alcance el equilibrio. Bajo la suposición de que los datos iniciales se encuentran cerca del dato que conduce a la solución crítica, la única propiedad que se necesita para obtener el escalamiento de la masa de los agujeros negros es una cantidad global del espaciotiempo que tiene unidades de longitud. Para un tiempo propio finito de un observador en el origen τ^* , la solución crítica se acumula alrededor de este punto, y para un tiempo propio τ la escala espacial l es proporcional a la diferencia

$$l \propto \tau^* - \tau , \quad (2.17)$$

mientras más cercano se encuentre el parámetro p de p^* , la solución se encontrará más cerca de la solución crítica y mayor será el tiempo τ que permanecerá cerca de ella. Este mismo argumento puede aplicarse tanto a evoluciones supercríticas o subcríticas, por lo que procederemos como en [56] para obtener el exponente a partir de evoluciones subcríticas. Para este tipo de evoluciones lo que buscaremos es el escalamiento del escalar de Ricci 4D, el cual, al tener unidades de $longitud^{-2}$, entonces escalará en la forma:

$$R_{max} \simeq |p^* - p|^{-2\gamma} . \quad (2.18)$$

Adicional a este comportamiento, Hod y Piran [74] notaron que cuando la simetría es discreta, al escalamiento se agrega una función periódica, teniendo la relación:

$$\ln R_{max} = c - 2\gamma \ln |p^* - p| + f(\ln |p^* - p|), \quad (2.19)$$

con c una constante que depende de la familia de datos iniciales y f una función con frecuencia de oscilación

$$\omega = \frac{\Delta}{2\gamma}, \quad (2.20)$$

con Δ siendo el exponente de los ecos. Usualmente es suficiente aproximar f con un solo modo de Fourier en la forma:

$$f(x) = a_0 \sin(\omega x + \varphi). \quad (2.21)$$

Teniendo que el escalar de Ricci escalará como:

$$\ln R_{max} = c - 2\gamma \ln |p^* - p| + a_0 \sin(\omega \ln |p^* - p| + \varphi_0), \quad (2.22)$$

donde las constantes c, a_0, φ_0 dependen de la familia de datos iniciales usado. El ajuste de la función (2.22) nos da una forma de calcular el exponente Δ .

El exponente Δ también puede calcularse al considerar perturbaciones de la solución crítica. En simetría esférica, la desviación de la solución crítica se debe a un modo inestable que crece de forma exponencial de la forma $e^{\kappa T}$, donde T se calcula como

$$T = -\ln(\tau - \tau^*), \quad (2.23)$$

Gundlach en [59] muestra que κ corresponde al exponente de Lyapunov del sistema y el exponente crítico γ es el inverso de este:

$$\gamma = \frac{1}{\kappa}. \quad (2.24)$$

En la coordenada temporal definida en la ecuación (2.23) la solución con simetría discreta es periódica con periodo Δ . Usando este hecho, otro método para calcular el exponente de ecos es presentado por Baumgarte [22]. Si consideramos dos pares de tiempos donde la solución crítica evaluada en el origen cruce en cero, (τ_n, τ_{n+1}) y (τ_m, τ_{m+1}) . Al sustituir estas cantidades en el tiempo logarítmico (2.23) tendremos las respectivas parejas $(T_n, T_{n+1}), (T_m, T_{m+1})$. Al ser la solución crítica, cada par difiere en la mitad del periodo $\Delta/2$. Resolviendo para el tiempo de acumulación τ^* , obtenemos:

$$\tau^* = \frac{\tau_n \tau_{m+1} - \tau_{n+1} \tau_m}{\tau_n - \tau_{n+1} - \tau_m + \tau_{m+1}}. \quad (2.25)$$

Con esta estimación para el tiempo de acumulación, podemos también tener una expresión para Δ :

$$\Delta = 2 \ln \left(\frac{\tau^* - \tau_n}{\tau^* - \tau_{n+1}} \right). \quad (2.26)$$

Colapso crítico gravitacional de un campo no mínimamente acoplado

Desde el descubrimiento de M. Choptuik, se han realizado más investigaciones de fenómenos críticos en simetría esférica. Dentro de estos estudios se encuentran aquellos en que las ecuaciones de campo al simplificarlas en simetría esférica, tienen la forma de una ecuación de onda. Particularmente, Eardley, Hirschmann y Horne en [51], utilizando nuevamente como modelo de materia a un campo escalar, encontraron una solución con simetría continua para un modelo axi3n/dilat3n. Posteriormente, Liebling y Choptuik [85] en la teor3a de Brans-Dicke, encuentran que el modelo puede tener simetr3a continua o discreta, dependiendo del valor del par3metro de acople. Este estudio tiene a la investigaci3n de Eardley, Hirschmann y Horne como un caso particular.

En la misma l3nea de investigar el colapso cr3tico gravitacional en teor3as alternativas de gravedad, en este cap3tulo se presentar3 el estudio de una generalizaci3n de la teor3a de Brans-Dicke llamada teor3a escalar tensorial.

Dentro de las posibles modificaciones de la teor3a de relatividad general de Einstein, en la representaci3n del marco de Jordan, el campo escalar se encuentra acoplado no mínimamente al escalar de Ricci de tal forma que se puede entender como una variaci3n local a la constante de gravitaci3n de Newton. Con esta modificaci3n, en la teor3a escalar tensorial aparecen otros fenómenos que no se tienen en la teor3a est3ndar de relatividad general, como son: un componente longitudinal extra a las ondas gravitacionales [65, 118], un fenómeno llamado escalarizaci3n espont3nea, en el que una soluci3n autogravitante sin campo escalar adquiere una componente no trivial del campo que hace m3s estable a la soluci3n. Este fenómeno ha sido estudiado para estrellas de neutrones [95, 112] y estrellas de bosones [49, 109]. Los resultados que se presentarán en este cap3tulo se han publicado en Physical Review D [77] en colaboraci3n con Miguel Alcubierre.

3.1. Ecuaciones de evolución

Existen dos formalismos para describir a las teorías escalar tensorial. Una es conocida como marco de Jordan (o marco físico) en el que el campo escalar ϕ se acopla no mínimamente al escalar de Ricci R , pero no al término cinético del campo. El otro marco es conocido como el de Einstein, donde el campo escalar $\tilde{\phi}$ se acopla mínimamente al escalar R que se calcula a partir de una métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, pero se acopla a los términos de materia. Para tener una transformación entre ambos marcos, debemos suponer que $\phi = \phi(\tilde{\phi})$. La forma de pasar de un marco a otro es mediante una transformación conforme de la métrica $g_{\mu\nu}$ a $\tilde{g}_{\mu\nu}$, junto con una transformación de ϕ a $\tilde{\phi}$ para recuperar la forma canónica del término cinético.

3.1.1. Marco de Jordan

Comenzamos por describir las ecuaciones relevantes para la teoría escalar tensorial en unidades tal que $c = 1$:

$$S = \int \left[\frac{F(\phi)}{16\pi G_0} R - \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) + V(\phi) \right) \right] \sqrt{-g} dx^4 + S_{\text{mat}}(\Psi, g_{\mu\nu}), \quad (3.1)$$

con ϕ el campo escalar no mínimamente acoplado, $V(\phi)$ el potencial de autointeracción, R el escalar de Ricci, $S_{\text{mat}}(\Psi, g_{\mu\nu})$ la acción de los restantes campos de materia con excepción de ϕ y $F(\phi)$ es la función de acople no mínimo. Para el estudio tomaremos una función cuadrática

$$F(\phi) = 1 + 8\pi\xi G_0 \phi^2, \quad (3.2)$$

con ξ una constante positiva. Este acople ha sido usado en el estudio de escalarización de estrellas de bosones en [49, 109]. Siguiendo el estudio original de M. Choptuik, tomaremos a un campo escalar no interactuante y sin masa, esto es $V(\phi) = 0$. La constante G_0 es la constante de gravitación universal, pero en (3.1) podemos identificar a una constante de gravitación efectiva $G_{\text{eff}} := G_0/F(\phi)$. Al variar la acción respecto de la métrica del espaciotiempo obtenemos las ecuaciones de campo:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G_0 T_{\alpha\beta}, \quad (3.3)$$

$$\square\phi + \frac{1}{2} f' R = 0, \quad (3.4)$$

con $f := F/8\pi G_0$, f' es la derivada de f con respecto del campo ϕ , y $\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$ es el operador d'Alambert. El tensor efectivo de energía-momento tiene tres componentes

dadas por:

$$T_{\alpha\beta} := \frac{G_{\text{eff}}}{G_0} \left(T_{\alpha\beta}^f + T_{\alpha\beta}^\phi + T_{\alpha\beta}^{\text{matt}} \right), \quad (3.5)$$

$$T_{\alpha\beta}^f := \nabla_\alpha (f' \nabla_\beta \phi) - g_{\alpha\beta} \nabla_\sigma (f' \nabla^\sigma \phi), \quad (3.6)$$

$$T_{\alpha\beta}^\phi := (\nabla_\alpha \phi) (\nabla_\beta \phi) - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} (\nabla \phi)^2, \quad (3.7)$$

$$G_{\text{eff}} := \frac{1}{8\pi f}, \quad (3.8)$$

con $T_{\alpha\beta}^{\text{mat}}$ el tensor de energía momento de los otros campos de materia excepto de ϕ . Calculando la traza de la ecuación (3.3), podemos reescribir la ecuación (3.4) como:

$$\square\phi = \frac{f' T_{\text{matt}} - f' (1 + 3f'') (\nabla \phi)^2}{2f (1 + 3f'/2f)}, \quad (3.9)$$

con T_{mat} la traza de $T_{\text{mat}}^{\alpha\beta}$. En este marco, las identidades de Bianchi implican que el tensor de energía momento completo es conservado:

$$\nabla_\sigma T^{\sigma\alpha} = 0. \quad (3.10)$$

Además, las ecuaciones de campo implican que el tensor de energía momento asociado a la materia se conserva

$$\nabla_\sigma T_{\text{matt}}^{\sigma\alpha} = 0, \quad (3.11)$$

lo cual implica en que partículas de prueba siguen las geodésicas a la métrica g_{ab} .

3.1.2. Marco de Einstein

Realizando una transformación conforme, podemos transformar las ecuaciones del marco de Jordan al marco de Einstein:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} := F(\phi) g_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\phi} := \int \left[\frac{3}{4} \left(\frac{F'(\phi)}{F(\phi)} \right)^2 + \frac{4\pi G_0}{F(\phi)} \right]^{1/2} d\phi, \quad (3.13)$$

$$W(\tilde{\phi}) := \frac{4\pi G_0 \tilde{V}(\tilde{\phi})}{\tilde{F}}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{F}(\tilde{\phi}) = F(\phi). \quad (3.15)$$

teniendo que la acción (3.1) se transforma como:

$$S[\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi}, \psi] = \frac{1}{16\pi G_0} \int \left[\tilde{R} - 2(\tilde{\nabla}\tilde{\phi})^2 - 4W(\tilde{\phi}) \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x + S_{\text{mat}}[\tilde{g}_{\mu\nu}/\tilde{F}(\tilde{\phi}), \psi], \quad (3.16)$$

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

todas las cantidades con una tilde son calculadas usando la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y $\tilde{\phi}$. Aún cuando las ecuaciones son más sencillas en el marco de Einstein, preferimos no trabajar en este marco. En algunas ocasiones, en el marco de Einstein se pueden esconder algunas patologías de la métrica física, o podría darse el caso de que el mapeo inverso para transformar al marco de Jordan no esté bien definido si $F(\phi) < 0$ [110]. Además, en el marco de Einstein el tensor de energía momento asociado a la materia no se conserva [48], mientras que en el marco de Jordan, las identidades de Bianchi garantiza que las ecuaciones de conservación se satisfagan, lo cual implica que el principio de equivalencia débil de Einstein se cumple, es decir, partículas de prueba seguirán las geodésicas de la métrica g_{ab} .

3.1.3. Descomposición 3+1 (en el marco de Jordan)

Para obtener las ecuaciones de evolución del sistema, debemos reescribir las ecuaciones (3.3) y (3.4) como un problema de Cauchy. Siguiendo la formulación 3+1 descrita en el capítulo 1, consideramos un espacio globalmente hiperbólico foliado por una familia de superficies del tipo espacial Σ_t parametrizada por una función temporal global t . Con estas consideraciones, la métrica del espacio tiempo g_{ab} es de la forma:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.17)$$

con α la función de lapso, β^i el vector de corrimiento y γ_{ij} la 3-métrica inducida sobre las superficies espaciales. Denotamos como n^a al vector normal a las superficies espacialoides Σ_t . La descomposición 3+1 se realiza con el operador de proyección $P^a_b := \delta^a_b + n^a n_b$. Utilizando este operador, la curvatura extrínseca K_{ab} de las hipersuperficies espaciales Σ_t está dada por:

$$K_{\alpha\beta} := -P^{\sigma}_{\alpha} \nabla_{\sigma} n_{\beta} = -(\nabla_{\alpha} n_{\beta} + n_{\alpha} n^{\sigma} \nabla_{\sigma} n_{\beta}). \quad (3.18)$$

Antes de escribir las ecuaciones de evolución para el campo escalar, es conveniente definir las siguientes cantidades

$$Q_i := D_i \phi = P_i^k \nabla_k \phi, \quad (3.19)$$

$$\Pi := n^{\alpha} \nabla_{\alpha} \phi = \frac{1}{\alpha} \frac{d\phi}{dt}, \quad (3.20)$$

con D_i la derivada covariante que es compatible con la 3-métrica γ_{ij} , y donde se ha definido el operador $d/dt := \partial_t - \mathcal{L}_{\beta}$, con \mathcal{L}_{β} la derivada de Lie a lo largo del vector de corrimiento. Con lo anterior, las ecuaciones de evolución para Q_i y Π son:

$$\frac{dQ_i}{dt} = D_i(\alpha\Pi), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} &= \alpha \left[\Pi K + Q^l D_l(\ln \alpha) + D_l Q^l \right] \\ &- \frac{\alpha}{2f(1 + 3f'^2/2f)} [2fV' - 4f'V - f'(1 + 3f'') (Q^2 - \Pi^2) + f'T_{\text{matt}}] \end{aligned} \quad (3.22)$$

En lo que respecta al contenido de materia, la descomposición ortogonal del tensor de energía momento es:

$$T^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + J^a n^b + n^a J^b + \rho n^a n^b, \quad (3.23)$$

obtenemos la densidad de energía $\rho := n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}$, la densidad de momento $J_\alpha := -P^\beta_\alpha n^\sigma T_{\beta\sigma}$, y el tensor de esfuerzos $S_{\alpha\beta} := P^\sigma_\alpha P^\nu_\beta T_{\sigma\nu}$. Al igual que en (3.5), cada componente del tensor de energía momento tiene tres contribuciones:

$$\rho = \frac{G_{\text{eff}}}{G_0} \left(\rho^f + \rho^\phi + \rho^{\text{matt}} \right), \quad (3.24)$$

$$J_i = \frac{G_{\text{eff}}}{G_0} \left(J_i^f + J_i^\phi + J_i^{\text{matt}} \right), \quad (3.25)$$

$$S_{ij} = \frac{G_{\text{eff}}}{G_0} \left(S_{ij}^f + S_{ij}^\phi + S_{ij}^{\text{matt}} \right). \quad (3.26)$$

Usando las ecuaciones (3.8) y (3.9), tenemos las expresiones explícitas de (3.24)-(3.26):

$$\rho = \frac{1}{8\pi G_0 f} \left[f' \left(D_k Q^k + K \Pi \right) + \frac{\Pi^2}{2} + \frac{Q^2}{2} (1 + 2f'') + V(\phi) + \rho_{\text{matt}} \right] \quad (3.27)$$

$$J_i = \frac{1}{8\pi G_0 f} \left[-f' \left(K_i^k Q_k + D_i \Pi \right) - \Pi Q_i (1 + f'') + J_i^{\text{matt}} \right], \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} S_{ij} = \frac{1}{8\pi G_0 f} \left\{ Q_i Q_j (1 + f'') + f' (D_i Q_j + \Pi K_{ij}) \right. \\ \left. - \frac{\gamma_{ij}}{(1 + 3f'^2/2f)} \left[\frac{1}{2} (Q^2 - \Pi^2) \left(1 + \frac{f'^2}{2f} + 2f'' \right) \right. \right. \\ \left. \left. + V \left(1 - f'^2/2f \right) + f' V' + \frac{f'^2}{2f} (S_{\text{matt}} - \rho_{\text{matt}}) \right] + S_{ij}^{\text{matt}} \right\}, \quad (3.29) \end{aligned}$$

con $Q^2 := Q^l Q_l$, y donde $K := \gamma^{ij} K_{ij}$ es la traza del tensor de curvatura extrínseca.

Las ecuaciones de evolución para las variables 3 + 1 que se obtienen de (3.3) son las ecuaciones ADM usuales, pero ahora hacemos explícita la dependencia en G_0 :

$$\frac{d\gamma_{ij}}{dt} = -2\alpha K_{ij}, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_{ij}}{dt} = -D_i D_j \alpha + \alpha \left[R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{il} K_j^l \right] \\ + 4\pi G_0 \alpha \left[\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij} \right], \quad (3.31) \end{aligned}$$

donde R_{ij} es el 3-Ricci tensor asociado con la métrica espacial γ_{ij} , y $S := \gamma^{ij} S_{ij}$. Al igual que las ecuaciones (3.30) y (3.31), las constricciones hamiltoniana y de momentos las escribimos con la dependencia de G_0 explícita:

$$H := \frac{1}{2} (R + K^2 - K_{ij} K^{ij}) - 8\pi G_0 \rho = 0, \quad (3.32)$$

$$M^i := D_l \left(K^{il} - \gamma^{il} K \right) - 8\pi G_0 J^i = 0. \quad (3.33)$$

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

Al haber definido la variable auxiliar Q_i , formalmente debemos agregar su condición de integrabilidad como una nueva restricción:

$$Q_i - D_i\phi = 0, \quad (3.34)$$

$$D_{[i}Q_{j]} = 0. \quad (3.35)$$

Las ecuaciones de evolución que se han descrito en el marco de Jordan, tienen segundas derivadas de ϕ en el tiempo y espacio por lo que podrían ser un problema en lo que se refiere a que el sistema esté bien planteado. Estas contribuciones extra son la razón de por qué el marco de Einstein es preferido para realizar evoluciones numéricas, sin embargo este problema ha sido investigado por M. Salgado en [111], mostrando que las ecuaciones de campo en el marco de Jordan forman un sistema hiperbólico fuerte si se eligen las condiciones de norma apropiadas.

3.2. Condiciones de norma para un acople no mínimo

Para cerrar el sistema de ecuaciones de evolución, debemos especificar el lapso α y el vector de corrimiento β^i . Siguiendo [109, 111], usaremos una foliación del tipo Bona-Masso para el lapso dada por:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha^2 F_{BM}(\alpha) \left[K - \frac{\Theta}{f_{BM}(\alpha)} \frac{f'}{f} \Pi \right], \quad (3.36)$$

con $F_{BM}(\alpha)$ una función arbitraria pero positiva de α , y Θ un parámetro arbitrario. El caso particular $F_{BM}(\alpha) = \Theta = 1$ corresponde a la foliación “pseudoarmónica”, y fue empleada para el análisis de hiperbolicidad en [110, 111]. La foliación Bona-Masso usual se recupera con $\Theta = 0$ [32], pero en [111] muestra que con dicha elección no se tiene una formulación fuertemente hiperbólica. Por lo anterior, tomaremos $\Theta = 1$.

La elección de la función de norma $F_{BM}(\alpha)$, podríamos simplemente tomar:

$$F_{BM}(\alpha) = 2/\alpha, \quad (3.37)$$

que es la foliación usual $1 + \log$. Sin embargo, como mostraremos más adelante, esta elección no siempre funciona para valores de acoplamiento grandes ξ de la función de acople (3.2). En estos casos usaremos una condición que evita los choques de norma, presentada en la ecuación (1.72):

$$F_{BM}(\alpha) = 1 + \kappa/\alpha^2, \quad (3.38)$$

con κ una constante arbitraria positiva. En las simulaciones usaremos $\kappa = 1$, de tal forma que si $\alpha \rightarrow 1$ en la región asintótica, entonces $F_{BM} \rightarrow 2$, recuperando la foliación $1 + \log$.

Por último, el vector de corrimiento β^i lo eligiéremos como cero, dado que únicamente nos centraremos en evoluciones subcríticas. Si este no fuera el caso, cuando se forma un agujero negro, es necesario un vector de corrimiento para contrarrestar el estiramiento de la malla.

3.3. Datos iniciales en simetría esférica

Como datos iniciales para el contenido de materia, tomaremos las siguientes formas para un pulso de campo escalar:

$$\phi_I(0, r) = \phi_0 e^{(-r^2/\sigma^2)}, \quad (3.39)$$

$$\phi_{II}(0, r) = \phi_0 r^2 e^{(-r^2/\sigma^2)}, \quad (3.40)$$

$$\phi_{III}(0, r) = \phi_0 \coth(s_0/\sigma) \left[\tanh\left(\frac{r+s_0}{\sigma}\right) - \tanh\left(\frac{r-s_0}{\sigma}\right) \right], \quad (3.41)$$

donde σ, s_0 son parámetros libres. En todas las simulaciones fijaremos $\sigma = 1$, $s_0 = 0.5$ y ϕ_0 será el parámetro que caracteriza a la familia de soluciones. Fijamos además que en todos los casos $\Pi = 0$. Representando un pulso simétrico en el tiempo.

Al tratarse de una variación del estudio original de Choptuik, en este caso esperamos observar un colapso de tipo II, por lo cual, como se describió en la sección 2.5 usaremos una transformación de coordenadas de r a \tilde{r} , de tal forma que una malla igualmente espaciada en \tilde{r} no lo será en r , teniendo la ventaja de tener mayor resolución cerca del origen $r = 0$.

Para encontrar datos iniciales en esta nueva malla, se pide que la métrica conforme sea conformemente plana en simetría esférica, esto implica que $A = B = 1$. Al transformar a la coordenada \tilde{r} tendremos:

$$\tilde{A} = (dr/d\tilde{r})^2, \quad \tilde{B} = (r/\tilde{r})^2. \quad (3.42)$$

Los pulsos dados por las expresiones (3.39), (3.40) y (3.41) son simétricos en el tiempo, por lo que la constricción de momentos (3.33) se satisface trivialmente. Por otro lado, la constricción hamiltoniana se transforma en una ecuación diferencial para $\psi(\tilde{r})$:

$$\partial_{\tilde{r}}\psi + C_0\partial_{\tilde{r}}\psi + C_1\psi = 0, \quad (3.43)$$

con $\chi = \partial_{\tilde{r}}\phi$, y los coeficientes C_0 y C_1 dados por:

$$C_0 = \left(\frac{2}{\tilde{r}} + \frac{1}{2f}f'\chi - \frac{1}{2}\frac{\partial_{\tilde{r}}\tilde{A}}{\tilde{A}} + \frac{\partial_{\tilde{r}}\tilde{B}}{\tilde{B}} \right), \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{1}{4\tilde{r}^2} \left(1 - \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \right) + \frac{1}{4\tilde{r}} \left(3\frac{\partial_{\tilde{r}}\tilde{B}}{\tilde{B}} - \frac{\partial_{\tilde{r}}\tilde{A}}{\tilde{A}} + 2\frac{f'}{f}\chi \right) - \\ & \frac{1}{8}\frac{\partial_{\tilde{r}}\tilde{A}}{\tilde{A}} \left(\frac{\partial_{\tilde{r}}\tilde{B}}{\tilde{B}} + \frac{f'}{f}\chi - \frac{1}{16\tilde{B}^2} (\partial_{\tilde{r}}\tilde{B}^2 - 4\tilde{B}\partial_{\tilde{r}}^2\tilde{B}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{f} \left(\frac{1}{8} (1 + 2f'')\chi^2 + \frac{1}{4}f' \left(\frac{\partial_{\tilde{r}}\tilde{B}}{\tilde{B}}\chi + \partial_{\tilde{r}}\chi \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Para resolver la ecuación (3.43) se agregan condiciones a la frontera. La primera se obtiene de pedir que la solución sea asintóticamente plana:

$$\psi(\tilde{r})|_{\tilde{r} \rightarrow \infty} = 1. \quad (3.46)$$

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

En la práctica, usamos una condición a la frontera del tipo Robin a un radio finito:

$$\partial_{\tilde{r}}\psi = \frac{1 - \psi}{\tilde{r}}, \quad (3.47)$$

esto refleja que cuando $\tilde{r} \rightarrow \infty$, entonces $\psi \rightarrow 1 + \mathcal{O}(r^{-1})$. En el origen, ψ debe ser una función par en \tilde{r} para regularidad:

$$\partial_{\tilde{r}}\psi(\tilde{r})|_{\tilde{r}=0} = 0. \quad (3.48)$$

Por último, se elige un lapso precolapsado de la forma $\alpha = \psi^{-2}$, y durante toda la evolución usaremos un vector de corrimiento nulo $\beta^i = 0$.

3.4. Resultados numéricos

Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando el método de líneas con un método de Runge-Kutta a cuarto orden en el tiempo, y cuarto orden con diferencias finitas centradas en el espacio. Los valores elegidos para el acople ξ en (3.2) se eligieron en una escala logarítmica, tomando los valores $\xi = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10$. Como resolución espacial para la malla computacional se tomó un espaciamiento de $\Delta r = 0.005$, con $N_r = 2800$ puntos en la dirección radial, y los parámetros usados para la coordenada radial (2.11) son $\delta = 5$ y $\beta = -1$. Para garantizar la estabilidad numérica, se usó un paso de tiempo adaptativo que satisface la condición de estabilidad de Courant-Friedrich-Levy [10]. Los fenómenos críticos son altamente sensibles al error numérico, por lo cual únicamente se reportará los resultados con la mayor resolución disponible. Como condiciones de frontera se emplean aquellas que preservan las constricciones, dado que reducen el error en un factor de 10^3 comparadas con las condiciones de frontera de Sommerfeld (radiativas). Adicionalmente, se usó disipación de Kreiss-Oliger de sexto orden compatible con el orden de discretización de las diferencias finitas, que disminuye el error debido al método de discretización. Esta disipación amortigua altas frecuencias que arruinan la evolución cerca de la ventana de formación de un agujero negro.

Para cada valor de la constante de acoplamiento ξ probamos con las familias de datos iniciales dadas por (3.39), (3.40) y (3.41). En todos los casos, la amplitud crítica se refinó a un valor aproximado de $\delta\phi \approx 10^{-12}$. Los valores que se reportan de los exponentes críticos (γ, Δ) es el promedio de los exponentes que se obtuvo para cada familia. La incertidumbre es la desviación más alta del valor medio para cada exponente. Las gráficas que se presentarán a continuación únicamente son para la familia I.

Como punto de comparación, analizamos primero el caso $\xi = 0$, que corresponde al campo escalar sin masa acoplado mínimamente a la gravedad, usando la condición $1 + \log$ para el lapso. En la figura 3.1 se muestra el máximo del escalar de Ricci 4D evaluado en el origen para evoluciones subcríticas. Al ajustar la función (2.22) encontramos los exponentes $\gamma \approx 0.374 \pm 0.001$ y $\Delta \approx 3.45 \pm 0.005$, que concuerdan con los reportados en [6, 59]. La figura 3.2 muestra el valor central del campo escalar en una evolución para un valor inicial de $\phi_0 = 0.303350064438822$, la cual tomaremos como la solución crítica.

El eje horizontal se calcula con el tiempo logarítmico T definido en (2.23). Usando esta solución, podemos utilizar el segundo método para calcular el exponente Δ usando las ecuaciones (2.25) y (2.26), obteniendo $\Delta = 3.42 \pm 0.003$, siendo consistente con los resultados previos.

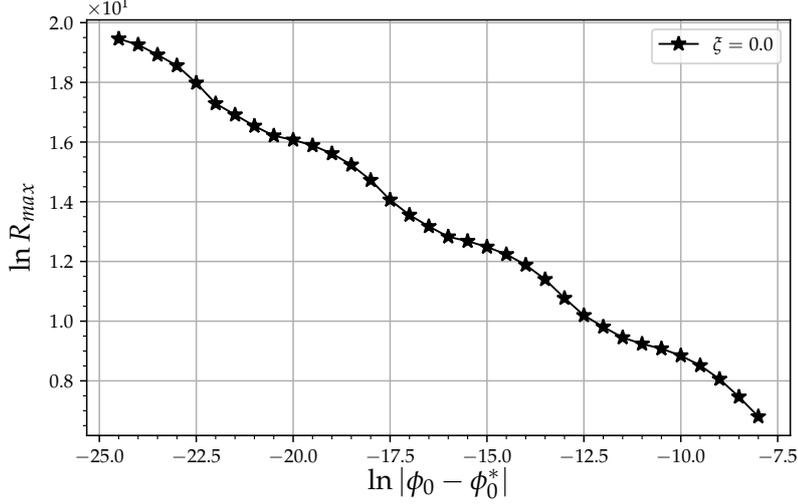


Figura 3.1: Escalamiento del máximo valor del escalar de Ricci evaluado en el origen para el caso de un campo escalar mínimamente acoplado $\xi = 0$.

Una vez verificado que podemos reproducir el caso base, proseguimos con los valores para el acople no mínimo $\xi = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ en la ecuación (3.2), usando la foliación $1 + \log$. Los resultados del valor máximo del escalar de Ricci evaluado en el origen para los valores antes mencionados de ξ se muestra en la figura 3.3, en el que se incluye el caso base $\xi = 0$ para su comparación. Nuevamente, ajustamos la función (2.22) para obtener los exponentes críticos (γ, Δ) , además usamos las ecuaciones (2.25) y (2.26) para obtener una segunda estimación de Δ . Los resultados para los distintos valores del acople ξ se reportan en la tabla 3.1. El comportamiento periódico en el tiempo logarítmico T se muestra en la figura 3.4, para todos estos casos el exponente crítico es $\gamma \approx 0.374$, con una incertidumbre menor al 0.3%. En estos tres casos, el valor del exponente Δ es muy similar entre ellos, siendo además que no se aprecia una gran diferencia en el comportamiento crítico comparado con el caso de acople mínimo.

Para valores del acople tal que $\xi \geq 1$ se necesita un procedimiento distinto al anterior. En el caso $\xi = 1$, al usar la foliación $1 + \log$, encontramos que al refinar la amplitud crítica, al tener una precisión aproximada de $\delta\phi \approx 10^{-3}$ la evolución y el código numérico falla. Por ejemplo, tomando como datos iniciales a la familia I (3.39), con una amplitud inicial de $\phi_0 = 0.2354$, notamos que el lapso, el coeficiente \tilde{A} de la métrica conforme y la traza de la curvatura extrínseca $\text{tr}K$, todas desarrollan grandes gradientes en $\tilde{r} \approx 2.55$ que causan que el código falle a un tiempo $t \approx 3.53$. Además, este

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

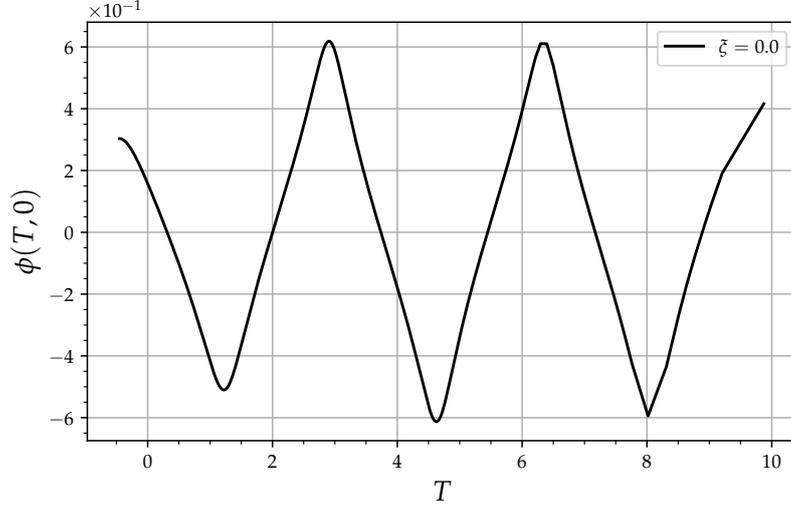


Figura 3.2: Valor central del campo escalar mínimamente acoplado contra el tiempo logarítmico T , mostrando su comportamiento periódico en T .

ξ	γ	Δ (2.22)	Δ (2.26)
0.001	0.374 ± 0.001	3.441 ± 0.001	3.446 ± 0.004
0.01	0.374 ± 0.001	3.442 ± 0.007	3.446 ± 0.002
0.1	0.372 ± 0.004	3.442 ± 0.003	3.445 ± 0.005

Tabla 3.1: Exponentes críticos γ y Δ , siendo el segundo obtenido por dos métodos distintos. Los valores de acople de la ecuación (3.2) usados son $\xi = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$. En los tres casos el exponente crítico es el mismo considerando la incertidumbre.

gradiente es aún más grande al aumentar la resolución numérica. Este hecho se puede apreciar en la figura 3.5, donde se grafican las funciones anteriores en tres resoluciones distintas $\Delta\tilde{r} = 0.02, 0.01, 0.005$. Este comportamiento es similar al fenómeno conocido como “choques de norma” descrito en [7, 8]. Este problema también ha sido reportado por Hilditch *et al.* en [71] al evolucionar ondas de Brill en fenómenos críticos [36, 52].

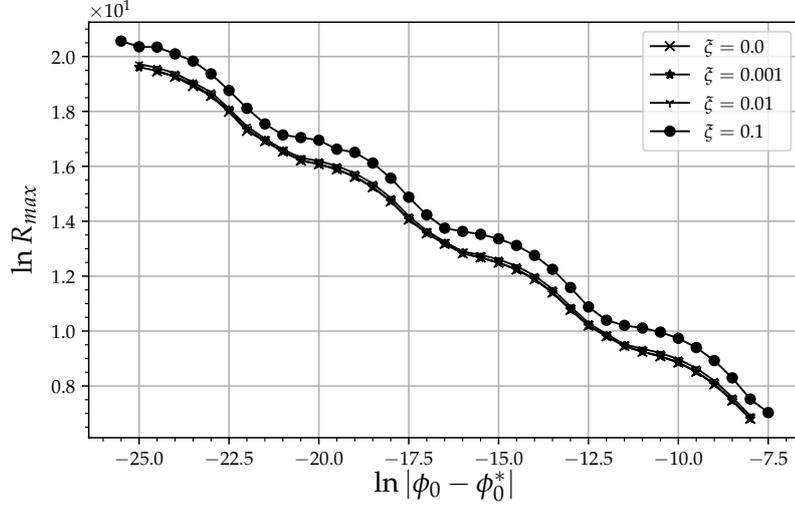


Figura 3.3: Similar a la figura 3.1, pero ahora para distintos valores del parámetro de acople $\xi = 0, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$. Todas las curvas muestran una pendiente y periodos similares.

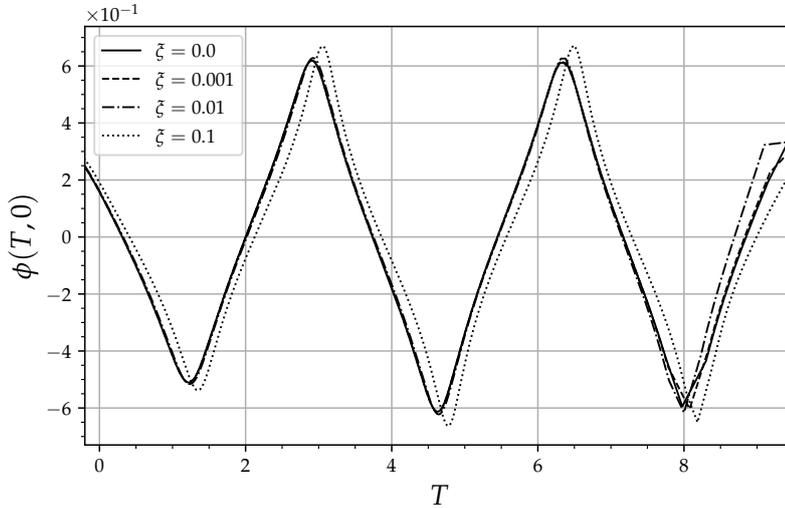


Figura 3.4: Valor central del campo escalar contra el tiempo logarítmico T para $\xi = 0, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$, mostrando el comportamiento periódico del campo escalar.

Dado que los choques de norma se deben a la elección del lapso, cambiamos la elección de norma a una que los evite tomando $f_{BM}(\alpha) = 1 + 1/\alpha^2$, que es descrita en la ecuación (3.38) con $\kappa = 1$. Comparamos ambas condiciones de lapso tomando el caso

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

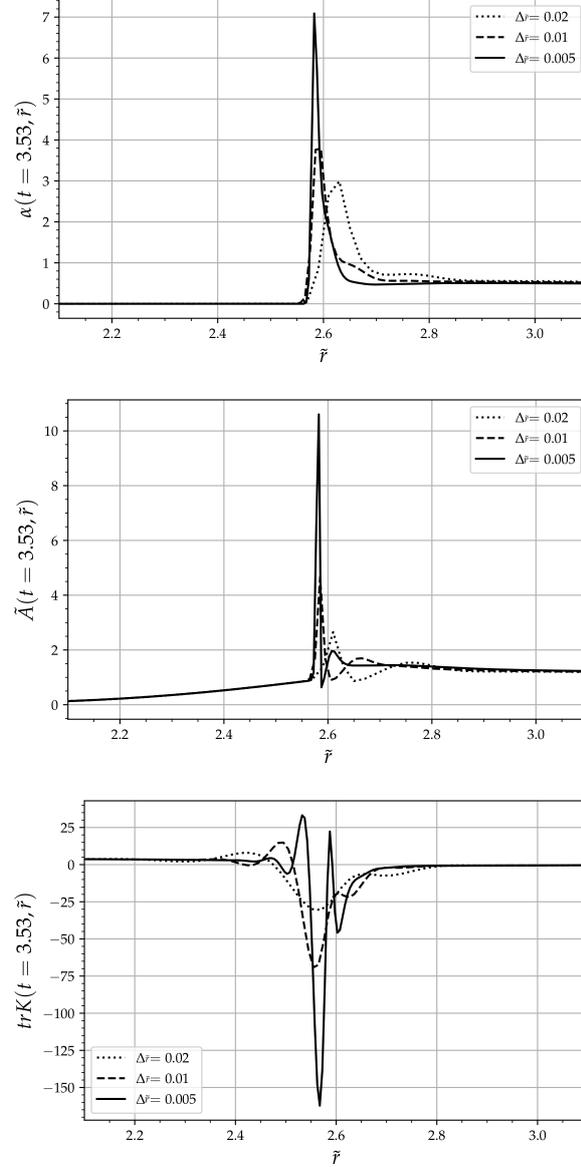


Figura 3.5: Capturas de la función lapso α , el coeficiente radial de la métrica conforme \tilde{A} , y la traza de la curvatura extrínseca $\text{tr}K$, en un tiempo coordenado $t \approx 3.53$, para $\xi = 1$ con datos iniciales de la familia I y con una amplitud inicial de $\phi_0 = 0.2354$. Las curvas se muestran a tres resoluciones distintas usando la foliación 1+log. En las tres figuras se forman grandes gradientes aproximadamente en $\tilde{r} \approx 2.55$ que causan que falle la simulación. Contrario a lo que se espera, este gradiente es más pronunciado al aumentar la resolución.

base $\xi = 0$. Al usar el lapso que evita choques se obtienen los exponentes $\gamma = 0.374 \pm 0.003$ y $\Delta = 3.44 \pm 0.005$. La figura 3.6 muestra el comportamiento crítico para ambas elecciones del lapso para la familia I. La gráfica superior muestra la comparación del escalamiento para ambas elecciones del lapso. La gráfica inferior muestra la diferencia absoluta entre ellos. A pesar de que se observan diferencias pronunciadas, la diferencia absoluta es alrededor de 6×10^{-2} , resultando en una diferencia porcentual menor al 0.3%. Mayormente estos picos se obtienen en las soluciones que se encuentran más cerca de la solución crítica, por lo que corresponden a valores grandes de la curvatura y posiblemente se deben a la sensibilidad numérica de los fenómenos críticos. A pesar de ello, usando ambas condiciones del lapso se obtienen resultados muy similares.

Al cambiar al lapso que evita choques, se evoluciona correctamente el caso previo con $\xi = 1$ y $\phi_0 = 0.2354$, formando un agujero negro a $t \approx 5.5$. Una desventaja de esta elección del lapso y que es descrita en [8], es que el lapso puede tomar valores negativos, como se observa en la figura 3.7, en el que se grafica el valor central del lapso como función del tiempo coordinado. Sin embargo, este hecho no parece afectar la evolución completa, siendo que los valores negativos del lapso permiten que las hipersuperficies del espaciotiempo regresen de lo que sería una posible singularidad coordinada y posteriormente continúen la evolución hacia adelante en el tiempo.

Con la elección del lapso que evita choques, se pueden evolucionar correctamente los valores de acoplamiento $\xi = 1, 10$ y obtener su comportamiento crítico. El escalamiento del escalar de Ricci para ambos casos se muestran en la figura 3.8. Si sustraemos el ajuste lineal, notamos que ahora las oscilaciones tienen más de una frecuencia sobrepuesta como se aprecia en la figura 3.9. Si aplicamos una Transformada de Fourier Rápida (TFR) a los datos de la figura 3.9 se confirma nuestra suposición. El resultado de la transformación se observa en la figura 3.10, el cual muestra una frecuencia fundamental ω y al menos dos armónicos.

De la figura 3.10 observamos que los frecuencias más importantes del espectro son ω y 2ω . Por este motivo, en lugar de ajustar únicamente el modo fundamental como en la función (2.22), agregamos el armónico 2ω :

$$\ln R_{max} = C - 2\gamma \ln |\phi_0^* - \phi_0| + a_0 \sin(\omega \ln |\phi_0^* - \phi_0| + \varphi_0) + a_1 \sin(2\omega \ln |\phi_0^* - \phi_0| + \varphi_1). \quad (3.49)$$

ξ	γ	Δ (3.49)	Δ (2.26)
1	0.368 ± 0.001	3.386 ± 0.017	3.450 ± 0.080
10	0.365 ± 0.006	3.109 ± 0.007	2.981 ± 0.193

Tabla 3.2: Exponentes críticos γ y Δ (obtenidos por dos diferentes métodos), para valores de acople (3.2) $\xi = 1, 10$.

Los resultados de este ajuste se reportan en la tabla 3.2 para los casos $\xi = 1, 10$. La incertidumbre en el exponente γ es alrededor del 2%, mientras que el exponente crítico

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

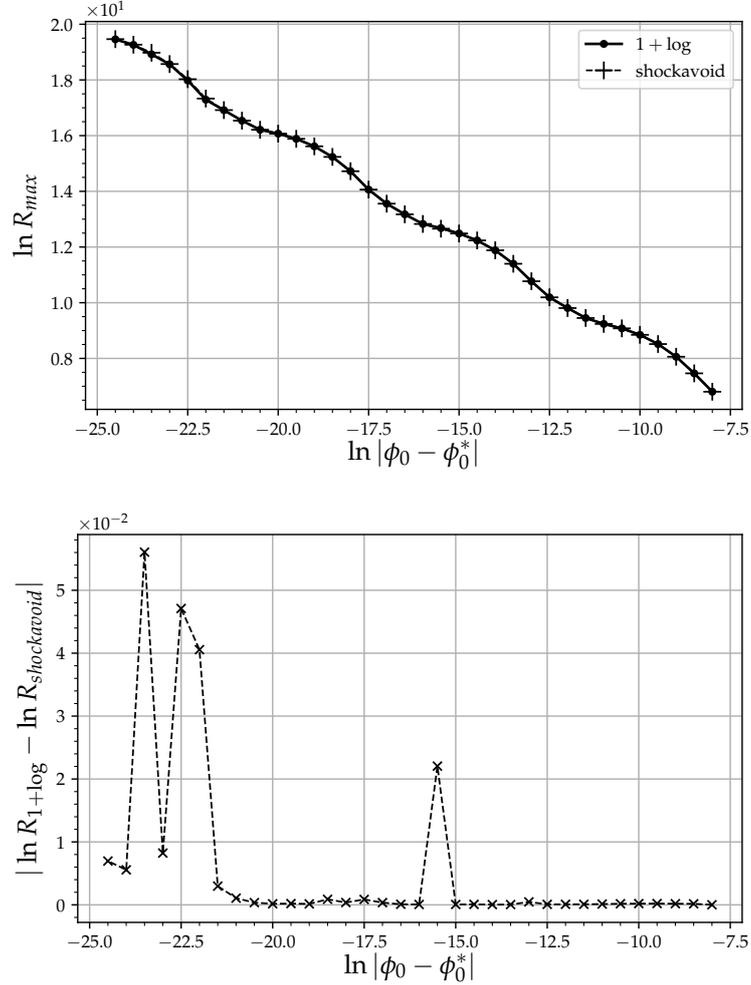


Figura 3.6: Figura superior: Escalamiento del escalar de Ricci Ricci con parámetro de acople $\xi = 0$, usando ambas condiciones del lapso $1 + \log$ y la que evita choques de norma. Figura inferior: Diferencia absoluta entre ambos escalamientos.

Δ no pudo ser calculado con la misma precisión pues tiene un error de alrededor 6%. La figura 3.11 muestra el comportamiento periódico del valor central de ϕ en el tiempo logarítmico T para estos dos casos.

Al observar las tablas 3.1 y 3.2, notamos que los exponentes críticos disminuyen y además mientras mayor sea el valor del acople ξ , los armónicos del modo fundamental tienen mayor relevancia en el escalamiento.

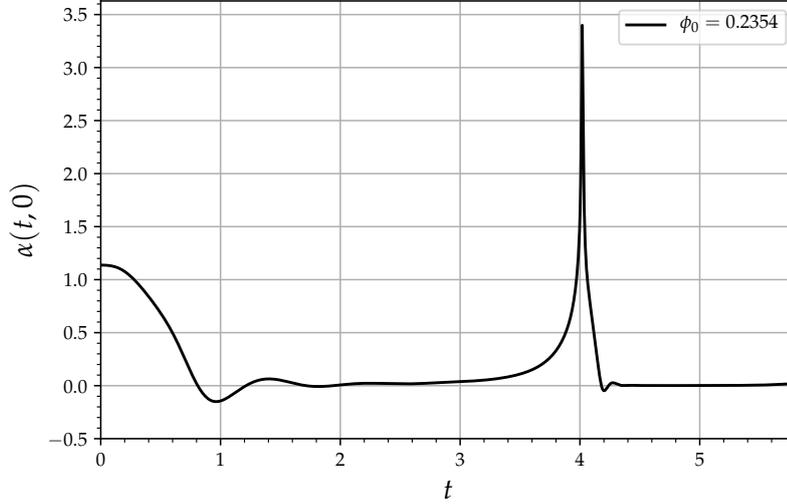


Figura 3.7: Función del lapso α evaluada en el origen usando la condición que evita choques para el caso $\xi = 1$ y $\phi_0 = 0.2354$. Esta condición para el lapso puede tomar valores negativos, tal es el caso en $t \approx 0.8$, posterior a ello regresa a tomar valores positivos sin tener problema para continuar la evolución.

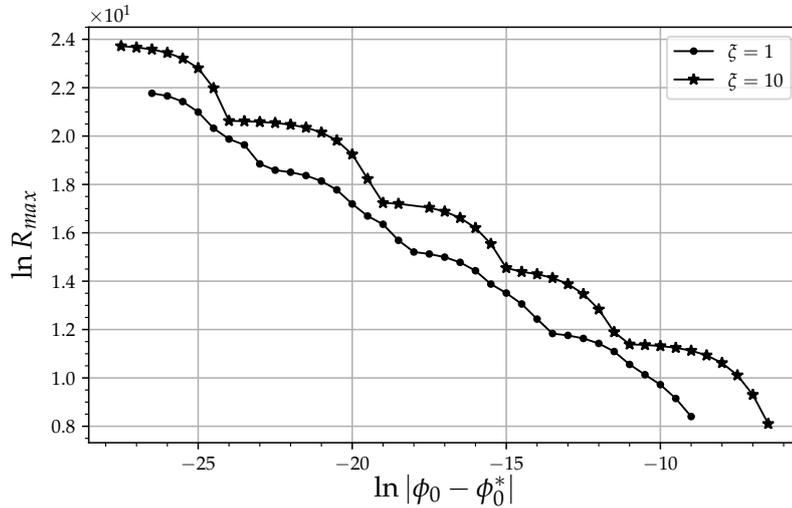


Figura 3.8: Escalamiento del escalar de Ricci para los casos $\xi = 1, 10$.

Como último, es útil mencionar que el parámetro efectivo de Brans-Dicke dado por $\omega_{\text{BD}} = f/(f')|_{\phi_\infty}$ con ϕ_∞ el valor asintótico de ϕ , toma la forma explícita

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

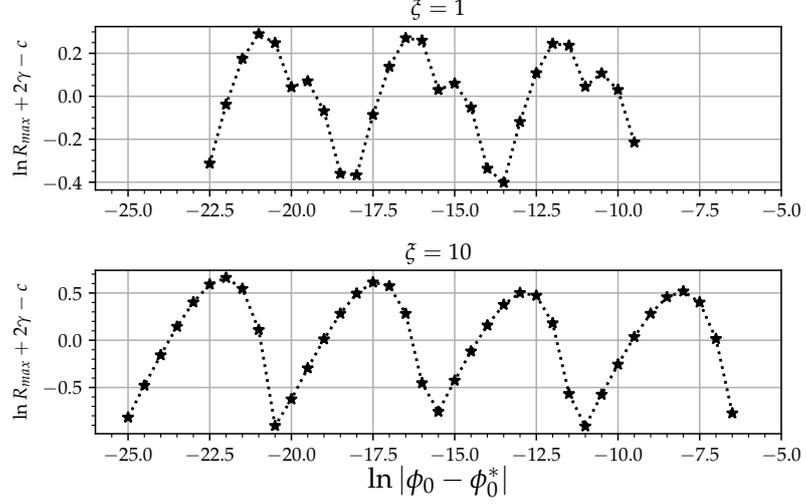


Figura 3.9: Comportamiento periódico de las curvas en la figura 3.8, que se obtienen de restar un ajuste lineal. La gráfica de arriba muestra el caso $\xi = 1$, y la de abajo el caso $\xi = 10$.

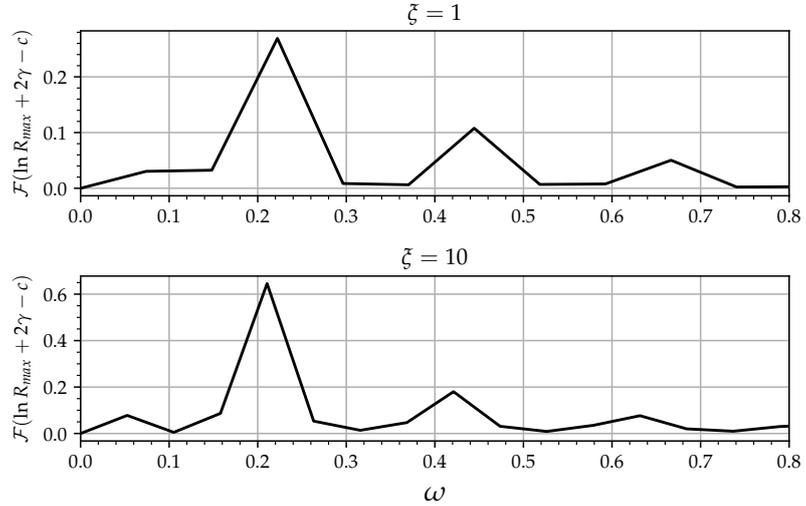


Figura 3.10: Transformada de Fourier para los datos mostrados en la figura 3.8. Se aprecia una frecuencia fundamental y al menos los dos primeros armónicos.

$\omega_{BD} = (1 + 8\pi\xi\phi_\infty^2) / [32\pi(\xi\phi_\infty)^2]$. En las simulaciones realizadas, el valor asintótico es tal que $\phi_\infty \rightarrow 0$. Con un valor finito de ξ , se tiene $\omega_{BD} \rightarrow \infty$, que sobrepasa las cons-

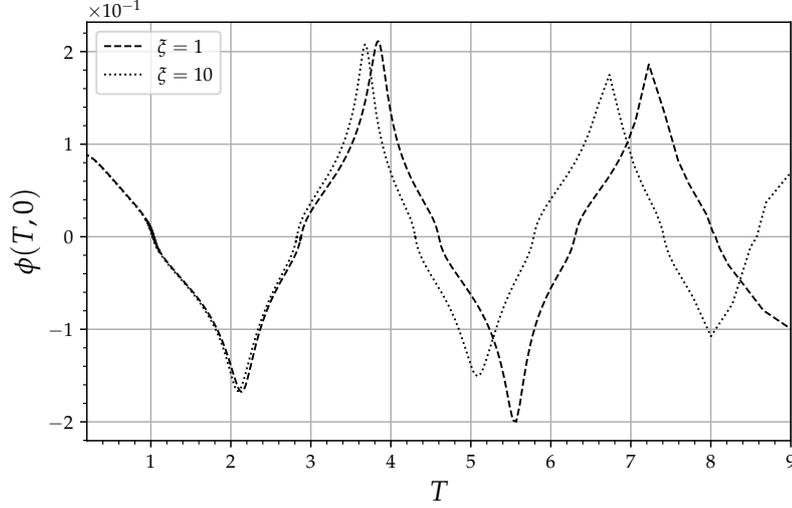


Figura 3.11: Valor central del campo escalar contra el tiempo logarítmico T para $\xi = 1, 10$, mostrando el comportamiento periódico del campo escalar.

tricciones impuestas por la misión Cassini $|\gamma - 1| \lesssim 2.3 \times 10^{-5}$ con γ el parámetro post-newtoniano [29], que en términos de ω_{BD} se expresa como $\gamma = (\omega_{BD} + 1) / (\omega_{BD} + 2)$, teniendo como cota para $\omega_{BD} \gtrsim 4.3 \times 10^4$. Por lo que el fenómeno crítico se presenta independiente de las constricciones impuestas sobre ω_{BD} .

3.5. Análisis en el marco de Einstein

Usando las ecuaciones (3.12) y (3.13) podemos repetir el análisis del comportamiento crítico en el marco de Einstein, pero ahora en las cantidades $\tilde{\phi}$ y \tilde{R} . En el marco de Einstein, el campo escalar (3.13) con el acople (3.2) puede ser aproximado para $\xi \ll 1$:

$$\tilde{\phi} = 2\sqrt{\pi}\phi - \frac{8}{3} \left(G_0 \pi^{3/2} \phi^3 \right) \xi + \mathcal{O}(\xi^{3/2}). \quad (3.50)$$

Dado que el valor máximo de $|\phi|$ es del orden de 10^{-1} , las funciones $\tilde{\phi}$ y ϕ a primer orden son proporcionales entre sí. De la ecuación (3.12), el tiempo propio en el marco de Einstein τ_E para $\xi \ll 1$ a segundo orden en ξ será aproximadamente el tiempo propio en el marco de Jordan τ_J . Esto implica que los ceros de la función $\tilde{\phi}$ ocurrirán aproximadamente en el mismo tiempo propio en ambos marcos, por lo que se espera que los exponentes críticos (γ, Δ) sean los mismos en ambos marcos a segundo orden en ξ^2 para $\xi \ll 1$. El exponente Δ puede ser obtenido analizando el comportamiento periódico del escalar de Ricci \tilde{R} en el marco de Einstein, el cual puede ser calculado mediante:

$$\tilde{R} = \frac{1}{8\pi G_0 f} \left[R \left(1 + \frac{3}{2} \frac{f'^2}{f} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{2ff'' - f'^2}{f^2} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right]. \quad (3.51)$$

La figura 3.12 muestra el escalamiento del valor máximo de \tilde{R}_{max} . A simple vista se aprecia que los exponentes críticos son muy similares entre sí. Al sustraer un ajuste lineal para observar el comportamiento periódico se obtiene la figura 3.13.

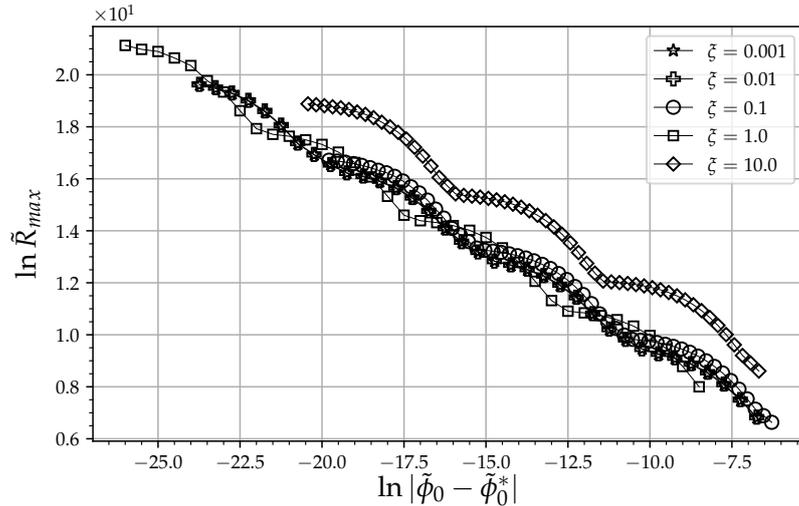


Figura 3.12: Escalamiento del valor máximo del escalar de Ricci en el marco de Einstein para distintos valores del acoplamiento ξ .

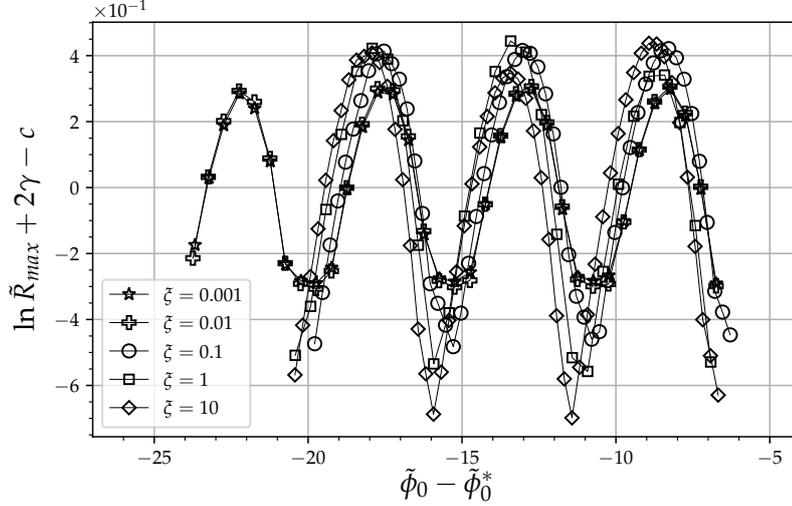


Figura 3.13: Comportamiento periódico de las curvas mostradas en 3.12, obtenidas al restar la curva menos un ajuste lineal para todos los valores de acoplamiento.

Después de aplicar una TFR a las curvas mostradas en la figura 3.13, encontramos que para los casos $\xi = 0.001, 0.01$ se obtiene una única frecuencia de oscilación que caracteriza el comportamiento periódico, por lo que el escalamiento del escalar de Ricci se puede ajustar con la función (2.22). Si $\xi \geq 0.1$, se obtiene una segunda frecuencia que es el doble de la frecuencia fundamental como se muestra en la figura 3.14, en estos casos se prefiere ajustar la función (3.49). Aún cuando en ambos marcos de Jordan y Einstein existe una segunda frecuencia, la amplitud del segundo modo es considerablemente menor en el marco de Einstein. En este marco, para el caso $\xi = 0.1$ existe una contribución del segundo armónico que no estaba presente en el marco de Jordan.

3. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO

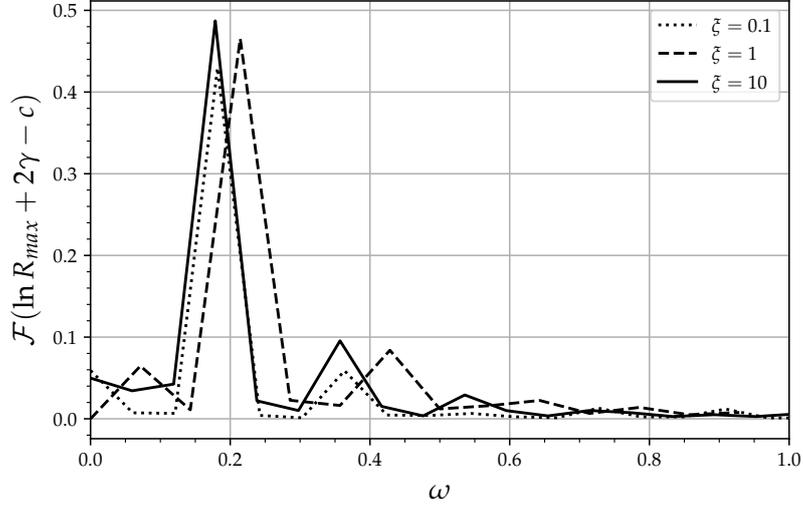


Figura 3.14: Transformada de Fourier para los datos mostrados en la figura 3.13 for $\xi = 0.1, 1, 10$. Se aprecia una frecuencia dominante y un armónico del doble de la frecuencia fundamental.

Los resultados para γ y Δ son presentados en la tabla 3.3. Como se realizó en el marco de Jordan, usamos (2.26) para obtener una segunda estimación del periodo Δ . Cómo era de esperarse, para $\xi = 0.001, 0.01$ γ y Δ son muy similares a los obtenidos en el marco de Jordan.

ξ	γ	Δ (2.22)	Δ (2.26)
0.001	0.374 ± 0.002	3.443 ± 0.002	3.444 ± 0.006
0.01	0.374 ± 0.003	3.441 ± 0.005	3.445 ± 0.003
0.1	0.374 ± 0.003	3.448 ± 0.003	3.445 ± 0.002
1	0.371 ± 0.003	3.425 ± 0.005	3.420 ± 0.008
10	0.369 ± 0.002	3.412 ± 0.017	3.271 ± 0.132

Tabla 3.3: Similar a las tablas 3.1 y 3.2, pero ahora γ y Δ calculados en el marco de Einstein.

3.6. Conclusiones

Se realizaron simulaciones del colapso crítico gravitacional para un campo escalar no mínimamente acoplado en el formalismo BSSN en simetría esférica. Dados los requerimientos de alta precisión para evolucionar este fenómeno, se utilizó una transformación de coordenadas, de tal forma que en el nuevo sistema se aumentó la resolución en un factor de 10^3 comparado con la estructura original del código. En todos los casos la amplitud crítica se pudo refinar hasta una precisión de $\delta\phi \approx 10^{-12}$.

Encontramos que para valores del acople $\xi < 1$, los resultados de los exponentes γ y Δ no muestran diferencias significativas del campo escalar sin masa acoplado mínimamente. Si el acople toma valores $\xi \geq 1$ se encontró que la elección del lapso $1 + \log$ desarrolla grandes gradientes en el lapso, el coeficiente de la métrica conforme \tilde{A} y la traza de la curvatura extrínseca $\text{tr}K$, el cual causa el fallo del código y limita refinar la amplitud crítica a una precisión de $\delta\phi \approx 10^{-3}$. Un análisis posterior, muestra que estos gradientes son más pronunciados al aumentar la resolución numérica, siendo este comportamiento similar al que observó D. Hilditch *et al.* al estudiar ondas de Brill [71]. Tomando esto en cuenta, para valores grandes del parámetro de acople se utilizó un lapso que evita choques de norma, el cual es presentado en [7, 8].

Utilizando esta condición de norma, se puede evolucionar exitosamente los casos $\xi > 1$ y refinar la amplitud crítica. En estos casos, se encuentra que los exponentes críticos disminuyen al aumentar ξ . Además, el comportamiento periódico del escalamiento del escalar de Ricci, ya no puede ser aproximado por un único modo de oscilación, por lo que después de aplicar una transformada de Fourier, se encontró que el segundo armónico de la frecuencia fundamental también es relevante en la periodicidad del escalamiento.

Colapso crítico gravitacional de un campo escalar complejo masivo

En este capítulo se describirá el colapso crítico de un campo escalar complejo masivo. Como se mencionó anteriormente, Hawley y Choptuik en [68] investigaron el colapso de este tipo de materia al perturbar una estrella de bosones en la rama estable con un pulso de campo escalar real sin masa, obteniendo que la solución crítica corresponde a una estrella de bosones en la rama inestable. Siguiendo este estudio se utilizará un campo escalar complejo masivo, pero sin que inicialmente tenga una estructura estacionaria. Se conjetura que al tener un parámetro de masa, este modelo presente los dos tipos de colapso, por lo que se procederá a explorar ambos casos. Se espera que de forma similar al estudio del colapso crítico del campo escalar real masivo [35], se obtendrá colapso de tipo I cuando el producto de la masa del campo escalar m por la extensión radial del pulso inicial λ si $\lambda m \ll 1$, por otro lado, si $\lambda m \gg 1$ se obtiene colapso del tipo II.

Los resultados que se presentarán han sido publicados en Physical Review D [76] en colaboración con Miguel Alcubierre.

4.1. Ecuaciones de evolución

El modelo de materia que se usará es un campo escalar complejo masivo Φ acoplado mínimamente a la gravedad, el cual puede ser descrito por la acción (en unidades geométricas $G = c = 1$):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2} (\nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi^* + m^2 \Phi \Phi^*) \right], \quad (4.1)$$

donde R es el escalar de Ricci del espaciotiempo y m es el parámetro de masa del campo escalar. Al variar la acción respecto a la métrica y el campo escalar se obtienen

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

las ecuaciones de Einstein y la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (4.2)$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi - m^2 \Phi = 0 , \quad (4.3)$$

donde el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ para el campo escalar está dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [(\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi^* + \nabla_\nu \Phi \nabla_\mu \Phi^*) - g_{\mu\nu} (\nabla^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi^* + m^2 \Phi \Phi^*)] . \quad (4.4)$$

Simplificaremos este sistema considerando únicamente simetría esférica. Con esta simplificación se usará el elemento de línea dado por la ecuación (1.58) con un vector de corrimiento idénticamente cero $\beta^i = 0$.

Para reescribir la ecuación de Klein-Gordon como un sistema de primer orden, definimos las siguientes variables auxiliares

$$\Pi := \frac{\partial_t \Phi}{\alpha} , \quad \chi := \partial_r \Phi . \quad (4.5)$$

Con estas definiciones, la ecuación de Klein-Gordon (4.3) se reescribe como:

$$\partial_t \Phi = \alpha \Pi , \quad (4.6)$$

$$\partial_t \chi = \alpha \partial_r \Pi + \Pi \partial_r \alpha , \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi &= \frac{\alpha}{A\psi^4} \left[\partial_r \chi + \chi \left(\frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + 2\partial_r \ln \psi \right) \right] + \frac{\chi \partial_r \alpha}{A\psi^4} \\ &\quad + \alpha K \Pi - \alpha m^2 \Phi , \end{aligned} \quad (4.8)$$

con $K := K_m^m$ la traza de la curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ_t .

Por último, utilizando la descomposición ortogonal del tensor de energía momento:

$$T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + J^\mu n^\nu + n^\mu J^\nu + \rho n^\mu n^\nu , \quad (4.9)$$

se obtiene la densidad de energía $\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$, la densidad de momento $J_\mu := -P^\nu_\mu n^\lambda T_{\nu\lambda}$, y el tensor de estres $S_{\mu\nu} := P^\sigma_\mu P^\lambda_\nu T_{\sigma\lambda}$. En particular tenemos:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(|\Pi|^2 + \frac{|\chi|^2}{A\psi^4} + m^2 |\Phi|^2 \right) , \quad (4.10)$$

$$J_r = -\frac{1}{2} \left(\chi \Pi^* + \Pi \chi^* \right) , \quad (4.11)$$

$$S_r^r = \frac{1}{2} \left(|\Pi|^2 + \frac{|\chi|^2}{A\psi^4} - m^2 |\Phi|^2 \right) , \quad (4.12)$$

$$S_\theta^\theta = \frac{1}{2} \left(|\Pi|^2 - \frac{|\chi|^2}{A\psi^4} - m^2 |\Phi|^2 \right) . \quad (4.13)$$

4.2. Datos iniciales

A diferencia del estudio original realizado por Hawley y Choptuik en el que usaban una estrella de bosones estable perturbada [68], se usará un pulso de campo escalar complejo con un perfil gaussiano de la forma:

$$\Phi(t = 0, r) = \Phi_0 e^{-r^2/\sigma^2}, \quad (4.14)$$

$$\Pi(t = 0, r) = i\kappa\Phi_0 e^{-r^2/\sigma^2}, \quad (4.15)$$

donde Φ_0, σ, κ son parámetros reales. Como extensión radial del pulso λ se tomará como $\lambda = \sigma$. El parámetro Φ_0 será la amplitud del pulso inicial. Estas condiciones iniciales no son del todo arbitrarias, a $t = 0$ son similares al ansatz para las estrellas de bosones (2.10), con κ tomando un rol similar al de la frecuencia de oscilación ω de la estrella. De momento κ es un parámetro libre, pero por simplicidad se elegirá igual al valor de la masa del campo $\kappa = m$.

Para encontrar datos iniciales se asume una métrica conformemente plana, de tal forma que $A = B = 1$ en (1.58) y luego se proceden a resolver las constricciones hamiltoniana (1.53) y de momentos (1.54). Notemos que a pesar de que los datos iniciales no representan un instante de simetría temporal, la densidad de momentos J_r es cero, por lo que la constricción de momentos se cumple trivialmente. A $t = 0$ la constricción hamiltoniana se convierte en una ecuación diferencial no lineal de segundo orden para el factor conforme ψ :

$$\partial_r^2 \psi + \frac{2}{r} \partial_r \psi + 2\pi\psi^5 \rho = 0, \quad (4.16)$$

con la densidad de energía dada por:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[|\Pi|^2 + \frac{|\partial_r \Phi|^2}{\psi^4} + m^2 |\Phi|^2 \right]. \quad (4.17)$$

En caso de usar la coordenada \tilde{r} , la ecuación (4.16) toma la forma:

$$\partial_{\tilde{r}}^2 \psi + \left[\frac{2}{\tilde{r}} - \frac{1}{2} \frac{\partial_{\tilde{r}} \tilde{A}}{\tilde{A}} + \frac{\partial_{\tilde{r}} \tilde{B}}{\tilde{B}} \right] \partial_{\tilde{r}} \psi + 2\pi\psi^5 \rho = 0, \quad (4.18)$$

La ecuación (4.16) o (4.18) se resuelven utilizando un método iterativo de Newton. La condición de frontera debe ser tal que la métrica (1.58) sea asintóticamente plana:

$$\psi(r)|_{r \rightarrow \infty} = 1. \quad (4.19)$$

En la práctica, esta condición se implementa a un radio infinito, transformándose en una condición de frontera del tipo Robin a una distancia finita dada por la frontera de la malla:

$$\partial_r \psi = \frac{1 - \psi}{r}. \quad (4.20)$$

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

Esta condición representa que cuando $r \rightarrow \infty$ se tiene $\psi \rightarrow 1 + \mathcal{O}(r^{-1})$. En el origen, por condiciones de regularidad, la función debe ser una función par de r :

$$\partial_r \psi|_{r=0} = 0. \quad (4.21)$$

Las condiciones de frontera anterior aplican también para la ecuación (4.18), simplemente se reemplaza la coordenada r por \tilde{r}

4.3. Caracterizando la solución crítica de tipo I

Como se explicó en la sección 2.7, el tiempo de vida τ de la solución se tomará como el tiempo propio de un observador central en el que se detecta un horizonte por primera vez y con ello calcular el exponente crítico γ de la relación de escalamiento.

Si bien, los datos iniciales no corresponden a una estrella de bosones, se espera que la solución crítica lo sea, por lo cual, durante la evolución parte de la materia inicial se radiará y el contenido restante formará una estrella de bosones en la rama inestable.

Las estrellas de bosones son objetos extendidos, es decir que no tienen una frontera bien definida. Se puede describir su “tamaño” utilizando el radio R_{95} o R_{99} , que son los radios en el cual se tiene el 95% o 99% de la masa total M_T respectivamente. Además, como el sistema es dinámico, para saber si un objeto compacto se ha formado utilizaremos la cantidad llamada compacidad:

$$C(t, r) = \frac{M(t, r)}{R(t, r)}, \quad (4.22)$$

donde $R(t, r)$ es el radio de área de una esfera a tiempo t y radio r . En la métrica (1.58) está dado por:

$$R(t, r) = r\psi(t, r)^2 \sqrt{B(t, r)}. \quad (4.23)$$

A cada paso de tiempo analizamos el máximo global de la ecuación (4.22). Se espera que si una estrella de bosones se ha formado, exista un valor medio máximo y algunas oscilaciones alrededor de ella a forma de perturbaciones de la estrella. Además, con su comportamiento podemos dar también un estimado del tiempo de vida.

La masa $M(r, t)$ usada en la ecuación (4.22) es calculada utilizando la masa de Kodama [66, 75, 79, 103], la cual es una energía conservada casi local en un espaciotiempo esféricamente simétrico. Para definir la masa de Kodama se define primero el vector de Kodama:

$$K^A = \epsilon^{AB} \partial_B R, \quad (4.24)$$

donde R es el radio de área a t y r constantes, ϵ^{AB} es el tensor totalmente antisimétrico en la variedad de dos dimensiones con coordenadas (t, r) , los índices (A, B) toman los valores $(0, 1)$. El vector K^A puede ser extendido naturalmente a la variedad cuatro-dimensional haciendo cero las componentes restantes. Luego, se define el vector S^μ :

$$S^\mu = T^{\mu\nu} K_\nu, \quad (4.25)$$

con $T^{\mu\nu}$ el tensor de energía momento. Es posible demostrar que S^μ satisface una ecuación de conservación:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} S^\mu) = 0, \quad (4.26)$$

En una esfera de radio r a t constante, podemos definir una masa conservada, llamada masa de Kodama:

$$M(t, r) := \int_{\text{esfera}} S^t \alpha \sqrt{\gamma} dx^3, \quad (4.27)$$

donde γ es el determinante de la 3-métrica. Reemplazando el determinante de la métrica se tiene

$$M(t, r) := 4\pi \int_0^r \alpha S^t r^2 \psi^6 A^{1/2} B dr, \quad (4.28)$$

En la ecuación (4.28) es necesario un radio de integración, y dado que durante la dinámica una fracción de materia se radia, esta no debería ser considerada como parte de la estrella de bosones formada y por lo tanto no podemos integrar sobre todo el dominio. En su lugar estimamos el radio de integración sabiendo que una estrella de bosones tiene una amplitud central del campo Φ bien definida como función de su radio R_{95} o R_{99} . Tomando la solución más cercana a la solución crítica, calculamos su valor medio y construimos la estrella de bosones correspondiente y tomamos el radio de integración como el R_{99} de dicha estrella.

4.4. Resultados numéricos

Las simulaciones que se presentarán fueron realizadas con el método de líneas para la evolución en el tiempo utilizando un método de Runge-Kutta de cuarto orden, en el espacio se utilizó el método de diferencias finitas centradas a cuarto orden. Por simplicidad se fijó la masa del campo escalar a $m = 1$, además en la familia de datos iniciales (4.14)-(4.15) se eligió $\kappa = m = 1$ para todos los casos. La única diferencia entre las familias de datos es el ancho del pulso σ la cual será reportada. El parámetro que se ajustará hasta el régimen crítico será Φ_0 .

Al igual que en el caso del campo no mínimamente acoplado, usaremos condiciones de frontera que preservan las constricciones, junto con disipación de Kreiss-Oliger a sexto orden que es compatible con el orden de discretización usado.

4.4.1. Resultados para el colapso de tipo II

El colapso de tipo II es esperado cuando $\sigma m \ll 1$, por lo cual, nos restringimos a los casos tal que $\sigma \leq 0.5$ y se procederá a encontrar la amplitud crítica Φ_0^* usando el método de bisección. Como se ha explicado anteriormente, este tipo de fenómeno requiere alta resolución numérica en el origen, por lo que en lugar de usar varios niveles de refinamiento, se usará la transformación de coordenadas descrita en la sección 2.5. En las simulaciones que se presentarán se usó $\delta = 5$ y $\beta = -1$, con un espaciado

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

de la malla $\Delta\tilde{r} = 0.005$, y $N_r = 2500$ puntos en la dirección radial. En la evolución se usó un tiempo adaptativo tal que satisfaga la condición de estabilidad de Courant–Friedrichs–Levy. En todos los casos se pudo encontrar la amplitud crítica con una precisión aproximada de $\delta\Phi \approx 10^{-12}$.

La figura 4.1 muestra el valor máximo del escalar de Ricci 4D evaluado en el origen para el caso $\sigma = 0.5$, apreciando el comportamiento típico de un fenómeno crítico del tipo II. La tabla 4.1 muestra el exponente crítico que se obtienen para diferentes valores de $\sigma = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$. En todos los casos, al ajustar la función (3.49) se obtienen exponentes γ y Δ muy similares al caso del campo escalar real sin masa.

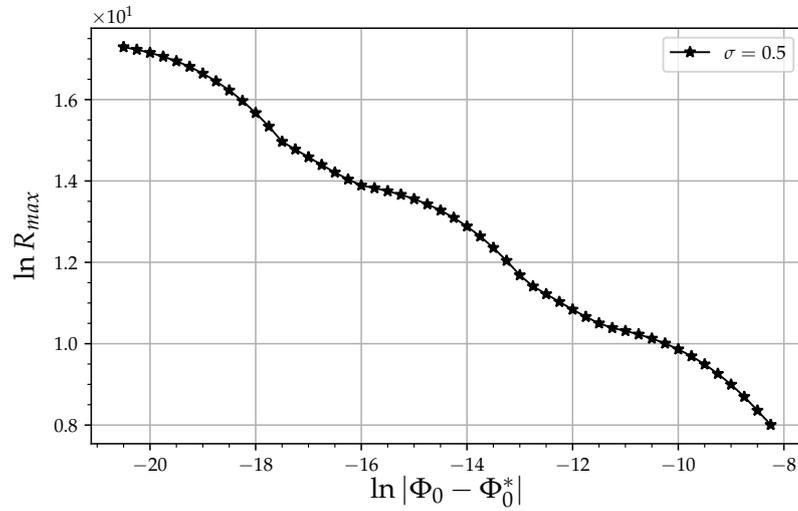


Figura 4.1: Escalamiento del valor máximo del escalar de Ricci 4D del campo escalar complejo para la familia (4.14)-(4.15), con un ancho de la gaussina $\sigma = 0.5$.

Al ser una solución compleja, para comparar las soluciones más cercanas a la crítica, las comparamos en magnitud con la solución crítica del campo escalar sin masa, mostrando esta comparación en la figura 4.2, con todas las soluciones evaluadas en el origen. Se observa la periodicidad de las soluciones críticas en el tiempo logarítmico T , siendo casi indistinguible entre ellas, lo cual se debe a que los exponentes críticos son muy cercanos entre sí.

4.4.2. Resultados para el colapso de tipo I

Se espera obtener colapso crítico de tipo I cuando $\sigma m \gg 1$, para ello tomaremos valores del ancho $\sigma \geq 2.5$. Una vez fijado el ancho para la familia de datos iniciales, se procede por un método de bisección para encontrar la amplitud crítica Φ_0^* . Como se explicó anteriormente en la sección (2.5), los fenómenos de tipo I no requieren de gran precisión en el origen, por lo que únicamente se usará un refinamiento por mallas con

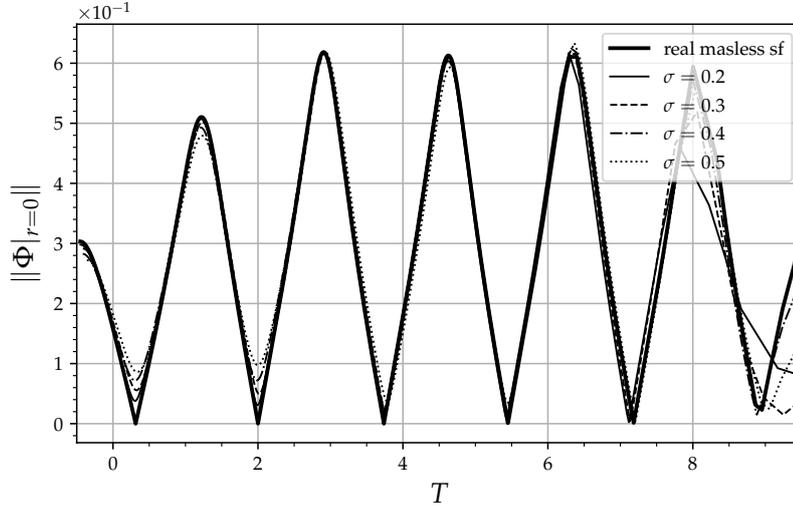


Figura 4.2: Comparación del valor central de la norma del campo escalar complejo masivo con el caso real sin masa. Las gráficas han sido desplazadas en T para hacerlas coincidir con el caso real sin masa. Observemos que las toda las curvas se sobreponen dado que Δ es muy similar en todos los casos.

σ	γ	$\Delta(2.20)$	$\Delta(2.26)$
0.2	0.374 ± 0.001	3.423 ± 0.026	3.426 ± 0.026
0.3	0.375 ± 0.001	3.442 ± 0.025	3.424 ± 0.031
0.4	0.376 ± 0.001	3.493 ± 0.019	3.442 ± 0.033
0.5	0.376 ± 0.001	3.440 ± 0.021	3.436 ± 0.059

Tabla 4.1: Resultados de los exponentes γ y Δ para todos los casos $\sigma \leq 0.5$. Dentro de la incertidumbre, los exponentes son muy similares a los del campo escalar real sin masa.

$N = 4$ niveles de refinamiento y se mantendrá fijo durante toda la evolución.

Aun cuando se usarán condiciones de frontera que preservan las constricciones, es necesario elegir la distancia adecuada de las fronteras numéricas para disminuir el error numérico introducido por reflexión en ellas. La posición de la frontera es estimada utilizando simulaciones de baja resolución para encontrar el tiempo t_{AN} de formación de los agujeros negros, luego multiplicamos el tiempo por la mitad de la velocidad asintótica de propagación de la norma $v_g = \sqrt{2}$ de la foliación $1 + \log$ dado que es más rápida que la velocidad coordenada de la luz $v_l = 1$. Lo anterior es debido a que una perturbación que viaja desde el origen de coordenadas tardará aproximadamente el

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

doble de tiempo en rebotar en la frontera y regresar al origen. La posición de la frontera se situa en $r_{max} = t_{BH}/\sqrt{2}$ y es reportada en la tabla 4.2 junto con la resolución para el primer nivel usada para distintos valores de σ . En todas las simulaciones usamos un paso de tiempo adaptativo que es compatible con la condición de estabilidad de Courant–Friedrich–Levy.

σ	Δr	r_{max}
2.5		150
2.75	0.1	200
3		250
3.5		400
4	0.15	550
5		400
6		350
7		325
8	0.1	325
9		290
10		225

Tabla 4.2: Resolución y posición de la frontera externa para distintos valores del ancho de pulso σ .

En lo que se refiere a la dinámica del colapso, tomaremos como ejemplo el caso particular $\sigma = 2.5$. En la figura 4.3 se muestra el valor máximo de la compacidad como función del tiempo (arriba) y la norma del campo escalar evaluado en el origen (abajo), para la solución subcrítica más cercana a la crítica obtenida. Inicialmente el contenido de materia tiene la forma de un pulso gaussiano, posteriormente en $t \approx 25$ una fracción del campo escalar se ha radiado, la parte restante se aglomera y el campo central comienza a oscilar alrededor de su promedio, siendo una indicación de que un objeto compacto se ha formado. Al ser una solución inestable el objeto se dispersa en $t \approx 225$.

Las propiedades de la solución crítica las obtenemos en el intervalo $25 < t < 225$. Primero se obtiene el promedio de la norma del campo escalar en el origen y luego el valor de R_{99} para la estrella de bosones correspondiente. La figura 4.4 muestra la masa de Kodama para la misma evolución medida en el radio obtenido. Nuevamente se observa que la masa oscila alrededor de un valor medio y después de cierto tiempo su dispersión. La frecuencia de oscilación se obtiene utilizando una transformada rápida

de Fourier aplicada a la parte real e imaginaria del campo en el origen. La figura 4.5 muestra el resultado de aplicar la transformada de Fourier, apreciándose un claro pico que corresponde a la frecuencia $\omega = 0.7933$.

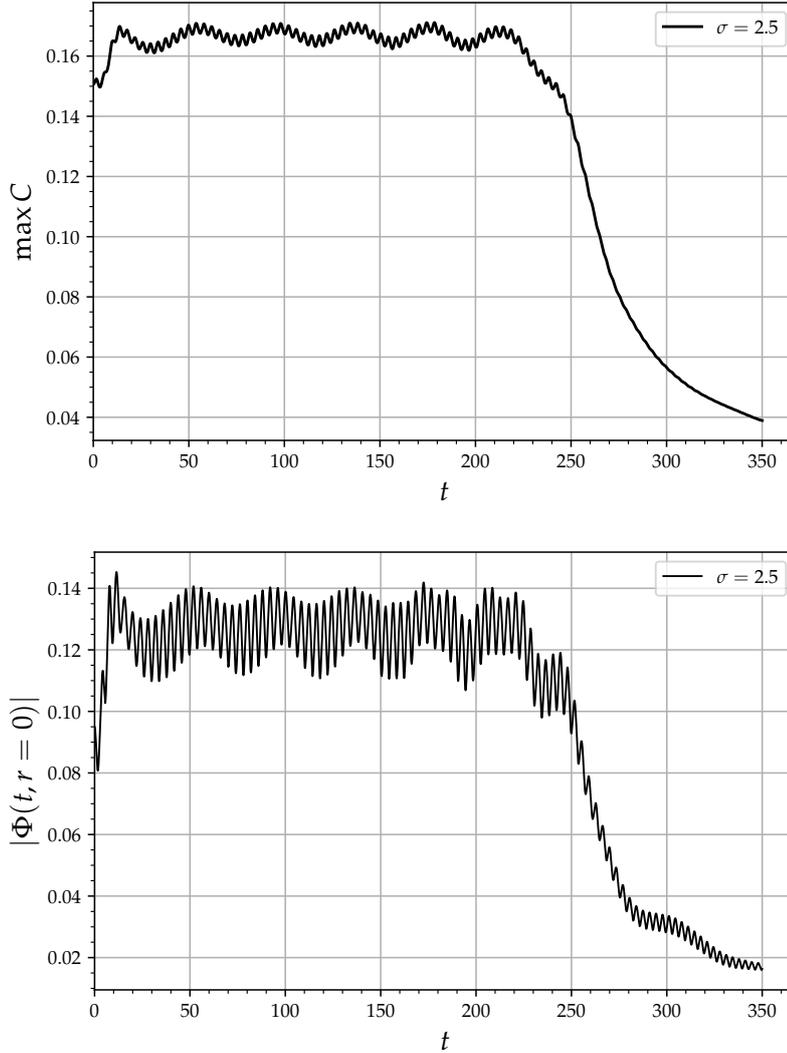


Figura 4.3: Arriba: Valor máximo de la compacidad para una evolución cercana a la crítica con $\sigma = 2.5$. Abajo: Norma del campo escalar complejo evaluado en el origen. Desde $0 < t \lesssim 25$ no parece haber indicio de que un objeto compacto se haya formado, luego en $t \approx 25$ hasta $t \approx 225$ se aprecia una oscilación alrededor de un valor medio para posteriormente dispersarse para $t > 225$.

Los resultados obtenidos para distintos valores de σ se reportan en la tabla 4.3. Los

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

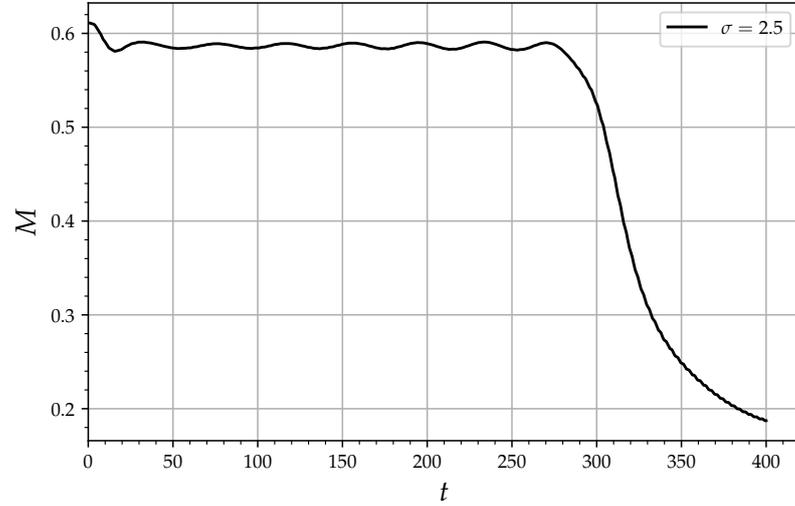


Figura 4.4: Masa de Kodama para la simulación mostrada en la figura 4.3. Después de obtener el promedio de la norma del campo escalar evaluado en el origen se busca el R_{99} de la estrella de bosones correspondiente. Luego se evalúa la masa de Kodama a ese radio.

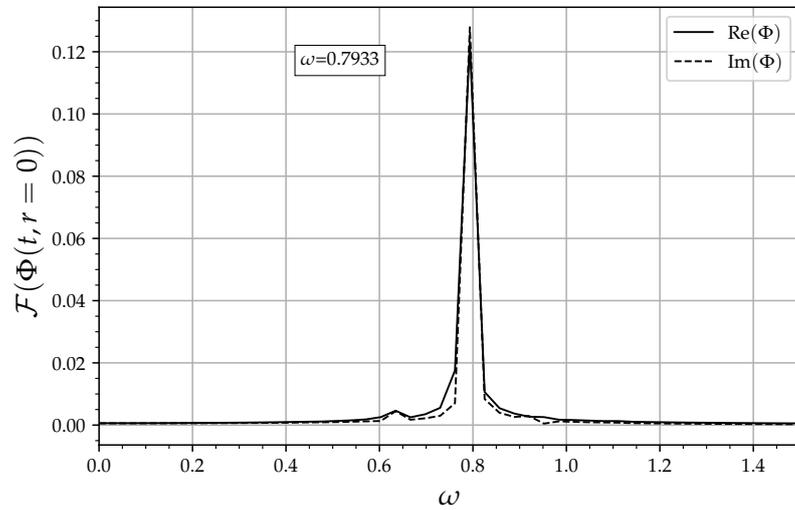


Figura 4.5: Transformada de Fourier del valor central del campo escalar para $\sigma = 2.5$. Al aplicar la transformación a la parte real e imaginaria se tiene un pico muy definido en la frecuencia $\omega = 0.7933$.

datos reportados son el promedio de la norma de la magnitud del campo escalar en el origen, su frecuencia de oscilación, la masa de Kodama de la solución y su correspondiente exponente crítico. Las incertidumbres del valor del campo y la masa es calculada con la desviación estándar de los datos obtenidos, la incertidumbre en la frecuencia es la mitad del ancho del pico de la transformada rápida de Fourier, y la incertidumbre en el exponente crítico es la obtenida del método de mínimos cuadrados aplicada a la ecuación (2.5).

σ	$ \bar{\Phi}(r=0) $	\bar{M}	ω	γ
2.5	0.127 ± 0.008	0.590 ± 0.003	0.793 ± 0.008	5.075 ± 0.024
2.75	0.115 ± 0.007	0.606 ± 0.002	0.804 ± 0.006	6.884 ± 0.022
3	0.106 ± 0.006	0.615 ± 0.003	0.813 ± 0.004	9.168 ± 0.023
3.5	0.092 ± 0.004	0.629 ± 0.002	0.833 ± 0.008	15.592 ± 0.042
4	0.086 ± 0.004	0.631 ± 0.002	0.842 ± 0.006	20.887 ± 0.061
5	0.092 ± 0.003	0.628 ± 0.002	0.832 ± 0.008	15.494 ± 0.023
6	0.098 ± 0.004	0.623 ± 0.003	0.826 ± 0.009	11.567 ± 0.035
7	0.104 ± 0.004	0.621 ± 0.003	0.820 ± 0.011	9.572 ± 0.022
8	0.108 ± 0.005	0.613 ± 0.004	0.813 ± 0.012	8.423 ± 0.023
9	0.112 ± 0.006	0.609 ± 0.004	0.810 ± 0.014	7.608 ± 0.016
10	0.115 ± 0.007	0.605 ± 0.005	0.806 ± 0.006	7.051 ± 0.024

Tabla 4.3: Datos obtenidos de las soluciones críticas. Al ser $\Phi(r=0)$ y M cantidades que oscilan en el tiempo, se ha reportado su valor medio y la incertidumbre es la desviación estándar. La frecuencia es obtenida mediante una transformada de Fourier rápida aplicada a la parte real e imaginaria. El exponente crítico γ se calcula utilizando un ajuste por mínimos cuadrados de la ecuación (2.5). Observemos que al incrementar σ la masa de la solución crítica aumenta hasta alcanzar un máximo para $\sigma = 4.0$, y para valores más grandes de σ la masa de la solución disminuye.

Con los datos reportados en la tabla 4.3, aún no se identifica si lo que se obtuvo es una estrella de bosones. Como primera prueba, en la figura 4.6 se grafica la norma del campo escalar como función del radio de área R para los casos $\sigma = 4$ y $\sigma = 10$, superpuestas con la solución de la estrella de bosones inestable con el mismo valor del campo central. Notamos la gran similitud entre ambas curvas y además las soluciones críticas no tienen nodos en el campo, por lo que corresponden a una estrella de bosones en su estado base.

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

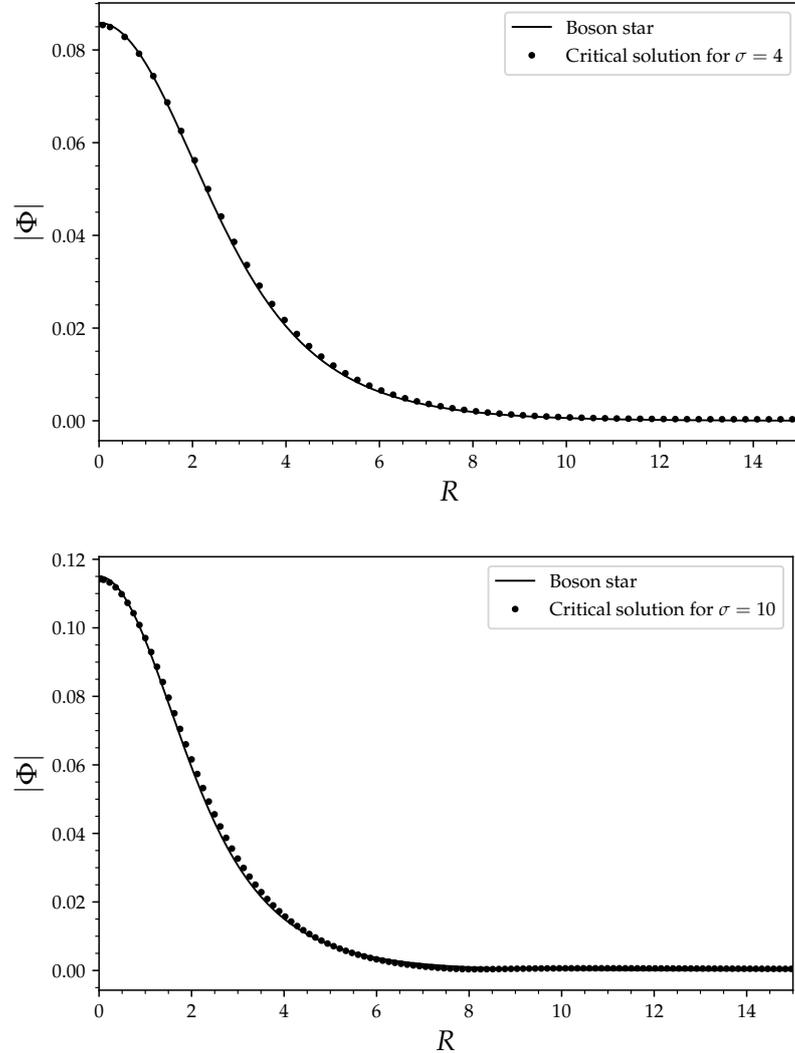


Figura 4.6: Utilizando los casos $\sigma = 4$ y $\sigma = 10$ se compara la norma del campo escalar complejo de la solución crítica con la estrella de bosones inestable con la misma amplitud central.

En la figura 4.7 se muestra la gráfica de la masa contra la frecuencia de las soluciones críticas reportadas en la tabla 4.3, para comparar se muestra la misma gráfica para estrellas de bosones. Los datos se han separado para mostrar que la masa de la solución incrementa hasta $\sigma = 4$ y después decrece para valores más grandes de σ . La figura 4.8 muestra una gráfica similar pero ahora de la masa contra el valor del campo central. En ambos casos, los valores coinciden con las curvas características de las estrellas de bosones. Notemos que todas las soluciones críticas se encuentran del lado izquierdo del

valor máximo de la masa en la figura 4.7, y a la derecha de la figura 4.8, con lo cual las soluciones obtenidas son estrellas de bosones en la rama inestable.

La figura 4.9 muestra el escalamiento para el tiempo de vida de la solución τ para diferentes valores de σ . Observamos que la relación (2.5) se ajusta correctamente a los datos obtenidos.

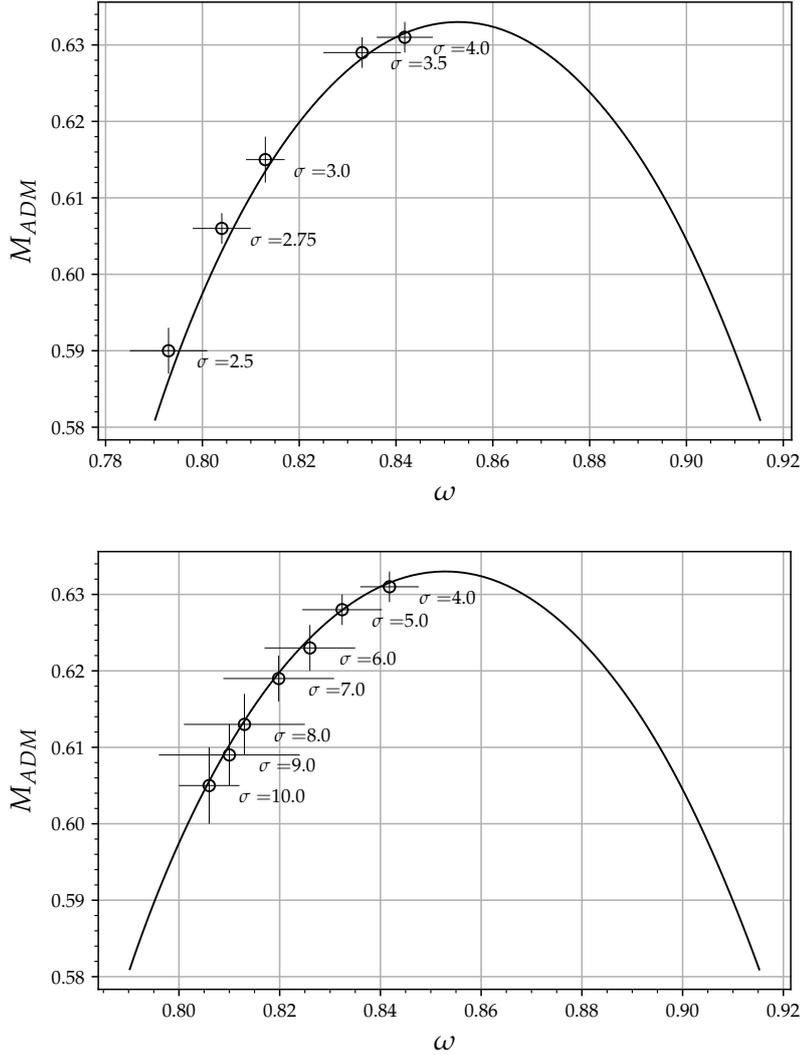


Figura 4.7: Masa y frecuencia de oscilación de las soluciones críticas obtenidas (círculos) comparadas con la curva para estrellas de bosones (línea). Arriba: Valores de la masa y frecuencia para $\sigma \leq 4$. Abajo: Valores de la masa y frecuencia $\sigma \geq 4$. La masa de las soluciones críticas alcanza su valor máximo entre $3.5 < \sigma < 5$.

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

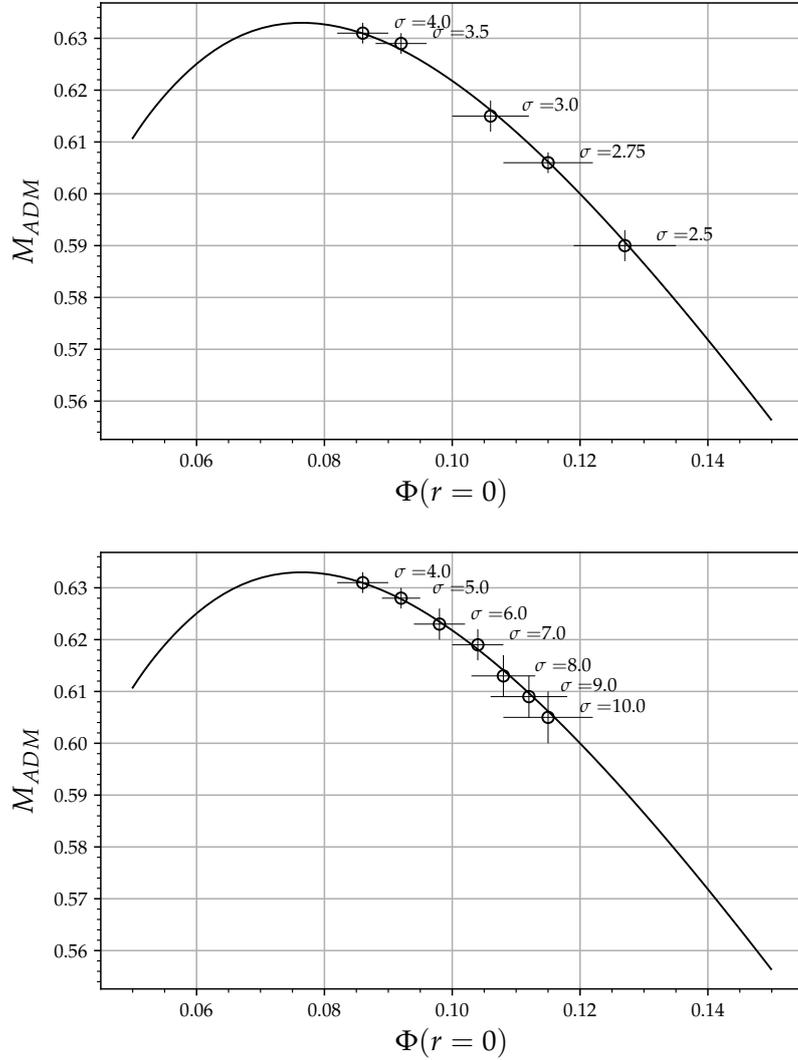


Figura 4.8: Masa y norma del campo escalar en el origen de las soluciones críticas obtenidas (círculos) comparadas con la curva para estrellas de bosones (línea). Arriba: Valores de la masa y frecuencia para $\sigma \leq 4$. Abajo: Valores de la masa y frecuencia $\sigma \geq 4$.

Es contraintuitivo que a pesar de que la masa ADM de los datos iniciales aumenta monótonicamente respecto de σ , se esperaría que la masa de la solución crítica se aproximara asintóticamente a la masa máxima de una estrella de bosones $M_{ADM} \sim 0.633$ que separa a la región inestable de la estable. Con los datos iniciales usados el valor máximo de la masa se obtiene para $3.5 < \sigma < 5$. Este comportamiento se observa también en el exponente crítico γ , el cual con los datos presentados también alcanza su valor máximo en $3.5 < \sigma < 5$.

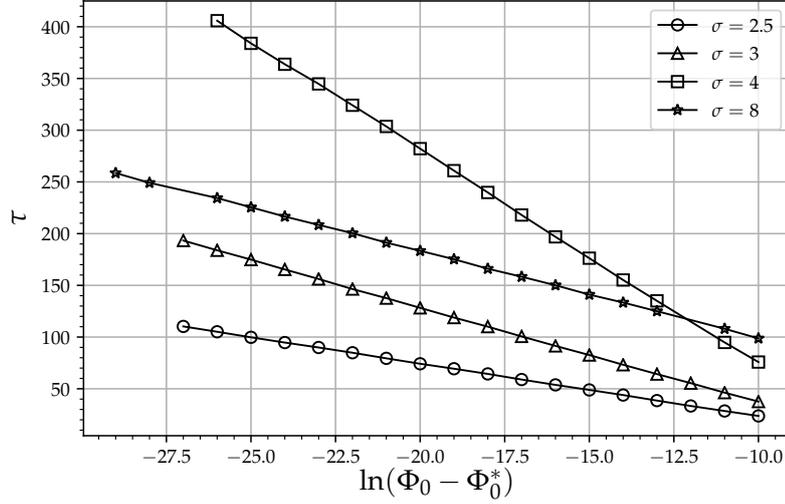


Figura 4.9: Escalamiento del tiempo de vida de la solución más cercana a la crítica para diferentes valores de σ . De los casos realizados, el valor máximo del exponente crítico se alcanza en $\sigma = 4$.

Por último, dado que el exponente crítico γ puede ser relacionado con la parte imaginaria del exponente de Lyapunov del sistema λ_L por $\text{Im}(\chi) = 1/\gamma$ [68]. La figura 4.10 compara el cuadrado del exponente de Lyapunov para estrellas de bosones obtenido por medio de un análisis de perturbación lineal (datos proporcionado por A. Bernal [28]), con el cuadrado del inverso del exponente crítico γ obtenido en las simulaciones. Nuevamente, se observa coincidencia entre ambos datos, mostrando que efectivamente la solución crítica de tipo I del campo escalar complejo es una estrella de bosones inestable en su estado base.

4. COLAPSO CRÍTICO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR COMPLEJO MASIVO

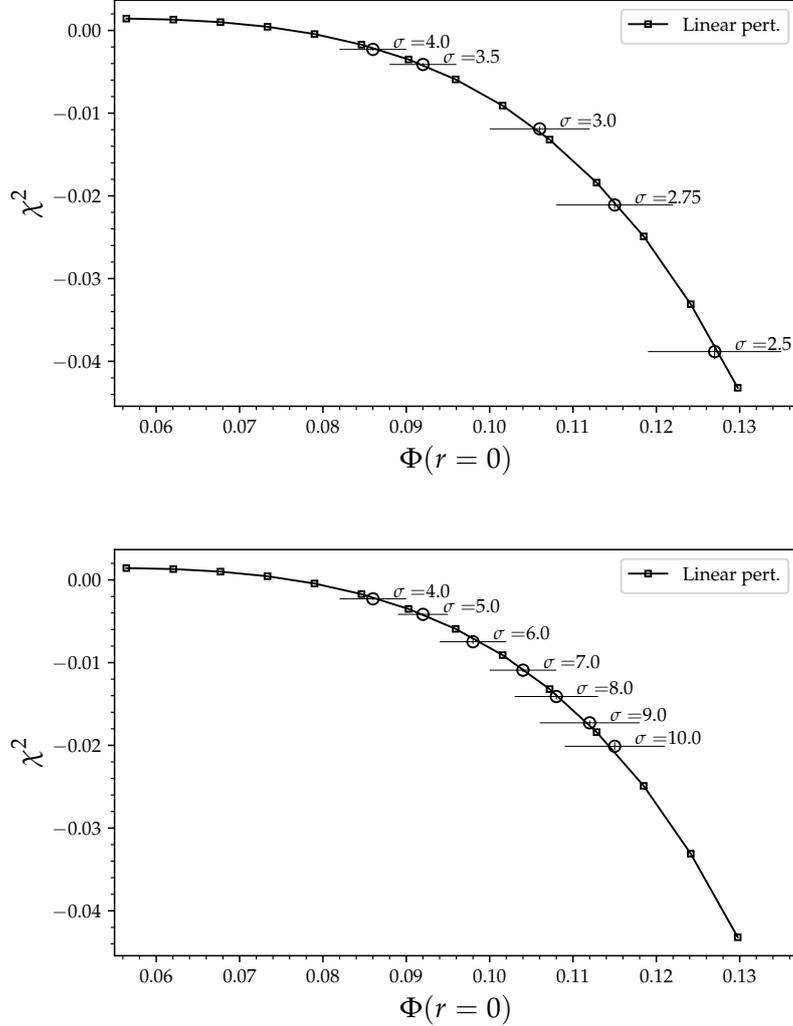


Figura 4.10: Comparación del cuadrado del exponente de Lyapunov de los modos inestables de estrellas de bosones. Los círculos corresponden a $1/\gamma^2$ para distintos valores de σ , la línea al exponente de Lyapunov para estrellas de bosones obtenida a partir de teoría de perturbaciones lineal. Arriba: Comparación para $\sigma \leq 4$. Abajo: Comparación para $\sigma \geq 4$.

4.5. Conclusiones

Se realizaron simulaciones numéricas de un campo escalar complejo masivo con un código numérico adaptado a simetría esférica para estudiar el colapso crítico gravitacional. Como condiciones iniciales se usó un pulso gaussiano con una derivada temporal

similar a una estrella de bosones pero que inicialmente no forma una configuración estacionaria.

Se encontró que dependiendo del ancho del pulso, el colapso crítico puede ser del tipo I o II. Para $\sigma \leq 0.5$ el escalar de Ricci sigue la relación (3.49) siendo indicativo de un fenómeno crítico de tipo II. En estos casos se obtienen los valores para los exponentes crítico $\gamma = 0.38 \pm 0.01$ y $\Delta = 3.4 \pm 0.1$, siendo muy similares a los del campo escalar real sin masa reportado en la literatura. Por otro lado, para $\sigma \geq 2.5$ se obtiene el escalamiento del tiempo de vida de la solución el cual sigue la relación (2.5) siendo indicativo de una transición del tipo I. El exponente crítico en este tipo de transición depende del ancho inicial σ del pulso: al incrementar σ el exponente crítico aumenta hasta alcanzar su máximo en $\sigma \approx 4$, y para valores más grandes de σ el exponente crítico disminuye.

Al igual que el estudio de Hawley y Choptuik [68], encontramos que las soluciones críticas para el fenómeno de tipo I corresponden a estrellas de bosones inestables en su estado base. Esta afirmación fue verificada al contrastar las curvas de $|\Phi(0)|$ contra M_{ADM} , y ω contra M_{ADM} . Considerando las incertidumbres, los datos de las soluciones críticas se superponen a las curvas características de las estrellas de bosones inestables. Además, la masa máxima de la solución se obtiene para $\sigma \simeq 4$, con lo cual se conjetura que se podría alcanzar la masa máxima de una estrella de bosones $M \sim 0.633$ que separa a las ramas inestable y estable, con los valores para σ en el rango $3.5 < \sigma < 5.0$. Como última confirmación de que en efecto las soluciones críticas corresponde a estrellas de bosones, al tomar el inverso del exponente crítico γ , se obtiene que corresponde a la parte imaginaria del exponente de Lyapunov de las estrellas inestables.

Por último, el rango $0.5 < \sigma < 2.5$ corresponde a una transición de fase entre los dos tipos de colapso, casos que serán abordados en el siguiente capítulo.

Transiciones de fase del campo escalar

En los capítulos anteriores se han mostrado los dos tipos de transición del colapso crítico gravitacional. En algunos modelos como el campo escalar masivo real y complejo, ambos fenómenos coexisten en el espacio fase de parámetros, siendo relevante la longitud de Compton del sistema comparado con la masa del campo escalar lo que determina el tipo de colapso. Otro ejemplo de coexistencia de ambos fenómenos es el modelo de Einstein-Yang-Mills, el cual es estudiado en [42, 44] y recientemente en un caso más general en [88]. En el primer estudio, se reporta por primera vez la existencia del colapso de tipo I, correspondiendo el estado crítico a la solución estática de Bartnick-McKinnon [20], mientras que la solución crítica para el colapso de tipo II tiene simetría discreta. En el segundo, se estudia la frontera en el espacio fase entre las transiciones de tipo I a II. Parametrizando a una familia con dos parámetros de un campo $SU(2)$ de Yang-Mills en simetría esférica, se encuentra un nuevo tipo de transición de fase entre ambos tipos, obteniendo que la solución crítica del nuevo fenómeno son agujeros negros con pelo de tipo Yang-Mills, también llamados agujeros negros con color [30]. Estas soluciones son estáticas y son descritas por el radio del horizonte y el número de nodos n del potencial de Yang-Mills. La solución encontrada corresponde al modo inestable $n = 1$. En el punto que une a la transición entre fases, la masa de los agujeros negros tiende a cero. Tomando como antecedente estos estudios, en este capítulo se analizará la transición de fase del colapso tipo I al II para el campo escalar masivo real. Los resultados que se mostrarán se publicarán en colaboración con Miguel Alcubierre.

5.1. Ecuaciones de evolución adimensionales

Para estudiar la transición de fase se usará el campo escalar masivo real, en este caso la acción que describe al sistema está dada por la ecuación (4.1) (en unidades $G = c = 1$). Como se ha explicado anteriormente, el tipo de colapso esperado depende del producto λm , con λ la longitud de Compton del sistema y m la masa del campo escalar. Anteriormente por simplicidad se ha hecho la elección $m = 1$, pero es posible reducir los dos grados de libertad que se tienen en las variables λ y m si se utilizan

variables adimensionales en las ecuaciones de evolución del sistema Einstein-Klein-Gordon, ya que se absorben factores de m , y de esta forma λ ajustaría el tipo de colapso que se obtendrá.

Hacemos el cambio en las variables adimensionales: $r \rightarrow \tilde{r}/m$ y $t \rightarrow \tilde{t}/m$ (no confundir con la transformación de coordenadas (2.11)), esto implica que el elemento de línea (1.58) tendrá un factor de m^2 , por lo cual, definimos el elemento de línea adimensional:

$$d\tilde{s}^2 := \frac{ds^2}{m^2}. \quad (5.1)$$

Reescribimos las ecuaciones de Klein-Gordon como un sistema de primer orden definiendo las variables auxiliares:

$$\tilde{\Pi} := \frac{\partial_{\tilde{t}}\Phi - \beta^{\tilde{r}}\partial_{\tilde{r}}\Phi}{\alpha}, \quad \tilde{\chi} := \partial_{\tilde{r}}\Phi. \quad (5.2)$$

Con estas definiciones y la ecuación (5.1), la ecuación de Klein-Gordon (4.3) se reescribe como:

$$\partial_{\tilde{t}}\Phi = \alpha\tilde{\Pi} + \beta^{\tilde{r}}\partial_{\tilde{r}}\Phi, \quad (5.3)$$

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{\chi} = \beta^{\tilde{r}}\partial_{\tilde{r}}\tilde{\chi} + \tilde{\chi}\partial_{\tilde{r}}\beta^{\tilde{r}} + \alpha\partial_{\tilde{r}}\tilde{\Pi} + \tilde{\Pi}\partial_{\tilde{r}}\alpha, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}}\tilde{\Pi} &= \beta^{\tilde{r}}\partial_{\tilde{r}}\tilde{\Pi} + \frac{\alpha}{A\psi^4} \left[\partial_{\tilde{r}}\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \left(\frac{2}{\tilde{r}} - \frac{\partial_{\tilde{r}}A}{2A} + \frac{\partial_{\tilde{r}}B}{B} + 2\partial_{\tilde{r}}\ln\psi \right) \right] + \\ &\quad \frac{\tilde{\chi}\partial_{\tilde{r}}\alpha}{A\psi^4} + \alpha K\tilde{\Pi} - \alpha\Phi, \end{aligned} \quad (5.5)$$

con $K := K_m^m$ la traza de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies espacialoides a tiempo constante de la métrica (5.1).

Nuevamente, usando el tensor de energía momento (4.9) se tiene la densidad de energía $\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$, la densidad de momento $J_\mu := -P_\mu^\nu n^\lambda T_{\nu\lambda}$, y el tensor de esfuerzos $S_{\mu\nu} := P_\mu^\sigma P_\nu^\lambda T_{\sigma\lambda}$, con $n^\mu = (1/\alpha, 0, 0, 0)$ el vector normal a las hipersuperficies espaciales y $P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu$ es el operador de proyección. En las coordenadas adimensionales \tilde{r}, \tilde{t} el tensor de energía momento (4.9) también tiene un factor general de m^2 , que al escribir las ecuaciones BSSN de evolución en las coordenadas adimensionales se cancela, pero se tiene una versión adimensional de $\rho, J_\mu, S_{\mu\nu}$

$$\tilde{\rho} := \frac{1}{2} \left(\tilde{\Pi}^2 + \frac{\tilde{\chi}^2}{A\psi^4} + \Phi^2 \right), \quad (5.6)$$

$$\tilde{J}_r = -\tilde{\chi}\tilde{\Pi}, \quad (5.7)$$

$$\tilde{S}_r^r = \frac{1}{2} \left(\tilde{\Pi}^2 + \frac{\tilde{\chi}^2}{A\psi^4} - \Phi^2 \right), \quad (5.8)$$

$$\tilde{S}_\theta^\theta = \frac{1}{2} \left(\tilde{\Pi}^2 - \frac{\tilde{\chi}^2}{A\psi^4} - \Phi^2 \right). \quad (5.9)$$

5.2. Datos iniciales

Como condición inicial para el campo escalar, consideramos tres formas distintas para el pulso

$$\Phi_I(\tilde{t} = 0, \tilde{r}) = \Phi_0 e^{(-\tilde{r}^2/\tilde{\sigma}^2)}, \quad (5.10)$$

$$\Phi_{II}(\tilde{t} = 0, \tilde{r}) = \Phi_0 \tilde{r}^2 e^{(-\tilde{r}^2/\tilde{\sigma}^2)}, \quad (5.11)$$

$$\Phi_{III}(\tilde{t} = 0, \tilde{r}) = \Phi_0 \coth(\tilde{\sigma}/s_0) \left[\tanh\left(\frac{\tilde{r} + \tilde{\sigma}}{s_0}\right) - \tanh\left(\frac{\tilde{r} - \tilde{\sigma}}{s_0}\right) \right], \quad (5.12)$$

donde $\tilde{\sigma}, s_0$ son parámetros libres. Φ_0 es un parámetro real que ajusta la amplitud de los datos iniciales. En el caso de los datos iniciales del tipo (5.12), s_0 marca el radio de transición de la función escalón suave.

Con esta forma del dato inicial, tomaremos como longitud de Compton del sistema $\lambda = \tilde{\sigma}$. Al igual que los casos presentados anteriormente, los datos iniciales se obtienen tras resolver las ecuaciones de constricción en la métrica espacial conforme, tal que $A = B = 1$ en (1.58). El caso del campo real corresponde a un instante de simetría temporal por lo que la constricción de momentos se satisface trivialmente.

En $t = 0$ la constricción hamiltoniana se transforma en una ecuación no lineal de segundo orden para el factor conforme ψ :

$$\partial_{\tilde{r}}^2 \psi + \frac{2}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} \psi + 2\pi\psi^5 \tilde{\rho} = 0, \quad (5.13)$$

con la densidad de energía dada por:

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\Pi}^2 + \frac{\partial_{\tilde{r}} \Phi^2}{\psi^4} + \Phi^2 \right]. \quad (5.14)$$

En ambos casos, la ecuación no lineal se resuelve numéricamente usando un método iterativo. Como condición de frontera para (5.13) se pide que la solución sea asintóticamente plana: $\psi(\tilde{r})|_{\tilde{r} \rightarrow \infty} = 1$. Al tener un dominio numérico finito, en lugar de una condición asintótica, se pide una condición de frontera de tipo Robin en la frontera del dominio:

$$\partial_{\tilde{r}} \psi = \frac{1 - \psi}{\tilde{r}}. \quad (5.15)$$

Y en el origen se pide que el factor conforme sea par, es decir:

$$\partial_{\tilde{r}} \psi|_{\tilde{r}=0} = 0. \quad (5.16)$$

5.3. Resultados numéricos

Los resultados que se presentarán fueron obtenidos utilizando el método de líneas, con un método de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo y

diferencias centradas en el espacio a cuarto orden. Se utilizaron distintos valores del ancho $\tilde{\sigma}$ para observar la transición de un colapso de tipo I al tipo II. Fijando el ancho $\tilde{\sigma}$, de forma similar a los casos anteriores, utilizando una bisección se varió Φ_0 hasta encontrar la amplitud crítica (o la más cercana a la crítica). En las evoluciones se usó el refinamiento por mallas con $N = 4$ niveles, con la resolución de la malla más gruesa $\Delta r = 0.04$. Con el fin de reducir el error numérico, se sitúa la frontera externa en $r = 50$ para garantizar que los errores por reflexión en la frontera no afectaran significativamente a los resultados, junto con condiciones de frontera que preserven las constricciones. Además se usa disipación de Kreiss-Oliger de sexto orden para disminuir el error introducido por el método de diferencias finitas. El paso de tiempo es elegido tal que satisfaga la condición de estabilidad de Courant-Friedrich-Levy.

En las coordenadas adimensionales elegidas (\tilde{t}, \tilde{r}) , se espera que si $\tilde{\sigma} \gtrsim 1$ se obtendrá un colapso de tipo I, y por el otro lado, si $\tilde{\sigma} \lesssim 1$ se obtendrá colapso de tipo II. Cómo se ha visto en los capítulos anteriores, cuando se evolucionan fenómenos críticos de tipo II, aparecen gradientes de curvatura grandes los cuales requieren de alta resolución numérica para resolver correctamente la dinámica crítica, por lo que usar el refinamiento por mallas no es suficiente y se debería usar la transformación de coordenadas descrita en la sección 2.5. Sin embargo, como se presentará más adelante, no fue necesario realizar el cambio a dicho sistema de coordenadas al acercarse al punto de transición. Dado que los fenómenos críticos son sensibles al error numérico, en todos los casos, únicamente se presentará la resolución más alta usada.

En todos los casos analizados se realizará el ajuste de las ecuaciones (2.5) y la parte lineal de (2.22). Se espera que al variar $\tilde{\sigma}$, en el cambio de un fenómeno de tipo I al II, la relación (2.22) se ajustará cada vez mejor en detrimento del ajuste a la ecuación (2.5). Para reportar los exponentes críticos se realizará un cambio de notación: se reportará como γ_1 al exponente crítico del colapso de tipo I, y por γ_2 al exponente crítico del colapso de tipo II.

Las tablas 5.1 y 5.2 muestran el exponente crítico y el tipo de fenómeno obtenido al variar el ancho $\tilde{\sigma}$. Se considera como un colapso de tipo I, si la relación de escalamiento lineal del tiempo de vida τ (2.5) se ajusta con un coeficiente de correlación de Pearson [4] $R^2 > 0.995$. En el caso de obtener colapso tipo I, se reporta la masa mínima del agujero negro de la familia, la cual se obtiene usando un vector de corrimiento Gamma-Driver hasta que se alcanza el estado de equilibrio de un agujero negro de Schwarzschild. Notemos que cuando $\tilde{\sigma}$ se reduce, también lo hace M_{min} , hasta que se alcanza un valor mínimo. Los valores mínimos obtenidos son $M_{min} = 0.371$ para los datos iniciales de tipo (5.10) y $M_{min} = 0.325$ para los datos iniciales de tipo (5.11), como se observa en la figura 5.1.

$\tilde{\sigma}$	M_{\min}	Tipo	γ
1.5	0.46	I	$\gamma_1 = 0.893 \pm 0.005$
1.4	0.42	I	$\gamma_1 = 0.77 \pm 0.01$
1.3	0.374	I	$\gamma_1 = 0.202 \pm 0.003$
1.2875	0.371	I	$\gamma_1 = 0.162 \pm 0.002$
1.28125	0.371	I	$\gamma_1 = 0.138 \pm 0.001$
1.278125	0.371	I-II	$\gamma_1 = 0.117 \pm 0.001, \gamma_2 = 0.059 \pm 0.002$
1.275	0	II	$\gamma_2 = 0.063 \pm 0.002$
1.2625	0	II	$\gamma_2 = 0.13 \pm 0.004$
1.25	0	II	$\gamma_2 = 0.137 \pm 0.005$
1.2	0	II	$\gamma_2 = 0.372 \pm 0.009$
1.1	0	II	$\gamma_2 = 0.373 \pm 0.006$
1	0	II	$\gamma_2 = 0.374 \pm 0.006$

Tabla 5.1: Exponentes críticos para diferentes valores de $\tilde{\sigma}$ para el caso del campo escalar real masivo con datos iniciales de la familia Φ_I (5.10) y el tipo de colapso que se obtiene. Al aproximarse a la zona de transición del tipo I al tipo II, los exponentes críticos alcanzan un valor mínimo. Para sigma $\tilde{\sigma} = 1.278125$ se observan aproximadamente los dos tipos de fenómeno crítico.

Al usar los datos iniciales de la familia Φ_{III} (5.12) se observó que presentan únicamente colapso de tipo II si $s_0 < 0.225$ para cualquier valor de $\tilde{\sigma}$, además de que el valor mínimo de la masa depende del valor de s_0 . La tabla 5.3 muestra la masa mínima para distintos valores de s_0 .

Para los datos de tipo Φ_I , la figura 5.2 muestra cómo el tiempo de acumulación τ^* aumenta conforme $\tilde{\sigma}$ lo hace. Al seguir aumentando $\tilde{\sigma}$ la posición del tiempo de acumulación deja de ser clara y la solución crítica deja de ser periódica en la coordenada $T = -\ln(\tau^* - \tau)$.

5. TRANSICIONES DE FASE DEL CAMPO ESCALAR

$\tilde{\sigma}$	M_{\min}	Tipo	γ
1.5	0.4	I	$\gamma_1 = 0.651 \pm 0.011$
1.4	0.38	I	$\gamma_1 = 0.54 \pm 0.01$
1.3	0.345	I	$\gamma_1 = 0.38 \pm 0.01$
1.25	0.333	I	$\gamma_1 = 0.182 \pm 0.002$
1.24609375	0.33	I	$\gamma_1 = 0.165 \pm 0.003$
1.2421875	0.325	I-II	$\gamma_1 = 0.127 \pm 0.002, \gamma_2 = 0.042 \pm 0.002$
1.23828125	0	II	$\gamma_2 = 0.067 \pm 0.002$
1.234375	0	II	$\gamma_2 = 0.079 \pm 0.002$
1.21875	0	II	$\gamma_2 = 0.106 \pm 0.003$
1.2	0	II	$\gamma_2 = 0.185 \pm 0.019$
1.0	0	II	$\gamma_2 = 0.373 \pm 0.009$

Tabla 5.2: Exponentes críticos para diferentes valores de $\tilde{\sigma}$ para el caso del campo escalar real masivo con datos iniciales de la familia Φ_{II} (5.11) y el tipo de colapso que se obtiene. Al aproximarse a la zona de transición del tipo I al tipo II, los exponentes críticos alcanzan un valor mínimo. Para sigma $\tilde{\sigma} = 1.2421875$ se observan aproximadamente los dos tipos de fenómeno crítico.

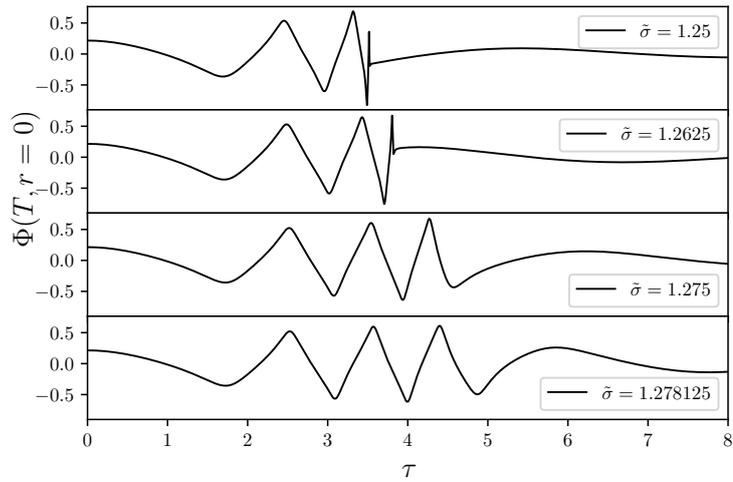


Figura 5.2: Solución crítica del campo real masivo para distintos valores de $\tilde{\sigma}$. Al incrementar $\tilde{\sigma}$, el punto de acumulación τ^* desaparece y la simetría discreta deja de ser clara para $\tilde{\sigma} \gtrsim 1.275$.

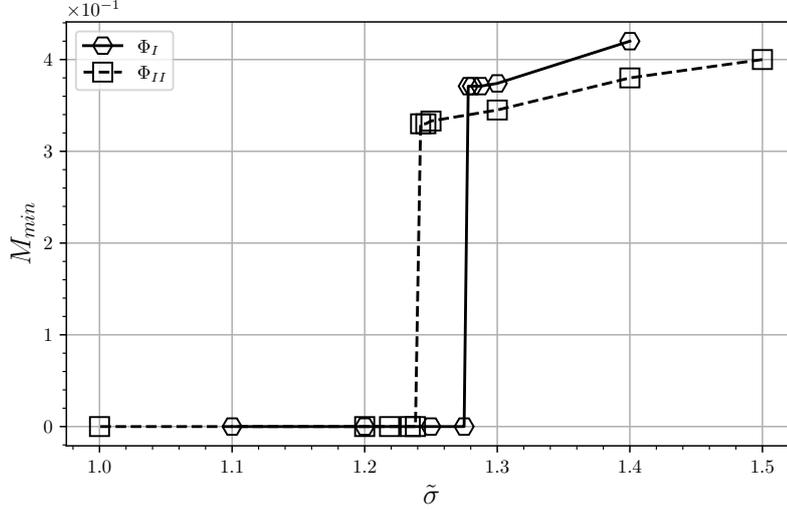


Figura 5.1: Masa mínima de los agujeros negros al variar $\tilde{\sigma}$ para los perfiles iniciales (5.10) y (5.11). Se observa un salto en la masa de los agujeros al en la zona de transición del colapso crítico gravitacional de tipo I al II. En el caso del perfil Φ_I ocurre en $\tilde{\sigma} \approx 1.278125$ con masa del agujero negro $M_{min} = 0.371$. Usando el perfil Φ_{II} , la transición ocurre en $\tilde{\sigma} \approx 1.2421875$ con $M_{min} = 0.325$.

Las figuras 5.3 y 5.4 muestra la relación de escalamiento del máximo del escalar de Ricci y el escalamiento del tiempo de vida τ de los puntos de transición. En todos los puntos de transición, se observan ambos tipos de fenómenos críticos. Analizando las gráficas en la figura 5.3, cualitativamente se aprecia que al escalamiento lineal del escalar de Ricci se superponen oscilaciones, sin embargo, su periodicidad no es exacta como se observa en 5.5, por lo que la simetría discreta es solo de forma aproximada.

5. TRANSICIONES DE FASE DEL CAMPO ESCALAR

$s_0 = 0.3$			
$\tilde{\sigma}$	M	Tipo	γ
4	0.33	I	$\gamma_1 = 0.305 \pm 0.003$
3.9	0.317	I	$\gamma_1 = 0.256 \pm 0.004$
3.8	0.305	I	$\gamma_1 = 0.150 \pm 0.004$
3.775	0.3	I-II	$\gamma_1 = 0.133 \pm 0.003, \gamma_2 = 0.034 \pm 0.001$
3.75	0	II	$\gamma_2 = 0.0103 \pm 0.0002$
3.7	0	II	$\gamma_2 = 0.073 \pm 0.003$
$s_0 = 0.25$			
$\tilde{\sigma}$	M	Tipo	γ
5	0.31	I	$\gamma_1 = 0.281 \pm 0.004$
4.75	0.3	I	$\gamma_1 = 0.167 \pm 0.001$
4.71875	0.272	I-II	$\gamma_1 = 0.143 \pm 0.001, \gamma_2 = 0.011 \pm 0.001$
4.6875	0	II	$\gamma_2 = 0.026 \pm 0.001$
4.65625	0	II	$\gamma_2 = 0.046 \pm 0.002$
$s_0 = 0.225$			
$\tilde{\sigma}$	M	Tipo	γ
6.0	0.32	I	$\gamma_1 = 0.306 \pm 0.006$
5.5	0.28	I	$\gamma_1 = 0.117 \pm 0.001$
5.49	0.275	I	$\gamma_1 = 0.110 \pm 0.001$
5.485	0.267	I-II	$\gamma_1 = 0.108 \pm 0.001, \gamma_2 = 0.014 \pm 0.001$

Tabla 5.3: Exponentes críticos para diferentes valores de $\tilde{\sigma}$ para el caso del campo escalar real masivo con datos iniciales de la familia Φ_{III} (5.12) con $s_0 = 0.25, 0.3$ y el tipo de colapso que se obtiene. En el punto de transición, el valor mínimo de la masa disminuye al reducir s_0 , siendo el menor valor obtenido con $s_0 = 0.225$ y $M_{min} = 0.267$.

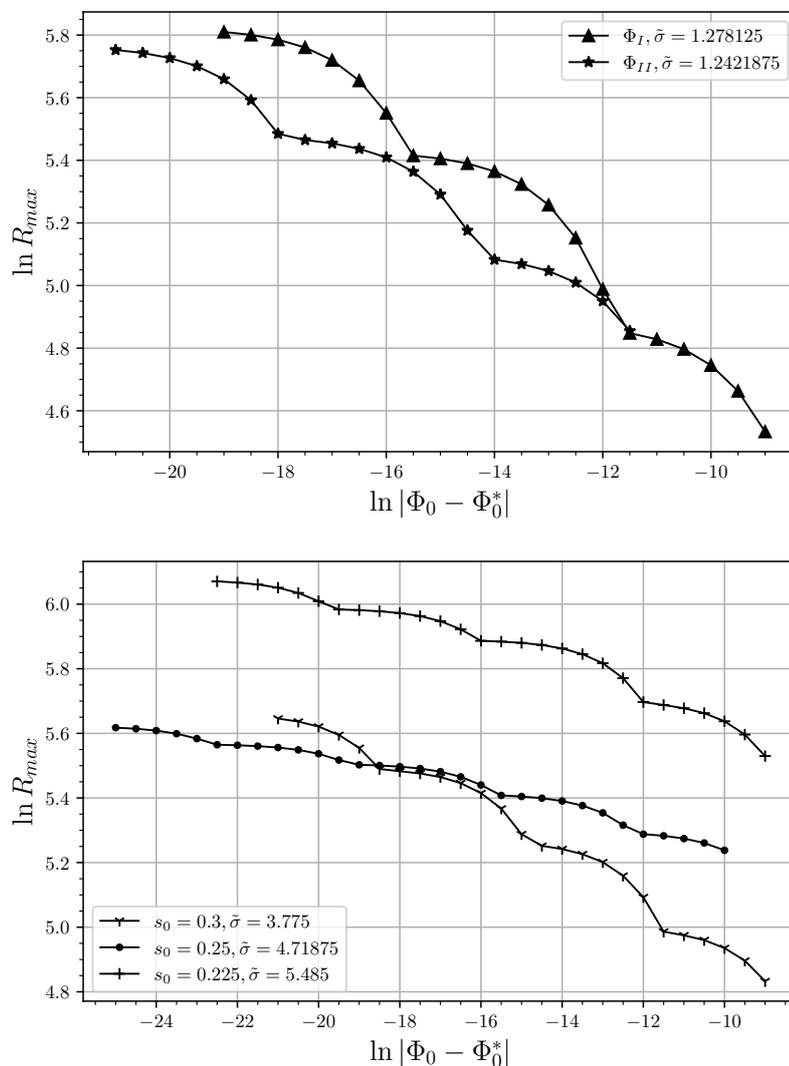


Figura 5.3: Arriba: Escalamiento del máximo del escalar de Ricci del punto de transición para datos iniciales de la familia Φ_I y Φ_{II} . Abajo: Similar a la gráfica anterior ahora usando el perfil Φ_{III} con distintos valores de s_0 . En todos los casos, las curvas pueden ser ajustadas por una línea recta aunque se observan algunas oscilaciones sin una periodicidad clara.

5.4. Conclusiones

Usando datos iniciales que presentan el fenómeno crítico de tipo I y II en su espacio de parámetros, se realizaron simulaciones numéricas del campo escalar masivo real, con el fin de conocer el comportamiento de las soluciones críticas en la transición de fase

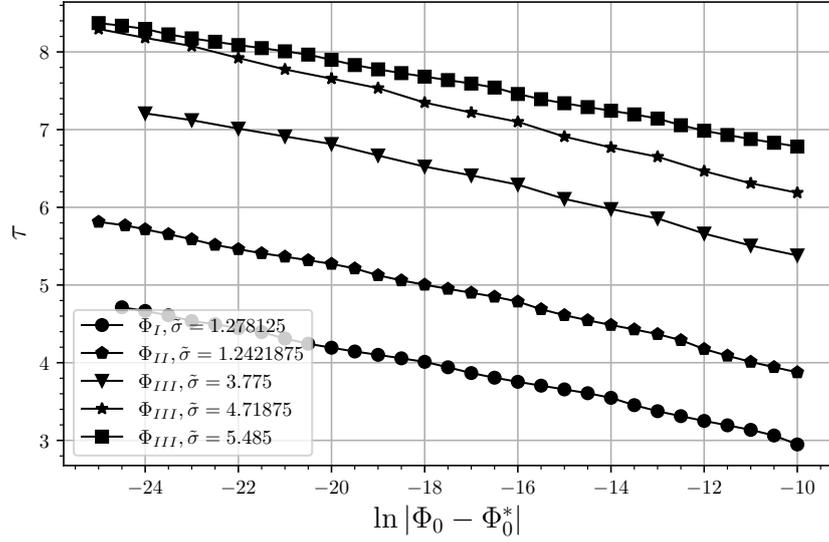


Figura 5.4: Escalamiento del tiempo de vida τ de las soluciones cercanas a la solución crítica para los puntos de transición.

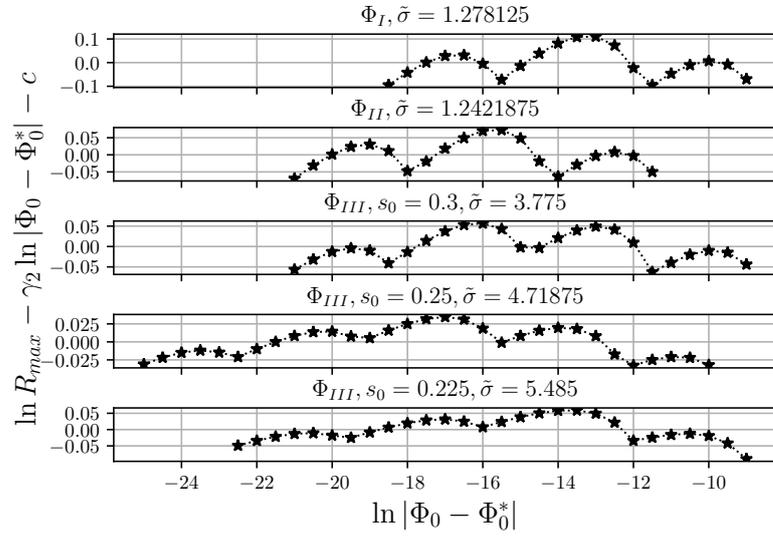


Figura 5.5: Diferencia del logaritmo del máximo del escalar de Ricci menos el ajuste lineal para cada punto de transición. A diferencia de cuando se tiene un colapso de tipo II como en la figura 2.4, el escalamiento de los puntos de transición no tienen una periodicidad exacta.

de un colapso tipo I al II al variar el parámetro que determina el fenómeno crítico obtenido.

En los casos que se formó un agujero negro para un colapso de tipo I, usando un vector de corrimiento del tipo Gamma-Driver las evoluciones se continuaron hasta que el agujero negro alcanzara su estado de equilibrio, es decir, el punto en el que el campo escalar ha caído por completo dentro del agujero. Cuando se disminuye el ancho del pulso inicial que caracteriza a la familia de datos iniciales, también lo hace la masa mínima del agujero negro de dicha familia, hasta que dicha masa alcanza un valor mínimo distinto de cero. Al analizar las simulaciones numéricas realizadas, la discontinuidad de la masa mínima depende de la forma inicial del pulso por lo que no es un valor universal.

Al aproximarse a la zona de transición, los exponentes γ_1 y γ_2 disminuyen, y en el punto de transición se alcanza un valor mínimo. En este punto, se observan los dos tipos de fenómeno crítico, es de tipo I dado que la masa mínima de los agujeros negros es distinta de cero, junto con el escalamiento lineal del tiempo de vida de τ de los datos cercanos a la solución crítica, pero además es de tipo II porque se verifica el escalamiento del escalar de Ricci.

A diferencia del estudio realizado por Choptuik, Hirschmann y Marsa [44] para el campo de Yang-Mills, en las simulaciones realizadas no se observó que en la transición del colapso de tipo I al II la masa del agujero negro tienda a cero, si no que existe una discontinuidad en la masa mínima del agujero negro formado caracterizado por un agujero negro de Schwarzschild, al menos con la resolución empleada.

En todos los casos, en el punto de transición, los exponentes críticos γ_1 y γ_2 , son distintos, aunque la teoría de perturbaciones [60] predice un único exponente crítico (o exponente de Lyapunov) para los casos en que se presenta de forma única el colapso de tipo I o II, por lo que queda para un análisis futuro el investigar de forma analítica la transición.

Gráficas de convergencia

En este apartado se incluirán algunas gráficas de convergencia de los capítulos [3](#) y [4](#).

A.1. Gráficas de convergencia del capítulo [3](#)

El colapso de tipo II, al ser un fenómeno en el que se desarrollan grandes gradientes de curvatura en el origen, es preferible verificar la convergencia local, por tal motivo únicamente se mostrarán gráficas de convergencia local de la constricción hamiltoniana, de momentos y \mathcal{C}_Δ^r , usando tres resoluciones distintas, $\Delta\tilde{r} = 0.01, 0.01/\sqrt{2}, 0.005$, para los casos $\xi = 0.1$ y $\xi = 1$ de un dato inicial subcrítico. En el primer caso, se usó el lapso $1+\log$ y en el segundo el lapso que evita choques de norma. Las figuras [A.1](#), [A.2](#), [A.3](#), muestran capturas de la convergencia local a cuarto orden para distintos tiempos. Las curvas han sido reescaladas con el factor apropiado para mostrar convergencia a cuarto orden, la cual se observa en todas las capturas, con excepción de la constricción de momentos a $t = 7.5$ que se observa una disminución de convergencia a tercer orden.

Las figuras [A.4](#), [A.5](#), [A.6](#) muestran las gráficas de convergencia para el caso $\xi = 1.0$. En todos los casos se observa convergencia a cuarto orden.

A. GRÁFICAS DE CONVERGENCIA

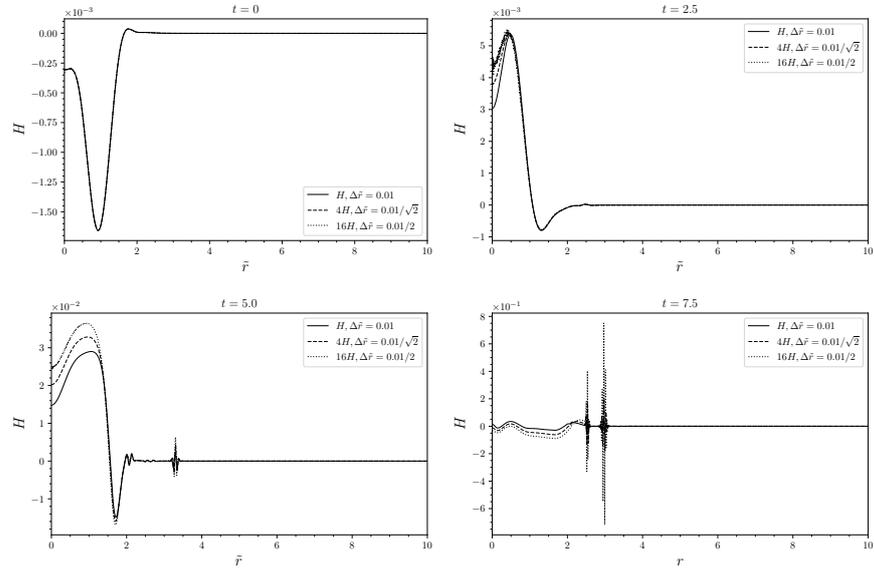


Figura A.1: Capturas de la constricción hamiltoniana a diferentes tiempos coordenados para el caso $\xi = 0.1$ usando el lapso $1+\log$.

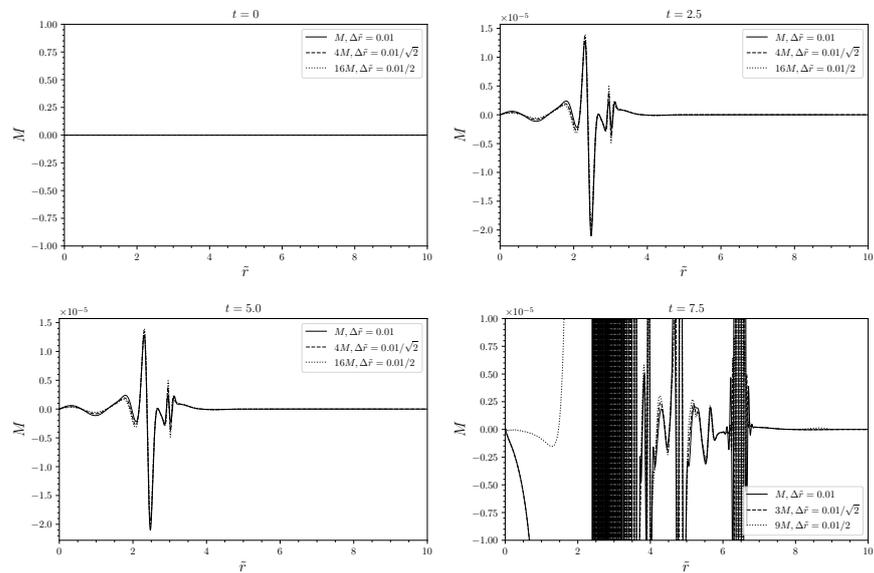


Figura A.2: Capturas de la constricción de momento a diferentes tiempos coordenados para el caso $\xi = 0.1$ usando el lapso $1+\log$.

A.1 Gráficas de convergencia del capítulo 3

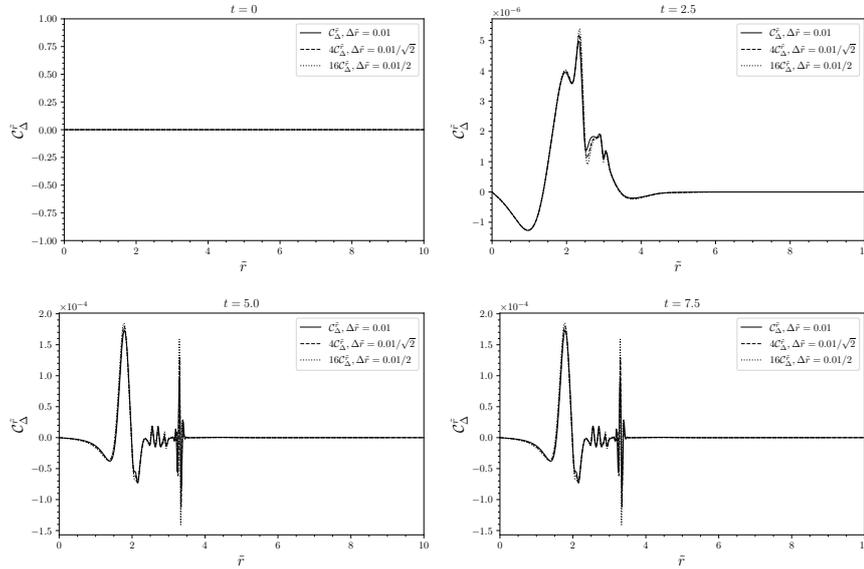


Figura A.3: Capturas de la constricción C_{Δ}^r a diferentes tiempos coordenados para el caso $\xi = 0.1$ usando el lapso $1+\log$.

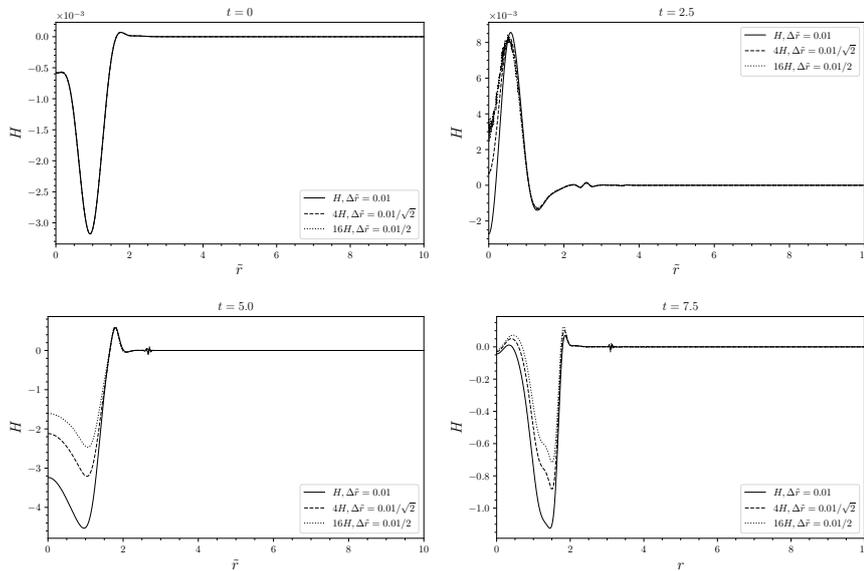


Figura A.4: Capturas de la constricción hamiltoniana a diferentes tiempos coordenados para el caso $\xi = 1.0$ usando el lapso que evita choques de norma.

A. GRÁFICAS DE CONVERGENCIA

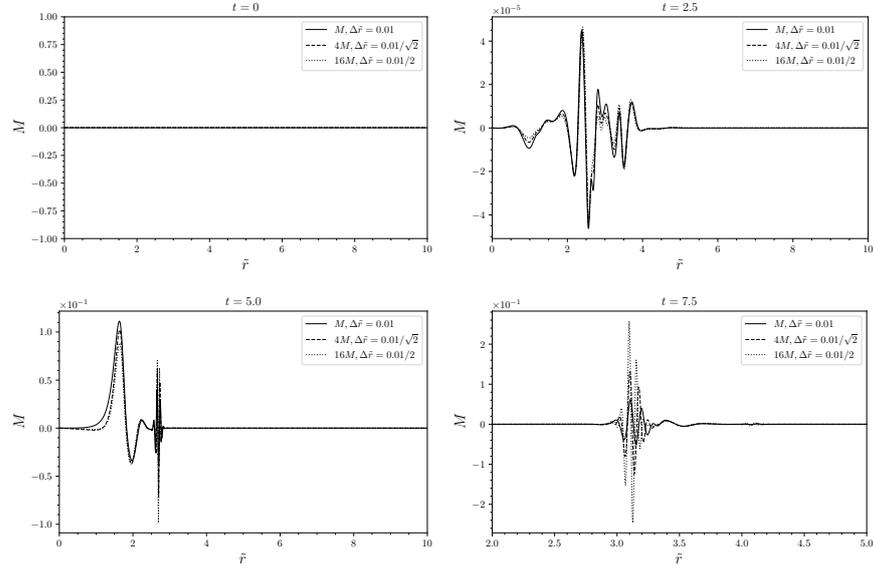


Figura A.5: Capturas de la constricción de momentos a diferentes tiempos coordenados para el caso $\xi = 1.0$ usando el lapso que evita choques de norma.

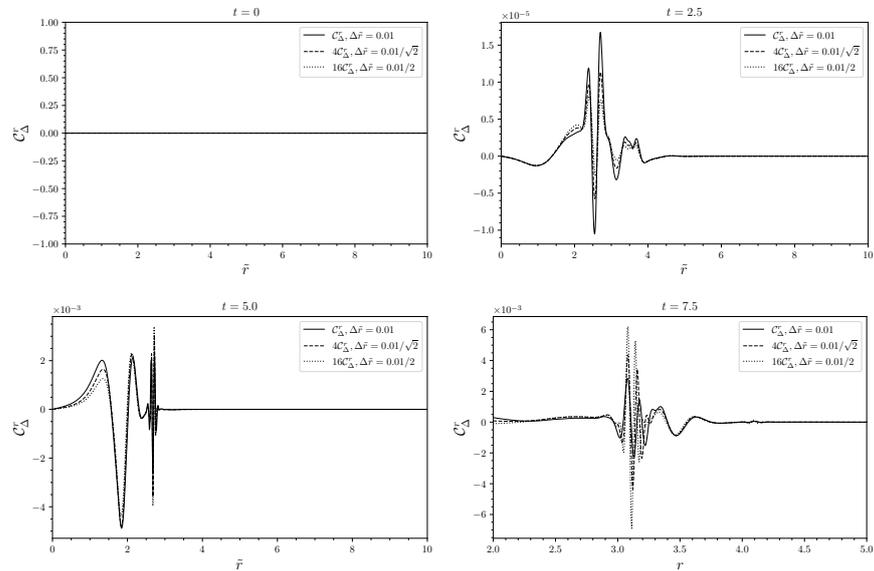


Figura A.6: Capturas de la constricción C_{Δ}^r a diferentes tiempos coordenados para el caso $\xi = 1.0$ usando el lapso que evita choques de norma.

A.2. Gráficas de convergencia del capítulo 4

Las gráficas de convergencia se presentarán por separado dependiendo del tipo de colapso crítico.

A.2.1. Colapso tipo II

Al igual que en caso del colapso crítico del campo acoplado no mínimamente a la gravedad. Se presentarán las gráficas de convergencia local para la constricción hamiltoniana, de momentos y \mathcal{E}_Δ^r , usando tres resoluciones distintas, $\Delta\tilde{r} = 0.01, 0.01/\sqrt{2}, 0.005$ con $\sigma = 0.4$ para un caso subcrítico. Las figuras A.7, A.8 y A.9 muestran convergencia a cuarto orden para $t < 2.0$, para tiempos mayores el factor de convergencia baja a tercer orden, probablemente debido a la dinámica violenta del fenómeno crítico.

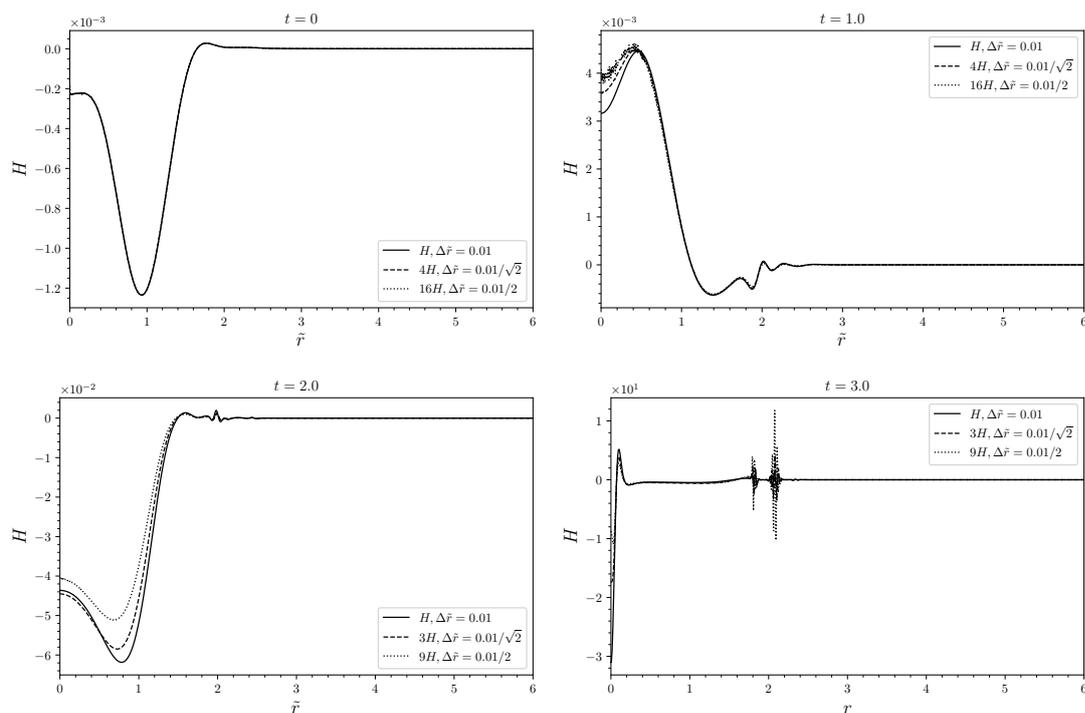


Figura A.7: Capturas de la constricción hamiltoniana a diferentes tiempos coordenados para el campo escalar complejo con un ancho gaussiano $\sigma = 0.4$.

A. GRÁFICAS DE CONVERGENCIA

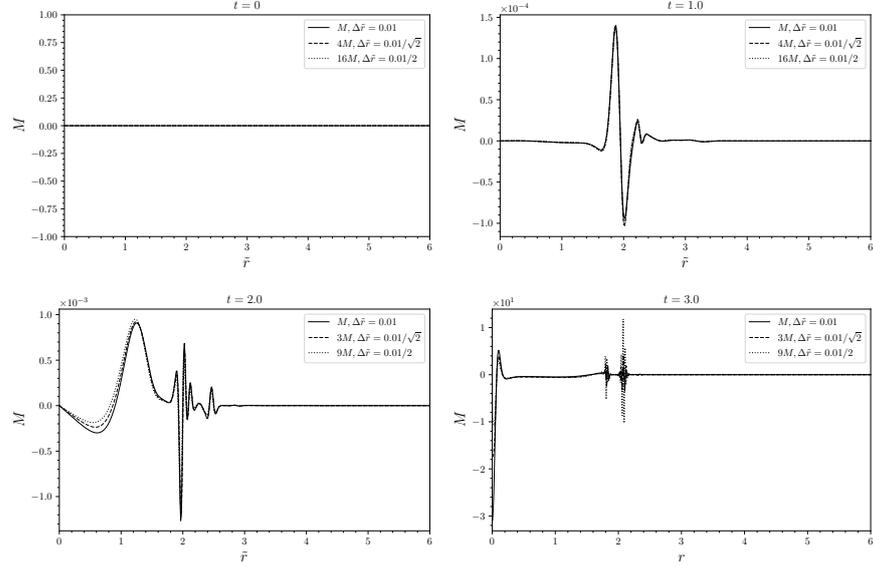


Figura A.8: Capturas de la constricción C_Δ^r a diferentes tiempos coordenados para el campo escalar complejo con un ancho gaussiano $\sigma = 0.4$.

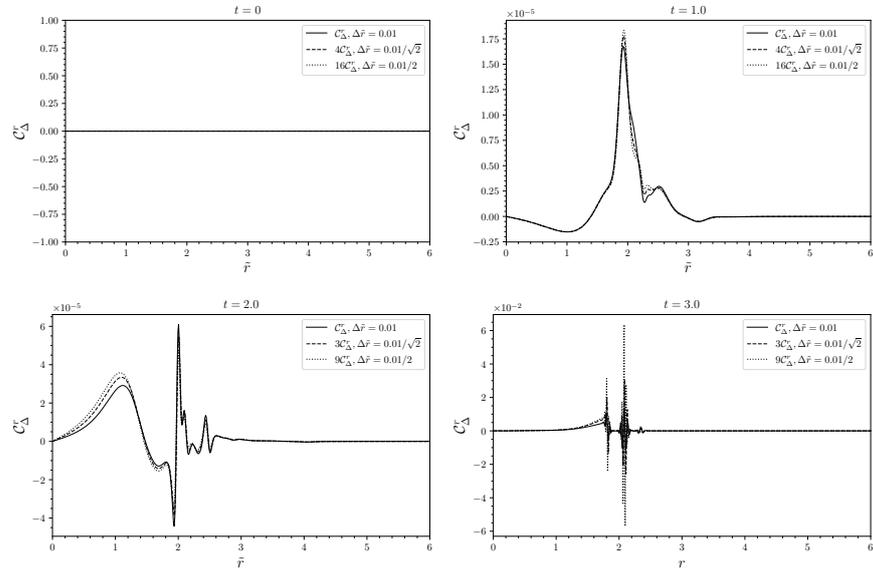


Figura A.9: Capturas de la constricción de momentos a diferentes tiempos coordenados para el campo escalar complejo con un ancho gaussiano $\sigma = 0.4$.

A.2.2. Colapso tipo I

A diferencia del caso anterior, en el colapso de tipo I el espacio es más suave, por lo que para verificar convergencia, será suficiente con mostrar la convergencia global de la norma l_2 de la restricción hamiltoniana, de momentos y \mathcal{C}_Δ^r . La convergencia se mostrará para el caso $\sigma = 2.5$ para un caso subcrítico. Al usar $N = 4$ niveles de refinamiento, se mostrará la convergencia usando tres distintas resoluciones para la malla más gruesa, con $\Delta r = 0.2, 0.2/\sqrt{2}, 0.1$ y la norma de las restricciones se calculará sobre el nivel $N = 1$. La figura [A.10](#) muestra la convergencia de las funciones antes mencionadas. Las curvas han sido reescaladas con el factor apropiado para mostrar convergencia a cuarto orden.

A. GRÁFICAS DE CONVERGENCIA

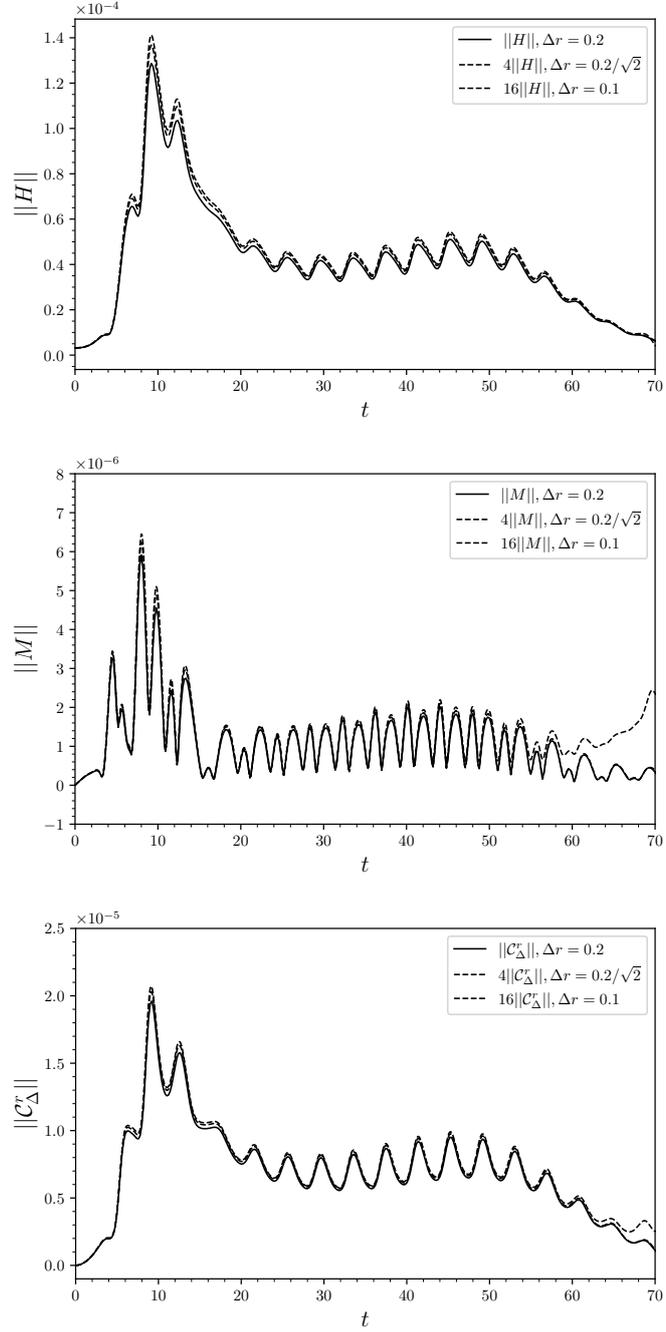


Figura A.10: Convergencia global de la construcción hamiltoniana, de momentos y \mathcal{C}_Δ^r con resoluciones $\Delta r = 0.2, 0.2/\sqrt{2}, 0.1$, para el campo escalar complejo masivo con un ancho gaussiano $\sigma = 2.5$.

Bibliografía

- [1] (2015). *General relativity and gravitation: a centennial perspective*. Cambridge University Press. [25](#)
- [2016] Abbott, B.P. and others (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102. [IX](#)
- [3] Abrahams, A. M. y Evans, C. R. (1993). Critical behavior and scaling in vacuum axisymmetric gravitational collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2980–2983. [X](#)
- [4] Acton, F. (1959). *Analysis of Straight-line Data*. Dover books on intermediate and advanced mathematics. Wiley. [78](#)
- [5] Akbarian, A. y Choptuik, M. W. (2014). Critical collapse in the spherically symmetric Einstein-Vlasov model. *Phys. Rev. D*, 90:104023. [X](#)
- [6] Akbarian, A. y Choptuik, M. W. (2015). Black hole critical behavior with the generalized BSSN formulation. *Phys. Rev. D*, 92(8):084037. [27](#), [42](#)
- [7] Alcubierre, M. (1997). Appearance of coordinate shocks in hyperbolic formalisms of general relativity. *Phys. Rev. D*, 55:5981–5991. [X](#), [13](#), [44](#), [55](#)
- [8] Alcubierre, M. (2003). Hyperbolic slicings of spacetime: singularity avoidance and gauge shocks. *Classical and Quantum Gravity*, 20(4):607–623. [13](#), [44](#), [47](#), [55](#)
- [9] Alcubierre, M. (2005). Are gauge shocks really shocks? *Classical and Quantum Gravity*, 22(19):4071–4081. [13](#)
- [10] Alcubierre, M. (2008). *Introduction to 3+1 numerical relativity*. International series of monographs on physics. Oxford Univ. Press, Oxford. [4](#), [7](#), [20](#), [21](#), [42](#)
- [11] Alcubierre, M., Barranco, J., Bernal, A., Degollado, J. C., Diez-Tejedor, A., Megevand, M., Núñez, D., y Sarbach, O. (2019). Dynamical evolutions of ℓ -boson stars in spherical symmetry. *Class. Quant. Grav.*, 36(21):215013. [30](#)
- [12] Alcubierre, M., Brügmann, B., Diener, P., Koppitz, M., Pollney, D., Seidel, E., y Takahashi, R. (2003). Gauge conditions for long-term numerical black hole evolutions without excision. *Phys. Rev. D*, 67:084023. [12](#)

- [13] Alcubierre, M. y González, J. A. (2005). Regularization of spherically symmetric evolution codes in numerical relativity. *Computer Physics Communications*, 167(2):76 – 84. [10](#)
- [14] Alcubierre, M. y Massó, J. (1998). Pathologies of hyperbolic gauges in general relativity and other field theories. *Phys. Rev. D*, 57:R4511–R4515. [13](#)
- [15] Alcubierre, M. y Mendez, M. D. (2011). Formulations of the 3+1 evolution equations in curvilinear coordinates. *General Relativity and Gravitation*, 43(10):2769. [8](#)
- [16] Alcubierre, M. y Torres, J. M. (2015). Constraint preserving boundary conditions for the Baumgarte–Shapiro–Shibata–Nakamura formulation in spherical symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, 32(3):035006. [15](#)
- [17] Ames, E., Andréasson, H., y Rinne, O. (2021). Dynamics of gravitational collapse in the axisymmetric Einstein–Vlasov system. *Class. Quant. Grav.*, 38(10):105003. [X](#)
- [18] Arnowitt, R., Deser, S., y Misner, C. W. (2008). Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997–2027. [1](#)
- [19] Babiuc, M. C., Kreiss, H.-O., y Winicour, J. (2007). Constraint-preserving Sommerfeld conditions for the harmonic einstein equations. *Phys. Rev. D*, 75:044002. [15](#)
- [20] Bartnik, R. y McKinnon, J. (1988). Particlelike solutions of the einstein-yang-mills equations. *Phys. Rev. Lett.*, 61:141–144. [75](#)
- [21] Baumgarte, T. y Shapiro, S. (2010). *Numerical relativity: solving Einstein’s equations on the computer*. Cambridge University Press. [14](#)
- [22] Baumgarte, T. W. (2018a). Aspherical deformations of the choptuik spacetime. *Phys. Rev. D*, 98:084012. [X](#), [33](#)
- [23] Baumgarte, T. W. (2018b). Aspherical deformations of the Choptuik spacetime. *Phys. Rev. D*, 98(8):084012. [27](#)
- [24] Baumgarte, T. W., Gundlach, C., y Hilditch, D. (2019). Critical phenomena in the gravitational collapse of electromagnetic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 123:171103. [X](#)
- [25] Baumgarte, T. W. y Shapiro, S. L. (1998). Numerical integration of einstein’s field equations. *Phys. Rev. D*, 59:024007. [5](#)
- [26] Bentivegna, E. y Bruni, M. (2016). Effects of nonlinear inhomogeneity on the cosmic expansion with numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 116:251302. [IX](#)
- [27] Berger, M. J. y Olinger, J. (1984). Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53(3):484 – 512. [30](#)

-
- [28] Bernal, A. (2022). Comunicación privada. [71](#)
- [29] Bertotti, B., Iess, L., y Tortora, P. (2003). A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376. [51](#)
- [30] Bizon, P. (1990). Colored black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2844–2847. [75](#)
- [31] Bona, C., Massó, J., Seidel, E., y Stela, J. (1995a). New formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 75:600–603. [12](#)
- [32] Bona, C., Massó, J., Seidel, E., y Stela, J. (1995b). New formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 75:600–603. [40](#)
- [33] Bona, C., Massó, J., Seidel, E., y Stela, J. (1997). First order hyperbolic formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. D*, 56:3405–3415. [12](#), [13](#)
- [34] Bourg, P. y Gundlach, C. (2021). Critical collapse of an axisymmetric ultrarelativistic fluid in $2 + 1$ dimensions. *Phys. Rev. D*, 104:104017. [X](#)
- [35] Brady, P. R., Chambers, C. M., y Goncalves, S. M. (1997). Phases of massive scalar field collapse. *Phys. Rev. D*, 56:6057–6061. [28](#), [57](#)
- [36] Brill, D. R. y Lindquist, R. W. (1963). Interaction energy in geometrostatics. *Phys. Rev.*, 131:471–476. [44](#)
- [37] Buchman, L. T. y Sarbach, O. C. (2007). Improved outer boundary conditions for Einstein’s field equations. *Class. Quant. Grav.*, 24:S307–S326. [15](#)
- [38] Calabrese, G., Lehner, L., y Tiglio, M. (2002). Constraint-preserving boundary conditions in numerical relativity. *Phys. Rev. D*, 65:104031. [15](#)
- [39] Calabrese, G., Pullin, J., Sarbach, O., Tiglio, M., y Reula, O. (2003). Well posed constraint preserving boundary conditions for the linearized Einstein equations. *Commun. Math. Phys.*, 240:377–395. [15](#)
- [40] Campanelli, M., Lousto, C. O., Marronetti, P., y Zlochower, Y. (2006). Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Phys. Rev. Lett.*, 96:111101. [12](#)
- [41] Choptuik, M. W. (1993). Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, 70:9–12. [X](#), [25](#), [26](#), [27](#)
- [42] Choptuik, M. W., Chmaj, T., y Bizoń, P. (1996). Critical behavior in gravitational collapse of a yang-mills field. *Phys. Rev. Lett.*, 77:424–427. [X](#), [75](#)
- [43] Choptuik, M. W., Hirschmann, E. W., Liebling, S. L., y Pretorius, F. (2003). Critical collapse of the massless scalar field in axisymmetry. *Phys. Rev. D*, 68:044007. [27](#)
-

- [44] Choptuik, M. W., Hirschmann, E. W., y Marsa, R. L. (1999). New critical behavior in einstein-yang-mills collapse. *Phys. Rev. D*, 60:124011. [75](#), [85](#)
- [45] Christodoulou, D. y Klainerman, S. (1993). *The Global nonlinear stability of the Minkowski space*. Princeton University Press. [X](#)
- [46] Clough, K. y Lim, E. A. (2016). Critical Phenomena in Non-spherically Symmetric Scalar Bubble Collapse. [X](#)
- [47] Cook, W. (2018). *Numerical relativity in higher dimensional spacetimes*. Tesis doctoral, Cambridge U., DAMTP. [IX](#)
- [48] Damour, T. y Esposito-Farese, G. (1992). Tensor multiscalar theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 9:2093–2176. [38](#)
- [49] Degollado, J. C., Salgado, M., y Alcubierre, M. (2020). On the formation of “supermassive” neutron stars and dynamical transition to spontaneous scalarization. *Phys. Lett. B*, 808:135666. [35](#), [36](#)
- [50] Deppe, N., Kidder, L. E., Scheel, M. A., y Teukolsky, S. A. (2019). Critical behavior in 3d gravitational collapse of massless scalar fields. *Phys. Rev. D*, 99:024018. [X](#), [27](#)
- [51] Eardley, D. M., Hirschmann, E. W., y Horne, J. H. (1995). S duality at the black hole threshold in gravitational collapse. *Phys. Rev. D*, 52:R5397–R5401. [35](#)
- [52] Eppley, K. (1977). Evolution of time-symmetric gravitational waves: Initial data and apparent horizons. *Phys. Rev. D*, 16:1609–1614. [44](#)
- [53] Fernández, I. S., Renkhoff, S., Agulló, D. C., Brüggmann, B., y Hilditch, D. (2022). Evolution of brill waves with an adaptive pseudospectral method. *Phys. Rev. D*, 106:024036. [X](#)
- [54] Friedrich, H. y Rendall, A. (2000). The cauchy problem for the einstein equations. En Schmidt, B. G., editor, *Einstein’s Field Equations and Their Physical Implications*, pp. 127–223, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg. [15](#)
- [55] Garfinkle, D. (1995). Choptuik scaling in null coordinates. *Phys. Rev. D*, 51:5558–5561. [27](#)
- [56] Garfinkle, D. y Duncan, G. C. (1998). Scaling of curvature in subcritical gravitational collapse. *Phys. Rev. D*, 58:064024. [27](#), [28](#), [32](#)
- [57] Gleiser, M. y Watkins, R. (1989). Gravitational stability of scalar matter. *Nuclear Physics B*, 319(3):733–746. [29](#)
- [58] Gourgoulhon, E. (1992). 1d numerical relativity applied to neutron star collapse. *Classical and Quantum Gravity*, 9(S):S117–S125. [IX](#)

-
- [59] Gundlach, C. (1997). Understanding critical collapse of a scalar field. *Phys. Rev. D*, 55:695–713. [24](#), [25](#), [27](#), [33](#), [42](#)
- [60] Gundlach, C. (2003). Critical phenomena in gravitational collapse. *Physics Reports*, 376(6):339 – 405. [24](#), [85](#)
- [61] Gundlach, C. y Martin-Garcia, J. M. (2007). Critical phenomena in gravitational collapse. *Living Rev. Rel.*, 10:5. [25](#)
- [62] Gundlach, C., Price, R. H., y Pullin, J. (1994). Late-time behavior of stellar collapse and explosions. ii. nonlinear evolution. *Phys. Rev. D*, 49:890–899. [27](#)
- [63] Gustafsson, B., Kreiss, H., y Olinger, J. (1995). *Time Dependent Problems and Difference Methods*. Wiley-Interscience Publication. Wiley. [5](#)
- [64] Hamadé, R. S. y Stewart, J. M. (1996). The spherically symmetric collapse of a massless scalar field. *Classical and Quantum Gravity*, 13(3):497–512. [27](#)
- [65] Harada, T., Chiba, T., Nakao, K.-i., y Nakamura, T. (1997). Scalar gravitational wave from oppenheimer-snyder collapse in scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 55:2024–2037. [35](#)
- [66] Harada, T., Yoo, C.-M., Nakama, T., y Koga, Y. (2015). Cosmological long-wavelength solutions and primordial black hole formation. *Phys. Rev. D*, 91:084057. [60](#)
- [67] Hawking, S. W. y Ellis, G. F. R. (1973). *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. [14](#)
- [68] Hawley, S. H. y Choptuik, M. W. (2000). Boson stars driven to the brink of black hole formation. *Phys. Rev. D*, 62:104024. [29](#), [57](#), [59](#), [71](#), [73](#)
- [69] Healy, J. y Laguna, P. (2014). Critical collapse of scalar fields beyond axisymmetry. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1722. [X](#), [27](#)
- [70] Hilditch, D. (2013). An introduction to well-posedness and free-evolution. *International Journal of Modern Physics A*, 28(22n23):1340015. [15](#)
- [71] Hilditch, D., Baumgarte, T. W., Weyhausen, A., Dietrich, T., Brügmann, B., Montero, P. J., y Müller, E. (2013). Collapse of nonlinear gravitational waves in moving-puncture coordinates. *Phys. Rev. D*, 88:103009. [44](#), [55](#)
- [72] Hilditch, D., Weyhausen, A., y Brügmann, B. (2017). Evolutions of centered brill waves with a pseudospectral method. *Phys. Rev. D*, 96:104051. [X](#)
- [73] Hod, S. y Piran, T. (1997a). Critical behavior and universality in gravitational collapse of a charged scalar field. *Phys. Rev. D*, 55:3485–3496. [27](#)

- [74] Hod, S. y Piran, T. (1997b). Fine structure of choptuik’s mass-scaling relation. *Phys. Rev. D*, 55:R440–R442. [33](#)
- [75] Ikeda, T., Yoo, C.-M., y Cardoso, V. (2017). Self-gravitating oscillons and new critical behavior. *Phys. Rev. D*, 96:064047. [60](#)
- [76] Jiménez-Vázquez, E. y Alcubierre, M. (2022a). Critical gravitational collapse of a massive complex scalar field. *Phys. Rev. D*, 106:044071. [57](#)
- [77] Jiménez-Vázquez, E. y Alcubierre, M. (2022b). Critical gravitational collapse of a nonminimally coupled scalar field. *Phys. Rev. D*, 105:064071. [35](#)
- [78] Kaup, D. J. (1968). Klein-gordon geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342. [29](#)
- [79] Kodama, H. (1980). Conserved Energy Flux for the Spherically Symmetric System and the Back Reaction Problem in the Black Hole Evaporation. *Prog. Theor. Phys.*, 63:1217. [60](#)
- [80] Kreiss, H. y Olinger, J. (1973). Methods for the approximate solution of time dependent problems. p. 107 p. At head of title: Global Atmospheric Research Programme (GARP) WMO-ICSU Joint Organizing Committee. [22](#)
- [81] Lattimer, J. M. y Prakash, M. (2007). Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints. *Physics Reports*, 442(1):109 – 165. The Hans Bethe Centennial Volume 1906-2006. [IX](#)
- [82] Lax, P. D. y Richtmyer, R. D. (1956). Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9(2):267–293. [22](#)
- [83] Ledvinka, T. c. v. y Khirnov, A. (2021). Universality of curvature invariants in critical vacuum gravitational collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 127:011104. [X](#)
- [84] LeVeque, R. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich, Department of Mathematics Research Institute of Mathematics. Springer Basel AG. [5](#)
- [85] Liebling, S. L. y Choptuik, M. W. (1996). Black hole criticality in the brans-dicke model. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1424–1427. [35](#)
- [86] Liebling, S. L. y Palenzuela, C. (2012). Dynamical Boson Stars. *Living Rev. Rel.*, 15:6. [29](#)
- [87] Lindblom, L., Scheel, M. A., Kidder, L. E., Owen, R., y Rinne, O. (2006). A New generalized harmonic evolution system. *Class. Quant. Grav.*, 23:S447–S462. [15](#)
- [88] Maliborski, M. y Rinne, O. (2018). Critical phenomena in the general spherically symmetric einstein-yang-mills system. *Phys. Rev. D*, 97:044053. [75](#)

-
- [89] Martín-García, J. M. y Gundlach, C. (1999). All nonspherical perturbations of the choptuik spacetime decay. *Phys. Rev. D*, 59:064031. [27](#)
- [90] May, M. M. y White, R. H. (1966). Hydrodynamic calculations of general-relativistic collapse. *Phys. Rev.*, 141:1232–1241. [X](#)
- [91] Nakamura, T., Oohara, K., y Kojima, Y. (1987). General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 90:1–218. [5](#)
- [92] Neilsen, D. W. y Choptuik, M. W. (2000). Critical phenomena in perfect fluids. *Class. Quant. Grav.*, 17:761–782. [X](#)
- [93] Noble, S. C. y Choptuik, M. W. (2008). Type ii critical phenomena of neutron star collapse. *Phys. Rev. D*, 78:064059. [X](#)
- [94] Noble, S. C. y Choptuik, M. W. (2016). Driven neutron star collapse: Type i critical phenomena and the initial black hole mass distribution. *Phys. Rev. D*, 93:024015. [X](#)
- [95] Novak, J. (1998). Spherical neutron star collapse toward a black hole in a tensor-scalar theory of gravity. *Phys. Rev. D*, 57:4789–4801. [35](#)
- [96] Núñez, D. y Sarbach, O. (2010). Boundary conditions for the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura formulation of Einstein’s field equations. *Phys. Rev. D*, 81:044011. [15](#)
- [97] Olabarrieta, I. I. n. y Choptuik, M. W. (2001). Critical phenomena at the threshold of black hole formation for collisionless matter in spherical symmetry. *Phys. Rev. D*, 65:024007. [X](#)
- [98] Ott, C. D. (2009). The gravitational-wave signature of core-collapse supernovae. *Classical and Quantum Gravity*, 26(6):063001. [IX](#)
- [99] Palenzuela, C. (2020). Introduction to Numerical Relativity. *Front. Astron. Space Sci.*, 7:58. [IX](#)
- [100] Pfeiffer, H. P. (2012). Numerical simulations of compact object binaries. *Classical and Quantum Gravity*, 29(12):124004. [IX](#)
- [101] Pretorius, F. (2009). *Binary black hole coalescence*, pp. 305–369. Springer Netherlands, Dordrecht. [IX](#)
- [102] Pürrer, M., Husa, S., y Aichelburg, P. C. (2005). News from critical collapse: Bondi mass, tails, and quasinormal modes. *Phys. Rev. D*, 71:104005. [27](#)
- [103] Racz, I. (2006). On the use of the Kodama vector field in spherically symmetric dynamical problems. *Class. Quant. Grav.*, 23:115–124. [60](#)
-

- [104] Rein, G., Rendall, A. D., y Schaeffer, J. (1998). Critical collapse of collisionless matter: A numerical investigation. *Phys. Rev. D*, 58:044007. [X](#)
- [105] Rinne, O. (2006). Stable radiation-controlling boundary conditions for the generalized harmonic Einstein equations. *Class. Quant. Grav.*, 23:6275–6300. [15](#)
- [106] Rinne, O. (2020). Type II critical collapse on a single fixed grid: a gauge-driven ingoing boundary method. [27](#)
- [107] Rinne, O., Lindblom, L., y Scheel, M. A. (2007). Testing outer boundary treatments for the Einstein equations. *Class. Quant. Grav.*, 24:4053–4078. [15](#)
- [108] Ruffini, R. y Bonazzola, S. (1969). Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783. [29](#)
- [109] Ruiz, M., Degollado, J. C., Alcubierre, M., Núñez, D., y Salgado, M. (2012). Induced scalarization in boson stars and scalar gravitational radiation. *Phys. Rev. D*, 86:104044. [30](#), [35](#), [36](#), [40](#)
- [110] Salgado, M. (2006). The Cauchy problem of scalar tensor theories of gravity. *Class. Quant. Grav.*, 23:4719–4742. [38](#), [40](#)
- [111] Salgado, M., Río, D. M.-d., Alcubierre, M., y Núñez, D. (2008). Hyperbolicity of scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 77:104010. [40](#)
- [112] Salgado, M., Sudarsky, D., y Nucamendi, U. (1998). Spontaneous scalarization. *Phys. Rev. D*, 58:124003. [35](#)
- [113] Sarbach, O. y Tiglio, M. (2012). Continuum and Discrete Initial-Boundary-Value Problems and Einstein’s Field Equations. *Living Rev. Rel.*, 15:9. [5](#)
- [114] Seidel, E. y Suen, W. (1991). Oscillating soliton stars. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1659–1662. [29](#)
- [115] Seidel, E. y Suen, W.-M. (1990). Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state. *Phys. Rev. D*, 42:384–403. [29](#)
- [116] Sekiguchi, Y. y Shibata, M. (2011). Formation of black hole and accretion disk in a massive high entropy stellar core collapse. *The Astrophysical Journal*, 737(1):6. [IX](#)
- [117] Shapiro, S. L. (2003). Relativistic collapse of rotating supermassive stars to supermassive black holes. *AIP Conference Proceedings*, 686(1):50–60. [IX](#)
- [118] Shibata, M., Nakao, K., y Nakamura, T. (1994). Scalar-type gravitational wave emission from gravitational collapse in brans-dicke theory: Detectability by a laser interferometer. *Phys. Rev. D*, 50:7304–7317. [35](#)

- [119] Shibata, M., Sekiguchi, Y., Uchida, H., y Umeda, H. (2016). Gravitational waves from supermassive stars collapsing to a supermassive black hole. *Phys. Rev. D*, 94:021501. [IX](#)
- [120] Sorkin, E. (2011). On critical collapse of gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 28:025011. [X](#)
- [121] Spherhake, U. (2013). Numerical relativity in higher dimensions. *International Journal of Modern Physics D*, 22(04):1330005. [IX](#)
- [122] Spherhake, U., Berti, E., y Cardoso, V. (2013). Numerical simulations of black-hole binaries and gravitational wave emission. *Comptes Rendus Physique*, 14(4):306 – 317. Gravitational waves / Ondes gravitationnelles. [IX](#)
- [123] Thornburg, J. (2007). Event and apparent horizon finders for 3 + 1 numerical relativity. *Living Reviews in Relativity*, 10(1):3. [14](#)
- [124] Torres Chávez, J. M. (2016). Dinámica de materia cargada en relatividad general. *Tesis de grado, Posgrado en Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México*. [9](#)
- [125] Visinelli, L. (2021). Boson stars and oscillatons: A review. *Int. J. Mod. Phys. D*, 30(15):2130006. [29](#)
- [126] Wainwright, C. L., Johnson, M. C., Peiris, H. V., Aguirre, A., Lehner, L., y Liebling, S. L. (2014). Simulating the universe(s): from cosmic bubble collisions to cosmological observables with numerical relativity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(03):030–030. [IX](#)
- [127] Wald, R. M. (1997). Gravitational collapse and cosmic censorship. pp. 69–85. [XI](#)
- [128] Witek, H. (2013). Numerical relativity in higher-dimensional space-times. *Int. J. Mod. Phys. A*, 28:1340017. [IX](#)
- [129] York, Jr., J. W. (1979). Kinematics and dynamics of general relativity. En Press., C. U., editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pp. 83–126. [4](#)