UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estructura diferenciable en espacios métricos medibles

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Angel Castillo López

TUTOR

Doctor Oscar Alfredo Palmas Velasco

CD. MX. 2023

Agradecimientos

Esta tesis fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN101322. Agradezco a la DGAPA-UNAM el apoyo recibido.
Muchas gracias a mi familia y amigos que apoyaron mis estudios; agradezco especialmente a mis queridos amigos Francisco Ceballos y Joel Tinoco (†) que me motivaron a estudiar lejos de casa, a mi asesor Oscar Palmas cuyas comentarios fueron muy importantes para esta tesis y que me ayudó a formarme como matemático, a mis sinodales que me dieron un panorama más amplio de los espacios que admiten estructura diferenciable, a Arianna Tabares que nos ayudó con los trámites relativos al PAPIIT.
Este trabajo se hizo en LaTeX, particularmente agradezco a Sturmm, Niederberger, Pantigny creadores de *The tcolorbox package*, *The acro package*,*The witharrows package* respectivamente, que sin lugar a dudas mejoraron la legibilidad de esta tesis.
Cualquier comentario acerca de este trabajo, no dudes en contactarme a mi correo: luisangelcastillol314@gmail.com

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

Nuestro objetivo en este trabajo es extender la noción de estructura diferenciable para una variedad (diferenciable) a una clase más amplia de espacios. Sabemos que cualquier variedad diferenciable es metrizable, así que a la clase más grande de espacios que nos gustaría extender la noción de variedad sería a la clase de espacios métricos. Así, lo que buscamos es dar condiciones suficientes para que nuestro espacio métrico tenga una estructura diferenciable. En [Kei04a] se demuestra que si el espacio es duplicante y satisface la $p-$desigualdad de Poincaré entonces tiene estructura diferenciable. En esta tesis daremos todos los detalles de la construcción de esta estructura diferenciable.

1.1. Estructura diferenciable.

Primero motivemos el cómo vamos a extender los conceptos relacionados a las variedades diferenciables. El precursor de varios trabajos relativos a la estructura diferenciable es [Che99]; la manera en que se da la idea de estructura es a través de las funciones Lipschitz. Otro trabajo en el cual es clara la relación entre la estructura diferenciable y las funciones Lipschitz es [Rad20], en el cual se muestra que si una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es localmente Lipschitz entonces f es diferenciable **casi donde sea** (*cds*); como la implicación conversa se cumple, nos da una idea de cómo caracterizar a las funciones diferenciables. Por lo anterior, si consideramos una definición de diferenciablidad casi donde sea en vez de una global, las funciones diferenciables son las funciones localmente Lipschitz, la ventaja es que las funciones localmente Lipschitz están definidas para cualquier espacio métrico. Por esto mismo estaremos trabajando en un espacio métrico con una medida compatible con la métrica, lo cual nos lleva a la siguiente:

Definición 1.1.1
Un **espacio métrico medible** (*emm*) es una terna (X, d, μ) de tal manera que (X, d) es espacio métrico, y μ es una medida de Borel, es decir $\mathrm{Dom}(\mu) = \mathbb{B}((X, d))$.

De la definición de espacio métrico medible es claro que tenemos toda la información de la terna al pedir una medida de Borel en (X, d). Por lo que usualmente sólo haremos la referencia a que la medida sea de Borel y no a la terna (X, d, μ).
Como hemos mencionado, una manera de extender el concepto de diferenciabilidad utiliza las funciones Lipschitz, por lo que es de esperar que se haga un análisis mediante funciones Lipschitz de la variedad en sí, que es lo que se hace en [LV77]. Se da una noción más fuerte de variedad al considerar que nuestro espacio es localmente lipeomorfo a algún abierto de $\mathbb{R}^n$, esto es que podemos mandar a algún abierto de nuestro espacio a un abierto de $\mathbb{R}^n$ con una función biyectiva Lipschitz con inversa Lipschitz. A este tipo de variedad se conoce como *variedad Lipschitz*[1].
Lo anterior nos dice que estaremos trabajando en una variedad Lipschitz X con una medida de Borel μ y definiremos una noción de diferenciabilidad casi donde sea en X mediante las funciones Lipschitz de X a $\mathbb{R}$. Como vamos a estar trabajando

[1] Nota que al pedir lipeomorfismo pedimos que nuestra variedad sea un espacio métrico.

con el espacio de las funciones Lipschitz de X introducimos la siguiente notación: definimos LIP(X, d) como el conjunto de todas las funciones Lipschitz real valuadas en (X, d).
Dicho lo anterior damos la siguiente:

Definición 1.1.2: Estructura diferenciable-medible fuerte.

Sea (X, d, μ) un espacio métrico medible, $\mathcal{V}$ subespacio vectorial de LIP(X) (esto lo denotaremos como $\mathcal{V} \leq_{\text{ev}}$ LIP(X)) y una familia de parejas $\left\{(X_n, \mathrm{x}_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ a las cuales llamaremos *parches coordenados* que satisfacen lo siguiente:

- Los conjuntos $\left\{X_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ son medibles y tienen medida positiva.
- Cada función x_n podemos verla de la siguiente manera:

$$\mathrm{x}_n = \left(\mathrm{x}_n^{(1)}, \dots, \mathrm{x}_n^{N(n)}\right) : X_n \to \mathbb{R}^{N(n)}$$

  Donde $N(n) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathrm{x}_n^{(i)} \in \mathcal{V}\, \forall i \in \{1, \dots, N(n)\}$. En el caso que $N(n) = 0$ consideraremos a x_n como la función vacía.

Diremos que $\left\{\left(X_n, \mathrm{x}_n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **estructura diferenciable-medible fuerte** *para* (X, d, μ) (o simplemente que es una **estructura diferenciable fuerte** *para* (X, d, μ) si no hay riesgo de confusión) con respecto a $\mathcal{V}$ si:

1 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

2 Existe $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $N(n) \leq N\ \forall n \in \mathbb{N}$.

3 Para cada $f \in \mathcal{V}$ y para cada parche coordenado $\left(X_n, \mathrm{x}_n\right)$ se satisface lo siguiente:
Para casi todo $x \in X$ existe una única función medible $df_n(x) : X_n \to \mathbb{R}^{N(n)}$ tal que:

$$\lim_{y\to x} \frac{\left|f(y) - f(x) - df_n(x) \cdot \left(\mathrm{x}_n(y) - \mathrm{x}_n(x)\right)\right|}{d(y, x)} = 0 \tag{1.1}$$

Bajo estas condiciones definimos lo siguiente:

- Al menor entero que satisfaga el punto 2 lo llamaremos la *dimensión de la estructura diferenciable* $\left(\left(X_n, \mathrm{x}_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Diremos que una estructura diferenciable-medible fuerte es *no degenerada* si para todos sus parches coordenados $\left(X_n, \mathrm{x}_n\right)$ se cumple $N(n) \geq 1$.
- Cuando no demos explícitamente a $\mathcal{V}$ asumiremos que la estructura diferenciable-medible fuerte la estamos tomando con respecto a $\mathcal{V} = $ LIP(X).

Observación 1.1.3 Aunque en las variedades topológicas es posible que cada componente tenga su propia dimensión, el análisis que hagamos de esta tiene que limitarse a las componentes que tienen la dimensión de la estructura diferenciable. El motivo es que las componentes de dimensión menor a la de la estructura diferenciable tienen medida cero así que el punto 3 se cumple.
Otro punto a resaltar es que las propiedades básicas de las derivadas se cumplen para esta definición de estructura diferenciable.

Como ya hemos dicho queremos dar condiciones para que esta estructura diferenciable exista. Además de pedir que el espacio sea duplicante y satisfaga la $p-$desigualdad de Poincaré es de esperarse se pedirán condiciones de regularidad sobre el espacio (que (X, d) sea completo) y sobre la medida (que μ sea de Radon); definiremos más adelante estas nociones. Con estas condiciones veremos que tenemos una estructura diferenciable fuerte. A continuación enunciaremos el resultado principal de

[Kei04a] y de esta tesis:

Teorema 1.1.4:
Sean (X, d, μ) espacio métrico medible con (X, d) $C-$duplicante localmente compacto y μ medida de Radon gruesa, $\mathcal{V} \leq_{\text{ev}} \text{LIP}(X)$ tal que existe $K \geq 1$ que satisface

$$\text{Lip} f(x) \leq K \, \text{lip} f(x) \quad \forall f \in \mathcal{V},$$

para casi todo $x \in X$; cuando una condición se cumpla casi donde sea usaremos la notación $\widehat{\forall} x \in X$.
Entonces (X, d, μ) admite una estructura diferenciable-medible fuerte con respecto a $\mathcal{V}$ de dimensión acotada superiormente por una constante que únicamente depende de C, K.

Definiremos que es $C-$duplicante más adelante. La prueba esencialmente es usar el Teorema de Encaje de Assouad [Ass83] el cual nos dice intuitivamente que bajo ciertas condiciones, el espacio se puede pensar como un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 2

Análisis en espacios duplicantes.

Como ya se discutió al momento de enunciar el teorema principal, pediremos varias condiciones de regularidad sobre nuestro espacio. Como ya mencionamos hay varias nociones que son completamente de esperarse. La condición que es poco usual es la de que nuestro espacio sea duplicante. Esta condición en un espacio métrico suficientemente regular nos dará condiciones para definir a la estructura diferenciable.

2.1. Resultados básicos.

En esta tesis concurren diversas nociones de análisis real, teoría de la medida, topología y geometría, entre otras áreas de las matemáticas. Asumiremos los resultados básicos que se suelen ver en los cursos de análisis matemático, teoría de la medida y topología. El lector puede tomar como referencia a los textos [Fol99], [Gra16] y [Dug66].
Con respecto a la notación, en esta tesis usaremos la "más usual". En un espacio métrico (X, d) usaremos la siguiente notación para las bolas y esferas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B(x,r)} &= \{y \in X \mid d(y,x) < r\}, \\ \boldsymbol{B[x,r]} &= \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}, \\ \boldsymbol{S(x,r)} &= \{y \in X \mid d(y,x) = r\}. \end{aligned}$$

A lo largo de este trabajo consideraremos al conjunto $B(x,r) \setminus \{x\}$, al cual llamaremos "la bola agujerada de x de radio r" así que usaremos la siguiente notación:

$$\circledcirc \boldsymbol{(x,r)} = B(x,r) \setminus \{x\} = \{y \in X | 0 < d(y,x) < r\}.$$

En general cuando no haya ningún riesgo de confusión, al espacio métrico (X, d) lo denotaremos simplemente por X. Debido a la naturaleza de este trabajo trataremos con espacios topológicos y espacios medibles así que al espacio métrico X siempre lo equiparemos con la topología inducida por la métrica y con la σ-álgebra de Borel, estas las denotaremos por τ_d, $\mathbb{B}(X, d)$ (o simplemente por $\mathbb{B}(X)$ si no hay riesgo de confusión), respectivamente. Por lo que cuando trabajemos con el espacio métrico medible (X, d, μ) asumiremos que μ está definida en $\mathbb{B}(X, d)$.
Ahora daremos la noción de medida regular.

Definición 2.1.1: Medidas regulares.

Sea μ una medida de Borel en X y $E \subset X$ medible, diremos que μ es **medida**:

- **Regular por fuera de E** si
$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) \mid U \supset E \text{ con } U \text{ abierto}\}. \tag{2.1}$$

- **Regular por dentro de E** si
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E \text{ con } K \text{ compacto}\}. \tag{2.2}$$

- **Regular en E** si μ es regular por dentro y por fuera de E.

- **Regular** si μ es regular en todo subconjunto medible.

Definición 2.1.2: Medida de Radon.

Sea μ una medida de Borel en X, de tal manera que X es un espacio topológico **localmente compacto y Hausdorff** (T_2) (lch). Diremos que μ es una **medida de Radon** si:

- Es finita en todos los conjuntos compactos.

- Regular por fuera en los borelianos.

- Regular por dentro en los abiertos.

Usaremos varios resultados de convergencia de funciones. Usaremos la notación usual de convergencia $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ y las notaciones $f_n \xrightarrow{u} f$, $f_n \xrightarrow{cds} f$ para las convergencias uniforme, casi donde sea, respectivamente.

Teorema 2.1.3: Teorema de Egoroff

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita, sean $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$ de tal manera que f_n converge a $f \in L^1(X)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \varepsilon$ de tal forma que f_n converge a f de manera uniforme en $X \setminus A$.

Teorema 2.1.4: Teorema de Lusin

Sea μ una medida de Radon en (X, Σ) y sea $f \in L^1(X)$ tal que se anula fuera de un conjunto de medida finita. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $g : X \to \mathbb{R}$ función continua con soporte compacto de tal manera que f, g coinciden salvo en un conjunto de medida menor a ε.

Estos resultados los usaremos para tomar de manera adecuada a ciertos conjuntos en nuestras pruebas; la demostración de los mismos se encuentra en [Fol99].

2.1.1. Puntos de densidad.

Como ya hemos mencionado la idea para darle una estructura diferenciable a nuestro espacio métrico medible es usar el Teorema de Encaje de Assouad para definir una estructura diferenciable a partir de la estructura de algún $\mathbb{R}^n$. La manera en que tomamos a la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^n$ es a partir de los puntos de densidad. A continuación los definiremos.

Teorema 2.1.5

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| d\lambda = 0$.

A los puntos que cumplen $\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| d\lambda = 0$ se les llama *puntos de densidad de λ*. La prueba se encuentra en [Fol99].

Límite inferior y superior.

Como es de esperarse usaremos varios resultados aproximativos a lo largo de este trabajo. Como sabemos los límites inferiores y superiores son bastante útiles debido a que dan una idea de proximidad, pero a diferencia del límite usual estos siempre existen. En un curso básico de análisis se definen estos conceptos para sucesiones. A continuación daremos la versión general.

Definición 2.1.6: Límite superior e inferior de una función.

Sea (X, d_X) espacio métrico, $x_0 \in X$ y $f : X \to \mathbb{R}$. Definimos:

- El límite superior de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$ como:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{c \downarrow 0} \left(\sup_{x \in \odot(x_0, c)} f(x) \right). \tag{2.3}$$

- El límite inferior de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$ como:

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{c \downarrow 0} \left(\inf_{x \in \odot(x_0, c)} f(x) \right). \tag{2.4}$$

eamos que esta noción extiende a la nociones de límite superior e inferior de una sucesión. De la definición anterior se sigue inmediatamente lo siguiente:

Observación 2.1.7

1.
$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{c > 0} \left(\inf_{x \in \odot(x_0, c)} f(x) \right) \qquad \limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{c > 0} \left(\sup_{x \in \odot(x_0, c)} f(x) \right).$$

2. Considerando valores extendidos tenemos que los límites inferiores y superiores de una función siempre existen.

Tendremos una caracterización de los límites superior e inferior por sucesiones similar a la del límite, tal como se puede notar en el siguiente:

Teorema 2.1.8: Caracterización de $\liminf, \limsup$ a través de sucesiones.

Sea (X, d_X) espacio métrico, $x_0 \in X$ y $f : X \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- $\limsup_{x \to x_0} f(x) = l$.
- Para cada sucesión en x tal que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ se tiene $\limsup_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Se tiene una caracterización similar para el límite inferior.

Como estaremos trabajando en un espacio métrico medible, podemos pensar que la idea de aproximación del límite puede ser *cds* por lo que damos la siguiente:

Definición 2.1.9: Límite aproximado

Sea (X, d, μ) espacio métrico medible y $f.g : X \to \mathbb{R}$. Decimos que $l \in \mathbb{R}$ es el **límite aproximado** de f en x_0 si: $\forall \varepsilon > 0$ se satisface:

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu\left(\left\{ y \in B(x_0, r) \mid |f(y) - l| \geq \varepsilon \right\}\right)}{\mu\left(B(x_0, r)\right)} = 0. \tag{2.5}$$

Si la condición anterior se satisface, escribimos $\operatorname{aplim}_{y \to x_0} f(x) = l$.

El siguiente resultado hace claro que el límite aproximado da la noción que queremos.

Observación 2.1.10 Sea (X, d, μ) espacio métrico medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{aplim}_{x \to x_0} f(x) = \operatorname{aplim}_{x \to x_0} g(x)$ si y sólo si $f = g$ casi donde sea en una vecindad de x_0. Esto se generaliza para todo el espacio de la siguiente manera: $\operatorname{aplim}_{y \to x} f(y) = \operatorname{aplim}_{y \to x} g(y)\ \forall x \in X$ si y sólo si $f = g$ casi donde sea

Damos la definición de límite aproximado ya que da una idea de aproximación más general para espacio métrico medible. En virtud de esto podemos considerar la noción de estructura diferenciable débil, que se obtiene de la misma manera que definimos la estructura diferenciable fuerte pero en vez de considerar el límite usual consideremos el límite aproximado.

2.1.2. Funciones semicontinuas.

Definición 2.1.11: Funciones *sci* y *scs*.

Sea (X, τ) un espacio topológico y $f \in C(X)$ decimos que f es:

- **Semicontinua inferiormente** (*sci*) si $f^{-1}[I] \in \tau\ \forall I \in \mathbb{R}_{\rightarrow}$.
- **Semicontinua superiormente** (*scs*) si $f^{-1}[I] \in \tau\ \forall I \in \mathbb{R}_{\leftarrow}$.

Aquí estamos tomando la siguiente:

Notación

$$\mathbb{R}_{\leftarrow} := \{(-\infty, t)\}_{t \in \mathbb{R}} \qquad \mathbb{R}_{\rightarrow} := \{(t, \infty)\}_{t \in \mathbb{R}}\,. \tag{2.6}$$

A continuación daremos otra manera de caracterizar a las funciones semicontinuas inferiormente:

Lema 2.1.12 Sea $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. f es semicontinua inferiormente.
2. $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $d(y, x) < \delta \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f(y)$.

Demostración: Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

1) ⇒ 2) Supongamos que f es *sci*.

De esta manera $f^{-1}[(f(x) - \varepsilon, \infty)]$ es vecindad abierta de x por lo que $\exists \delta > 0$ tal que $d(y, x) < \delta \Rightarrow y \in f^{-1}[(f(x) - \varepsilon, \infty)]$; así concluimos que $\exists \delta > 0$ que satisface:

$$d(y, x) < \delta \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f(y)$$

2) ⇒ 1) Supongamos que se satisface 2).

Sea $t \in \mathbb{R}$, supongamos que $y \in f^{-1}[(t, \infty)]$. De esta manera $f(y) > t$ por lo que $f(y) - t > 0$. Por hipótesis $\exists \delta > 0$ tal que $\forall z \in B(x, \delta)$ se satisface:

$$\begin{aligned} f(y) - (f(y) - t) &< f(z) \\ t &< f(z). \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $f^{-1}[(t, \infty)]$ es abierto.

■

Tenemos un resultado similar para las funciones semicontinuas superiormente:

Lema 2.1.13 Sea $f : (X,d) \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. f es semicontinua superiormente.
2. $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $f(x) + \varepsilon > f(y)$.

La prueba es análoga al Lema 2.1.12.
Ahora veremos que las funciones semicontinuas superiormente y semicontinuas inferiormente se portan bien al multiplicar por constantes positivas. Enunciamos el resultado para funciones semicontinuas superiormente:

Teorema 2.1.14:
Si f es semicontinua superiormente y $c > 0$, entonces cf es semicontinua superiormente.

Demostración: Sea $I \in \mathbb{R}_{\rightarrow}$, como $c > 0$ el intervalo $\frac{1}{c}I$, está bien definido; más aún $\frac{1}{c}I \in \mathbb{R}_{\rightarrow}$. Como f es semicontinua superiormente se tiene que $f^{-1}\left[\frac{1}{c}I\right]$ es abierto, y como:

$$\begin{aligned} y \in f^{-1}\left[\tfrac{1}{c}I\right] &\Leftrightarrow f(y) \in \tfrac{1}{c}I && \text{Pues } c>0 \\ &\Leftrightarrow cf(y) \in I \\ &\Leftrightarrow y \in (cf)^{-1}[I]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De (2.7) inferimos que $(cf)^{-1}[I] = f^{-1}\left[\frac{1}{c}I\right]$, lo cual prueba que $(cf)^{-1}[I]$ es abierto. Así, hemos demostrado que f es semicontinua inferiormente.

■

Veamos que al tomar el ínfimo de una familia de funciones semicontinuas superiormente, esta función vuelve a ser una función semicontinua superiormente.

Lema 2.1.15 Sea $(f_i)_{i\in\Gamma}$ una familia de funciones semicontinuas superiormente entonces $\inf_{i\in\Gamma} f_i$ es semicontinua superiormente.

Notación A lo largo de este trabajo para una familia de funciones $(f_i)_{i\in\Gamma}$ tal que $f_i : X \to \mathbb{R}\ \forall i \in \Gamma$ definimos a las funciones $\sup_{i\in\Gamma} f_i, \inf_{i\in\Gamma} f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas por

$$\left(\sup_{i\in\Gamma} f_i\right)(x) = \sup_{i\in\Gamma} f_i(x) \qquad \left(\inf_{i\in\Gamma} f_i\right)(x) = \inf_{i\in\Gamma} f_i(x)$$

Pidiendo las condiciones adecuadas sobre $(f_i)_{i\in\Gamma}$ podemos considerar que el codominio de las funciones $\sup_{i\in\Gamma} f_i, \inf_{i\in\Gamma} f_i$ es $\mathbb{R}$.
Demostración del Lema 2.1.15: En efecto, consideremos $F = \inf_{i\in\Gamma} f_i$ y $I = (-\infty, t) \in \mathbb{R}_{\leftarrow}$, basta con notar que

$$F_i^{-1}[I] = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}[I]. \tag{2.8}$$

Ya que $f_i^{-1}[I]$ son abiertos y por tanto $F^{-1}[I]$ lo es.
La contención $F^{-1}[I] \supset \bigcup_{i\in\Gamma} f_i^{-1}[I]$ se sigue inmediatamente, pues el ínfimo es cota inferior. Por otro lado, si $x \in F^{-1}[I]$ tenemos que $\inf_{i\in\Gamma} f_i(x) < t$, por lo que $\exists j \in I$ tal que $f_j(x) < t$. Así $x \in \bigcup_{i\in\Gamma} f_i^{-1}[I]$ y por lo tanto (2.8) se satisface, lo cual concluye la prueba.

■

Análogamente podemos demostrar que al tomar el supremo de una familia de funciones semicontinuas superiormente, esta función vuelve a ser una función semicontinua superiormente.
De estos resultados obtenemos inmediatamente el siguiente:

Corolario 2.1.16 Sea $\{f_i\}_{i\in\Gamma}$ una familia de funciones de $X \to \mathbb{R}$. Si f_i es semicontinua inferiormente entonces las funciones $\sup_{i\in\Gamma} f_i, \inf_{i\in\Gamma} f_i$ son medibles.

2.2. Funciones Lipschitz.

Definición 2.2.1: Funciones de tipo Lipschitz

Sean $(X,d),(Y,\rho)$ espacios métricos, $f : X \to Y$ y $C \geq 0$.

- Diremos que f es **$C-$Lipschitz** si $\rho(f(x), f(y)) \leq Cd(x,y)\forall x, y \in X$. Diremos que f es **Lipschitz** si $\exists C_0 \geq 0$ tal que f es C_0-Lipschitz.
- **La constante (global) de Lipschitz** de f, es $\boldsymbol{\mathscr{Lip}\,(f)} := \inf\{C > 0 : f \text{ es } C-\text{Lipschitz}\}$.
- El espacio de funciones Lipschitz real valuadas, $\{f : (X,d) \to \mathbb{R} : f \text{ es Lipschitz}\}$, lo denotaremos por $\mathbf{LIP}\,(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$. Cuando se entienda a qué distancia nos referimos simplemente escribiremos $\mathbf{LIP}\,(\boldsymbol{X})$.

Observación 2.2.2 Notemos lo siguiente:

1. $\boldsymbol{\mathscr{Lip}\,(f)}$ **está bien definida.** En efecto $\{C \geq 0 : f \text{ es } C-\text{Lipschitz}\}$ es no vacío y está acotado inferiormente por 0 así que existe $\inf\{C \geq 0 : f \text{ es } C-\text{Lipschitz}\}$; más aún $\mathscr{Lip}\, f \geq 0$.
2. $\boldsymbol{\mathscr{Lip}\,(f)}$ **es la mejor constante de Lipschitz.** Esto es porque f es $L-$Lipschitz para toda $L \geq \mathscr{Lip}(f)$, pero f no es $L-$Lipschitz para $L < \mathscr{Lip}(f)$.

Lema 2.2.3 El espacio $\text{LIP}(X)$ es subespacio vectorial de $C(X)$.

Demostración: En efecto. Se cumple lo siguiente:

- $0 \in \text{LIP}(X)$.
- Si $f, g \in \text{LIP}(X)$ entonces $f + g \in \text{LIP}(X)$.

  Supongamos que $f, g \in \text{LIP}(X)$, de esta manera $\exists A, B \geq 0$ tales que para cualesquiera x, y se satisface:

$$|f(x) - f(y)| \leq Ad(x,y). \tag{2.9}$$
$$|g(x) - g(y)| \leq Bd(x,y). \tag{2.10}$$

  Sumando (2.9) y (2.10) inferimos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| &\leq Ad(x,y) + Bd(x,y) \\ |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq (A+B)d(x,y). \end{aligned} \tag{2.11}$$

  Aplicando la desigualdad del triángulo y agrupando adecuadamente

  La desigualdad (2.11) prueba que $f + g$ es $(A + B)-$Lipschitz, así $f + g \in \text{LIP}(X)$.

- Si $f \in \mathrm{LIP}(X)$ entonces $\lambda f \in \mathrm{LIP}(X)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

  Supongamos que $f \in \mathrm{LIP}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, de esta manera $\exists A \geq 0$ que satisface (2.9) por lo cual

  $$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq |\lambda| A d(x, y).$$

  Por lo cual λf es $|\lambda| A-$Lipschitz por lo cual $\lambda f \in \mathrm{LIP}(X)$.

De los puntos anteriores concluimos que $\mathrm{LIP}(X)$ es espacio vectorial.

■

A continuación veremos que hay una seminorma bastante natural para $\mathrm{LIP}(X)$.

Lema 2.2.4 $\mathscr{Lip}(\cdot)$ es una seminorma para $\mathrm{LIP}(X)$.

Demostración: En efecto. Sean $f, g \in \mathrm{LIP}(X)$ arbitrarias y $x, y \in X$ con $x \neq y$:

I) **$\mathscr{Lip}(\cdot)$ es no negativa.**

Esto es punto 1 de la Observación 2.2.2

II) **$\mathscr{Lip}(\lambda f) = |\lambda| \mathscr{Lip}(f)$.**

$$\begin{aligned}
\mathscr{Lip}(\lambda f) &= \sup\left\{\frac{|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)|}{d(x, y)}, x, y \in X \text{ con } x \neq y\right\} \\
&= \sup\left\{|\lambda| \cdot \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}, x, y \in X \text{ con } x \neq y\right\} \\
&= |\lambda| \cdot \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}, x, y \in X \text{ con } x \neq y\right\} \\
&= |\lambda| \mathscr{Lip}(f).
\end{aligned}$$

Pues $\sup$ *saca escalares no negativos*
i.e. $\sup rA = r \sup A\ \forall r \geq 0\ \forall A \subset \mathbb{R}$

III) **$\mathscr{Lip}(f+g) \leq \mathscr{Lip}(f) + \mathscr{Lip}(g)$.**

Por la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$
$$\frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{d(x, y)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} + \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \leq \mathscr{Lip}(f) + \mathscr{Lip}(g)$$

Por hipótesis $\mathscr{Lip}(f), \mathscr{Lip}(g) < +\infty$, de esta manera tenemos que

$$\mathscr{Lip}(f+g) \leq \mathscr{Lip}(f) + \mathscr{Lip}(g) < +\infty.$$

■

Vale la pena resaltar que $\mathscr{Lip}$ no puede definir una norma. Para ello veamos la siguiente:

Proposición 2.2.5 Sea $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Si $\mathscr{Lip}\, f = 0$ entonces f es constante.

Demostración: Supongamos que $\mathscr{Lip}\, f = 0$. Como f es Lipschitz del punto 2 de la Observación 2.2.2 se tiene que f es $\mathscr{Lip}\, f-$Lipschitz, por lo cual es $0-$Lipschitz, así considerando $x_0 \in X$ un punto dado tenemos que:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 0 d(x, x_0) \qquad \forall x \in X,$$

por lo cual $|f(x) - f(x_0)| = 0$, así que $f(x) = f(x_0) \forall x \in X$, es decir f es constante en todo su dominio.

■

En la Proposición 2.2.5 f puede ser cualquier constante, no tiene porque ser la constante 0, así que $\mathscr{Lip}(\cdot)$ no puede ser una norma para LIP(X).

2.2.1. Lipeomorfismos.

En el análisis de funciones Lipschitz, al igual que en otras ramas de las matemáticas nos interesa estudiar las propiedades que son invariantes bajo funciones Lipschitz. Por este motivo nos resulta conveniente saber cuándo dos espacios son el mismo desde este punto de vista, lo cual nos lleva a la siguiente:

Definición 2.2.6: Lipeomorfismo.

Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$, diremos que f es **bi-Lipschitz** o un **lipeomorfismo** si es biyectiva, Lipschitz y de inversa Lipschitz.

A continuación veremos que las constantes de un lipeomorfismo las podemos tomar de una manera conveniente. Para ello primero veamos los siguientes resultados:

Observación 2.2.7 Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente decreciente, entonces:

$$f(\sup A) = \text{ínf}(f[A]), \tag{2.12}$$

$$f(\text{ínf } A) = \sup(f[A]). \tag{2.13}$$

Como f es estrictamente decreciente, al tomar $f : A \to f[A]$ podemos considerar a su función inversa f^{-1}, la cual también es estrictamente decreciente.

Usaremos este hecho para establecer una biyección adecuada entre los conjuntos que hagan a f y f^{-1} ser L_1-Lipschitz y L_2-Lipschitz.

Observación 2.2.8 Sea $f : X \to Y$ un lipeomorfismo. Definimos los siguientes conjuntos:

$$C_f^{\uparrow} = \left\{ C > 0 \mid d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)\ \forall x_1, x_2 \in A \right\}, \tag{2.14}$$

$$C_f^{\downarrow} = \left\{ C > 0 \mid C d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2))\ \forall x_1, x_2 \in A \right\}, \tag{2.15}$$

$$C_{f^{-1}}^{\uparrow} = \left\{ C > 0 \mid d_Y(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \leq C d_X(y_1, y_2)\ \forall y_1, y_2 \in f[A] \right\}, \tag{2.16}$$

$$C_{f^{-1}}^{\downarrow} = \left\{ C > 0 \mid C d_X(y_1, y_2) \leq d_Y(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))\ \forall y_1, y_2 \in f[A] \right\}. \tag{2.17}$$

Si $\frac{1}{(\cdot)}$ es la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\xrightarrow{\frac{1}{(\cdot)}} \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{1}{C_f^{\uparrow}} := \frac{1}{(\cdot)}\left[C_f^{\uparrow}\right] = C_{f^{-1}}^{\downarrow}, \qquad \frac{1}{C_{f^{-1}}^{\uparrow}} = C_f^{\downarrow}.$$

Como $\frac{1}{(\cdot)}$ es una biyección autoinvertible inferimos:

$$\frac{1}{C^{\downarrow}_{f^{-1}}} = C^{\uparrow}_{f}, \qquad \frac{1}{C^{\downarrow}_{f}} = C^{\uparrow}_{f^{-1}}.$$

Al tener un lipeomorfismo podemos tomar las constantes de Lipschitz de una manera conveniente, tal como lo indica la siguiente:

Proposición 2.2.9: Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ suprayectiva. Son equivalentes:

a) f es bi-Lipschitz.

b) $\exists L \geq 1$ tal que:

$$\frac{1}{L} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X. \tag{2.18}$$

Demostración: Usaremos la notación de la Observación 2.2.8.

a) ⇒ b) De esta manera se sigue $C^{\uparrow}_{f} = C^{\uparrow}_{f^{-1}}$, de lo que obtenemos:

$$\mathscr{Lip}(f) = \inf C^{\uparrow}_{f} = \inf C^{\uparrow}_{f^{-1}} = \mathscr{Lip}\left(f^{-1}\right). \tag{2.19}$$

Por la Observación 2.2.7, tenemos

$$\frac{1}{\mathscr{Lip}(f)} = \frac{1}{\inf C^{\uparrow}_{f}} = \sup C^{\downarrow}_{f}. \tag{2.20}$$

b) ⇒ a) Como $\frac{1}{L} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y))$ se sigue que f es inyectiva. Como suponemos que f es suprayectiva se sigue que f es biyectiva. Haciendo los ajustes pertinentes esta misma desigualdad nos garantiza que f^{-1} es Lipschitz.

De la definición de $C^{\downarrow}_{f}$ se infiere que $\frac{1}{\mathscr{Lip}(f)} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2))$, como $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \mathscr{Lip}(f) d_X(x_1, x_2)$ se sigue que $\frac{1}{\mathscr{Lip}(f)} \leq \mathscr{Lip}(f)$ así que $1 \leq (\mathscr{Lip}(f))^2$ por lo cual $\mathscr{Lip}(f) \geq 1$, así $\mathscr{Lip}(f)$ cumple todas las condiciones del inciso b).

■

2.3. Espacios duplicantes.

Iniciaremos dando la definición de que un espacio sea duplicante.

Definición 2.3.1: Espacio métrico duplicante, medida duplicante

- Para (X, d, μ) espacio métrico medible diremos que μ es una **medida $C-$duplicante** si μ es no trivial y $\exists C > 0$ tal que $\mu(B(x, r)) \leq C\mu\left(B\left(x, \frac{r}{2}\right)\right)$ $\forall x \in X, \forall r \in \mathbb{R}^+$.
- Para (X, d) espacio métrico diremos que es **$C-$duplicante**, con $C \in \mathbb{Z}^+$ si toda bola de radio r puede ser cubierta con a lo más C bolas de radio $\frac{r}{2}$.

De la definición de medida duplicante, procediendo de manera inductiva, inmediatamente obtenemos la siguiente:

Observación 2.3.2 Sea (X, d, μ) un espacio métrico medible con medida $C-$duplicante, entonces

$$\mu\left(B(x,r)\right) \leq C^n \mu\left(B\left(x, \frac{r}{2^n}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X \forall r \in \mathbb{R}^+. \tag{2.21}$$

Veamos que este resultado lo podemos enunciar de la manera siguiente:

$$\mu\left(B(x,2^n r)\right) \leq C^n \mu\left(B(x,r)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X \forall r \in \mathbb{R}^+. \tag{2.22}$$

Esta afirmación nos dice mucho, ya que al poder cubrir una bola arbitraria con bolas arbitrariamente pequeñas obtenemos el comportamiento infinitesimal que se estudia en un curso de cálculo.
Las definiciones de medida duplicante y espacio métrico duplicante son similares, por lo que es de esperarse que ambos conceptos estén relacionados. En el artículo [LS98] se dieron condiciones para que las nociones de medida duplicante y de espacio métrico duplicante sean equivalentes. A continuación enunciaremos dicho resultado, sin demostración.

Teorema 2.3.3

En (X, d, μ) espacio métrico medible completo son equivalentes:

1. μ es duplicante.
2. (X, d) es duplicante.

Así, cuando estemos en un espacio completo podemos usar ambas nociones de manera indistinta.
Como podemos notar, la noción de ser duplicante es una especie de condición de cubierta. A continuación enunciaremos un lema de [Sem96] en donde se nota esta relación. Más aún, dicho resultado se puede pensar como una generalización del teorema de cubierta de Besicovitch.

Proposición 2.3.4 Sean (X, d) un espacio métrico completo $C-$duplicante, $x \in X$ y $s > 0$ fijo entonces existe una familia finita de bolas de radio s en X, a saber $\mathcal{B} = \left\{B_i\right\}_{i=1}^n$ tal que $B(x, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ y cada bola interseca a lo más M bolas de $\mathcal{B}$, donde $M = M(C, s)$.

Como podemos notar, las propiedades que tienen los espacios duplicantes completos son bastante regulares, lo cual no es de extrañar debido a que el Encaje de Assouad [Ass83] nos garantiza que podemos encajar a estos espacios en algún $\mathbb{R}^N$ salvo una deformación en la métrica. Para enunciar el teorema, necesitamos una definición.

Definición 2.3.5

Sea (X, d) un espacio métrico y $\alpha \in (0, 1)$. La **$\alpha-$ésima deformación de** (X, d) es el espacio métrico (X, d^α).

Considerando algunas propiedades de los lipeomorfismos que se verán en el siguiente capítulo, el Teorema de Encaje de Assouad lo podemos enunciar de la siguiente manera:

Teorema 2.3.6: Encaje de Assouad.

Sea μ medida duplicante en (X, d) espacio métrico completo y $\alpha \in (0, 1)$. Entonces (X, d^α) es bi-Lipschitz equivalente a un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^l$ para algún $l \in \mathbb{N}$. La constante del encaje sólo depende de l y de α.

Es decir el teorema de Encaje de Assouad nos garantiza que la $\alpha-$ésima deformación de cualquier espacio métrico duplicante completo se puede encajar mediante un lipeomorfismo en $\mathbb{R}^n$.
A continuación daremos algunos resultados técnicos de espacios métricos completos duplicantes.

Lema 2.3.7 Sean μ medida de Radon en (X, d) un espacio métrico $D-$duplicante localmente compacto y $A \subset X$ medible. Entonces $\exists C \geq 1$, que depende de D, es decir $C = C(D)$, tal que para **casi toda** $x \in A$ se cumple:

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu\left(B\left(x,\frac{r}{C}\right)\setminus A\right)}{\mu\left(B(x,Cr)\right)} = 0. \tag{2.23}$$

Demostración: Como X es localmente compacto se sigue que X es completo; así tenemos las hipótesis del teorema de Encaje de Assouad 2.3.6. Considerando a $\alpha \in (0,1)$, se sigue que existe un encaje Lipschitz $F : (X,d) \to (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ de tal manera que $\mathscr{L}ip(F) = C \geq 1$ (Esto es por la Proposición 2.2.9), por lo cual podemos identificar a X con su imagen en $\mathbb{R}^N$, y así, $\forall x \in X \forall r > 0$ se satisface:

$$X \cap B_{\|\cdot\|}(x, r^\alpha) \subset B(x, Cr) \tag{2.24a}$$
$$B\left(x, \frac{r}{C}\right) \subset B(x, r^\alpha) \tag{2.24b}$$

De la completitud de (X,d), el push forward de la medida μ bajo el lipeomorfismo F es Radon. Así para casi todo $x \in X$ es un punto de densidad de A respecto a la métrica euclidiana y la medida de Radon μ, i.e., para casi todo $x \in X$ se satisface:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B_{\|\cdot\|}(x,r^\alpha)\setminus A\right)}{\mu\left(B_{\|\cdot\|}(x,r^\alpha)\right)} = 0. \tag{2.25}$$

El límite anterior se puede tomar como un límite uniforme. Esto realmente no es de nuestro interés, pero la prueba se sigue de la prueba de los puntos de densidad de la medida de Lebesgue en [Fol99].
De la monotonía de μ y de las desigualdades (2.24a),(2.24b) inferimos:

$$\begin{aligned} \frac{\mu\left(B\left(x,\frac{r}{C}\right)\setminus A\right)}{\mu(B(x,Cr))} &\leq \frac{\mu\left(B_{\|\cdot\|}(x,r^\alpha)\setminus A\right)}{\mu\left(B_{\|\cdot\|}(x,r^\alpha)\right)} \\ 0 \leq \lim_{r\to 0}\frac{\mu\left(B\left(x,\frac{r}{C}\right)\setminus A\right)}{\mu(B(x,Cr))} &\leq \lim_{r\to 0}\frac{\mu\left(B_{\|\cdot\|}(x,r^\alpha)\setminus A\right)}{\mu\left(B_{\|\cdot\|}(x,r^\alpha)\right)} = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

tomando el límite cuando $r \to 0$ y considerando a (2.25)

Lo cual demuestra (2.23).

■

Observación 2.3.8 En el Lema 2.3.7: Como (X,d) es localmente compacto, una vez fijada una vecindad compacta; el límite anterior lo podemos tomar como límite uniforme en dicha vecindad.

El límite que obtuvimos en el Lema 2.3.7 nos está hablando de una condición de decaimiento en la medida de las bolas; y es aquí donde yace el comportamiento infinitesimal que buscamos. En el siguiente resultado veremos que este decaimiento se puede enunciar más concisamente:

Corolario 2.3.9 Sean (X,d,μ) un espacio métrico medible con (X,d) un espacio métrico completo, μ medida de Radon $k_\mu-$duplicante y $A \subset X$ medible. Bajo estas condiciones $\exists D \geq 1$, que depende de la constante duplicante i.e. $D = D(K_\mu)$ tal que para $c.t.$ $x \in A$ se cumple:

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu\left(B(x,r)\setminus A\right)}{\mu\left(B(x,Dr)\right)} = 0, \tag{2.27}$$
$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu\left(B(x,r)\setminus A\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)} = 0, \tag{2.28}$$
$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu(B(x,r)\cap A)}{\mu(B(x,r))} = 1. \tag{2.29}$$

Importante: Debido a la compacidad local podemos considerar los límites anteriores como límites uniformes.

Demostración: Consideremos que μ es $K-$duplicante. Sean C como en el Lema 2.3.7 y $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{C} \tag{2.30}$$

así de (2.22) tenemos:

$$\begin{aligned}
\mu\left(B(x,r)\right) &\leq K^m \mu\left(B\left(x, \tfrac{1}{2^m} r\right)\right) \\
&\leq K^m \mu\left(B\left(x, \tfrac{1}{C} r\right)\right) && \textit{Dividiendo entre } \mu\left(B(x,Cr)\right) \\
\frac{\mu\left(B(x,r)\right)}{\mu\left(B(x,Cr)\right)} &\leq \frac{K^m \mu\left(B\left(x, \tfrac{1}{C} r\right)\right)}{\mu\left(B(x,Cr)\right)} && \textit{Tomando el límite cuando } r \to 0 \\
\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B(x,r)\right)}{\mu\left(B(x,Cr)\right)} &\leq \lim_{r\to 0} \frac{K^m \mu\left(B\left(x, \tfrac{1}{C} r\right)\right)}{\mu\left(B(x,Cr)\right)} && \textit{Como } \mu \textit{ es de Radon se cumple } (2.23) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Claramente $\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,Cr))} \geq 0$; de esta desigualdad y de (2.31), obtenemos la existencia de este límite y así tenemos la igualdad (2.27).
Recordemos que tomamos a $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que se satisface la desigualdad (2.30), así que $C \leq 2^m$. Por la desigualdad (2.22) inferimos

$$\begin{aligned}
\mu\left(B\left(x, Cr\right)\right) \leq \mu\left(B\left(x, 2^m r\right)\right) \leq K^m \mu\left(B\left(x, r\right)\right) \\
0 \leq \frac{\mu\left(B\left(x, Cr\right)\right)}{\mu\left(B\left(x, r\right)\right)} \leq K^m.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

De (2.27) inferimos que:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B\left(x, r\right) \setminus A\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)} = \lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B\left(x, r\right) \setminus A\right)}{\cancel{\mu\left(B(x,Cr)\right)}} \frac{\cancel{\mu\left(B(x,Cr)\right)}}{\mu\left(B\left(x, r\right)\right)} = 0. \tag{2.33}$$

Por último:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B\left(x, r\right) \setminus A\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)} &= 0 && \textit{Sustrayendo esta igualdad a 1} \\
1 - \lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B\left(x, r\right) \setminus A\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)} &= 1 \\
\lim_{r\to 0} \left(1 - \frac{\mu\left(B\left(x, r\right) \setminus A\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)}\right) &= 1 \\
\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B(x,r)\right) - \mu\left(B\left(x, r\right) \setminus A\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)} &= 1 && \textit{Podemos hacer este paso pues } \mu\left(B\left(x, r\right) \setminus A\right) < +\infty \\
\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B(x,r) \cap A\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)} &= 1.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

■

Corolario 2.3.10 Sean (X, d, μ) un espacio métrico medible con (X, d) un espacio métrico localmente compacto, μ medida de Radon duplicante y $A \subset X$ medible. Para casi todo $x \in A$ existe r_0 de tal manera que si $0 < r < r_0$ se cumple que $\mu(B(x,r) \cap A) > 0$.

Demostración: Como el límite (2.28) del Lema 2.3.7 lo podemos tomar uniforme tenemos que para casi todo $x \in A$ existe $r_0 > 0$ tal que para cualquier $0 < r < r_0$ se satisface

$$\frac{\mu(B(x,r) \setminus A)}{\mu(B(x,r))} < 1$$

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - \frac{\mu(B(x,r) \setminus A)}{\mu(B(x,r))} \\ &= \frac{\mu(B(x,r) \cap A)}{\mu(B(x,r))} \qquad \textit{Multiplicando por } \mu(B(x,r)) \\ 0 &< \mu(B(x,r) \cap A). \end{aligned}$$

■

2.4. Medidas gruesas.

Definición 2.4.1: Medidas gruesas.

En un espacio métrico medible (X, d, μ) diremos que μ es **gruesa** si para casi todo $x \in X$ se tiene que $\exists (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ con $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ que satisface lo siguiente: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow \frac{\mu(B(y,\varepsilon r_n))}{\mu(B(x,r_n))} > \frac{1}{N} \quad \forall y \in B\left(x, r_n\right)$

En sí el que una medida sea gruesa quiere decir que la medida del espacio se encuentra bien distribuida, es decir que no se dan casos como los de la medida de Dirac. Con esto se busca evitar casos como los que se estudian en [EJJ00].

Proposición 2.4.2 Sean μ medida de Radon gruesa en un espacio métrico medible duplicante localmente compacto (X, d) y $A \subset X$ medible. Entonces $\widehat{\forall}\, x \in A \exists \left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_n \to 0$ y se cumple lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mu\left(B\left(y, \varepsilon r_n\right) \cap A\right) > 0 \text{ para } n > N \text{ y } y \in B\left(x, r_n\right).$$

Demostración: Este resultado se sigue de manera inmediata del Corolario 2.3.10, pues basta tomar n lo suficientemente grande para que $\varepsilon r_n < r_0$ para que así $\mu\left(B\left(y, \varepsilon r_n\right) \cap A\right) > 0$.

■

Capítulo 3

Elementos de análisis de Lipschitz.

En este capítulo veremos algunas propiedades generales de las funciones Lipschitz (definidas en la Sección 2.2). Después veremos qué pasa cuando el espacio en cuestión es regular y culminaremos al ver las propiedades que tienen las funciones Lipschitz cuando se satisface la $p-$desigualdad de Poincaré.

3.1. Operadores de funciones Lipschitz.

Como ya hemos visto en la demostración del Lema 2.2.4 tenemos que

$$\mathscr{Lip}\, f = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in X \text{ con } x \neq y \right\}.$$

Esta manera de ver a la constante global de una función Lipschitz sin duda nos recuerda a la derivada. Más aún, como para una función Lipschitz el conjunto $\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in X \text{ con } x \neq y \right\}$ está acotado podemos definir nociones similares a la diferenciabilidad para las funciones Lipschitz.

Definición 3.1.1: La variación y las constantes de Lipschitz superior e inferior en un punto.

Sean (X, d) espacio métrico, $x \in X$, $r > 0$ y $f : X \to \mathbb{R}$ definimos:

- La **variación de f en x con radio** r:

$$\underset{B(x,r)}{\mathbf{var}}\, f := \sup_{y \in B(x,r)} \frac{|f(x) - f(y)|}{r} \tag{3.1}$$

  Como puede notarse la variación se considera en $B(x,r)$. De manera análoga definimos a $\mathbf{var}_{B[x,r]}\, f$, $\mathbf{var}_{S(x,r)}\, f$.

- La constante inferior de Lipschitz de f en x.

$$\mathbf{lip}\,(f)(x) = \liminf_{r \to 0} \left(\underset{B(x,r)}{\mathrm{var}}\, f \right) = \liminf_{r \to 0} \left(\sup_{d(y,x) < r} \frac{|f(y) - f(x)|}{r} \right).$$

- La constante superior de Lipschitz de f en x.

$$\mathbf{Lip}\,(f)(x) = \limsup_{r \to 0} \left(\underset{B(x,r)}{\mathrm{var}}\, f \right) = \limsup_{r \to 0} \left(\sup_{d(y,x) < r} \frac{|f(y) - f(x)|}{r} \right).$$

Los operadores Lip, lip pueden pensarse como la versión puntual de $\mathscr{Lip}(f)$.
Para definir los operadores anteriores estamos considerando valores extendidos. Una condición suficiente para garantizar que los operadores anteriores están en $\mathbb{R}$ es pedir que $f \in \mathrm{Lip}(X)$.
A los operadores anteriormente definidos los llamaremos **operadores Lipschitz**.

De la definición de los operadores anteriores tenemos varias desigualdades; esto se muestra en la siguiente:

Proposición 3.1.2 Si $f \in \mathrm{LIP}(X)$ entonces

$$\operatorname*{var}_{B(x,r)} f \leq \operatorname{lip} f(x) \leq \operatorname{Lip} f(x) \leq \mathscr{Lip}\, f \qquad \forall x \in X \forall r > 0. \tag{3.2}$$

Aproximaciones para Lip, lip**.**

Notemos que Lip, lip están definidos con la variación $\operatorname{var}_{B(x,r)}$, la cual es una estimación de f en $B(x,r)$; pero como ya vimos podemos definir la variación en otra clase de conjuntos. Por lo que nos preguntamos si los operadores Lip, lip pueden ser aproximados mediante otras familias de conjuntos adecuados, a saber $\{B[x,r]\}_{r>0}, \{S(x,r)\}_{r>0}$. La respuesta a esta es pregunta es que sí, esto se puede ver en el siguiente:

Lema 3.1.3 Sean $f \in \mathrm{LIP}(X)$ y $x \in X, r > 0$, entonces

$$\underbrace{\sup_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{y\in S(x,s)} f}_{A} = \underbrace{\sup_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{y\in B(x,s)} f}_{B} = \underbrace{\sup_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{y\in B[x,s]} f}_{C} = \underbrace{\sup_{y\in\odot(x,r)} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)}}_{D}. \tag{3.3}$$

Demostración: Es claro que se dan las desigualdades $A, B \leq C \leq D$.
Ahora veamos que $D \leq A$. En efecto consideremos a $s_0 = d(y,x) < r$ y a $s_1 \in (s_0, r)$, así $y \in B(x, s_1)$ por lo cual

$$\begin{aligned} |f(y)-f(x)| &\leq s_0 \operatorname*{var}_{S(x,s_0)} f \\ \frac{|f(y)-f(x)|}{s_1} &\leq \operatorname*{var}_{S(x,s_0)} f \\ \frac{|f(y)-f(x)|}{s_1} &\leq \sup_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{S(x,s)} f. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como $s_0 < s_1$ *tenemos* $\frac{1}{s_1} < \frac{1}{s_0}$

Como la desigualdad (3.4) se cumple para $s_1 \in (s_0, r)$ arbitrario podemos tomar el límite cuando $s_1 \to s_0^+$

$$\begin{aligned} \frac{|f(y)-f(x)|}{s_1} &\leq \sup_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{S(x,s)} f \\ \sup_{y\in\odot(x,r)} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)} &\leq \sup_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{S(x,s)} f \end{aligned}$$

Pues $y \in \odot(x,r)$ *es arbitrario*

De esta manera concluimos que $D \leq A$. Similarmente demostramos $D \leq B$. De estas desigualdades concluimos que se da la desigualdad (3.3).

■

Como hemos mencionado queremos ver que hay varias maneras de aproximar Lip, que definimos puntualmente como un valor medio de la variación en la bola abierta. Veremos que esta aproximación la podemos tomar en bolas cerradas o esferas.

Teorema 3.1.4: Aproximaciones para Lip.

Sea (X,d) espacio métrico, $x \in X$ y $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Se cumplen las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip} f(x) &= \limsup_{r\to 0} \left(\sup_{d(y,x)\leq r} \frac{|f(x)-f(y)|}{r} \right), & (3.5) \\ &= \limsup_{r\to 0} \left(\sup_{d(y,x)=r} \frac{|f(x)-f(y)|}{r} \right), & (3.6) \\ &= \limsup_{y\to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(y,x)} & (3.7) \end{aligned}$$

Demostración: Tomando el límite cuando $r \to 0$ en (3.3) inferimos:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0}\sup_{s\in(0,r)} \operatorname{var}_{S(x,s)}(f) = \lim_{r\to 0}\sup_{s\in(0,r)} \operatorname{var}_{B(x,s)}(f) = \lim_{r\to 0}\sup_{s\in(0,r)} \operatorname{var}_{B[x,s]}(f) = \lim_{r\to 0}\sup_{y\in\circledcirc(x,s)} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)} \\ &\limsup_{r\to 0} \operatorname{var}_{S(x,r)}(f) = \limsup_{r\to 0} \operatorname{var}_{B(x,r)}(f) = \limsup_{r\to 0} \operatorname{var}_{B[x,r]}(f) = \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)}. \end{aligned} \quad \textit{Definición de } \limsup \tag{3.8}$$

Como $\operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{r\to 0} \operatorname{var}_{S(x,r)}(f)$ de (3.8) obtenemos las ecuaciones (3.5) a (3.7).

■

Observación 3.1.5 En el Teorema 3.1.4 consideramos al límite (3.7) como 0 para puntos aislados.

Operadores Lipschitz, derivadas y reescalamientos.

Como podemos ver en el Teorema 3.1.4 la aproximación (3.7) recuerda a la definición de la derivada. Resaltaremos esta relación en el siguiente:

Lema 3.1.6 Sea (X, d) espacio métrico. $f : X \to \mathbb{R}$ y $x \in X$ entonces $\operatorname{Lip} f(x) = 0$ si y sólo si $f(y) = o(d(y, x))$ en x.

Demostración:

- $\Rightarrow$) Supongamos que $\operatorname{Lip} f(x) = 0$. De esta manera $0 \le \operatorname{lip} f(x) \le \operatorname{Lip} f(x) = 0$, así que $\operatorname{lip} f(x) = \operatorname{Lip} f(x) = 0$. De (3.7) inferimos que
$$0 \le \liminf_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)} \le \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)} = 0$$
así $\lim_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)} = 0$ lo cual demuestra $f(y) = o(d(y, x))$ en x.
- $\Leftarrow$) Supongamos $f(y) = o(d(y, x))$ en x; así $\lim_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(y,x)} = 0$. Como este límite existe coinciden el límite superior e inferior, particularmente de (3.7) concluimos que $\operatorname{Lip} f(x) = 0$.

■

Esta aproximación es bastante conveniente pues está en términos del operador Lip. A continuación veremos que podemos definir una seminorma con Lip. Esto se puede ver en el siguiente:

Lema 3.1.7 Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. La función:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{LIP}(X) & \xrightarrow{\|\cdot\|_x} & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \operatorname{Lip} f(x) \end{array}$$

es una seminorma.

Demostración: Sean $f, g \in \operatorname{Lip}(X)$. Se cumple lo siguiente:

1. $\|f\|_x \ge 0$

   Si $x \neq y$ se tiene que $\frac{|f(x)-f(y)|}{d(y,x)} \ge 0$ por (3.7)

$$\|f\|_x = \operatorname{Lip} f(x) = \limsup_{y\to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(y,x)} \ge 0$$

2. $\|\lambda f\|_x = |\lambda| \, \|f\|_x \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_x = \operatorname{Lip} f(x) &= \limsup_{y\to x} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d(y,x)} \\ &= |\lambda| \limsup_{y\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(y,x)} \\ &= |\lambda| \, \|f\|_x \end{aligned}$$

3. $\|f+g\|_x \leq \|f\|_x + \|g\|_x$

$$\begin{aligned} \|f+g\|_x = \operatorname{Lip} f(x) &= \limsup_{y\to x} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{d(y,x)} \\ &= \limsup_{y\to x} \frac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{d(y,x)} \\ &\leq \limsup_{y\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(y,x)} + \limsup_{y\to x} \frac{|g(x) - g(y)|}{d(y,x)} \\ &= \|f\|_x + \|g\|_x \end{aligned}$$

Pues lím sup *es subaditivo.*

De los incisos anteriores concluimos que $\|\cdot\|_x$ es seminorma.

■

Por el Lema 3.1.7 se sigue que con $\|\cdot\|_x$ podemos dar la noción de "la mejor aproximación lineal"que se da para la derivada en $\mathbb{R}^n$, pero esta ya está en LIP(X) y está ligada a un punto en cuestión. Por lo cual ya tenemos condiciones como las de punto 3 de la Definición 1.1.2; pero aún hay que desarrollar un poco más la teoría.
Esta seminorma será recurrente en esta tesis así que cuando nos refiramos a la seminorma $\|\cdot\|_x$ nos referimos a la del Lema 3.1.7.Veremos un caso particular con la seminorma $\|\cdot\|_x$, para ello introducimos la siguiente:

Definición 3.1.8: Producto punto.

Para dos vectores en $\lambda, \eta \in \mathbb{R}^n$ con $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ definimos su producto punto como sigue

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta} := \lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \eta_n$$

Ahora agregaremos el último ingrediente para empezar a hablar de la aproximación para la derivada. Consideremos el siguiente:

Ejemplo 3.1.9: Aproximación de una función diferenciable.

Si tenemos a una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable en 0 entonces podemos aproximar $f'(0)$ mediante una sucesión $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_n \to 0$ tomando a los cocientes:

$$\frac{f(r_n) - f(0)}{r_n}. \tag{3.9}$$

Considerando $C > 0$ arbitrario la aproximación (3.9) podemos escribirla como

$$\frac{\frac{1}{C} f(r_n) - \frac{1}{C} f(0)}{\frac{1}{C} r_n}, \tag{3.10}$$

esta no cambió nada, pero veamos que podemos interpretar como que estamos aproximando la derivada de la función $\frac{1}{C} f : \left(\mathbb{R}, \frac{1}{C}|\cdot|\right) \to \mathbb{R}$.

El Ejemplo 3.1.9 muestra que el proceso que se usa para aproximar a la derivada puede hacerse ajustando a la función y a la métrica de nuestro espacio. Esto nos lleva a la siguiente:

Definición 3.1.10: Reescalamiento.

Sea (X, d) espacio métrico, $f \in \mathrm{LIP}(X, d)$ y $C > 0$. El **$C-$reescalamiento** de f es la función $\frac{1}{C} f : \left(X, \frac{1}{C} d\right) \to \mathbb{R}$. Diremos que g es **reescalamiento** de f si existe C_0 tal que g es el C_0-reescalamiento de f.

Observación 3.1.11 En un reescalamiento el conjunto X **no varía**.

Esto nos permitirá extender la derivabilidad, pues los operadores Lipschitz son invariantes bajo reescalamientos, como veremos en la siguiente:

Proposición 3.1.12 Sea (X, d) espacio métrico, $f \in \mathrm{LIP}(X, d)$, $C > 0$ y $\frac{1}{C} f : \left(X, \frac{1}{C} d\right) \to \mathbb{R}$ el $C-$reescalamiento de f. Entonces $\frac{1}{C} f$ es Lipschitz, más aún los operadores Lipschitz de f, $\frac{1}{C} f$ coinciden.

La idea de la demostración de la Proposición 3.1.12 es ver que (3.9) y (3.10) son iguales y de ahí podemos extender a los operadores Lipschitz.
Lo que haremos para dar la derivada en la estructura diferenciable que propondremos para el teorema principal es aproximarla mediante reescalamientos, pero para ello tendremos que desarrollar la noción de convergencia entre espacios. Estas herramientas las desarrollaremos en el capítulo 4.

3.1.1. Resultados aproximativos y propiedades medibles de lip, Lip.

Vamos a usar al operador Lip para definir la derivada, pero recordemos que la función que proponemos como derivada debe ser medible. Para demostrar ese hecho usaremos que $\mathrm{Lip}\, f$ es medible. En esta sección demostraremos ese hecho y también demostraremos otro par de aproximaciones.

Lema 3.1.13 Para $f \in \mathrm{LIP}(X)$, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ definimos:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\Phi_r f} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Phi_r f(x) = \sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|. \end{aligned}$$

Dicha función satisface lo siguiente:

1. Esta es una función bien definida; más aún, $\Phi_s f$ es *sci*.
2. La colección de funciones $\left\{\Phi_r f\right\}_{r>0}$ es monótona creciente; i.e. $s \leq r \Rightarrow \Phi_s f \leq \Phi_r f$.
3. Sea $S = \left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ denso entonces

$$\sup_{s\in(0,r)} \Phi_r f(x) = \sup\left\{\Phi_{s_n} f(x) \mid s_n \text{ tal que } s_n \in (0, r)\right\}, \tag{3.11}$$

$$\inf_{s\in(0,r)} \Phi_r f(x) = \inf\left\{\Phi_{s_n} f(x) \mid s_n \text{ tal que } s_n \in (0, r)\right\}. \tag{3.12}$$

Demostración: Sea $x \in X$.

1. Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi_r f(x) > t$, de esta manera $\forall \varepsilon > 0 \exists w \in B(x, r)$ tal que

$$\Phi_r f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < |f(w) - f(x)|. \tag{3.13}$$

como $w \in B(x,r)$ tenemos que $d(w,x) < r$, así $r - d(w,x) > 0$, tomando

$$y \in X \text{ con } d(y,x) < r - d(w,x), \tag{3.14}$$

de (3.13) inferimos:

$$\begin{aligned}\Phi_r f(x) - \frac{\varepsilon}{2} &< |f(w) - f(x)| \\ &\leq |f(w) - f(y)| + |f(y) - f(x)|. \quad \textit{Por desigualdad del triángulo.}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Recordemos que estamos tomando $y \in X$ de tal manera que satisface (3.14), así por desigualdad del triángulo se sigue que $d(w,y) < r$, así $w \in B(y,r)$ por lo cual $|f(w) - f(y)| \leq \Phi_r f(y)$, de esta desigualdad y de (3.30) obtenemos:

$$\begin{aligned}\Phi_r f(x) - \frac{\varepsilon}{2} &< |f(w) - f(x)| \\ &\leq |f(w) - f(y)| + |f(y) - f(x)| \\ &\leq \Phi_r f(y) + |f(y) - f(x)|.\end{aligned} \tag{3.16}$$

De esta manera si tomamos a $y \in X$ de tal manera que $d(x,y) < \text{mín}\left\{r - d(w,x), \frac{\varepsilon}{2(\mathscr{Lip}(f)+1)}\right\} = \delta$ se satisface la desigualdad (3.16), más aún tenemos que:

$$\begin{aligned}\Phi_r f(x) - \frac{\varepsilon}{2} &< \Phi_r f(y) + |f(y) - f(x)| \quad \textit{f es } \mathscr{Lip}(f)\textit{-Lipschitz} \\ &< \Phi_r f(y) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{Restando } \tfrac{\varepsilon}{2} \textit{ de ambos lados} \\ \Phi_r f(x) - \varepsilon &< \Phi_r f(y).\end{aligned} \tag{3.17}$$

En virtud del Lema 2.1.12 concluimos que $\Phi_r f$ es *sci*.

2. Supongamos que $0 < s < t$ de esta manera $B(x,s) \subset B(x,t)$ así que

$$\Phi_s f(x) = \sup_{y \in B(x,s)} |f(y) - f(x)| \leq \sup_{y \in B(x,t)} |f(y) - f(x)| = \Phi_r f(x).$$

3. De la monotonía de $\left\{\Phi_s f\right\}_{s>0}$ es claro que $\sup_{s\in(0,r)} \Phi_s f \geq \sup\left\{\Phi_{s_n} f \middle| s_n \text{ tal que } s_n \in (0,r)\right\}$, por otro lado como S es denso $\forall s \in (0,r)$ se tiene que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $s < s_m < r$ de lo que se obtiene la desigualdad $\sup_{s\in(0,r)} \Phi_s f \leq \sup\left\{\Phi_{s_n} f \middle| s_n \text{ tal que } s_n \in (0,r)\right\}$. De esta manera concluimos que se satisface (3.11),

$$\sup_{s\in(0,r)} \Phi_s f = \sup\left\{\Phi_{s_n} f \middle| s_n \text{ tal que } s_n \in (0,r)\right\}.$$

De manera análoga demostramos (3.12).

■

Ahora definiremos a un par de funciones para aproximar lip, Lip.

Definición 3.1.14: Los Operadores l_r, L_r

Sea (X,d) espacio métrico, $f \in \text{LIP}(X)$ y $r > 0$. Definimos a las funciones $l_r(f), L_r(f) : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\boldsymbol{l_r f(x)} = \inf_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{B(x,s)}(f) = \inf_{s\in(0,r)}\left(\sup_{d(y,x)<s} \frac{|f(x) - f(y)|}{s}\right) \qquad \boldsymbol{L_r f(x)} = \sup_{s\in(0,r)} \operatorname*{var}_{B(x,s)}(f) = \sup_{s\in(0,r)}\left(\sup_{d(y,x)<s} \frac{|f(x) - f(y)|}{s}\right)$$

Dicha aproximación es bastante natural,

Teorema 3.1.15: Aproximación de lip y Lip.

Sea (X, d) espacio métrico, $f \in \mathrm{LIP}(X)$ y l_r, L_r como en la Definición 3.1.14. Se satisface lo siguiente;

1. l_r, L_r son medibles.
2. $l_r f \xrightarrow[r\to 0]{p} \mathrm{lip}(f)$, $L_r f \xrightarrow[r\to 0]{p} \mathrm{Lip}(f)$.
3. $\mathrm{lip}\, f$, $\mathrm{Lip}\, f$ son medibles.

Demostración: Sea $s \in \mathbb{R}^+$, Φ_s como en el Lema 3.1.13, definamos a $G_s = \frac{1}{s}\Phi_s f$ por lo cual:

$$l_r(f) = \inf_{r>0} G_r, \qquad L_r(f) = \sup_{r>0} G_r. \tag{3.18}$$

Por otro lado el Lema 3.1.13 garantiza que G_s es medible, y como el sup, ínf de una familia de funciones medibles son medibles, tenemos que $l_r(f), L_r(f)$ lo son. De la monotonía de $\left\{\Phi_s f\right\}_{s>0}$ inferimos que, como límite de funciones medibles es medible se sigue que $\mathrm{lip}(f), \mathrm{Lip}(f)$ son medibles.

■

Como hemos mencionado queremos definir a la derivada para la función f, para ello relacionaremos a $Lipf$ con f, para ello usaremos el valor medio de f definido a continuación:

Definición 3.1.16: Valor medio.

Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $f \in L^1(X)$ y $A \in \Sigma$ de medida positiva. Definimos el **valor medio de** f **en** A como

$$⨍_A f := \frac{1}{\mu(A)} \int f.$$

Para hacer más compacta la notación algunas veces denotaremos al valor medio de f en A por f_A.

A continuación unos resultados básicos del valor medio.

Observación 3.1.17: Algunas propiedades del operador $⨍(\cdot)$ y de $f_{(\cdot)}$

Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $f \in L^1(X)$ y $A, B \in \Sigma$ con medida positiva. Se cumple lo siguiente:

✧1 $\left|⨍_A f\, d\mu\right| \leq \sup_{a\in A} |f(a)|$.

✧2 Para $c \in \mathbb{R}$ y la función constante $K_c \equiv c$ se cumple: $⨍_A K_c = c$.

✧3 $f_A - f_B = ⨍_A (f - f_B)$.

✧4 $|f_A - f_B| \leq ⨍_A |f - f_B|$.

Con los resultados anteriores demostraremos lo siguiente:

Lema 3.1.18 Sea (X, d, μ) un espacio métrico medible completo con μ medida de Radon duplicante, entonces: $\forall \varepsilon > 0$ y para casi toda $x \in X$ $\exists r_0 > 0$ tal que $\forall y \in B(x, 4r)$ con $r < r_0$ se satisface:

$$\left| f(y) - f_{B(y,r)} \right| \leq r(\mathrm{Lip}\, f(x) + \varepsilon). \tag{3.19}$$

Demostración: Para $\varepsilon > 0$ podemos hacer lo siguiente:

- ✧ Como μ es de Radon y $\mathrm{Lip}\, f$ es medible, por el Teorema de Lusin (el Teorema 2.1.4), restringiéndonos a un conjunto compacto, a saber C, $\exists \Phi \in C(X)$ tal que $\mathrm{supp}(\Phi) \subset C$, $\mathrm{Lip}\, f = \Phi$ en C, excepto tal vez en $D \subset C$ con $\mu(D) < \varepsilon$.

✧ Recordemos que $L_r f \xrightarrow[r\to 0]{} \operatorname{Lip} f$ considerando al Teorema de Egoroff, $\exists B \in \Sigma$ tal que $\mu(B) < \varepsilon$, $L_r f \xrightarrow[r\to 0]{u} \operatorname{Lip} f$ en B.

Consideremos a $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\mathscr{L}ip\, f+2}$, como $L_r f \xrightarrow[r\to 0]{u} \operatorname{Lip} f$ en A inferimos:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Lip} f(z) - \operatorname{Lip} f(x)| &< \tilde{\varepsilon} && \textit{Desarrollando la desigualdad del valor} \\ \operatorname{Lip} f(z) - \operatorname{Lip} f(x) &< \tilde{\varepsilon} && \textit{absoluto.} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tomando $x \in A$, como $L_r f \xrightarrow[r\to 0]{u} \operatorname{Lip} f$ en B se sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip} f(z) + \tilde{\varepsilon} &\le \operatorname{Lip} f(x) + 2\tilde{\varepsilon} && \textit{Multiplicando por } r>0. \\ r\,(\operatorname{Lip} f(z) + \tilde{\varepsilon}) &\le r\,(\operatorname{Lip} f(x) + 2\tilde{\varepsilon}) && \textit{De la definición de } \operatorname{Lip} f. \\ |f(y) - f(z)| &\le r\,(\operatorname{Lip} f(x) + 2\tilde{\varepsilon})\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ahora consideremos al valor medio de f en $B(x,r)$, así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\fint_{B(y,r)} |f(y)-f(z)|\,d\mu(z) &= \frac{1}{r}\fint_{B(y,r)\cap B} |f(y)-f(z)|\,d\mu(z) \\ &\quad + \frac{1}{r}\fint_{B(y,r)\setminus B} |f(y)-f(z)|\,d\mu(z) && \textit{De la desigualdad (3.21).} \\ &\le \frac{1}{\cancel{r}}\fint_{B(y,r)\cap B} \cancel{r}\,(Lipf(x)+2\tilde{\varepsilon})\,d\mu(z) && \textit{Pues } f \textit{ es Lipschitz.} \\ &\quad + \frac{1}{r\mu\,(B(y,r))}\fint_{B(y,r)\setminus B} \mathscr{L}ip\, f\,d\mu(z) && \textit{Propiedades del operador } \fint. \\ &= \operatorname{Lip} f(x) + 2\tilde{\varepsilon} + \frac{\mathscr{L}ip\, f\cdot \mu\,(B(y,r)\setminus B)}{r\mu\,(B(y,r))} \\ &\le \operatorname{Lip} f(x) + \tilde{\varepsilon}\,(\mathscr{L}ip\, f + 2) && \textit{Pues } \tilde{\varepsilon} = \tfrac{\varepsilon}{\mathscr{L}ip\, f+2}. \\ &= \operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.22}$$

De la desigualdad (3.22) se sigue

$$\frac{1}{r}\left|f(y) - f_{B(y,r)}\right| = \left|\frac{1}{r}\fint_{B(y,r)} f(y)-f(z)d\mu(z)\right| \le \frac{1}{r}\fint_{B(y,r)} |f(y)-f(z)|\,d\mu(z) \le Lipf(x)+\varepsilon \tag{3.23}$$

Así concluimos que se satisface (3.19)

■

Ampliaremos el resultado anterior al ver que los valores medios se comportan bien.

Lema 3.1.19 Sea (X,d,μ) un espacio métrico medible completo con μ medida de Radon duplicante y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño entonces para casi todo $x \in X$ existe $y \in X$ que satisface lo siguiente: Para $r = d(x,y) < \varepsilon$ se da la siguiente desigualdad:

$$\frac{r}{4}\operatorname{Lip} f(x) \le \left| f_{B\left(x,\frac{r}{4}\right)} - f_{B\left(y,\frac{r}{4}\right)} \right|. \tag{3.24}$$

Demostración: Notemos que podemos tomar a $x \in X$, $\widetilde{r}_0 > 0$ de modo que satisfagan las conclusiones del Lema 3.1.18. De la definición de $\operatorname{Lip} f$ se infiere que:

$$\operatorname{Lip} f(x) - \varepsilon < \operatorname{Lip} f(x) \le \sup_{d(y,x)<r} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(y,x)} \qquad \forall r > 0 \tag{3.25}$$

Particularmente la desigualdad (3.25) se cumple para $r = \widetilde{r}_0$. Así que $\exists y_0 \in X$ con $d(y_0, x) < \widetilde{r}_0$ que satisface:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Lip} f(x) - \varepsilon &< \frac{|f(y_0) - f(x)|}{\underbrace{d(y_0, x)}_{r_0}} \\
r_0(\operatorname{Lip} f(x) - \varepsilon) &< |f(y_0) - f(x)|.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Multiplicando por $r_0 > 0$ de ambos lados de la desigualdad.

A continuación veremos que y_0, r_0 satisfacen los requisitos pedidos. Efectivamente, de la desigualdad del triángulo tenemos:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y_0)| &\leq \left| f(x) - f_{B\left(x, \frac{r_0}{4}\right)} \right| + \left| f_{B\left(x, \frac{r_0}{4}\right)} - f_{B\left(y_0, \frac{r_0}{4}\right)} \right| + \left| f_{B\left(y_0, \frac{r_0}{4}\right)} - f(y_0) \right| \\
&\leq \frac{r_0}{4}(\operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon) + \left| f_{B\left(x, \frac{r_0}{4}\right)} - f_{B\left(y_0, \frac{r_0}{4}\right)} \right| + \frac{r_0}{4}(\operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon) \\
&= \frac{r_0}{2}(\operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon) + \left| f_{B\left(x, \frac{r_0}{4}\right)} - f_{B\left(y_0, \frac{r_0}{4}\right)} \right|.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Como $\frac{r_0}{4} < r_0 \leq \widetilde{r}_0$ podemos usar la desigualdad (3.19).

Como $r_0 < \widetilde{r}_0$ y de las desigualdades (3.26) (3.27) deducimos:

$$
\begin{aligned}
r_0(\operatorname{Lip} f - \varepsilon) &\leq \frac{r_0}{2}(\operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon) + \left| f_{B\left(x, \frac{r_0}{4}\right)} - f_{B\left(y_0, \frac{r_0}{4}\right)} \right| \\
\frac{r_0}{2}(\operatorname{Lip} f - 3\varepsilon) &\leq \left| f_{B\left(x, \frac{r_0}{4}\right)} - f_{B\left(y_0, \frac{r_0}{4}\right)} \right|.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Restando $\frac{r_0}{2}(\operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon)$ de ambos lados de la desigualdad.

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario concluimos que:

$$
\frac{r_0}{4} \operatorname{Lip} f \leq \frac{r_0}{2} \operatorname{Lip} f \leq \left| f_{B\left(x, \frac{r_0}{4}\right)} - f_{B\left(y_0, \frac{r_0}{4}\right)} \right|.
$$

■

Con los resultados anteriores demostramos algo que es del estilo de la desigualdad de Poincaré. En la siguiente sección precisaremos qué significa esto.

Lema 3.1.20 Sea (X, d, μ) un espacio métrico medible completo con μ medida de Radon duplicante y $f \in \operatorname{LIP}(X)$. Entonces $\exists C > 0$ con $C = C(K_\mu)$ que satisface:

$$
\limsup_{r \downarrow 0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} \left| f - f_{B(x,r)} \right| \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{C} \operatorname{Lip} f(x). \tag{3.29}
$$

para *c.t.* $x \in X$.

Demostración: Como tenemos las hipótesis del Lema 3.1.19, tomaremos a $x, y \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ como en el Lema 3.1.19, así:

$$\begin{aligned}
\frac{r}{4}\operatorname{Lip} f(x) &\leq \left| f_{B\left(x,\frac{r}{4}\right)} - f_{B\left(y,\frac{r}{4}\right)} \right|. \\
&\leq \left| f_{B\left(x,\frac{r}{4}\right)} - f_{B(x,2r)} \right| + \left| f_{B(x,2r)} - f_{B\left(y,\frac{r}{4}\right)} \right| && \text{Por la desigualdad del triángulo} \\
&\leq \fint_{B\left(x,\frac{r}{4}\right)} \left| f - f_{B(x,2r)} \right| + \fint_{B\left(y,\frac{r}{4}\right)} \left| f - f_{B(x,2r)} \right| && \text{Por punto ✧4 del la Observación 3.1.17.} \\
&\leq K_\mu \fint_{B(x,2r)} \left| f - f_{B(x,2r)} \right| + K_\mu \fint_{B(x,2r)} \left| f - f_{B(x,2r)} \right| && \text{Pues } \mu \text{ es duplicante.} \\
&= 2K_\mu \fint_{B(x,2r)} \left| f - f_{B(x,2r)} \right| \\
\frac{1}{8K_\mu}\operatorname{Lip} f(x) &\leq \frac{1}{r} \fint_{B(x,2r)} \left| f - f_{B(x,2r)} \right| && \text{Tomando } \limsup_{r\downarrow 0} \text{ de ambos lados de la desigualdad.} \\
\frac{1}{8K_\mu}\operatorname{Lip} f(x) &\leq \limsup_{r\downarrow 0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,2r)} \left| f - f_{B(x,2r)} \right|
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Haciendo el cambio de variable $\hat{r} = 2r$ concluimos y tomando $C = 8K_\mu$ obtenemos el límite (3.29). ■

3.2. LIP(X) y la p-ésima desigualdad de Poincaré.

A continuación daremos una definición equivalente de la desigualdad de Poincaré para espacios duplicantes completos. Los detalles de esta equivalencia se puede encontrar en [Kei04b].

Definición 3.2.1: $p-$desigualdad de Poincaré

Sea (X, d, μ) un espacio métrico medible y $p \geq 1$, diremos que X admite la **$p-$desigualdad de Poincaré** con constante $L \geq 1$ si cada bola contenida en X tiene una medida finita positiva y $\forall f \in \text{LIP}(X)$ satisface la desigualdad

$$\fint_{B(x,r)} \left(f - f_{B(x,r)}\right) d\mu \leq Lr \left(\fint_{B(x,Lr)} (\operatorname{lip} f)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.31}$$

Ahora veremos que las últimas desigualdades de la sección anterior, junto con la $p-$desigualdad de Poincaré nos da una desigualdad del estilo $\operatorname{Lip} f \leq K \operatorname{lip}$ ¡Lo cual nos da condiciones suficientes para el teorema principal!

Teorema 3.2.2

Sea μ una medida de Radon duplicante en un espacio métrico que admite la p-ésima desigualdad de Poincaré con constante L. Si $f \in \text{LIP}(X)$ entonces existe $M = M(K_\mu)$ tal que:

$$\operatorname{Lip} f(x) \leq K \operatorname{lip} f(x) \qquad \hat{\forall}\, x \in X. \tag{3.32}$$

Demostración: De la desigualdad de Poincaré se sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} \left| f - f_{B(x,r)} \right| d\mu &\leq L \left(\fint_{B(x,Lr)} (\operatorname{lip} f)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} && \text{Tomando el límite cuando } r \to 0. \\
\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} \left| f - f_{B(x,r)} \right| d\mu &\leq \lim_{r\downarrow 0} L \left(\fint_{B(x,Lr)} (\operatorname{lip} f)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= L \operatorname{lip} f(x)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Usando el Lema 3.1.20 tenemos que existe $C = C(K_\mu)$ tal que:

$$\frac{1}{C}\operatorname{Lip} f(x) \leq \limsup_{r\downarrow 0} \frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} \left| f - f_{B(x,r)} \right| \mathrm{d}\mu \tag{3.34}$$

De (3.33), (3.34) inferimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\operatorname{Lip}(f)(x) &\leq L \operatorname{lip} f(x) \\ \operatorname{Lip}(f)(x) &\leq \underbrace{CL}_{M} \operatorname{lip} f(x). \end{aligned}$$

Multiplicando por C de ambos lados.

Como $C = C(K_\mu)$, tenemos que $M = M(K_\mu)$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Convergencia en espacios euclidianos.

En esta sección definiremos la noción de convergencia de una sucesión de conjuntos a un conjunto. Hay una noción considerando conjuntos cerrados, aunque dicha noción es puramente conjuntista. Lo que haremos es relacionar estos conceptos con la métrica. En sí esta sección es un breve resumen del capítulo 8 de [DS97].

4.1. La métrica de Hausdorff.

Definición 4.1.1: Distancia entre conjuntos.

Sean (X, d) espacio métrico y $A, B \subset X$ no vacíos, definimos la **distancia entre los conjuntos A, B** como:

$$d(A, B) = \text{ínf}\,\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}\,. \tag{4.1}$$

Para el caso en que alguno de los conjuntos A, B sea un singulete, por ejemplo $A = \left\{x_0\right\}$ *p.a.* $x_0 \in X$, denotaremos

$$d(x_0, B) := d\left(\left\{x_0\right\}, B\right). \tag{4.2}$$

Es fácil ver que $d(A, B) = d\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$, por lo que para estudiar cómo se comporta la distancia entre conjuntos basta con analizar cómo se comporta en conjuntos cerrados. Esto nos lleva a la siguiente pregunta considerando a

$$\text{CL}(X) = \{A \subset X | A \text{ es cerrado no vacío}\}\,.$$

¿La distancia entre conjuntos define una métrica en $\text{CL}(X)$? La respuesta es que no; para ver esto basta ver lo siguiente:

Proposición 4.1.2 Para (X, d) espacio métrico y $A, B \subset X$ cerrados no vacíos se cumple lo siguiente:

1. $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A \cap B \neq \varnothing$.

2. $x \in A$ *sii* $d(x, A) = 0$.

3. $B \subset A$ *sii* $d(b, A) = 0\, \forall b \in B$.

El punto 1 de la Proposición 4.1.2 nos dice que la distancia entre conjuntos no define una métrica en $\text{CL}(X)$, pues no satisface la identidad de los indiscernibles. Pero los puntos 2 y 3 nos dan un indicio de cómo solucionar esta carencia y es que si $\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)$ son cero entonces sí tenemos $A = B$. Esto nos da una pista de cómo definir a una métrica en $\text{CL}(X)$. Proponemos la siguiente función:

$$d_H(A, B) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\}.$$

Antes de avanzar más, notemos que hay una sutileza aquí y es que en principio $d_H(A,B)$ no tiene porqué ser un número real pues $\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)$ podrían ser valores extendidos; para evitar esta situación en la literatura se pide que (X,d) sea compacto, aunque es suficiente pedir que nuestro espacio sea acotado. Con las consideraciones anteriores damos la siguiente:

Definición 4.1.3: Métrica de Hausdorff.

Sean (X,d) espacio métrico acotado y $A,B \subset X$ cerrados no vacíos definimos

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}. \tag{4.3}$$

Es sencillo ver que d_H define una métrica en $\mathrm{CL}(X)$. A esta métrica se le conoce como la **métrica de Hausdorff**. De esta manera tenemos que $(\mathrm{CL}(X), d_H)$ es un espacio métrico; por lo que podemos hablar de convergencia en este espacio. En esencia esto es lo que usaremos para hablar de la convergencia de espacios métricos.

A continuación introduciremos un concepto para caracterizar a la convergencia de conjuntos.

Definición 4.1.4: Nube de un conjunto.

Sean (X,d) espacio métrico, $A \subset X$ no vacío y $\varepsilon > 0$, definimos la **nube (abierta) de radio ε alrededor del conjunto A** como

$$N(A,\varepsilon) = \{x \in X | d(x,A) < \varepsilon\}.$$

Con las nubes podemos caracterizar a la métrica de Hausdorff de la siguiente manera:

Proposición 4.1.5 Sean (X,d) espacio métrico acotado y $A,B \subset X$ cerrados no vacíos entonces

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset N(B,\varepsilon,\ B \subset N(A,\varepsilon))\}$$

Con este resultado es claro que la convergencia con métrica de Hausdorff se puede caracterizar con nubes, esto se puede notar en la siguiente:

Proposición 4.1.6 Sean (X,d) espacio métrico acotado, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{CL}(X)$ y $A \in \mathrm{CL}(X)$. Entonces $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A con la métrica de Hausdorff si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se satisface $A \subset N(A_n,\varepsilon)$, $A_n \subset N(A,\varepsilon)$.

A continuación daremos un par de resultados de la teoría de hiperespacios para afinar un par de detalles en los resultados de [DS97]. Iniciaremos con otra noción de proximidad.

Definición 4.1.7: Límite inferior y superior de una sucesión de conjuntos.

Sea (X,d) espacio métrico y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$ definimos

$$\liminf A_n = \left\{x \in X | \forall U \in \tau_d \text{ con } x \in U \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } A_n \cap U \neq \varnothing \forall n \geq N\right\}. \tag{4.4}$$

$$\limsup A_n = \left\{x \in X | \forall U \in \tau_d \text{ con } x \in U \exists J \subset \mathbb{N} \text{ con } |J| = |\mathbb{N}| \text{ tal que } A_n \cap U \neq \varnothing \forall n \in J\right\}. \tag{4.5}$$

Observación 4.1.8 Sea (X,d) espacio métrico y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$. Se cumple lo siguiente:

- $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

✧ Podemos caracterizar a $\liminf A_n$, $\limsup A_n$ de la siguiente manera

$$\liminf A_n = \left\{x \in X | \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A_n \text{ tal que } x_n \to x\right\}.$$
$$\limsup A_n = \left\{x \in X | \exists \left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \text{ sucesión creciente que satisface } \forall k \in \mathbb{N} \exists x_{n_k} \in A_{n_k} \text{ tal que } x_{n_k} \to x\right\}.$$

Proposición 4.1.9 Sea (X, d) espacio métrico y $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, entonces $\liminf A_n$, $\limsup A_n$ son cerrados.

Demostración:

✧ **$\liminf A_n$ es cerrado.**

Sea $x \in X \setminus \liminf A_n$. De esta manera, existe $U \in \tau_d$ con $x \in U$ que satisface

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k > k \text{ tal que } A_{n_k} \cap U = \varnothing. \tag{4.6}$$

Sea $z \in U$, por (4.6) $z \notin \liminf A_n$, así $z \in U \subset \liminf A_n$. Lo cual demuestra que $X \setminus \liminf A_n$ es abierto. Por lo tanto concluimos que $\liminf A_n$ es cerrado.

✧ **$\limsup A_n$ es cerrado.**

Sea $x \in X \setminus \limsup A_n$. De esta manera, existen $W \in \tau_d$ con $x \in W$ y $N \in \mathbb{N}$ que satisface

$$A_n \cap U = \varnothing \; \forall n \geq N. \tag{4.7}$$

Sea $z \in U$, por (4.6) $z \notin \limsup A_n$, así $z \in U \subset X \setminus \limsup A_n$. Lo cual demuestra que $X \setminus \limsup A_n$ es abierto. Por lo tanto concluimos que $\limsup A_n$ es cerrado.

■

Notemos que si $\liminf A_n \neq \varnothing$ entonces $\limsup A_n \neq \varnothing$ y del resultado anterior tenemos que $\liminf A_n, \limsup A_n \in \mathrm{CL}(X)$. Como ya mencionamos $\liminf A_n$, $\limsup A_n$ dan una idea de proximidad; y en $\mathrm{CL}(X)$ ya tenemos una noción de convergencia. Lo que queremos es ver si estas nociones son compatibles. Para ello damos la siguiente

Definición 4.1.10

Sea (X, d) espacio métrico, $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ y $A \subset X$. Diremos que la sucesión $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A si $\liminf A_n = \limsup A_n = A$.

Ahora veremos que si tenemos convergencia en el sentido de la Definición 4.1.10 entonces el conjunto límite está en $\mathrm{CL}(X)$.

Proposición 4.1.11 Sea (X, d) espacio métrico compacto y $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ entonces $\limsup A_n \neq \varnothing$.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in A_n$. Como (X, d) es compacto la sucesión $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente; a saber la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a algún $x_0 \in X$.
Ahora veremos que $x_0 \in \limsup A_n$. Sea $U \in \tau_d$ tal que $x_0 \in U$. Como $x_{n_k} \to x_0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in U \; \forall k \geq K$, recordemos que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ y $x_{n_k} \to x_0$; de la Observación 4.1.8 inferimos que $x_0 \in \limsup A_n$. Esto demuestra que $\limsup A_n \neq \varnothing$.

■

Por las proposiciones 4.1.9 y 4.1.11 inferimos que en un espacio métrico compacto $\limsup A_n$ siempre es un elemento del hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$; es fácil ver que esto es falso para $\liminf A_n$, ya que este puede ser vacío, por este motivo la convergencia en el sentido de la Definición 4.1.10 siempre es a un elemento de $\mathrm{CL}(X)$. Así, la noción de convergencia de la Definición 4.1.10 en $\mathrm{CL}(X)$ está bien definida. Ahora podemos preguntarnos si esta coincide con la noción dada por la métrica de Hausdorff, lo cual es cierto. Esto se puede ver en el siguiente.

Teorema 4.1.12: Equivalencia de la convergencia de conjuntos.

Sea (X,d) espacio métrico compacto, $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{CL}(X)$ y $A \in \mathrm{CL}(X)$. Entonces $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A con la métrica de Hausdorff si y sólo si $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en el sentido de la Definición 4.1.10.

Demostración:

⇒) Supongamos primero que $A_n \to A$ con la métrica de Hausdorff; es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$A \subset N(A_n, \varepsilon) \qquad \text{y} \qquad A_n \subset N(A, \varepsilon). \tag{4.8}$$

Con esta hipótesis, probaremos que $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, para lo que verificaremos las dos contenciones.

$\limsup A_n \subset A$) Sea $x \in \limsup A_n$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que

$$A_n \cap B\left(x, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \neq \varnothing \ \forall n \in J. \tag{4.9}$$

Sea $N_1 \in J$ de tal manera que $N_1 \geq N$. Por otro lado, de (4.8) tenemos que $A_{N_1} \subset N\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, por lo cual existe $a_1 \in A$ tal que $d(a_1, x_{N_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. De (4.9) se sigue existe $x_{N_1} \in A_{N_1} \cap B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, así $d(x_{N_1}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. De la desigualdad del triángulo obtenemos

$$d(a_1, x) \leq d(a_1, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así, $a_1 \in B(x, \varepsilon)$; es decir para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, se sigue que $x \in \overline{A}$. Como A es cerrado obtenemos que $x \in A$, lo cual demuestra que $\limsup A_n \subset A$.

$A \subset \liminf A_n$) Sea $x \in A$. Sea $U \in \tau_d$ tal que $x \in U$, así, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_1) \subset U$. Como $A_n \to A$ tenemos que existe $M \in \mathbb{N}$ de tal manera que:

$$n \geq M \Rightarrow A \subset N(A_n, \varepsilon_1), \ A_n \subset N(A, \varepsilon_1). \tag{4.10}$$

Tomando a $n \geq M$ y usando (4.8) tenemos que $a \in A \subset N(A_n, \varepsilon)$, así $a \in N(A_n, \varepsilon)$ por lo cual existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a, a_n) < \varepsilon_1$. Es decir

$$a_n \in A_n \cap B(a, \varepsilon_1) \subset A_n \cap U$$

Así que $A_n \cap U \neq \varnothing \, \forall n \geq M$. Esto prueba que $A \subset \liminf A_n$

De esta manera hemos demostrado que $\limsup A_n \subset A \subset \liminf A_n$, como se da la contención $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ se sigue que $\liminf A_n = A = \limsup A_n$.

⇐) Ahora supongamos que $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en el sentido de la Definición 4.1.10. Así, A es cerrado no vacío, más aún como (X,d) es compacto se sigue que A es compacto.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

$$A \subset \bigcup_{a\in A} B\left(a, \tfrac{\varepsilon}{2}\right). \tag{4.11}$$

Como A es compacto tenemos que existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ de tal manera que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(a_i, \tfrac{\varepsilon}{2}\right). \tag{4.12}$$

Por hipótesis $A = \liminf A_n$. De esta manera para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ que cumple:

$$B\left(a_i, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cap A_n \neq \varnothing \ \forall n \geq N_i. \tag{4.13}$$

Tomaremos a $N = \max\left(N_i\right)_{i=1}^{m}$. Ahora veremos que si $n \geq N$ entonces $A \subset N(A_n, \varepsilon)$. En efecto, sea $a \in A$. De (4.11) se tiene que existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $a \in B\left(a_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Por otro lado, como $n \geq N \geq N_j$, de (4.13) tenemos que existe $b_j \in B\left(a_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A_n$.
De lo que se infiere:

$$\begin{aligned} d(a, b_j) &\leq d(a, a_j) + d(a_j, b_j) && \text{Pues } a \in B\left(a_j, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && b_j \in B\left(a_j, \tfrac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Ahora veremos que se da la contención $A \subset N(A_n, \varepsilon)$ para n suficientemente grande. Procederemos por contradicción; supongamos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k \in \mathbb{N} \text{ con } n_k > k \text{ tal que } A_{n_k} \not\subset N(A, \varepsilon). \tag{4.14}$$

Por lo cual

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists x_{n_k} \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n_k} \in A_{n_k} \setminus N(A, \varepsilon). \tag{4.15}$$

Como (X, d) es compacto tenemos que la sucesión $\left(x_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente, a saber $\left(x_{n_{k_r}}\right)_{r \in \mathbb{N}}$ converge a $x_0 \in X$. Como $x_{n_{k_r}} \in A_{n_{k_r}}$ y $x_{n_{k_r}} \to x_0$ se tiene que $x_0 \in \limsup A_n = A$. Por otro lado $x_{n_{k_r}} \in X \setminus N(A, \varepsilon)$ y como $x_{n_{k_r}} \to x_0$, así $x_0 \in X \setminus N(A, \varepsilon) \subset X \setminus A$, por lo cual $x_0 \notin A$. Esto es una contradicción porque ya habíamos deducido que $x_0 \in A$. Esta contradicción viene de suponer que se satisface (4.14), así que

$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ tal que } A_{n_k} \subset N(A, \varepsilon) \ \forall n \geq M. \tag{4.16}$$

Tomando a $L = \max\{N, M\}$ se cumple lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow A \subset N(A_n, \varepsilon),\ A_n \subset N(A, \varepsilon).$$

Lo cual demuestra que $A_n \to A$ con la métrica de Hausdorff.

■

La siguiente proposición nos dirá cómo extender los resultados que obtuvimos en esta sección a cualquier espacio métrico.

Proposición 4.1.13 Si X es un conjunto y d_1, d_2 son métricas acotadas en X que son equivalentes entonces las métricas de Hausdorff inducidas por d_1, d_2 son equivalentes.

Para demostrar esta proposición de manera elegante se necesita usar la topología de Vietoris y ver que esta coincide con la inducida por la métrica de Hausdorff. Esta es una construcción bastante detallada, se puede consultar en [IN99]; no obstante no es de nuestro interés en este trabajo.

Observación 4.1.14 Lo importante de la Proposición 4.1.13 es que nos permitirá definir la métrica de Hausdorff para cualquier espacio métrico. Para ver esto recordemos que para (X, d), la métrica $d_1 = \frac{d}{1+d}$ está acotada y es equivalente a d. Con esta métrica podemos considerar a la compactificación (X^*, d_1) por un punto de (X, d_1) podemos hacerlo sin considerar valores extendidos. El punto es que en (X^*, d_1) tenemos los resultados que desarrollamos, la ventaja es que la convergencia mediante la métrica de Hausdorff inducida por d_1 se puede poner en términos de la distancia d en conjuntos acotados pero tan arbitrariamente grandes como se necesite.

La definición de convergencia que se da en [DS97] es la siguiente:

Definición 4.1.15: Convergencia de conjuntos en espacios euclidianos.

Sea $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de $\mathbb{R}^m$. Diremos que **la sucesión $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un conjunto cerrado no vacío $F \subset \mathbb{R}^m$** si para todo $R > 0$ se satisface:

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in F_j\cap B(0,R)} \operatorname{dist}(x, F) = 0, \tag{4.17a}$$

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in F\cap B(0,R)} \operatorname{dist}(x, F_j) = 0. \tag{4.17b}$$

Los límites (4.17a), (4.17b) dan la misma noción de proximidad en la métrica de Hausdorff y la restricción a $B(0, R)$ es la parte esencial. Hablando más técnicamente, nos limitamos a considerar $\sup_{x\in F_j\cap B(0,R)} \operatorname{dist}(x, F)$, $\sup_{x\in F\cap B(0,R)} \operatorname{dist}(x, F_j)$ para que ambos sean números reales.

Observación 4.1.16 Podemos decir lo siguiente de las definiciones anteriores:

1. **Equivalencia con la métrica de Hausdorff.** De la Observación 4.1.14 y de la definición de métrica de Hausdorff se sigue que la Definición 4.1.15 nos dice que la sucesión de cerrados $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a F con la métrica de Hausdorff en la compactificación de $\mathbb{R}^m$.

2. Como ya hemos mencionado, si (X, d) es compacto entonces $\mathrm{CL}(X)$ es un espacio métrico compacto; como ya mencionamos en el inciso anterior, estamos trabajando en una compactificación de $\mathbb{R}^m$, a saber $(\mathbb{R}^m)^*$, por lo cual $\mathrm{CL}((\mathbb{R}^m)^*)$ es compacto. Lo cual implica que toda sucesión de cerrados tiene una subsucesión convergente a algún cerrado F en $\mathbb{R}^m$.

3. **Aproximación conveniente de los límites de conjuntos.** Si $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados que converge al cerrado F, por el Teorema 4.1.12 tenemos que se da la convergencia en el sentido de la Definición 4.1.10, así que $F = \liminf F_n$. Así para cada $x \in F$ existe $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal manera que $x_n \in F_n$ y $x_n \to x$.

Como se puede notar en el punto 3 de la Observación 4.1.16, cuando tenemos la convergencia de conjuntos hay una manera conveniente de aproximar la convergencia, lo cual motiva la siguiente:

Definición 4.1.17

Sean $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, F subconjuntos cerrados de algún $\mathbb{R}^m$ de tal manera que $F_n \to F$. Diremos que $\boldsymbol{(F_n, x_n) \to (F, x)}$ si $x \in F, x_n \in F_n \forall n \in \mathbb{N}$ son tales que $x_n \to x$.

Las herramientas que desarrollaremos en las secciones siguientes estarán en un producto, por eso es conveniente hacer la siguiente:

Observación 4.1.18 La convergencia en espacios euclidianos se preserva bajo productos cartesianos.

4.2. Espacios puntuados y nociones de convergencia.

Recordemos que la derivada es una noción definida para cada punto, así que al definir a la función que será la derivada lo haremos a partir de un punto distinguido, de esta manera introducimos la siguiente

Definición 4.2.1: Espacios puntuados.

- Un **espacio puntuado** es una dupla (X, x) donde X es un conjunto y $x \in X$; *i.e.* es un conjunto con un punto distinguido.
- Si $(X, x), (Y, y)$ son espacios puntuados, un **morfismo del espacio puntuado (X, x) al espacio puntuado (Y, y)** (o simplemente **morfismo puntuado** si todo lo demás es claro) es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$. Dicho morfismo lo denotaremos por $\boldsymbol{f : (X, x) \to (Y, y)}$. Reservaremos esta notación para hacer hincapié en los puntos distinguidos. Cuando sean claros los puntos distinguidos a dicho morfismo simplemente lo denotaremos por $f : X \to Y$. Con esta noción definiremos la categoría de los espacios puntuados **pSet**, donde los objetos son los espacios puntuados y los morfismos son los morfismos entre espacios puntuados.
- En general usaremos la noción de que *alguna estructura sea puntuada* si dicha estructura tiene un punto distinguido. Así un **espacio métrico puntuado** es una terna (X, d, x) donde (X, d) un es espacio métrico y $x \in X$.

Observación 4.2.2 Si tenemos un espacio puntuado (X, x) y una función $f : X \to Y$ entonces Y tiene a un único punto y tal que hace a f un morfismo de espacios puntuados, dicho morfismo lo llamaremos como el morfismo inducido por f en (X, x), cuando todo sea claro lo denotaremos simplemente por $f : (X, x) \to Y$.

Por el momento nos limitaremos a trabajar en espacios métricos puntuados, así que cuando nos refiramos a un espacio puntuado nos referiremos a un espacio métrico puntuado.
Ahora definiremos la noción de convergencia de funciones donde están variando sus codominios; para ello usaremos las nociones que dimos en la sección anterior, así damos la siguiente:

Definición 4.2.3: Mapeo.

Para nosotros un **mapeo** es una función que va de un conjunto cerrado no vacío de $\mathbb{R}^m$ a un espacio métrico.

Ahora introducimos la noción de convergencia para mapeos.

Definición 4.2.4: Convergencia de mapeos.

Diremos que **la sucesión de mapeos $\boldsymbol{\left(\Phi_n : F_n \to (Y, \rho)\right)_{n\in\mathbb{N}}}$ converge al mapeo $\boldsymbol{\Phi : F \to (Y, \rho)}$** si la sucesión de conjuntos $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a F y si se cumple que:

$$(F_n, x_n) \to (F, x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x_n) = \Phi(x). \tag{4.18}$$

En [DS97] se demuestra un resultado que garantiza la existencia del límite de mapeos; lo enunciaremos a continuación sin demostración.

Lema 4.2.5 Sea (Y, ρ) un espacio métrico donde los conjuntos cerrados acotados son compactos. Si la sucesión de mapeos $\mathcal{S} = \left(\Phi_n : F_n \to (Y, \rho)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en conjuntos acotados y uniformemente acotada en conjuntos acotados entonces $\mathcal{S}$ admite una subsucesión convergente a un mapeo con codominio (Y, ρ). Más aún, si $\mathcal{S}$ es una sucesión de funciones L-Lipschitz o L-bilipschitz entonces el mapeo límite tiene la misma propiedad.

Ya hemos dado una noción de convergencia de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^m$, ahora daremos una noción de convergencia para espacios puntuados.

Definición 4.2.6: Convergencia de espacios métricos puntuados.

Sea $\mathcal{S} = \left((X_n, d_n, x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios puntuados y (X, d, p) un espacio puntuado diremos que **la sucesión $\mathcal{S}$ converge a (X, d, p)** si:

1. *Todos los espacios en cuestión pueden ser encajados de manera homogénea en algún cerrado en $\mathbb{R}^m$ (esto quiere decir que el punto distinguido del espacio va a $0 \in \mathbb{R}^m$) mediante un lipeomorfismo, salvo una **única** $\alpha-$deformación; las constantes de los lipeomorfismos deben estar acotadas.*

   Es decir, existe una familia de encajes $L-$Lipschitz que podemos ver como morfismos puntuados.

$$f_j : \left(X_j, d_j^\alpha, x_n\right) \to (\mathbb{R}^m, |\cdot|, 0) \tag{4.19}$$

   Y

$$f : (X, d^\alpha, x) \to (\mathbb{R}^m, |\cdot|, 0) \tag{4.20}$$

   con $\alpha \in (0, 1]$ y $m \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Es decir j **no** depende de α.

2. *La sucesión de mapeos*

$$\begin{aligned} f_j[X_j] \times f_j[X_j] &\xrightarrow{\hat{d}_j} \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(f_j^{-1}(x), f_j^{-1}(y)) \end{aligned}$$

   converge al mapeo

$$\begin{aligned} f[X] \times f[X] &\xrightarrow{\hat{d}} \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

   .

Observación 4.2.7 Como podemos ver tenemos encajes de los espacios $\left((X_n, d_n^\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}}, (X, d^\alpha)$ por lo que podemos pensar a estos como conjuntos de $\mathbb{R}^m$. Al tener que los encajes son con $\alpha-$ésima deformación las nociones de convergencia que se tienen en $\mathbb{R}^m$ no tienen por qué coincidir con las de los espacios originales $\left((X_n, d_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, (X, d)$; así que es necesario pedir que se dé la convergencia del punto 2 de la Definición 4.2.6. De esta manera podemos considerar a las identificaciones que mencionamos antes y tenemos las nociones de convergencia esperadas.
La razón de pedir la $\alpha-$ésima deformación en el punto 1 de la Definición 4.2.6, es porque queremos usar esta noción de convergencia para espacios duplicantes y como ya mencionamos por el Teorema de Encaje de Assouad podemos pensarlos como un subconjunto cerrado de algún $\mathbb{R}^m$ considerando una $\alpha-$ésima deformación.
En síntesis, **podemos identificar a los espacios $\left((X_n, d_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, (X, d)$ con sus imágenes en $\mathbb{R}^m$ sin perder las propiedades métricas.**

Si $\mathcal{S}$ converge a dos espacios se puede ver que estos son isométricamente equivalentes, por lo cual el límite es único. La existencia del límite se basa en el Lema 4.2.5, de modo que pedimos que los encajes a $\mathbb{R}^m$ dados por el teorema de Assouad cumplan las condiciones del lema y que los espacios sean duplicantes completos.
Como ya hemos argumentado, en la Definición 4.2.6 podemos pensar que $X_n \to X$ con la métrica de Hausdorff. Cuando sucede

esto sabemos que el límite puede ser aproximado por sucesiones. Este resultado se extiende al considerar la identificación de los espacios con su imagen en $\mathbb{R}^m$ en la Definición 4.2.6.

Proposición 4.2.8 Sean $\left((X_n, d_n, x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios puntuados y (X, d, x) espacio puntuado tal que $\left((X_n, d_n, x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (X, d, x) como espacios métricos puntuados; supongamos que todos los espacios en cuestión se encajan en $\mathbb{R}^m$. Entonces:

1. Para cada $y \in X$ existe una sucesión $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $y_n \in X_n \forall n \in \mathbb{N}$ y $y_n \to y$; es decir se cumple que $(X_n, y_n) \to (X, y)$.
2. Para $(X_n, a_n) \to (X, a), (X_n, b_n) \to (X, b)$ se tiene que $d_n(a_n, b_n) \to d(a, b)$, $f_n(a_n) \to f(a)$.

Demostración:

1. De la Definición 4.2.6 se tiene que $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, X son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^m$ tal que $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a X, así de la Observación 4.1.16 se sigue que existe una sucesión $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $y_n \in X_n \forall n \in \mathbb{N}$ y $y_n \to y$.
2. De la Definición 4.2.6 se da la convergencia de espacios puntuados $(X_n, d_n, x_n) \to (X, d, x)$, usando el punto 2 de la Definición 4.2.6 junto con la hipótesis $a_n, b_n \in X_n \forall n \in \mathbb{N}$ y $a_n \to a, b_n \to b$ se sigue que $d_n(a_n, b_n) \to d(a, b)$. Como la sucesión de mapeos $\left(f_n : (X_n, d_n, x_n) \to \mathbb{R}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al mapeo $f : (X, d, x) \to \mathbb{R}$ y $a_n \to a, b_n \to b$ deducimos $f_n(a_n) \to f(a), f_n(b_n) \to f(b), d_n(a_n, b_n) \to d(a, b)$.

■

Lo importante del teorema anterior es que las convergencias son con las métricas originales, es decir, sin considerar ninguna $\alpha-$ésima deformación.

Observación 4.2.9 De la Proposición 4.2.8 se sigue que en la convergencia de $\left((X_n, d_n, x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a (X, d, x) como espacios puntuados podemos pensar a x como el límite de x_n y que los encajes de la Definición 4.2.6 son homogéneos.

Vamos a extender la idea anterior para morfismos puntuados en espacios duplicantes.

Definición 4.2.10: Convergencia de morfismos puntuados entre espacios duplicantes.

Sea $\left(h_n : (X_n, d_n, x_n) \to (Y_n, \rho_n, y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de morfismos puntuados entre espacios duplicantes y $h : (X, d, x) \to (Y, \rho, y)$ un morfismo puntuado, diremos que **h_n converge a h como morfismos puntuados en espacios duplicantes** si:

1. Los espacios $\left((X_n, d_n, x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, (X, d, x)$ pueden ser encajados en $\mathbb{R}^m$ mediante los lipeomorfismos $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, f$ y los espacios $\left((Y_n, \rho_n, y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, (Y, \rho, y)$ pueden ser encajados en $\mathbb{R}^n$ mediante los lipeomorfismos $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, g$.
2. Si la sucesión de mapeos $\left(g_n \circ h_n \circ f_n^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g \circ h \circ f^{-1}$ en el sentido de la Definición 4.2.6.

Como podemos notar esta noción se basa en la convergencia de mapeos y ya comentamos que esta noción está bien definida además de su existencia; similarmente podemos ver que la convergencia de morfismos puntuados entre espacios duplicantes está bien definida y podemos dar condiciones para la existencia de estos. Para ello introducimos nociones de equicontinuidad para morfismos puntuados:

Definición 4.2.11: Equicontinuidad de morfismos de espacios puntuados.

Sea $\mathcal{F} = \left(h_j : (X_j, d_j, p_j) \to (Y_j, \rho_j, q_j)\right)_{j\in J}$ una familia de morfismos de espacios puntuados. Diremos que $\mathcal{F}$ es:

- **Equicontinua en subconjuntos acotados puntuados** si $\forall R, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\forall j \in J \quad \rho_j\left(h_j(x), h_j(y)\right) < \varepsilon \qquad \text{siempre que } x, y \in B_{X_j}\left(p_j, R\right) \text{ y } d_j(x,y) < \delta. \tag{4.21}$$

- **Uniformemente acotada en subconjuntos acotados puntuados** si $\forall R, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\sup_{j\in J} \sup_{x\in B_{X_j}(p_j,R)} \rho_j\left(h_j(x), q_j\right) < \varepsilon. \tag{4.22}$$

Con esta definición procederemos a enunciar el teorema que nos da condiciones suficientes para la existencia de límite de sucesiones de morfismos puntuados entre espacios duplicantes.

Teorema 4.2.12: Existencia de límites de morfismos puntuados entre espacios duplicantes.

Sea $\mathcal{S} = \left(h_j : (X_j, d_j, p_j) \to (Y_j, \rho_j, q_j)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de morfismos de espacios puntuados, donde todos los espacios en cuestión son completos y duplicantes, con constantes duplicadoras uniformemente acotadas, de tal manera que la familia de morfismos $\mathcal{S}$ es equicontinua y uniformemente acotada en conjuntos acotados. Entonces existe un morfismo de espacios puntuados tal que $h : (X, d, p) \to (Y, \rho, q)$ es límite de la sucesión $\mathcal{S}$.

La demostración de este hecho es en esencia una adaptación del teorema de Arzela-Ascoli junto con el Teorema de Encaje de Assouad.

4.3. Espacios tangentes.

A continuación analizaremos un caso particular de la convergencia de morfismos puntuados entre espacios duplicantes

$$\left(h_j : (X_j, d_j, p_j) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)\right)_{j\in\mathbb{N}} \to h : (X, d, p) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$$

para dar una idea de espacio tangente. La terminología que usaremos viene del siguiente resultado de descomposición:

Lema 4.3.1 Si $f : (X, d, x) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ es morfismo puntuado con (X, d) espacio duplicante completo, considerando una $\alpha-$ésima deformación de (X, d, x), f se puede descomponer como un lipeomorfismo seguido de un mapeo.

<u>**Demostración:**</u> En efecto, por el Teorema de Encaje de Assouad para cualquier $\alpha \in (0,1)$, (X, d^α) es lipeomorfo a un cerrado en $\mathbb{R}^n$, a saber C; consideremos $L : (X, d^\alpha) \to C$ dicho lipeomorfismo. Como L es lipeomorfismo existe la inversa L^{-1}. De esta manera $f \circ L^{-1}$ es un mapeo.
En el siguiente diagrama podemos ver que $f : (X, d^\alpha, x)$ se descompone de la manera pedida.

$$\begin{tikzcd} (X, d^\alpha, x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "L"'] & \mathbb{R} \\ C \arrow[ur, "f\circ L^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

■

El Lema 4.3.1 nos dice que podemos descomponer a un morfismo puntuado $f : (X, d, x) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ con (X, d) localmente compacto duplicante como $f = M \circ L$ con M mapeo y L lipeomorfismo. De esta manera esta clase de morfismos puntuados cumple las condiciones pedidas a los espacios de la Definición 4.2.6. Ahora utilizaremos la convergencia de morfismos puntuados entre espacios duplicantes para definir al espacio tangente de uno de estos morfismos.

Definición 4.3.2: Espacio tangente de un mapeo.

Sean $f : (X, d, x) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ un morfismo puntuado con (X, d) localmente compacto duplicante y $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tal que $r_n \to 0$. Diremos que el morfismo duplicante $g : (Z, \rho, z) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ es **mapeo tangente del mapeo $f : (X, d, x) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ subordinado a la sucesión $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$** si existe $K \subset X$ vecindad compacta de x tal que la sucesión $\left(f_n : (K_n, d_n, x_n) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donde f_n es el r_n-reescalamiento de $f - f(x)$, converge a $g : (Z, \rho, z) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ como morfismos de espacios duplicantes. Como f_n es el r_n-reescalamiento de $f - f(x)$ tenemos que $K_n = K, d_n = \frac{d}{r_n}, x_n = x, f_n = \frac{f-f(x)}{r_n}$.
Para simplificar la notación los morfismos puntuados f, g los denotaremos por $(X, d, x, f), (Z, \rho, z, g)$ respectivamente. Bajo estas condiciones diremos que:

- El mapeo (Z, ρ, z, g) es *subordinado a la sucesión* $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La función g la llamaremos *función tangente de f* en x.
- La familia de todos los espacios tangentes al morfismo puntuado entre espacios duplicantes (X, d, x, f) la denotaremos por $\boldsymbol{T(X, d, x, f)}$.

Notación En lo que resta del trabajo utilizaremos la notación (X, d, x, f) para referirnos a un morfismo puntuado entre espacios duplicantes de la forma $f : (X, d, x) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$.

Al construir un mapeo tangente lo que estamos haciendo es considerar el proceso que hicimos en la Sección 3.1.9 y como motivamos en la Sección 3.1 este proceso aproximativo lo podemos pasar a la métrica del espacio base y a la función que estamos aproximando. Para hablar de esta transferencia formalmente es necesario hablar acerca de la noción de convergencia de espacios duplicantes.
Como la definición de mapeo tangente está en términos de convergencia de morfismos puntuados entre espacios duplicantes es de esperarse que se hereden varias de sus propiedades. Como la convergencia de morfismos puntuados entre espacios duplicantes es considerando reescalamientos, también veremos que esto es compatible con las propiedades de convergencia. Esto se puede notar en la siguiente:

Proposición 4.3.3 Sea (X, d, x, f) morfismo puntuado entre espacios duplicantes y $(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty) \in T(X, d, x, f)$ subordinado a $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces:

1. Podemos considerar a $x_\infty = x$.
2. $f_\infty(x_\infty) = 0$.
3. Si $(K_n, y_n) \to (X_\infty, y), (K_n, z_n) \to (X_\infty, z)$ entonces $d(y_n, z_n) \to 0$.
4. Si $(K_n, y_n) \to (X_\infty, y)$ entonces $d(y_n, x) \to 0$.

Demostración: Los puntos 1 y 2 se siguen inmediatamente de la Proposición 4.2.8.

3. Usamos la Proposición 4.2.8 para obtener que $d_n(y_n, z_n) \to d_\infty(y, z)$. De la definición de d_n junto con la convergencia anterior, se infiere que $|d(y_n, z_n) - r_n d_\infty(y, z)| \to 0$.

   Por otro lado como (Z, ρ, z, g) es subordinado a la sucesión $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que $r_n \to 0$, así, $r_n d_\infty(y, z) \to 0$.

   Aplicando la desigualdad del triángulo obtenemos

$$d(y_n, z_n) = |d(y_n, z_n)| \leq |d(y_n, z_n) - r_n d_\infty(y, z)| + |r_n d_\infty(y, z)|$$

   Usando que $|d(y_n, z_n) - r_n d_\infty(y, z)| \to 0, r_n d_\infty(y, z) \to 0$ en la desigualdad anterior se infiere que $d(y_n, z_n) \to 0$.

4. Podemos tomar $z_n = x_n$ en el inciso anterior, de lo que obtenemos $d(y_n, x) \to 0$.

■

Observación 4.3.4 Lo que estamos haciendo en la convergencia de los reescalamientos $\left(f_n : (K, \frac{d}{r_n}, x) \to (\mathbb{R}, |\cdot|, 0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es considerar las aproximaciones para la derivada de f en x pero ya no haciendo la aproximación en el espacio en sí, sino construyendo los reescalamientos. La ventaja con esto es que podemos aproximar la derivada en x con una sucesión de puntos $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal manera que $y_n \in K_n$ y $d_n(y_n, x_n)$ sea constante. También se puede pensar que con esta construcción estamos explotando al espacio (K, d).

Notemos que tenemos linealidad para los mapeos tangentes.

Teorema 4.3.5: Linealidad de los mapeos tangentes.

Si (X, d, x, f) es un morfismo puntuado entre espacios duplicantes, $(Z, \rho, z, g), (Z, \rho, z, h) \in T(X, d, x, f)$ subordinadas a la misma sucesión y $c \in \mathbb{R}$, entonces $(Z, \rho, z, g + h), (Z, \rho, z, cg) \in T(X, d, x, f)$; estos espacios están subordinados a $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ahora veremos que podemos garantizar la existencia de espacios tangentes.

Proposición 4.3.6: Sean (X, d, x, f) morfismo puntuado entre espacios duplicantes con (X, d) $C-$duplicante localmente compacto, $f \in \mathrm{LIP}(X)$ $L-$Lipschitz y $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_n \to 0$ entonces existe (Z, ρ) espacio C^2-duplicante completo y $g \in \mathrm{LIP}(Z)$ $L-$Lipschitz tal que $(Z, \rho, z, g) \in T(X, d, x, f)$ para algún $z \in Z$.

La demostración de este hecho es trivial.

Capítulo 5

Funciones cuasilineales.

Lo que haremos en este capítulo es desarrollar herramientas para poder dar la estructura diferenciable para un espacio que satisface una desigualdad del estilo $\operatorname{Lip} f \leq K \operatorname{lip} f$. Para ello introduciremos a las funciones cuasilineales.

5.1. Funciones cuasilineales.

Recordemos las desigualdades de la Proposición 3.1.2. Veamos que si se da la igualdad

$$\operatorname*{var}_{B(x,r)} f = \mathscr{Lip} f, \tag{5.1}$$

entonces se da la igualdad entre todos los operadores en (3.2), particularmente $\operatorname{lip} f(x) = \operatorname{Lip} f(x)$ por lo cual f tendría propiedades similares a una función diferenciable en x. Como se da la desigualdad $\operatorname{var}_{B(x_0,r)} f \leq \mathscr{Lip} f(x_0)$, lo que se busca es

$$\mathscr{Lip} f \leq \operatorname*{var}_{B(x_0,r)} f.$$

Esta es una condición bastante fuerte, una noción más débil es que exista $K \geq 1$ de tal manera que

$$\mathscr{Lip} f \leq K \operatorname*{var}_{B(x,r)} f.$$

Esta es precisamente la definición de función cuasilineal, a continuación la enunciaremos formalmente.

Definición 5.1.1: Función cuasilineal.

Sea $f \in \operatorname{LIP}(X)$ diremos que f es **$K-$cuasilineal** si:

$$\mathscr{Lip} f \leq K \operatorname*{var}_{B(x,r)} f \quad \forall x \in X \forall r > 0. \tag{5.2}$$

Diremos $f \in \operatorname{LIP}(X)$ es **cuasilineal** si existe $K_0 \geq 1$ de tal manera que f es K_0-cuasilineal.

Es claro que las funciones lineales en un espacio normado son cuasilineales, por lo que podemos pensar a la noción de cuasilinealidad como una manera de extender a la linealidad, de ahí su nombre. Además de esto hay otro buen motivo para nombrar a estas funciones de esta manera, resulta ser que las funciones con las que trabajaremos en la demostración del teorema principal son cuasilineales.
A continuación daremos un par de ejemplos de funciones cuasilineales para ilustrar propiedades relativas a la definición.

Ejemplo 5.1.2: Función que no es cuasilineal.

La función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ no es cuasilineal.

Procederemos por contradicción. Supongamos que f es cuasilineal, de esta manera existe $K \geq 1$ de tal manera que f es

$K-$cuasilineal. Así se cumple

$$\begin{aligned}
\mathscr{Lip} f &\leq K \operatorname*{var}_{B(x,r)} f \qquad \forall x \in X \forall r > 0 \\
&= K \sup_{y \in B(x,r)} \frac{|f(y) - f(x)|}{r} && \text{De la definición de var.} \\
&= K \sup_{y \in B(x,r)} \frac{|y - x|}{r} && \text{De la definición de } f. \\
&< K \sup_{y \in B(x,r)} \frac{2}{r} && \text{Pues } y, x \in (-1, 1) \\
&= \frac{2K}{r}.
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$\mathscr{Lip} f < \frac{2K}{r} \qquad \forall r > 0, \tag{5.3}$$

como $r > 0$ es arbitrario, podemos considerar el límite cuando $r \to \infty$ en (5.3) de lo que tenemos:

$$0 \leq \mathscr{Lip} f \leq \lim_{r \to \infty} \frac{2K}{r} = 0,$$

así que $\mathscr{Lip} f = 0$ por lo cual f es constante; lo cual es una contradicción. Dicha contradicción viene de suponer que f es cuasilineal. De esta manera concluimos que f no es cuasilineal.

Este ejemplo muestra que hay una sutileza en nuestra definición de cuasilinealidad. El detalle está en que la desigualdad (5.2) se cumple para cualquier $r > 0$, lo cual nos lleva a que f es constante. Esto nos sugiere que es conveniente pedir que la desigualdad (5.2) se cumpla únicamente para $r \leq \operatorname{diam} X$.
Ahora daremos el ejemplo de una función cuasilineal.

Ejemplo 5.1.3: Función que es cuasilineal.

La función $f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in (-\infty, -1). \\ x + 1 & si \quad x \in (1, \infty). \end{cases}$$

es cuasilineal.

Sean $x, y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y $r > 0$. Consideraremos a $I_{-1} = (-\infty, -1)$, $I_1 = (1, \infty)$, tomaremos a $i \in \{-1, 1\}$. Con esto en consideración veremos que f cumple las condiciones pedidas.

f es Lipschitz.

Como $x, y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ tenemos dos casos:

Caso 1: *x, y están el mismo I_i.*

En este caso, no importa quién sea I_i se cumple que

$$|f(y) - f(x)| = |y - x|. \tag{5.4}$$

Caso 2: *Un punto está en I_{-1} y el otro está en I_1.*

Veamos que si $x \in I_{-1}, y \in I_1$ tenemos que:

$$|f(y) - f(x)| = |y + 1 - x|$$

Como $y \in I_1, x \in I_{-1}$ se sigue que $y - x > 2$ de esta manera $y + 1 - x > 3 > 0$ por lo cual

$$|f(y) - f(x)| = |y + 1 - x| = y - x + 1 = |y - x| + 1. \tag{5.5}$$

Análogamente, si $y \in I_{-1}, x \in I_1$ también se cumple (5.5). De esta manera en

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |y - x| + 1 \\ &< 2|y - x|. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Como x, y están intervalos distintos tenemos que $|y - x| > 2$.

De las desigualdades (5.4) y (5.6) se sigue que f es 2−Lipschitz, así que $\mathscr{Lip}\, f \leq 2$.
Ahora calcularemos la variación de la función en cada punto.
Sea $y \in B(x, r)$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1: $r \leq |x| + 1$.

Tenemos dos subcasos:

Subcaso 1: $x \in I_{-1}$

En este subcaso se tiene lo siguiente:

$$y - x \leq |y - x| < r \leq |x| + 1 = -x + 1$$

Por lo cual $y < 1$, como $y \in I_{-1} \cup I_1$ se sigue que $y \in I_{-1}$.

Subcaso 2: $x \in I_1$

Similarmente, se tiene que

$$x - y \leq |y - x| < r \leq |x| + 1 = x + 1$$

Por lo cual $y > -1$, como $y \in I_{-1} \cup I_1$ se sigue que $y \in I_1$.

En cualquiera de los dos subcasos hemos demostrado que y está en el mismo I_i que x, así tenemos que se cumple (5.4) por lo cual

$$\begin{aligned} \operatorname*{var}_{B(x.r)} f &= \sup_{y \in B(x.r)} \frac{|f(y) - f(x)|}{r} \\ &= \frac{1}{r} \sup_{y \in B(x.r)} |y - x| \\ &= \frac{r}{r} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Como estamos considerando $y \in I_{-1} \cup I_1$ tal que $|y - x| < r$ podemos tomar a y de manera que $|y - x| \to r$.

Caso 2: $r > |x| + 1$.

En este subcaso podemos tomar a y de tal manera que x, y están en intervalos distintos de I_{-1}, I_1.

$$\begin{aligned}
\operatorname*{var}_{B(x.r)} f &= \sup_{y \in B(x.r)} \frac{|f(y) - f(x)|}{r} \\
&= \frac{1}{r} \sup_{y \in B(x.r)} (|y - x| + 1) \\
&= \frac{r+1}{r} \\
&\geq 1.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Como estamos considerando $y \in I_{-1} \cup I_1$ tal que $|y - x| < r$ podemos tomar a y de manera que $|y - x| \to r$.

De (5.7) y (5.8) de deducimos que

$$\mathscr{Lip}\, f \leq 2 \leq 2 \operatorname*{var}_{B(x.r)} f.$$

Lo cual demuestra que f es $2-$cuasilineal, por lo cual f es cuasilineal.

Cuasilinealidad y linealidad.

Como la cuasilinealidad es una manera de extender a la linealidad es de esperarse que algunas propiedades se pierdan. A continuación veremos que en efecto la cuasilinealidad es una noción más débil que la linealidad. Primero notemos que la multiplicación por escalares y la cuasilinealidad son compatibles.

Proposición 5.1.4: Si $f \in \mathrm{LIP}(X)$ es $K-$cuasilineal y $c \in \mathbb{R}$ entonces cf es $K-$cuasilineal.

La propiedad que se va a perder en la cuasilinealidad es la propiedad de ser cerrada bajo suma. Antes de dar el contraejemplo consideremos el siguiente:

Lema 5.1.5 Si $f \in \mathrm{LIP}(X)$ entonces:

1. Si f es $K-$cuasilineal y c es la función constante c entonces $f + c$ es $K-$cuasilineal.
2. Si f es localmente constante y $K-$cuasilineal entonces f es constante.

Demostración:

1. Esto es inmediato pues $\operatorname{var}_{B(x,r_0)} f = \operatorname{var}_{B(x,r_0)}(f + c)$.
2. Como f es localmente constante para $x \in X$ existe $r_0 > 0$ tal que f es constante en $B(x, r_0)$ por lo cual $\operatorname{var}_{B(x,r_0)} f = 0$, como f es $K-$cuasilineal tenemos que

$$\mathscr{Lip}\, f \leq K \operatorname*{var}_{B(x,r_0)} f = 0,$$

así que $\mathscr{Lip}\, f = 0$, de la Proposición 2.2.5 deducimos que f es constante.

■

Con esto en mente daremos el contraejemplo.

Contraejemplo 5.1.6: Suma de funciones cuasilineales no necesariamente es cuasilineal.

Procederemos por contradicción. Supongamos que la suma de funciones cuasilineales es cuasilineal. De la Proposición 5.1.4 junto con la hipótesis de que suma de funciones cuasilineales es cuasilineal, se sigue que la diferencia de funciones cuasilineales es cuasilineal.

Por otro lado consideremos a las funciones $f, g : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$ donde f es la identidad en $(-1, 0) \cup (0, 1)$ y g la función del Ejemplo 5.1.3. De esta manera f, g son cuasilineales, sin embargo

$$(g - f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1). \\ 1 & \text{si} \quad x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Así que $g - f$ es localmente constante. Sin embargo por el punto 2 de el Lema 5.1.5 no puede ser cuasilineal pues $g - f$ no es constante. No obstante, esto contradice que la diferencia de funciones cuasilineales es cuasilineal. Esta contradicción viene de suponer que la suma de funciones cuasilineales es cuasilineal, así, dicha aseveración es falsa.

Estimación de funciones cuasilineales.

El siguiente resultado nos da una estimación para una función cuasilineal que vale 0 en algún punto.

Lema 5.1.7 Sea f una función $K-$cuasilineal en (X, d) con $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in X$. Entonces existe $x_1 \in X$ tal que

$$\frac{1}{3K} \mathscr{Lip}(f) \leq |f(x_1)|$$

Demostración: En efecto, de la $K-$cuasilinealidad inferimos

$$\begin{aligned} \mathscr{Lip}(f) &\leq K \operatorname*{var}_{B(x,1/2)} f \\ &= K \sup_{B(x,1/2)} \frac{\left| f(x) - \cancelto{0}{f(x_0)} \right|}{\frac{1}{2}} \\ &= 2K \sup_{B(x,1/2)} |f(x)| \,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por otro lado tenemos que

$$\frac{2}{3} \sup_{B(x,1/2)} |f(x)| < \sup_{B(x,1/2)} |f(x)| \,.$$

De esta manera tenemos que $\exists x_1 \in B\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sup_{B(x,1/2)} |f(x)| &< \left| f(x_1) \right| && \textit{Multiplicando por } 3K \\ 2K \sup_{B(x,1/2)} |f(x)| &< 3K \left| f(x_1) \right| \end{aligned} \tag{5.10}$$

Usando las desigualdades (5.9), (5.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{Lip}(f) &< 3K |f(x_1)| \\ \frac{1}{3K} \mathscr{Lip}(f) &< |f(x_1)| \end{aligned}$$

■

5.2. Funciones cuasilineales y mapeos tangentes.

A continuación veremos que si tenemos un espacio vectorial de funciones $K-$cuasilineales de tal manera que todas están fijas a un punto entonces dicho espacio vectorial debe tener dimensión finita.

Teorema 5.2.1

Sean (X, d) un espacio métrico completo $C-$duplicante, $\mathcal{V} \leq_{\text{e.v.}} \mathrm{LIP}(X)$ subespacio vectorial de funciones $K-$cuasilineales, con $K \geq 1$, que cumple que

$$\exists x_0 \in X \, : \, f(x_0) = 0 \, \forall f \in \mathcal{V}.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

1. Para $x_1 \in X$ como en el Lema 5.1.7 se cumple $|f(x)| > \frac{1}{6K} \mathscr{Lip}(f) \quad \forall x \in B\left[x_1, \frac{1}{6K}\right]$.
2. Existe $L = L(C, K) > 0$ tal que
$$\mathscr{Lip}\, f \leq L \fint_{B(x_1,1)} |f| \mathrm{d}\mu. \tag{5.11}$$
3. Existe $N = N(C, K)$ tal que
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\xrightarrow{\quad \Phi \quad} \mathbb{R}^N \\ f &\longmapsto \left(\fint_{B_1} f, \ldots, \fint_{B_N} f\right) \end{aligned}$$
donde $\left\{B_i\right\}_{i=1}^N$ es la familia de bolas dadas por la Proposición 2.3.4, es lineal e inyectivo.
4. Existe N con $N = N(C, K)$, tal que $\dim(\mathcal{V}) \leq N$.

Demostración:

1. Como $f(x_0) = 0$ podemos aplicar el Lema 5.1.7, de esta manera existe $x_1 \in X$ tal que:
$$\frac{1}{3K} \mathscr{Lip}(f) \leq |f(x_1)|. \tag{5.12}$$
Sea $y \in B\left(x_1, \frac{1}{6K}\right)$. Notemos que $|f|$ es continua, de esta manera $|f|$ alcanza su mínimo en $B\left[x_1, \frac{1}{6K}\right]$, así $\exists x_2 \in B\left[x_1, \frac{1}{6K}\right]$ tal que $|f(x_2)| = \min |f| \left[B\left[x_1, \frac{1}{6K}\right]\right]$. Ahora por la desigualdad del triángulo tenemos
$$\begin{aligned} |f(x_2)| &\geq |f(x_1)| - |f(x_2) - f(x_1)| \\ &> \frac{1}{3K} \mathscr{Lip}(f) - |f(x_2) - f(x_1)|. \end{aligned} \quad \text{Por (5.12)} \tag{5.13}$$
Por otro lado de la definición de $\mathrm{LIP}(f)$ tenemos:
$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &\leq \mathrm{LIP}(f) d(x_2, x_1) \\ &< \frac{1}{6K} \mathscr{Lip}(f). \end{aligned} \quad \text{Pues } x_2 \in B\left(x, \tfrac{1}{6K}\right) \tag{5.14}$$
Usando (5.13),(5.14) obtenemos
$$|f(x_2)| > \frac{1}{3K} \mathscr{Lip}(f) - \frac{1}{6K} \mathscr{Lip}(f) = \frac{1}{6K} \mathscr{Lip}(f). \tag{5.15}$$
Como $|f(x_2)| = \min |f| \left[B\left[x_1, \frac{1}{6K}\right]\right]$ de la desigualdad (5.15) obtenemos
$$|f(x)| > \frac{1}{6K} \mathrm{LIP}(f) \quad \forall x \in B\left[x_1, \frac{1}{6K}\right].$$

2. Del inciso anterior $|f(x)| > \frac{1}{6K}\operatorname{LIP}(f) \quad \forall x \in B\left[x_1, \frac{1}{6K}\right]$, así que
$$\fint_{B\left(x_1,\frac{1}{6K}\right)} |f|d\mu \geq \frac{1}{6K}\mathscr{L}ip\, f. \tag{5.16}$$

3. Por la Proposición 2.3.4 entonces para $s > 0$ arbitrario pero fijo existe una familia finita de bolas de radio s en X, a saber $\mathcal{B} = \left\{B_i\right\}_{i=1}^n$ tal que $B(x_1, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ y cada bola interseca a lo más M bolas de $\mathcal{B}$, donde $M = M(C, s)$. De esta manera

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{B_i} \left|f - f_{B_i}\right| &= \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \left|f(x) - f_{B_i}\right| d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \left|f(x) - \fint_{B_i} f(y)d\mu(y)\right| d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \left|\fint_{B_i} f(x) - f(y)d\mu(y)\right| d\mu(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \fint_{B_i} |f(x) - f(y)|\, d\mu(y)d\mu(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \fint_{B_i} \mathscr{L}ip(f)d(x,y)d\mu(y)d\mu(x) \\
&< \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \fint_{B_i} \mathscr{L}ip(f)2s\,d\mu(y)d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{B_i} 2s\,\mathscr{L}ip(f) \\
&= \sum_{i=1}^N 2s\,\mathscr{L}ip(f)\mu\left(B_i\right) \qquad \text{\textit{Del inciso anterior.}} \\
&= \sum_{i=1}^N 12sK\mu\left(B_i\right) \fint_{B\left(x_1,\frac{1}{6K}\right)} |f|d\mu.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Lo siguiente que haremos es relacionar $\mu(B_i)$ con $\mu(B(x_1, 1))$. Notemos que $B_i \subset B(x_1, 1 + 2s)$; tomaremos $s < \frac{1}{2}$; de esta manera
$$\mu(B_i) \leq \mu(B(x_1, 1 + 2s)) \leq \mu(B(x_1, 2)) \leq C\mu(B(x_1, 1)).$$
De la desigualdad (5.17) inferimos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{B_i} \left|f - f_{B_i}\right| &< \sum_{i=1}^N 12sK\mu\left(B_i\right) \fint_{B\left(x_1,\frac{1}{6K}\right)} |f|d\mu \\
&< \sum_{i=1}^N 12sKC\mu(B(x_0, 1)) \fint_{B\left(x_1,\frac{1}{6K}\right)} |f|d\mu \\
&= 12sNKC\mu(B(x_0, 1)) \fint_{B\left(x_1,\frac{1}{6K}\right)} |f|d\mu
\end{aligned}$$

Veamos que si además $s < \frac{\mu\left(B\left(x_1,\frac{1}{6K}\right)\right)}{24sNKC\mu(B(x_0,1))}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_{B_i}\left|f-f_{B_i}\right| &< \frac{1}{2}\int_{B\left(x_1,\frac{1}{6K}\right)}|f|d\mu && \text{Pues } K\geq 1 \text{ así } \tfrac{1}{6K}\leq 1.\\
&\leq \frac{1}{2}\int_{B(x_1,1)}|f|d\mu. \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

Para esto basta considerar $s<\text{mín}\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{24sNKC}\right\}$:

$$
\begin{aligned}
\int_{B(x_1,1)}|f|d\mu &\leq \int_{\bigcup_{i=1}^{n}B_i}|f|d\mu\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f|d\mu && \text{Por desigualdad del triángulo.}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f-f_{B_i}|d\mu+\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f_{B_i}|d\mu\\
&\leq \frac{1}{2}\int_{B(x_1,1)}|f|d\mu+\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f_{B_i}|d\mu\\
\int_{B(x_1,1)}|f|d\mu &\leq \frac{1}{2}\int_{B(x_1,1)}|f|d\mu+\sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f_{B_i}|d\mu.\\
\frac{1}{2}\int_{B(x_1,1)}|f|d\mu &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{B_i}|f_{B_i}|d\mu && \text{Pues } f_{B_i} \text{ es constante.}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)|f_{B_i}| && \text{De la definición de } f_A\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{B_i}f\right|\\
\int_{B(x_1,1)}|f|d\mu &\leq 2\left\|\Phi(f)\right\|_1. \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

Notemos que Φ es lineal, pues lo es entrada a entrada. De las desigualdades (5.16) y (5.19) inferimos

$$
\mathscr{L}ip\, f \leq 12K\left\|\Phi(f)\right\|_1. \tag{5.20}
$$

Por lo que si $\Phi(f)=0$ de la desigualdad (5.20) deducimos $\mathscr{L}ip\, f=0$ así que f es constante, como $f(x_0)=0$ se sigue que $f=0$ lo cual demuestra que Φ es inyectivo. Así hemos demostrado que Φ es un operador lineal inyectivo.

4. Del inciso anterior tenemos que el operador $\Phi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^N$ es lineal e inyectivo. Se infiere del teorema de la dimensión para espacios vectoriales que $\dim\mathcal{V}=\dim\Phi[\mathcal{V}]\leq N$.

■

Observación 5.2.2

- **En el Teorema 5.2.1 es necesario pedir que $\mathcal{V}$ sea subespacio vectorial de funciones $K-$cuasilineales.** Esto ya que el Contraejemplo 5.1.6 vimos que la $K-$cuasilinealidad no se preserva bajo sumas.

Existencia de subespacios vectoriales de LIP(X) **que satisfacen las hipótesis del Teorema 5.2.1.** La existencia de dichos espacios se puede ver en el Lema 6.1.3, el cual se usa en la demostración del teorema principal para ver que la estructura propuesta cumple el punto 2 de la Definición 1.1.2; más aún el Teorema 5.2.1 viene motivado del Lema 6.1.3.

Aproximaciones para mapeos tangentes.

Veremos que si tenemos una medida gruesa para (X, d), entonces los mapeos tangentes a (X, d, x, f) se pueden aproximar y acotar de manera adecuada.

Proposición 5.2.3 Sean μ medida de Radon gruesa en un espacio métrico medible duplicante localmente compacto (X, d), y $f \in \mathrm{LIP}(X)$, entonces para casi todo $x \in X$ existen $A \subset X$ medible tal que $x \in A$ y $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_n \to 0$ que cumplen lo siguiente: Para cualesquiera $R, \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $y \in B(x, Rr_n)$ con $n > N$ implica que $B(y, \varepsilon r_n) \cap A \neq \varnothing$.

Demostración: Podemos aplicar la Proposición 2.4.2 repetidamente; tenemos que: $\widehat{\forall}\, x \in A \exists \left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $s_n \to 0$ y $\left(N_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ que satisfacen

$$B\left(y, \tfrac{s_n}{m}\right) \cap F \neq \varnothing \quad \forall n \geq N_m \,\forall y \in B\left(x, s_n\right). \tag{5.21}$$

Para $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} n_m &= N_{m^2} \\ r_m &= \frac{s_{n_m}}{m} \\ &= \frac{s_{N_{m^2}}}{m}. \end{aligned}$$

Ahora veremos que $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición pedida. En efecto, sea $y \in B(x, mr_m)$; de la definición de r_m obtenemos $mr_m = s_{n_m} = s_{N_{m^2}}$. De esta manera $y \in B\left(x, s_{N_{m^2}}\right)$; así de (5.21) y de la definición de r_m se infiere

$$B\left(y, \tfrac{r_m}{m}\right) \cap F = B\left(y, \tfrac{s_{N_{m^2}}}{m^2}\right) \cap F \neq \varnothing. \tag{5.22}$$

Consideramos $\alpha = \text{máx}\left\{R.\frac{1}{\varepsilon}\right\} + 1$, de esta manera si $y \in B(x, \alpha r_m)$ y $m > \alpha$ se sigue que $y \in B(x, mr_m)$, por lo que inferimos que

$$\varnothing \neq B\left(y, \tfrac{r_m}{m}\right) \cap F \subset B\left(y, \tfrac{r_m}{\alpha}\right) \cap F \subset B\left(y, \varepsilon r_m\right) \cap F. \tag{5.23}$$

De esta manera, si $y \in B(x, Rr_n)$ con $n > \alpha$, se sigue que $y \in B(x, \alpha r_m)$. Así de (5.23) se sigue que $B\left(y, \varepsilon r_m\right) \cap F \neq \varnothing$.

■

Ahora veremos que si consideramos a un mapeo tangente podemos aproximarnos a este con elementos del conjunto anterior dado en la Proposición 5.2.3.

Proposición 5.2.4 Sean (X, d, x, f) es un morfismo puntuado entre espacios duplicantes, μ medida de Radon gruesa duplicante en (X, d), A como en la Proposición 5.2.3 y $\left(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty\right) \in \mathrm{T}\left(X, d, x, f\right)$, subordinado a la sucesión $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces para $y \in X_\infty$ existe $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ con $y_n \in A$ tal que $y_n \to y$.

Demostración: Si $y = x_\infty$ definimos $y_n = x$ y así se cumple la condición $y_n \to y$. Ahora analicemos el caso en que $y \neq x_\infty$, así $d(y, x_\infty) > 0$; como $\left(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty\right) \in \mathrm{T}\left(X, d, x, f\right)$ consideraremos a K_n como en la Definición 4.3.2. Así, podemos

encontrar una sucesión de puntos y_n de tal manera que $(K_n, y_n) \to (X_\infty, x_\infty)$. Por la Proposición 4.3.3 tenemos que $d(y_n, x) \to 0$, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $y_n \in B_n(x_n, d_\infty(x_\infty, y))$ para $n > N$.
Para demostrar este resultado procederemos por contradicción, supongamos que no existe una sucesión de elementos de A que converja a y. Por lo cual existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de tal manera que $B_n(y_{n_k}, s) \cap A_{n_k} = \emptyset$, como $r_{n_k} \to 0$ podemos considerar que $B_n(y_{n_k}, sr_{n_k}) \cap A_{n_k} = \emptyset$. Como $y_n \in B(x, d_\infty(x_\infty, y)r_{n_k})$ esto contradice la Proposición 5.2.3. Esta contradicción viene de suponer que no existe una sucesión de elementos de A que converja a y; así que se cumple el resultado.

■

Veamos que los resultados anteriores los podemos hacer compatibles con las nociones de convergencia para los operadores de funciones Lipschitz desarrolladas en capítulos anteriores.

Corolario 5.2.5 Sean μ medida de Radon gruesa en un espacio métrico medible duplicante localmente compacto (X, d) y $f \in \mathrm{LIP}(X)$, entonces para casi todo $x \in X$ existen $A \subset X$ medible tal que $x \in A$ y $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_n \to 0$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. Las funciones $\mathrm{lip}\, f, \mathrm{Lip}\, f$ son continuas en A y $l_r f \xrightarrow[r\to 0]{u} \mathrm{lip}(f)$, $L_r f \xrightarrow[r\to 0]{u} \mathrm{Lip}(f)$.
2. Para cualesquiera $R, \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $y \in B(x, Rr_n)$ con $n > N$ implica que $B(y, \varepsilon r_n) \cap A \neq \emptyset$.

Ahora veremos que dada una función en $\mathrm{LIP}(X)$ podemos dar un mapeo tangente en $T(X, d, x, f)$ que esté acotado por $\mathrm{lip}\, f, \mathrm{Lip}\, f$ casi donde sea.

Lema 5.2.6 Sean μ medida de Radon gruesa en un espacio métrico medible duplicante localmente compacto (X, d) y $f \in \mathrm{LIP}(X)$. Entonces para casi todo $x \in X$ existe una sucesión $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_n \to 0$ que satisface que para cualquier $\left(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty\right) \in \mathrm{T}\left(X, d, x, f\right)$ que sea subordinado a $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $f_\infty\left(x_\infty\right) = 0$ y

$$\mathrm{lip}\, f(x) \leq \underset{B(y,s)}{\mathrm{var}}\ f_\infty \leq \mathscr{Lip}\, f_\infty \leq \mathrm{Lip}\, f(x) \qquad \forall y \in X_\infty \forall s > 0. \tag{5.24}$$

<u>**Demostración:**</u> Como este es un resultado que se cumple casi donde sea podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in A$, donde A es el conjunto dado en el Corolario 5.2.5. Consideraremos a los conjuntos K_n de la Definición 4.3.2.
Sean $\varepsilon > 0$ y $y, z \in X_\infty$. Por la Proposición 5.2.4 podemos considerar a sucesiones que $y_n \to y, z_n \to z$ con $z_n, y_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$.

1. $\mathscr{Lip}\, f_\infty \leq \mathrm{Lip}\, f(x)$.

   Como

   $$\mathrm{Lip}\, f(x) = \inf_{s>0} \sup_{w\in\odot(0,s)} \frac{|f(w) - f(v)|}{d(w, v)} \qquad \forall v \in X,$$

   así que existe $s_0(v) > 0$ tal que:

   $$\sup_{w\in(0,s_0)} \frac{|f(w) - f(v)|}{d(w, v)} \leq \mathrm{Lip}\, f(v) + \varepsilon. \tag{5.25}$$

   Notemos que la Proposición 4.3.3 garantiza que $d(y_n, z_n) \to 0$. Usando estos dos hechos junto con (5.25) se sigue que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ de tal manera que para cualquier $n \geq N_1$ se satisface:

   $$\begin{aligned} \frac{\left|f(y_n) - f(z_n)\right|}{d(y_n, z_n)} &\leq \mathrm{Lip}\, f(y_n) + \varepsilon \\ \frac{\left|f_n(y_n) - f_n(z_n)\right|}{d_n(y_n, z_n)} &\leq \mathrm{Lip}\, f(y_n) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.26}$$

   Multiplicando por $\frac{1}{r_n}$ y usando las definiciones de f_n, d_n.

Como Lip f es continua en A y $d(y_n, x) \to 0$ se sigue que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$\operatorname{Lip} f(y_n) \leq \operatorname{Lip} f(x) + \varepsilon \qquad \forall n \geq N_2. \tag{5.27}$$

De esta manera si tomamos a $n \geq \max\left\{N_1, N_2\right\}$ podemos usar las desigualdades (5.26), (5.27).

$$\frac{\left|f_n(y_n) - f_n(z_n)\right|}{d_n(y_n, z_n)} \leq \operatorname{Lip} f(x) + 2\varepsilon.$$

tomando el límite cuando $n \to \infty$ y por la Proposición 4.2.8 se tiene que $f_n(y_n) \to f_\infty(y), f_n(z_n) \to f_\infty(z)$, ; por lo que inferimos:

$$\frac{\left|f_\infty(y) - f_\infty(z)\right|}{d_\infty(y, z)} \leq \operatorname{Lip} f(x) + 2\varepsilon.$$

Como $y, z \in X_\infty$ fueron arbitrarios se sigue que $\mathscr{Lip}\, f_\infty \leq \operatorname{Lip} f(x) + 2\varepsilon$, como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario se sigue que $\mathscr{Lip}\, f_\infty \leq \operatorname{Lip} f(x)$.

2. $\operatorname{lip} f(x) \leq \operatorname{var}_{B(y,r)} f_\infty \quad \forall y \in X_\infty \forall r > 0.$

   Sea $s > 0$, como ya hemos mencionado $d(y_n, x) \to 0$. Recordemos que $l_r f \xrightarrow{u} \operatorname{lip} f$ en A; de esta manera existe $s_0 > 0$ tal que:

$$\inf_{t \in (0, s_0)} \sup_{d(y_n, z) < t} \frac{\left|f\left(y_n\right) - f\left(z\right)\right|}{t} \geq \operatorname{lip} f\left(y_n\right) - \varepsilon. \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Definimos a $s_n = s r_n$ como $s_n \to 0$ y $s_0 > 0$ escogemos $N_1 \in \mathbb{N}$ de tal manera que $n > N_1 \Rightarrow s_n < s_0$ por lo que

$$\sup_{d(y_n, z) < s_n} \frac{\left|f\left(y_n\right) - f\left(z\right)\right|}{s_n} \geq \operatorname{lip} f\left(y_n\right) - \varepsilon.$$

   De esta manera para $n > N_1$ existe $z_n \in B(y_n, s)$ tal que

$$\frac{\left|f\left(y_n\right) - f\left(z\right)\right|}{s_n} \geq \operatorname{lip} f\left(y_n\right) - 2\varepsilon. \tag{5.28}$$

   Como lip f es continua en A y $d(y_n, x) \to 0$ se sigue que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{lip} f(y_n) \geq \operatorname{lip} f(x) - \varepsilon \qquad \forall n \geq N_2. \tag{5.29}$$

   Así tomando $n \geq \max\left\{N_1, N_2\right\}$ podemos usar las desigualdades (5.28), (5.29)

$$\frac{\left|f\left(y_n\right) - f\left(z_n\right)\right|}{s_n} \geq \operatorname{lip} f\left(y_n\right) - 3\varepsilon \tag{5.30}$$

Usando que $s_n = s r_n$ y $f_n = \frac{f - f(x)}{r_n}$.

$$\frac{\left|f_n\left(y_n\right) - f_n\left(z_n\right)\right|}{s} \geq \operatorname{lip} f\left(y_n\right) - 3\varepsilon. \tag{5.31}$$

   Por la Proposición 4.2.8 tenemos que $f_n \to f_\infty$, así al tomar el límite cuando $n \to \infty$ en (5.31):

$$\operatorname*{var}_{B(y,s)} f_\infty \geq \frac{\left|f_\infty(y) - f_\infty(z)\right|}{s} \geq \operatorname{lip} f(x) - 3\varepsilon. \tag{5.32}$$

Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario se infiere que $\operatorname{var}_{B(y,s)} f_\infty \geq \operatorname{lip} f(x)$.

Como siempre se cumple que $\operatorname{var}_{B(y,r)} f_\infty \leq \mathscr{Lip}\, f_\infty$. De los puntos 1 y 2 concluimos que se cumple (5.24).

■

Veamos que si en el Lema 5.2.6 anterior pedimos que f satisfaga una desigualdad del estilo $\operatorname{Lip} f \leq K \operatorname{lip} f$, entonces las funciones tangentes son $K-$cuasilineales.

Corolario 5.2.7 Sean μ medida de Radon gruesa en un espacio métrico medible duplicante localmente compacto (X, d) y $f \in \mathrm{LIP}(X)$ tal que

$$\operatorname{Lip} f \leq K \operatorname{lip} f.$$

Entonces para casi todo $x \in X$ existe una sucesión $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_n \to 0$ que satisface que para cualquier $\left(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty\right) \in \mathrm{T}(X, d, x, f)$ que sea subordinado a $\left(r_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que:

1. $f_\infty\left(x_\infty\right) = 0$.

2. $$\operatorname{lip} f(x) \leq \operatorname*{var}_{B(y,s)} f_\infty \leq \mathscr{Lip}\, f_\infty \leq \operatorname{Lip} f(x) \qquad \forall y \in X_\infty \forall s > 0.$$

3. f_∞ es $K-$cuasilineal.

Demostración: El único inciso que requiere demostración es 3. Por (5.24) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Lip}\, f_\infty &\leq \operatorname{Lip} f(x) \\
&\leq K \operatorname{lip} f(x) \\
&\leq K \operatorname*{var}_{B(y,s)} f_\infty.
\end{aligned}$$

Nuevamente por (5.24).

Esto demuestra que f_∞ es $K-$cuasilineal.

■

Capítulo 6

Demostración del teorema principal.

En este capítulo demostraremos el teorema principal. Lo que haremos es proponer una estructura que cumple la Definición 1.1.2. Primero veremos que satisface el punto 2 de la Definición 1.1.2, después demostraremos que se cumple el punto 3 de la Definición 1.1.2 y por último veremos que se tiene el punto 1 de la Definición 1.1.2. Y con base en este resultado construiremos la estructura diferenciable.

6.1. Algunos resultados auxiliares.

A continuación definiremos ciertos conjuntos con los cuales daremos la estructura diferenciable.

Definición 6.1.1

Sea (X, d) espacio métrico, $f = (f_1, \dots, f_n)$ con $f_i \in \mathrm{LIP}(X)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\delta > 0$ definimos

$$S(f) = \left\{ x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \neq 0 \, \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\},$$
$$S(f, \delta) = \left\{ x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\| \; \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Ahora veremos que dichos conjuntos son medibles y que podemos descomponer a $S(f)$ de una manera conveniente.

Proposición 6.1.2 Sea (X, d) espacio métrico, $f = (f_1, \dots, f_n)$ con $f_i \in \mathrm{LIP}(X)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\delta > 0$. Entonces

1. La familia de conjuntos $\{S(f, \delta)\}_{\delta > 0}$ es monótona decreciente.

2. $\forall \delta > 0 \quad S(f, \delta) = \left\{ x \in X \mid \delta = \min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x \right\}$.

3. Se tienen las siguientes igualdades de conjuntos

$$S(f) = \bigcup_{\delta > 0} S(f, \delta) \tag{6.1}$$
$$= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S\left(f, \frac{1}{m}\right) \tag{6.2}$$
$$= \left\{ x \in X \mid \min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x > 0 \right\}. \tag{6.3}$$

4. Si $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ es denso numerable entonces $S(f, \delta) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left\{ x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\| \right\}$.

5. Para todo $\delta > 0$ $S(f, \delta)$ es medible.

6. $S(f)$ es medible.

Demostración: Claramente $\|\_ \cdot f\|_x$ dada por $\lambda \mapsto \|\lambda \cdot f\|_x$ es continua , así $\|\_ \cdot f\|_x$ alcanza su mínimo en $\mathbb{S}^n$. Supongamos que el mínimo se alcanza en $\lambda_0 \in \mathbb{S}^n$, consideramos $\delta_0 = \left\|\lambda_0 \cdot f\right\|_x$.

1. Supongamos que $0 < \delta_1 \leq \delta_2$. Sea $x \in S(f, \delta_2)$; de esta manera:

   $$\|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta_2 \|\lambda\| \geq \delta_1 \|\lambda\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

   Por lo cual $x \in S(f, \delta_1)$ así que $S(f, \delta_2) \subset S(f, \delta_1)$.

2. Sea $x \in S(f, \delta)$, de esta manera $\|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ particularmente para $\lambda \in \mathbb{S}^n$ arbitrario tenemos que $\|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta > 0$ por lo cual $\min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x > 0$ así $x \in \left\{x \in X \mid \min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x > 0\right\}$.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^n$. De las definiciones de $S(f)$ y $S(f, \delta)$ inferimos $S(f) \subset \bigcup_{\delta > 0} S(f, \delta)$. Del inciso 1 y la propiedad arquimediana es claro que $\bigcup_{\delta>0} S(f, \delta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S\left(f, \frac{1}{n}\right)$. Por el inciso 2 deducimos

   $$\bigcup_{\delta > 0} S(f, \delta) \subset \left\{x \in X \mid \min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x > 0\right\}.$$

   Conversamente si $x \in \left\{x \in X \mid \delta = \min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x > 0\right\}$ para $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tenemos

   $$\begin{aligned} \left\| \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \cdot f \right\|_x &\geq \delta \\ \frac{\|\lambda \cdot f\|_x}{\|\lambda\|} &\geq \delta \qquad \textit{De la homogeneidad de la norma.} \\ \|\lambda \cdot f\|_x &\geq \delta \|\lambda\| \\ &> 0. \qquad \textit{Pues } \|\lambda\| > 0 \textit{ pue } \lambda \neq 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

   Así $x \in S(f)$, por lo que $\left\{x \in X \mid \min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x > 0\right\} \subset S(f)$. De esta manera hemos demostrado que

   $$S(f) \subset \bigcup_{\delta > 0} S(f, \delta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S\left(f, \frac{1}{n}\right) \subset \left\{x \in X \mid \min_{\lambda \in \mathbb{S}^n} \|\lambda \cdot f\|_x > 0\right\} \subset S(f).$$

   Así tenemos que se dan las igualdades (6.1), (6.2), (6.3).

4. $\boldsymbol{S(f, \delta) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left\{x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|\right\}}$) Sea $x \in S(f, \delta)$, de esta manera $\|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$, por lo que se cumple en particular para cada $\lambda \in \Lambda$, así que $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left\{x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|\right\}$

   $\boldsymbol{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left\{x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|\right\} \subset S(f, \delta)}$) Sean $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left\{x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|\right\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Como Λ es denso tenemos que existe $\left(\lambda_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ tal que $\lambda_n \to \lambda$; por hipótesis tenemos que se cumple:

   $$\left\|\lambda_n \cdot f\right\|_x \geq \delta \left\|\lambda_n\right\| \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

   tomando el límite cuando $n \to \infty$ y usando la continuidad de $\|- \cdot f\|_x$, $\|\cdot\|$ obtenemos:

   $$\|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|,$$

   esto prueba que $x \in S(f, \delta)$.

5. Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ denso numerable. Si $\lambda \in \Lambda$, el conjunto $\left\{x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|\right\}$ son medibles. Del inciso anterior tenemos que $S(f, \delta) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left\{x \in X \mid \|\lambda \cdot f\|_x \geq \delta \|\lambda\|\right\}$ y como Λ es numerable tenemos que $S(f, \delta)$ es intersección numerable de conjuntos medibles así que $S(f, \delta)$ es medible.

6. Usando que $S(f,\delta)$ es medible y la igualdad (6.2) tenemos que $S(f)$ lo podemos ver como unión numerable de conjuntos medibles, así $S(f)$ es medible.

$\blacksquare$

Ya que hemos demostrado todos los resultados auxiliares finalmente daremos el lema que nos dice que la dimensión de la estructura diferenciable que vamos a proponer es finita.

Lema 6.1.3 Sea μ una medida de Radon gruesa en un espacio $C-$duplicante completo y sea $f = (f_1,\ldots,f_N)$ con $f_i \in \mathrm{LIP}(X)$ para $i \in \{1,\ldots,N\}$. Supongamos que existe $K \geq 1$ tal que

$$\mathrm{Lip}(\lambda \cdot f)(x) \leq K\,\mathrm{lip}(\lambda \cdot f)(x) \qquad \hat{\forall}\, x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^N. \tag{6.5}$$

1. Para casi todo $a \in A$ existe $(X_\infty, d_\infty, x_\infty, f_\infty)$ tal que (X, d_∞) es $D-$duplicante con $D = D(C)$ de tal manera que se satisface lo siguiente:

   Para cada $\lambda \in \mathbb{R}^N$ existe $f_\lambda \in \mathrm{LIP}(X_\infty)$ de tal forma que

   $$(X_\infty, d_\infty, a_\infty, f_\lambda) \in T(X,d,a,\lambda\cdot f)$$

   cumple:

   I) $f_\lambda(a_\infty) = 0$,

   II) $f_\lambda = \lambda \cdot (f_{e_1},\ldots,f_{e_N})$,

   III) f_λ es $K-$cuasilineal.

2. Si existen $A \subset X$ medible con $\mu(A) > 0$ y $\delta > 0$ tales que

   $$\mathrm{Lip}(\lambda\cdot f)(a) \geq \delta\,\|\lambda\| \quad \hat{\forall}\, a \in A \tag{6.6}$$

   Entonces se cumple la siguiente:

   a) Para f_λ como en el punto 1 se cumplen las desigualdades:

   $$\mathscr{Lip}(f_\lambda) \geq \frac{\delta\,\|\lambda\|}{K} \tag{6.7}$$

   $$\frac{\delta\,\|\lambda\|}{K^2} \leq \operatorname*{var}_{B(z,r)} f_\lambda \qquad \forall z \in X_\infty \forall r > 0. \tag{6.8}$$

   b) $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}^M}$ es espacio vectorial de dimensión N.

   c) Entonces existe $N_0 > 0$ que depende únicamente de K y C tal que $N \leq N_0$.

3. Si $\mu(S(f)) > 0$ entonces existe $N_0 > 0$ que depende únicamente de K y de C tal que $N \leq N_0$.

Demostración:

1. Para casi todo $a \in A$ podemos encontrar una sucesión $\left(r^0_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ que satisfaga las conclusiones de el Lema 5.2.6 para $e_1 \cdot f = f_1$. Por el teorema de existencia de espacios tangentes tenemos que existe $\left(r^1_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ subsucesión

de $\left(r^0_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ y un mapeo tangente f_{a,e_1} subordinada a $\left(r^1_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left(X_a, d_a, a_\infty, f_{a,e_1}\right) \in T\left(X, d, a, e_1 \cdot f\right).$$

Recursivamente dada la sucesión $\left(r^i_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ podemos obtener una subsucesión $\left(r^{i+1}_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left(X_a, d_a, a_\infty, f_{a,e_i}\right) \in T(X, d, a, e_i \cdot f).$$

Definimos

$$f_{a,\lambda} := \lambda \cdot (f_{a,e_1}, \dots, f_{a,e_N}).$$

De la linealidad de los límites inferimos que el mapeo tangente:

$$(X_a, d_a, a_\infty, f_{a,\lambda}) \in T(X, d, a, \lambda \cdot f),$$

es subordinado a la sucesión $\left(r^N_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$. Ahora veremos que $f_\lambda = f_{a,\lambda}$ cumple las condiciones requeridas.

I) Como estamos tomando a f_{a,e_i} que satisfagan el Lema 5.2.6 tenemos que $f_{a,e_i}(a_\infty) = 0$ por lo cual

$$f_\lambda(a_\infty) = f_{a,\lambda}(a_\infty) = \lambda \cdot (f_{a,e_1}, \dots, f_{a,e_N})(a_\infty) = 0.$$

II) Se sigue de la definición de f_λ.

III) Notemos que el mapeo tangente f_λ podemos generarlo como una combinación lineal de los mapeos tangentes $f_{a,e_1}, \dots, f_{a,e_N}$ y por construcción todos estos podemos considerarlos subordinados a la sucesión $\left(r^{N+1}_{a,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Del Teorema 4.3.5 tenemos que

$$\left(X_a, d_a, a_\infty, f_\lambda\right) \in T(X, d, a, \lambda \cdot f). \tag{6.9}$$

Por otro lado, podemos adaptar la desigualdad (6.5) para tener las hipótesis del Corolario 5.2.7. Como ya vimos f_λ está subordinada a la sucesión adecuada así que aplicamos el Corolario 5.2.7 con f_λ. De esta manera hemos demostrado que f_λ es $K-$cuasilineal.

2. *a*) Consideremos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Sea $i \in \{1, \dots, N\}$, de la desigualdad (6.6) tenemos

$$\begin{aligned} \delta \left\|\lambda_i\right\| &\leq \operatorname{Lip}(\lambda_i \cdot f)(a) && \textit{Por (6.5).} \\ &\leq K \operatorname{lip}(\lambda_i \cdot f)(a), \end{aligned}$$

sumando las N desigualdades obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \delta \left\|\lambda_i\right\| &\leq \sum_{i=1}^{N} K \operatorname{lip}(\lambda_i \cdot f_i)(a) && \textit{Como lip es un operador supralineal, como la norma } \|\cdot\| \textit{ es sublineal.} \\ \delta \left\|\lambda\right\| &\leq K \operatorname{lip}(\lambda \cdot (f_1, \dots, f_N))(a) && \textit{Pues lip}(\cdot) \textit{ es supralineal y podemos extender la desigualdad (6.5).} \\ &\leq K\, \mathscr{Lip}(f_\lambda) && \textit{Multiplicando por } \tfrac{1}{K}. \\ \frac{\delta \left\|\lambda\right\|}{K} &\leq \mathscr{Lip}(f_\lambda). \end{aligned}$$

De esta manera hemos demostrado (6.7). Para demostrar (6.8) usamos que f_λ es $K-$cuasilineal, de esta manera

$$\mathscr{Lip}(f_\lambda) \leq K \operatorname*{var}_{B(z,r)} f_\lambda. \tag{6.10}$$

De las desigualdades (6.7) y (6.10) inferimos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \|\lambda\|}{K} &\leq K \operatorname*{var}_{B(z,r)} f_\lambda && \text{Multiplicando por } \tfrac{1}{K}. \\ \frac{\delta \|\lambda\|}{K^2} &\leq \operatorname*{var}_{B(z,r)} f_\lambda . \end{aligned} \tag{6.11}$$

b) De la definición de f_λ es claro que $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}^N}$ es espacio vectorial. Para ver que tiene dimensión N consideremos al operador

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N &\xrightarrow{\Phi} \{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}^M} \\ \lambda &\longmapsto f_\lambda \end{aligned}$$

Claramente Φ es lineal. Ahora veamos que es inyectivo, en efecto, supongamos que $f_\lambda = 0$, así $\operatorname{var}_{B(z,r)} f_\lambda = 0$ de la desigualdad (6.11) tenemos que $\frac{\delta\|\lambda\|}{K^2} = 0$ por lo cual $\|\lambda\| = 0$ así $\lambda = 0$. Esto demuestra que Φ es un operador lineal inyectivo. Claramente Φ es suprayectivo; de esta manera Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo cual $\dim \{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}^N} = N$.

c) De los incisos anteriores tenemos que $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}^N}$ satisface las hipótesis del Teorema 5.2.1, de esta manera $\exists N_0 > 0$ con $N_0 = N_0(C, K)$ tal que $N = \dim \{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}^N} \leq N_0$.

3. Como $S(f) = \bigcup_{\delta>0} S(f,\delta)$ si $\mu(S(f)) > 0$ implica que existe $\delta_0 > 0$ tal que $\mu(S(f,\delta_0)) > 0$, del inciso anterior inferimos que existe $N_0 > 0$ que depende únicamente de K y C tal que $N \leq N_0$.

■

Con todas estas herramientas demostraremos el teorema principal.

6.2. Poniendo todo junto.

Teorema 6.2.1: Teorema principal.

Sean μ medida de Radon gruesa en un espacio $C-$duplicante completo, $K \geq 1$, $\mathcal{V} \subset \mathrm{LIP}(X)$ y $A \subset X$ medible con $\mu(A) > 0$. Supongamos que

$$\operatorname{Lip} g(x) \leq K \operatorname{lip} g(x) \quad \hat{\forall}\, x \in X \;\; g \in \langle \mathcal{V} \rangle . \tag{6.12}$$

Entonces existen $V \subset A$ medible con $\mu(V) > 0$, $N_0 > 0$ constante con $N_0 = N_0(C,K)$, un entero N con $0 \leq N \leq N_0$ y una función $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathcal{V}^N$ que satisfacen lo siguiente: para cada $g \in \langle C \rangle$ existe una única (salvo un conjunto de medida cero) función medible $\lambda : V \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{y\to x} \frac{|g(y) - g(x) - \lambda(x)\cdot(f(y) - f(x))|}{d(y,x)} = 0.$$

Para demostrar este resultado, por el Lema 3.1.6 es suficiente probar que las funciones requeridas satisfacen:

$$\|g(y) - g(x) - \lambda(x)\cdot(f(y) - f(x))\|_x = 0.$$

A lo largo de esta prueba consideraremos las diferencias $g(y) - g(x)$, $f(y) - f(x)$, las cuales denotaremos por $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ respectivamente.

Primero veremos que la dimensión está acotada. Para ello damos la siguiente:

Definición 6.2.2
Consideremos al conjunto $\mathcal{P}$ que tiene a todos los arreglos finitos de elementos de LIP(X), es decir $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{LIP}(X)^n$, luego si $f \in \mathcal{P}$ tenemos que $f = (f_1, \ldots, f_N)$ para algún N, denotaremos $\#\boldsymbol{f} := N$.
Para $V \subset X$ medible definimos

$$N(V) = \sup \left\{ \#f | f \in \mathcal{V}^{\#f} \text{ y } V \subset S(f) \right\}.$$

Finalmente definimos

$$N = \sup \left\{ N(V) | \mu(V) > 0, \ V \subset A \text{ medible} \right\}.$$

Primero veremos qué sucede si $N = 0$.

Lema 6.2.3 Si $N = 0$ entonces para cada $h \in \langle \mathcal{V} \rangle$ tenemos que $\|h\|_x = 0 \,\hat{\forall}\, x \in A$. Es decir el conjunto A satisface las conclusiones del teorema principal.

Demostración: Procederemos por contrapositiva. Sea $h \in \langle \mathcal{C} \rangle \leq \mathrm{LIP}(X)$ tal que $h = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i$ con $\gamma_i \in \mathbb{R}$ y $h_i \in \mathcal{C}$. De esta manera

$$\|h\|_x \leq \sum_{i=1}^{M} |\gamma_i| \, \|h_i\|_x \, .$$

De esta manera tenemos que para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ el conjunto

$$V = \left\{ x \in X | \, \left\| h_j \right\|_x \neq 0 \right\}$$

tiene medida positiva. Más aún de la definición de V se sigue que $V \subset S(h_j)$, por lo cual $\mu(S(h_j)) > 0$ así $N(S(h_j)) \geq 1$ lo cual implica que $1 \leq N$.

■

El caso $N \neq 0$ requiere un análisis más detallado. Para ello demostraremos el siguiente:

Lema 6.2.4 Si $N \neq 0$ entonces

1. Existe $N_0 > 0$ con $N_0 = N_0(C, K)$ tal que $1 \leq N \leq N_0$.
2. Existen $V \subset A$ y $f \in \mathcal{P}$ tales que
   a) $\mu(V) > 0$.
   b) $V \subset S(f)$.
   c) $N(V) = N$.

Demostración:

1. Consideremos a $V \subset A$ medible con $\mu(V) > 0$, $f \in \mathcal{P}$. Por el Lema 6.1.3 existe $N_0 > 0$ con $N_0 = N_0(C, K)$ tal que $\#f \leq N_0$. Como N_0 sólo depende de C, K se sigue que $N(V) \leq N_0$. Como esto fue para $V \subset A$ medible con $\mu(V) > 0$ arbitrario, de la definición de N se infiere que $N \leq N_0$.
2. Como $N(U) \in \mathbb{Z}$ para cualquier conjunto medible $U \subset A$, de la definición de N podemos encontrar $V_0 \subset A$ medible con $\mu(V_0) > 0$ de tal manera que $N(V_0) = N$. De la definición de $N(V_0)$ tenemos que existe $f_0 \in \mathcal{P}$ tal que $V_0 \subset S(f_0)$. Claramente V_0, f_0 cumplen los requisitos pedidos.

■

Teorema 6.2.5

Para un conjunto V como en el inciso 2 del Lema 6.2.4 y $g \in \langle C \rangle$ dada podemos encontrar $\lambda, f : V \to \mathbb{R}^N$ funciones que satisfacen

$$|g(\cdot) - \lambda(x) \cdot f(\cdot)|_x = 0.$$

Más aún esta función es medible y única salvo un conjunto de medida cero.

Demostración: Sea $g \in \langle C \rangle \leq \text{LIP}(X)$. De esta manera $g = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i g_i$ con $\gamma_i \in \mathbb{R}$ y $g_i \in C$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$; definimos

$$E_j = \left\{ x \in V | \left\| \gamma_i g_j(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot) \right\|_x \neq 0 \; \forall \lambda \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Ahora veremos que $\mu(E_j) = 0$. Consideremos a $x \in E_j$ y definamos la función $f_{g,j} := \left(f_1, \dots, f_N, g_j\right)$. Consideremos a $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_N, \widehat{\lambda}_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $\widehat{\lambda} \neq 0$. Ahora veremos que

$$\left\| \widehat{\lambda} \cdot f_{g,j} \right\|_x \neq 0. \tag{6.13}$$

Tenemos dos casos posibles:
Caso 1: Si $\widehat{\lambda}_{N+1} = 0$ tenemos que $\left\| (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_N, 0) \cdot f_{g,j} \right\|_x = \left\| \widehat{\lambda} \cdot f \right\|_x$, también tenemos que $(\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_N) \neq 0$ y como $x \in V \subset S(f)$, así $\left\| \widehat{\lambda} \cdot f \right\|_x \neq 0$ así que se cumple (6.13).
Caso 2: Si $\widehat{\lambda}_{N+1} \neq 0$. Considerando un ajuste de signos tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\lambda} \cdot f_{g,j} \right\|_x &= \pm \frac{\widehat{\lambda}_{N+1}}{\gamma_j} \left\| \gamma_j g_j - \left(\frac{\gamma_j \widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_{N+1}}, \dots, \frac{\gamma_j \widehat{\lambda}_N}{\widehat{\lambda}_{N+1}} \right) \cdot f \right\|_x \quad \text{Pues } x \in E_j \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Por lo que en este caso se cumple (6.13).
En cualquier caso probamos que $x \in S(f_{g,j})$, así $E_j \subset S(f_{g,j}) \cap V$, notemos que $\# f_{g,j} = N + 1$, por lo que si suponemos que $\mu\left(S(f_{g,j}) \cap V\right) > 0$, esto nos lleva a que $N\left(S(f_{g,j}) \cap V\right) \geq N+1$, pero de la definición de N se tiene que $N\left(S(f_{g,j}) \cap V\right) \leq N$ lo cual es una contradicción que viene de suponer que $\mu\left(S(f_{g,j}) \cap V\right) > 0$. Esto demuestra que $\mu\left(S(f_{g,j}) \cap V\right) = 0$. Luego, como $E_j \subset S(f_{g,j}) \cap V$ es medible y $\mu\left(S(f_{g,j}) \cap V\right) = 0$ se infiere que $\mu(E_j) = 0$.
Como M es finito y cada $\mu(E_j) = 0$ podemos encontrar a un conjunto $F \subset V$ tal que $\mu(F) = \mu(V)$ de tal manera que para cada $x \in F$ y $1 \leq j \leq M$ existe $\lambda_j = (\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,N})$ tal que

$$\left\| \gamma_i g_j(\cdot) - \lambda_j(x) \cdot f(\cdot) \right\|_x = 0.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo a estas desigualdades inferimos

$$\left\| g(\cdot) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \lambda_{j,i} f_i(\cdot) \right\|_x = 0.$$

Ahora para cualquier $x \in F$ definimos a $\lambda(x) := \left(\sum_{j=1}^{M} \lambda_{j,1}, \dots, \sum_{j=1}^{M} \lambda_{j,N} \right)$ y por la manera que hemos tomado a F esto demuestra la existencia.
Veamos que la función es única salvo un conjunto de medida cero, consideremos a $\lambda_1, \lambda_2 : V \to \mathbb{R}$ dos funciones que cumplan las condiciones pedidas, de la desigualdad del triángulo tenemos que si $x \in F$ se tiene

$$\left\| (\lambda_1 - \lambda_2)(x) \cdot f(\cdot) \right\|_x \leq \left\| g(\cdot) - \lambda_1(x) \cdot f(\cdot) \right\|_x + \left\| g(\cdot) - \lambda_2(x) \cdot f(\cdot) \right\|_x .$$

así $\left\| (\lambda_1 - \lambda_2)(x) \cdot f(\cdot) \right\|_x = 0$, como $F \subset S(f)$ inferimos $(\lambda_1 - \lambda_2)(x) = 0$ así que $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, es decir λ_1, λ_2 coinciden en F, por lo que son iguales salvo un conjunto de medida cero.

Ahora veamos que λ es medible. Consideremos a K compacto y definamos:

$$A = \left\{ x \in V \mid \left\| \gamma_i g_j(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot) \right\|_x = 0 \text{ para algún } \lambda' \in K \right\}.$$

Para ver que λ es medible basta ver que A es medible. Notemos que este conjunto lo podemos descomponer de la siguiente manera

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\lambda' \in \Lambda \cap K} \left\{ x \in V \mid \left\| \gamma_i g_j(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot) \right\|_x < \frac{1}{n} \right\}.$$

Como $\left\| \gamma_i g_j(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot) \right\|_x$ es continua; así $\left\{ x \in V \mid \left\| \gamma_i g_j(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot) \right\|_x < \frac{1}{n} \right\}$ es medible, de modo que

$$\bigcup_{\lambda' \in \Lambda \cap K} \left\{ x \in V \mid \left\| \gamma_i g_j(\cdot) - \lambda \cdot f(\cdot) \right\|_x < \frac{1}{n} \right\}$$

también lo es de lo que concluimos que A es medible, lo cual concluye la prueba de que λ es medible.

■

El Teorema 6.2.5 demuestra el teorema principal.

6.3. Algunos resultados contemporáneos.

Desde que se publicó [Kei04a] en 2004 se han obtenido diversos resultados que buscan dar condiciones suficientes para que un espacio métrico medible tenga estructura diferenciable. A continuación mencionaremos algunos para ampliar el panorama con respecto de los espacios métricos medibles.

Como pudimos ver la idea en la demostración del teorema principal de esta tesis fue ver que si nuestro espacio es suficientemente regular y se cumple una desigualdad del estilo

$$\operatorname{Lip} f \leq K \operatorname{lip} f, \tag{6.14}$$

entonces este espacio tiene una estructura diferenciable. Notemos que si tuviéramos que $\operatorname{Lip} f = \operatorname{lip} f$ entonces tenemos una noción más natural de derivada y con esto podemos dar una estructura diferenciable. En [Bat12] se demuestra que para los espacios con los que trabajamos en esta tesis la desigualdad (6.14) se auto mejora y se tiene la igualdad $\operatorname{Lip} f = \operatorname{lip} f$ por lo cual es más evidente la existencia de la estructura diferenciable.

En [CKS16] se generaliza la idea de *diferenciación métrica* a una clase más grande de espacios. Particularmente se demuestra la existencia de estructura diferenciable para los espacios con los que trabajamos; esta clase se le llama la clase de los espacios PI. En los trabajos [Kei04a; Bat12] se trabaja todo el tiempo con la clase PI.

Los trabajos mencionados y esta tesis se centran en la existencia de la estructura diferenciable. Otros trabajos donde se ven más propiedades de la estructura en sí añaden condiciones geométricas; particularmente la condición que se pide al espacio es que tenga curvatura de Ricci acotada por abajo. Más de estas propiedades se pueden estudiar en los espacios RCD, [Gig18] es una referencia introductoria.

Notación.

Siglas.

c.t. Casi toda

cds Casi donde sea

emm Espacio métrico medible

i.e. Es decir

lch Espacio topológico localmente compacto y Hausdorff (T_2)

p.a. Para algún

sci (Función) semicontinua inferiormente

scs (Función) semicontinua superiormente

sii Si y sólo si

Conjuntos.

Espacios de Funciones.

Operadores y algunas funciones distinguidas.

Símbolos.

Referencias

[Ass83] Patrice Assouad. “Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$. (Lipschitz embeddings into $\mathbb{R}^n$)”. En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 111 (1983), págs. 429-448. ISSN: 0037-9484. DOI: 10.24033/bsmf.1997.

[Bat12] David Bate. “Structure of measures in Lipschitz differentiability spaces”. En: *Journal of the American Mathematical Society* 28 (2012), págs. 421-482.

[Che99] Jeff Cheeger. “Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces”. En: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 9 (1999), págs. 428-517.

[CKS16] Jeff Cheeger, Bruce Kleiner y Andrea Schioppa. “Infinitesimal structure of differentiability spaces, and metric differentiation”. En: *Analysis and Geometry in Metric Spaces* 4 (2016). DOI: doi:10.1515/agms-2016-0005.

[DS97] Guy David y Stephen Semmes. *Fractured fractals and broken dreams. Self-similar geometry through metric and measure*. Vol. 7. Oxf. Lect. Ser. Math. Appl. Oxford: Clarendon Press, 1997. ISBN: 0-19-850166-8.

[Dug66] James Dugundji. *Topology*. Allyn y Bacon Inc., 1966. ISBN: 0-205-00271-4.

[EJJ00] Jean-Pierre Eckmann, Esa Järvenpää y Maarit Järvenpää. “Porosities and dimensions of measures”. En: *Nonlinearity* 13 (2000), págs. 1-18.

[Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis. Modern techniques and their applications*. 2a. ed. A Wiley-Interscience publication. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN: 9780471317166.

[Gig18] Nicola Gigli. “Lecture notes on differential calculus on RCD spaces”. En: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University* 54.4 (2018), págs. 855-918. ISSN: 0034-5318. DOI: 10.4171/PRIMS/54-4-4.

[Gra16] Guillermo Grabinsky. *Teoría de la medida*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, Mexico City, 2016.

[IN99] Alejandro Illanes y Sam B. jun. Nadler. *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*. Vol. 216. Pure Appl. Math., Marcel Dekker. New York, NY: Marcel Dekker, 1999. ISBN: 0-8247-1982-4.

[Kei04a] Stephen Keith. “A differentiable structure for metric measure spaces”. En: *Advances in mathematics* 183 (2004), págs. 217-315.

[Kei04b] Stephen Keith. “Measurable differentiable structures and the Poincaré inequality”. En: *Indiana University Mathematics Journal* 53 (2004), págs. 1127-1150.

[LS98] Jouni Luukkainen y Eero Saksman. “Every complete doubling metric space carries a doubling measure”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 126.2 (1998), págs. 531-534. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-04201-4.

[LV77] J. Luukkainen y J. Väisälä. “Elements of Lipschitz topology”. En: *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I. Mathematica* 3 (1977), págs. 85-122. ISSN: 0066-1953. DOI: 10.5186/aasfm.1977.0315.

[Rad20] H. Rademacher. “Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale. I, II.” En: *Mathematische Annalen* 79 (1920), págs. 340-359. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/BF01498415.

[Sem96] S. Semmes. “Finding curves on general spaces through quantitative topology, with applications to Sobolev and Poincaré inequalities”. En: *Selecta Mathematica. New Series* 2.2 (1996), págs. 155-295. ISSN: 1022-1824. DOI: 10.1007/BF01587936.

Índice alfabético