



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE GELFAND

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADA EN
MATEMÁTICAS**

P R E S E N T A :

BRENDA KARIME ALVAREZ ORTIZ

DIRECTOR DE TESIS :

DR. ALBERTO SALDAÑA DE FUENTES

2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

EL PROBLEMA DE GELFAND

BRENDA KARIME ALVAREZ ORTIZ

2022

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi padre Jesús, por ser el primer acercamiento que tuve a las matemáticas y además ser mi principal mentor de vida, a mi madre Carmen por siempre apoyarme y alentarme. Además, agradezco muchísimo la relación de amistad que tengo con ambos.

A Felipe, por todas las veces que me cuidó y ser una persona con la que siempre es agradable estar y conversar. A Monserrat, por ser mi modelo a seguir y además una increíble amiga que me escucha y apoya, además de ser una de las mejores personas que he conocido y alguien de quien siempre puedo aprender algo nuevo, de igual manera quiero agradecer a Daniel por toda su paciencia; y por último a Chen, por estar a mi lado en cualquier momento.

Agradezco profundamente a César, por amarme, cuidarme, ser mi mayor soporte emocional, por estar presente tanto en los momentos buenos como los malos y por ser el mejor amigo que alguien podría pedir. Agradezco sus constantes motivaciones a superarme, por ampliar mi visión, aumentar mi confianza y por cada uno de los hermosos recuerdos que tenemos juntos. También quiero agradecer a la familia Hernández Vargas por convertirse en mi segunda familia.

A Aldair, por ser alguien con quien todas las veces ha grato estar, además de todas las veces que ha creído en mí, me ha apoyado y por más ocupado que estuviera, siempre tenía un momento para mí. También agradezco cada una de las conversaciones que hemos tenido, en las cuales siempre terminaba aprendiendo algo.

A Ariel, que aunque la distancia nos separó, nunca te alejaste de mí; agradezco la confianza que depositaste en mí y que estuvieras presente en mis develos dándome aliento; dispuesto a escucharme cada que lo necesitara

A Miguel, por lo agradable que ha sido conocerte y por nunca criticarme. Gracias por todos los momentos que compartimos antes de clases, los cuales, son de mis mejores recuerdos de la Universidad.

A mi asesor, Dr. Alberto Saldaña de Fuentes, por ser un gran profesor y aceptar dirigir este trabajo, ser paciente y comprometido, ser tan meticuloso al momento de revisar esta tesis, resolver cada una de mis dudas de una manera muy amena y además todas sus observaciones, además agradezco las oportunidades que me brindó para desarrollarme académicamente.

También quiero agradecer a los profesores que tuve a lo largo esta etapa de mi vida, pero en especial, a Dra. Judith Campos Cordero por todo el apoyo que me brindó a lo largo de la realización del presente trabajo, además de todas sus observaciones, a Dra. Laura Ortiz, por introducirme en tan linda disciplina, que son las ecuaciones diferenciales; y a Dr. Vinicio Gómez, por todo el aprendizaje y apoyo que recibí de su parte. De igual manera, agradezco al Dr. Juan Carlos Fernández y Dra. Jessie Pontigo por todas las valiosas observaciones que proporcionaron

Finalmente, agradezco el apoyo de la DGAPA-UNAM a través del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) en el proyecto con clave IA105221.

Índice general

1. Introducción	1
2. Notación y resultados auxiliares	9
3. El problema de Gelfand unidimensional	17
4. El problema de Gelfand bidimensional	29
5. El problema de Gelfand para $3 \leq n \leq 9$	37
6. El problema de Gelfand para $n \geq 10$	53
A. $C_c^1(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$	63

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis estudiaremos la existencia y las propiedades de estabilidad de las soluciones del problema de Gelfand, es decir, las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda e^u && \text{en } B, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial B, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $\lambda > 0$, $B \subset \mathbb{R}^n$ es la bola unitaria en \mathbb{R}^n con $n \geq 1$ y $u \in C^2(\overline{B})$. La principal fuente en la que se basa esta tesis es el libro de Louis Dupaigne [8].

Para describir el fenómeno físico detrás de esta ecuación, presentaremos a continuación una versión resumida del material contenido en [8, 2].

El problema de Gelfand (1.1) describe el proceso de reacción en un material flamable; lo que se conoce como el período de ignición. Una solución u de (1.1) representa una temperatura dentro de un recipiente cilíndrico cuando el sistema ha alcanzado un estado estacionario (*i.e.* en equilibrio). En el lado izquierdo de (1.1), hay un operador de difusión, $-\Delta$ (el laplaciano), lo que representa la difusión de calor desde el reactivo caliente hacia la frontera fría. En el lado derecho, tenemos un término de reacción, e^u , la no linealidad exponencial tiene que ver con la ley de Arrhenius. Este término modela la producción de calor causada por una reacción química; la difusión (el laplaciano) y la producción de calor (la no linealidad) compiten. Este proceso depende sólo de un balance puntual entre el calor que se añade químicamente y la transferencia por conducción.

En este tipo de reacciones pueden ocurrir dos cosas dependiendo de si la pérdida del calor es suficientemente grande o suficientemente pequeña: ya sea que el combustible disminuye y la reacción se extingue (pues la temperatura máxima del sistema nunca es tan diferente del valor inicial porque mucha energía se pierde), o hay tanto combustible que se produce una explosión térmica (pues ocurrirá un dramático incremento en la temperatura que terminará pronto en explosión); de cualquier manera, no hay estado estacionario, es decir, aquí no encontramos solución de (1.1). En otro tipo de reacciones, por otra parte, un equilibrio entre el calor producido y el difundido ocurre rápidamente, por lo que debe mantenerse la existencia de soluciones de (1.1). El equilibrio entre difusión y reacción se cuantifica mediante el parámetro $\lambda > 0$; este parámetro a veces se denomina *la constante de Frank-Kamenetskii*.

De acuerdo con nuestra discusión anterior, no deberíamos esperar ninguna solución de (1.1) si λ es grande, mientras que deberían existir soluciones para λ pequeño. Fenómenos de este tipo los podemos encontrar en la quema rápida de un combustible [18], reactores químicos, en el modelo de Chandrasekhar (que habla acerca de la expansión del universo) [1], en el estudio de superficies de Riemann con curvatura constante [13], y en años recientes, se han encontrado aplicaciones en ingeniería como el proceso de electrohilado para la fabricación de nanofibras [1].

Nos dedicaremos a analizar el comportamiento de soluciones *positivas* de la ecuación diferencial parcial (EDP) (1.1) en la bola unitaria con condiciones de frontera de Dirichlet, veremos que este problema es equivalente a su *versión radial* y en algunos casos las clasificaremos de acuerdo a su estabilidad.

A lo largo del presente trabajo, emplearemos algunas definiciones necesarias. A continuación hablaremos brevemente de la estabilidad.

Podemos asociar al problema (1.1) un *funcional de energía* E dado por

$$\mathcal{E}(u) := \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^2}{2} - \lambda (e^{u(x)} - 1) dx,$$

donde $u \in C^2(\overline{B})$.

El funcional \mathcal{E} mide la energía potencial del sistema. Este funcional nos permitirá definir la noción de “solución estable”. En particular, queremos encontrar cuál es el estado “en la parte más baja” de \mathcal{E} (el mínimo global de la energía). Intuitivamente, tal estado es estable porque está atrapado en el fondo de un potencial de energía. Lo podemos imaginar como un recipiente y cuando coloquemos una gota en la orilla, esta caerá al fondo, y aunque agitemos el recipiente, en algún tiempo finito, la gota volverá al fondo y ya no se moverá de ahí. Esta es la noción intuitiva de solución estable. Para aterrizar este concepto matemáticamente, utilizaremos una función auxiliar. Para $u \in C^2(\overline{B})$ y $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, definimos a la función $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $E(t) := \mathcal{E}(u + t\varphi)$. Notemos que, por el teorema de convergencia dominada (Teorema 2.16),

$$\begin{aligned} E'(0) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi - \lambda e^u \varphi dx, \\ E''(0) &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi^2 dx \geq 0, \end{aligned}$$

(ver la demostración de la Proposición 2.15 para más detalles). Decimos que u es una solución estable si $E'(0) = 0$ y $E''(0) \geq 0$. Dicho esto, enunciaremos la definición de *estabilidad* y daremos más detalles al respecto en la siguiente sección. Usamos $C_c^1(\Omega)$ para denotar a las funciones continuamente diferenciables con soporte compacto en Ω .

Definición 1.1 (Estabilidad) *Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una solución $u \in C^2(\Omega)$ de (1.1) es estable si*

$$E''(0) = Q_u(\varphi) := \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi^2 dx \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \quad (1.2)$$

donde $E(t) := \mathcal{E}(u + t\varphi)$.

Observación 1.2 La forma cuadrática Q_u es llamada la segunda variación de la energía \mathcal{E}_Ω .

El siguiente concepto nos ayudará a medir la estabilidad parcial de soluciones que no son estables según la definición anterior.

Definición 1.3 (Índice de Morse) Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ y sea Ω un dominio de \mathbb{R}^n . Una solución $u \in C^2(\Omega)$ de (1.1) tiene índice de Morse $k \geq 1$ si k es la máxima dimensión de un subespacio X_k de $C_c^1(\Omega)$ tal que

$$Q_u(\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in X_k \setminus \{0\}.$$

Escribimos $k = \text{ind}(u)$.

Si una solución u es estable, escribimos $\text{ind}(u) := 0$.

En el Capítulo 4 probaremos el siguiente Teorema.

Teorema 1.4 Sea Ω la bola unitaria en \mathbb{R}^2 centrada en cero. Sean $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ soluciones distintas de (1.1) y u_1 es tal que para toda u_2 se cumple

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces, u_1 es la única solución estable de (1.1).

Sorprendentemente, la estructura del conjunto de soluciones de (1.1) cambia drásticamente dependiendo de la dimensión de \mathbb{R}^n en la que nos encontremos.

A continuación estudiaremos por separado los casos:

- dimensión uno,
- dimensión dos,
- dimensiones de tres a nueve,
- dimensiones mayores a diez.

El siguiente resultado nos caracteriza el conjunto de soluciones positivas en una dimensión.

Teorema 1.5 Existe $\lambda^* > 0$ tal que:

- i) Para $0 < \lambda < \lambda^*$, existen exactamente dos soluciones clásicas de (1.1). Una de ellas, denotémosla por u_λ , es mínima, y por ende estable. La otra solución, denotémosla por U_λ , tiene índice de Morse 1. Ambas soluciones son positivas, incluso, estrictamente positivas en $(-1, 1)$ y determinadas de forma única por su valor en $x = 0$. Además, la curva

$$\begin{aligned} (0, \lambda^*) &\rightarrow C^2([-1, 1]) \times C^2([-1, 1]), \\ \lambda &\mapsto (u_\lambda, U_\lambda), \end{aligned}$$

es suave¹; y para toda $x \in (-1, 1)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (u_\lambda(x), U_\lambda(x)) = (0, +\infty),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^*} (u_\lambda(x), U_\lambda(x)) = (u^*(x), u^*(x)),$$

donde $u^* \in C^2([-1, 1])$ es la única solución de (1.1) para $\lambda = \lambda^*$ y la convergencia es uniforme.

ii) Para $\lambda > \lambda^*$, no existen soluciones de (1.1).

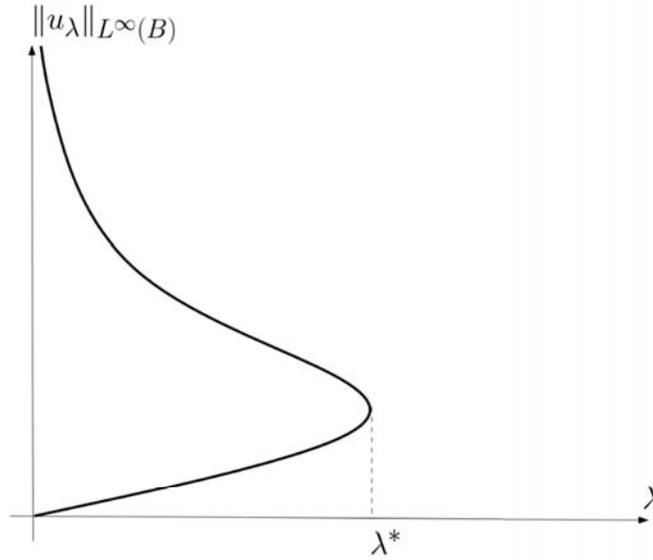


Figura 1.1: Diagrama de bifurcación del problema de Gelfand en dimensión $n = 1$. Esta es la curva $\lambda \mapsto (u_\lambda(0), U_\lambda(0)) := (\|u_\lambda\|_{L^\infty(B)}, \|U_\lambda\|_{L^\infty(B)})$, donde la figura fue tomada de [8, Figure 2.1]. Aquí vemos que no existen soluciones si $\lambda > \lambda^*$ y que existe una rama de soluciones cuyo supremo tiende a infinito (es un fenómeno de explosión).

En el Capítulo 3 se prueba este teorema viendo que las soluciones son positivas, par, decrecientes en $(0, 1)$ y únicamente determinadas por su valor en 0. Con esta información, se encuentra una forma explícita para las soluciones y se demuestra que no hay soluciones si $\lambda > \lambda^*$, una solución si $\lambda = \lambda^*$ y dos soluciones si $0 < \lambda < \lambda^*$. Aunque en esta tesis no hacemos una estimación de en qué valor M^* alcanzamos un máximo, en [10] se ve que $M^* \approx 0,88$.

¹Una curva suave es una curva que es una función suave, donde la palabra "curva" se interpreta en el contexto de la geometría analítica. En particular, una curva suave es un mapa continuo f de un espacio unidimensional a un espacio n -dimensional que en su dominio tiene derivadas continuas hasta un orden deseado.

En el Capítulo 4 analizamos el caso $n = 2$ y se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.6 Sean $n = 2$ y $\lambda^* = 2$. Entonces:

- i) Para $0 < \lambda < \lambda^*$ existen exactamente dos soluciones, $u_\lambda, U_\lambda \in C^2(\overline{B})$ para (1.1). La solución u_λ es mínima, por ende estable, mientras que U_λ es inestable. Ambas soluciones son radiales y explícitamente dadas por

$$u_\lambda(x) = \ln \frac{8b_-}{(1 + \lambda b_- |x|^2)^2}, \quad U_\lambda(x) = \ln \frac{8b_+}{(1 + \lambda b_+ |x|^2)^2}, \quad (1.3)$$

donde $b_\pm = \frac{8-2\lambda \pm \sqrt{64-32\lambda}}{2\lambda^2}$, $|x| \in (0, 1)$.

- ii) Para $\lambda = \lambda^*$ existe una única solución dada por

$$u(x) = \ln \frac{4}{(1 + |x|^2)^2}, \quad \text{para } |x| \in (0, 1).$$

- iii) Para $\lambda > \lambda^*$ no existen soluciones de (1.1).

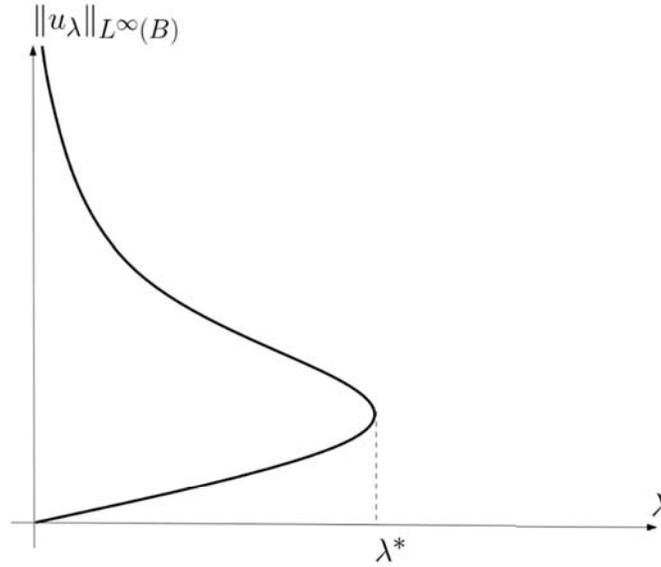


Figura 1.2: Diagrama de bifurcación del problema de Gelfand en dimensión $n = 2$, donde la figura fue tomada de [8, Figure 2.2]. Aquí vemos que la imagen es prácticamente la misma que en el caso $n = 1$, pues no existen soluciones si $\lambda > \lambda^*$. Sin embargo, el perfil límite de la curva superior es diferente al caso $n = 1$, pues $U_\lambda(r)$ converge a $4 \ln(\frac{1}{r})$ cuando $\lambda \rightarrow 0$, donde $r \in (0, 1)$ es la variable radial.

Para el caso $n = 2$, veremos que la solución es positiva por el principio del máximo (Proposición 2.12), para ver que las soluciones son radiales, usaremos (sin demostración) el resultado

de Gidas, Ni y Nirenberg (Teorema 4.10), finalmente, empleando la condición de frontera, encontramos que no hay soluciones si $\lambda > \lambda^* \approx 2$, que existe una solución si $\lambda = \lambda^*$ y dos soluciones si $\lambda < \lambda^*$. Aunque los diagramas de bifurcación de los casos $n = 1$ y $n = 2$ son similares, es importante hacer notar que en el caso $n = 1$, cuando $\lambda \rightarrow 0$, la solución U_λ explota en cada punto $x \in (-1, 1)$, mientras que en el caso $n = 2$, la solución U_λ converge a $4 \ln \frac{1}{r}$ cuando $\lambda \rightarrow 0$. Para más información de estos hechos, ver el Lema 3.12 y el Lema 4.8.

En el Capítulo 5, analizaremos el caso $3 \leq n \leq 9$ y probaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.7 *Sea $3 \leq n \leq 9$. Entonces existe $\lambda^* > 2(n - 2)$ tal que*

1. *Para $0 < \lambda < \lambda^*$, $\lambda \neq 2(n - 2)$, existe una cantidad finita de soluciones positivas $u \in C^2(\overline{B})$ de (1.1).*
2. *Dada cualquier $k \in \mathbb{N}$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $|\lambda - 2(n - 2)| < \varepsilon$, existen al menos k soluciones.*
3. *Para $\lambda = 2(n - 2)$ existe una infinidad de soluciones.*
4. *Para $\lambda = \lambda^*$ existe una única solución.*
5. *Para $\lambda > \lambda^*$ no existen soluciones.*

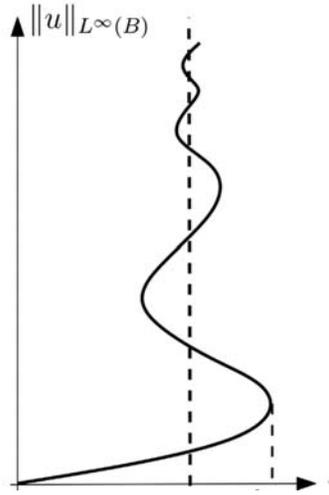


Figura 1.3: Diagrama de bifurcación del problema de Gelfand en dimensión $3 \leq n \leq 9$, donde la figura fue tomada de [8, Figure 2.3]. Aquí vemos que no existen soluciones si $\lambda > \lambda^*$ y que conforme nos acercamos al valor de $2(n - 2)$ (la línea punteada en el centro) vamos obteniendo cada vez más soluciones, hasta que obtenemos una cantidad infinita de ellas.

Para el caso $3 \leq n \leq 9$, argumentamos similarmente que el problema es equivalente a su versión radial, y a su vez, vemos que es equivalente a una ecuación diferencial ordinaria (EDO), esto es posible gracias a la transformación de Emden, que es un cambio de variables

no lineal. Una vez hecho esto, analizamos el plano fase, que es una espiral alrededor del 0, y gracias a este análisis encontramos multiplicidad en las soluciones conforme nos acercamos al 0. Finalmente, vemos que si tenemos una solución de la EDO, entonces también tenemos una solución de la EDP. En el diagrama de bifurcación (Figura 1.3), vemos que conforme λ se acerca al valor $2(n - 2)$, vamos obteniendo cada vez más soluciones.

Finalmente, en el Capítulo 6, analizaremos el caso $n \geq 10$ y probaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.8 Sean $n \geq 10$ y $\lambda^* = 2(n - 2)$, la ecuación (1.1) tiene una única solución $u \in C^2(\overline{B})$ (que es estable) para $0 < \lambda < \lambda^*$ y ninguna solución para $\lambda \geq \lambda^*$.

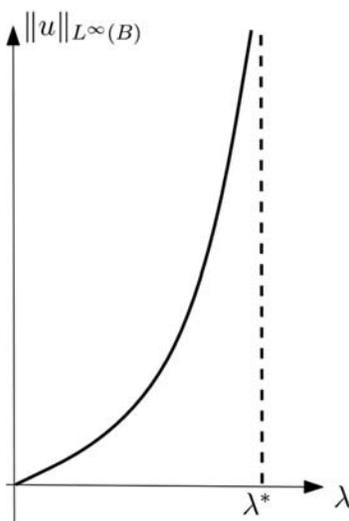


Figura 1.4: Diagrama de bifurcación del problema de Gelfand en dimensión $n \geq 10$, donde la figura fue tomada de [8, Figure 2.4]. Aquí vemos que no existen soluciones si $\lambda > \lambda^*$ y que existe una única solución estable si $\lambda < \lambda^*$.

En el caso $n \geq 10$, el procedimiento del análisis es similar al caso anterior, pero cuando analizamos el plano fase, resulta que el origen no es un atractor espiral de la EDO asociada, por lo tanto no encontramos multiplicidad en las soluciones, sino una única solución para cada $\lambda < \lambda^*$, además que la solución es estable. Las soluciones tienden a la función $u(r) = -2 \ln |r|$ cuando $\lambda \rightarrow \lambda^*$ (ver Lema 6.9).

Una vez que ya hemos mostrado los diagramas de bifurcación, cabe recalcar que la parte más baja de los diagramas es la rama estable de las soluciones, pues son las soluciones mínimas (ver el teorema 1.4 y la Definición 2.8).

En resumen, el problema de Gelfand nos muestra cómo la estructura del conjunto de soluciones puede cambiar drásticamente según la dimensión. Las pruebas que presentamos en esta tesis muestran que estos cambios se pueden entender y caracterizar con una combinación de herramientas de EDP y EDO.

Finalmente, mencionamos que el problema de Gelfand es un caso particular de una familia más general de ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u), & \text{en } \Omega, \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es una función convexa no decreciente, $\lambda > 0$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio suave y acotado. El análisis de estos problemas más generales es un campo activo de investigación en la actualidad y algunos resultados en esta dirección pueden consultarse en [8].

Capítulo 2

Notación y resultados auxiliares

A continuación presentaremos algunas definiciones y resultados que usaremos en esta tesis.

Definición 2.1 Denotamos por $B(a, R)$ a la bola abierta en \mathbb{R}^n con centro en a y radio R ; es decir, al conjunto

$$B(a, R) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < R\}.$$

Posteriormente cuando hablemos de la bola abierta, escribiremos B en lugar de $B(a, R)$.

Definición 2.2 Un conjunto A en \mathbb{R}^n es abierto si $A = \text{int}(A)$, donde $\text{int}(A)$ es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que existe $\varepsilon > 0$, con la propiedad de que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Definición 2.3 Un conjunto conexo es un espacio topológico que no puede ser representado como la unión de dos o más conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos.

Definición 2.4 El laplaciano de $u \in C^2(\Omega)$ se define como la traza de la matriz Hessiana de u . En particular, si x_1, \dots, x_n de una función u denotan las coordenadas en una base ortonormal de \mathbb{R}^n , entonces

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Lema 2.5 Sean $u : B(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\tilde{u} : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ donde $u(x) = \tilde{u}(|x|)$. El laplaciano radial es

$$\Delta u = \tilde{u}''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} \tilde{u}'(|x|). \quad (2.1)$$

Demostración:

Sea $|x|$ definido por

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

que representa la distancia euclidiana entre x e y . Notemos que para $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} 2x_i = \frac{x_i}{|x|},$$

de modo que,

$$u_{x_i}(x) = \tilde{u}'(|x|) \frac{x_i}{|x|},$$

y así,

$$u_{x_i x_i} = \tilde{u}''(|x|) \left(\frac{x_i}{|x|}\right)^2 + \tilde{u}'(|x|) \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right).$$

Por consiguiente, al obtener las derivadas parciales de segundo orden hasta el índice $i = n$ y sumarlas, se sigue que

$$\begin{aligned} u_{x_i x_i}(x) + \dots + u_{x_n x_n}(x) &= \tilde{u}''(|x|) \left(\frac{1}{|x|^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) + \tilde{u}'(|x|) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right) \\ &= \tilde{u}''(|x|) \left(\frac{1}{|x|^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) + \tilde{u}'(|x|) \left(\frac{n}{|x|}\right) - \tilde{u}'(|x|) \left(\frac{1}{|x|^3} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \\ &= \tilde{u}''(|x|) \left(\frac{|x|^2}{|x|^2}\right) + \tilde{u}'(|x|) \left(\frac{n}{|x|}\right) - \tilde{u}'(|x|) \left(\frac{1}{|x|^3} |x|^2\right) = \tilde{u}''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} \tilde{u}'(|x|). \end{aligned}$$

□

Definición 2.6 Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} y $E : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Entonces $t_0 \in I$ es un punto crítico estable de E si

$$E'(t_0) = 0 \quad \text{y} \quad E''(t_0) \geq 0.$$

Definición 2.7 Una función $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfice

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &\leq \lambda e^{\underline{u}}, & \text{en } \Omega, \\ \underline{u} &\leq 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

es llamada una subsolución de (1.1). Similarmente, una función $\bar{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfice (1.1) pero con las desigualdades volteadas se llama una supersolución de (1.1).

Para enunciar nuestros resultados principales introducimos la siguiente definición.

Definición 2.8 Una solución $u_{\min}(x)$ de (1.1) es una solución mínima de (1.1) si dada cualquier otra solución de (1.1) se satisface que $u_{\min}(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Lema 2.9 (Principio débil del máximo) Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ es tal que $-\Delta u \geq 0$ en Ω ($-\Delta u \leq 0$), entonces,

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega}(-u^-), \quad (\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+),$$

donde $u^+ = \max(u, 0)$ y $u^- = -\min(u, 0)$. Para ver una demostración, ver por ejemplo el Teorema 2 del capítulo 6.4 de [9]

Lema 2.10 (Lema de Hopf) Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ y supongamos que $\Delta u \geq 0$ en Ω y existe un $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Supongamos también que Ω satisface la condición de bola interior en x_0 ; esto es, existe una bola abierta $B \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B$.

▪ Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

donde ν es el vector normal exterior a B en x_0 .

Demostración:

1. Supongamos que $B = B(0, r)$ para algún radio $r > 0$. Definimos

$$v(x) := e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$$

para $x \in B(0, r)$ y $\lambda > 0$. Entonces,

$$-\Delta v = -\sum_{i=1}^n v_{x_i x_i} = 2e^{-\lambda|x|^2} \lambda(n - 2\lambda r^2).$$

Ahora consideramos la región anular abierta $R := B(0, r) - B(0, \frac{r}{2})$. Tenemos que

$$-\Delta v \leq 0 \tag{2.2}$$

en R si $\lambda > 0$ es suficientemente grande.

2. Como $u(x_0) > u(x)$, v es una función acotada, y $\partial B(0, \frac{r}{2})$ es un compacto, existe una constante $\varepsilon > 0$ tan pequeña que

$$u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x), \quad x \in \partial B(0, \frac{r}{2}). \tag{2.3}$$

Además, notamos que

$$u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \quad x \in \partial B(0, r), \tag{2.4}$$

pues $v \equiv 0$ sobre $\partial B(0, r)$.

3. Como $-\Delta u \leq 0$, de (2.2) vemos que

$$-\Delta(u + \varepsilon v - u(x_0)) \leq 0 \quad \text{en } R,$$

y de (2.3) y (2.4) observamos que

$$u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0 \quad \text{sobre } \partial R.$$

Por el Lema 2.9, tenemos que $u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0$ en R . Pero $u(x_0) + \varepsilon v(x_0) - u(x_0) = 0$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{\varepsilon}{r} \nabla v(x_0) \cdot x_0 = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0,$$

como se pedía. □

Para ver más información acerca del Lema anterior, ver por ejemplo [9], en donde se mencionan los preeliminarios para demostrarlo y además su utilidad para otros resultados.

Lema 2.11 (Principio fuerte del Máximo) *Sea Ω un dominio cualquiera de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Sea $u \in C^2(\Omega)$ que satisfice*

$$\begin{aligned} -\Delta u &\geq 0 & \text{en } \Omega, \\ u &\geq 0 & \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Entonces $u > 0$ en Ω o bien $u \equiv 0$ en Ω .

Demostración:

Supongamos por contradicción que u se anula en algún punto en Ω , mientras que el conjunto $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ es no vacío. Primero notamos que $\partial\Omega^+ \cap \Omega \neq \emptyset$. De otra forma, escribiendo $\Omega^0 = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$, deberíamos tener $\Omega = \Omega^+ \sqcup \Omega^0 = \overline{\Omega^+} \sqcup \Omega^0$, contradiciendo el hecho de que Ω es conexo. Entonces, existe un punto $x_1 \in \partial\Omega^+ \cap \Omega$. Sea $d = d(x_1, \partial\Omega) > 0$ y consideramos $a \in \Omega^+$ tal que $|a - x_1| < \frac{d}{3}$. En particular, $d(a, \partial\Omega) \geq \frac{2d}{3}$. Ahora, sea $R = d(a, \Omega^0) > 0$, entonces $B(a, R) \subset \Omega^+$. Como $R \geq |a - x_1| < \frac{d}{3}$, también tenemos que $\overline{B(a, R)} \subset \Omega$. Entonces, $u(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \partial B(a, R)$ (por lo tanto x_0 es un mínimo de u), mientras que $u > 0$ en $B(a, R)$, por el Lema 2.10, tenemos que $\nabla u(x_0) \neq 0$. Esto contradice el hecho de que x_0 es un punto interior mínimo de u . □

Proposición 2.12 *Sean Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ y $\underline{u}, \bar{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ una sub- y una supersolución de (1.1), respectivamente. Entonces, si $\underline{u} \leq \bar{u}$ en Ω , se sigue que $\underline{u} \equiv \bar{u}$ o $\underline{u} < \bar{u}$ en Ω .*

Demostración:

Sea $a = \|\underline{u}\|_\infty + \|\bar{u}\|_\infty$ como e^u es Lipschitz constante sobre $[-a, a]$ para $K = 1$, entonces

$$e^{\bar{u}} - e^{\underline{u}} \geq -(\bar{u} - \underline{u}). \quad (2.5)$$

En particular, $w := \bar{u} - \underline{u}$ resuelve

$$\begin{aligned} -\Delta w + Kw &= e^{\bar{u}} - e^{\underline{u}} + Kw \geq 0 && \text{en } \Omega, \\ w &\geq 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por el Principio del Máximo, Lema 2.11, $w \equiv 0$ ó $w > 0$ en Ω . □

Ahora, veremos por qué definimos la estabilidad como en la Definición 1.1.

Definición 2.13 *Sea X un espacio de Banach de funciones, con norma $\|\cdot\|$. Supongamos que X contiene al espacio $C_c^1(\Omega)$ y sea $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$, un funcional. Un elemento $u \in X$ es un minimizador local de \mathcal{E}_Ω si existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\mathcal{E}_\Omega(u) \leq \mathcal{E}_\Omega(u + \varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \|\varphi\| < t_0.$$

Nótese que, si u es el minimizador local de \mathcal{E}_Ω , donde $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido para $u \in X$ por

$$\mathcal{E}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \lambda e^u dx, \quad (2.7)$$

entonces E alcanza un mínimo local en $t = 0$, definido por

$$E(t) = \mathcal{E}_\Omega(u + t\varphi). \quad (2.8)$$

Lema 2.14 (Lema Fundamental del Cálculo de las Variaciones) *Si $M, \eta \in C[a, b]$ y además $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces si*

$$\int_a^b M(x)\eta(x) dx, \quad \text{para todo } \eta \in C^1[a, b],$$

se sigue que $M(x) \equiv 0$ en $[a, b]$.

Proposición 2.15 *Sea Ω un dominio acotado con frontera suave¹ de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Sea $X = C_0^2(\bar{\Omega}) = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : u(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial\Omega\}$ equipado con la norma $\|\cdot\|_{C^2(\bar{\Omega})}$. Sea $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por (2.7). Si u es un punto crítico² de \mathcal{E}_Ω entonces $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es una solución de (1.1).*

¹Que la frontera sea suave significa que localmente se puede parametrizar como una función suave, ver [9, Apendix C]

²En el sentido de Gâteaux, ver [7, Definición 9.19].

Demostración:

Consideramos un funcional de energía,

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda e^u dx$$

derivando (en el sentido de Gâteaux, ver [7, Definición 9.19]),

$$\mathcal{E}'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \lambda e^u v dx$$

para $u \in C^2(\Omega)$, $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Integrando por partes tenemos que

$$\mathcal{E}'(u)v = \int_{\Omega} (-\Delta u - \lambda e^u)v dx \quad \text{para todo } v \in C_c^\infty(\Omega),$$

entonces, tenemos que $v \equiv 0$ y por el Lema 2.14, $v \equiv 0$ en Ω ; así

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \text{en } \Omega.$$

□

Teorema 2.16 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.) Sean

$$f, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

funciones con las siguientes propiedades:

1. f_n es integrable,
2. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$,
3. existe una función integrable $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces f es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n.$$

Para más información, ver [7].

Ahora, es natural definir *estabilidad* como en la Definición 1.1. Notemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx &= \int_{\Omega} 2(\nabla u + t\nabla\varphi) \nabla\varphi dx, \\ \partial_t \int_{\Omega} e^{u+t\varphi} dx &= \int_{\Omega} e^{u+t\varphi} \varphi dx \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$E'(t) = \left(\int_{\Omega} \nabla(u + t\varphi) \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} e^{u+t\varphi} \varphi \, dx \right).$$

Sea u un mínimo local de \mathcal{E}_{Ω} , entonces Así,

$$E'(0) = \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} e^u \varphi \, dx \right) = 0.$$

Ahora, calculando $E''(0)$,

$$\begin{aligned} \frac{E'(t) - E'(0)}{t} &= \frac{E'(t)}{t} = \frac{D\mathcal{E}_{\Omega}(u + t\varphi) \cdot \varphi}{t} \\ &= \frac{1}{t} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{t} e^{u+t\varphi} \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx - \int_{\Omega} \frac{e^{u+t\varphi} - e^u}{t} \varphi \, dx, \end{aligned}$$

donde usamos que u es solución de (1.1) por la Proposición 2.15 y por ser un mínimo local.

Tomando el límite cuando $t \rightarrow 0$ y por el Teorema 2.16,

$$E''(0) = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx - \int_{\Omega} e^u \varphi^2 \, dx. \quad (2.9)$$

Veamos que (2.9) es no negativa.

Sabemos que $E(0) \leq E(t)$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, por ser un mínimo local y también sabemos que $E'(0) = 0$. Ahora, supongamos que esto implica que $E''(0) < 0$, entonces $E'(t) < 0$ para $t \in (0, \varepsilon)$, lo cual, significa que la función es decreciente y así, $E(t) < E(0)$ para todo $t \in (0, \varepsilon)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $E''(0) \geq 0$.

Ahora, supongamos que una sub- y una supersolución existen y además supongamos que son distintas y son ordenadas: $\underline{u} \leq \bar{u}$ en Ω . Por la Proposición 2.12 las desigualdades son estrictas:

$$\underline{u} < \bar{u}, \quad \text{en } \Omega. \quad (2.10)$$

El siguiente resultado nos servirá para caracterizar la estabilidad de algunas soluciones. La demostración es un poco técnica y larga, por lo que no la incluiremos en este trabajo, pero se puede consultar en [8, Lemma 1.1.1].

Capítulo 3

El problema de Gelfand unidimensional

La ecuación (1.1) para $n = 1$ es

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda e^u && \text{en } (-1, 1), \\ u(-1) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

En este capítulo caracterizaremos el conjunto de soluciones de (3.1), estudiaremos sus propiedades de estabilidad y demostraremos el Teorema 1.5. Para ello, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 3.1 *El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está dado por*

$$H_0^1(\Omega) := \overline{(C_c^\infty(\Omega))}_{\|\cdot\|_{H^1}}$$

donde $\|u\|_{H^1} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, este espacio es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en L^2 bajo la norma $\|\cdot\|_{H^1}$. Para más información, ver por ejemplo [4].

Definición 3.2 *Sea $u \in C^1(-1, 1)$ una solución de (3.1). La solución u es estable si*

$$Q_u(\varphi) := \int_{-1}^1 |\varphi'|^2 dx - \int_{-1}^1 \lambda e^u \varphi^2 dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1, 1). \tag{3.2}$$

Observación 3.3 *Como $C_c^1(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ podemos tomar $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ en (3.2) (ver Apéndice A).*

Definición 3.4 *Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y sea $(-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Una solución $u \in C^2(-1, 1)$ de (3.1), tiene índice de Morse $k \geq 1$ si k es la dimensión máxima de un subespacio X_k de $C_c^1(-1, 1)$ tal que*

$$Q_u(\varphi) < 0, \quad \forall \varphi \in X_k \setminus \{0\}.$$

Entonces escribimos $\text{ind}(u) := k$.

Ahora enunciaremos algunas propiedades clásicas de las funciones propias de operadores elípticos.

Proposición 3.5 *Sea u una solución de (3.1), entonces existe una sucesión $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, y una sucesión $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$-\varphi_k'' - \lambda e^u \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Además,

$$\lambda_1 := \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1} \left(\int_{\Omega} |\varphi'|^2 dx - \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi^2 dx \right) \quad (3.3)$$

y

$$\lambda_k = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\varphi'|^2 - \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 dx} : \varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \text{ tal que} \right. \\ \left. \int_{\Omega} \varphi \varphi_j dx = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k-1 \right\}. \quad (3.4)$$

Para más información, ver [3, Proposition 3.3].

Lema 3.6 *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Si $(\varphi_k)_{k=1}^N \subseteq H_0^1(\Omega)$ es una sucesión que es linealmente independiente en $H_0^1(\Omega)$ y $Q_u(\varphi_k) < 0$ para todo $k = 1, \dots, N$, entonces existe $(\psi_k) \subset C_c^1(\Omega)$, con $1 \leq k \leq N$; tal que $Q_u(\psi_k) < 0$ para $k = 1, \dots, N$ y $(\psi_k)_{k=1}^N$ es linealmente independiente.*

Demostración:

Demostraremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $\psi \in B_\varepsilon(\varphi_i) \subset H_0^1(\Omega)$ entonces $Q_u(\psi) < 0$. Sabemos que

$$Q_u(\varphi_i) = \int_{\Omega} |\varphi_i'|^2 - \lambda e^u \varphi_i^2 dx < 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Por definición, $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $(\phi_k^1) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|\phi_k^1 - \psi_1\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$. En el Apéndice A vemos que $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_u(\phi_k^1) = Q_u(\psi_1)$. Entonces, pasando a una subsucesión, $Q_u(\phi_k^1) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora la sucesión $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^1(\Omega)$ tal que $Q_u(\psi_k) < 0$ y que sea linealmente independiente se puede encontrar por un proceso estándar de ortogonalización, es decir, inductivamente, tomemos $\psi_1 := \phi_1^1$ y supongamos que ya hemos construido a los elementos ψ_1, \dots, ψ_i para alguna $i \in \mathbb{N}$, Entonces tomamos

$$\psi_{i+1} \in B_\varepsilon(\varphi_{i+1}) \cap C_c^\infty(\Omega) \cap \langle \psi_1, \dots, \psi_i \rangle^\perp \neq \emptyset.$$

La sucesión $(\psi_i)_{i=1}^k$ cumple con las propiedades deseadas. \square

Proposición 3.7 *Sea $u \in C^2(\overline{-1,1})$ una solución de (3.1). Entonces u tiene índice de Morse finito. Más aún, $k = \text{ind}(u)$ si y sólo si el operador linealizado $L\varphi = -\varphi'' - \lambda e^u \varphi$ (con condiciones de frontera de Dirichlet) tiene exactamente k valores propios negativos.*

Demostración:

El índice de Morse es finito, gracias a que los operadores elípticos tienen un espectro discreto que tiende a infinito, es decir, todos sus valores propios son una sucesión $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ y $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, ver [9, Sec. 6.5.1 y 6.5.2]. Por lo tanto sólo un número finito de valores propios pueden ser negativos.

Sólo tenemos que probar que el índice de Morse k es igual al número \tilde{k} de valores propios negativos del operador linealizado (el cual es finito por la teoría clásica de operadores elípticos, ver [9]). Probaremos dos desigualdades para obtener la igualdad.

Paso 1. $\tilde{k} \leq k$.

Si $\tilde{k} = 0$, entonces $-\varphi'' = \lambda e^u \varphi$ tiene 0 valores propios negativos, y queremos probar que $ind(u) \geq \tilde{k} = 0$. Sea $ind(u) = k_1$ la dimensión máxima de un subespacio X_{k_1} tal que $Q_u(\varphi) < 0$ para todo $\varphi \in X_{k_1} \setminus \{0\}$. Procedemos por contradicción, si $k_1 > 0$ entonces existe un subespacio X_{k_1} tal que $Q_u(\varphi) < 0$ para todo $\varphi \in X_{k_1} \setminus \{0\}$ y por la Proposición 3.5 hay contradicción, pues

$$0 \leq \lambda_1 = \inf_{\varphi \in H_0^1(-1,1), \|\varphi\|=1} Q_u(\varphi) \leq \inf_{\varphi \in X_{k_1}, \|\varphi\|=1} Q_u(\varphi) < 0.$$

Por lo tanto, $k_1 = 0 = k$.

Si $k = 1$ entonces para cualquier $\psi \in X_k \setminus \{0\}$, $Q_u(\psi) < 0$. En particular, $\lambda_1 = \lambda_1(-u'' - \lambda e^u; (-1, 1)) < 0$, pues λ_1 está dado por (3.3). Luego $\tilde{k} \leq k$ en este caso.

Si $k \geq 2$, el k -ésimo valor propio $\lambda_k = \lambda_k(-u'' - \lambda e^u; (-1, 1))$ del operador linealizado está dado por (3.4), donde las funciones φ_j , $j = 1, \dots, k-1$ son los vectores propios linealmente independientes asociados a los valores propios $\lambda_j \leq \lambda_k$ (repetidos de acuerdo a su multiplicidad geométrica). Consideramos la función lineal $\Lambda : X_k \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ definida para $\varphi \in X_k$ por

$$\Lambda \varphi = \left(\int_{-1}^1 \varphi \varphi_1 dx, \dots, \int_{-1}^1 \varphi \varphi_{k-1} dx \right). \quad (3.5)$$

Como X_k es k -dimensional, el núcleo de Λ es no trivial. En efecto, recordando la definición de núcleo,

$$Ker \Lambda = \{x \in X_k : \Lambda x = 0\},$$

como Λ es lineal, si el núcleo fuera trivial, entonces Λ sería inyectiva, pero eso significa que el dominio tendría mayor dimensión que el codominio, lo cual no es posible.

Entonces existe $\tilde{\varphi} \in X_k \setminus \{0\}$ tal que $\int_{-1}^1 \tilde{\varphi} \varphi_j dx = 0$ para todo $j = 1, \dots, k-1$.

Ahora, existe $\varphi \in X_k$ tal que $\int_{-1}^1 \varphi \varphi_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, k-1$, recordando que

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \inf_{\varphi \in H_0^1(-1,1), \int \varphi \varphi_j = 0, j=1, \dots, k-1} \frac{\int_{-1}^1 |\varphi'|^2 - \int_{-1}^1 \lambda e^u \varphi^2 dx}{\int_{-1}^1 \varphi^2 dx} \\ &\leq \frac{\int |\nabla \tilde{\varphi}|^2 - \lambda e^u \tilde{\varphi}^2}{\int \tilde{\varphi}^2} = \frac{Q_u(\tilde{\varphi})}{\int \tilde{\varphi}^2} < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda_k < 0$.

Paso 2. Usando la notación del Paso 1, $Q_u(\varphi_j) < 0$ para todo $j = 1, \dots, \tilde{k}$. Por el Lema 3.6₂ como $\varphi_j \in H_0^1(-1, 1)$, existe $\psi_j \in C_c^1(-1, 1)$ tal que $Q_u(\psi_j) < 0$ para $j = 1, \dots, \tilde{k}$ y (ψ_j) son linealmente independientes. Entonces $\text{ind}(u) \geq \tilde{k}$. □

El siguiente resultado es consecuencia del principio del máximo, pero daremos una prueba independiente porque en dimensión uno es más sencillo.

Lema 3.8 *Sea $u \in C^2((-1, 1)) \cap C([-1, 1])$ tal que $-u'' > 0$ en $(-1, 1)$. Entonces u no puede alcanzar un mínimo en un punto interior.*

Demostración:

Por contradicción, supongamos que existe $x_0 \in (-1, 1)$ tal que

$$u'(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad u(x_0) \leq \min_{[-1, 1]} u. \quad (3.6)$$

Por (3.6), $u''(x_0) \geq 0$. Pero esto contradice la hipótesis de que $-u'' > 0$ en $(-1, 1)$. Por lo tanto u no tiene mínimos en puntos interiores. □

Lema 3.9 *Sean $u_0 > 0$ y $\lambda > 0$ tales que*

$$\int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = 1.$$

Entonces existe una función par $u \in C^2(-1, 1)$ con $u(r) \leq u_0$ para todo $r \in [-1, 1]$ tal que

$$\int_{u(r)}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = r \quad \text{para } r \in (0, 1).$$

Demostración:

Consideremos a la función $F : (0, 1) \times (0, u_0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(r, u) := \int_u^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt - r,$$

donde $F(r, u) \in C^1$. Notemos que $F(1, 0) = 0$ y que

$$F_u(r, u) = -\frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^u)}} \neq 0 \quad \text{en } (0, 1) \times (0, u_0).$$

El teorema de la función implícita nos garantiza la existencia de $\varepsilon \in (0, 1]$ tal que $(0, \varepsilon] \subseteq (0, u_0)$, pues es en donde $F(r, u)$ está definida; y de una función $u \in C^2(0, \varepsilon]$ tal que $u(0, \varepsilon] \subseteq (0, u_0)$ y

$$F(r, u(r)) = 0 \quad \text{para } r \in (0, \varepsilon].$$

es decir,

$$\int_{u(r)}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = r \quad \text{para } r \in (0, \varepsilon],$$

y por lo tanto $u(0) = u_0$, y para $u(r) \leq u_0$ tenemos que

$$u'(r) = -\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^{u(r)})} < 0 \quad \text{para } r \in (0, \varepsilon].$$

En particular, u es decreciente en $(0, \varepsilon]$ y $u'(0) = 0$. Luego, por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, el problema

$$\begin{aligned} v'(r) &= -\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^{v(r)})} \quad \text{para } r > \varepsilon, \\ v(\varepsilon) &= u(\varepsilon) < u_0 \end{aligned}$$

tiene solución global $v \in C^2[\varepsilon, \infty)$, ya que v está localmente acotada. En efecto, como v es solución, es punto fijo del operador

$$v(r) \mapsto (\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^r \sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^{v(t)})},$$

entonces

$$|v(r)| = \left| u(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^r \sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^{v(t)})} \right| \leq |u(\varepsilon)| + r\sqrt{2\lambda(e^{u_0})}, \quad r > \varepsilon.$$

Si definimos $u(r) := v(r)$ para $r > \varepsilon$ y $u(r) := u(-r)$ para $r < 0$ y además $u'(0) = 0$, entonces u es la función buscada. \square

Lema 3.10 *Cada solución de (3.1) es positiva, par, radialmente decreciente y caracterizada por $u_0 := u(0)$.*

Demostración:

Sea u una solución de (3.1). Dado que $\lambda > 0$ y $e^u > 0$, entonces $-u'' > 0$ en $(-1, 1)$. Por el Lema 3.8, u no puede alcanzar un punto interior mínimo. En particular, $u > 0$ en $(-1, 1)$. Demostraremos que u es par. Procedemos por contradicción, supongamos que u alcanza su máximo en algún $x_0 \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Sin pérdida de generalidad, consideremos $x_0 \in (0, 1)$. Definimos $v(t) = u(x_0 + t)$ y $\tilde{v}(t) = u(x_0 - t)$, $v(t)$ y $\tilde{v}(t)$ satisfacen la ecuación (3.1), con condiciones iniciales $v(0) = u(x_0)$ y $v'(0) = 0$. Así, escribiendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} -v''(t) &= u''(x_0 + t) = \lambda e^{u(x_0+t)} = \lambda e^v, \\ v(0) &= u(x_0), \\ v'(0) &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\tilde{v}''(t) &= u''(x_0 - t) = \lambda e^{u(x_0 - t)} = \lambda e^{\tilde{v}}, \\ \tilde{v}(0) &= u(x_0), \\ \tilde{v}'(0) &= 0 \end{aligned}$$

notamos que ambas funciones satisfacen la misma ecuación, así, por el teorema de existencia y unicidad, $v \equiv \tilde{v}$. En particular, $u(2x_0 - 1) = u(1) = 0$, pero $x_0 \in (0, 1)$ y $-1 < 2x_0 - 1 < 1$, contradiciendo el hecho de que $u > 0$ en $(-1, 1)$. Entonces u alcanza su único punto máximo en 0. Por lo tanto, u es par.

Ahora veremos que u es radialmente decreciente; es decir, $u'(r) < 0$ para $r \in (0, 1)$. Sabemos que $-u'' > 0$ y $u > 0$, entonces,

$$0 < \int_0^{r_0} -u''(s) ds = -(u'(r_0) - u'(0)) = -u'(r_0),$$

entonces $u'(r_0) < 0$. Así, u es radialmente decreciente.

Ahora, multiplicando (3.1) por u'

$$-u''u' = \lambda e^u u',$$

e integrando entre 0 y $r \in (0, 1)$

$$\int_0^r -u''(s)u'(s) ds = \int_0^r \lambda e^{u(s)} u'(s) ds.$$

Como u'' es la derivada de u' , entonces la ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{1}{2} \int_0^r \frac{d}{ds} (u'(s))^2 ds = \int_0^r \frac{d}{ds} (\lambda e^{u(s)}) ds,$$

y por lo tanto, como $u'(0) = 0$ por paridad,

$$-\frac{u'^2(r)}{2} = \lambda(e^{u(r)} - e^{u_0}) \quad \text{para } r \in (0, 1), \quad (3.7)$$

donde $u_0 = u(0)$, que puede ser reescrita como

$$-\frac{u'(r)}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^{u(r)})}} = 1 \quad \text{para } r \in (0, 1).$$

Integrando una vez más entre 0 y 1,

$$-\int_0^1 \frac{u'(r)}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^{u(r)})}} dr = 1 \quad \text{para } r \in (0, 1). \quad (3.8)$$

Consideramos el cambio de variable $u(r) = t$, así, $u'(r)dr = dt$. Recordemos que el intervalo en el que trabajamos es $(-1, 1)$ y como tenemos un máximo en $u_0 = u(0)$ (por paridad y monotonía); entonces (3.8) es equivalente a

$$\int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = 1. \quad (3.9)$$

Así, se sigue que cada solución de (3.1) satisface (3.9).

Por el Lema 3.9, sabemos que dada la ecuación (3.9), existe una función par tal que

$$\int_{u(r)}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = r \quad \text{para } r \in (0, 1), \quad (3.10)$$

y además, resuelve (3.1) por el Lema 3.11. Dicho esto, ahora sabemos que las soluciones de la ecuación (3.1) existen. Ahora veremos que dado $u_0 > 0$ existe sólo una solución de (3.1) que satisface $u(0) = u_0$, para ver que son únicas, supongamos que u_1 y u_2 son soluciones de (3.1), entonces satisfacen

$$\int_{u_1(r)}^{u_0} h(t) dt = \int_{u_2(r)}^{u_0} h(t) dt,$$

con $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt$, así,

$$0 = \int_{u_1(r)}^{u_0} h(t) dt - \int_{u_2(r)}^{u_0} h(t) dt = \int_{u_1(r)}^{u_0} h(t) dt + \int_{u_0}^{u_2(r)} h(t) dt = \int_{u_1(r)}^{u_2(r)} h(t) dt$$

para toda $r \in (0, 1)$, como la integral es igual a 0 y $h(t) > 0$ para $t \in (u_1(r), u_2(r))$ necesariamente tenemos que

$$u_1(r) = u_2(r) \quad \text{para } r \in (0, 1).$$

Por lo tanto, cada solución u de (3.1) es positiva, par, radialmente decreciente y caracterizadas por $u(0) = u_0$. \square

Lema 3.11 *Las funciones definidas por (3.10) y (3.9) resuelven (3.1).*

Demostración:

Sea u una función definida por (3.9) y (3.10), entonces

$$\int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = 1.$$

y

$$\int_{u(r)}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = r \quad \text{para } r \in (0, 1);$$

derivando, por regla de la cadena,

$$-\frac{u'(r)}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^{u(r)})}} = 1 \quad \text{para } r \in (0, 1),$$

en particular, $u'(r) \neq 0$ para $r \in (0, 1)$. Entonces,

$$-\frac{(u'(r))^2}{2} = \lambda(e^{u(r)} - e^{u_0}) \quad \text{para } r \in (0, 1),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^r -u''(s)u'(s) ds &= \frac{1}{2} \int_0^r \frac{d}{ds} [(u'(s))^2] ds \\ &= \int_0^r \frac{d}{ds} [\lambda(e^{u(s)} - e^{u_0})] ds = \int_0^r \lambda e^{u(s)} u'(s) ds, \end{aligned}$$

así,

$$\int_0^r -u''u' - \lambda e^u u' ds = 0 \quad \text{para todo } r \in (0, 1)$$

y entonces

$$-u''u' = \lambda e^u u' \quad \text{en } (0, r),$$

finalmente, cancelando $u' \neq 0$ de ambos lados,

$$-u'' = \lambda e^u \quad \text{en } (0, r).$$

Finalmente, notemos que

$$\int_{u(1)}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = 1 = \int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt,$$

es decir

$$\int_{u(1)}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = 0.$$

Como el integrando es estrictamente positivo, tenemos que $u(1) = 0$, es decir, u satisface las condiciones de frontera de Dirichlet. \square

Lema 3.12 *Sea $\lambda^* > 0$, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, existen exactamente dos soluciones de (3.1), digamos u_λ y U_λ . Si $\lambda = \lambda^*$ entonces existe exactamente una solución, digamos u^* . Si $\lambda > \lambda^*$ entonces la ecuación (3.1) no tiene soluciones.*

Demostración:

De acuerdo al Lema 3.10, tenemos que existe una solución tal que $u(0) = u_0 > 0$ si la ecuación (3.9) se cumple, es decir, si

$$\int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} dt = 1, \quad \lambda > 0, u_0 > 0.$$

Entonces

$$\int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{e^{u_0} - e^t}} dt = \sqrt{2\lambda}. \quad (3.11)$$

Sea $I : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I(u_0) = \int_0^{u_0} \frac{1}{\sqrt{e^{u_0} - e^t}} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $s = e^t$ y $ds = e^t dt$

$$I(u_0) = \int_1^{e^{u_0}} \frac{1}{s\sqrt{e^{u_0} - s}} ds.$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $p = e^{u_0} - s$ y $dp = -ds$, obteniendo

$$I(u_0) = \int_{e^{u_0}-1}^0 \frac{1}{\sqrt{p}(p - e^{u_0})} dp = \int_0^{e^{u_0}-1} \frac{1}{\sqrt{p}(e^{u_0} - p)} dp.$$

Finalmente, hacemos el cambio de variable $w = \sqrt{p}$ y $dw = \frac{1}{2\sqrt{p}} dp$, de donde se sigue

$$I(u_0) = 2 \int_0^{\sqrt{e^{u_0}-1}} \frac{1}{e^{u_0} - w^2} dw.$$

Factorizando $-e^{u_0}$ e integrando

$$I(u_0) = 2e^{-u_0} \int_0^{\sqrt{e^{u_0}-1}} \frac{1}{1 - e^{-u_0}w^2} dw,$$

integrando,

$$\begin{aligned} I(u_0) &= 2e^{-u_0} \int_0^{\sqrt{e^{u_0}-1}} \frac{1}{1 - e^{-u_0}w^2} dw = 2e^{-u_0} e^{\frac{u_0}{2}} \tan^{-1} \left(e^{-\frac{u_0}{2}} w \right) \Big|_0^{\sqrt{e^{u_0}-1}} \\ &= 2e^{-\frac{u_0}{2}} \tan^{-1} \left(e^{-\frac{u_0}{2}} \sqrt{e^{u_0} - 1} \right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{u_0 \rightarrow 0} I(u_0) = 0 = \lim_{u_0 \rightarrow \infty} I(u_0). \quad (3.12)$$

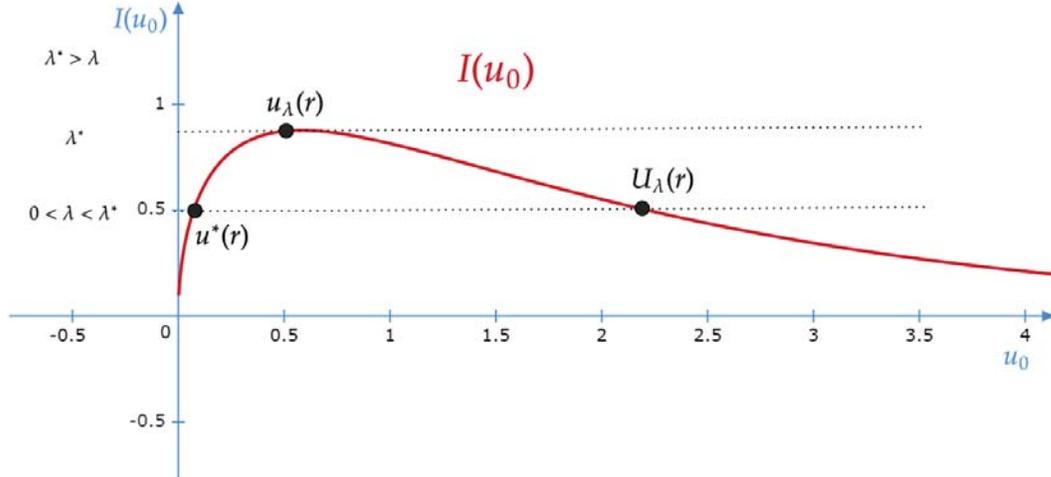


Figura 3.1: Gráfica de $I(u_0)$.

Como I es una función continua y positiva y por la forma de la función, I alcanza su máximo en un número finito $M^* \in (0, \infty)$ (a este número se le conoce como el parámetro de Frank-Kamenetskii [10], $M^* \approx 0,8785$). Esto implica, por (3.11), que λ no puede ser arbitrariamente grande.

Además, por los límites (3.12) y por (3.11) notamos que $\lambda \rightarrow 0$ si y sólo si $u_0 \rightarrow 0$ o bien $u_0 \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, la función $u_0 \mapsto I(u_0)$ no es inyectiva. De hecho, para cada $\sqrt{2\lambda} = c \in (0, M^*)$ la ecuación $I(u_0) = c$ tiene exactamente dos soluciones que denotamos por u_λ y U_λ . Esto se sigue de la forma particular del funcional I , sin embargo no es sencillo calcularlo directamente. En esta tesis simplemente lo justificaremos a partir de la gráfica en la Figura 3.1.

En particular,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_\lambda(0) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda(0) = \infty.$$

Además, en el punto máximo M^* se obtiene sólo una solución u_λ^* y no hay soluciones si $\sqrt{2\lambda} > M^*$.

Notemos que, para $r \in (0, 1)$, el límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{u_\lambda(r)}^{u_\lambda(0)} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}(e^{u_0} - e^t)} dt = r$$

implica que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} u_\lambda(r) = 0.$$

Por otro lado ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{U_\lambda(r)}^{U_\lambda(0)} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}(e^{u_0} - e^t)} dt = r$$

implica que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} U_\lambda(r) = \infty.$$

Cabe recalcar que la Figura 3.1 es la gráfica asociada al funcional $I(u_0)$, mientras que la Figura 1.1 es el diagrama de bifurcación de la ecuación (3.1)

□

Lema 3.13 *Cualquier solución u de (3.1) es estable fuera del conjunto compacto $K = \{0\}$ para cualquier λ ; es decir, si $\varphi \in C_c^1(-1, 1) \setminus \{0\}$ entonces*

$$Q_u(\varphi) \geq 0.$$

Demostración:

Basta probar que

$$Q_u(\varphi) \geq 0, \quad \text{para cada } \varphi \in C_c^1(0, 1).$$

Por el Lema 3.10, $u'(r) < 0$, con $r \in (0, 1)$. Sea $\varphi \in C_c^1((0, 1))$ y sea $\psi = \varphi/u'$. Notemos que $\varphi(r) = u'(r)\psi(r)$, donde $\psi \in C_c^1(0, 1)$, así, partiendo de (3.2)

$$\begin{aligned} Q_u(\varphi) &:= \int_{-1}^1 |\varphi'|^2 dr - \int_{-1}^1 f(u)\varphi^2 dr \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{d(u'(r)\psi(r))}{dr} \right)^2 - \lambda e^{u(r)}(u'(r)\psi(r))^2 \right) dr, \\ &= \int_0^1 ((u''(r))^2\psi(r)^2 + 2u'(r)\psi(r)u''(r)\psi'(r) + (u'(r))^2(\psi'(r))^2 \\ &\quad - \lambda e^{u(r)}(u'(r))^2\psi(r)^2) dr, \\ &= \int_0^1 u''(r)((u'(r)\psi(r)^2)' + (u'(r))^2(\psi'(r))^2 - \lambda e^{u(r)}(u'(r))^2\psi^2) dr. \end{aligned}$$

Falta ver que $Q_u(\varphi) \geq 0$. Ahora, derivando la ecuación (3.1), obtenemos $-u'''(r) = \lambda e^{u(r)}u'(r)$ por regularidad elíptica. Multiplicando por $u'(r)\psi^2(r)$ e integrando, se sigue que

$$\int_0^1 -u'''(r)(u'(r)\psi(r)^2)dr = \int_0^1 \lambda e^{u(r)}u'(r)u'(r)\psi(r)^2 dr,$$

integrando por partes el lado izquierdo,

$$\int_0^1 u''(r)(u'(r)\psi(r)^2)' dr = \lambda \int_0^1 e^{u(r)}(u'(r))^2\psi(r)^2 dr \geq 0.$$

Notamos que dos de los términos anteriores aparecen en $Q_u(\varphi)$, entonces, revisando el último término que nos falta, finalmente obtenemos que

$$Q_u(\varphi) = \int_0^1 (u'(r))^2(\psi'(r))^2 dr \geq 0.$$

Por lo tanto, $Q_u(\varphi) \geq 0$, es decir, u es estable (Definición 3.2).

□

Lema 3.14 $U_\lambda(r)$ tiene índice de Morse 1, donde $U_\lambda(r)$ es una de las dos soluciones para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ de (3.1), con $r \in (0, 1)$.

Demostración:

Por el Lema 3.12, sabemos que para $0 < \lambda < \lambda^*$ hay dos soluciones, y por el Lema 3.10, son positivas. Entonces por el Teorema 1.4, hay dos soluciones tales que $0 < u_\lambda(r) \leq U_\lambda(r)$, por la Proposición 2.12, $0 < u_\lambda(r) < U_\lambda(r)$ y así, $U_\lambda(r)$ debe tener un índice de Morse no cero, con $r \in (0, 1)$.

Ahora, supongamos que $U_\lambda(r)$ tiene índice de Morse al menos 2.

Dado que queremos que se satisfaga la Definición 3.4, y como tiene dimensión al menos 2, podemos tomar $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^1(-1, 1)$ tales que generan al espacio X_k , tomamos una dirección $\psi \in C_c^1(-1, 1)$ tal que $Q_{U_\lambda}(\psi) < 0$. Por el Lema 3.13 (y por un argumento estándar de densidad) tenemos que $Q_{U_\lambda}(\varphi) \geq 0$ para cada $\varphi \in C_c^1(-1, 1)$ tal que $\varphi(0) = 0$. En particular, $\psi(0) \neq 0$, y s.p.g. supongamos que $\psi(0) = 1$. Ahora, tomamos cualquier $\varphi \in C_c^1(-1, 1)$, así, para cualquier φ podemos construir $\tilde{\varphi}$ tal que $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi(0)\psi$.

Como $\psi \in X_k$, entonces podemos suponer que hay otra función $\varphi \in X_k$ que es linealmente independiente de ψ . Como $\psi \in X_k$ y tiene al menos dimensión 2, entonces en X_k hay al menos una φ que es linealmente independiente de ψ . Sabemos que $Q_{U_\lambda}(w) < 0$ para todo $w \in X_k$ y X_k es un subespacio vectorial, entonces, en particular, $\psi + \alpha\varphi$ está en X_k para todo $\alpha \in \mathbb{R}$; es decir, $Q_{U_\lambda}(\psi + \alpha\varphi) < 0$ por hipótesis, pero si tomamos $\alpha = \varphi(0)$, ya vimos en el Lema 3.14 que $Q_{U_\lambda}(\psi + \alpha\varphi) \geq 0$, por lo que llegamos a una contradicción.

Por lo tanto, $U_\lambda(r)$ tiene índice de Morse 1. □

Ahora demostraremos el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 1.5 : Por el Lema 3.12, hay dos soluciones para $0 < \lambda < \lambda^*$, las soluciones son $u_\lambda(r)$ y $U_\lambda(r)$, con $r \in (-1, 1)$, $u_\lambda(r)$ es mínima por el Teorema 1.4 y estable por el Lema 3.13 y el Teorema 1.4. U_λ tiene índice de Morse por el Lema 3.14. Ambas soluciones son positivas, incluso, estrictamente positivas en $(0, 1)$, y únicamente determinadas por su valor en $r = 0$ por el Lema 3.10.

Para ver los comportamientos de las soluciones conforme se aproximan a 0^* o a λ^* , vemos el Lema 3.12 y la Figura 1.1. La no existencia de soluciones si $\lambda > \lambda^*$ se sigue de el Lema 3.12. □

Podemos ver el diagrama de bifurcación para el problema de Gelfand en el caso $n = 1$ en la Figura 1.1.

Capítulo 4

El problema de Gelfand bidimensional

En dimensión $n = 2$, la ecuación (1.1) es

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda e^{u(x)}, & \text{en } B, \\ u(x) &= 0, & \text{sobre } B. \end{aligned} \tag{4.1}$$

En este capítulo caracterizaremos el conjunto de soluciones de (4.1), estudiaremos sus propiedades de estabilidad y demostraremos el resultado principal con el Teorema 4.9.

Soluciones radiales

El siguiente resultado nos da la unicidad de soluciones estables.

Proposición 4.1 *Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la bola unitaria y sea $\lambda = \lambda_1(-\Delta; B)$ el valor propio principal de (4.1). Sean $u_1, u_2 \in C^2(\bar{B})$ dos soluciones estables de (4.1). Entonces $u_1 = u_2$.*

Demostración:

Sean u_1 y u_2 dos soluciones estables de (4.1). Entonces $w = u_2 - u_1$ resuelve

$$-\Delta w = \lambda e^{u_2} - \lambda e^{u_1} \quad \text{en } B.$$

Multiplicando la anterior igualdad por $w^+ := \max\{w, 0\}$, la parte positiva de w , e integrando por partes obtenemos

$$\int_B |\nabla w^+|^2 dx = \lambda \int_B (e^{u_2} - e^{u_1}) w^+ dx.$$

Como u_2 es estable, entonces tenemos

$$\int_B |\nabla w^+|^2 dx \geq \lambda \int_B e^{u_2} (w^+)^2 dx,$$

por lo tanto

$$\lambda \int_B (e^{u_2} - e^{u_1} - e^{u_2} w^+) w^+ dx \geq 0.$$

Por convexidad, el integrando en la desigualdad anterior es no positiva. Como λe^u es estrictamente convexa, deducimos que $w_+ = 0$, esto es, $u_2 \geq u_1$. La otra desigualdad es obtenida cambiando los roles de u_1 y u_2 . \square

Lema 4.2 *Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^n con $n \geq 1$ y sea $f := e^u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Una solución $u \in C^2(\Omega)$ de (4.1) es estable si y sólo si existe $v \in C^2(\Omega)$ tal que $v > 0$ en Ω y tenemos que se satisface*

$$-\Delta v - \lambda e^u v \geq 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.2)$$

Demostración:

Supongamos que existe al menos una $v \in C^2(\Omega)$ tal que $v > 0$ en Ω y tenemos que satisface (4.2). Consideramos $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ y multiplicamos (4.2) por $\frac{\varphi^2}{v}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} (-\Delta v - \lambda e^u v) \frac{\varphi^2}{v} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot \nabla \frac{\varphi^2}{v} - \lambda e^u \varphi^2 \right) dx \\ &\leq - \int_{\Omega} \frac{\varphi^2}{v^2} |\nabla v|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \frac{\varphi}{v} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi^2 dx, \end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad de Young en la última desigualdad. Por lo tanto, la desigualdad (4.2) queda demostrada. \square

Ahora demostraremos el Teorema 1.4 enunciada en la Introducción.

Demostración del Teorema 1.4 : Sea $w = u_2 - u_1 \neq 0$. Entonces $w \geq 0$ en B y usando convexidad,

$$-\Delta w = \lambda e^{u_2} - \lambda e^{u_1} \geq \lambda e^{u_1} w, \quad \text{en } B.$$

Por el principio fuerte del máximo, Lema 2.11, $w > 0$ en B , por lo tanto, u_1 es estable por el Lema 4.2. Por la Proposición 4.1, u_1 es la única solución estable de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda e^u, & \text{en } B, \\ u &= 0, & \text{sobre } \partial B. \end{aligned}$$

\square

Lema 4.3 *Sea $n \geq 1$. Para cada $\alpha > 0$ existe a lo más una solución radial y positiva del problema*

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \text{en } B, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial B, \quad u(0) = \alpha. \quad (4.3)$$

Demostración:

Sea $\alpha > 0$. Por contradicción, supongamos que existen dos soluciones distintas radiales y positivas u_1 y u_2 de (4.3). Sean

$$\begin{aligned} w(x) &:= u_1(x) - u_2(x), \quad x \in B, \\ \xi_1 &:= \inf\{x \in (0, 1) : w(x) \neq 0\}, \\ \xi_2 &:= \sup\{x_0 \in (\xi_1, 1) : w(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in (\xi_1, x_0)\}. \end{aligned}$$

Entonces $0 \leq \xi_1 < \xi_2 \leq 1$ y $w \neq 0$ en (ξ_1, ξ_2) . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $w > 0$ en (ξ_1, ξ_2) . Entonces

$$-\Delta w = \lambda(e^{u_1} - e^{u_2}) \geq 0 \quad \text{en } B_{\xi_2}(0), \quad w = 0 \quad \text{sobre } \partial B_{\xi_2}(0).$$

Además $w \geq 0$ en $B_{\xi_2}(0)$ y $w \not\equiv 0$ en $B_{\xi_2}(0)$. Entonces, por el principio fuerte del máximo, tenemos que $w > 0$ en $B_{\xi_2}(0)$. Pero esto contradice que $w(0) = u_1(0) - u_2(0) = \alpha - \alpha = 0$. \square

Lema 4.4 *Sea $\lambda > 0$. Funciones de la forma*

$$u(r) = \ln \frac{8b}{(1 + \lambda br^2)^2} \quad \text{para algún } b > 0 \quad (4.4)$$

son soluciones de la ecuación

$$-(u'' + \frac{1}{r}u') = \lambda e^u.$$

Más aún, las únicas soluciones radiales y positivas de (4.1) están dadas por

$$u_\lambda(x) := \ln \frac{8b_-}{(1 + \lambda b_- |x|^2)^2}, \quad U_\lambda(x) := \ln \frac{8b_+}{(1 + \lambda b_+ |x|^2)^2}, \quad (4.5)$$

donde $r \in (0, 1)$, $b_\pm := \frac{8-2\lambda \pm \sqrt{64-32\lambda}}{2\lambda^2}$ y $\lambda \in (0, 2]$. En particular, si $\lambda > 2$, entonces el problema (4.1) no tiene solución.

Demostración:

Para verificar que las funciones de la forma (4.4) son soluciones, simplemente derivamos u con respecto a r y sustituimos; es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}[u(r)] &= \frac{d}{dr} \left[\ln \left(\frac{8b}{(b\lambda r^2 + 1)^2} \right) \right] \\ &= \frac{(b\lambda r^2 + 1)^2}{8b} \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{8b}{(b\lambda r^2 + 1)^2} \right] \\ &= \frac{8b \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(b\lambda r^2 + 1)^2} \right] \cdot (b\lambda r^2 + 1)^2}{8b} \\ &= (-2)(b\lambda r^2 + 1)^{-3} \cdot \frac{d}{dr} [b\lambda r^2 + 1] \cdot (b\lambda r^2 + 1)^2 \\ &= -\frac{2(b\lambda \cdot \frac{d}{dr}[r^2] + \frac{d}{dr}[1])}{b\lambda r^2 + 1} = -\frac{2(b\lambda 2r)}{b\lambda r^2 + 1} = -\frac{4b\lambda r}{b\lambda r^2 + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}[u'(r)] &= \frac{d}{dr} \left[-\frac{4b\lambda r}{b\lambda r^2 + 1} \right] \\
&= -4b\lambda \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{b\lambda r^2 + 1} \right] \\
&= -4b\lambda \cdot \frac{\frac{d}{dr}[r] \cdot (b\lambda r^2 + 1) - r \cdot \frac{d}{dr}[b\lambda r^2 + 1]}{(b\lambda r^2 + 1)^2} \\
&= -\frac{4b\lambda(1(b\lambda r^2 + 1) - (b\lambda \cdot \frac{d}{dr}[r^2] + \frac{d}{dr}[1])r)}{(b\lambda r^2 + 1)^2} \\
&= -\frac{4b\lambda(b\lambda r^2 - (b\lambda 2r)r + 1)}{(b\lambda r^2 + 1)^2} = -\frac{4b\lambda(1 - b\lambda r^2)}{(b\lambda r^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Así, en la ecuación (2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned}
-u''(r) - \frac{1}{r}u'(r) &= \frac{4b\lambda(1 - b\lambda r^2)}{(1 + b\lambda r^2)^2} + \frac{1}{r} \frac{4b\lambda r}{(b\lambda r^2 + 1)} = \frac{4b\lambda(1 - b\lambda r^2)}{(1 + b\lambda r^2)^2} + \frac{4b\lambda}{(b\lambda r^2 + 1)} \\
&= \frac{4b\lambda(1 - b\lambda r^2) + 4b\lambda(1 + b\lambda r^2)}{(b\lambda r^2 + 1)^2} = \frac{4b\lambda - 4b^2\lambda^2 r^2 + 4b\lambda + 4b^2\lambda^2 r^2}{(1 + b\lambda r^2)^2} \\
&= \frac{8b\lambda}{(1 + \lambda b r^2)^2} = \lambda e^{\ln \frac{8b}{(1 + \lambda b r^2)^2}} = \lambda e^{u(r)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones de la forma (4.5) son soluciones de la ecuación (2.1). Para encontrar una solución al problema con condiciones de frontera (4.1), necesitamos verificar que $u(1) = 0$. Probaremos que esto ocurre si y sólo si $\lambda \in (0, 2]$ y $b = b_-$ ó b_+ , donde

$$b_{\pm} := \frac{8 - 2\lambda \pm \sqrt{64 - 32\lambda}}{2\lambda^2}. \quad (4.6)$$

Notemos que, si

$$u(1) = \ln \frac{8b}{(1 + \lambda b)^2} = 0,$$

entonces

$$e^0 = \frac{8b}{(1 + \lambda b)^2},$$

y luego

$$8b = (1 + \lambda b)^2 = 1 + 2\lambda b + \lambda^2 b^2,$$

lo cual se cumple si y sólo si $b = b_{\pm}$ y $\lambda \in (0, 2]$. Notemos que las soluciones u_{λ} y U_{λ} son positivas (ya sea por el Lema 2.11 o por un cálculo directo). Finalmente, la unicidad de soluciones (y la no existencia de soluciones para $\lambda > 2$) queda garantizada por el Lema 4.3.

□

Lema 4.5 Sea $\lambda^* = 2$. La función

$$u(r) = \ln \frac{4}{(1+r^2)^2} \quad (4.7)$$

es solución de la ecuación (2.1) en $\lambda = \lambda^*$.

Demostración:

Para verificar que la función (4.7) es solución de (2.1), simplemente derivamos u con respecto a r y sustituimos; es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}[u(r)] &= \frac{d}{dr} \left[\ln \frac{4}{(1+r^2)^2} \right] \\ &= \frac{4 \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(1+r^2)^2} \right] (1+r^2)^2}{4} \\ &= -2(1+r^2)^{-3} \cdot \frac{d}{dr} 1+r^2^2 \\ &= -\frac{2(2r)}{1+r^2} = -\frac{4r}{1+r^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}[u'(r)] &= -4 \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{1+r^2} \right] \\ &= -4 \frac{\frac{d}{dr}[r](1+r^2) - r \frac{d}{dr}[1+r^2]}{(1+r^2)^2} \\ &= -\frac{4(r^2 - 2r^2 + 1)}{(1+r^2)^2} = -\frac{4(1-r^2)}{(1+r^2)^2}. \end{aligned}$$

Así, en la ecuación (2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned} -u''(r) - \frac{1}{r}u'(r) &= \frac{4(1-r^2)}{(1+r^2)^2} + \frac{1}{r} \frac{4r}{1+r^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1-x^2)^2} + \frac{4(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{4(1-x^2) + 4(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4 - 4x^2 + 4 + 4x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{8}{(1+x^2)^2} = 2e^{\ln \frac{8}{(1+x^2)^2}} = \lambda^* e^{u(r)}. \end{aligned}$$

Así, la función (4.7) es solución de (2.1) si $\lambda^* = 2$. □

Observación 4.6 El Lema 4.4 nos da una fórmula explícita para las soluciones, pero no nos dice cómo fue la deducción de las mismas. A continuación daremos una breve explicación de cómo se podrían obtener las fórmulas siguiendo las ideas en [13]. La ecuación para $u = u(r)$,

$$(ru')' + \lambda r e^u = 0 \quad \text{para } r > 0 \quad \text{y} \quad u'(0) = 0,$$

es integrable. Esto es, de los cambios de variables

$$u(r) = v(s) - 2s \quad y \quad r = e^s,$$

tenemos que

$$v'' = \lambda e^v = 0 \quad y \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} e^{-s}(v'(s) - 2) = 0.$$

Integrando,

$$e^v = \frac{8}{\lambda} \frac{C e^{2s}}{(C e^{2s} + 1)^2} \quad \text{ó} \quad e^u = \frac{8}{\lambda} \frac{C}{(C r^2 + 1)^2}.$$

De aquí, las soluciones dadas en el lema se siguen. Para más detalles, ver [13].

Observación 4.7 El índice de Morse de la solución U_λ se puede calcular, véase por ejemplo Teorema 1.1 de [16]

Lema 4.8 La solución $U_\lambda(r)$ dada por (4.5) converge uniformemente a $4 \ln \frac{1}{r}$ cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Demostración:

Sustituyendo el valor de b_\pm en (4.5),

$$U_\lambda(r) := \ln \frac{8^{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}}{\lambda^2} \frac{1}{(1 + \lambda \frac{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}{\lambda^2} r^2)^2},$$

tomando el límite cuando $\lambda \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda(r) &= \ln \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{8(4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda})}{\lambda^2 (1 + \frac{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}{\lambda} r^2)^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\lim_{\lambda \rightarrow 0} 8(4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda})}{\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 (1 + \frac{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}{\lambda} r^2)^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\lim_{\lambda \rightarrow 0} 8(4+4)}{\lim_{\lambda \rightarrow 0} (r^2(4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}) + x)^2} \right) = \ln \left(\frac{64}{(r^2(4+4))^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{r^4} \right) = 4 \ln \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

□

Ahora demostraremos el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.9 Sea $\lambda^* = 2$. Entonces,

- Para $0 < \lambda < \lambda^*$, existen exactamente dos soluciones, $u_\lambda(r)$, $U_\lambda(r) \in C^2(\overline{B})$ para (4.1). La solución $u_\lambda(r)$ es mínima, por ende estable, mientras que $U_\lambda(r)$ es inestable (i.e. no es estable). Ambas soluciones son radiales y explícitamente dadas por

$$u_\lambda(r) = \ln \frac{8b_-}{(1 + \lambda b_- r^2)^2}, \quad U_\lambda(r) = \ln \frac{8b_+}{(1 + \lambda b_+ r^2)^2}, \quad (4.8)$$

donde $b_\pm = \frac{8-2\lambda \pm \sqrt{64-32\lambda}}{2\lambda^2}$, $r \in (0, 1)$.

- Para $\lambda = \lambda^*$, entonces existe una única solución dada por

$$u(r) = \ln \frac{4}{(1 + r^2)^2}, \quad \text{para } r \in (0, 1).$$

- Para $\lambda > \lambda^*$, no existe una solución $u(r) \in C^2(\overline{B})$ de (4.1).

Demostación:

Por los Lemas 4.4 y 4.5, las funciones de la forma (4.5) son soluciones radiales del problema (4.1). Por el Lema 4.4, $u(1) = 0$ si y sólo si $b = b_-$ ó b_+ , entonces:

- si $64 - 32\lambda > 0$; es decir, $0 \leq \lambda < \lambda^* = 2$, tenemos dos soluciones para la ecuación (4.5) dadas por

$$u_\lambda(r) = \ln \frac{8b_-}{(1 + \lambda b_- r^2)^2}, \quad U_\lambda(r) = \ln \frac{8b_+}{(1 + \lambda b_+ r^2)^2},$$

donde $b_\pm = \frac{8-2\lambda \pm \sqrt{64-32\lambda}}{2\lambda^2}$, $r \in (0, 1)$.

- Si $64 - 32\lambda = 0$; es decir, $\lambda = \lambda^* = 2$, tenemos una solución de la ecuación (4.5) dada por

$$u(r) = \ln \frac{4}{(1 + r^2)^2} \quad \text{para } r \in (0, 1).$$

- Si $64 - 32\lambda < 0$; es decir, $\lambda > \lambda^*$, no tenemos soluciones de la ecuación (4.5), pues nuestras soluciones estarían en \mathbb{C} , pero nuestra ecuación es real.

Cuando $\lambda < \lambda^*$ tenemos dos soluciones, u_λ y U_λ ; y por el Teorema 1.4, sabemos que $u_\lambda(r)$ es mínima y por ende estable. Por el Lema 4.3, existe a lo más una solución radial y positiva del problema (4.3) para algún $b \in \mathbb{R}$, donde b está dado por (4.6). Como las soluciones deben de satisfacer la condición de frontera $u(1) = 0$, tenemos que

$$8b = (1 + \lambda b)^2.$$

Esta ecuación es cuadrática en b , y tiene respectivamente 2, 1 ó 0 soluciones si $\lambda < \lambda^*$, $\lambda = \lambda^*$, y $\lambda > \lambda^*$, respectivamente. \square

Soluciones positivas

Enunciemos el siguiente teorema, para más información, ver [11].

Teorema 4.10 (Gidas-Ni-Nirenberg.) *Sea $u \in C^2(\overline{B})$ solución de (1.1) y $u > 0$ en B . Entonces*

1. $u(x) = U(|x|)$ es radialmente simétrica; y
2. u es estrictamente decreciente en el sentido de que $U'(r) < 0$ para $0 < r < R$.

La demostración del teorema principal de la sección para soluciones positivas es un corolario de los Teoremas 4.9 y 4.10.

Demostración del Teorema 1.6 : Por el Teorema 4.10, toda solución positiva es radialmente simétrica, el resto de la demostración se sigue por el Teorema 4.9. \square

El diagrama de bifurcación para el problema de Gelfand en el caso $n = 2$ se puede ver en la Figura 1.2.

Capítulo 5

El problema de Gelfand para $3 \leq n \leq 9$

En dimensiones $3 \leq n \leq 9$, la ecuación (1.1) es

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda e^{u(x)}, & \text{en } B, \\ u(x) &= 0, & \text{sobre } \partial B. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dado que las soluciones del problema de Gelfand son positivas, por el Teorema ?? sólo nos dedicaremos a estudiar las soluciones radiales. En este capítulo caracterizaremos el conjunto de soluciones de (5.1), estudiaremos sus propiedades de estabilidad y demostraremos el resultado principal con el Teorema 5.14.

Soluciones radiales

Veremos algunos lemas previos a la demostración del teorema principal de la sección.

Definición 5.1 Dada $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que $f(t, x)$ es Lipschitz continua localmente con respecto a x en \mathcal{D} si para cada $(t_0, a) \in \mathcal{D}$ existe L y un conjunto producto $\mathcal{I} \times \mathcal{U}$ que contiene a (t_0, a) en su interior tal que $f(t, \cdot)$ restringida a \mathcal{U} es Lipschitz continua localmente con constante de Lipschitz L para cada $t \in \mathcal{I}$.

Teorema 5.2 (Intervalo máximo de existencia.) Sea \mathcal{D} un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, a) \in \mathcal{D}$ y $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz continua localmente con respecto a x en \mathcal{D} . El problema de condiciones iniciales

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = a, \tag{5.2}$$

tiene un intervalo máximo de existencia, y es de la forma (ω_-, ω_+) con $\omega_- \in [-\infty, \infty)$ y $\omega_+ \in (-\infty, \infty]$. Existe una única solución $x(t)$ de (5.2) en (ω_-, ω_+) , y si $\omega_+ < \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow (\omega_+)^-} |x(t)| = \infty.$$

Una prueba de este resultado puede verse en [12].

Lema 5.3 Para cada $a > 0$ existe una solución de

$$-u'' - \frac{n-1}{r}u' = \lambda e^u \quad \text{en } (0, \infty), \quad u(0) = a, \quad u'(0) = 0. \quad (5.3)$$

Además, la ecuación (5.3) es equivalente a la EDO autónoma

$$w''(t) + (n-2)w'(t) + (n-2)(2e^{w(t)} - 2) = 0 \quad \text{para } t \in (-\infty, \infty), \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

donde

$$u(r) = w(t) - 2t + a, \quad r = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t.$$

Demostración:

Sea $a > 0$ y consideremos el problema (5.3). Este problema es equivalente a

$$-(r^{n-1}u')' = \lambda r^{n-1}e^u \quad \text{en } (0, \infty), \quad u(0) = a, \quad u'(0) = 0.$$

Integrando tenemos que, para $s > 0$,

$$-s^{n-1}u'(s) = -\int_0^s (t^{n-1}u'(t))' dt = \lambda \int_0^s t^{n-1}e^{u(t)} dt,$$

por lo tanto, el problema

$$u'(s) = \lambda \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} e^{u(t)} dt, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = 0, \quad (5.6)$$

es equivalente a (5.3). Aplicando el Teorema 5.2 a (5.6) tenemos que existe una solución u en $(0, \omega_+)$ para algún $\omega_+ \in (0, \infty]$. Veamos que $\omega_+ = \infty$. Por contradicción, supongamos que $\omega_+ < \infty$. Entonces, por el Teorema 5.2,

$$\lim_{s \rightarrow (\omega_+)^-} |u(s)| = \infty. \quad (5.7)$$

Notemos que, para $r \in (0, \omega_+)$,

$$u(r) - u(0) = \int_0^r u'(s) ds = \int_0^r -s^{1-n} \lambda \int_0^s t^{n-1} e^{u(t)} dt ds.$$

Entonces

$$u(r) = a - \lambda \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} e^{u(t)} dt ds. \quad (5.8)$$

Esta identidad nos garantiza que (5.7) no puede suceder. En efecto, (5.8) implica que $u(r) \leq a$ y por lo tanto u está acotada superior e inferiormente pues

$$0 < \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} e^{u(t)} dt ds \leq e^a \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} dt ds = \frac{e^a}{n} \int_0^r s^{1-n} s^n ds = \frac{e^a r^2}{2n} < \frac{e^a \omega_+^2}{2n}.$$

Por lo tanto $\omega_+ = \infty$ y, en particular, existe una solución de (5.3).

Ahora utilizaremos la transformación de Emden. Sea

$$u(r) = w(t) - 2t + a, \quad r = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t. \quad (5.9)$$

Luego, para $r \in (0, \infty)$,

$$t = \ln \left(\frac{r}{\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}}} \right) = \ln(r) - \ln \left(\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} \right), \quad \frac{d}{dr} t(r) = r^{-1}.$$

Notemos que si $r \in (0, \infty)$ entonces $t \in (-\infty, \infty)$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$u'(r) = w'(t) \frac{d}{dr} t(r) - 2 \frac{d}{dr} t(r) = w'(t) r^{-1} - 2r^{-1}, \quad w'(t) = u'(r) r + 2. \quad (5.10)$$

Similarmente,

$$u''(r) = w''(t) r^{-2} + w'(t) \frac{d^2}{dr^2} t(r) = w''(t) r^{-2} - w'(t) r^{-2}.$$

Es decir,

$$w''(t) = u''(r) r^2 + u'(r) r.$$

Entonces, por (5.3),

$$\begin{aligned} -u'' - \frac{n-1}{r} u' - \lambda e^u &= r^{-2} (w''(t) - w'(t)) + \frac{n-1}{r} (r^{-1}) [w'(t) - 2] + \lambda e^{w(t)-2t+a} \\ &= r^{-2} (w''(t) - w'(t)) + \frac{n-1}{r^2} [w'(t) - 2] + \lambda e^{w(t)} \frac{1}{e^{2 \ln \left(\frac{r}{\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}}} \right)}} e^a \\ &= (w''(t) - w'(t)) + (n-1) [w'(t) - 2] + r^2 \lambda e^{w(t)} \frac{1}{e^{\ln \left(\frac{r}{\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}}} \right)^2}} e^a \\ &= (w''(t) - w'(t)) + (n-1) [w'(t) - 2] + r^2 \lambda e^{w(t)} \frac{1}{\frac{r^2}{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}}} e^a \\ &= (w''(t) - w'(t)) + (n-1) [w'(t) - 2] + r^2 \lambda e^{w(t)} \frac{2(n-2)}{r^2 \lambda e^a} e^a \\ &= (w''(t) - w'(t)) + (n-1) [w'(t) - 2] + e^{w(t)} 2(n-2) \\ &= w''(t) - w'(t) + n w'(t) - 2n - w'(t) + 2 + 2n e^{w(t)} - 4e^{w(t)} \\ &= w''(t) + (n-2) w'(t) + (n-2) (2e^{w(t)} - 2). \end{aligned}$$

Así, la ecuación (5.3) es equivalente a la EDO autónoma

$$w''(t) + (n-2)w'(t) + (n-2)(2e^{w(t)} - 2) = 0 \quad \text{para } t \in (-\infty, \infty),$$

□

Lema 5.4 *Sea $v(t) = w(t) - 2t$. Entonces w es solución de (5.4) si y sólo si v es solución de la ecuación*

$$v(t) = -2(n-2) \int_{-\infty}^t e^{-(n-2)s} \left(\int_{-\infty}^s e^{n\sigma+v(\sigma)} d\sigma \right) ds. \quad (5.11)$$

Demostración:

⇒) Sea w solución de (5.4). Entonces, por (5.8) y (5.9),

$$u(r) = a - \lambda \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s} \right)^{n-1} e^{u(t)} dt ds,$$

$$u(r(t)) = w(t) - 2t + a, \quad r(t) = ce^t, \quad c := \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}},$$

$$u(r) = w(t(r)) - 2t(r) + a = w\left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)\right) - 2\ln\left(\frac{r}{c}\right) + a.$$

Entonces, haciendo los cambios de variable

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\frac{\tau}{c}\right), & \tau &= ce^y, & d\tau &= ce^y dy, \\ x &= \ln\left(\frac{s}{c}\right), & s &= ce^x, & ds &= ce^x dx, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} v(t) &= (w(t) - 2t + a) - a = u(r(t)) - a \\ &= -\lambda \int_0^{r(t)} \int_0^s \left(\frac{\tau}{s} \right)^{n-1} e^{u(\tau)} d\tau ds \\ &= -e^a \lambda \int_0^{ce^t} \int_0^s \left(\frac{\tau}{s} \right)^{n-1} e^{w(\ln(\frac{\tau}{c})) - 2\ln(\frac{\tau}{c})} d\tau ds \\ &= -e^a \lambda \int_0^{ce^t} \int_{-\infty}^{\ln(\frac{s}{c})} \left(\frac{ce^y}{s} \right)^{n-1} e^{w(y) - 2y} ce^y dy ds \\ &= -e^a \lambda c \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^x \left(\frac{ce^y}{ce^x} \right)^{n-1} e^{w(y) - y} ce^x dy dx \\ &= -e^a \lambda c^2 \int_{-\infty}^t e^{-x(n-2)} \int_{-\infty}^x e^{w(y) - y + yn - y} dy dx \\ &= -e^a \lambda \frac{2(n-2)}{\lambda e^a} \int_{-\infty}^t e^{-x(n-2)} \int_{-\infty}^x e^{w(y) - 2y + yn} dy dx \\ &= -2(n-2) \int_{-\infty}^t e^{-(n-2)x} \int_{-\infty}^x e^{v(y) + yn} dy dx. \end{aligned}$$

\Leftrightarrow) Veamos que w es solución de (5.4); para ello, derivamos,

$$v'(t) = -2(n-2)e^{-(n-2)t} \left(\int_{-\infty}^t e^{n\sigma+v(\sigma)} d\sigma \right).$$

$$v''(t) = -2(n-2)e^{2t+v(t)} + 2e^{-(n-2)t}(n-2)^2 \left(\int_{-\infty}^t e^{n\sigma+v(\sigma)} d\sigma \right).$$

Finalmente, para ver que w es solución de v , sustituimos en (5.4), notando que $w(t) = v(t)+2t$ y que

$$w'(t) = v'(t) + 2, \quad w''(t) = v''(t).$$

Así, sustituyendo en (5.4),

$$\begin{aligned} & w''(t) + (n-2)w'(t) + (n-2)(2e^{w(t)} - 2) \\ &= v''(t) + (n-2)(v'(t) + 2) + 2(n-2)(e^{v(t)+2t} - 1) \\ &= v''(t) + (n-2)v'(t) + 2(n-2)e^{v(t)+2t} \\ &= v''(t) - 2(n-2)^2 e^{-(n-2)t} \left(\int_{-\infty}^t e^{n\sigma+v(\sigma)} d\sigma \right) + 2(n-2)e^{v(t)+2t} = 0. \end{aligned}$$

□

Lema 5.5 *Existe una única solución de (5.4) definida en el intervalo máximo $(-\infty, \infty)$.*

Demostración:

Es una consecuencia directa del Lema 5.3. □

A continuación enunciaremos una definición que nos servirá para hablar del Teorema de Grobman Hartman.

Definición 5.6 (Equivalencia topológica) *Decimos que dos flujos ϕ y ψ son topológicamente equivalente si existe un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$ que manda órbitas de ψ a órbitas de ϕ homeomorfamente y preserva la orientación de órbitas. En otras palabras, sea \mathcal{O} una órbita, una tiene*

$$h(\mathcal{O}(y, \psi)) = \{h \circ \psi(y, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\phi(h(y), t) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{O}(h(y), \phi) \quad (5.12)$$

para cada $y \in Y$. Además, debemos alinear el flujo del tiempo: para cada $y \in Y$, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |s| < t < \delta$ y si s es tal que $\phi(h(y), s) = h \circ \psi(y, t)$, entonces $s > 0$.

Para ver más información respecto a este concepto y otros similares, consultar [15]

Apesar de que el problema de Gelfand es no lineal, utilizaremos el siguiente Teorema para ver que es equivalente a su versión lineal topológicamente para poder analizarlo localmente. Posteriormente, haremos un análisis global.

Teorema 5.7 (Hartman-Grobman) Sea $\dot{x} = v(x)$, $v(x) = A(x) + \tilde{v}(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$, donde $\tilde{v}(x) = O(\|x\|^2)$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son las raíces del polinomio característico de A y satisfacen que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, $Re(\lambda_j) \neq 0$, entonces

$$\dot{x} = v(x) \sim \dot{x} = A(x),$$

es decir, son topológicamente equivalentes. La prueba puede consultarse en [6].

Tomando en cuenta (5.4), definimos $w' = z$, entonces $z' = -(n-2)z(t) - (n-2)(2e^{w(t)} - 2) = -(n-2)(z(t) + 2(e^{w(t)} - 1))$, obtenemos la matriz asociada,

$$\begin{pmatrix} w' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -(n-2)(z + 2(e^w - 1)) \end{pmatrix} = F(w, z)$$

linealizamos el sistema,

$$\begin{pmatrix} w' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(n-2)e^w & -(n-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix},$$

observamos que el $(0, 0)$ es el único punto estacionario. Entonces, evaluando la matriz en el $(0, 0)$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} w' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Ahora, definimos la órbita \mathcal{O} como

$$\mathcal{O} = \{(w, w') = (w(t), w'(t)) : t \in \mathbb{R}\},$$

donde w es solución de (5.4).

En el Lema 5.8 estudiaremos el campo vectorial definido por la matriz (5.13). A continuación vamos a estudiar las soluciones de la parte lineal de la ecuación, y aplicando el Teorema 5.7 podremos obtener información sobre las soluciones de la ecuación no lineal con condiciones iniciales suficientemente cercanas al origen. Finalmente, en el lema 5.10, tomamos una solución particular, que será \mathcal{O} y nos dedicaremos a analizar su comportamiento.

Lema 5.8 Para $n \in \{3, \dots, 9\}$, la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$, donde A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) \end{pmatrix}.$$

Entonces el origen es un foco atractor globalmente estable.

Demostración:

Los valores propios asociados están dados por

$$\det(A - \mu I) = \det \begin{pmatrix} 0 - \mu & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) - \mu \end{pmatrix} = \mu^2 + \mu(n-2) + 2n - 4,$$

así,

$$\begin{aligned} \mu &:= \left(\frac{-(n-2) \pm \sqrt{(n-2)^2 - 4[2n-4]}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - n \pm \sqrt{n^2 - 12n + 20} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - n \pm i\sqrt{(n-2)(10-n)} \right), \end{aligned}$$

denotemos por μ al valor asociado al signo $+$ y por $\bar{\mu}$ el valor asociado al signo $-$ para $n \in \{3, \dots, 9\}$.

Notemos que los coeficientes de A son reales, y ahora consideremos $A = A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, que es la complejificación de la matriz A , para simplificar la notación, a partir de este momento no pondremos que nuestras matrices se encuentran en \mathbb{C} , pero hay que tenerlo presente y denotemos a esta transformación como $A_{\mathbb{C}}$. Como ya tenemos los valores propios μ y $\bar{\mu}$, tenemos sus respectivos sus vectores propios asociados tal que

$$Af = \mu f,$$

conjugando la ecuación,

$$\overline{Af} = \bar{\mu} \bar{f},$$

que es igual a

$$A\bar{f} = \bar{\mu} \bar{f}.$$

Como los valores propios son μ y $\bar{\mu}$ son distintos, entonces tendrán asociados los vectores propios f y \bar{f} , respectivamente, que además son linealmente independientes, podemos construir una matriz

$$P = (f \quad \bar{f}),$$

además, esta matriz es invertible, pues su determinante no es cero, entonces si consideramos a la matriz A y le anteponeamos la matriz P , observamos que

$$\begin{aligned} APe_1 &= Af \\ APe_2 &= A\bar{f}, \end{aligned}$$

donde e_1 y e_2 son los vectores canónicos; como $Af = \mu f$ y $A\bar{f} = \bar{\mu}\bar{f}$, entonces $APe_1 = \mu f$ y $APe_2 = \bar{\mu}\bar{f}$; es decir, si formamos la matriz con los vectores e_1, e_2 (colocados en forma de columna), y la matriz con los vectores f y \bar{f} (colocados también en forma de columna), obtenemos

$$AP(e_1, e_2) = (\mu f, \bar{\mu}\bar{f}).$$

Si regresamos la expresión obtenida a una expresión dada en función de los vectores canónicos e_j , basta observar que

$$\begin{aligned} P^{-1}f &= e_1, \\ P^{-1}\bar{f} &= e_2 \end{aligned}$$

así,

$$P^{-1}AP(e_1, e_2) = P^{-1}(\mu f, \bar{\mu}\bar{f}) = (\mu e_1, \bar{\mu}e_2),$$

donde la última expresión es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

hemos obtenido la relación

$$\Lambda = P^{-1}AP, \quad (5.15)$$

donde Λ es la matriz dada por (5.14). Ahora encontraremos las soluciones de la ecuación dada la matriz diagonal, una vez que conozcamos las soluciones de esta expresión, regresaremos a la ecuación original para dar sus soluciones. Consideramos la transformación lineal

$$y = Qx, \quad (5.16)$$

con Q una matriz con coeficientes constantes, derivamos y obtenemos $\dot{y} = Q\dot{x}$, sustituimos el valor de \dot{x} y obtenemos

$$\dot{y} = QAx,$$

aplicamos Q^{-1} a (5.16) y nos queda $x = Q^{-1}y$, por lo tanto,

$$\dot{y} = QAx = QAQ^{-1}y,$$

que es una matriz diagonal, de la ecuación (5.15), se sigue que definiendo $Q = P^{-1}$, obtenemos el resultado que deseamos, $\dot{y} = \Lambda y$, que se ve de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

las soluciones de (5.17) son $y(t, k) = (e^{\mu t} k_1, e^{\bar{\mu} t} k_2)$, con $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$.

Así, las soluciones de la ecuación $\dot{x} = Ax$ que satisfacen que $x(0) = k$ ($k \in \mathbb{C}$) son

$$x(t, k) = Py(t, k) = \begin{pmatrix} f & \bar{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mu t} k_1 \\ e^{\bar{\mu} t} k_2 \end{pmatrix} = e^{\mu t} k_1 f + e^{\bar{\mu} t} k_2 \bar{f},$$

recordando que por (5.16), tenemos que $x = Py$. Ahora resolveremos la ecuación original $\dot{x} = Ax$ considerando primero a aquellas soluciones tales que $x(t, k) \in \mathbb{R}^2$ para todo t ; es decir, aquellas tales que $x(t, k) = \overline{x(t, \bar{k})}$, así,

$$x(t, k) = k_1 e^{\mu t} f + k_2 e^{\bar{\mu} t} \bar{f} = \overline{k_1 e^{\mu t} f} + \overline{k_2 e^{\bar{\mu} t} \bar{f}}$$

entonces $k_1 e^{\mu t} f + k_2 e^{\bar{\mu} t} \bar{f} - \overline{k_1 e^{\mu t} f} - \overline{k_2 e^{\bar{\mu} t} \bar{f}} = 0$ y por lo tanto $(k_1 - \overline{k_2}) e^{\mu t} f + (k_2 - \overline{k_1}) e^{\bar{\mu} t} \bar{f} = 0$. Como queremos que se satisfaga para todo t , en particular, para $t = 0$, tenemos que $k_1 = \overline{k_2}$ y $k_2 = \overline{k_1}$.

Así, $x_{\mathbb{C}}(t, k) = k_1 e^{\mu t} f + \overline{k_1} e^{\bar{\mu} t} \bar{f} = 2Re(k_1 e^{\mu t} f)$.

Sean $f = u + iv \in \mathbb{C}^2$ donde $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mu = a + ib$, $e^{\mu t} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$, $k_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, entonces,

$$\begin{aligned} x(t, c) &= 2Re(e^{\mu t} k_1 f) = 2Re(k_1 e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))(u + iv)) \\ &= 2Re(k_1 e^{at}(\cos(bt)u - \sin(bt)v) + i(\cos(bt)v + \sin(bt)u)) \\ &= 2\alpha e^{at}(\cos(bt)u - \sin(bt)v) - 2\beta e^{at}(\cos(bt)v + \sin(bt)u) \\ &= -(2\alpha e^{at} \sin(bt) - e^{at} 2\beta \cos(bt))v + (2\alpha e^{at} \cos(bt) - e^{at} 2\beta \sin(bt))u \\ &= 2e^{at} \begin{pmatrix} v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \sin(bt) - \beta \cos(bt) \\ \alpha \cos(bt) - \beta \sin(bt) \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} v & u \end{pmatrix} e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dado que $a = 2 - n < 0$ y $b = (n - 2)(10 - n) > 0$, entonces el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un foco atractor globalmente estable. \square

Observación 5.9 *La estabilidad de la solución radica en el signo de (3.3), si $\lambda_1 > 0$ en el sentido de Lyapunov. Para saber más al respecto, ver [5, section 10.4]*

Lema 5.10 *Sea w una solución de (5.4). La órbita \mathcal{O} está contenida en $\{(w, w') : w' < 2\}$, y hace una espiral del tipo foco atractor por el único punto estacionario $(0, 0)$.*

Demostración:

Por (5.4), la órbita \mathcal{O} es asintótica a la línea $w' = 2$ en $t = -\infty$ en el plano fase (w, w') . Consideramos las siguientes cuatro regiones en el plano

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) > 0\}, \\ \Omega_2 &= \{w' < 0, w' + 2(e^w - 1) > 0\}, \\ \Omega_3 &= \{w' < 0, w' + 2(e^w - 1) < 0\}, \\ \Omega_4 &= \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) < 0\}. \end{aligned}$$

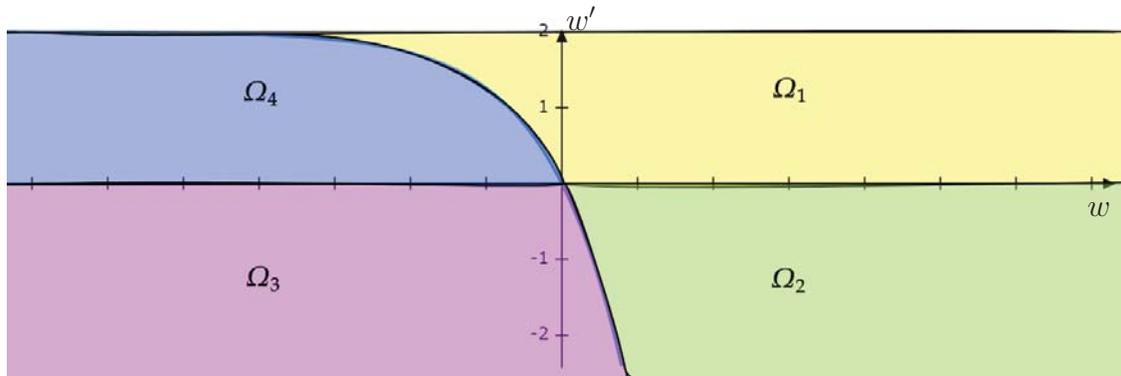


Figura 5.1: Representación de las Ω_i .

Ahora probaremos que la órbita \mathcal{O} está contenida en el medio plano $\{(w, w') : w' < 2\}$, y que, empezando en Ω_1 , \mathcal{O} entra a Ω_2 , luego a Ω_3 , después a Ω_4 , y regresa a Ω_1 , haciendo una espiral en esta forma tendiendo al único punto estacionario $(0, 0)$.

Sea u como en (5.9). Entonces, por (5.8),

$$r^{-1}u'(r) = -r\lambda \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{n-1} e^{u(t)} dt.$$

Observamos que, como $u'(r) < 0$ para $r > 0$ y $w'(t) = u'(r)r + 2$ (ver ecuación (5.10)), entonces \mathcal{O} se encuentra en $\{(w, w') : w' < 2\}$.

Haciendo el cambio de variable $\tau = \frac{t}{r}$ ($dt = d\tau r$), usando el teorema de convergencia dominada y notando que $\int \tau^{n-1} = \frac{\tau^n}{n}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1}u'(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} -\lambda \int_0^1 \tau^{n-1} e^{u(r\tau)} d\tau \\ &= -\lambda \int_0^1 \lim_{r \rightarrow 0} \tau^{n-1} e^{u(r\tau)} d\tau \\ &= -\lambda \int_0^1 \tau^{n-1} \lim_{r \rightarrow 0} e^{u(r\tau)} d\tau \\ &= -\lambda e^{u(0)} \int_0^1 \tau^{n-1} d\tau = -\frac{\lambda e^a}{n}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Además,

$$r = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t \implies e^{2t-a} = r^2 \frac{\lambda}{2(n-2)}. \tag{5.19}$$

Para ver que \mathcal{O} empieza en Ω_1 y usando (5.3), (5.18) y (5.19), calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} r^{-2}(w'(t) + 2(e^{w(t)} - 1)) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-2}(ru'(r) + 2e^{u(r)+2t-a}) \\ &= \lambda e^a \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Además, por (5.10),

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} w'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} u'(r(t))r(t) + 2 = 2 > 0,$$

ya que $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ por (5.9). Por lo tanto, \mathcal{O} empieza en Ω_1 .

Veamos que la órbita no puede escapar a infinito en Ω_1 . Por contradicción, supongamos que $\mathcal{O} \subset \Omega_1$ y que existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $w(t_n) \rightarrow \infty$, entonces, por (5.4),

$$w''(t_n) = -(n-2)w'(t_n) - (n-2)(2e^{w(t_n)} - 2) \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Además, como $w' > 0$ en Ω_1 , tenemos que w es creciente y por lo tanto $w(t_n) < w(t_n + 1)$; en particular, podemos suponer que $w'' < -3$ en $(t_{n_0}, t_{n_0} + 1)$ para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$, pero eso contradice la cota $0 < w' < 2$ en Ω_1 ya que

$$w'(t_{n_0} + 1) - w'(t_{n_0}) = \int_{t_{n_0}}^{t_{n_0}+1} w''(t) dt < -3$$

y entonces $w'(t_{n_0} + 1) < -3 + w'(t_{n_0}) < -3 + 2 = -1$. Por lo tanto $\mathcal{O} \cap \Omega_1 \cap \{w > M\}$ es vacío para M lo suficientemente grande. Por otro lado, (5.4) puede ser escrita en esta región como

$$\frac{w''}{w'} = -\frac{n-2}{w'}(w' + 2(e^w - 1)) < 0 \quad \text{en } \Omega_1. \quad (5.20)$$

De (5.20), deducimos que \mathcal{O} va hacia la derecha y hacia abajo en Ω_1 . En efecto, si $\gamma(t) := (w(t), w'(t))$ es la gráfica de la órbita, entonces $\gamma'(t) = (w'(t), w''(t))$ es el vector tangente a la órbita en el punto $\gamma(t)$; como $w'(t) > 0$ y $w''(t) < 0$, tenemos que el vector tangente apunta hacia la derecha y hacia abajo. Entonces, ya sea que \mathcal{O} permanece en Ω_1 , u \mathcal{O} deja Ω_1 en algún tiempo t_1 . Si el primer caso ocurre, $(w(t), w'(t))$ permanece en Ω_1 y converge al único punto estacionario $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Pero esto queda descartado porque $(0, 0)$ es un una espiral atractora por el Lemma 5.8. Entonces, \mathcal{O} deja Ω_1 en algún momento t_1 donde $w'(t_1) = 0$ y $e^{w(t_1)} \geq 0$. De hecho, $e^{w(t_1)} - 1 > 0$. De lo contrario, se seguiría de la unicidad de la EDO de segundo orden (5.4) con condiciones iniciales $w(t_1) = w'(t_1) = 0$ que $w \equiv 0$. Por lo tanto, \mathcal{O} debe entrar en Ω_2 en t_1 .

En Ω_2 , como $w' < 0$, entonces w es decreciente y así, argumentando como antes, notamos que,

$$\frac{w''}{w'} = -\frac{n-2}{w'}(w' + 2(e^w - 1)) > 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (5.21)$$

De (5.21), deducimos que \mathcal{O} va hacia la izquierda y hacia abajo en Ω_2 . En efecto, si $\gamma(t) := (w(t), w'(t))$ es la gráfica de la órbita, entonces $\gamma'(t) = (w'(t), w''(t))$ es el vector tangente a la órbita en el punto $\gamma(t)$; como $w'(t) < 0$ y $w''(t) < 0$, tenemos que el vector tangente apunta hacia la izquierda y hacia abajo. Entonces, ya sea que \mathcal{O} permanece en Ω_2 , u \mathcal{O} deja Ω_2 en algún tiempo t_2 . Si el primer caso ocurre, $\gamma(t)$ permanece en Ω_2 y converge al único punto estacionario $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Pero esto queda descartado porque $(0, 0)$ es un una espiral atractora por el Lemma 5.8. Entonces, \mathcal{O} deja Ω_2 en algún momento t_2 . Por lo tanto, \mathcal{O} debe entrar en Ω_3 en t_2 .

En Ω_3 , como $w' < 0$, entonces w es decreciente y entonces

$$\frac{w''}{w'} = -\frac{n-2}{w'}(w' + 2(e^w - 1)) < 0 \quad \text{en } \Omega_3. \quad (5.22)$$

Entonces $w'' > 0$ en Ω_3 . De (5.22), deducimos que \mathcal{O} va hacia la izquierda y hacia arriba en Ω_3 . Entonces, ya sea que \mathcal{O} permanece en Ω_3 , u \mathcal{O} deja Ω_3 en algún tiempo t_3 . Si el primer caso ocurre, $(w(t), w'(t))$ permanece en Ω_3 y converge al único punto estacionario $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Pero esto queda descartado porque $(0, 0)$ es un una espiral atractora por el Lemma 5.8. Entonces, \mathcal{O} deja Ω_3 en algún momento t_3 . Por lo tanto, \mathcal{O} debe entrar en Ω_4 en t_3 .

En Ω_4 , como $w' > 0$, entonces w es creciente y entonces

$$\frac{w''}{w'} = -\frac{n-2}{w'}(w' + 2(e^w - 1)) > 0 \quad \text{en } \Omega_4. \quad (5.23)$$

De (5.23), deducimos que \mathcal{O} va hacia la derecha y hacia arriba en Ω_4 . Análogamente a como hemos argumentado hasta ahora, podemos concluir que la solución forma una espiral que converge a $(0, 0)$. Ejemplificamos en la Figura 5.2, haciendo notar los vectores tangente en cada una de las regiones. \square

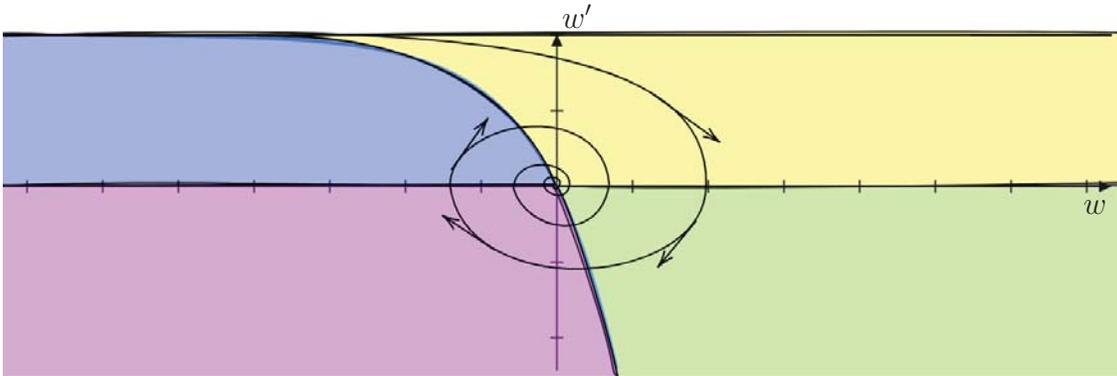


Figura 5.2: Plano fase de \mathcal{O} en el (w, w') -plano.

Usaremos a la solución w y al Lema 5.3 para construir múltiples soluciones de (5.1). Notemos que, si

$$u(r) = w(t) - 2t + a, \quad r = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t,$$

entonces la condición de frontera $u(1) = 0$ implica que

$$w(\tau) - 2\tau + a = u(1) = 0.$$

para algún τ tal que

$$\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^\tau = 1. \quad (5.24)$$

Entonces

$$\begin{aligned} w(\tau) &= 2 \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(n-2)}} \right) - a \\ &= 2 \ln(\sqrt{\lambda}) + 2 \ln(\sqrt{e^a}) - 2 \ln(\sqrt{2(n-2)}) - a \\ &= \ln(\lambda) + \ln(e^a) - \ln(2(n-2)) - a \\ &= \ln \frac{\lambda}{2(n-2)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ahora demostraremos algunos lemas auxiliares.

Lema 5.11 *Sea τ que satisface (5.25), entonces existe una solución u del problema de Gelfand con condición inicial*

$$u(0) = a := \ln \left(\frac{2(n-2)e^{2\tau}}{\lambda} \right).$$

Demostración:

Sea w la solución dada por el Lema 5.5 y sea $\tau \in \mathbb{R}$ tal que (5.25) se cumple. Definamos

$$a := \ln \left(\frac{2(n-2)e^{2\tau}}{\lambda} \right).$$

y

$$u(r) := w(t) - 2t + a, \quad \text{donde } r = r(t) = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t.$$

En particular, $r \rightarrow 0^+$ si $t \rightarrow -\infty$ y como $\lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) - 2t = 0$ tenemos que $u(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} u(r) = \lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) - 2t + a = a$. Como τ satisface (5.25), tenemos que $u(1) = 0$. Finalmente, por el Lema 5.3, concluimos que u es solución de (5.1). \square

Lema 5.12 *Si τ_1 y τ_2 son dos valores distintos que satisfacen (5.25), entonces obtenemos dos valores diferentes de a_1 y a_2 y dos soluciones diferentes del problema (5.1).*

Demostración:

Por los Lemas 5.5 y 5.11, tenemos dos soluciones u_1 y u_2 , que satisfacen $u_1(0) = a_1$ y $u_2(0) = a_2$ y por el Lema 4.3, estas deben ser soluciones diferentes. \square

Lema 5.13 *Dado $k \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\lambda - 2(n - 2)| < \delta$ entonces hay τ_1, \dots, τ_k distintos que satisfacen (5.25). Además, si $\lambda = 2(n - 2)$ entonces hay una sucesión infinita de valores distintos $(\tau_i)_{i=1}^\infty$ que satisfacen (5.25).*

Demostración:

Si $\lambda = 2(n - 2)$ y τ es tal que (5.25) se cumple, entonces $w(\tau) = 0$. Por lo tanto, siempre que la órbita \mathcal{O} cruce por el eje vertical $L := \{(w, w') = (0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ vamos a tener uno de esos τ_i . Como la órbita hace una espiral hacia el origen por el Lema 5.8, la órbita \mathcal{O} cruza el eje L una infinidad de veces (ver Figura 5.1). Por lo tanto, existen $\tau_1 < \dots < \tau_i < \dots$ tales que $w'(\tau_2) < \dots < w'(\tau_{2i}) < 0 < w'(\tau_{2i-1}) < \dots < w'(\tau_1)$. Si $\lambda \approx 2(n - 2)$, entonces $w(\tau) = c$, con c pequeño, y vamos a tener un τ cada vez que la órbita \mathcal{O} cruce la línea $\{(c, t) : t \in \mathbb{R}\}$ (ver Figura 5.3). \square

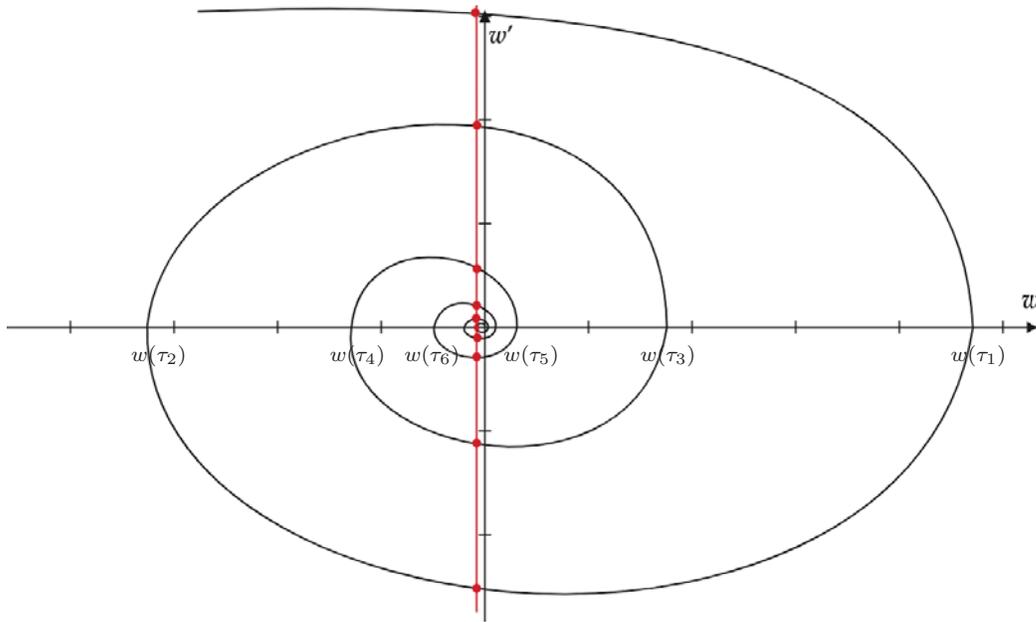


Figura 5.3: Conforme movemos la línea $\{(c, t) : t \in \mathbb{R}\}$, vamos variando la cantidad de valores de $w(\tau)$.

Ahora, veamos el teorema principal de la sección.

Teorema 5.14 *Sea $3 \leq n \leq 9$. Entonces existe $\lambda^* > 2(n - 2)$ tal que*

1. Para $0 < \lambda < \lambda^*$, $\lambda \neq 2(n - 2)$, existe una cantidad finita de soluciones radiales $u \in C^2(\bar{B})$ de (5.1).

2. Dada cualquier $k \in \mathbb{N}$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $|\lambda - 2(n - 2)| < \varepsilon$, existen al menos k soluciones.
3. Para $\lambda = 2(n - 2)$, existe una infinidad de soluciones.
4. Para $\lambda = \lambda^*$, existe una única solución.
5. Para $\lambda > \lambda^*$, no existen soluciones.

Demostración:

Los puntos 1, 2, y 3 se siguen de los Lemas 5.11, 5.12 y 5.13.

Si $\lambda = \lambda^*$, entonces a la recta $\{(c, t) : t \in \mathbb{R}\}$ se encuentra en el valor de $w(\tau_1)$, tal como en el Lema 5.13, que es el el único punto en donde no tenemos multiplicidad de soluciones. Para ver que no hay soluciones para $\lambda > \lambda^*$, notamos que no hay ningún valor en la órbita más allá de $w(\tau_1)$, y además, este valor no es infinito, pues por el Lema 5.10, en Ω_1 vimos que la órbita no se escapa a infinito.

□

Observación 5.15 Cabe recalcar que el valor de λ^* cambia para las distintas dimensiones. Para $n = 3$, $\lambda^* = 3,32$, y para las demás dimensiones sabemos que $\lambda^* > 2(n - 2)$.

Soluciones positivas

Ahora veremos la demostración del teorema principal de la sección para soluciones positivas.

Demostración del Teorema 1.7 : Por el Teorema 4.10, toda solución positiva es radialmente simétrica, el resto de la demostración se sigue por el Teorema 5.14. □

Podemos ver el diagrama de bifurcación para el problema de Gelfand en los casos $3 \leq n \leq 9$ en la Figura 1.3.

Capítulo 6

El problema de Gelfand para $n \geq 10$

En dimensiones $n \geq 10$, la ecuación (1.1) es

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda e^{u(x)}, & \text{en } B, \\ u(x) &= 0, & \text{sobre } B. \end{aligned} \tag{6.1}$$

En este capítulo caracterizaremos el conjunto de soluciones de (6.1), estudiaremos sus propiedades de estabilidad y demostraremos el resultado principal con el Teorema 6.8.

Soluciones radiales

Lema 6.1 *Recordando que la versión radial del problema de Gelfand es*

$$-u'' - \frac{n-1}{r}u' = \lambda e^u \quad \text{en } (0, \infty), \quad u(0) = a, \quad u'(0) = 0, \tag{6.2}$$

donde existe una solución para cada $a > 0$. Además, la ecuación (6.2) es equivalente a la EDO autónoma

$$w''(t) + (n-2)w'(t) + (n-2)(2e^{w(t)} - 2) = 0 \quad \text{para } t \in (-\infty, \infty), \tag{6.3}$$

donde

$$u(r) = w(t) - 2t + a, \quad r = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t.$$

Demostración:

Dado que no ponemos condiciones sobre n , es la misma demostración a la de Lema 5.3 \square

Para el siguiente Lema, debemos recordar la ecuación integral de (6.2),

$$u(r) = a - \lambda \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} e^{u(t)} dt ds, \tag{6.4}$$

la transformación de Emden,

$$u(r) = w(t) - 2t + a, \quad r = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t, \quad (6.5)$$

la primera derivada de la transformación de Emden,

$$u'(r) = w'(t) \frac{d}{dr} t(r) - 2 \frac{d}{dr} t(r) = w'(t) r^{-1} - 2r^{-1}, \quad w'(t) = u'(r) r + 2, \quad (6.6)$$

y recordamos las regiones que definimos en el Lema 5.10,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) > 0\}, \\ \Omega_2 &= \{w' < 0, w' + 2(e^w - 1) > 0\}, \\ \Omega_3 &= \{w' < 0, w' + 2(e^w - 1) < 0\}, \\ \Omega_4 &= \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) < 0\}. \end{aligned}$$

Lema 6.2 *Sea w una solución de (6.3). La órbita $\mathcal{O} = \{(w, w') = (w(t), w'(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ empieza en Ω_1 y está contenida en el medio plano $\{(w, w') : w' < 2\}$.*

Demostración:

Ahora probaremos que la órbita \mathcal{O} está contenida en $\{(w, w') : w' < 2\}$.

Sea u como en (6.5). Entonces, por (6.4),

$$r^{-1} u'(r) = -r \lambda \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{n-1} e^{u(t)} dt.$$

Observamos que, como $u'(r) < 0$ para $r > 0$ y $w'(t) = u'(r)r + 2$ (ver ecuación (6.6)), entonces \mathcal{O} se encuentra en $\{(w, w') : w' < 2\}$.

Haciendo el cambio de variable $\tau = \frac{t}{r}$ ($dt = d\tau r$), usando el teorema de convergencia dominada y notando que $\int \tau^{n-1} = \frac{\tau^n}{n}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} u'(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} -\lambda \int_0^1 \tau^{n-1} e^{u(r\tau)} d\tau \\ &= -\lambda \int_0^1 \lim_{r \rightarrow 0} \tau^{n-1} e^{u(r\tau)} d\tau \\ &= -\lambda \int_0^1 \tau^{n-1} \lim_{r \rightarrow 0} e^{u(r\tau)} d\tau \\ &= -\lambda e^{u(0)} \int_0^1 \tau^{n-1} d\tau = -\frac{\lambda e^a}{n}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Además,

$$r = \sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^t \implies e^{2t-a} = r^2 \frac{\lambda}{2(n-2)}. \quad (6.8)$$

Para ver que \mathcal{O} empieza en Ω_1 y usando (6.2), (6.7) y (6.8), calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} r^{-2}(w'(t) + 2(e^{w(t)} - 1)) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-2}(ru'(r) + 2e^{u(r)+2t-a}) \\ &= \lambda e^a \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Además, por (6.6),

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} w'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} u'(r(t))r(t) + 2 = 2 > 0,$$

ya que $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ por (6.5). Por lo tanto, \mathcal{O} empieza en Ω_1 .

Además, la ecuación (6.3) en Ω_1 se puede reescribir como:

$$\frac{w''}{w'} = -\frac{n-2}{w'}(w' + 2(e^w - 1)) < 0 \quad \text{en } \Omega_1. \quad (6.9)$$

□

Usando (6.5), vemos que $u(1) = 0$ implica que

$$w(\tau) - 2\tau + a = u(1) = 0.$$

para algún τ tal que

$$\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^\tau = 1,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} w(\tau) &= 2 \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(n-2)}} \right) - a \\ &= 2 \ln(\sqrt{\lambda}) + 2 \ln(\sqrt{e^a}) - 2 \ln(\sqrt{2(n-2)}) - a \\ &= \ln(\lambda) + \ln(e^a) - \ln(2(n-2)) - a \\ &= \ln \frac{\lambda}{2(n-2)}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

tenemos el siguiente Lema.

Lema 6.3 *Sea τ que satisface (6.10), entonces existe una solución u del problema de Gelfand tal que*

$$u(0) = a := \ln \left(\frac{2(n-2)e^{2\tau}}{\lambda} \right).$$

Demostración:

La demostración es análoga a la del Lema 5.11. □

Lema 6.4 *Si τ_1 y τ_2 son dos valores distintos que satisfacen (6.10), entonces obtenemos dos valores diferentes de a_1 y a_2 y dos soluciones diferentes del problema (6.1).*

Demostración:

La demostración es análoga a la del Lema 5.12 □

Lema 6.5 *Sea $n \geq 10$, consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$, donde A está dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) \end{pmatrix}.$$

Entonces el origen es un punto de equilibrio estable.

Demostración:

Sea $\dot{x} = Ax$, donde A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) \end{pmatrix},$$

obteniendo los valores propios,

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left(2 - n \pm \sqrt{(n-2)(n-10)} \right) \quad \text{para } n \geq 10,$$

obteniendo los vectores propios, primero el vector f_1 asociado a μ_+ ,

$$(A - \mu_+ I) f_1 = 0,$$

así,

$$\begin{pmatrix} -\mu_+ & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) - \mu_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolviendo el sistema, notamos que

$$f_{11} = 1 \quad \text{y} \quad f_{12} = \mu_+,$$

de manera análoga, obtenemos el vector propio f_2 asociado a μ_- ,

$$(A - \mu_- I) f_2 = 0,$$

así,

$$\begin{pmatrix} -\mu_- & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) - \mu_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolviendo el sistema, notamos que

$$f_{21} = 1 \quad \text{y} \quad f_{22} = \mu_-,$$

Una vez calculados los vectores propios, la matriz P está dada por

$$P = (f_1 \quad f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_+ & \mu_- \end{pmatrix},$$

además, esta matriz es invertible, pues su determinante no es cero, entonces si consideramos a la matriz A y le antepoemos la matriz P , observamos que

$$\begin{aligned} APe_1 &= Af_1 \\ APe_2 &= Af_2, \end{aligned}$$

donde e_1 y e_2 son los vectores canónicos; como $Af_1 = \mu_+f_1$ y $Af_2 = \mu_-f_2$, entonces $APe_1 = \mu_+f_1$ y $APe_2 = \mu_-f_2$; es decir, si formamos la matriz con los vectores e_1, e_2 (colocados en forma de columna), y la matriz con los vectores f_1 y f_2 (colocados también en forma de columna), obtenemos

$$AP(e_1, e_2) = (\mu_+f_1, \mu_-f_2).$$

Si regresamos la expresión obtenida a una expresión dada en función de los vectores canónicos e_j , basta observar que

$$\begin{aligned} P^{-1}f_1 &= e_1, \\ P^{-1}f_2 &= e_2 \end{aligned}$$

así,

$$P^{-1}AP(e_1, e_2) = P^{-1}(\mu_+f_1, \mu_-f_2) = (\mu_+e_1, \mu_-e_2),$$

donde la última expresión es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \mu_+ & 0 \\ 0 & \mu_- \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

hemos obtenido la relación

$$\Lambda = P^{-1}AP, \tag{6.12}$$

donde Λ es la matriz dada por (6.11). Ahora encontraremos las soluciones de la ecuación dada la matriz diagonal, una vez que conozcamos las soluciones de esta expresión, regresaremos a la ecuación original para dar sus soluciones. Consideramos la transformación lineal

$$y = Qx, \tag{6.13}$$

con Q una matriz con coeficientes constantes, derivamos y obtenemos $\dot{y} = Q\dot{x}$, sustituimos el valor de \dot{x} y obtenemos

$$\dot{y} = QAx,$$

aplicamos Q^{-1} a (6.13) y nos queda $x = Q^{-1}y$, por lo tanto,

$$\dot{y} = QAx = QAQ^{-1}y,$$

que es una matriz diagonal, de la ecuación (6.12), se sigue que definiendo $Q = P^{-1}$, obtenemos el resultado que deseamos, $\dot{y} = \Lambda y$, que se ve de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_+ & 0 \\ 0 & \mu_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

las soluciones de esta ecuación son $(y_1(t), y_2(t)) = (c_1 e^{\mu_+ t}, c_2 e^{\mu_- t})$. Como nos interesan las soluciones del sistema original, hacemos uso del cambio de coordenadas $x = Py$. Así,

$$x(t) = Py(t) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\mu_+ t} \\ c_2 e^{\mu_- t} \end{pmatrix},$$

recordando que por (6.13), tenemos que $x = Py$. Entonces, las soluciones de la ecuación $\dot{x} = Ax$ son

$$\varphi_A(t, c) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mu_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\mu_- t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\mu_+ t} c_1 f_1 + e^{\mu_- t} c_2 f_2,$$

mediante un cálculo sencillo, podemos notar que $\mu_{\pm} < 0$ y por lo tanto toda solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ tiende al origen cuando t tiende a infinito. Para entender el comportamiento de las soluciones en estas coordenadas, basta observar que, puesto que f_1 y f_2 son los vectores propios correspondientes a los valores propios μ_+ y μ_- respectivamente, la dinámica de contracción se da en estas direcciones. \square

Lema 6.6 *Sea w una solución de (6.1). La órbita $\mathcal{O} = \{(w, w') = (w(t), w'(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ converge hacia el único punto estacionario $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ y además está acotada por la recta $y = -mx$.*

Demostración:

Por el Lema 6.2, la órbita empieza en Ω_1 . Notemos que en esta región, los vectores tangentes a la órbita apuntan hacia la derecha y hacia abajo. Encontraremos que la órbita se queda en la región Ω_1 y nunca cruza a la recta $y = -mx$, con $m > 0$ dado por (6.16). La órbita no puede cruzar a Ω_4 , pues el campo vectorial lo impide porque en Ω_4 , los vectores tangente van hacia la derecha y hacia arriba; entonces, probaremos que $\mathcal{O} = (w(t), w'(t)) \rightarrow (0, 0)$. Supongamos que la órbita cruza a la recta $-mx$; es decir, $\frac{w''}{w'} > -m$; por contradicción, supongamos

que existe τ^* tal que $\mathcal{O} = (w(\tau^*), w'(\tau)) = (w(\tau), -mw(\tau^*))$; es decir, $w'(\tau^*) = -mw(\tau^*)$, además,

$$\frac{w''(\tau^*)}{w'(\tau^*)} > -m,$$

por la ecuación (6.9), recordamos la expresión para esta fórmula evaluada en τ^*

$$\begin{aligned} -\frac{n-2}{w'(\tau^*)}(w'(\tau^*) + 2(e^{w(\tau^*)} - 1)) &= -(n-2) \left(1 + 2\frac{e^{w(\tau^*)} - 1}{w'(\tau^*)} \right) \\ &= -(n-2) \left(1 - \frac{2}{m} \left(\frac{e^{w(\tau^*)} - 1}{w(\tau^*)} \right) \right) > -m, \end{aligned}$$

es decir,

$$m > (n-2) \left(1 - \frac{2}{m} \left(\frac{e^{w(\tau^*)} - 1}{w(\tau^*)} \right) \right). \quad (6.14)$$

Como $-mw(\tau^*) \in (0, 2)$ en Ω_1 , entonces $w(\tau^*) \in (-\frac{2}{m}, 0)$. Sea $a \in (-\frac{2}{m}, 0)$, entonces, afirmamos que

$$(n-2) \left(1 - \frac{2}{m} \left(\frac{e^a - 1}{a} \right) \right) \geq m \quad (6.15)$$

es decir,

$$-2(n-2) \left(\frac{e^a - 1}{a} \right) \geq (m - (n-2))m$$

entonces

$$\frac{e^a - 1}{a} \leq \frac{(n-2) - m}{2(n-2)}m.$$

Notemos que, si (6.15) se cumpliera, entonces llegaríamos a una contradicción con (6.14), pues no puede ocurrir que $m > m$. Demostremos pues que (6.15) se cumple. Primero, notemos que

$$\sup_{a \in (-\frac{2}{m}, 0)} \left(\frac{e^a - 1}{a} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^a - 1}{a} \right) = \frac{d}{da} e^a \Big|_{a=0} = e^0 = 1.$$

Entonces,

$$(n-2) \left(1 - \frac{2}{m} \left(\frac{e^a - 1}{a} \right) \right) \geq (n-2) \left(1 - \frac{2}{m} \right).$$

Luego, si

$$m := \frac{1}{2}(n - 2 + \sqrt{(n - 10)(n - 2)}) > 0 \quad (6.16)$$

obtenemos que

$$2(n - 2) = (n - 2)m - m^2$$

y (6.15) se sigue.

Así, la órbita se queda en la región Ω_1 y nunca supera a la recta $y = -mx$. Finalmente, notamos que a pesar de que estamos trabajando con un campo vectorial, sólo estamos tomando una solución particular; dicho esto, notamos que tenemos las siguientes condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} w'(t) &= 2 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} w'(t) + 2(e^{w(t)} - 1) &> 0. \end{aligned}$$

□

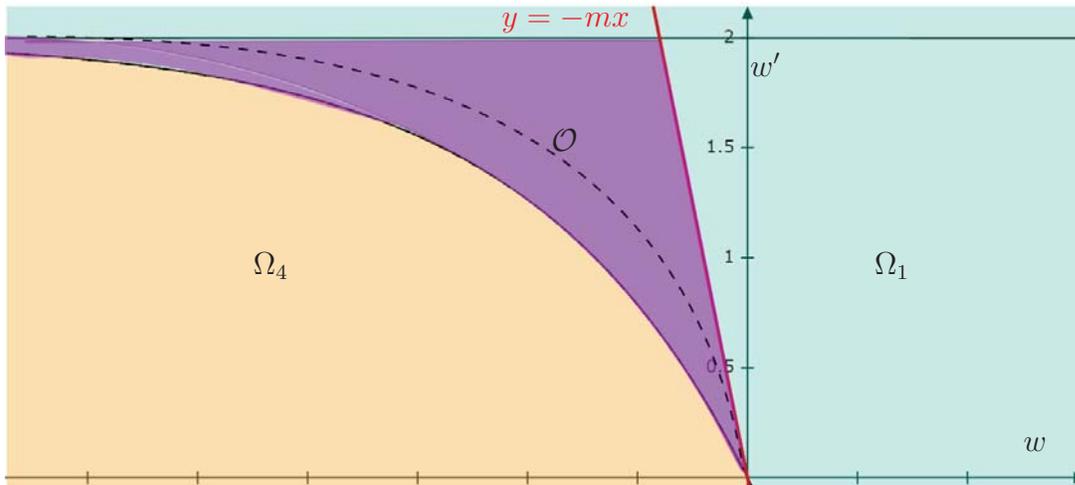


Figura 6.1: Plano fase de \mathcal{O} en el (w, w') -plano.

Observación 6.7 Sea $\lambda \in (0, 2(n - 2))$ y sea $c := \ln(\frac{\lambda}{2(n-2)}) < 0$. Consideremos a la recta $\{(c, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Esta recta interseca a la órbita \mathcal{O} en un único punto $(w(\tau), w'(\tau)) = (c, w'(\tau))$ para algún $\tau \in \mathbb{R}$. Por lo tanto (6.10) se cumple y, por el Lema 6.1, obtenemos una solución al problema (6.1). Ver la Figura 6.2

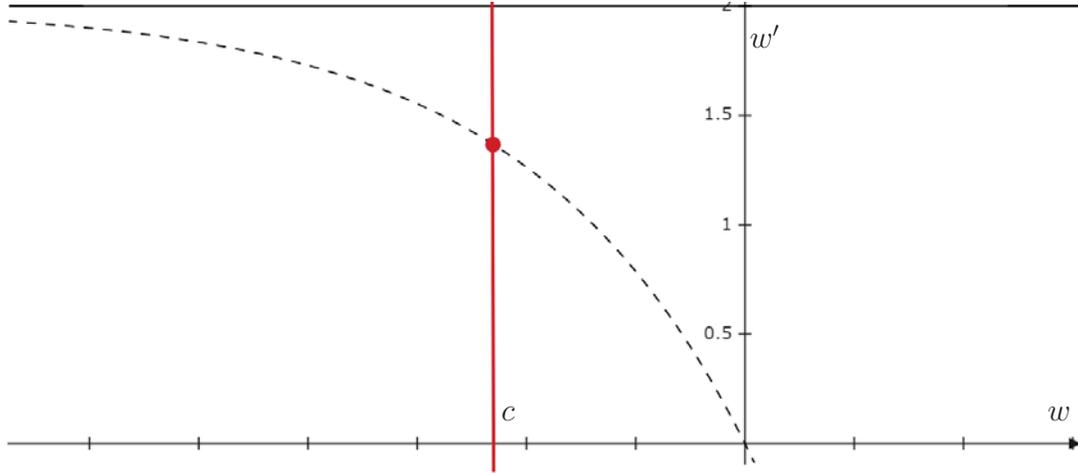


Figura 6.2: Conforme variamos el parámetro $c < 0$ movemos la línea $\{(c, t) : t \in \mathbb{R}\}$ y obtenemos un único punto de intersección con la órbita \mathcal{O} . Por la Observación 6.7 obtenemos una única solución en estos casos.

Teorema 6.8 *Sea $n \geq 10$ y $\lambda^* = 2(n - 2)$, la ecuación (6.1) tiene una única solución $u \in C^2(\bar{B})$ radial y positiva (que es estable) para $0 < \lambda < \lambda^*$ y ninguna solución radial positiva para $\lambda > \lambda^*$.*

Demostración:

La unicidad la tenemos por el Lema 4.3. La existencia de la solución la tenemos argumentando como en los Lemas, 6.3, 6.4 y la Observación 6.7.

Para ver que la solución es estable, usaremos el Teorema 1.4 con la subsolución $u_1 \equiv 0$ ($-\Delta u_1 = 0 < \lambda e^0 = \lambda$) y la supersolución $u_2 \equiv u$. Entonces el Teorema 1.4 implica que u es la única solución estable. \square

Podemos ver el diagrama de bifurcación para el problema de Gelfand en los casos $n \geq 10$ en la Figura 1.4.

Lema 6.9 *La solución u_λ converge puntualmente a $\ln \frac{1}{|x|^2}$ cuando $\lambda \rightarrow \lambda^*$.*

Demostración:

Por (6.10), cuando $\lambda \rightarrow 2(n - 2)$ tenemos que $w(\tau_\lambda) \rightarrow 0$. Como $(0, 0)$ es un equilibrio estable necesariamente $\tau_\lambda \rightarrow \infty$. Notemos que por (6.5),

$$u(r) = w(t) - 2t + a, \tag{6.17}$$

recordando que

$$a := \ln \left(\frac{2(n - 2)e^{2\tau}}{\lambda} \right)$$

y

$$t = \ln \left(\frac{r}{\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}}} \right) = \ln(r) - \ln \left(\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} \right)$$

llegamos a que (6.17) es equivalente a

$$\begin{aligned} u(r) &= w(t) - 2 \left(\ln(r) - \ln \left(\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} \right) \right) + \ln \left(\frac{2(n-2)e^{2\tau}}{\lambda} \right) \\ &= w(t) - 2 \ln(r) + 2 \ln \left(\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} \sqrt{\frac{2(n-2)e^{2\tau}}{\lambda}} \right) \end{aligned}$$

además, notando que en la condición de frontera $u(1) = 0$, tenemos que

$$\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} e^\tau = 1,$$

así,

$$t = \ln(r) - \ln(e^{-\tau})$$

Entonces, si $\lambda \rightarrow 2(n-2)$ obtenemos que

$$t = \ln(r) - \ln(e^{-\tau}) \rightarrow +\infty.$$

Entonces, como $w(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, y $\lambda \rightarrow 2(n-2)$

$$\begin{aligned} u_\lambda(r) &= w(t) - 2 \ln(r) + 2 \ln \left(\sqrt{\frac{2(n-2)}{\lambda e^a}} \sqrt{\frac{2(n-2)e^{2\tau}}{\lambda}} \right) \\ &\rightarrow \ln \left(\frac{1}{r^2} \right) + 2 \ln(1) = \ln \left(\frac{1}{r^2} \right) \end{aligned}$$

□

Observación 6.10 *Notamos que la función $\ln \frac{1}{|x|^2}$, además, es solución si $\lambda = 2(n-2)$, pues,*

$$-u'' - \frac{n-1}{r}u' = -\frac{2}{x^2} + \frac{2n-1}{x} \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2} + \frac{2n-2}{x^2} = \frac{2(n-2)}{x^2} = \lambda \frac{1}{x^2} = \lambda e^{\ln \frac{1}{|x|^2}} = \lambda e^u.$$

Soluciones positivas

Ahora veremos la demostración del teorema principal de la sección para soluciones positivas.

Demostración del Teorema 1.8 : Por el Teorema 4.10, toda solución positiva es radialmente simétrica, el resto de la demostración se sigue por el Teorema 6.8. □

Apéndice A

$C_c^1(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$

En este apéndice demostraremos que si $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, como este conjunto es denso en $H_0^1(\Omega)$, podemos tomar $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ en (3.2)

Definición A.1 Sea $p \in [1, n)$. Definimos el exponente crítico de Sobolev por

$$p^* := \frac{np}{n-p}$$

y notemos que se cumplen

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad p^* > p.$$

Corolario A.2 (Desigualdad de Poincaré) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Entonces existe una constante positiva $C = C(N, p, q, \Omega)$ tal que

$$\|u\|_q \leq C \|Du\|_p,$$

si se cumple alguna de las siguientes tres condiciones:

1. $p \in [1, n)$ y $q \in [1, p^*]$.
2. $p = n$ y $q \in [1, \infty)$.
3. $p \in (n, \infty)$ y $q \in [1, \infty]$.

En consecuencia, $W_0^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con inyección continua para cada $q \in [1, p^*]$. Para más información, ver [7].

Lema A.3 Si $\varphi_n \rightarrow \psi$ en $L^2(\Omega)$ entonces existe $F \in L^1(\Omega)$ y una subsucesión de $\tilde{\varphi}$ tal que

$$|\tilde{\varphi}| \leq F, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para más información, ver [17]

Consideramos $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, recordando que

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}_{\|\cdot\|} \quad \text{con} \quad \|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y considerando $u \in H_0^1(\Omega)$ existe $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - u\| = 0;$$

es decir, $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$.

Por la Definición 3.2, sabemos que, si u es estable,

$$0 \leq Q_u(\varphi) = \int_{\Omega} |\varphi'|^2 - \lambda e^u \varphi^2 dx \quad \forall \varphi \in C_c^2(\Omega),$$

en particular, $Q_u(\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^2(\Omega)$.

Consideremos $\psi \in H_0^1(\Omega)$, por densidad, sabemos que existe $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|\varphi_n - \psi\| \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$; como $Q_u(\varphi_n) \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pues $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$. Tenemos que

$$Q_u(\varphi_n) = \int_{\Omega} |\varphi_n'|^2 - \lambda e^u \varphi_n dx.$$

Sabemos que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \psi\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi_n' - \psi'|^2 dx$$

Queremos demostrar que $Q_u(\psi) \geq 0$ para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$, tomamos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n'|^2 - \lambda e^u \varphi_n^2 dx \geq 0 \tag{A.1}$$

queremos ver (A.1)

$$\int_{\Omega} |\psi'|^2 - \lambda e^u \psi^2 dx \tag{A.2}$$

es igual a (A.2). Probemos que las respectivas integrales convergen, veamos la primera, probemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n' - \psi'|^2 dx = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |\varphi_n'|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |\psi'|^2 dx.$$

Consideramos la norma

$$\|\varphi_n - \psi\| \rightarrow 0$$

y queremos ver que

$$\|\varphi_n\| \rightarrow \|\psi\|.$$

Sumando un 0 y por desigualdad del triángulo,

$$\|\varphi_n\| = \|\varphi_n + \psi - \psi\| \leq \|\varphi_n - \psi\| + \|\psi\| \rightarrow \|\psi\|,$$

así, hemos demostrado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\| \leq \|\psi\|$$

Para ver la otra desigualdad,

$$\|\psi\| = \|\psi - \varphi_n + \varphi_n\| \leq \|\psi - \varphi_n\| + \|\varphi_n\|$$

así,

$$\|\psi\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|.$$

Por lo tanto,

$$\|\psi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\int |\psi'|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n'|^2.$$

Ahora veremos como aproximar la otra integral de las ecuaciones (A.1) y (A.2), para demostrar que

$$\int_{\Omega} \lambda e^u \varphi_n^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \lambda e^u \psi^2 dx$$

usamos el Corolario A.2, es decir;

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega);$$

es decir,

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |u'|^2 dx.$$

Así, sabemos que $\|\varphi_n - \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\varphi_n - \psi\| \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$, así, tenemos convergencia en $L^2(\Omega)$, por lo tanto,

$$\int_{\Omega} \varphi_n^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi^2 dx$$

y esto ocurre cuando $\varphi_n \rightarrow \psi$ casi donde sea en Ω , usando el Teorema 2.16,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx$$

si

$$|f_n| \leq F \in L^1(\Omega)$$

y no depende de n , entonces, pasando a una subsucesión, podemos encontrar el mayorante por el Lema A.3,

$$|\lambda e^u \varphi_n| \leq \|\lambda e^u\|_{L^\infty(\Omega)} |\varphi|^2 \leq \|\lambda e^u\|_{\infty} F.$$

Por el Teorema 2.16,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \lambda e^u \varphi_n^2 dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda e^u \varphi_n^2 dx = \int_{\Omega} \lambda e^u \psi dx,$$

y la última igualdad la tenemos por convergencia puntual. Es decir,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Q_u(\varphi_n) = Q_u(\psi).$$

Por lo tanto, hemos probado que (A.1) y (A.2) son iguales.

Bibliografía

- [1] M. Al-Mazmumy, A. Al-Mutairi y K. Al-Zahrani, An Efficient Decomposition Method for Solving Bratu's Boundary Value Problem. *American Journal of Computational Mathematics*. 7, 2017.
- [2] J. Bebernes y D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*, vol. 83, Applied Mathematical Sciences, Nueva York: Springer-Verlag, 1989.
- [3] H. Berestycki y L. Rossi, On the principal eigenvalue of elliptic operators in \mathbb{R}^n and applications, *EHESS, CAMS*, 54, París.
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Nueva York: Springer, 2011.
- [5] T. Cazenave y A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolutions Equations*: Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [6] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Texts in Applied Mathematics 34, Nueva York: Springer, 1999.
- [7] M. Clapp, *Análisis Matemático*, México: Papirhos, 2017.
- [8] L. Dupaigne, *Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*, vol 143, CHAPMAN HALL/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Estados Unidos de América: CRC Press, 2011.
- [9] L. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19, Graduate Studies in Mathematics, Providence: American Mathematical Society, 1998.
- [10] D. A. Frank-Kamenetskii, *Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics*, Princeton: Princeton University Press, 1955.
- [11] B. Gidas, W. M. Ni y L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* 68, no. 3, 209–243, 1979.
- [12] C. Grant, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Notas de curso en la Universidad Brigham Young, Utah, 2008. Consultable en <https://www.math.utah.edu/~treiberg/GrantTodes2008.pdf>

- [13] K. Nagasaki y T. Suzuki, Radial and nonradial solutions for the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annuli in \mathbb{R}^2 , *Journal of differential equations.* 87, 144-168, 1990.
- [14] K. Nagasaki y T. Suzuki, Spectral and related properties about the Emden-Fowler equation $-\Delta u = \lambda e^u$ on circular domains, *Math. Ann.* 299, no. 1, 1–15, 1994.
- [15] C. Romero, Linealización topológica de flujos holomorfos en el dominio de Poincaré, México: CIMAT 2021.
- [16] S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation for the one-dimensional Liouville type equation. *Journal of Differential Equations.* 263, 2016.
- [17] M. Willem, *Functional analysis*, Nueva York: Springer, 2013.
- [18] M. Zarebnia, y M. Sajjadian, Convergence of the Sinc-Galerkin Method for the Bratu Equation. *Chiang Mai Journal of Science.* 41. 714-723, 2014.