



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

CÁLCULO E IMPLEMENTACIÓN DE GANANCIAS DE CONTROLADORES
HOMOGÉNEOS DE ALTO ORDEN MEDIANTE FUNCIONES DE LYAPUNOV DE
CONTROL EN MATLAB

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
MATIAS IGLESIAS RIOS

TUTOR PRINCIPAL
DR. LEONID FRIDMAN
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., MAYO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Presidente: Dr. Jesús Álvarez Calderón
Secretario: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez
Vocal: Dr. Leonid Fridman
1^{er} suplente: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl
2^{do} suplente: Dr. Jorge Ángel Dávila Montoya

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

Ciudad de México.

Director de tesis

Dr. Leonid Fridman

Dedicatoria

Quiero dedicar esta tesis a mis padres Vicente y Marciana porque ellos han dado razón a mi vida, por sus consejos, su apoyo incondicional y su paciencia, todo lo que soy es gracias a ellos.

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme abierto las puertas para estudiar la maestría, así como también a los diferentes profesores que brindaron sus conocimientos y su apoyo para seguir adelante día a día.

A mis profesores, el Dr. Leonid Fridman, el Dr. Jaime Moreno y el Dr. Hoover Mujica, por la paciencia, la confianza, la amistad, así como por la dedicación y gran compromiso para la realización de esta tesis.

Al M.I Ulises Pérez por haberme guiado en base a su experiencia y sabiduría.

A mis compañeros tesisistas y a todos los miembros del Laboratorio de modos deslizantes con los que compartí gratos momentos durante estos meses.

A toda mi familia por estar siempre a mi lado, dándome ejemplos de superación, humildad y sacrificio, enseñándome a valorar todo lo que tengo. En especial a mi hermana Esmeralda, por siempre creer en mí y por todo el apoyo que me ha brindado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología(CONACYT) por el apoyo económico para la realización de mis estudios de maestría.

A todos ellos dedico el presente trabajo, porque han formado en mí, el deseo de superación y de triunfo en la vida. Espero contar siempre con su apoyo.

Resumen

La mayoría de controladores basados en modos deslizantes presentan condiciones teóricas que garantizan la estabilidad del sistema en lazo cerrado; sin embargo, la gran mayoría de las ganancias existentes fueron obtenidas por simulación. Además de no satisfacer las condiciones teóricas antes mencionadas. Por esta razón es de suma importancia el desarrollo de algoritmos que permitan la obtención y el diseño de ganancias para controladores basados en modos deslizantes, en particular para los de alto orden, ya que estos últimos son los algoritmos más actuales y presentan estructuras complejas y un mayor número de ganancias, las cuales depende directamente del orden del controlador. Esto dificulta la sintonización puesto que es sumamente difícil determinar el impacto en el desempeño que tiene cada una de las ganancias.

En este trabajo se presenta un algoritmo para la obtención de juegos de ganancias para la familia de controladores discontinuos anidados. El algoritmo se basa en una función de Lyapunov de control, el cual determina las condiciones para el valor de cada una de las ganancias del controlador, siendo la última ganancia la que está directamente relacionada con las cotas de las perturbaciones e incertidumbres. De esta manera el algoritmo para la obtención de juegos de ganancias se puede resumir en tres pasos. El primero paso concierne a establecer el valor del vector de pesos, los grados de homogeneidad de las funciones r -homogéneas que conforma a la función de Lyapunov propuesta, así como establecer el valor de la primera ganancia, la cual, para controladores de segundo y mayor orden basta con que sea real positiva. El segundo paso consiste en determinar el máximo de una función objetivo, dicha función se obtiene de las condiciones de estabilidad que dicta la función de Lyapunov. Obtener el valor máximo nos permita obtener como tercer paso el límite inferior del conjunto de valores para la ganancia que estabilizan el sistema en lazo cerrado. Estos dos últimos pasos son iterativos puesto que el valor de la ganancia actual depende del valor de las ganancias anteriores, debido a la estructura recursiva de la función de Lyapunov de control. Por lo tanto el proceso se realiza el número de veces necesario hasta llegar al orden n del controlador.

Existen dos tipos de funciones objetivo. La primera forma se obtiene de las condiciones para que la función propuesta sea una función de Lyapunov de control. Esta función se utiliza para la mayoría de las ganancias exceptuando la última, la cual tiene una forma general diferente y además se agregan las cotas de las perturbaciones. Esta función se obtiene de la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema y de asegurar que sea negativa definida.

Finalmente se implementó el algoritmo en MATLAB/Simulink con la finalidad de sistematizar la obtención de juegos de ganancias, así como proporcionar ejemplos de las ganancias obtenidas y de los resultados en el desempeño de los sistemas en lazo cerrado. Si bien el algoritmo no proporciona criterios para la selección de ganancias en cada paso iterativo, y fija el valor de la ganancia en un valor arbitrario. Este algoritmo podría usarse en algún trabajo futuro para obtener una mayor gama de opciones a elegir. Las ganancias propuestas se limitan a controladores igual o menores a tercer orden.

Índice general

Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xv
Acrónimos	xvii
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Formulación del problema	3
1.3.1. Problema estándar de control por HOSM	3
1.3.2. Función de Lyapunov de control	4
1.3.2.1. CLF para HOSMC	4
1.3.3. Ganancias del controlador	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo principal	6
1.4.2. Objetivos específicos	6
1.5. Contribuciones	6
1.6. Organización de la tesis	7
2. Marco Teórico	9
2.1. Preliminares	9
2.2. Homogeneidad	10
2.2.1. Homogeneidad estandar	10
2.2.2. Homogeneidad ponderada	11
2.3. Optimización sin restricciones	11
2.4. Controladores de alto orden por modos deslizantes	14
2.4.1. Grado relativo	15
2.4.2. Control discontinuo anidado	15
2.4.3. Control cuasicontinuo	15
3. Cálculo de ganancias para controladores discontinuos homogéneos de grado cero	17
3.1. Controlador de primer orden	17
3.1.1. Implementación en MATLAB	18
3.2. Controlador de segundo orden	20
3.2.1. Algoritmo para la obtención de ganancias para controladores de segundo orden	23
3.2.2. Implementación en MATLAB/Simulink	23
3.3. Controladores de alto orden	31
3.3.1. Controlador de tercer orden	34
3.3.1.1. Implementación en MATLAB/Simulink	37

4. Conclusiones	43
4.0.1. Trabajo a futuro	43
Apéndice A. Código	45
A.1. Código para la obtención de la función a maximizar	45
A.2. Cálculo de ganancias para el controlador de segundo orden	46
A.3. Cálculo de ganancias para el controlador de tercer orden	47
A.4. Programa de Simulink	49
Referencias	51

Índice de figuras

2.1. Corchetes signados	10
2.2. Dilatación	11
2.3. Máximo y mínimo de una función	13
2.4. Punto silla	14
3.1. Simulación del controlador de primer orden	19
3.2. Simulación del controlador de primer orden con $\alpha_1 = 2$	19
3.3. Simulación del controlador de primer orden con $\alpha_1 = 10$	19
3.4. Puntos críticos	24
3.5. Máximo	25
3.6. Variación del \hat{k}_2 dependiendo del valor de k_1	26
3.7. Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 1.7798$, $m = 3$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	27
3.8. Controlador de segundo orden con $k_1 = 2$, $k_2 = 5.5114$, $m = 3$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	28
3.9. Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 2.8874$, $m = 5$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	29
3.10. Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 8.0237$, $m = 11$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	30
3.11. Máximo de la función objetivo $f_2(x_1, x_2, x_3, k_1, k_2)$	38
3.12. Máximo de $k_3(\bar{x}_3, k_1, k_2)$	39
3.13. Controlador de tercer orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 1.5373$, $k_3 = 4550.2$, $m = 5$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [3, 4, 5]$	40
3.14. Controlador de tercer orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 2.0126$, $k_3 = 1399.1$, $m = 7$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [3, 4, 5]$	41
3.15. Controlador de tercer orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 2.7757$, $k_3 = 4974.8$, $m = 9$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [3, 4, 5]$	42
A.1. Diagrama de bloques de Simulink	49
A.2. Controlador	50

Índice de tablas

3.1. Tabla de ganancias para controlador de segundo orden, donde $C = 0$ y $K_m = 1$	26
3.2. Tabla de ganancias para controlador de tercer orden, donde $C = 0$ y $K_m = 1$	35

Acrónimos

- SMC** Control por modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés).. 1, 2
- HOSMC** Control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC, por sus siglas en inglés). 1, 2, 44
- CLF** Función de Lyapunov de control (CLF, por sus siglas en inglés). 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 17, 18, 20, 23, 43
- HOSM** Modos deslizantes de alto orden (HOSM, por sus siglas en inglés). 1, 3, 6, 9, 14, 44
- STA** Algoritmo *Super Twisting* (STA, por sus siglas en inglés). 2, 3, 44
- PID** Proporcional Integral Derivativo. 2, 3
- SISO** Una entrada - una salida (SISO, por sus siglas en inglés). 3, 20
- DI** Inclusión diferencial (DI, por sus siglas en inglés). 4, 17, 20, 34
- GAS** Global y asintóticamente estable (GAS, por sus siglas en inglés). 5
- GFTS** Globalmente estable en tiempo finito (GFTS, por sus siglas en inglés). 5
- DIA** Control discontinuo con acción integral (DIA, por sus siglas en inglés). 43, 44

Capítulo 1

Introducción

El control por modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés) es una técnica de control robusto que nos permite lidiar con incertidumbres acotadas, así como perturbaciones externas [Cruz-Zavala y Moreno, 2017] [Fridman, 2003].

El controlador clásico de primer orden por modos deslizantes requiere de una salida tal que el sistema sea de grado relativo uno. La metodología de diseño del controlador clásico se puede describir en dos pasos; el primer paso consiste en diseñar una superficie de deslizamiento de primer orden, que reduce la dinámica en un grado. Como segundo paso se diseña una ley de control que lleva las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento. Este controlador tiene la limitación de que la salida a controlar debe ser de grado relativo uno, así como la desventaja de la aparición del fenómeno de *chattering* [Utkin, 1991].

Por otro lado, el control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC, por sus siglas en inglés) nos permite utilizar una variable de deslizamiento de grado relativo arbitrario [Shtessel, *et al.*, 2014], esto nos permite obtener leyes de control suaves y continuas sin comprometer la robustez del sistema ante la presencia de perturbaciones suaves y acotadas [Levant, 2003] [Levant, 2005] [Levant y Michael, 2009]. A pesar de romper la limitación del grado relativo así como aliviar el fenómeno de *chattering* mediante la obtención de leyes de control suaves y continuas, la dificultad para obtener las condiciones de estabilidad así como el cálculo de ganancias que aseguren la estabilidad del sistema incrementa bastante, por lo que es de suma importancia el desarrollo de algoritmos que brinden más opciones a la hora de la selección de ganancias de este tipo de controladores.

La metodología para la obtención de ganancias es utilizar una función de Lyapunov de control (CLF, por sus siglas en inglés) para HOSMC, en particular para controladores homogéneos [Rosier, 1992] [Bacciotti y Rosier, 2005] [Levant y Michael, 2009]. En este trabajo de tesis se pretende utilizar la función de Lyapunov de control propuesta en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017]. Ya que además de proporcionar una función de Lyapunov para dos familias de controladores, también caracteriza las ganancias del controlador. De esta manera se pretende obtener juegos de ganancias para el algoritmo de control discontinuo anidado.

1.1. Motivación

Los controladores por modos deslizantes de alto orden (HOSM, por sus siglas en inglés) tienen un amplio nicho de oportunidad para su aplicación en los procesos industriales, esto debido a la ventaja que de compensar perturbaciones e incertidumbres acopladas y acotadas. En la práctica siempre existe incertidumbre paramétrica en todo tipo de proceso o sistema, y puede agravarse con el paso del tiempo y el desgaste de los componentes, por ello lo recomendable es tener controladores robustos que sean capaces de compensar este fenómeno.

Una de las razones más importantes de la falta de aplicaciones en la industria de SMC, en especial los HOSMC, es la alta complejidad para ajustar y sintonizar de alguna manera las ganancias de dichos controladores, por esta razón se necesita de personal altamente capacitado y con bastante experiencia en este tipo de controladores, lo que resulta contraproducente para impulsar su uso.

Una forma de facilitar el diseño y sintonización de este tipo de controladores, es el desarrollo de algoritmos que permitan la obtención de ganancias que garanticen la estabilidad del sistema en lazo cerrado de una manera sencilla y rápida. Brindado al usuario una mayor gama de opciones a la hora de seleccionar las ganancias que le permitan obtener diferentes resultados de desempeño para su sistema.

La idea detrás de ésta tesis, es retomar la función de Lyapunov de control de [Cruz-Zavala y Moreno, 2017], así como su metodología para obtención de ganancias, para desarrollar un algoritmo que nos permita calcular juegos de ganancias para los controladores por modos deslizantes de alto orden homogéneos de grado cero.

1.2. Antecedentes

La historia y evolución del SMC se puede dividir en cinco generaciones [Fridman, *et al.*, 2015]. La primera generación corresponde al control clásico de primer orden mencionado anteriormente, la principal desventaja de este controlador es el fenómeno llamado *chattering*, el cual consiste en vibraciones de alta frecuencia. Este fenómeno es causado principalmente por dinámicas parásitas no modeladas que incrementan el grado relativo del sistema, por lo que es necesario no solo llevar a cero la variable de deslizamiento, si no también su derivada. Así es como se introducen los SMC de segundo orden. A partir de estos algoritmos y en adelante las soluciones del sistema se entienden en el sentido de A. Filippov [Filippov, 2013]. Algunos algoritmos de segundo orden son el *Twisting*, el subóptimo y el terminal [Emelyanov, 1986] [Bartolini, *et al.*, 1998] [Feng, *et al.*, 2002]. Las ventajas que ofrecen los SMC de segundo orden son la mejora en la precisión cuadrática de la convergencia de la variable de deslizamiento, la reducción del orden de la dinámica en dos; sin embargo para sistemas con grado relativo dos las leyes de control obtenidas son discontinuas, además de no reducir significativamente el *chattering*

La tercera generación consiste en el algoritmo *Super Twisting* (STA, por sus siglas en inglés) [Levant, 1993], que nos proporciona una ley de control continua para sistemas Lipschitz; sin embargo, para sistemas con grado relativo dos la convergencia de los estados al origen es asintótica. La cuarta generación consiste en el HOSMC [Levant, 2001] [Levant, 2003] que convergen el estado en tiempo finito así como permite compensar exactamente perturbaciones; sin embargo aun produce leyes de control discontinuas, por lo que esta muy presente el fenómeno de *chattering* [Levant, 2005] [Levant y Michael, 2009]. Finalmente la quinta generación contempla los HOSMC que proporcionan leyes de control continuas. En este trabajo de tesis se buscan juegos de ganancias para controladores de la cuarta generación en particular de la familia de controladores discontinuos anidados.

Sintonizar un controlador se refiere al proceso de ajustar el valor de las ganancias del controlador para obtener un desempeño deseado. Existen diversos métodos para la sintonización de controladores algunos basados en control por caja negra y otros basados en modelo.

Para el controlador lineal proporcional integral derivativo (PID) existe la metodología basada en caja negra conocida como el método de Ziegler-Nichols [Ziegler y Nichols, 1942], el cual consiste en primero llevar la respuesta del sistema a oscilar a una amplitud constante mediante el aumento de la ganancia proporcional, y luego ajustar las otras dos ganancias para obtener la respuesta deseada. Existen también metodologías basadas en modelo como las presentadas en [Åström, *et al.*, 2006]. En general el control PID cuenta con metodologías que les permiten sintonizar las ganancias para obtener desempeños deseados de manera sencilla y rápida, puesto solo se calculan tres ganancias y además se conoce como influye cada una de las ganancias en el desempeño del sistema, es decir, se sabe que la ganancia proporcional nos acerca al valor deseado, la ganancia in-

tegral elimina el error en testado permanente y la ganancia derivativa nos permite adelantarnos a cambio rápidos.

Por otro lado, la sintonizador de los controladores por HOSM es un proceso muy complicado, puesto que dependiendo del orden del controlador el numero de ganancias aumenta, así como la estructura del controlador es mas compleja y no es claro como es que influye cada una de las ganancias en la respuesta del sistema. Por ello hasta ahora la sintonización esta limitada a proporcionar ganancias que estabilicen el sistema y compensen perturbaciones acotadas.

En el trabajo [Pérez-Ventura y Fridman, 2019] se proponen ganancias para el STA que minimizan la amplitud del *chattering* provocado por dinámicas parásitas en estado permanente. La metodología se basa en una función descriptiva que nos permite predecir la amplitud y frecuencia del *chattering*, así como modelar la dinámica parásita del actuador ya sea como un sistema críticamente amortiguado o como un sistema con retraso, y a través de dar solución al balance armónico se predice la amplitud del *chattering*, de la cual obtenemos las ganancias optimas que minimizan la amplitud del *chattering* y también proporciona ganancias que minimizan la energía promedio.

Utilizando la misma metodología basada en la función descriptiva en [Pérez Ventura, *et al.*, 2021] se proponen ganancias para el controlador PID- *Like*, donde de igual forma se proporcionan ganancias optimas que minimizan la amplitud del *chattering* y el gasto energético, además se proporcionan ganancias subóptimas que obtienen parte de los beneficios de minimizar la amplitud del *chattering* y el gasto energético en estado permanente. A pesar de que esta metodología proporciona ganancias optimas que robustifican el sistema en estado permanente, la metodología consiste en obtener ganancias robusta y posteriormente corroborar que cumplen con las condiciones teóricas de estabilidad.

En [Cruz-Zavala y Moreno, 2017] se presenta una CLF para dos familias de controladores, el algoritmo de control discontinuo anidado y el control cuasicontiuno, se presentan las condiciones de estabilidad, además caracterizan las ganancias de controlador en términos del máximo de una función objetivo. Este trabajo pretende utilizar esta metodología para obtener juegos de ganancias para los controladores discontinuos anidados.

1.3. Formulación del problema

Bajo el contexto de la necesidad de facilitar el diseño y sintonización de los controladores por HOSM se pretende obtener juegos de ganancias mediante la CLF y la caracterización de las ganancias presentada en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017]. Para entender el problema del cálculo de ganancias, en primera instancia comenzaremos por plantear el problema de control por HOSM, así como la función de Lyapunov de control que se utilizará para obtener las condiciones de estabilidad del sistema en lazo cerrado, y posteriormente el limite inferior del conjunto de valores para cada una de las ganancias que estabilizan el sistema.

1.3.1. Problema estándar de control por HOSM

El problema estándar de control por HOSM consiste en diseñar un controlador para el sistema con una entrada y una salida (SISO, por sus siglas en inglés) afín a la entrada Σ_G en la forma normal.

$$\Sigma_G : \begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1}, & i = 1, \dots, \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho = f(t, z) + g(t, z)u \\ \sigma = h(t, z), & z \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $|f(t, z)| \leq C$ y $0 < K_m \leq g(t, z) \leq K_M$. El controlador debe llevar la salida a $\sigma(t) \equiv 0$ en un tiempo finito $t \geq T$.

Cuando el grado relativo es conocido y bien definido equivale a diseñar un controlador para la siguiente inclusión diferencial (DI, por sus siglas en inglés) Σ_{ID} .

$$\Sigma_{ID} : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, \rho - 1 \\ \dot{x}_\rho \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, \end{cases} \quad (1.2)$$

El sistema en su forma matricial se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{x} \in F(x) + g(x)\xi(x)u$$

1.3.2. Función de Lyapunov de control

Una CLF se puede considerar una generalización de las funciones de Lyapunov; sin embargo, las CLF toman en cuenta la ley de control, por lo que se podría entender como una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado [Sontag, 1989].

La condición para que exista una CLF $V(x)$ C^1 r -homogénea para el sistema anterior Σ_G , es la siguiente

$$L_{g(x)}V = 0 \Rightarrow \sup_{v \in F(x)} L_v V < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$$

1.3.2.1. CLF para HOSMC

Sea el número entero $\rho \geq 0$, así como $i = 1, \dots, \rho$ se define el vector

$$\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_\rho]^T \quad (1.3)$$

Además se define la siguiente secuencia decreciente positiva de números reales, donde r_i

$$\text{con, } r_i = r - (i - 1) \text{ para algun } r = r_1 \geq \rho, \quad (1.4)$$

así como la sucesión de números no decrecientes α_i

$$\alpha_\rho \geq \alpha_{\rho-1} \geq \dots \geq \alpha_1 \geq r_1 \quad (1.5)$$

Se definen también los pesos de las coordenadas como:

$$r = [r_1, \dots, r_\rho] = [r, r - 1, \dots, r_{\rho+1-\rho}] \quad (1.6)$$

$$m \geq r_i + \alpha_{i-1} \quad (1.7)$$

Con lo anterior definimos la CLF recursiva, donde para $i = 2, \dots, \rho$ tenemos,

$$V_i(\bar{x}_i) = \gamma_{i-1}V_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) + W_i(\bar{x}_i) \quad (1.8)$$

$$W_i(\bar{x}_i) = \frac{r_i}{m}|x_i|^{\frac{m}{r_i}} - [v_{i-1}]^{\frac{m-r_i}{r_i}} x_i + (1 - \frac{r_i}{m})|v_{i-1}|^{\frac{r_i}{m}} \quad (1.9)$$

$$v_i(\bar{x}_i) = -k_i [\sigma_i]^{\frac{r_i+1}{\alpha_i}} \quad (1.10)$$

$$\sigma_i(\bar{x}_i) = [x_i]_{r_i}^{\alpha_i} + k_{i-1}^{\frac{\alpha_i}{r_i}} [\sigma_{i-1}]_{\alpha_i-1}^{\frac{\alpha_i}{r_i}} \quad (1.11)$$

para el caso donde $i = 1$ las funciones quedan como:

$$V_1(x_1) = \frac{r}{m} |x_1|^{\frac{m}{r}} \quad (1.12)$$

$$v_1(x_1) = -k_1 [\sigma_1]_{\alpha_1}^{\frac{r_2}{\alpha_1}} = -k_1 [x_1]_{r_1}^{\frac{r_2}{\alpha_1}} \quad (1.13)$$

$$\sigma_1 = [x_1]_{r_1}^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \quad (1.14)$$

donde $\gamma_i > 0$, $k_i > 0$. σ_i es de grado homogénea α_i , v_i de grado r_{i+1} y V_i de grado m .

Otras funciones útiles para la resolución del problema de obtención de ganancias son:

$$s_i = x_i - v_{i-1}(\bar{x}_{i-1}), \quad s_1 = x_1, \quad (1.15)$$

$$s_{id} = [x_i]_{r_i}^{\frac{m-r_i}{r_i}} - [v_{i-1}]_{r_i}^{\frac{m-r_i}{r_i}}, \quad s_{1d} = [x_1]_{r_1}^{\frac{m-r_1}{r_1}} \quad (1.16)$$

Teorema: [Cruz-Zavala y Moreno, 2017] Si para el sistema existe una CLF, y que $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es r-homogénea de grado 0, tal que:

$$\varphi(x)L_{g(x)}V(x) > 0 \text{ cuando } L_{g(x)}V(x) \neq 0 \quad (1.17)$$

Entonces

$$u = -k\varphi \quad (1.18)$$

$$u_1 = -k\varphi_1(x) = -k[L_{g(x)}V(x)]^0 \quad (1.19)$$

$$u_2 = -k\varphi_2(x) = -k \frac{L_{g(x)}V(x)}{M(x)} \quad (1.20)$$

donde $M(x)$ es r-homogénea de grado $m + l$. EL sistema en lazo cerrado es global y asintóticamente estable (GAS, por sus siglas en inglés) en $x = 0 \forall k \geq k^* > 0$, y es globalmente estable en tiempo finito (GFTS, por sus siglas en inglés) si $l < 0$.

Con $r = \rho$

$$u_D = -k_\rho [\sigma_\rho(x)]^0, \quad u_Q = -k_\rho \frac{\sigma_\rho(x)}{M(x)}$$

$$u = -k_2 \left[[x_2]^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0$$

1.3.3. Ganancias del controlador

Utilizando las condiciones para que la CLF propuesta en efecto se a una CLF se obtiene la cota inferior de las primer $\rho - 1$ ganancias del controlador. Para $k_i, i = 2, \dots, \rho - 1$, con $k_1 > 0$

$$Z_i(\bar{x}_i) = \Phi_i(\bar{x}_i) - k_i s_{i,d} [\sigma_i]_{\alpha_i}^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}} < 0 \quad (1.21)$$

$$k_i > \max_{\bar{x}_i \in S_i} \left\{ \frac{\Phi_i(\bar{x}_i)}{s_{i,d} [\sigma_i(\bar{x}_i)]_{\alpha_i}^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}} \right\} := G_i(k_{i-1}) \quad (1.22)$$

Para calcular la ultima ganancias k_ρ , primero se obtiene la derivada de la CLF a lo largo de las trayectorias del sistema, esta condición de igual manera nos da el limite inferior del conjunto de valores que hacen que sea

definida negativa.

$$\dot{V} \leq \max L_{F(x)}V(x) - k\xi(x)L_{g(x)}V(x)\varphi(x) \quad (1.23)$$

$$\dot{V} \leq \max \left\{ \sum_{j=1}^{\rho-1} x_{j+1} \partial_{x_j} V_\rho \right\} + C|s_{\rho,d}(x)| - k_\rho K_m s_{\rho,d} \frac{s_{\rho,d}(x)}{|s_{\rho,d}(x)|} < 0 \quad (1.24)$$

$$k_\rho > \frac{1}{K_m} \left(\max_{x \in S_\rho} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} x_{j+1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|} \right\} + C \right) := G_i(k_{\rho-1}, C, K_m) \quad (1.25)$$

Podemos observar que para obtener cada una de las ganancias del controlador se debe encontrar en primera instancia el máximo de una función objetivo, además de ser un proceso iterativo empezando por fijar el valor de k_1 , el cual debe ser mayor a cero, y calcular el siguiente de manera iterativa hasta llegar al k_ρ , esta última ganancia es la que compensa la perturbación acotada.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo principal

Basado en el conocimiento de una función de Lyapunov de control y de la familia de controladores HOSM homogéneos de grado cero, obtener juegos de ganancias para el controlador discontinuo anidado, que cumplan con las condiciones teóricas de estabilidad que dictan la CLF.

1.4.2. Objetivos específicos

- Desarrollar un algoritmo que nos permita obtener ganancias a partir de la caracterización de ganancias presentada en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017], que consiste en una condición sobre el tamaño mínimo que deben tener las ganancias del controlador. Dicha caracterización depende del máximo de una función objetivo.
- Encontrar el valor máximo de funciones racionales, semicontinuas superiores homogéneas de grado cero.
- Implementar el algoritmo de cálculo de juegos de ganancias de manera numérica en Matlab.

1.5. Contribuciones

- Se encontraron las condiciones de estabilidad para casos específicos de sistemas de segundo y tercer orden utilizando la CLF propuesta en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017], es decir, las condiciones de estabilidad descritas en para que la función propuesta se una CLF para el sistema en lazo cerrado.
- Se obtuvieron juegos de ganancias para los controladores discontinuos anidados de segundo y tercer orden que cumplen las condiciones teóricas obtenidas de la CLF.
- Se desarrolló un algoritmo para el cálculo de juegos de ganancias para los controladores discontinuos anidados de segundo y tercer orden. El algoritmo tiene la propiedad de ser recursivo, puesto que es necesario fijar el valor de las ganancias anteriores para obtener la cota mínima de los posibles valores de la ganancia actual. En este trabajo se fija el valor 1.1 veces mas grande que la cota mínima; sin embargo, este valor es totalmente arbitrario puesto que no tiene el objetivo de mejorar en algún sentido el juego de ganancias, sólo cumple con las condiciones teóricas de estabilidad.
- Se implementó el algoritmo de obtención de juegos de ganancias para los controladores discontinuos anidados de segundo y tercer orden en Matlab.
- Se simuló el sistema en lazo cerrado en Simulink para determinar el comportamiento de los juegos de ganancias.

1.6. Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra dividido en cuatro capítulos, siendo el presente el que concierne a la introducción, motivación, planteamiento del problema, objetivos así como las contribuciones del trabajo de tesis. Los siguientes tres capítulos se describen a continuación:

En el **Capítulo 2** se presenta el marco teórico, es decir, las definiciones, teoremas y propiedades que se utilizaran para la resolución del problema de cálculo de ganancias de controladores homogéneos de grado cero, como lo son la homogeneidad, la optimización sin restricciones y la misma estructura de los controladores por modos deslizantes de alto orden, centrándonos en la familia de controladores discontinuos anidados.

En el **Capítulo 3** se presenta la resolución del problema de cálculo de ganancias para los controladores homogéneos de grado cero mediante la función de Lyapunov de control y con base en la caracterización de las ganancias del controladore presentada en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017]. La metodología consiste en encontrar las condiciones para que la propuesta de CLF sea en efecto una CLF, así como las condición de estabilidad del sistema. Este capítulo esta dividido por el orden del controlador que a su vez esta relacionado con el grado relativo del sistema y el tamaño de la cadena de integradores que conforman al sistema. Para cada uno de los controladores se muestran simulaciones de los juegos de ganancias obtenidos.

Finalmente en el **Capítulo 4** se presentan las conclusiones y el trabajo futuro. El código de MATLAB del algoritmo de obtención de ganancias para los controladores de primer hasta tercer orden esta presentado en el **Apéndice A**.

Capítulo 2

Marco Teórico

Este capítulo está dedicado a los temas preliminares que serán utilizados en el cálculo de ganancias para la familia de controladores homogéneos de grado cero. Comenzando por la notación que se utilizará para escribir la estructura del controlador controlador, así como la CLF y las funciones r-homogéneas que la conforman. Posteriormente la definición de homogeneidad, así como las bases teóricas para resolver el problema de optimización sin restricciones que será necesario para encontrar el límite inferior del conjunto de valores de las ganancias que estabilizan el sistema, de acuerdo a la CLF y la caracterización de las ganancias del controlador presentada en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017].

Finalmente se muestran las bases teóricas de los controladores basados en HOSM, planteando sus ventajas, desventajas y las formas de los controladores.

2.1. Preliminares

La función $sign(x)$ está definida a trazos de la siguiente forma:

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde podemos apreciar que no está definida en el origen, por lo que

$$sign(0) \in [-1, 1] \quad (2.2)$$

Los controladores basados en HOSM suelen tener estructuras con la función signo multiplicada por el valor absoluto elevado a cierta potencia; por lo que, se vuelven complicadas de leer, especialmente en la versión anidada. Como solución se propone la siguiente notación, la cual ya ha sido utilizada en diversos trabajos anteriores como en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017]. A esta notación la llamaremos corchetes signados, que se definen de la siguiente manera:

$$[x]^m = |x|^m sign(x) \quad (2.3)$$

donde

$$[x]^0 = sign(x) \quad (2.4)$$

en la Figura 2.1a se muestra la función signo, la cual claramente es discontinua en el origen, y también tenemos a 2.1b la cual es $y = [x]^{1/2}$ la cual es continua.

También definiremos la derivada del valor absoluto como la función signo de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}|x| = sign(x) \quad (2.5)$$

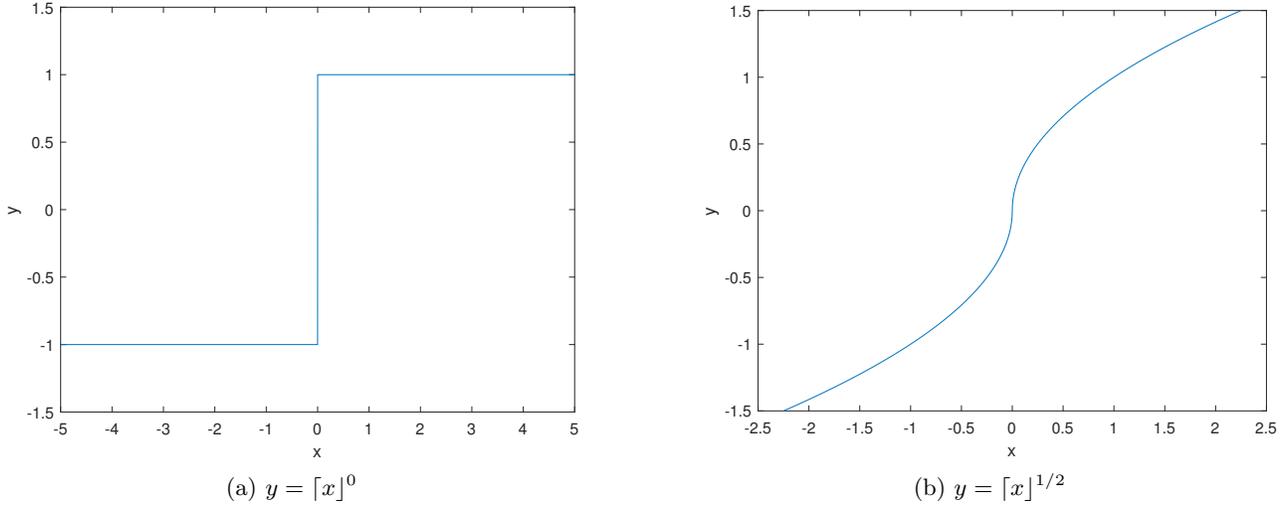


Figura 2.1 Corchetes signados

Algunas operaciones con corchetes signados que serán utilizadas son las siguientes:

$$[x]^m [x]^n = [x]^{m+n} \quad (2.6)$$

$$[x]^0 [x]^n = |x|^n \quad (2.7)$$

$$[x]^0 |x|^n = [x]^n \quad (2.8)$$

Las derivadas de los corchetes signados y del valor absoluto elevado a cierta potencia se definen como:

$$\frac{d}{dx} [x]^m = m|x|^{m-1} \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dx} |x|^m = m[x]^m \quad (2.10)$$

Estas operaciones son de suma importancia en la resolución del problema de obtención de ganancias ya que la estructura del controlador es mucho mas sencilla de leer y entender al utilizar esta notación.

2.2. Homogeneidad

La homogeneidad es una propiedad de invarianza que posee un objeto con respecto a una clase de transformaciones llamadas dilataciones. Todos los modelos lineales y alguno no lineales son homogéneos en algún sentido [Polyakov, 2020]. A diferencia de las transformaciones de rotación y traslación, donde se conserva el tamaño y la forma en el caso de la transformación de dilatación solo se conserva la forma, como se muestra en la Figura 2.2.

2.2.1. Homogeneidad estandar

Definición 1. Se dice que la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es homogéneo si existe un número $v \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\lambda x) = \lambda^v f(x), \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

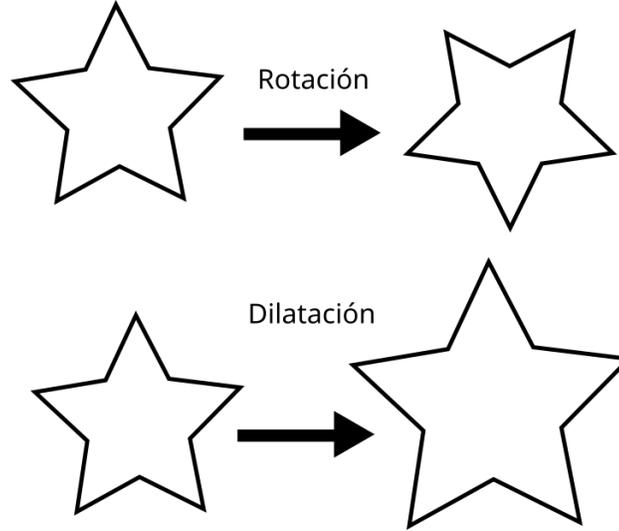


Figura 2.2 Dilatación

2.2.2. Homogeneidad ponderada

Definición 2. [Bacciotti y Rosier, 2005], [Bernuau, et al., 2014]. Dado un vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ y el operador de dilatación definido como:

$$\Delta_\varepsilon^r x := (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.12)$$

donde $r_i > 0$ son los pesos de las coordenadas y $r = [r_1, \dots, r_n]$ es el vector de pesos.

Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada r -homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ si la identidad 2.13 se cumple

$$V(\Delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^m V(x) \quad (2.13)$$

2.3. Optimización sin restricciones

Uno de los problemas más recurrentes para la aplicación del cálculo se trata del problema de optimización, el cual consiste en términos generales en encontrar el mínimo de una función. En nuestro caso el interés en este problema radica en encontrar el máximo de una función.

Para encontrar las ganancias de los controladores, como se ha mencionado anteriormente es necesario la obtención de los máximos de las funciones objetivo. En esta sección encontraremos definiciones y teoremas que nos ayudaran en la obtención de dichos puntos, estos conceptos están en varios libros de cálculo [Cánovas, et al., 2013] [Lipsman y Rosenberg, 2017] [Miklavcic, 2020], así como los enfocados solo en el problema de optimización [Lange, 2013] [Delfour, 2012].

En primera instancia definiremos el ínfimo y el supremo de una función, posteriormente el mínimo y máximo de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 3. [Delfour, 2012] Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $U \subset \mathbb{R}^n$

1. Asociado con f su dominio efectivo

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R}^n : -\infty < f(x) < +\infty\} \quad (2.14)$$

también nos referiremos simplemente como el dominio de f

2. El ínfimo de f con respecto a U se define como:

$$\inf f(U) = \begin{cases} +\infty & \text{si } U = \emptyset \\ \inf f(U) & \text{si } U \neq \emptyset \text{ y } f(U) \subset \mathbb{R} \\ +\infty & \text{si } U \neq \emptyset \text{ y } \forall x \in U, f(x) = +\infty \\ -\infty & \text{si } \exists x \in U \text{ tal que } f(x) = -\infty \end{cases} \quad (2.15)$$

El supremo de f con respecto a U se define como:

$$\sup f(U) = \begin{cases} -\infty & \text{si } U = \emptyset \\ \sup f(U) & \text{si } U \neq \emptyset \text{ y } f(U) \subset \mathbb{R} \\ -\infty & \text{si } U \neq \emptyset \text{ y } \forall x \in U, f(x) = -\infty \\ +\infty & \text{si } \exists x \in U \text{ tal que } f(x) = +\infty \end{cases} \quad (2.16)$$

Ínfimo y supremo constituyen el conjunto extremo de f en U

3. Cuando existe $a \in U$ tal que $f(a) = \inf f(U)$, se dice que f alcanza su mínimo en un punto de U y se escribe como

$$\min f(U) \text{ ó } \min_{x \in U} f(x) \quad (2.17)$$

el conjunto de todos puntos mínimos de f en U se denota como

$$\operatorname{argmin} f(U) = \{a \in U : f(a) = \inf f(U)\} \quad (2.18)$$

Cuando existe $b \in U$ tal que $f(b) = \sup f(U)$, se dice que f alcanza su máximo en un punto de U y se escribe como

$$\max f(U) \text{ ó } \max_{x \in U} f(x) \quad (2.19)$$

el conjunto de todos puntos máximos de f en U se denota como

$$\operatorname{argmax} f(U) = \{b \in U : f(b) = \sup f(U)\} \quad (2.20)$$

La mayoría de algoritmos disponibles en diversas paqueterías de *software* en el problema de optimización solo contempla la búsqueda del valor mínimo de la función, por ello es conveniente saber como transformar el problema de búsqueda del valor máximo de una función al problema de encontrar el valor mínimo de otra función, en donde ambos alcancen el mismo valor, para ello tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1. [Delfour, 2012] Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y $U \subset \mathbb{R}^n$

$$\sup f(U) = -\inf(-f)(U), \text{ y } \operatorname{argmax} f(U) = \operatorname{argmin}(-f)(U) \quad (2.21)$$

En la búsqueda del valor máximo de la función objetivo es necesario el calculo del gradiente así como del Hessiano, por ello a continuación definiremos estas dos operaciones El gradiente de la función f se define como:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \quad (2.22)$$

La matriz Hessiana de la función f se define como:

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Definición 4 (Punto crítico). *Un punto crítico es un punto interior $a \in D_f$ donde para :*

$$\nabla f(x)|_a = 0; \text{ para } f \in C^1 \quad (2.24)$$

Los puntos críticos se pueden clasificar en máximos, mínimos y puntos silla.

Definición 5. [Delfour, 2012]. *Sea $U, \emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$*

1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo global en U si

$$\exists x \in U, \text{ tal que } \forall y \in U, f(x) \leq f(y) \quad (2.25)$$

2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo local en U si existe $x \in U$ y una vecindad $V(x)$ de x tal que

$$\forall y \in U \cap V(x), f(x) \leq f(y) \quad (2.26)$$

tal que, x es un mínimo global en $U \cap V(x)$

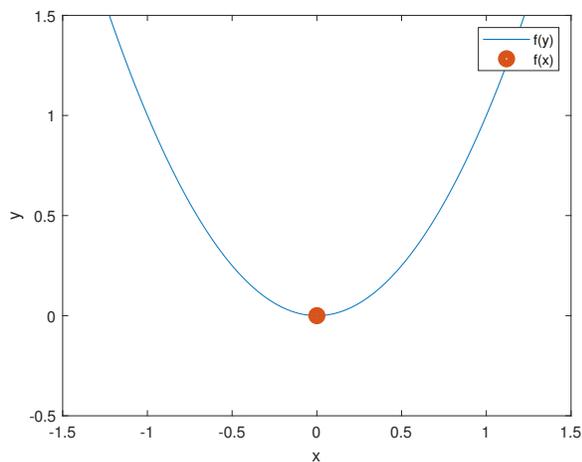
3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo global en U si

$$\exists x \in U, \text{ tal que } \forall y \in U, f(x) \geq f(y) \quad (2.27)$$

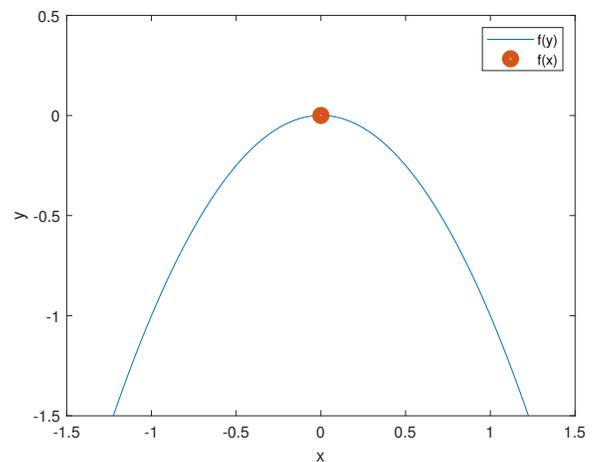
4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo local en U si existe $x \in U$ y una vecindad $V(x)$ de x tal que

$$\forall y \in U \cap V(x), f(x) \geq f(y) \quad (2.28)$$

tal que, x es un máximo global en $U \cap V(x)$



(a) $y = x^2$



(b) $y = -x^2$

Figura 2.3 Máximo y mínimo de una función

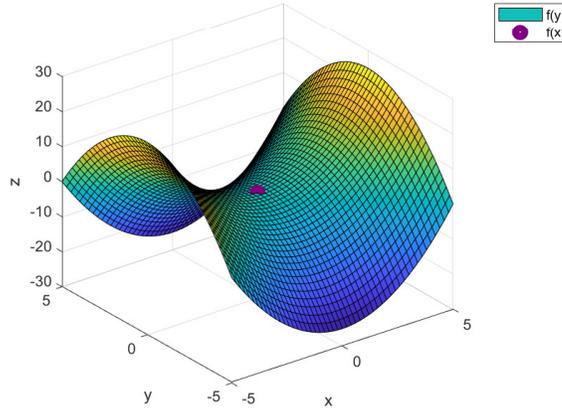


Figura 2.4 Punto silla

Teorema 2. [Delfour, 2012] Sea el conjunto abierto U , $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ser $C^{(2)}$ en U

1. Si f tiene un mínimo local en U , entonces

$$\exists x \in U, \nabla f(x) = 0 \text{ y } Hf(x) \geq 0 \quad (2.29)$$

2. Si

$$\exists x \in U, \text{ tal que } \nabla f(x) = 0 \quad (2.30)$$

y además existe una vecindad convexa $V(x) \subset U$ de x tal que

$$\forall y \in V(x), Hf(x) \geq 0 \quad (2.31)$$

entonces f tiene un mínimo en x el cual es global en $V(x)$ y local en U

3. Si

$$\exists x \in U, \nabla f(x) = 0 \text{ y } Hf(x) \geq 0 \quad (2.32)$$

entonces x es un minimizador local de f en U y existe una vecindad $V(x)$ de x donde x es el único minimizador global de f

2.4. Controladores de alto orden por modos deslizantes

El control basado en HOSM, nos permite controlar salidas cuya relación con la entrada del sistema resulta en un grado relativo ρ arbitrario [Shtessel, *et al.*, 2014], tiene la ventaja de llevar no solo la salida, sino también a sus derivadas en tiempo en tiempo finito; sin embargo, la ley de control depende de las derivadas de la salida por lo que es necesario una forma de obtener estas derivadas.

Para entenderlo mejor consideramos la ecuación diferencial discontinua

$$\dot{x} = f(x) \quad (\dot{x} \in F(x)) \quad (2.33)$$

con la función de salida suave

$$\sigma = \sigma(x) \quad (2.34)$$

El objetivo de control es estabilizar la salida, para hacerlo con por modos deslizantes necesitamos diseñar una ley de control :

$$u = \varphi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{\rho-1}) \quad (2.35)$$

El grado relativo ρ del sistema se asume constante y bien conocido.

2.4.1. Grado relativo

Definición 6. *El número ρ se denomina grado relativo de la salida σ del sistema con respecto a la entrada u en el punto x_0 , si las condiciones*

$$L_b \sigma(x) = L_b L_a \sigma(x) = \dots = L_b L_a^{\rho-2} \sigma(x) = 0 \quad (2.36)$$

$$L_b L_a^{\rho-1} \sigma(x) \neq 0 \quad (2.37)$$

se mantienen en alguna vecindad del punto x_0 .

El sistema que estamos considerando es una cadena de integradores, en donde la salida seleccionada siempre es x_1 y las perturbaciones aparecen solo en el último canal, así como ley de control. Por lo tanto el grado relativo esta directamente relacionado con el orden del sistema, ya que la ley de control aparece en la ultima derivada de la cadena.

2.4.2. Control discontinuo anidado

Los controladores discontinuos anidados de segundo hasta cuarto orden de acuerdo a la version presentada en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017] son:

$$u_{2D} = -k_2 \left[|x_2|^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0 \quad (2.38)$$

$$u_{3D} = -k_3 \left[|x_3|^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[|x_2|^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0 \quad (2.39)$$

$$u_{4D} = -k_4 \left[|x_4|^{\alpha_4} + k_3^{\alpha_4} \left[|x_3|^{\frac{\alpha_3}{2}} + k_2^{\frac{\alpha_3}{2}} \left[|x_2|^{\frac{\alpha_2}{3}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{3}} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{4}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^{\frac{\alpha_4}{\alpha_2}} \right]^0 \quad (2.40)$$

2.4.3. Control cuasicontinuo

Los controladores cuasicontinuos de segundo hasta cuarto orden de acuerdo a la version presentada en [Cruz-Zavala y Moreno, 2017] son:

$$u_{2Q} = -k_2 \frac{|x_2|^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{2}}}{|x_2|^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{2}}} \quad (2.41)$$

$$u_{3Q} = -k_3 \frac{|x_3|^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[|x_2|^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}}{|x_3|^{\alpha_3} + \beta_2 |x_2|^{\frac{\alpha_3}{2}} + \beta_1 |x_1|^{\frac{\alpha_3}{3}}} \quad (2.42)$$

$$u_{4Q} = -k_4 \frac{|x_4|^{\alpha_4} + k_3^{\alpha_4} \left[|x_3|^{\frac{\alpha_3}{2}} + k_2^{\frac{\alpha_3}{2}} \left[|x_2|^{\frac{\alpha_2}{3}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{3}} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{4}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^{\frac{\alpha_4}{\alpha_2}}}{|x_4|^{\alpha_4} + \beta_3 |x_3|^{\frac{\alpha_4}{2}} + \beta_2 |x_2|^{\frac{\alpha_4}{3}} + \beta_1 |x_1|^{\frac{\alpha_4}{4}}} \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Cálculo de ganancias para controladores discontinuos homogéneos de grado cero

En este capítulo se resuelve el problema de obtención de juegos de ganancias de los controladores mediante las condiciones obtenidas a partir de una CLF. Se presenta un algoritmo que sistematiza la obtención de juegos de ganancias. Comenzaremos con el caso más sencillo, es decir, obtener ganancias para el controlador de primer orden. Posteriormente con el de segundo orden para terminar con el de tercer orden, para los cuales presentamos casos particulares y propuestas de juegos de ganancias.

Finalmente presentamos implementaciones en MATLAB/Simulink de varios juegos de ganancias, así como la respuesta de los sistemas en lazo cerrado. Las formas generales para obtener cada una de las CLF se encuentran en el Capítulo 1, así como las funciones de desingularización, por otro lado en el Capítulo 2 se encuentran las formas de la familia de controladores discontinuo anidado y cuasicontinuo.

3.1. Controlador de primer orden

Para la obtención de ganancias del controlador de primer orden. En primera instancia definimos la siguiente inclusión diferencial DI

$$\dot{x}_1 \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, \quad (3.1a)$$

$$\dot{x}_1 \in F(x, t) + g(x, t)u, \quad (3.1b)$$

$$\sigma = x_1 \quad (3.1c)$$

se puede observar con claridad que la salida del sistema es de grado relativo uno, debido a que en la primera derivada de la salida encontramos al control.

El objetivo de control es llevar a la salida σ al origen con el algoritmo de control discontinuo y cuasicontinuo de primer orden, los cuales para este caso coinciden con el algoritmo clásico de primer orden 3.2.

$$u = -k_1 [\sigma_1]^0 \quad (3.2)$$

donde σ_1 se define de la siguiente manera

$$\sigma_1 = [x_1]^{\frac{\alpha_1}{r_1}} \quad (3.3)$$

Proposición 1. Sea $k_1 > 0$ la ganancia del controlador un número real positivo, entonces el valor

$$k_1 > \frac{C}{K_m} \quad (3.4)$$

estabiliza el sistema 3.1 en lazo cerrado con la ley de control 3.2

Demostración. La CLF para este caso se define de la siguiente manera

$$V_1 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \quad (3.5)$$

Obtenemos la derivada de V_1 a lo largo de las trayectorias del sistema, obteniendo por la regla de la cadena, lo siguiente:

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 \quad (3.6)$$

$$\dot{V}_1 = s_{1d}(F(x, t) + g(x)u) < 0 \quad (3.7)$$

Tomando el peor de los casos

$$s_{1d} \left(C - K_m k_1 [\sigma_1]^0 \right) < 0 \quad (3.8)$$

$$k_1 K_m s_{1d} > C s_{1d} \quad (3.9)$$

Llegando así a la condición refC1e

$$k_1 > \frac{C}{K_m} \quad (3.10)$$

□

3.1.1. Implementación en MATLAB

La simulación se realiza con un paso de muestreo $\tau = 1e - 3$, es decir, de un milisegundo, así como con una perturbación $f(x) = \text{sen}(30t)$ y $g(x) = 1$. Por lo tanto la planta simulada queda de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1 = \text{sen}(30t) + u, \quad (3.11a)$$

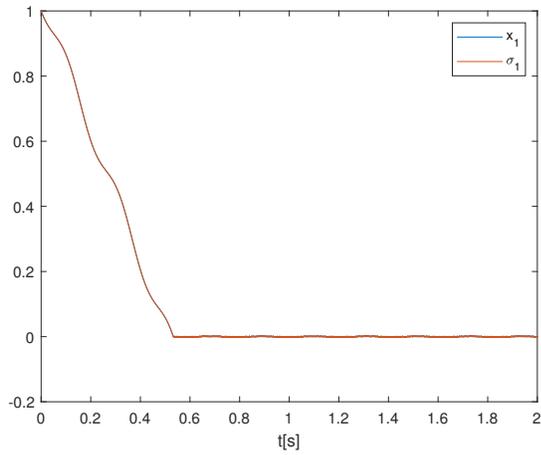
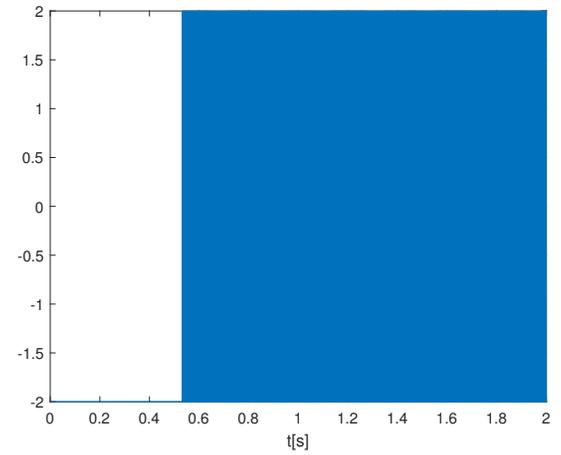
$$\sigma = x_1 \quad (3.11b)$$

Por otro lado los parámetros del controlador se designaron como: $\alpha_1 = r_1 = 1$ y $k_1 = 2$, por lo que tenemos la ley de control de la siguiente manera

$$u = -2 [x_1]^0 \quad (3.12)$$

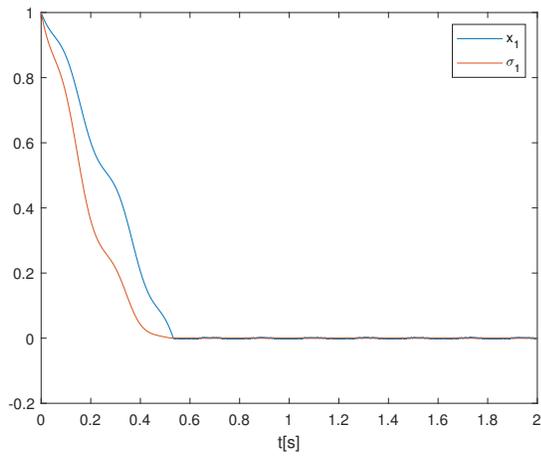
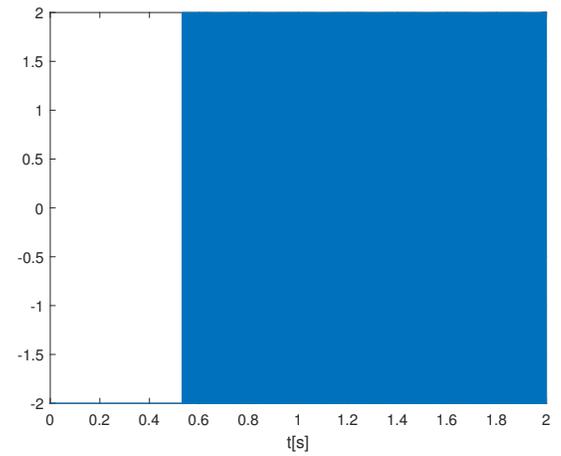
En la Figura 3.1 se encuentran las gráficas de los resultados de la simulación, donde podemos apreciar en la 3.1a la respuesta del sistema x_1 , la cual para este caso coincide completamente con la superficie de deslizamiento, las trayectorias del sistema van al origen. En la Figura 3.1b se encuentra la ley de control, en la cual podemos observar el fenómeno de *chattering* al momento de que el sistema entra en el modo deslizante, es decir, se observan vibraciones de alta frecuencia en la ley de control.

Cambiando del valor de α_1 , podemos tener diferentes resultados en donde si bien las trayectorias de x_1 y σ_1 convergen al origen, toman un camino diferente, como podemos ver en la Figura 3.2a, que la trayectorias se diferencian, aumentado el valor de α_1 las trayectorias de σ_1 se acercan mas rápido al origen como podemos observar en la Figura 3.3a; sin embargo, en las tres simulaciones la convergencia de x_1 se mantiene sin cambios.

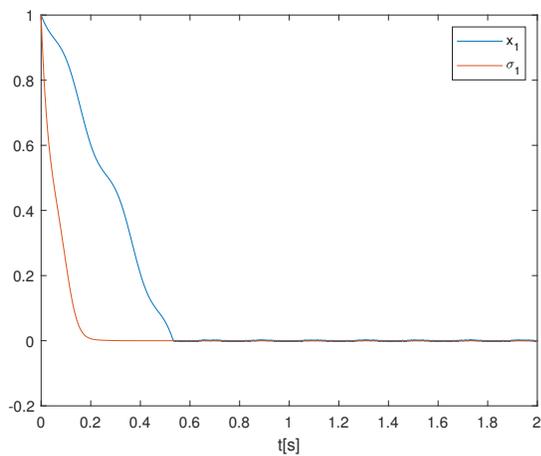
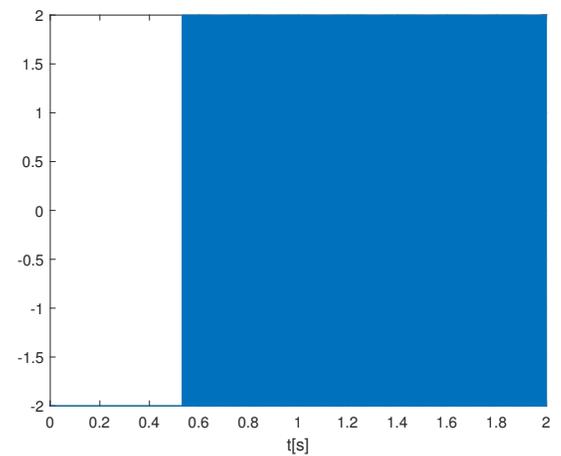
(a) Salida del sistema x_1 

(b) Ley de control

Figura 3.1 Simulación del controlador de primer orden

(a) Salida del sistema x_1 

(b) Ley de control

Figura 3.2 Simulación del controlador de primer orden con $\alpha_1 = 2$ (a) Salida del sistema x_1 

(b) Ley de control

Figura 3.3 Simulación del controlador de primer orden con $\alpha_1 = 10$

3.2. Controlador de segundo orden

Para el caso de sistemas de segundo orden SISO afines a la entrada. El problema de diseño del controlador es equivalente a diseñarlo para la DI 3.13, debido a que la salida σ hace que sea de grado relativo $\rho = 2$.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.13a)$$

$$\dot{x}_2 \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (3.13b)$$

$$\sigma = x_1 \quad (3.13c)$$

El objetivo de control es llevar la salida y su derivada al origen con el algoritmo de control discontinuo anidado:

$$u = -k_2 \left[|x_2|^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} |x_1|^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0, \quad (3.14)$$

donde k_1 y k_2 son dos números reales positivos que representan las ganancias del controlador. La siguiente proposición nos indica la condición para determinar el límite inferior de las posibles valores para la ganancia k_2 . Dicha condición consiste en encontrar el máximo de una función y posteriormente agregar las cotas de las perturbaciones.

Proposición 2. *Sea $k_1 > 0$, la primer ganancia del controlador 3.14 un número real positivo, entonces el valor de la segunda ganancia k_2 que estabilizan el sistema 3.13 en lazo cerrado, esta determinada mediante la siguiente condición:*

$$k_2 > \frac{1}{K_m} (\max(f_2(\bar{x}_2, k_1)) + C) \quad (3.15)$$

donde la función objetivo a encontrar el valor máximo tiene la siguiente forma:

$$f_2(\bar{x}_2, k_1) = \frac{x_2 \left(\gamma_1 |x_1|^{\frac{m-r_1}{r_1}} + \frac{m-r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} \left(x_2 + k_1 |x_1|^{\frac{r_2}{r_1}} \right) \right)}{\left| |x_2|^{\frac{m-r_2}{r_2}} + k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m-r_2}{r_1}} \right|} := \frac{\phi_2}{|s_{2d}|} \quad (3.16)$$

Demostración. Para el caso del controlador de segundo orden la CLF tiene la siguiente forma:

$$V_2 = \gamma_1 V_1 + W_2 \quad (3.17)$$

$$V_2 = \gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - |v_1|^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m} \right) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \quad (3.18)$$

La condición para el valor de la ganancia k_1 se obtiene de la condición para que la función 3.18 sea en efecto una CLF. Para ello como primer paso debemos encontrar los puntos donde se cumple la condición 3.19, es decir, los puntos donde el control no tiene influencia en cambio de la derivada de la CLF. Como segundo paso debemos cerciorarnos que en esos puntos el gradiente de la CLF a lo largo de las trayectorias del sistema (ecuación 3.22) sea negativa definida. De esta forma

$$\frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} g(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} F(x) < 0 \quad (3.19)$$

desarrollando la expresión tenemos

$$\left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{\partial W_2}{\partial x_2} = s_{2d} = 0 \quad (3.21)$$

por lo que en los puntos donde $s_{2d} = 0$, se debe cumplir 3.22, cabe resaltar que cuando $s_{2d} = 0$, $x_2 = v_1$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_2} f(x) < 0 \quad (3.22)$$

desarrollando la expresión tenemos

$$\left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} x_2 \\ C \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

$$x_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} < 0 \quad (3.24)$$

como $W_2 = 0$ y $x_2 = v_1$ tenemos

$$\gamma_1 v_1 \frac{\partial V_1}{x_1} = \gamma_1 v_1 s_{1d} = -\gamma_1 k_1 [x_1]^{\frac{r_2}{r_1}} [x_1]^{\frac{m-r_1}{r_1}} < 0 \quad (3.25)$$

donde después de simplificar llegamos a la siguiente condición

$$-\gamma_1 k_1 \left(\frac{m}{r_1} \right)^{\frac{m+r_2-r_1}{m}} V_1^{\frac{m+r_2-r_1}{m}} < 0 \quad (3.26)$$

en 3.26 podemos observar claramente que para que se cumpla la condición 3.22, se debe cumplir que

$$k_1 > 0 \quad (3.27)$$

Para encontrar la condición para k_2 debemos encontrar la derivada de V_2 a lo largo de las trayectorias del sistema por lo que tenemos

$$\dot{V}_2 = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \dot{x} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} (f(x) + g(x)u) \quad (3.28)$$

desarrollando la ecuación tenemos

$$\left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right] \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \right) = x_2 \frac{\partial V_2}{x_1} + C s_{2d} - k_2 K_m |s_{2d}| < 0 \quad (3.29)$$

llegando así a la condición para el valor de k_2

$$k_2 > \frac{1}{K_m} \left(\max \left(\frac{x_2 \frac{\partial V_2}{x_1}}{|s_{2d}|} \right) + C \right) := \frac{1}{K_m} (\max (f_2(\bar{x}_2, k_1))) + C \quad (3.30)$$

□

La función a maximizar 3.16 es homogénea de grado cero, semicontinua superior, por lo que es factible obtener el valor máximo. De hecho tiene un número infinito de puntos máximos; si embargo, debido a que es homogénea de grado cero todos alcanzan el mismo valor máximo cuando son evaluados en la función objetivo.

Proposición 3. *Los puntos máximos de $f_2(\bar{x}_2, k_1)$, es decir, los puntos donde la función objetivo alcanza su valor máximo:*

$$\operatorname{argmax}(f_2(\bar{x}_2, k_1)) = \{x_1, x_2 \in U : f(x_1, x_2) = \sup f(U)\} \quad (3.31)$$

son los que satisfacen la siguiente condición

$$c [x_1]^{\frac{m-r_1}{r_1}} + d |x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} x_2 - \left(\frac{a}{e} |x_1|^{\frac{r_2-r_1}{r_1}} x_2 + \frac{b}{e} [x_1]^{-1} x_2^2 \right) f |x_2|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} = 0 \quad (3.32)$$

donde los coeficientes a , b , c , d , e y f , son valores que dependen de los pesos y grados de homogeneidad, principalmente de la primera ganancia del controlador.

$$a = \gamma_1 \frac{m-r_1}{r_1} + \frac{m-r_2}{r_1} \frac{m-r_1}{r_1} k_1^{\frac{m}{r_2}} \quad (3.33)$$

$$b = \frac{m-r_2}{r_1} \frac{m-r_2-r_1}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.34)$$

$$c = \gamma_1 + \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m}{r_2}} \quad (3.35)$$

$$d = 2 \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.36)$$

$$e = \frac{m - r_2}{r_1} k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.37)$$

$$f = \frac{m - r_2}{r_2} \quad (3.38)$$

Demostración. Para encontrar el valor máximo de la función $f_2(\bar{x}_2, k_1)$, en primera instancia se buscan los puntos críticos, a través de igualar el gradiente al vector nulo.

$$\nabla f_2(\bar{x}_2, k_1) = \left[\frac{\partial f_2(\bar{x}_2, k_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2(\bar{x}_2, k_1)}{\partial x_2} \right] = \emptyset \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x}_2, 1)}{\partial x_1} = \frac{|s_{2d}| \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_1}}{|s_{2d}|^2} = s_{2d} \left(s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x}_2, k_1)}{\partial x_2} = \frac{|s_{2d}| \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \phi_2 \frac{\partial |s_{2d}|}{\partial x_2}}{|s_{2d}|^2} = s_{2d} \left(s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \phi_2 \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.41)$$

de las ecuaciones 3.40 y 3.41 podemos descartar $s_{2d} = 0$ debido a que es el rayo que contiene el conjunto de puntos que evaluados en la función objetivo $f_2(\bar{x}_2, k_1)$, resultan en el valor mínimo global que en este caso es menos infinito; por lo tanto, el sistema de ecuaciones a resolver queda como:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\phi_2}{s_{2d}} \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\phi_2}{s_{2d}} \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.43)$$

Ambas parciales son equivalentes con excepción en $x_1 = 0$ ó $x_2 = 0$. Para evitar la división $\frac{\phi_2}{s_{2d}}$. De la primera parcial $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ despejamos ϕ_2 y lo sustituimos en la segunda parcial $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ resultando en

$$\phi_2 = s_{2d} \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}} \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.45)$$

Llegando de esta manera a la forma general simplificada de la condición que contiene todos los puntos máximos, es decir, todos los puntos donde la función objetivo $f_2(\bar{x}_2, k_1)$ alcanza el valor máximo.

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1}} \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.46)$$

obtenemos las parciales como

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = a|x_1|^{\frac{m-2r_1}{r_1}} x_2 + b|x_1|^{\frac{m-r_2-2r_1}{r_1}} x_2^2 \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = c|x_1|^{\frac{m-r_1}{r_1}} + d|x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} x_2 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} = e|x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} = f|x_2|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} \quad (3.50)$$

finalmente al sustituir las parciales llegamos a la expresión

$$c|x_1|^{\frac{m-r_1}{r_1}} + d|x_1|^{\frac{m-r_2-r_1}{r_1}}x_2 - \left(\frac{a}{e}|x_1|^{\frac{r_2-r_1}{r_1}}x_2 + \frac{b}{e}|x_1|^{-1}x_2^2 \right) f|x_2|^{\frac{m-2r_2}{r_2}} = 0$$

□

3.2.1. Algoritmo para la obtención de ganancias para controladores de segundo orden

Los puntos en donde la función objetivo alcanza su valor máximo son los que satisfacen la condición 3.32, esto debido a que la función objetivo es homogénea de grado cero, en consecuencia todos los puntos que satisfacen la condición evaluados en la función objetivo resultan en el mismo valor. El problema de optimización, en este caso es la determinación del punto máximo, el cual se convierte en la determinación de un punto que cumpla la condición 3.32. Una forma es buscando en el círculo unitario, de la siguiente forma $x_2 = \sqrt{1-x_1^2}$ y obtener un valor para x_1 .

De esta manera para determinar el valor de las ganancias del controlador para sistemas de segundo orden se determina con el siguiente algoritmo.

1. Como primer paso se determinan los pesos de las coordenadas de la transformación de dilatación, así como los grados de homogeneidad de las funciones que forman a la CLF. También se determina el valor de la primer ganancias, la cual basta con que sea positiva $k_1 > 0$
2. Determinamos la función objetivo $f_2(\bar{x}_2, k_1)$.
3. Obtenemos el punto máximo de la función objetivo.
4. Evaluamos el punto obtenido en el paso anterior en la función objetivo $f_2(\bar{x}_2, k_1)$, para determinar la cota inferior del conjunto de valores para \hat{k}_2 .
5. Establecemos el valor de la ganancia como $k_2 = 1.1\hat{k}_2$. El valor 1.1 es completamente arbitrario, puesto que no está ligado a ningún objetivo; sin embargo, con esto se cumple la condición de que la ganancia sea mayor a la cota mínima.
6. Finalmente agregamos las cotas de las perturbaciones de acuerdo a la condición 3.15.

3.2.2. Implementación en MATLAB/Simulink

Para las simulaciones aplicaremos el algoritmo para la obtención de ganancias. Como primer paso determinamos los valores del vector de pesos, así como los grados de homogeneidad.

$$\begin{aligned} m &= 3, \quad \gamma_1 = 1, \\ r &= [r_1, r_2] = [2, 1], \\ \alpha &= [\alpha_1, \alpha_2] = [2, 3] \end{aligned} \quad (3.51)$$

Como segundo paso determinamos el valor de la primer ganancia, para este caso $k_1 = 1$. En el tercer paso determinamos la función objetivo $f_2(\bar{x}_2)$, esto lo hacemos con la ayuda de la función de Matlab que se encuentra en el Apéndice A .

$$f_2(\bar{x}_2) = \frac{\phi_2}{|s_{2d}|} = \frac{2x_2|x_1|^{\frac{1}{2}} + x_2^2}{|[x_2]^2 + x_1|} \quad (3.52)$$

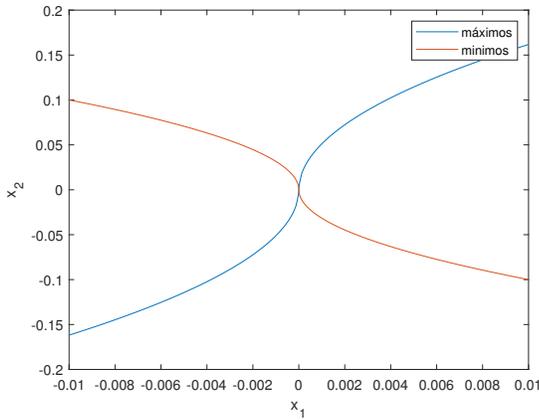
$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= x_2 |x_1|^{-\frac{1}{2}}; & \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} &= 1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} &= 2[x_1]^{\frac{1}{2}} + 2x_2; & \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} &= 2|x_2|\end{aligned}$$

El cuarto paso consiste en determinar los puntos máximos, y además para este ejemplo determinamos los puntos donde se va a menos infinito. El conjunto de puntos en donde la función $f_2(\bar{x}_2)$ alcanza su valor máximo son los que cumplen la siguiente ecuación:

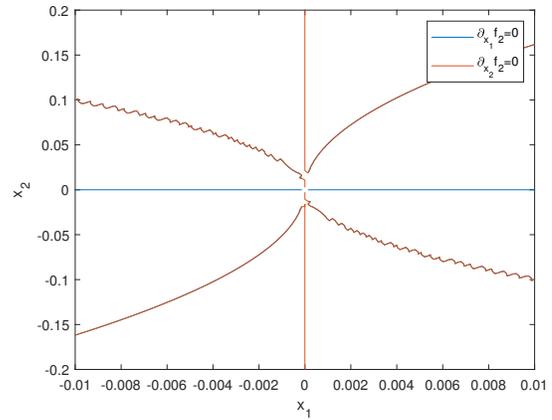
$$2[x_1]^{\frac{1}{2}} + 2x_2 - 2|x_1|^{-\frac{1}{2}}x_2|x_2| = 0 \quad (3.53)$$

Por otro lado el conjunto de puntos en donde la función $f_2(\bar{x}_2)$ tiende a menos infinito son cuando $s_{2d} = 0$, es decir :

$$[x_2]^2 + x_1 = 0 \quad (3.54)$$



(a) Puntos críticos obtenidos analíticamente



(b) Puntos críticos obtenidos numéricamente

Figura 3.4 Puntos críticos

En la Figura 3.4 se muestran la comparación de los puntos críticos obtenidos analíticamente y los obtenidos numéricamente, como podemos observar cerca del origen la aproximación numérica falla debido a que la función no es diferenciable en el origen. Otra desventaja de la aproximación numérica (ver la Figura 3.4b) es que no es posible diferenciar los puntos mínimos y máximos. Al contrario de los obtenidos analíticamente (ver la Figura 3.4a) están claramente identificados las curvas que contienen los puntos máximos y mínimos.

Finalmente los dos últimos pasos consisten encontrar el valor máximo de la función objetivo. Para dar solución a la condición buscamos sólo en el círculo unitario y reducimos de esta manera el problema a sólo una ecuación con una incógnita, es decir, sustituimos $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$ en la condición, obteniendo:

$$2[x_1]^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{1 - x_1^2} - 2|x_1|^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1 - x_1^2}\sqrt{1 - x_1^2} = 0 \quad (3.55)$$

Obteniendo de esta manera que el valor de $x_1 = 0.3454$, para obtener el otro punto sustituimos $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$ en la condición, obteniendo esta vez que $x_1 = -0.3454$. Finalmente evaluamos los puntos en la función objetivo para obtener el valor máximo.

$$f_2(0.3454, \sqrt{1 - x_1^2}) = 1.618; \quad f_2(-0.3454, -\sqrt{1 - x_1^2}) = 1.618 \quad (3.56)$$

El caso más sencillo es determinar solo el valor de $x_2 > 0$ cuando $x_1 = 1$, quedando la condición de la siguiente manera:

$$2 + 2x_2 - 2x_2^2 = 0 \quad (3.57)$$

el cual tiene dos soluciones, obtenidas a través de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado

$$x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{-4} \quad (3.58)$$

$$x_2 = -0.618; \quad x_2 = 1.618 \quad (3.59)$$

entonces uno de los puntos donde la función objetivo alcanza su valor máximo es $f_2(1, 1.618)$.

$$\hat{k}_2 = 1.618 \quad (3.60)$$

Finalmente agregamos las cotas de las perturbaciones e incertidumbres de acuerdo a la siguiente condición.

$$k_2 > \frac{1}{K_m} (1.618 + C) \quad (3.61)$$

En este trabajo se tomara la siguiente ecuación para fijar los valores de las ganancias, el valor 1.1 fue designado arbitrariamente y no tiene ningún objetivo más que cumplir con la condición anterior.

$$k_2 = \frac{1}{K_m} (1.1\hat{k}_2 + C) \quad (3.62)$$

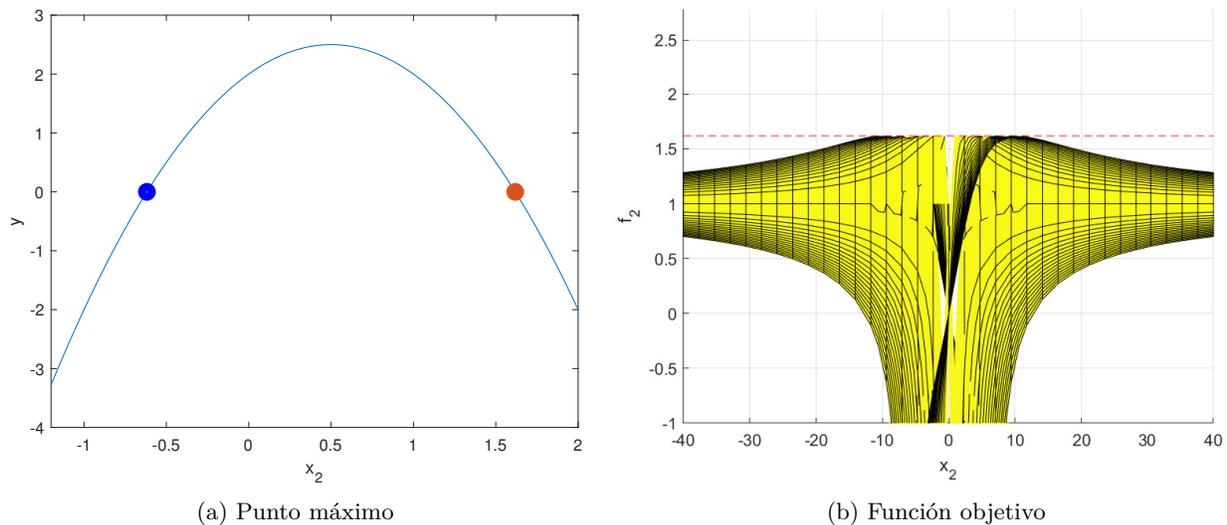


Figura 3.5 Máximo

En la Figura 3.5 se muestran dos gráficas, la primera 3.5a se muestra gráficamente el punto máximo obtenido, donde el punto de interés es $x_2 > 0$. En la gráfica 3.5b se muestra la función objetivo así como el plano que genera el punto máximo en x_3 , dejando claro que encontramos en máximo global.

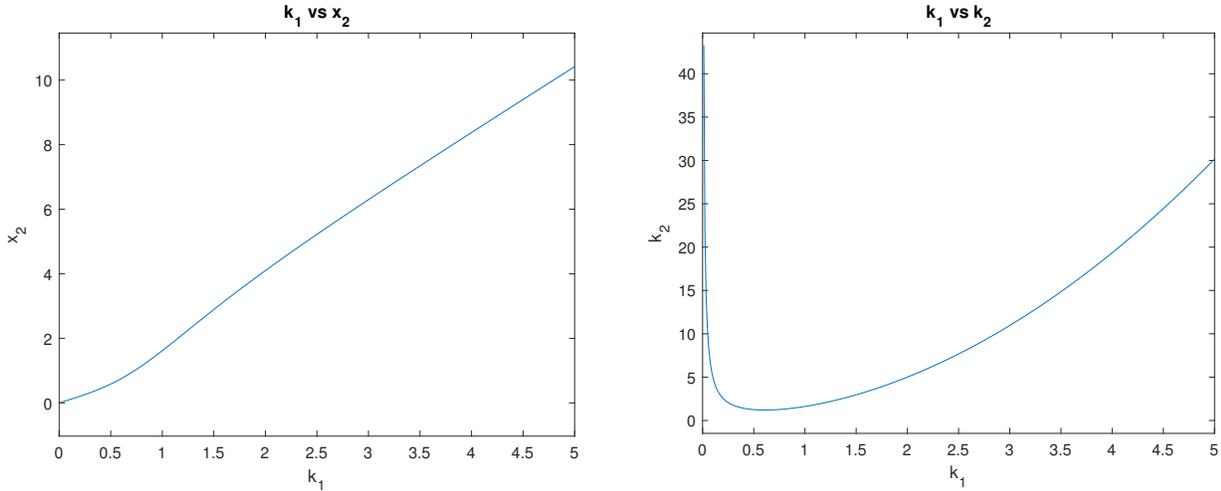


Figura 3.6 Variación del \hat{k}_2 dependiendo del valor de k_1

Para la simulación del sistema en lazo cerrado fijamos $k_2 = 1.1(\max(f_2)) = 1.7798$, como mencioné anteriormente 1.1 fue elegido arbitrariamente y solo se contempla este valor ya que cumple la condición de ser mayor a la cota mínima. Para el valor de las cotas de las perturbaciones utilizamos $C = K_m = 1$, obteniendo los resultados mostrados en la Figura 3.7 .

Para probar modificamos el valor $k_1 = 2$, manteniendo los mismos valores para los pesos y los grados de homogeneidad. Siguiendo el algoritmo el siguiente paso es la determinación del punto máximo y del valor del máximo, el cual se realizó mediante la implementación en Matlab, el cual consiste en una función que de acuerdo a los datos antes mencionados nos determina el valor del máximo, el código se encuentra en el Apéndice A. Mediante este código obtenemos la cota mínima del conjunto de valores para el valor de k_2 y establecemos el valor 1.1 veces más grande.

Ganancias para controlador de segundo orden		
Pesos y grados de homogeneidad	k_1	k_2
$m = 3, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	1.7798
	2	5.5114
$m = 5, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	2.8874
$m = 7, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	4.4686
$m = 9, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	6.2015
$m = 11, r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$	1	8.0237

Tabla 3.1 Tabla de ganancias para controlador de segundo orden, donde $C = 0$ y $K_m = 1$

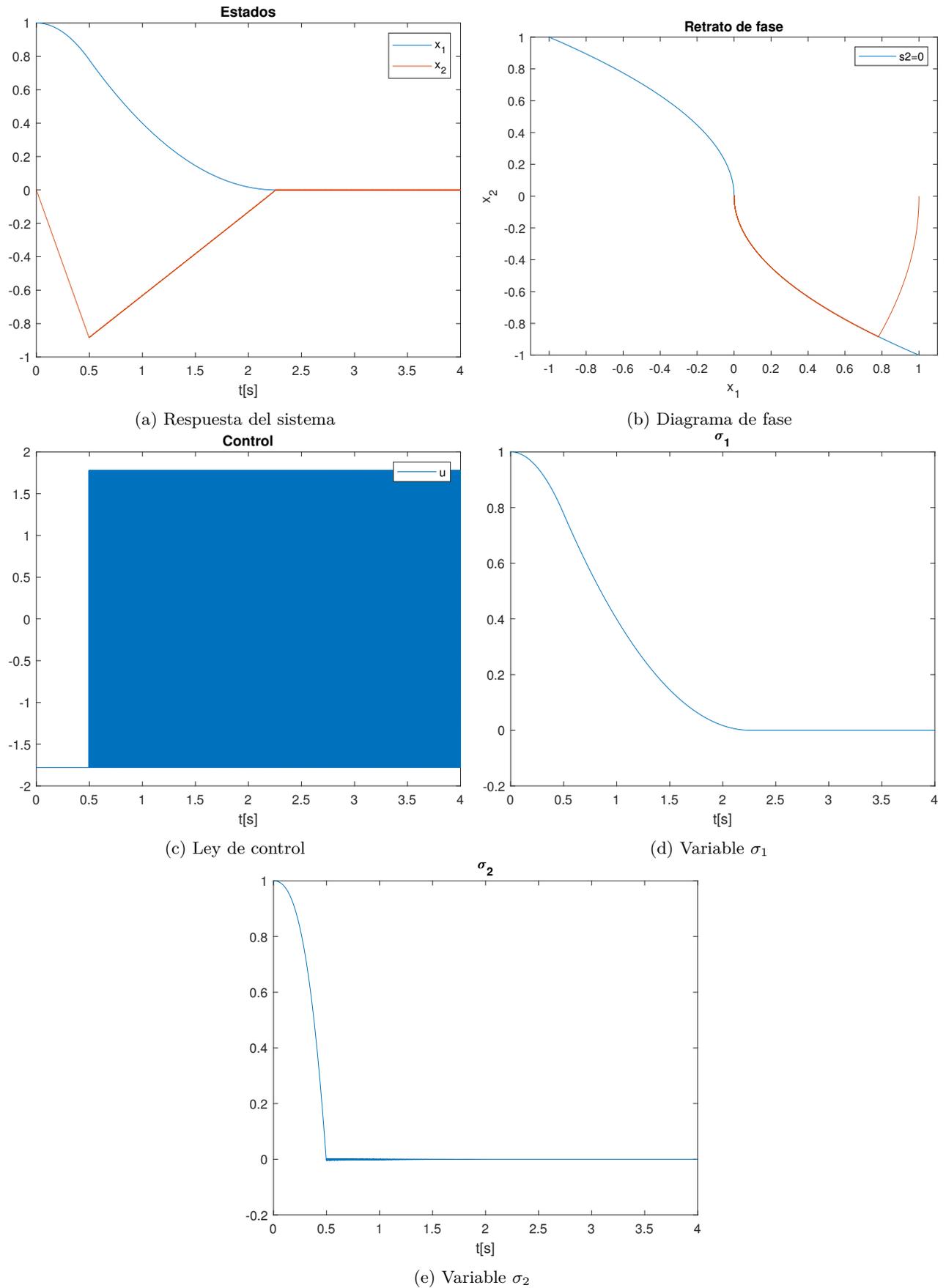
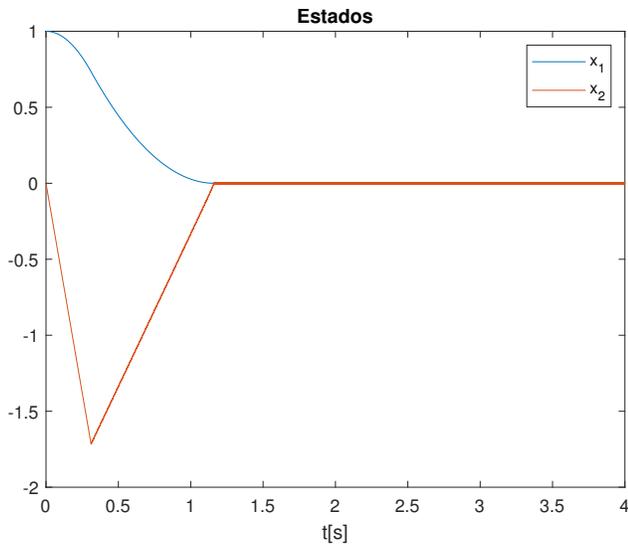
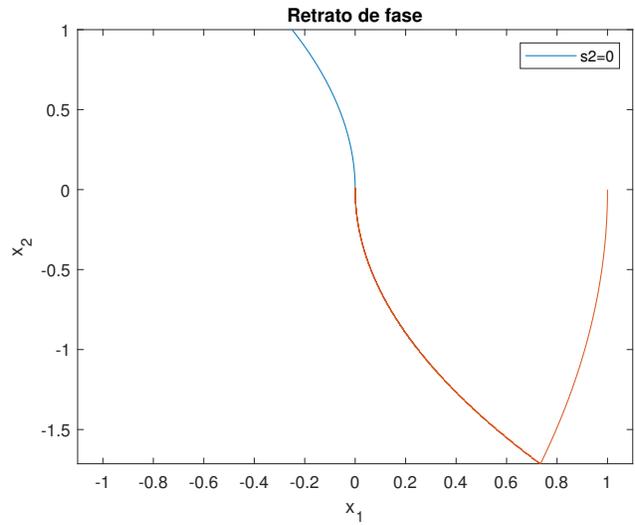


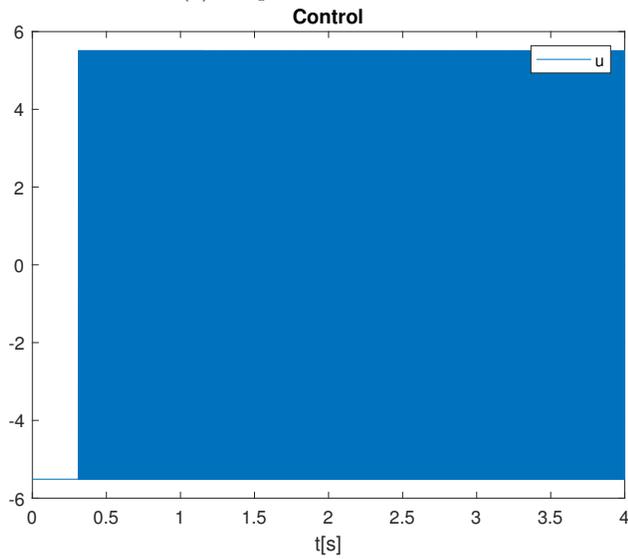
Figura 3.7 Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 1.7798$, $m = 3$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$



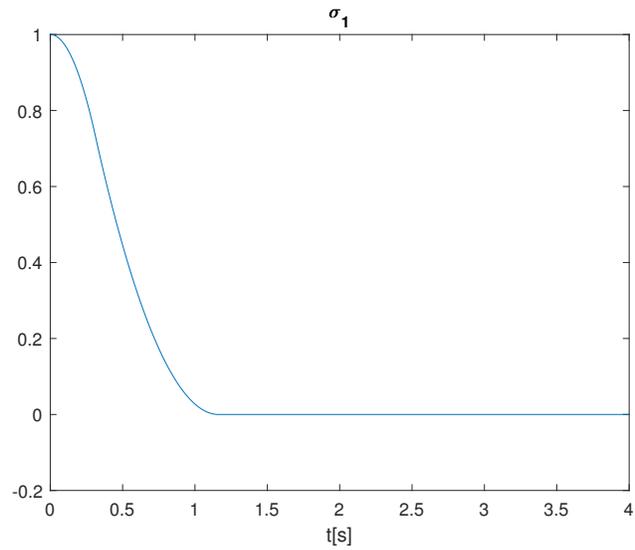
(a) Respuesta del sistema



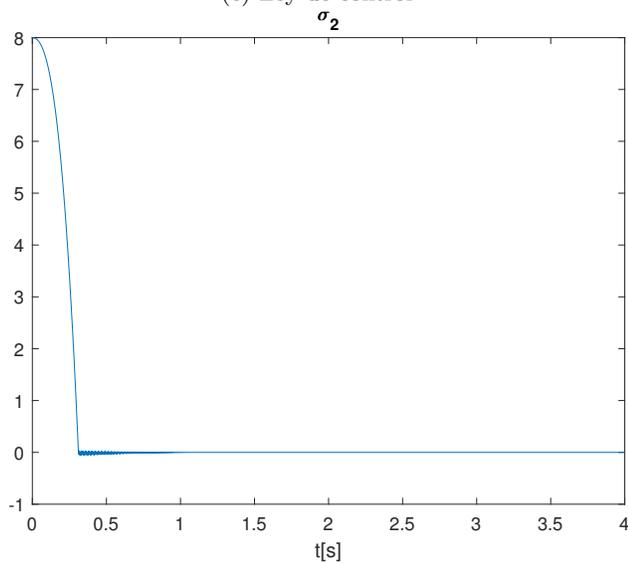
(b) Diagrama de fase



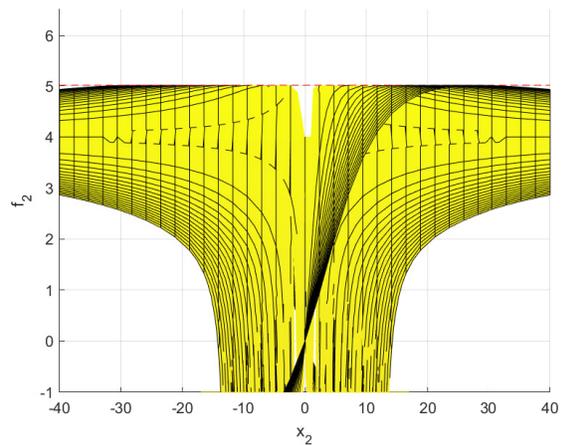
(c) Ley de control



(d) Variable σ_1



(e) Variable σ_2



(f) Función objetivo

Figura 3.8 Controlador de segundo orden con $k_1 = 2$, $k_2 = 5.5114$, $m = 3$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$

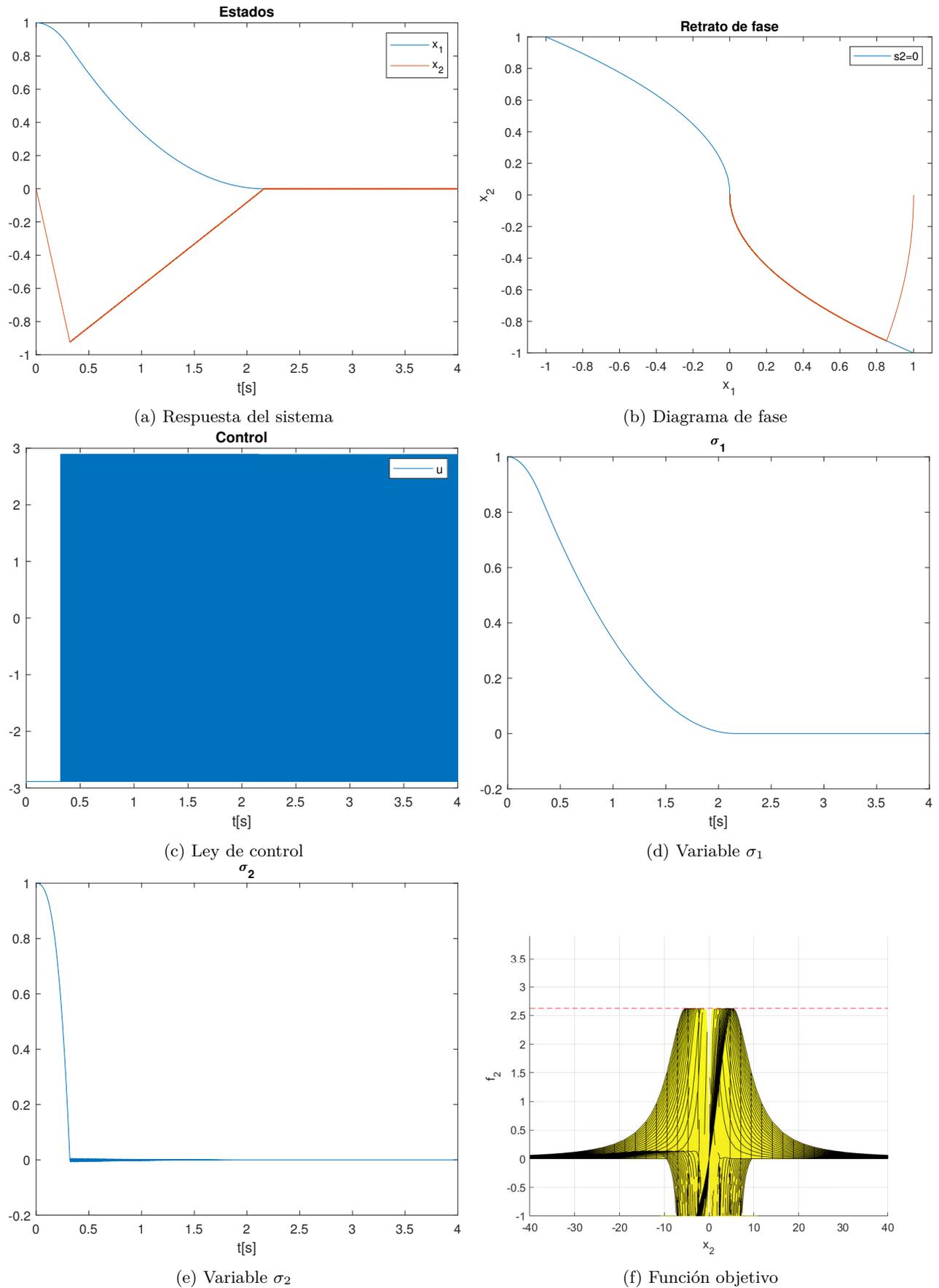
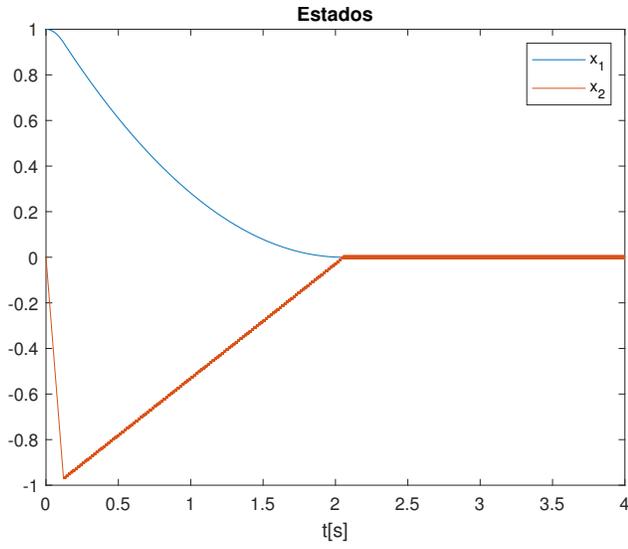
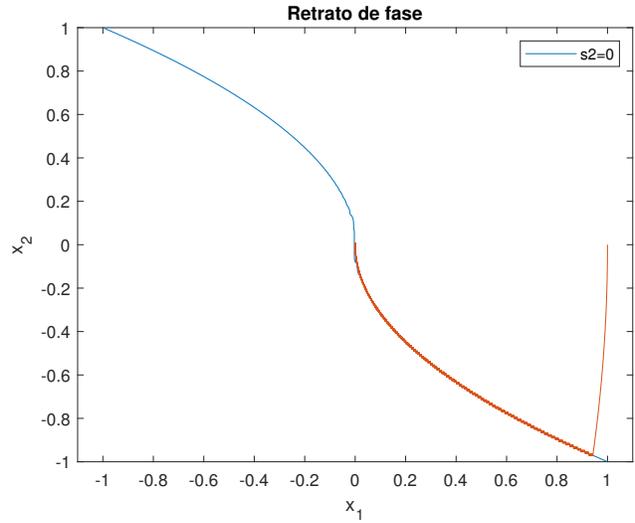


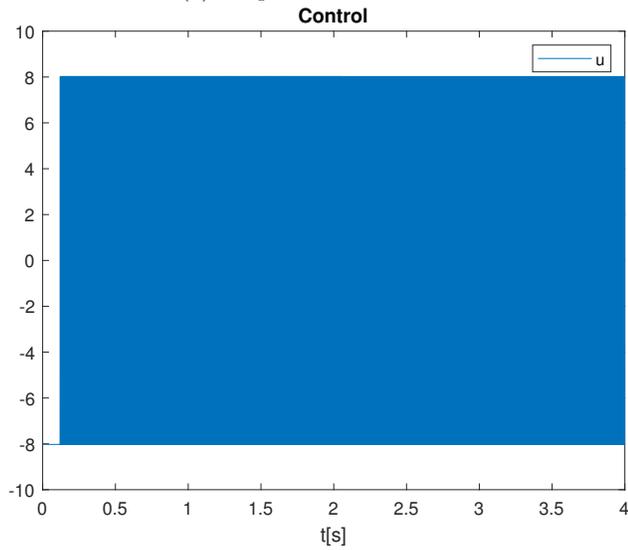
Figura 3.9 Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 2.8874$, $m = 5$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$



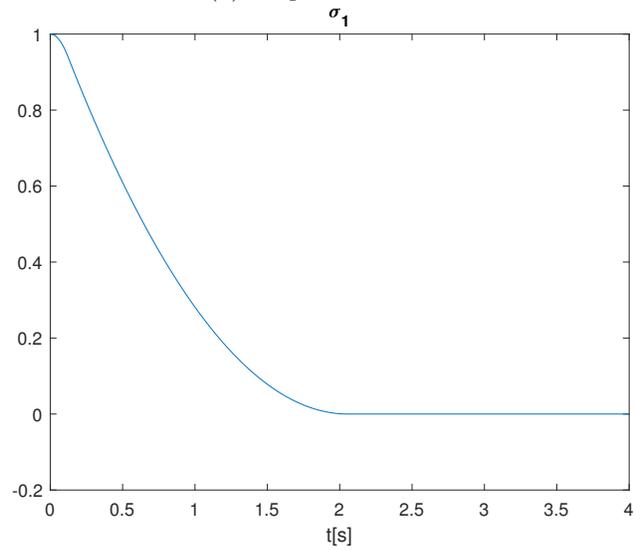
(a) Respuesta del sistema



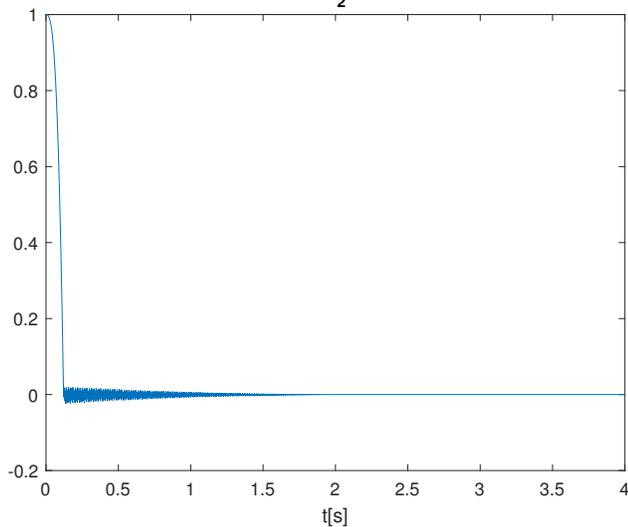
(b) Diagrama de fase



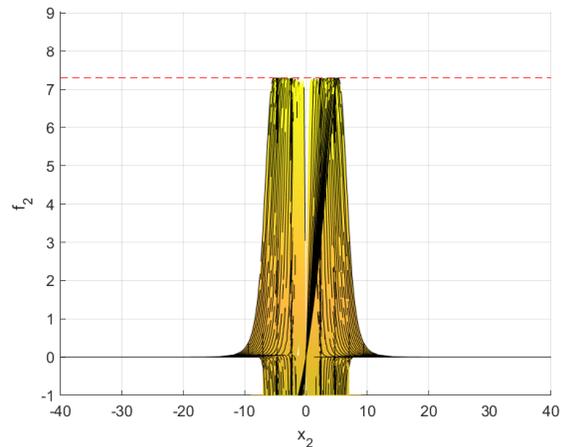
(c) Ley de control σ_2



(d) Variable σ_1



(e) Variable σ_2



(f) Función objetivo

Figura 3.10 Controlador de segundo orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 8.0237$, $m = 11$, $r = [2, 1]$ y $\alpha = [2, 3]$

3.3. Controladores de alto orden

Cuanto mayor se el orden del controlador, el número de ganancias aumenta, de hecho el numero de ganancias concuerda con el grado del controlador. Además de que el denominador de la función a obtener el valor máximo cambia para las ganancias intermedias, es decir, las ganancias $k_2, \dots, k_{\rho-1}$.

Para sistemas de tercer orden en adelante tenemos que diseñar un mayor número de ganancias; por lo tanto, a partir del controlador de tercer orden el algoritmo es recursivo:

1. Como primer paso se determinan el vector pesos, así como los grados de homogeneidad.
2. Posteriormente se determina el valor de la primer ganancia $k_1 > 0$.
3. Los siguientes pasos son iterativos, empezando por k_2 hasta k_ρ .
 - a) Se determina la función objetivo a obtener el máximo $f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})$.
 - b) Se determina el punto máximo de la función objetivo, buscando en la esfera homogénea, debido a que la función objetivo es una función homogénea de grado cero, basta con buscar sobre la esfera unitaria.
 - c) Se evalúa el punto en la función objetivo, para determinar el limite inferior del conjunto de valores para la ganancia \hat{k}_i .
 - d) Finalmente se fija un valor para la k_i ganancia, a lo largo de este trabajo este valor queda determinado como $k_i = 1.1\hat{k}_i$.
4. Para el caso de la última ganancia, además se toman en cuenta las cotas de las perturbaciones por lo que al final la fijamos como $k_\rho = \frac{1}{K_m} (1.1\hat{k}_\rho + C)$

Proposición 4. Para k_i , donde $i = 2 \dots \rho - 1$, la función objetivo es

$$f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1}) = \frac{\Phi_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{s_{i,d}[\sigma_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}}, \quad (3.63)$$

el sistema de ecuaciones a resolver para determinar los puntos críticos es el siguiente, donde para $j = 1, \dots, \rho$:

$$s_{id} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \phi_i \left(\frac{\partial s_{id}}{\partial x_j} \right) - \phi_i \frac{r_{i+1}}{\alpha_i} \frac{s_{id}}{\sigma_i} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.64)$$

Para k_ρ , la función objetivo a determinar el valor máximo tiene la siguiente forma

$$f_\rho(\bar{x}_\rho, \bar{k}_{\rho-1}) = \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} x_{j+1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|}, \quad (3.65)$$

por otro lado el sistema de ecuaciones a resolver, para determinar los puntos críticos es el siguiente, donde para $j = 1, \dots, \rho$:

$$\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \frac{\phi_\rho}{s_{\rho d}} \frac{\partial s_{\rho d}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.66)$$

Demostración. Las primeras $\rho - 1$ ganancias se obtienen de las condiciones para que la función V_ρ propuesta sea en efecto una función de Lyapunov de control.

Para ello encontramos los puntos donde se cumple

$$\frac{\partial V_\rho}{\partial \bar{x}_\rho} g(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_\rho}{\partial \bar{x}_\rho} F(x) < 0 \quad (3.67)$$

Determinamos los puntos donde se anula el primer gradiente, por lo cual tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_\rho}{\partial x_1}, \frac{\partial V_\rho}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V_\rho}{\partial x_{\rho-1}}, \frac{\partial V_\rho}{\partial x_\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial V_\rho}{\partial x_\rho} = \frac{\partial W_\rho}{\partial x_\rho} = s_{\rho d} = 0 \quad (3.69)$$

en consecuencia $s_\rho = 0$ y por lo tanto el control virtual queda como $x_\rho = v_{\rho-1}$. Es en estos punto donde la siguiente condición se debe cumplir:

$$\frac{\partial V_\rho}{\partial \bar{x}_\rho} F(x) < 0 \quad (3.70)$$

desarrollando tenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_\rho}{\partial x_1}, \frac{\partial V_\rho}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V_\rho}{\partial x_{\rho-1}}, \frac{\partial V_\rho}{\partial x_\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_\rho \\ C \end{bmatrix} < 0 \quad (3.71)$$

$$\sum_{i=1}^{\rho-1} x_{i+1} \frac{\partial V_\rho}{\partial x_i} := \gamma_{i-1} Z_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) < 0 \quad (3.72)$$

$$\phi_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) - k_{i-1} s_{i-1d} [\sigma_{i-1}]^{\frac{r_i}{\alpha_{i-1}}} < 0 \quad (3.73)$$

llegando finalmente a la condición para la mayoría de las ganancias, exceptuado la última. Así como la forma de la función objetivo.

$$k_i > \max_{\bar{x}_i \in S_i} \left\{ \frac{\Phi_i(\bar{x}_i)}{s_{i,d} [\sigma_i(\bar{x}_i)]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}} \right\} := \max(f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})) \quad (3.74)$$

Para obtener el máximo de la función objetivo, en primera instancia obtenemos los puntos críticos, a través de igualar el gradiente al vector nulo,

$$\left[\frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(\bar{x}_i)}{\partial x_{\rho-1}}, \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \bar{k}_{i-1})}{\partial x_\rho} \right] = \emptyset \quad (3.75)$$

Por lo tanto, tendremos un número i de ecuaciones que resolver para la ganancia k_i , y en la penúltima ganancia $k_{\rho-1}$ tendremos $\rho - 1$ número de ecuaciones. Entonces para $i = 2, \dots, \rho - 1$, donde $j = 1, \dots, i$, tenemos lo siguiente

$$\frac{\partial f_i(\bar{x}_i)}{\partial x_j} = s_{id} [\sigma_i]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \phi_i \frac{\partial s_{id} [\sigma_i]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(\bar{x}_i)}{\partial x_j} &= s_{id} [\sigma_i]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \phi_i \left(\frac{\partial s_{id} [\sigma_i]^{\frac{r_{i+1}}{\alpha_i}}}{\partial x_j} \right) \\ &= |\sigma_i|^{\frac{r_{i+1}-\alpha_i}{\alpha_i}} \left[s_{id} \sigma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \phi_i \left(\frac{r_{i+1}}{\alpha_i} s_{id} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} + \sigma_i \frac{\partial s_{id}}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= s_{id} \sigma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \phi_i \left(\frac{r_{i+1}}{\alpha_i} s_{id} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} + \sigma_i \frac{\partial s_{id}}{\partial x_j} \right) \\ &= s_{id} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \phi_i \left[\frac{r_{i+1}}{\alpha_i} \frac{s_{id}}{\sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_{id}}{\partial x_j} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para obtener el limite inferior de los posibles valores para la ultima ganancia k_ρ . Obtenemos la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema, esta debe ser negativa definida, es decir:

$$\dot{V}_\rho \leq \frac{\partial V_\rho}{\partial \bar{x}_\rho} F(x) - k_\rho \xi(x) \frac{\partial V_\rho}{\partial \bar{x}_\rho} \varphi(x) \quad (3.78)$$

$$\dot{V}_\rho \leq \sum_{j=1}^{\rho-1} \partial_{x_j} V_\rho + C |s_{\rho,d}(x)| - k_\rho K_m s_{\rho,d} \frac{s_{\rho,d}(x)}{|s_{\rho,d}(x)|} < 0 \quad (3.79)$$

Llegando así a la condición para determinar la ultima ganancia.

$$k_\rho > \frac{1}{K_m} \left(\max_{x \in S_\rho} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} x_{j+1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|} \right\} + C \right) := f_\rho(k_{\rho-1}, C, K_m) \quad (3.80)$$

donde debemos obtener el máximo de la siguiente función, y como las cotas de las perturbaciones solo suman o multiplican a este valor máximo, podemos determinar el máximo de la función y posteriormente agregar el efecto de las cotas de las perturbaciones.

$$f_\rho(\bar{x}_\rho) = \frac{\sum_{j=1}^{\rho-1} x_{j+1} \partial_{x_j} V_\rho}{|s_{\rho,d}(x)|} \quad (3.81)$$

Obtenemos los puntos críticos igualando el gradiente al vector nulo

$$\left[\frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_{\rho-1}}, \frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_\rho} \right] = \emptyset \quad (3.82)$$

Obteniendo un número ρ de ecuaciones que resolver, que tienen la siguiente forma, donde $j = 1, \dots, \rho$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho)}{\partial x_j} &= \frac{|s_{\rho,d}| \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \phi_\rho \frac{\partial |s_{\rho,d}|}{\partial x_j}}{|s_{\rho,d}|^2} \\ &= |s_{\rho,d}| \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \phi_\rho \frac{\partial |s_{\rho,d}|}{\partial x_j} \\ &= |s_{\rho,d}| \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \phi_\rho \frac{s_{\rho,d}}{|s_{\rho,d}|} \frac{\partial s_{\rho,d}}{\partial x_j} \\ &= |s_{\rho,d}| \left(|s_{\rho,d}| \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \phi_\rho \frac{s_{\rho,d}}{|s_{\rho,d}|} \frac{\partial s_{\rho,d}}{\partial x_j} \right) \\ &= |s_{\rho,d}|^2 \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \phi_\rho s_{\rho,d} \frac{\partial s_{\rho,d}}{\partial x_j} \\ &= s_{\rho,d} \left(s_{\rho,d} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \phi_\rho \frac{\partial s_{\rho,d}}{\partial x_j} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Obteniendo así el sistema de ecuaciones a resolver, donde para $j = 1, \dots, \rho$

$$\frac{\partial f_\rho(\bar{x}_\rho, \bar{k}_{\rho-1})}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_j} - \frac{\phi_\rho}{s_{\rho,d}} \frac{\partial s_{\rho,d}}{\partial x_j} \quad (3.84)$$

□

Para obtener las ecuaciones de los rayos de puntos máximos es necesario la obtención de algunas parciales, las cuales a continuación presentaremos:

$$\frac{\partial s_{id}}{\partial x_i} = \frac{m - r_i}{r_i} |x_i|^{\frac{m-2r_i}{r_i}} \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial s_{id}}{\partial x_{i-1}} = \frac{m-r_i}{r_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{m-r_i}{r_i}} |\sigma_{i-1}|^{\frac{m-r_i-\alpha_{i-1}}{\alpha_{i-1}}} |x_i|^{\frac{\alpha_{i-1}-r_{i-1}}{r_{i-1}}} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{r_i} |x_i|^{\frac{\alpha_i-r_i}{r_i}} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{i-1} x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right) + \gamma_{i-1} s_{i-1d} + \frac{\partial W_i}{\partial x_{i-1}} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i-1}} = \sum_{j=1}^{i-1} x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \left(\gamma_{i-1} \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right) + \gamma_{i-1} \gamma_{i-2} s_{i-2d} + \gamma_{i-1} \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x_{i-2}} + \frac{\partial W_i}{\partial x_{i-2}} \quad (3.89)$$

donde para $j = 1, \dots, i-1$, tenemos:

$$\frac{\partial W_i}{\partial x_j} = \frac{m-r_i}{\alpha_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{r_i}} |v_{i-1}|^{\frac{m-r_i-\alpha_{i-1}}{r_i}} s_i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_j} \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right) = \frac{m-r_i}{\alpha_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{r_i}} |v_{i-1}|^{\frac{m-r_i-\alpha_{i-1}}{r_i}} \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_j} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{m-r_i}{\alpha_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{r_i}} \left[x_i |v_{i-1}|^{\frac{m-r_i-\alpha_{i-1}}{r_i}} \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \left(\frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_j} \right) + \frac{m-r_i-\alpha_{i-1}}{r_i} x_i [v_{i-1}]^{\frac{m-2r_i-\alpha_{i-1}}{r_i}} \frac{\sigma_{i-1}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \right] \\ &\quad - \frac{m-r_i}{\alpha_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{r_i}} \left[[v_{i-1}]^{\frac{m-\alpha_{i-1}}{r_i}} \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \left(\frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_j} \right) + \frac{m-\alpha_{i-1}}{r_i} |v_{i-1}|^{\frac{m-r_i-\alpha_{i-1}}{r_i}} \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \right] \end{aligned} \quad (3.92)$$

Los rayos para el cálculo de ganancias, así como el algoritmo para la obtención de ganancias para los controladores de segundo hasta quinto orden han sido implementados en Matlab/Simulink. El código se encuentra en el apartado del Apéndice A.

3.3.1. Controlador de tercer orden

En el caso de un sistema de tercer orden con salida $\sigma = x_1$, el sistema con respecto a la salida seleccionada es de grado relativo tres. Para este caso, el diseño del controlador es equivalente a diseñar un controlador para la DI 3.93 que lleve los estados al origen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &\in [-C, C] + [K_m, K_m]u \end{aligned} \quad (3.93)$$

El algoritmo de control a obtener ganancias es el discontinuo anidado de tercer orden el cual tiene la siguiente forma:

$$u = -k_3 \left[[x_3]^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[[x_2]^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0, \quad (3.94)$$

donde k_1 , k_2 y k_3 son números reales positivos, además son las ganancias del controlador. Con ayuda del algoritmo para la obtención de ganancias cuyo código implementado en Matlab se encuentra en el apartado del Apéndice A.3. Algunas ganancias obtenidas son las presentadas en la Tabla 3.2.

Ganancias para el controlador de tercer orden			
Pesos y grados de homogeneidad	k_1	k_2	k_3
$m = 5, r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	1.5373	4550.2
$m = 7, r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	2.0126	1399.1
$m = 9, r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	2.7757	4974.8
$m = 11, r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [2, 3, 4]$	1	3.6427	15502

Tabla 3.2 Tabla de ganancias para controlador de tercer orden, donde $C = 0$ y $K_m = 1$

En la obtención de las ganancias se utilizó la siguiente función de Lyapunov de control

$$V_3 = \gamma_2 \left(\gamma_1 \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} - [v_1]^{\frac{m-r_2}{r_2}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) |v_1|^{\frac{m}{r_2}} \right. \\ \left. + \frac{r_3}{m} |x_3|^{\frac{m}{r_3}} - [v_2]^{\frac{m-r_3}{r_3}} x_3 + \left(1 - \frac{r_3}{m}\right) |v_2|^{\frac{m}{r_3}} \right) \quad (3.95)$$

$$V_3 = \gamma_2 V_2 + W_3 \quad (3.96)$$

La condición para fijar la primera ganancia basta con que sea positiva $k_1 > 0$. Por otro lado para la segunda ganancias tenemos que cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\partial V_3}{\partial \bar{x}_3} g(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_3}{\partial \bar{x}_3} F(x) < 0 \quad (3.97)$$

Determinamos los puntos donde se anula el primer gradiente, por lo cual tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{\partial W_3}{\partial x_3} = s_{3d} = 0 \quad (3.99)$$

en consecuencia $s_3 = 0$ y por lo tanto el control virtual queda como $x_3 = v_2$. Es en estos punto la siguiente condición se debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{\partial V_3}{\partial \bar{x}_3} F(x) < 0 \quad (3.100)$$

desarrollando tenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ C \end{bmatrix} < 0 \quad (3.101)$$

$$x_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} < 0 \quad (3.102)$$

$$x_2 \frac{\partial(\gamma_2 V_2 + W_3)}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial(\gamma_2 V_2 + W_3)}{\partial x_2} < 0 \quad (3.103)$$

$$x_2 \frac{\partial(\gamma_2 V_2)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial(\gamma_2 V_2)}{\partial x_2} < 0 \quad (3.104)$$

$$\gamma_2 \phi_2 - \gamma_2 k_2 [\sigma_2]^{\frac{r_3}{\alpha_2}} s_{2d} < 0 \quad (3.105)$$

llegando así a la caracterización del tamaño de la ganancia k_2 como:

$$k_2 > \max_{x \in S_2} \left(\frac{\phi_2}{s_{2d} [\sigma_2]^{\frac{r_3}{\alpha_2}}} \right) \quad (3.106)$$

Para determinar el limite inferior del conjunto de valores para la ganancia k_2 y posteriormente fijar su valor, tenemos la función objetivo $f_2(\bar{x}_2)$, en su forma general para el caso del controlador de tercer orden:

$$f_2(\bar{x}_2, k_1) = \frac{\phi_2}{s_{2d}[\sigma_2]^{\frac{r_3}{\alpha_2}}}, \quad (3.107)$$

donde para obtener el punto máximo tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_1} \right] &= 0, \\ s_{2d} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \phi_2 \left[\frac{r_3}{\alpha_2} \frac{s_{2d}}{\sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3.108)$$

donde las funciones que lo conforman tienen la siguiente forma:

$$\phi_2 = x_2 \left(\gamma_2 s_{1d} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.109)$$

$$s_{2d} = [x_2]^{\frac{m-r_2}{r_2}} - [v_1]^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.110)$$

$$\sigma_2 = [x_2]^{\frac{\alpha_2}{r_2}} - [v_1]^{\frac{\alpha_2}{r_2}} \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} \right) + \gamma_2 s_{1d} + \frac{\partial W_2}{\partial x_1} \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial s_{2d}}{\partial x_2} = \frac{m-r_2}{r_2} |x_2|^{\frac{m-r_2}{r_2}} \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} = \frac{\alpha_2}{r_2} |x_2|^{\frac{\alpha_2-r_2}{r_2}} \quad (3.114)$$

Después de determinar el valor de la segunda ganancias como $k_2 = 1.1\hat{k}_2$. Procedemos con la última ganancia k_3 , cuya condición se obtiene de la derivada de la función de Lyapunov de control a lo largo de las trayectorias del sistema.

$$\frac{\partial V_3}{\partial \bar{x}_3} (F(x) + g(x)u) < 0 \quad (3.115)$$

desarrollando tenemos

$$\left[\frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \frac{\partial V_3}{\partial x_2}, \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right] \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ C \end{bmatrix} - k_3 [\sigma_3]^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (3.116)$$

$$x_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + C s_{3d} - k_3 K_m s_{3d} [\sigma_3]^0 < 0 \quad (3.117)$$

$$\gamma_2 \phi_2 + x_2 \frac{\partial W_3}{\partial x_1} + x_3 \left(\gamma_2 s_{2d} + \frac{\partial W_3}{\partial x_2} \right) + C s_{3d} - k_3 K_m s_{3d} [\sigma_3]^0 < 0 \quad (3.118)$$

Llegando así a la caracterización del tamaño de la última ganancia k_3

$$k_3 > \frac{1}{K_m} \left(\max_{x \in S_3} \left(\frac{\gamma_2 \phi_2 + x_2 \frac{\partial W_3}{\partial x_1} + x_3 \left(\gamma_2 s_{2d} + \frac{\partial W_3}{\partial x_2} \right)}{|s_{3d}|} \right) + C \right) \quad (3.119)$$

Para el caso de la ganancia k_3 , la función objetivo $f_3(\bar{x}_3, \bar{k}_2)$:

$$f_3(\bar{x}_3) = \frac{\phi_3}{|s_{3d}|} = \frac{\gamma_2 \phi_2 + x_2 \frac{\partial W_3}{\partial x_1} + x_3 \left(\gamma_2 s_{2d} + \frac{\partial W_3}{\partial x_2} \right)}{|[x_3]^{\frac{m-r_3}{r_3}} - [v_2]^{\frac{m-r_3}{r_3}}|} \quad (3.120)$$

donde para obtener el punto máximo es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} - \frac{\phi_3}{s_{3d}} \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \frac{\phi_3}{s_{3d}} \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} - \frac{\phi_3}{s_{3d}} \frac{\partial s_{3d}}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}\tag{3.121}$$

donde las ecuaciones que lo conforman son:

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial W_3}{\partial x_1} \right) + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial W_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial W_3}{\partial x_2}\tag{3.122}$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\gamma_2 \frac{\partial W_2}{\partial x_1} + \frac{\partial W_3}{\partial x_1} \right) + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\gamma_2 s_{2d} + \frac{\partial W_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial W_3}{\partial x_2}\tag{3.123}$$

$$\frac{\partial s_{3d}}{\partial x_3} = \frac{m - r_3}{r_3} |x_3|^{\frac{m-2r_3}{r_3}}\tag{3.124}$$

$$\frac{\partial s_{3d}}{\partial x_2} = \frac{m - r_3}{r_2} k_2 |v_2|^{\frac{m-2r_3}{r_3}} |\sigma_2|^{\frac{r_3-\alpha_2}{\alpha_2}} |x_2|^{\frac{\alpha_2-r_2}{r_2}}\tag{3.125}$$

3.3.1.1. Implementación en MATLAB/Simulink

Para las simulaciones aplicaremos el algoritmo para la obtención de ganancias. Como primer paso determinamos los valores del vector de pesos, así como los grados de homogeneidad.

$$\begin{aligned}m &= 5 \quad \gamma = [1, 1], \\ r &= [r_1, r_2, r_3] = [3, 2, 1], \\ \alpha &= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [3, 4, 5]\end{aligned}\tag{3.126}$$

Como segundo paso determinamos el valor de la primer ganancia, para este caso $k_1 = 1$. En el tercer paso determinamos la función objetivo $f_2(\bar{x}_2)$, esto lo hacemos con la ayuda de la función de Matlab que se encuentra en el Apéndice A.

Solucionamos el sistema de ecuaciones buscado el máximo en el círculo unitario, en la Figura 3.11a se muestra el punto máximo encontrado, el cual es la intersección entre el círculo unitario $x_1^2 + x_2^2 = 1$ y las parciales obtenidas. Para obtener el límite inferior \hat{k}_2 de los posibles valores para la ganancia k_2 , evaluamos el punto en la función objetivo obteniendo así:

$$\hat{k}_2 = f_2(\bar{x}_2, k_1) = f_2(x_1, \sqrt{1 - x_1^2}, k_1) = f_2(0.334922, 0.9422, 1) = 1.3976\tag{3.127}$$

En la Figura 3.11b podemos observar a la función objetivo y al plano del punto del valor máximo de la función, donde podemos corroborar que encontramos el valor máximo. Para finalizar con la segunda ganancia fijamos su valor de la siguiente manera, donde para las simulaciones fijamos el valor como:

$$k_2 = 1.1\hat{k}_2 = 1.1(1.3976) = 1.5373\tag{3.128}$$

Una vez fijadas las primera dos ganancias como $k_1 = 1$ y $k_2 = 1.5373$ procedemos a obtener el valor para la última ganancia. Tenemos que resolver un sistema de ecuaciones de tres variables y tres ecuaciones; sin embargo debido a que la función es homogénea de grado cero, podemos buscar solo sobre la esfera homogénea unitaria $|x_1|^{\frac{1}{3}} + |x_2|^{\frac{1}{2}} + |x_3| = 1$, esto nos ayuda a reducir en uno el numero de ecuaciones a resolver. Obtenemos las funciones correspondiente con ayuda del código del Apéndice A. En la figura 3.12a se muestran las parciales de $f_3(\bar{x}_3, k_1, k_2)$, donde la intersección de ambas curvas nos da como resultado un punto critico. En total tenemos

tres puntos críticos, sin embargo el de interes ya que evaluado en la función objetivo resulta en el valor mas grande es el que se muestra en la figura:

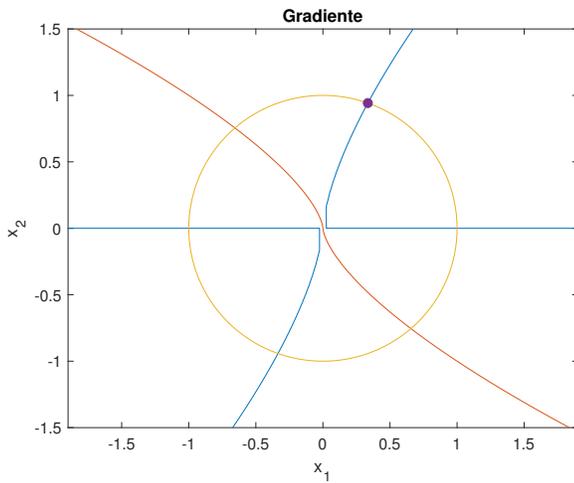
$$\hat{k}_3 = f_3(\bar{x}_3, k_1, k_2) = f_2(-1, x_2, x_3, k_1, k_2) = f_3(-1, 1.000004, 0.0848, 1, 1.5373) = 4136.5 \quad (3.129)$$

$$\hat{k}_3 = f_3(\bar{x}_3, k_1, k_2) = f_2(0, x_2, x_3, k_1, k_2) = f_3(0, 17.7021, 5.4274, 1, 1.5373) = 5.1507 \quad (3.130)$$

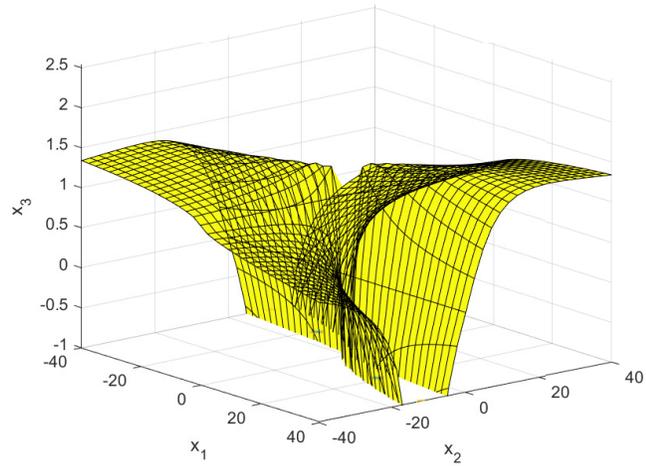
$$\hat{k}_3 = f_3(\bar{x}_3, k_1, k_2) = f_2(1, x_2, x_3, k_1, k_2) = f_3(1, -1.000004, -0.0848, 1, 1.5373) = 4136.5 \quad (3.131)$$

Finalmente fijamos el valor de la ganancia k_3 de la siguiente manera, donde para las simulaciones consideramos las cotas de las perturbaciones como $k_m = C = 1$:

$$k_3 = \frac{1}{k_m} (1.1\hat{k}_3 + C) = 1.1(4136.5) = 4550.2 \quad (3.132)$$

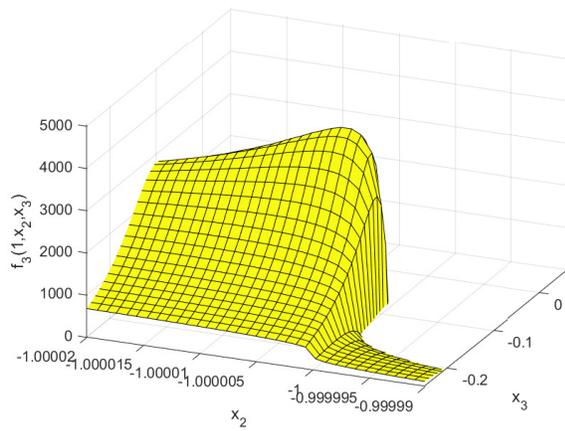
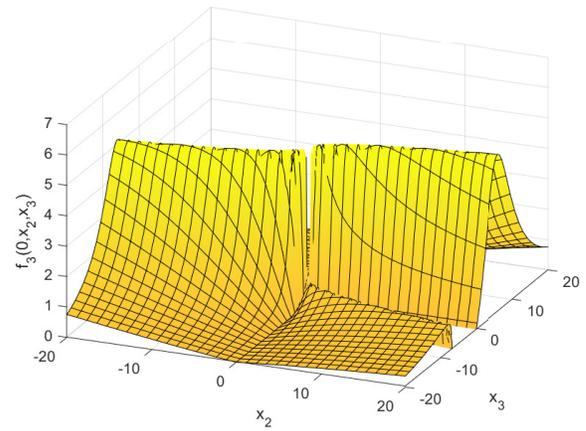
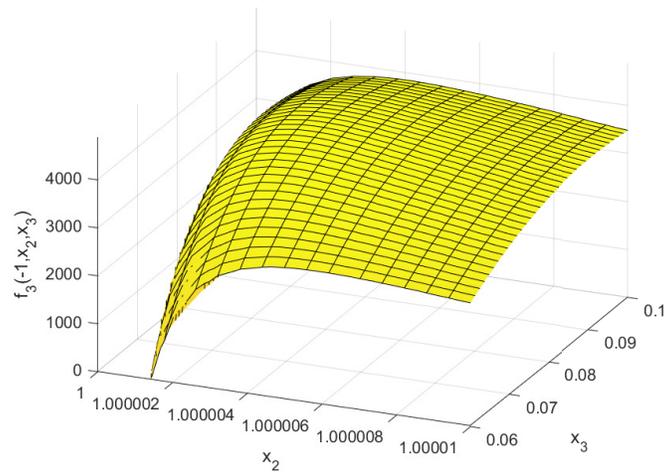


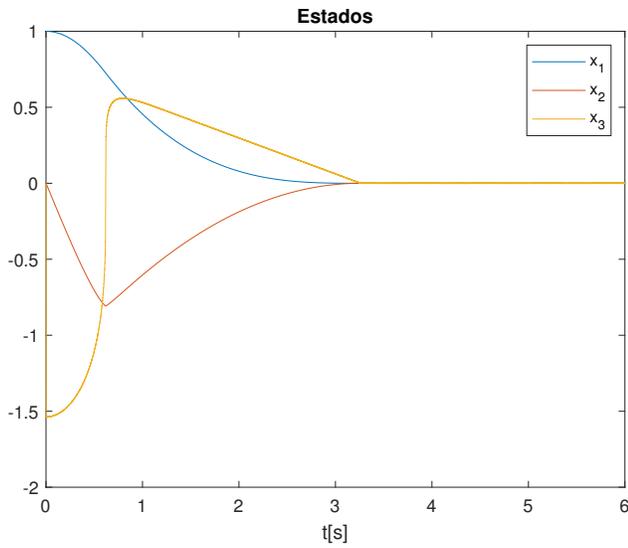
(a) Gradiente igualado a cero y círculo unitario



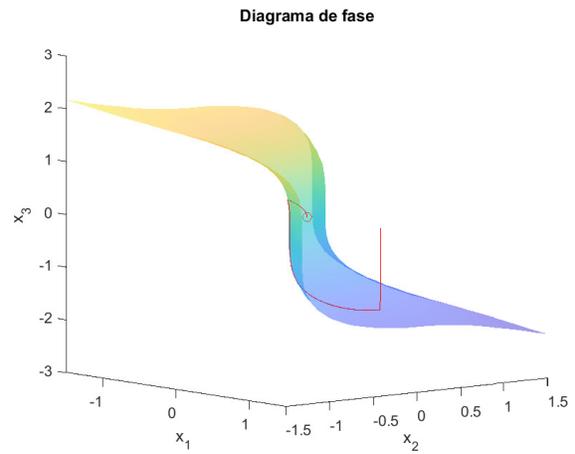
(b) Función objetivo $f_2(\bar{x}_2, k_1)$

Figura 3.11 Máximo de la función objetivo $f_2(x_1, x_2, x_3, k_1, k_2)$

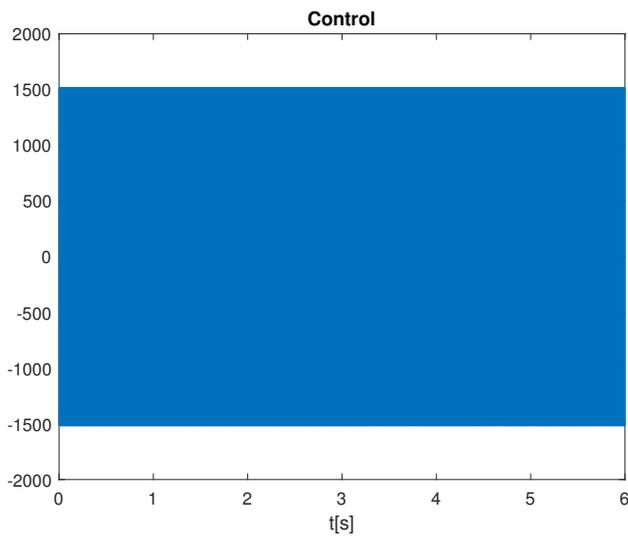
(a) Función objetivo $f_3(1, x_2, x_3, k_1, k_2)$ (b) Función objetivo $f_3(0, x_2, x_3, k_1, k_2)$ (c) Función objetivo $f_3(-1, x_2, x_3, k_1, k_2)$ Figura 3.12 Máximo de $k_3(\bar{x}_3, k_1, k_2)$



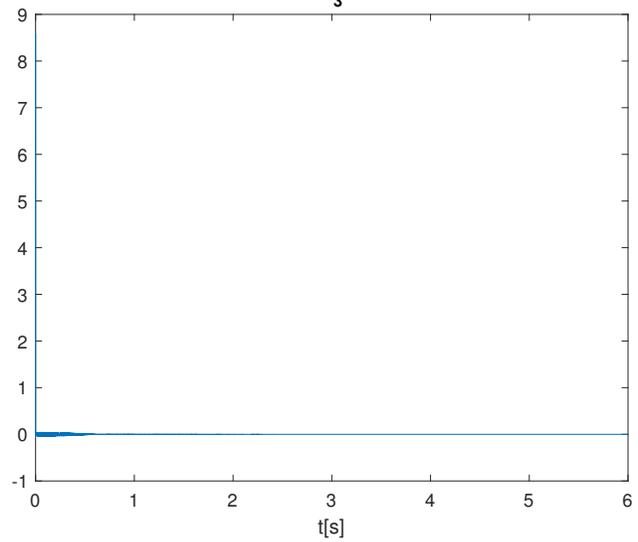
(a) Respuesta del sistema



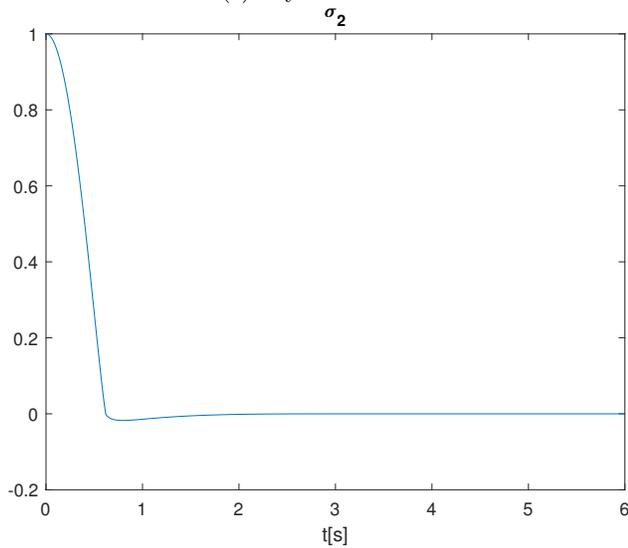
(b) Diagrama de fase



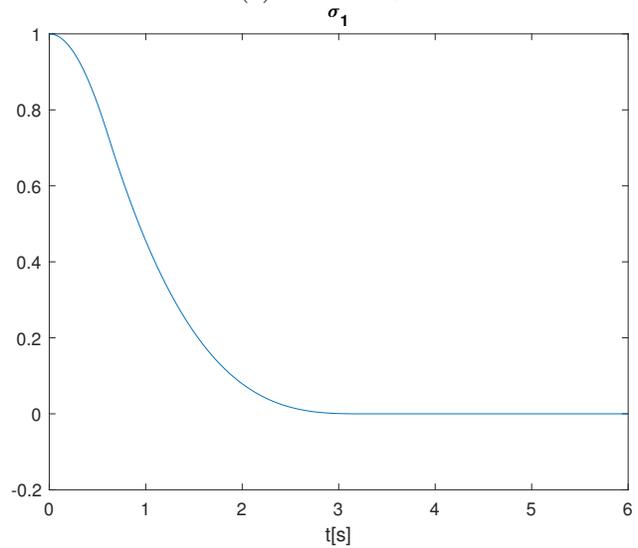
(c) Ley de control



(d) Variable σ_3

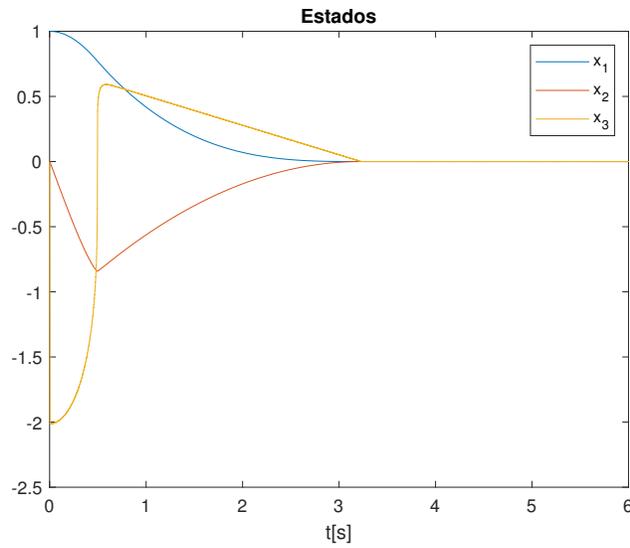


(e) Variable σ_2

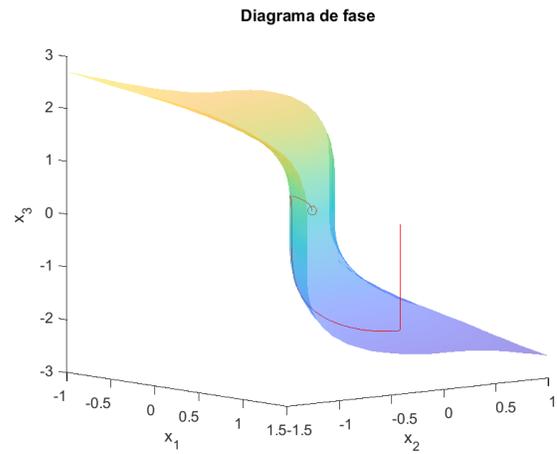


(f) Variable σ_1

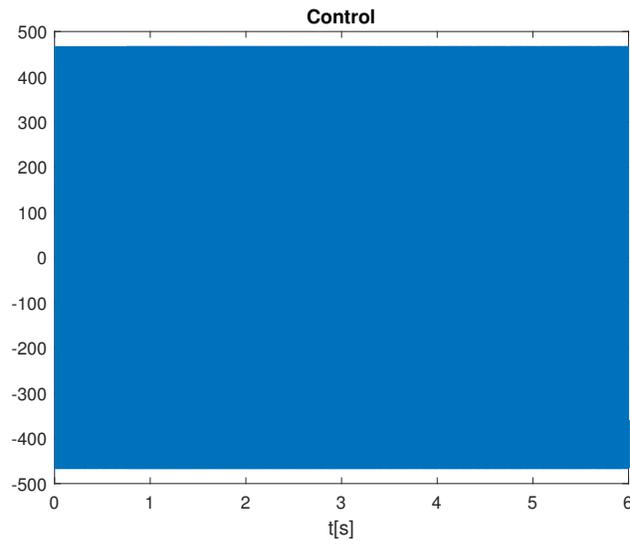
Figura 3.13 Controlador de tercer orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 1.5373$, $k_3 = 4550.2$, $m = 5$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [3, 4, 5]$



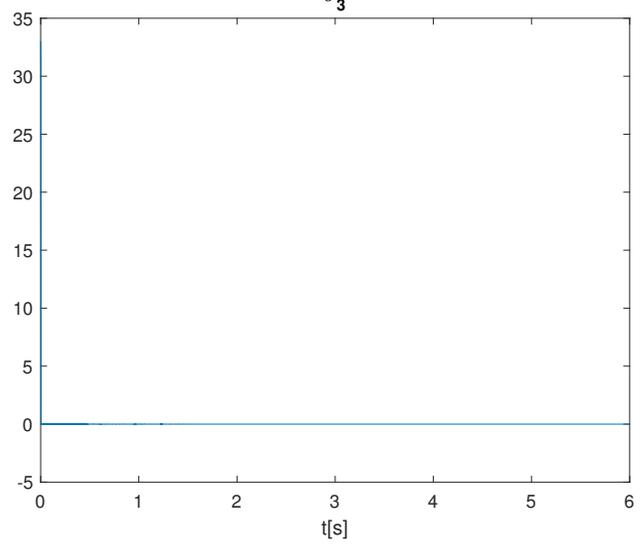
(a) Respuesta del sistema



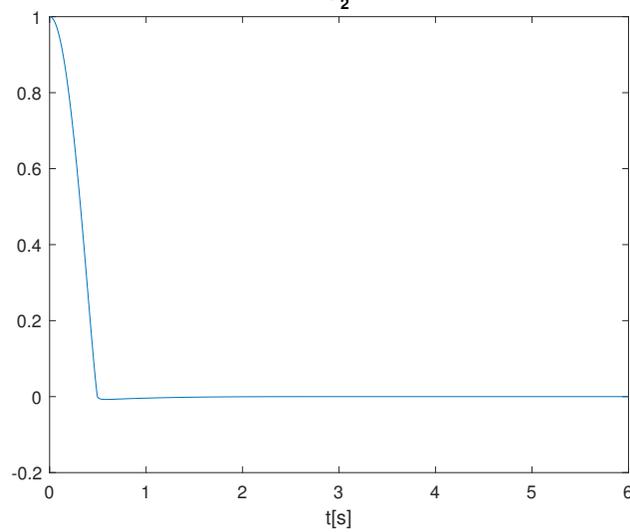
(b) Diagrama de fase



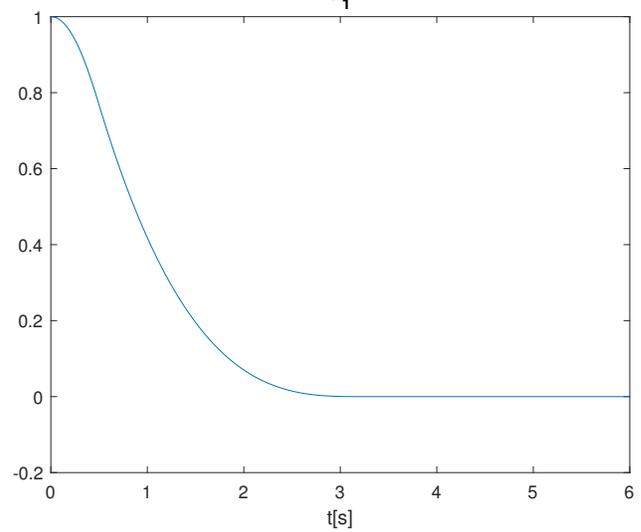
(c) Ley de control σ_2



(d) Variable σ_3

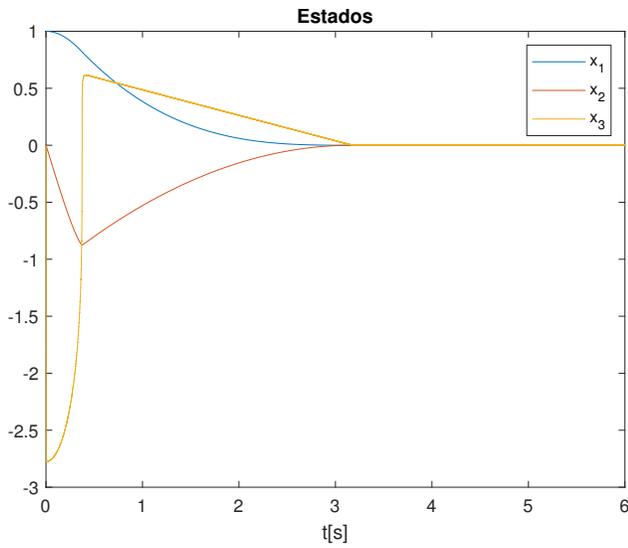


(e) Variable σ_2

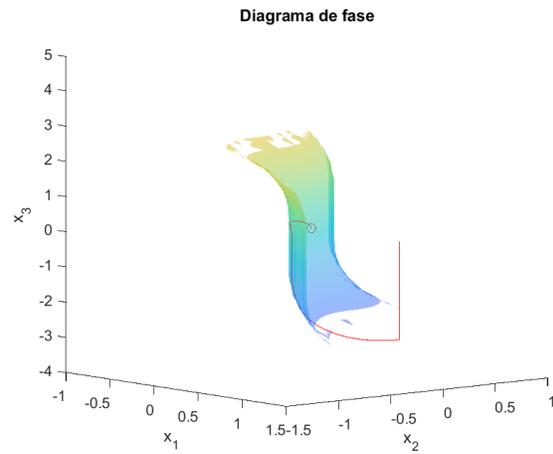


(f) Variable σ_1

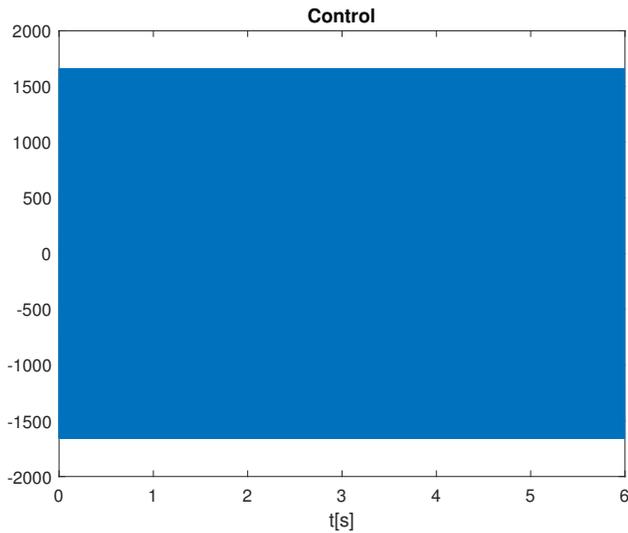
Figura 3.14 Controlador de tercer orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 2.0126$, $k_3 = 1399.1$, $m = 7$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [3, 4, 5]$



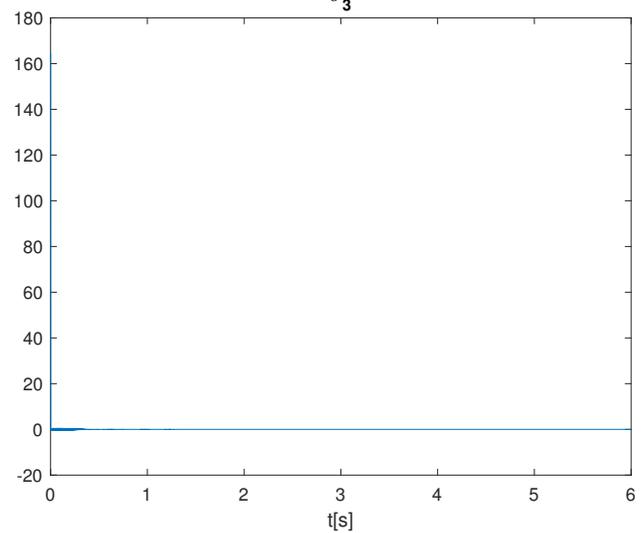
(a) Respuesta del sistema



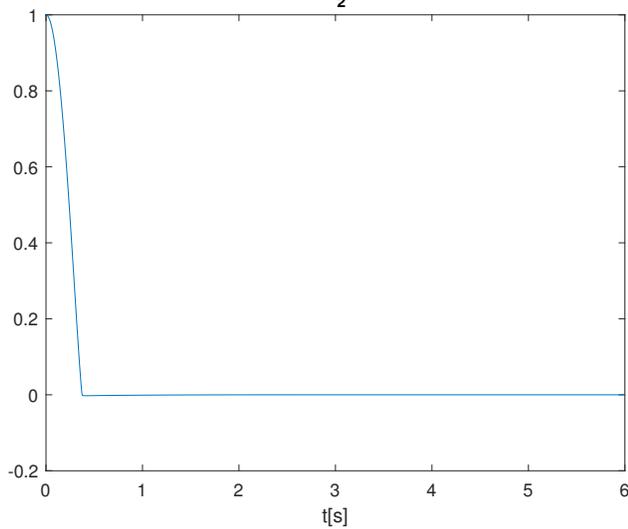
(b) Diagrama de fase



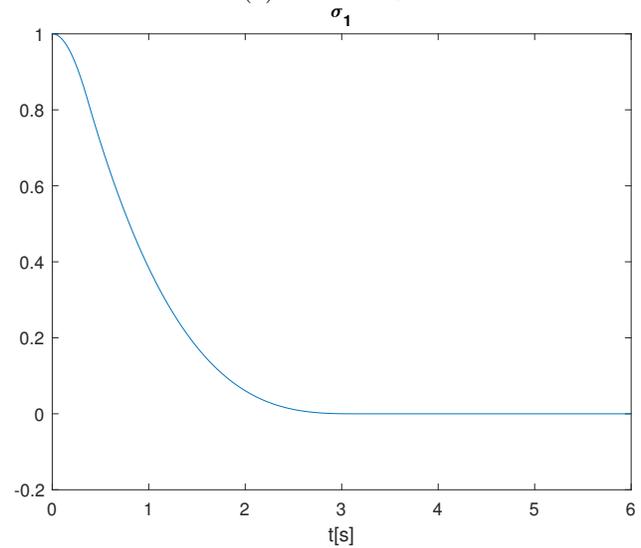
(c) Ley de control σ_2



(d) Variable σ_3



(e) Variable σ_2



(f) Variable σ_1

Figura 3.15 Controlador de tercer orden con $k_1 = 1$, $k_2 = 2.7757$, $k_3 = 4974.8$, $m = 9$, $r = [3, 2, 1]$ y $\alpha = [3, 4, 5]$

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se presentó e implementó un algoritmo para la obtención de juegos de ganancias de la familia de controladores discontinuos anidados. Estos controladores se caracterizan por estar basados en modos deslizantes de alto orden, así como por producir leyes de control discontinuas capaces de compensar perturbaciones e incertidumbres acopladas y acotadas .

El número de ganancias depende directamente del orden del controlador; por lo tanto, cuanto mayor sea el orden del controlador el número de ganancias aumenta. El algoritmo es recursivo se puede describir a grandes rasgos en tres pasos generales: como primer paso se determinan los pesos y grados de homogeneidad. En el segundo paso se fija el valor de la primera ganancia, la cual basta con ser positiva, finalmente las siguientes ganancias depende del valor de todas las ganancias anteriores, así como determinar el valor máximo de una función.

Si bien se presentaron una gran cantidad de juegos de ganancias para los controladores de segundo y tercer orden, no se presentó ningún criterio de selección que este ligado a mejorar el desempeño; es decir, lo presentado no es un criterio de sintonización de los controladores puesto que no ofrece el mejor juego de ganancias respecto a algún criterio. La ventaja de los juegos de ganancias propuestos en este trabajo de tesis es que cumplen las condiciones teóricas de estabilidad proporcionadas por la CLF, por lo que los juegos de ganancias garantizan la estabilidad del sistema, así como la convergencia en tiempo finito.

4.0.1. Trabajo a futuro

El trabajo a futuro en el diseño e implementación de ganancias para controladores homogéneos de grado cero se orientan al mejoramiento del algoritmo mediante métodos numéricos, la extensión a otros algoritmos de control y el desarrollo de criterios de sintonización que permitan elegir mediante ciertos criterios los mejores juegos de ganancias. A continuación se listan algunas ideas generales de los posibles caminos a seguir:

- Centrándonos aun en la familia de controladores discontinuo anidado y cuasicontinuos, el siguiente paso inmediato es mejorar la obtención del máximo para controladores de orden superior, es decir, para controladores de cuarto orden en adelante.
- Otro paso importante es el desarrollo de posibles escalamientos para las ganancias que aseguren la estabilidad del sistema en lazo cerrado y que permita compensar un mayor tipo de perturbaciones.
- Los controladores presentados se caracterizan por dar leyes de control discontinuas por lo que otro paso a seguir es el extender el método de obtención de ganancias a otras familias de controladores especialmente a controladores que proporcionen leyes de control continuas, como por ejemplo:
 - Control discontinuo con acción integral (DIA, por sus siglas en ingles)
 - PID-*Like*

- Desarrollar criterios de sintonización para la familia de controladores discontinuo anidado y cuasicontinuos. Algunos posibles criterios son:
 1. Atenuación del *chattering*
 2. Tiempo de convergencia
 3. Sobrepaso, etc.
- En cuanto a los controladores continuos *PID-Like* y el STA ya existe un criterio para la sintonización de las ganancias baso en métodos de frecuencia. Este método busca predecir el *chattering* en estado permanente provocado por dinámicas parásitas, y propone ganancias que minimizan la amplitud del *chattering* y el gasto energético. Por lo que el siguiente paso es extender esta metodología en primera instancia a controladores basados en el *PID-Like* de mayor orden, asi como en otras familias de controladores como el DIA.
- Una de los obstáculos en la promoción del uso de HOSMC es la falta de herramientas de *software* que sistematicen el proceso de selección, diseño, simulación e implementación de algoritmos basados en modos deslizantes. Por esta razón un importante trabajo a futuro es la sistematización e incorporación a algún paquete de *software* de todos los métodos de cálculo y diseño de ganancias para controladores basados en HOSM. Si bien existen varios paquetes que implementan algoritmos basados en modos deslizantes, la mayoría no refleja el estado actual de los avances de estos algoritmo, por lo que es de suma importancia una actualización de los algoritmos presentados en trabajos previos.

Apéndice A

Código

A.1. Código para la obtención de la función a maximizar

Función para los corchetes signados

```
1 function corchetes_signados = Csign(x,m)
2 % Csign devuelve los corchetes signados elevados a la m .
3 % C = Csign(x,m) .
4 % C = |x|^m*sign(x).
5 corchetes_signados=abs(x).^(m)*sign(x);
6 end
7
```

Función para determinar la función objetivo

```
1 function fi= f_i(i,k,a,r,m,y)
2 if length(r)==i
3 phi= phi_i(i,k,a,r,m,y);
4 sigmai=@(x)sigma_i(i,x,k,a,r);
5 %fi=@(x) -phi(x)/abs(sd_i(i,x,k,a,r,m));
6 fi=@(x) -phi(x)/(sd_i(i,x,k,a,r,m)*Csign(sigmai(x),0));
7 S = 'k_rho';
8 disp(S)
9 end
10 if length(r)>i
11 phi= phi_i(i,k,a,r,m,y);
12 fi=@(x) -phi(x)/(sd_i(i,x,k,a,r,m)*Csign(sigma_i(i,x,k,a,r),r(i+1)/a(i)));
13 S = 'k_i';
14 disp(S)
15 end
16 end
17
```

Funciones r-homogéneas

```
1 function phi= phi_i(i,k,a,r,m,y)
2 zi= z_i(i-1,k,a,r,m,y);
3 psi=psi_i(i-1,k,a,r,m,y);
4 phi=@(x) y(i-1)*zi{i-1}(x)+ s_i(i,x,k,a,r)*psi(x);
5 end
6
```

```
1 function z= z_i(i,k,a,r,m,y)
2 z=cell(1:i);
3 z{1}=@(x) v_i(1,x,k,a,r)*sd_i(1,x,k,a,r,m);
4 if i>1
5 for n=2:i
6 psi=psi_i(n-1,k,a,r,m,y);
7 z{n}=@(x) y(n-1)*z{n-1}(x) + s_i(i,x,k,a,r)*psi(x) + sd_i(i,x,k,a,r,m)*v_i(i,x,k,a,r);
8 end
9 end
10 end
11
```

```
1 function psi= psi_i(i,k,a,r,m,y)
2 if i==1
3 %v1=@(x) v_i(1,x,k,a,r);
4 %sid=@(x) sd_i(1,x,k,a,r,m);
5 sigmai_x1=@(x) psigmai_xj2(1,1,x,k,a,r);
```

```

6 |         psi=@(x) y(1)*sd_i(1,x,k,a,r,m) + (m-r(2))/a(1)*k(1)^(a(1)/r(2))*abs(v_i(1,x,k,a,r))^(m-r(2)-a(1))/r(2)*( x(2)*(
7 |         psigma1x1(x) );
8 |     end
9 |     if i>1
10 |         [psigma2xjv, sumpv]= vpsigmai_xj(i,k,a,r);
11 |         psi= @(x) y(i)*sd_i(i,x,k,a,r,m) + (m-r(i+1))/a(i)*k(i)^(a(i)/r(i+1))*abs(v_i(1,x,k,a,r))^(m-r(i+1)-a(i))/r(i+1)*(
12 |         sumpv(x) );
13 |     end

```

```

1 | function s = s_i(i,x,k,a,r)
2 |     if i==1
3 |         s= x(1);
4 |     end
5 |     if i>1
6 |         s=x(i)-v_i(i-1,x(1:i-1),k(1:i-1),a(1:i-1),r(1:i));
7 |     end
8 | end
9 |

```

```

1 | function sd = sd_i(i,x,k,a,r,m)
2 |     if i==1
3 |         sd=Csign(x(1),(m-r(1))/r(1)) ;
4 |     end
5 |     if i>1
6 |         sd= Csign(x(i),(m-r(i))/r(i))-Csign(v_i(i-1,x(1:i-1),k(1:i-1),a(1:i-1),r(1:i)),(m-r(i))/r(i));
7 |     end
8 | end
9 |

```

```

1 | function sigma = sigma_i(i,x,k,a,r)
2 |     %sigma(1,rho)=zeros;
3 |     %sigma=0;
4 |     if i==1
5 |         sigma= Csign(x(1),a(1)/r(1));
6 |     end
7 |     if i>1
8 |         sigma= Csign(x(i),a(i)/r(i))+ k(i-1)^(a(i)/r(i))*Csign(sigma_i(i-1,x(1:i-1),k(1:i-1),a(1:i-1),r(1:i-1)),a(i)/a(i-1));
9 |     end
10 | end
11 |
12 |

```

```

1 | function psigmaixj = psigmai_xj2(i,j,x,k,a,r)
2 |     if i==j
3 |         psigmaixj= a(i)/r(i)*abs(x(i))^(a(i)-r(i))/r(i);
4 |     end
5 |     if i>j
6 |         psigmaixj=a(i)/a(i-1)*k(i-1)^(a(i)/r(i))*abs(sigma_i(i-1,x,k,a,r))^(a(i)-a(i-1))/a(i-1)*psigmai_xj2(i-1,j,x,k,a,r);
7 |     end
8 | end
9 |

```

```

1 | function v = v_i(i,x,k,a,r)
2 |     if i==1
3 |         v= -k(1)*Csign(x(1),r(2)/r(1));
4 |     end
5 |     if i>1
6 |         v=-k(i)*Csign(sigma_i(i,x,k,a,r),r(i+1)/a(i)) ;
7 |     end
8 | end
9 |

```

A.2. Cálculo de ganancias para el controlador de segundo orden

```

1 | clear all % se limpia el workspac
2 |
3 | Definicion de parametros
4 | k=[1];
5 | y=[1,1];
6 | r=[2,1];
7 | a=[2,3];
8 | m=3;
9 |
10 | Calculo de k_2
11 | Funcion a maximizar para obtener k_2

```

```

12 f32=f_i(2,k,a,r,m,y)
13
14
15 Funciones r-homogeneas
16
17 s1d=@(x) Csign(x(1),(m-r(1))/r(1))
18 ps1dx1=@(x) ((m-r(1))/r(1))*abs(x(1)).^((m-2*r(1))/r(1));
19
20 s2d=@(x) Csign(x(2),(m-r(2))/r(2)) + k(1)^((m-r(2))/r(2))*Csign(x(1),(m-r(2))/r(1));
21 ps2dx2=@(x) ((m-r(2))/r(2))*abs(x(2)).^((m-2*r(2))/r(2));
22 ps2dx1=@(x) ((m-r(2))/r(1))*k(1)^((m-r(2))/r(2))*abs(x(1)).^((m-r(2)-r(1))/r(1));
23
24 sigma2=@(x) Csign(x(2),(a(2))/r(2))+k(1).^((a(2))/r(2))*Csign(x(1),(a(2))/r(1));
25 psigma2x2=@(x) a(2)/r(2)*abs(x(2)).^((a(2)-r(2))/r(2));
26 psigma2x1=@(x) (a(2)/r(1))*k(1)^((a(2)/r(2))*abs(x(1)).^((a(2)-r(1))/r(1));
27 psigma2x1x2=@(x) 0;
28 psigma2x2x2=@(x) (a(2)/r(2))*((a(2)-r(2))/r(2))*abs(x(2)).^((a(2)-2*r(2))/r(2));
29
30 v1=@(x) -k(1)*Csign(x(1),r(2)/r(1));
31 pv1x1=@(x) -r(2)/r(1)*k(1)*abs(x(1)).^((r(2)-r(1))/r(1))
32 psigma1x1=@(x) a(1)/r(1)*abs(x(1)).^((a(1)-r(1))/r(1));
33 psigma1x1x1=@(x) (a(1)/r(1))*((a(1)-r(1))/r(1))*Csign(x(1),(a(1)-2*r(1))/r(1));
34
35 s2=@(x) x(2)-v1(x);
36
37 pw2x1=@(x) ((m-r(2))/a(1))*k(1)^((a(1)/r(2))*abs(v1(x)).^((m-r(2)-a(1))/r(2))*s2(x)*psigma1x1(x);
38 pw2x1x2=@(x) ((m-r(2))/a(1))*k(1)^((a(1)/r(2))*abs(v1(x)).^((m-r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1(x);
39
40 p1=@(x) (x(2)*abs(v1(x)).^((m-r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1x1(x)+(m-r(2)-a(1))/r(2)*x(2)*Csign(v1(x),(m-2*r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1(x)*pv1x1(x));
41
42 p2=@(x) (Csign(v1(x),(m-a(1))/r(2))*psigma1x1x1(x)+((m-a(1))/r(2))*abs(v1(x)).^((m-r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1(x)*pv1x1(x))
43 pw2x1x1=@(x) ((m-r(2))/a(1))*k(1)^((a(1)/r(2))*abs(v1(x)).^((m-r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1(x)*pv1x1(x));
44
45 phi2=@(x) x(2)*(y(2)*s1d(x)+pw2x1(x));
46 pphi2x1=@(x) x(2)*(y(2)*ps1dx1(x)+pw2x1x1(x));
47 pphi2x2=@(x) y(2)*s1d(x)+pw2x1(x)+x(2)*pw2x1x2(x);
48
49 pphix1=@(x) s2d(x)*pphi2x1(x)-phi2(x)*ps2dx1(x);
50 pphix2=@(x) s2d(x)*pphi2x2(x)-phi2(x)*ps2dx2(x);
51 M2=@(x) pphix2(x)-pphi2x1(x)/ps2dx1(x)*ps2dx2(x);
52
53 f32=@(x) phi2(x)/abs(s2d(x));
54
55 tic
56 ii=1;
57 x0=4; %punto inicial
58 xa2 = fsolve(@(x) M2([ii,x]),x0) %encuentra una raiz
59 toc
60
61 max=f32([ii,xa2])
62
63 Finalmente establecemos el valor de la ganancia k_2 como
64 k(2)=1.1*max
65

```

A.3. Cálculo de ganancias para el controlador de tercer orden

```

1 clear all % se limpia el workspace
2
3 Definicion de parametros
4 k=[1];
5 y=[1,1];
6 r=[3,2,1];
7 a=[3,4,5];
8 m=5;
9
10 Calculo de k_2
11 Funcion a maximizar para obtener k_2
12 %f32=f_i(2,k,a,r,m,y)
13
14 Funciones homogeneas
15 s1d=@(x) Csign(x(1),(m-r(1))/r(1))
16 ps1dx1=@(x) ((m-r(1))/r(1))*abs(x(1)).^((m-2*r(1))/r(1));
17 s2d=@(x) Csign(x(2),(m-r(2))/r(2)) + k(1)^((m-r(2))/r(2))*Csign(x(1),(m-r(2))/r(1));
18 ps2dx2=@(x) ((m-r(2))/r(2))*abs(x(2)).^((m-2*r(2))/r(2));
19 ps2dx1=@(x) ((m-r(2))/r(1))*k(1)^((m-r(2))/r(2))*abs(x(1)).^((m-r(2)-r(1))/r(1));
20
21 v1=@(x) -k(1)*Csign(x(1),r(2)/r(1));
22 pv1x1=@(x) -r(2)/r(1)*k(1)*abs(x(1)).^((r(2)-r(1))/r(1))
23 psigma1x1=@(x) a(1)/r(1)*abs(x(1)).^((a(1)-r(1))/r(1));
24 psigma1x1x1=@(x) (a(1)/r(1))*((a(1)-r(1))/r(1))*Csign(x(1),(a(1)-2*r(1))/r(1));
25
26
27 %sigma2=@(x) Csign(x(2),(a(2))/r(2)) - Csign(v1(x),(a(2))/r(2));
28 sigma2=@(x) Csign(x(2),(a(2))/r(2))+k(1).^((a(2))/r(2))*Csign(x(1),(a(2))/r(1));
29 psigma2x2=@(x) a(2)/r(2)*abs(x(2)).^((a(2)-r(2))/r(2));

```

```

30 | psigma2x1=@(x) (a(2)/r(1))*k(1)^(a(2)/r(2))*abs(x(1))^(a(2)-r(1))/r(1);
31
32 | psigma2x1x1=@(x) (a(2)/r(1))*((a(2)-r(1))/r(1))*k(1)^(a(2)/r(2))*Csign(x(1),((a(2)-2*r(1))/r(1)))
33 | psigma2x1x2=@(x) 0;
34 | psigma2x2x1=@(x) 0;
35 | psigma2x2x2=@(x) (a(2)/r(2))*((a(2)-r(2))/r(2))*abs(x(2))^(a(2)-2*r(2))/r(2);
36
37
38 | s2=@(x) x(2)-v1(x)
39 | pw2x1=@(x) ((m-r(2))/a(1))*k(1)^(a(1)/r(2))*abs(v1(x))^(m-r(2)-a(1))/r(2))*s2(x)*psigma1x1(x);
40 | pw2x1x2=@(x) ((m-r(2))/a(1))*k(1)^(a(1)/r(2))*abs(v1(x))^(m-r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1(x);
41
42 | p1=@(x) (x(2)*abs(v1(x))^(m-r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1x1(x)+(m-r(2)-a(1))/r(2)*x(2)*Csign(v1(x),(m-2*r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1(x)*pv1x1(x);
43 | p2=@(x) (Csign(v1(x),(m-a(1))/r(2))*psigma1x1x1(x)+(m-a(1))/r(2))*abs(v1(x))^(m-r(2)-a(1))/r(2))*psigma1x1(x)*pv1x1(x)
44 | pw2x1x1=@(x) ((m-r(2))/a(1))*k(1)^(a(1)/r(2))*psigma1x1x1(x)-p2(x);
45
46 | phi2=@(x) x(2)*( y(1)*s1d(x) + pw2x1(x));
47 | pphi2x1=@(x) x(2)*( ps1dx1(x)+pw2x1x1(x));
48 | pphi2x2=@(x) s1d(x)+pw2x1(x)+ x(2)*pw2x1x2(x);
49 | Parciales
50 | pf2x1=@(x) s2d(x)*pphi2x1(x)-phi2(x)*(r(3)/a(2))*s2d(x)/sigma2(x)*psigma2x1(x)+ps2dx1(x);
51 | pf2x2=@(x) s2d(x)*pphi2x2(x)-phi2(x)*(r(3)/a(2))*s2d(x)/sigma2(x)*psigma2x2(x)+ps2dx2(x);
52 | M=@(x) pphi2x2(x)- (pphi2x1(x))/(r(3)/a(2))*s2d(x)/sigma2(x)*psigma2x1(x)+ps2dx1(x)) *(r(3)/a(2))*s2d(x)/sigma2(x)*psigma2x2(x)+ps2dx2(x));
53
54 | Funcion a maximizar para obtener k_2
55 | f32=@(x) phi2(x)/(s2d(x))*Csign(sigma2(x),r(3)/a(2))
56
57
58 | tic
59 | x0=20; %punto inicial
60 | xa2 = fsolve(@(x) pf2x2([1,x]),x0); %encuentra una raiz
61 | toc
62 | Se busca el maximo evaluando el punto [1,xa2]
63 | k2=f32([1,xa2])
64 | k(2)>k2
65 | k(2)=k2*1.1
66
67 | syms x1 x2
68 | x=[x1,x2];
69 | fig32=figure
70 | fsurf(f32(x),20*[-2 2 -2 2], 'ShowContours', 'on')
71 | hold on
72 | fsurf(k2,20*[-.6 .6 -2 2], '--', 'EdgeColor', 'r')
73 | fsurf(k(2),20*[-.6 .6 -2 2], '-.-', 'EdgeColor', 'b')
74 | hold off
75 | zlim([-1,k(2)+1]);
76
77 | view([50.99 18.85])
78 | view([90 0])
79
80 | Calculo de k_3
81 | Funcion a maximizar para obtener k_3
82 | %f33=f_i(3,k,a,r,m,y)
83
84 | v2=@(x) -k(2)* Csign(sigma2(x),r(3)/a(2));
85 | pv2x2=@(x) -(r(3)/a(2))*k(2)*abs(sigma2(x))^(r(3)-a(2))/a(2))*psigma2x2(x);
86 | pv2x1=@(x) -(r(3)/a(2))*k(2)*abs(sigma2(x))^(r(3)-a(2))/a(2))*psigma2x1(x);
87
88 | s3d=@(x) Csign(x(3),(m-r(3))/r(3)) - Csign(v2(x),(m-r(3))/r(3));
89 | ps3dx3= @(x) ((m-r(3))/r(3))*abs(x(3))^(m-2*r(3))/r(3);
90 | ps3dx2= @(x) -(m-r(3))/r(3)*abs(v2(x))^(m-2*r(3))/r(3))*pv2x2(x);
91 | ps3dx1= @(x) -(m-r(3))/r(3)*abs(v2(x))^(m-2*r(3))/r(3))*pv2x1(x);
92
93 | s3=@(x) x(3)-v2(x);
94
95 | pw3x1=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*s3(x)*psigma2x1(x);
96 | pw3x2=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*s3(x)*psigma2x2(x);
97
98 | %%%
99
100 | w3x1x1p1=@(x) (x(3)*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x1x1(x)+(m-r(3)-a(2))/r(3)*x(3)*Csign(v2(x),(m-2*r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x1(x)*pv2x1(x);
101 | w3x1x1p2=@(x) (Csign(v2(x),(m-a(2))/r(3))*psigma2x1x1(x)+(m-a(2))/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x1(x)*pv2x1(x)
102 | pw3x1x1=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*(w3x1x1p1(x)-w3x1x1p2(x));
103
104 | w3x1x2p1=@(x) (x(3)*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x1x2(x)+(m-r(3)-a(2))/r(3)*x(3)*Csign(v2(x),(m-2*r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x1(x)*pv2x2(x);
105 | w3x1x2p2=@(x) (Csign(v2(x),(m-a(2))/r(3))*psigma2x1x2(x)+(m-a(2))/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x1(x)*pv2x2(x)
106 | pw3x1x2=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*(w3x1x2p1(x)-w3x1x2p2(x));
107
108 | %%%
109 | w3x2x1p1=@(x) (x(3)*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x2x1(x)+(m-r(3)-a(2))/r(3)*x(3)*Csign(v2(x),(m-2*r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x2(x)*pv2x1(x);
110 | w3x2x1p2=@(x) (Csign(v2(x),(m-a(2))/r(3))*psigma2x2x1(x)+(m-a(2))/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x2(x)*pv2x1(x)
111 | pw3x2x1=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*(w3x2x1p1(x)-w3x2x1p2(x));
112
113 | w3x2x2p1=@(x) (x(3)*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x2x2(x)+(m-r(3)-a(2))/r(3)*x(3)*Csign(v2(x),(m-2*r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x2(x)*pv2x2(x);
114 | w3x2x2p2=@(x) (Csign(v2(x),(m-a(2))/r(3))*psigma2x2x2(x)+(m-a(2))/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3))*psigma2x2(x)*pv2x2(x)
115 | pw3x2x2=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*(w3x2x2p1(x)-w3x2x2p2(x));

```

```

116 %%%
117
118 pw3x1x3=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3)*psigma2x1(x);
119 pw3x2x3=@(x) ((m-r(3))/a(2))*k(2)^(a(2)/r(3))*abs(v2(x))^(m-r(3)-a(2))/r(3)*psigma2x2(x);
120
121 %phi3=@(x) (v1(x)+s2(x))*( y(2)*y(1)*s1d(x)+y(2)*pw2x1(x)+pw3x1(x) ) + (v2(x)+s3(x))*( y(2)*s2d(x)+pw3x2(x) );
122 phi3=@(x) x(2)*( y(2)*y(1)*s1d(x)+y(2)*pw2x1(x)+pw3x1(x) ) + x(3)*( y(2)*s2d(x) + pw3x2(x) );
123 %phi3=@(x) ( y(2)*y(1)*s1d(x)+y(2)*pw2x1(x)+pw3x1(x) ) + ( y(2)*s2d(x) + pw3x2(x) );
124 %phi3=@(x) y(2)*phi2(x)+x(2)*pw3x1(x)+x(3)*pw3x2(x)+y(2)*s2d(x)*x(3);
125 pphi3x1=@(x) x(2)*( y(2)*y(1)*ps1dx1(x) + y(2)*pw2x1x1(x) +pw3x1x1(x) ) +x(3)*( y(2)*ps2dx1(x)+pw3x2x1(x) );
126 pphi3x2=@(x) x(2)*( y(2)*pw2x1x2(x)+pw3x1x2(x) ) + x(3)*( y(2)*ps2dx2(x)+pw3x2x2(x) ) + y(2)*y(1)*s1d(x)+y(2)*pw2x1(x)+pw3x1(x);
127 pphi3x3=@(x) x(2)*pw3x1x3(x)+x(3)*pw3x2x3(x)+y(2)*s2d(x)+pw3x1(x);
128
129 pf3x1=@(x) s3d(x)*pphi3x1(x)-phi3(x)*ps3dx1(x);
130 pf3x2=@(x) s3d(x)*pphi3x2(x)-phi3(x)*ps3dx2(x);
131 pf3x3=@(x) s3d(x)*pphi3x3(x)-phi3(x)*ps3dx3(x);
132
133 pf3x12=@(x) pphi3x1(x)-phi3(x)/s3d(x)*ps3dx1(x);
134 pf3x22=@(x) pphi3x2(x)-phi3(x)/s3d(x)*ps3dx2(x);
135 pf3x32=@(x) pphi3x3(x)-phi3(x)/s3d(x)*ps3dx3(x);
136
137 Mp3=@(x) pphi3x3(x)-(pphi3x2(x)/ps3dx2(x))*ps3dx3(x);
138 Mp32=@(x) pphi3x2(x)-(pphi3x1(x)/ps3dx1(x))*ps2dx3(x);
139
140 Funcion a maximizar para obtener k_3
141 f33=@(x) phi3(x)/abs(s3d(x))
142
143
144
145 fig3=figure
146 syms x1 x2 x3
147 x=[x1,x2,x3];
148 fsurf(f33([-1,x2,x3]),2000000000*[-1 1 -1 1])
149
150
151 view([0 0])
152 xlabel("x_2")
153 ylabel("x_3")
154 zlabel("f_3(1,x_2,x_3)")
155
156 %%Para k_1=1 y m=5 k_1=4121.8
157 k(3)=4136.5*1.1
158
159 zlabel("f_3(-1,x_2,x_3)")
160 xlim([1 1.00001])
161 ylim([0.06 .1])
162 zlim([0 4.89e3])
163

```

A.4. Programa de Simulink

Se utilizó el siguiente diagrama de bloques de Simulink para obtener la respuesta del sistema, así como el comportamiento de la variables σ y las funciones que lo conforman.

El bloque del controlador se le agregó una mascara que nos permite modificar el vector de ganancias, el vector de pesos y los grados de homogeneidad. Se realizó un programa de este tipo para cada uno de los controladores.

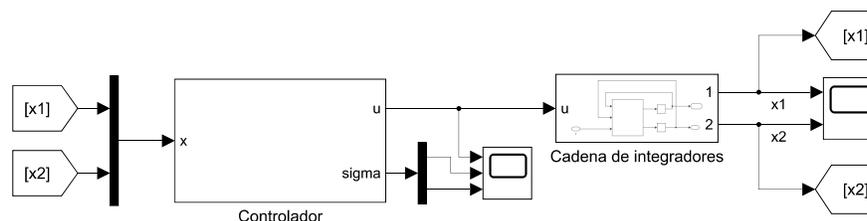


Figura A.1 Diagrama de bloques de Simulink

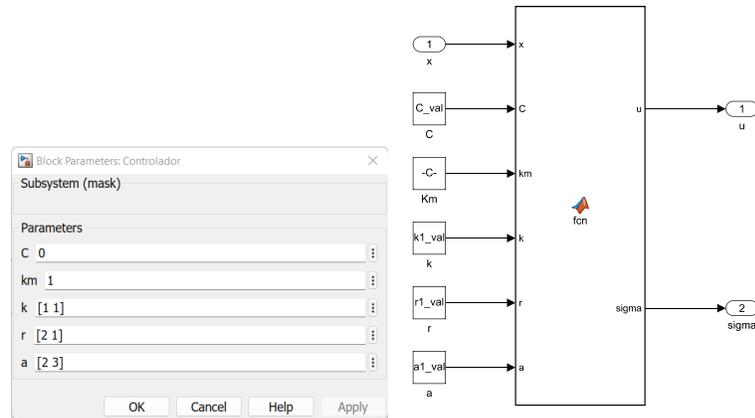


Figura A.2 Controlador

El código del controlador

```

1 function [u,sigma] = fcn(x,C,km, k, r, a)
2 sigma=[1,1];
3 sigma(1)=Csign(x(1),a(1)/r(1));
4 sigma(2)=Csign(x(2),a(2)/r(2))+k(1)^(a(2)/r(2))*Csign(sigma(1),a(2)/a(1))/km+C;
5 u = -k(2)*Csign(sigma(2),0);
6

```

Referencias

- [Åström, *et al.*, 2006] Åström, K. J., Hägglund, T., & Astrom, K. J. (2006). *Advanced PID control*, volume 461. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society Research Triangle Park. (Citado en página 2.)
- [Bacciotti y Rosier, 2005] Bacciotti, A. & Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science and Business Media. (Citado en páginas 1 y 11.)
- [Bartolini, *et al.*, 1998] Bartolini, G., Ferrara, A., & Usai, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on automatic control*, 43(2), 241–246. (Citado en página 2.)
- [Bernuau, *et al.*, 2014] Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., & Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4), 1866–1901. (Citado en página 11.)
- [Cruz-Zavala y Moreno, 2017] Cruz-Zavala, E. . . & Moreno, J. . . (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A lyapunov approach. *Automatica*, 80, 232–238 – 238. (Citado en páginas 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 y 15.)
- [Cánovas, *et al.*, 2013] Cánovas, M. J., Huertas, V., & Sempere, M. (2013). *Optimización matemática aplicada : enunciados, ejercicios y aplicaciones del mundo real con MATLAB*. Editorial Club Universitario <http://pbidi.unam.mx:8080/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat02025a&AN=lib.MX001001974257&lang=es&site=eds-live>. (Citado en página 11.)
- [Delfour, 2012] Delfour, M. C. (2012). *Introduction to optimization and semidifferential calculus*. MOS-SIAM series on optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics. (Citado en páginas 11, 12, 13 y 14.)
- [Emelyanov, 1986] Emelyanov, S. (1986). Higher order sliding modes in the binary control systems. In *Sov. Phys. Dokl.*, volume 4 (pp. 291–293). (Citado en página 2.)
- [Feng, *et al.*, 2002] Feng, Y., Yu, X., & Man, Z. (2002). Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38(12), 2159–2167. (Citado en página 2.)
- [Filippov, 2013] Filippov, A. F. (2013). *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science and Business Media. (Citado en página 2.)
- [Fridman, *et al.*, 2015] Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., & Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics*, (pp. 5–35). (Citado en página 2.)
- [Fridman, 2003] Fridman, L. M. (2003). Chattering analysis in sliding mode systems with inertial sensors. *International Journal of Control*, 76(9-10), 906 – 912, <https://doi.org/10.1080/0020717031000099074>. Cited by: 142. (Citado en página 1.)
- [Lange, 2013] Lange, K. (2013). *Optimization*. Springer texts in statistics: 95. Springer. (Citado en página 11.)
- [Levant, 1993] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263, <https://doi.org/10.1080/00207179308923053>. (Citado en página 2.)
- [Levant, 2001] Levant, A. (2001). Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE transactions on Automatic Control*, 46(9), 1447–1451. (Citado en página 2.)
- [Levant, 2003] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), 924–941 – 941. (Citado en páginas 1 y 2.)
- [Levant, 2005] Levant, A. (2005). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. (Citado en páginas 1 y 2.)

- [Levant y Michael, 2009] Levant, A. & Michael, A. (2009). Adjustment of high-order sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(15), 1657–1672. (Citado en páginas 1 y 2.)
- [Lipsman y Rosenberg, 2017] Lipsman, R. L. & Rosenberg, J. M. (2017). *Multivariable calculus with MATLAB® : with applications to geometry and physics*. Springer. (Citado en página 11.)
- [Miklavcic, 2020] Miklavcic, S. J. (2020). *An illustrative guide to multivariable and vector calculus*. Springer. (Citado en página 11.)
- [Polyakov, 2020] Polyakov, A. (2020). *Generalized homogeneity in systems and control*. Communications and Control Engineering. Springer International Publishing. (Citado en página 10.)
- [Pérez-Ventura y Fridman, 2019] Pérez-Ventura, U. & Fridman, L. (2019). Design of super-twisting control gains: A describing function based methodology. *Automatica*, 99, 175–180, <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.10.023> <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109818304977>. (Citado en página 3.)
- [Pérez Ventura, et al., 2021] Pérez Ventura, U., Mendoza-Avila, J., & Fridman, L. (2021). Design of a proportional integral derivative-like continuous sliding mode controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31, <https://doi.org/10.1002/rnc.5412>. (Citado en página 3.)
- [Rosier, 1992] Rosier, L. (1992). Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19(6), 467–473. (Citado en página 1.)
- [Shtessel, et al., 2014] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., Levant, A., & others (2014). *Sliding mode control and observation*, volume 10. Springer. (Citado en páginas 1 y 14.)
- [Sontag, 1989] Sontag, E. D. (1989). A ‘universal’ construction of artstein’s theorem on nonlinear stabilization. *Systems & control letters*, 13(2), 117–123. (Citado en página 4.)
- [Utkin, 1991] Utkin, V. (1991). Slides modes in control and optimization. *Springer-Verlang*. (Citado en página 1.)
- [Ziegler y Nichols, 1942] Ziegler, J. G. & Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the American society of mechanical engineers*, 64(8), 759–765. (Citado en página 2.)