



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA QUÍMICA - PROCESOS**

**MODELADO MATEMÁTICO Y DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE**  
**ROTOMOLDEO DE POLÍMEROS TERMOPLÁSTICOS**

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN INGENIERÍA QUÍMICA**

**PRESENTA:**

**I.Q. SERGIO ANTONIO MACEDO HERRERA**

**TUTORES PRINCIPALES:**

**DR. FRANCISCO LÓPEZ-SERRANO RAMOS**

**FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM**

**DR. JOSÉ ESTEBAN LÓPEZ AGUILAR**

**FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., JULIO 2023**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Jurado asignado:

Presidente: Dr. Vivaldo Lima Eduardo.  
Secretario: Dr. Rosas Aburto Alberto.  
1<sup>er</sup>. Vocal: Dr. López Aguilar José Esteban  
2<sup>do</sup>. Vocal: Dr. López Serrano Ramos Francisco  
3<sup>er</sup>. Vocal: Dr. Aguayo Vallejo Juan Pablo

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Química, Edificio E. UNAM.

### **Tutores de tesis:**

DR. FRANCISCO LÓPEZ-SERRANO RAMOS

---

**Firma**

DR. JOSÉ ESTEBAN LÓPEZ AGUILAR

---

**Firma**

## Agradecimientos

A mis tutores José Esteban López Aguilar y Francisco López Serrano, por su paciencia y su guía a lo largo de esta investigación.

Agradezco el apoyo de los proyectos de DGAPA PAPIIT, UNAM IN112221 e IA102022.

Esta investigación fue realizada gracias al patrocinio del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). Número de beca: 1004136.

A mis padres y familia, quienes me dieron apoyo incondicional para conseguir un grado más en mi carrera profesional.

A mis amigos y novia quienes siempre estuvieron ahí para escucharme y apoyarme para terminar mis estudios de maestría.

Y a mi querida universidad que nunca deja hacerme sentir orgulloso de ser UNAM.

## Dedicatorias

A mis padres que siempre están apoyándome en las buenas y en las malas, a ellos que sin importar las circunstancias mundiales están para mí para darme su apoyo y amor incondicional; este logro es dedicado a ellos. Gracias.

# Índice general

## Tabla de contenido

<b><i>Jurado asignado:</i></b> .....	<b><i>I</i></b>
<b><i>Agradecimientos</i></b> .....	<b><i>II</i></b>
<b><i>Dedicatorias</i></b> .....	<b><i>III</i></b>
<b><i>Índice general</i></b> .....	<b><i>IV</i></b>
<b><i>Resumen</i></b> .....	<b><i>1</i></b>
<b><i>1. Introducción</i></b> .....	<b><i>2</i></b>
<b><i>1.1 Propósito de la tesis</i></b> .....	<b><i>2</i></b>
<b><i>2. Proceso de rotomoldeo</i></b> .....	<b><i>3</i></b>
<b><i>2.1 Rotomoldeo en la industria</i></b> .....	<b><i>4</i></b>
<b><i>2.2 Rotomoldeo en México</i></b> .....	<b><i>4</i></b>
<b><i>2.3 Ventajas y desventajas del proceso de rotomoldeo</i></b> .....	<b><i>5</i></b>
<b><i>2.4 Materiales y moldes utilizados en rotomoldeo</i></b> .....	<b><i>6</i></b>
<b><i>3. Análisis teórico del proceso de rotomoldeo.</i></b> .....	<b><i>7</i></b>
<b><i>3.1 Mecanismos de transferencia de energía térmica.</i></b> .....	<b><i>7</i></b>
<b><i>3.2 Conducción de calor.</i></b> .....	<b><i>7</i></b>
<b><i>3.2.1 Conductividad térmica.</i></b> .....	<b><i>8</i></b>
<b><i>3.2.2 Difusividad térmica.</i></b> .....	<b><i>9</i></b>
<b><i>3.3 Convección de energía.</i></b> .....	<b><i>9</i></b>
<b><i>3.4 Ecuación de conducción de energía en paredes planas (paredes compuestas).</i></b> .....	<b><i>10</i></b>
<b><i>3.5 Conducción de energía a través de paredes compuestas.</i></b> .....	<b><i>12</i></b>
<b><i>4. Métodos numéricos.</i></b> .....	<b><i>15</i></b>
<b><i>4.1 Ecuaciones diferenciales parciales</i></b> .....	<b><i>16</i></b>
<b><i>4.2 Aproximación de derivadas por diferencias finitas.</i></b> .....	<b><i>17</i></b>
<b><i>4.3 Ecuación de balance de energía en diferencias finitas</i></b> .....	<b><i>19</i></b>
<b><i>4.4 Método implícito.</i></b> .....	<b><i>21</i></b>
<b><i>5. Análisis del proceso de rotomoldeo.</i></b> .....	<b><i>22</i></b>
<b><i>6. Objetivos</i></b> .....	<b><i>24</i></b>
<b><i>7. Hipótesis</i></b> .....	<b><i>24</i></b>
<b><i>8. Metodología</i></b> .....	<b><i>25</i></b>

<b>8.1</b>	<b>Obtención de los datos experimentales.....</b>	<b>25</b>
<b>8.2</b>	<b>Modelo matemático .....</b>	<b>26</b>
<b>8.3</b>	<b>Procesamiento de datos experimentales.....</b>	<b>30</b>
8.3.1	Ajuste racional.....	31
<b>8.4</b>	<b>Procedimiento para la solución del problema de rotomoldeo .....</b>	<b>31</b>
8.4.1	Discretización de las ecuaciones del modelo.....	32
<b>8.5</b>	<b>Algoritmos para la solución del problema del rotomoldeo.....</b>	<b>38</b>
<b>8.6</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>39</b>
8.6.1	Ajuste racional .....	39
8.6.2	Resultados del cálculo de $h_i$ .....	40
8.6.3	Resultados de los modelos de calentamiento y enfriamiento.....	40
8.6.4	Análisis de resultados.....	41
<b>8.7</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>49</b>
<b>9.</b>	<b>Anexo 1.....</b>	<b>50</b>
<b>10.</b>	<b>Anexo 2.....</b>	<b>53</b>
<b>11.</b>	<b>Anexo 3.....</b>	<b>55</b>
	<b>Lista de símbolos y acrónimos:.....</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografía .....</b>	<b>57</b>

## Resumen

En el desarrollo de este trabajo se buscó encontrar alguna alternativa que ayudara a calcular la distribución de temperaturas en un proceso de rotomoldeo.

Se reprodujo el comportamiento del artículo *Thermal Analysis of Foamed Polyethylene Rotational Molding Followed by Internal Air Temperature Profiles* del Dr. Ruben González-Núñez, usando un modelo racional para su análisis y se tuvo buena concordancia con los datos experimentales reportados en él. Se concluyó en que el coeficiente de transferencia de energía durante el proceso de rotomoldeo no es constante.

Dicha conclusión condujo a que esta investigación planteara otros modelos que involucraran transferencia de energía por convección y, de acuerdo a la naturaleza del proceso, fue requerido que la transferencia por conducción también fuera incluida. Así pues, el resultado de esto fue un modelo que combina la transferencia de energía por conducción y por convección, considerando el coeficiente de transferencia de energía variable. Además, el modelo propuesto en esta investigación llevó al uso de aproximaciones por diferencias finitas, ya que las ecuaciones planteadas son ecuaciones diferenciales parciales.

# 1. Introducción

Hoy en día, gran parte de los procesos productivos en el país se han modernizado. Sin embargo, sólo unos cuantos se permiten adentrarse y mantenerse en los mercados, los cuales cada día son más cambiantes y agresivos. En cambio, algunos procesos conviven con la modernidad de otros, que quizá, no son tan desarrollados, menos optimizados y que al final, terminan siendo sustituidos por nuevas tecnologías (García, 2003).

En la época actual, los criterios de los consumidores se basan en la búsqueda de la diferenciación, y el menor costo del producto o servicio ofrecido, siendo esto un factor principal que va en contra de lo estándar. Algunos son productos únicos, limitados o diferentes al resto, que además cumplen su función, por lo que se les atribuye un mayor valor agregado. Otros son productos donde hay una gran oferta y demanda y en estos casos el precio rige la preferencia del consumidor. Siendo ésta la principal causa que lleva a la mayoría de los procesos productivos a una adaptación, de tal forma que se puedan mantener los costos de mantenimiento, producción, etc., y así evitar el encarecimiento de los productos finales. Todos los procesos productivos están sujetos al cambio constante y, por ende, a la innovación (García, 2003).

Existen diversos procesos de transformación en la fabricación de materiales plásticos, a través de los cuales se fabrican piezas plásticas en función del tamaño de lote, necesidades funcionales, características mecánicas o simplemente estética, muchos de los cuales siguen siendo usados hoy en día. Estos procesos incluyen la inyección, extrusión o el soplado, los cuales son los principales procesos de fabricación de plásticos (Crawford, 2022). Otros procesos, como el rotomoldeo, no han tenido la suficiente difusión social y técnica como para una optimización adecuada, quedando limitado al desarrollo de innovaciones o automatización (Nugent, 1992). Esta falta de difusión se debe en gran parte a que los poseedores de la tecnología no la comparten o la hacen pública.

## 1.1 Propósito de la tesis

El proceso de rotomoldeo es un proceso de transformación de materiales termoplásticos que disponen de un amplio catálogo de aplicaciones. Sin embargo, cuenta con ciertas limitaciones que pueden ser optimizadas. La investigación desarrollada en este trabajo de tesis pretende modelar los procesos de calentamiento y enfriamiento de este proceso, con el fin de demostrar que la naturaleza del proceso de rotomoldeo se rige por convección y conducción como mecanismos de transporte de energía, tomando en cuenta que el coeficiente de transferencia de energía (presente en convección) no es un valor constante y cambia a lo largo del proceso. Se buscó corroborar esta

premisa mediante el uso de recursos computacionales y aproximaciones numéricas se buscó cumplir esta premisa, comparando valores experimentales contra aproximaciones numéricas de modelos propuestos en esta tesis.

Existen diferentes procesos de rotomoldeo, configuraciones, variantes durante el calentamiento o movimiento de los moldes. Sin embargo, todos se basan en los mismos fundamentos de transferencia de energía (convección y conducción); un ejemplo es el descrito por Greco (2003). No obstante, estos fundamentos se han mantenido prácticamente sin modificación. Desde los inicios del rotomoldeo, el coeficiente de transferencia de energía se planteó como constante, siguiendo la Ley del Enfriamiento de Newton durante todo el proceso (Gogos, 1998). En este trabajo se buscará replicar computacionalmente los datos experimentales reportados en la literatura (González-Núñez et al., 2017), utilizando el coeficiente de transferencia de energía como una función dependiente de la temperatura y del tiempo en el proceso.

## 2. Proceso de rotomoldeo

A grandes rasgos, el moldeo rotacional o rotomoldeo es un método de procesamiento de polímeros para la producción de piezas huecas (Attaran, 1998). Aquí, el material primario se encuentra en forma de polvo, el cual es colocado dentro de un molde y, con ayuda de movimientos biaxiales y durante la fase de calentamiento, el polímero en polvo se funde y adhiere a las paredes internas del molde para conformar la pieza plástica deseada (Attaran, 1998). El proceso se muestra en la Figura 2-1.

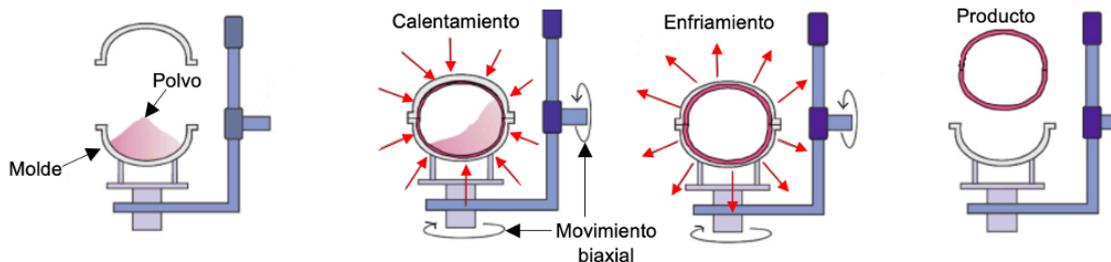


Figura 2-1. Esquema del proceso de rotomoldeo. Reimpreso (adaptado) con permiso de John Wiley and Sons. L. G. Olson, *Rotational Molding of Plastics: Comparison of Simulation and Experimental Results for an Axisymmetric Mold*, 1998, **40**, 1758-1764.

Así como se muestra en la Figura 2-1, el polímero en polvo es colocado en el molde a temperatura ambiente. Con el molde cerrado, se introduce en un horno a alta temperatura, donde el molde tiene un movimiento rotacional biaxial, con el fin de crear una película del polímero fundido en las paredes del molde de manera homogénea. Una vez que se alcanza la temperatura en la cual el polvo

fundido se encuentra completamente adherido a la pared interna del molde, éste se retira de la fuente de calor y es sometido al proceso de enfriamiento, para así obtener el producto terminado (Olson, 1998). Lo antes mencionado sólo es una descripción general del proceso de rotomoldeo; en la Sección 5 se aborda y describe con mas detalle el comportamiento del polímero a lo largo del proceso de calentamiento y enfriamiento.

## 2.1 Rotomoldeo en la industria

Como se mencionó en al inicio de esta sección, el procesamiento de materiales termoplásticos puede llevarse a cabo a través de diversos procesos, tales como el de extrusión, extrusión-soplado, inyección, termoformado y rotomoldeo.

El rotomoldeo es un proceso económicamente viable, en la producción de artículos plásticos huecos generalmente de gran tamaño, que genera contenedores sin costuras, ni esfuerzos residuales. Además de que genera piezas de un espesor de pared uniforme. Esto ofrece una gran versatilidad de producción (Ogila, 2017).

De acuerdo con Nugent (2022), existe un estimado de 2400 empresas en el mundo (el continente americano representa el 39%) que producen algún artículo a través del proceso de rotomoldeo. La labor de estas empresas representa un consumo mundial de polietileno de aproximadamente el 2%.

Empresas de distintos países con producción de partes plásticas obtenidas por el proceso de rotomoldeo tienen grandes ganancias al año, siendo Estados Unidos de América el mayor productor de piezas, con ganancias de alrededor de 122 millones de dólares, seguido de México con ganancias de 47 millones de dólares (Plastics Insight, 2015). México es uno de los países que lidera la lista, a pesar de tener poco tiempo en la utilización de este proceso (Rotobasque, 2017). Uno de los productores con mayor presencia en México es Rotoplas.

## 2.2 Rotomoldeo en México

En México, la industria del plástico se encuentra conformada por diversos procesos, tales como extrusión, inyección, termoformado y rotomoldeo, cada uno de ellos se enfoca en ciertos mercados. Estos mercados incluyen la producción de envases, materiales e insumos para construcción, materiales para la industria automotriz, etc., siendo el sector de envases el que más consumo hay en la producción de plásticos en el país (García, 2003).

Aunque el rotomoldeo en México es un proceso joven, existen pocas empresas que lideran el mercado para la producción de productos terminados en distintos roles de la industria. En la Tabla 2.2-1 se enlistan los productores mexicanos de partes plásticas basadas en el proceso de rotomoldeo.

Tabla 2.2-1. Tabla de empresas que actualmente operan en México (INEGI, 2022).

<b>Empresa</b>	<b>Rol</b>
<b>ROTOPLAS S.A. DE C.V.</b>	Tinacos y accesorios
<b>MIRAPLASTEK</b>	Contenedores y artículos varios
<b>JOMART S.A. DE C.V.</b>	Tinacos y seguridad vial
<b>CIPSA INDUSTRIAS S.A. DE C.V.</b>	Productos para la industria de la construcción
<b>INDUSTRIAL DE PLÁSTICOS ATIZAPÁN S.A. DE C.V.</b>	Productos diversos
<b>TICKTACKTOYS S.A. DE C.V.</b>	Juguetes

### 2.3 Ventajas y desventajas del proceso de rotomoldeo

El proceso de rotomoldeo es un proceso flexible y económico que en un futuro dominará el mercado del procesamiento de plásticos, puesto que puede implementarse en muchos roles de la industria como artículos médicos, equipo deportivo, componentes automotrices, etc., aunque no se limita a los roles anteriormente mencionados. Sin embargo, como todo proceso, existen ventajas y desventajas (Crawford, 2012).

#### Ventajas

- Se pueden crear partes huecas en una sola pieza sin líneas de soldadura y/o uniones.
- Piezas libres de tensión - esfuerzos residuales.
- Piezas económicas de gran formato o tamaño, en comparación con otros procesos como el soplado o termoformado (Nicolás, 2003).
- Espesor de pared uniforme (en comparación del proceso de soplado), si no hay desbalances en los moldes y si la temperatura es homogénea.
- La distribución del espesor de pared puede alterarse sin modificar el molde.
- Para lotes pequeños puede ser económicamente viable.
- Sin desperdicio de materia prima.
- Moldes multicapa.
- Se pueden moldear diferentes tipos de productos en una sola máquina.

#### Desventajas

- Tiempos de manufactura largos.
- Piezas únicas.
- El costo de los materiales es relativamente alto.
- Geometrías complejas son difíciles de moldear.

En conclusión, este proceso es adecuado para lotes pequeños con piezas relativamente grandes; sin embargo, es un proceso lento donde el aprovechamiento de calor es deficiente y requiere de mano de obra para las etapas de carga y descarga.

## 2.4 Materiales y moldes utilizados en rotomoldeo

En los procesos de rotomoldeo se utilizan diferentes tipos de termoplásticos; en algunos casos es posible utilizar materiales termoestables (Viale, 2008).

Las poliolefinas (principalmente polietilenos) son los materiales más utilizados en esta industria, ya que este material se puede pulverizar fácilmente; además, a diferencia de otros plásticos, estos materiales se mantienen más estables durante el periodo de calentamiento, que es relativamente largo. Actualmente, el polietileno (Figura 2.4-1), en sus diversas formas (LLDPE, HDPE, XLPE, MDPE, LDPE) representa entre el 85% y 95% del total de polímeros utilizados en rotomoldeo (Crawford, 2012). El resto es conformado por plastisoles de PVC, policarbonato, nylon, polipropileno, poliésteres no saturados, ABS, acrílicos, celulósicos, epóxidos, fluorocarburos, fenólicos, polietilenos, poliestirenos, poliuretanos, y siliconas (Crawford, 2012).

Para el caso de los moldes, existen de diferentes formas y tamaños. Estos dos parámetros dependen enteramente del producto final deseado; sin embargo, un molde para rotomoldeo normalmente consta de dos mitades. No obstante, para la elaboración de piezas más complejas es posible que se requieran moldes que lo conformen tres o más partes (Crawford, 2002).

Estos moldes son comúnmente fabricados con aluminio o acero. Se utilizan moldes de acero para piezas grandes, como tanques, mientras que los moldes de aluminio se utilizan para piezas más pequeñas que contienen detalles complejos o para fabricar varios moldes idénticos. También se utilizan moldes electroformados o de níquel, los cuales se usan para piezas de PVC (Crawford, 2002).

El control numérico por computadora (CNC) ha permitido identificar puntos de mejora en la calidad del molde, ya que éstos son sometidos a temperaturas altas, que pueden llegar hasta 300 °C (Crawford, 2012). El análisis CNC permite obtener un alto desempeño a tiempos largos de proceso, reduciendo la duración de los ciclos de calentamiento y mejorando la consistencia de la pieza moldeada (Crawford, 2012).

### 3. Análisis teórico del proceso de rotomoldeo.

En el proceso de rotomoldeo se consideran muchas variables para tener un producto final que cumpla con la calidad requerida. Este trabajo de investigación se enfocó en la temperatura, que es una de las variables que mayor impacto tiene en la calidad de las partes producidas (Ogila, 2017) y es la variable de proceso que se sigue usualmente en la operación de este proceso. En particular, son objeto de estudio la temperatura del horno, la temperatura en la superficie del molde y la temperatura del aire encapsulado en el molde (Ogila, 2017).

Es posible establecer las ecuaciones de balance de energía térmica en función de estas variables de proceso y proponer mecanismos de transferencia de energía para el desarrollo de modelos matemáticos cuyas aproximaciones ayuden al entendimiento del proceso (Greco, 2003). Las estimaciones de estos modelos aproximados son comparadas contra datos experimentales de temperatura en la superficie del molde y temperatura del aire encapsulado en el molde, obtenidos con termopares (González-Núñez, 2017).

En este estudio se considera que, en el proceso de rotomoldeo, la distribución de temperaturas se rige por convección y conducción de calor.

#### 3.1 Mecanismos de transferencia de energía térmica.

Se define a la energía térmica como aquella que se transfiere de un sistema a otro como resultado de un gradiente de temperaturas (Welty, 1994). La transferencia de energía térmica va de un medio con mayor temperatura a uno de menor temperatura. El flujo neto de energía térmica cesa cuando se alcanza una distribución homogénea de temperaturas.

La energía térmica puede transferirse de tres formas: conducción, convección y radiación (Welty, 1994).

#### 3.2 Conducción de calor.

La conducción de energía térmica es el mecanismo de transferencia que se caracteriza por un flujo de energía desde las partículas con mayor contenido energético de un cuerpo (usualmente medido a través de la temperatura) a las adyacentes con menos contenido energético (menor temperatura) como el resultado del contacto entre ellas (Bird, 1960). Este mecanismo de transferencia de energía se puede dar en sólidos, líquidos y gases. En sólidos, se debe a la combinación de las vibraciones de las moléculas en una red y al transporte de energía por electrones libres (Bird, 1960).

La razón de conducción de energía a través de un medio depende de la geometría de éste, su espesor y el material, así como la diferencia de temperatura en el medio.

La conducción de calor (flujo de energía) a través de una capa plana es proporcional a la diferencia de temperatura a través de la capa y al área de transferencia de energía, pero es inversamente proporcional al espesor de la capa, siendo:

$$\text{Flujo de calor por conducción} \propto \frac{(\text{área})(\text{diferencia de temperatura})}{\text{espesor}}, \quad (3.2-1).$$

o, en términos matemáticos:

$$Q_{cond} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (3.2-2).$$

donde la constante de proporcionalidad  $k$  es la conductividad térmica del material, que es una medida de la capacidad de un material para conducir energía térmica. Reduciendo la Ecuación 3.2-2 a su forma diferencial para el caso de que la diferencia de temperaturas en un espacio definido es infinitesimal:

$$q_x = \frac{Q_{cond}}{A} = -k \frac{dT}{dx}. \quad (3.2-3).$$

Esta ecuación es llamada “Ley de Fourier de conducción de calor”, siendo  $dT/dx$  el gradiente de temperaturas y  $Q_{cond}/A$  es el flux de energía térmica por difusión (Cengel, 2003).

La energía térmica es conducida en la dirección de mayor a menor temperatura, y el gradiente de temperatura se vuelve negativo cuando la temperatura disminuye al aumentar  $x$ . El signo negativo en la Ecuación 3.2-3 asegura que la transferencia de energía en la dirección de  $x$  es una cantidad positiva. El área de transferencia de energía  $A$  es siempre normal a la dirección del flujo de energía térmica.

### 3.2.1 Conductividad térmica.

La conductividad térmica es una propiedad de los medios conductores y que puede variar con de la temperatura. En el caso de los gases, varía significativamente con la presión (gases sometidos a presiones altas) (Bird, 1960). Por tanto, es una medida de la capacidad del material para conducir energía, por lo que valores altos de conductividad térmica indican que el material es un buen conductor de energía térmica, y un valor bajo indica que el material es un mal conductor o aislante térmico (Cengel, 2003).

Esta propiedad es normalmente alta en estado sólido y baja en fase gaseosa. A diferencia de los gases, la dependencia con la temperatura causa una complejidad considerable en el análisis de conducción (Cengel, 2003). Por tanto, es común evaluar la conductividad térmica  $k$  a la temperatura promedio y considerar la conductividad térmica como una constante en los cálculos.

### 3.2.2 Difusividad térmica.

La difusividad térmica representa qué tan rápido se difunde la energía a través de un material con respecto a la capacidad que tiene el material de almacenarla y se define como (Cengel, 2003):

$$\alpha = \frac{\text{Energía que se conduce}}{\text{Energía que se almacena}} = \frac{k}{\rho C_p} \left[ \frac{\text{Longitud}^2}{\text{Tiempo}} \right]. \quad (3.2.2-1).$$

La conductividad térmica  $k$  representa la capacidad de un material para conducir energía térmica, y el producto  $\rho C_p$  representa la capacidad de almacenamiento de energía del material por unidad de volumen (Cengel, 2003).

Un valor grande de difusividad térmica indica una propagación rápida de la energía en el medio. Un valor pequeño significa que la energía es en su mayoría absorbida por el material y conducirá una pequeña parte (Cengel, 2003).

### 3.3 Convección de energía.

La convección o transporte interfacial de energía es el mecanismo que define el flujo de energía entre una superficie sólida y un líquido o gas adyacente (ya sea en movimiento o estático), y éste involucra efectos combinados de conducción y el movimiento del fluido (Cengel, 2003). En cuanto más rápido sea el movimiento del fluido, mayor será la transferencia de energía por convección, forma que se conoce como convección forzada. En ausencia de cualquier volumen de fluido en movimiento, la transferencia de energía entre una superficie sólida y el fluido adyacente se lleva a cabo por convección natural (Cengel, 2003).

Cuando un fluido es forzado a fluir por fuerzas externas sobre una superficie, sea el caso de un ventilador, bomba o viento, se le llama convección forzada al mecanismo de transferencia involucrado. Por otra parte, si el movimiento del fluido es causado por fuerzas de empuje inducidas por diferencias de densidad debido a variaciones de temperatura en el fluido, este fenómeno se denomina convección natural o libre (Cengel, 2003).

Cuando existe una diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente, la energía transferida por unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo por convección, es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio externo. Esto se conoce como la Ley de Enfriamiento de Newton:

$$Q_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty), \quad (3.3-1).$$

donde  $h$  es el coeficiente convectivo de transferencia de energía en  $[\text{Energía}]/[\text{Longitud}]^2 * [\text{Temperatura}] * [\text{Tiempo}]$ ,  $A_s$  es el área de transferencia de

energía,  $T_s$  es la temperatura de superficie y  $T_\infty$  es la temperatura del fluido circundante (Cengel, 2003).

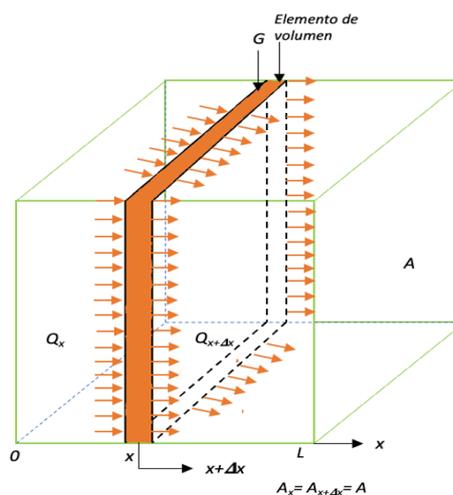
El coeficiente de transferencia de energía  $h$  no es una propiedad del fluido. Este parámetro es determinado de manera experimental y depende de todas las variables que influyen en la transferencia de energía, tales como la geometría de la superficie, el movimiento natural del fluido, las propiedades del fluido y la velocidad de éste. Algunos valores de  $h$  se muestran en la Tabla 3.3-1.

**Tabla 3.3-1.** Valores típicos del coeficiente de transferencia de energía. Reimpreso (adaptado) con permiso de Elsevier. P. Kosky, *Exploring Engineering* (3ª edición), 2013.

Tipo de convección	$h$ (W/m <sup>2</sup> K)
Convección libre de gases	0.5-1000
Convección libre de líquidos	50-3000
Convección forzada de gases	10-1000
Convección forzada de líquidos	50-10000
Evaporización y condensación	2500-100000

### 3.4 Ecuación de conducción de energía en paredes planas (paredes compuestas).

Considerando un elemento delgado de espesor  $\Delta x$  en una pared plana (Figura 3.4-1).



**Figura 3.4-1.** Conducción de energía en una dimensión a través de un elemento de volumen de una pared plana. Reimpreso (adaptado) con permiso de John Wiley and Sons. R. Bird, *Transport Phenomena* (1ª edición), 1960.

Y si esta pared plana tiene densidad  $\rho$ , capacidad calorífica  $C_p$ , y un área  $A$  de pared, en el cual, la transferencia de energía tiene una dirección normal, un balance de energía en un elemento delgado y en un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  (Cengel, 2003) puede ser expresado como:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Flujo de entrada} \\ \text{de energía por conducción} \\ \text{en } x \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de salida} \\ \text{de energía por conducción} \\ \text{en } x + \Delta x \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Flujo} \\ \text{de generación} \\ \text{de energía dentro} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Rapidez de cambio} \\ \text{de energía contenida} \\ \text{en el elemento} \end{array} \right).$$

O bien,

$$Q_x - Q_{x+\Delta x} + G = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (3.4-1).$$

Pero el cambio en el contenido de energía y de la rapidez de generación de energía en el elemento de volumen pueden ser expresados, respectivamente, como:

$$\Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = m C_p (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C_p A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}, \quad (3.4-2).$$

$$G = gV = gA\Delta x. \quad (3.4-3).$$

Sustituyendo en la Ecuación 3.4.1-1:

$$Q_x - Q_{x+\Delta x} + gA\Delta x = \rho C_p A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}. \quad (3.4-4).$$

Dividiendo entre  $\Delta x$ :

$$-\frac{1}{A} \frac{Q_x - Q_{x+\Delta x}}{\Delta x} + g = \rho C_p \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}. \quad (3.4-5).$$

Tomando el límite cuando  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero:

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + g = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.4-6).$$

De la Ley de Fourier de conducción de la energía térmica se tiene que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -kA \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (3.4-7).$$

Por lo que la Ec. 3.4.1-6 queda expresada finalmente como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + g = \rho C p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.4-8).$$

Siendo  $k$  la conductividad térmica del material, la cual depende de la temperatura  $T$ . En muchos casos, para simplificar la resolución de la Ec. 3.4.1-8 se considera a la conductividad térmica como constante, quedando como:

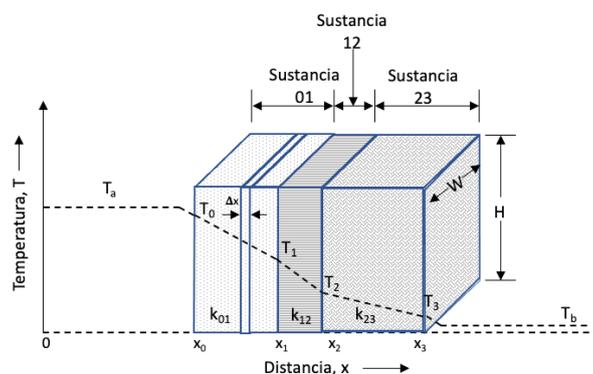
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.4-9).$$

donde  $\alpha = k / \rho C p$  es la difusividad térmica del material, también conocido como coeficiente de difusión de energía térmica, la cual representa que tan rápido se propaga el calor a través del material.

### 3.5 Conducción de energía a través de paredes compuestas.

Existen casos en los que la transferencia de energía se lleva a cabo por conducción a través de paredes compuestas de capas de diversos materiales, cada uno con sus propias características térmicas, por lo que cada pared genera una resistencia a la transferencia de energía (Bird, 1960).

Por ejemplo, en la Fig. 3.5-1, se ilustra una pared compuesta de tres materiales de diferente espesor  $x_1 - x_0$ ,  $x_2 - x_1$ ,  $x_3 - x_2$ , y diferentes conductividades térmicas  $k_{01}$ ,  $k_{02}$ ,  $k_{03}$ . En  $x = x_0$ , la sustancia 01 está en contacto con un fluido con temperatura ambiente  $T_a$ , y, en  $x = x_3$ , la sustancia 23 está en contacto con un fluido a temperatura  $T_b$ . La transferencia de energía en las fronteras  $x = x_0$  y  $x = x_3$  está dada por la Ley de Enfriamiento de Newton.



**Figura 3.5-1.** Conducción de energía térmica a través de una pared compuesta en medio de dos fluidos a temperatura  $T_a$  y  $T_b$ . La distribución de temperatura se muestra en línea punteada. Reimpreso (adaptado) con permiso de John Wiley and Sons. R. Bird, *Transport Phenomena* (1ª edición), 1960.

El balance de energía para una placa de volumen  $WH\Delta x$  es:

$$\text{Región 01:} \quad q_x|_x WH - q_x|_{x+\Delta x} WH = 0. \quad (3.5-1).$$

Dividiendo entre  $WH$  y tomando el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{dq_x}{dx} = 0, \quad (3.5-2).$$

$$q_x = q_0, \quad (3.5-3).$$

siendo  $q_0$  una constante de integración que representa el flux de energía en el plano  $x=x_0$ . Repitiendo lo anterior en las siguientes regiones se tiene la misma constante en cada región. Considerando la Ley de Fourier para cada una de las regiones se tiene:

$$\text{Región 01:} \quad -k_{01} \frac{dT}{dx} = q_0, \quad (3.5-4).$$

$$\text{Región 12:} \quad -k_{12} \frac{dT}{dx} = q_0, \quad (3.5-5).$$

$$\text{Región 23:} \quad -k_{23} \frac{dT}{dx} = q_0. \quad (3.5-6).$$

Asumiendo que las conductividades térmicas son constantes e integrando cada una de las ecuaciones sobre todos los espesores relevantes de las paredes, se tiene:

$$\text{Región 01:} \quad T_a - T_0 = q_0 \left( \frac{x_1 - x_0}{k_{01}} \right), \quad (3.5-7).$$

$$\text{Región 12:} \quad T_1 - T_2 = q_0 \left( \frac{x_2 - x_1}{k_{12}} \right), \quad (3.5-8).$$

$$\text{Región 23:} \quad T_2 - T_3 = q_0 \left( \frac{x_3 - x_2}{k_{23}} \right). \quad (3.5-9).$$

Para la región 0 y 3 se utiliza la Ley de Enfriamiento de Newton, donde  $h_n$  es el coeficiente de transferencia de energía en la superficie  $n$ :

En la superficie 0:  $T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0},$  (3.5-10).

En la superficie 3:  $T_3 - T_b = \frac{q_0}{h_3}.$  (3.5-11).

Sumando las Ecuaciones 3.6-7 a la 3.5-11 se obtiene:

$$T_a - T_b = q_0 \left( \frac{1}{h_0} + \frac{x_1 - x_0}{k_{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k_{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k_{23}} + \frac{1}{h_3} \right),$$
 (3.5-12).

o bien,

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\left( \frac{1}{h_0} + \sum_{j=1}^3 \frac{x_j - x_{j-1}}{k_{j-1,j}} + \frac{1}{h_3} \right)}.$$
 (3.5-13).

El coeficiente global de transferencia de energía se define como:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_0} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_{j-1}}{k_{j-1,j}} + \frac{1}{h_n}.$$
 (3.5-14).

Reescribiendo la Ecuación 3.5-13 usando la definición del coeficiente global de transferencia de energía:

$$q_0 = U(T_a - T_b) \quad \text{o} \quad Q_o = U(WH)(T_a - T_b).$$
 (3.5-15).

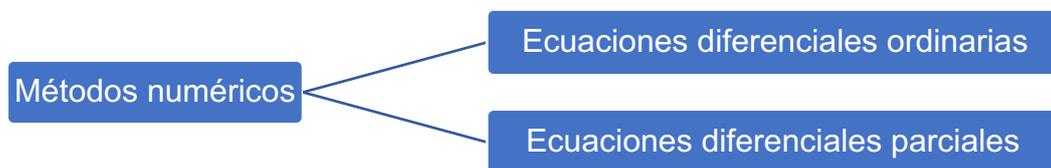
## 4. Métodos numéricos

Los métodos numéricos son herramientas que permiten obtener soluciones aproximadas a de problemas complejos. En particular en este trabajo de tesis se requieren métodos numéricos que resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas, los cuales están dados por los balances de energía del proceso de rotomoldeo estudiado.

En general, estos métodos numéricos se definen como procedimientos en los cuales se puede obtener una solución aproximada de las ecuaciones de conservación de energía que representan al sistema de estudio (Hurtado, 2014).

Estos procedimientos consisten en una lista finita de instrucciones precisas que especifican una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas, también conocidas como algoritmos, los cuales ayudan a obtener una aproximación de la solución del problema (Hurtado, 2014). La eficiencia en el cálculo de dichas aproximaciones depende, en parte, de la implementación del algoritmo y de las limitaciones de los instrumentos de cálculo. Por tanto, el objetivo de los algoritmos es realizar un procedimiento para resolver un problema o aproximarse a una solución.

En la Figura 4-1 se muestra un esquema de los problemas típicos que pueden ser resueltos con los métodos numéricos.



**Figura 4-1.** Esquema de “métodos numéricos”.

En cada algoritmo se incorpora algún criterio de convergencia para detenerlo, que es independiente a la técnica numérica, con el fin de evitar ciclos infinitos. Además, como complemento, en este tipo de procedimientos, se utilizan los diagramas de flujo que son descripciones gráficas de los algoritmos; también se utilizan símbolos conectados con flechas para indicar la secuencia de instrucciones (Hurtado, 2014).

Los métodos numéricos, al ofrecer soluciones cercanas a las soluciones exactas, tienen una diferencia entre una solución verdadera a una aproximada por lo que esto constituye un error (Hurtado, 2014).

Sin embargo, la exactitud de un método numérico mide cuán cerca se encuentra el valor calculado con respecto a su valor verdadero y la precisión se refiere a la

cercanía de una aproximación a un valor con respecto a las aproximaciones anteriores (Hurtado, 2014).

El error asociado de un método numérico mide el grado de precisión e incertidumbre de las soluciones obtenidas. Existen distintos tipos de errores, como el error absoluto y el relativo, los cuales se describen a continuación (Hurtado, 2014).

- Error absoluto: se define como el valor absoluto de la diferencia entre el valor verdadero ( $x$ ) y el valor aproximado ( $x^*$ ).

$$E = |x - x^*|. \quad (4-1).$$

Este error se expresa en las mismas unidades que la solución verdadera.

- Error relativo: este error normaliza el error absoluto con respecto al valor verdadero de la cantidad.

$$e = \left| \frac{E}{x} \right| = \left| \frac{x - x^*}{x} \right|. \quad (4-2).$$

Este error es adimensional y puede ser expresado en forma fraccional o en términos porcentuales

$$e(\%) = \left| \frac{E}{x} \right| * 100 = \left| \frac{x - x^*}{x} \right| * 100. \quad (4-3).$$

En algunos casos no se tiene información de los valores verdaderos de “ $x$ ”, por lo que es un problema estimar  $E$ . Algunos métodos numéricos usan un esquema iterativo en los que se hace una aproximación con base en la aproximación previa, con el fin de obtener cada vez mejores aproximaciones (Hurtado, 2014).

## 4.1 Ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son ecuaciones que involucran una función con más de una variable independiente y sus derivadas.

Las ecuaciones diferenciales parciales lineales se clasifican de acuerdo con el siguiente modelo general (Hurtado, 2014):

$$A(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F\left(x, y, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right). \quad (4.1-1).$$

Si  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$  y  $C(x, y)$  son funciones continuas de las variables independientes  $x$ ,  $y$ . Dependiendo de sus valores en algún punto particular  $(x, y) = (a, b)$ , la ecuación puede clasificarse dependiendo de:

$$\begin{aligned} B^2(a, b) - 4A(a, b)C(a, b) < 0 & \text{ Elíptica en } (a, b), \\ B^2(a, b) - 4A(a, b)C(a, b) = 0 & \text{ Parabólica en } (a, b), \\ B^2(a, b) - 4A(a, b)C(a, b) > 0 & \text{ Hiperbólica en } (a, b), \end{aligned} \quad (4.1-2).$$

Es posible que una misma EDP pueda ser parabólica en un punto, e hiperbólica en otro, etc. Pero si  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$  y  $C(x, y)$  son constantes, entonces es elíptica, parabólica o hiperbólica.

## 4.2 Aproximación de derivadas por diferencias finitas.

La expansión de una función  $f(x)$  diferenciable en una serie de Taylor alrededor de un punto  $x_i$  está definida por:

$$f(x_i + a) = f(x_i) + a f'(x_i) + \frac{a^2}{2!} f''(x_i) + \frac{a^3}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (4.2-1).$$

Para aproximar la derivada de una función en  $x_i$  a partir de los valores de una función en  $x_i$  y en  $x_i + a$  se considera que  $a > 0$  para validar que en la Ec. 4.2-1 sólo será válida adelante del punto  $x_i$ ; además,  $a$  debe ser pequeña ( $a \ll 1$ ) con el fin de desprestigiar el tercer, cuarto y los subsecuentes términos del lado derecho de la expansión, por lo que se puede aproximar la derivada de  $f'(x_i)$  de la siguiente manera:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+a) - f(x_i)}{a}. \quad (4.2-2).$$

La Ec. 4.2-2 es también conocida como una aproximación de la primera derivada de  $f(x_i)$  con diferencias hacia adelante.

De la misma forma que en la Ec. 4.2-1 pero con  $(x_i - a)$  se obtiene:

$$f(x_i - a) = f(x_i) - a f'(x_i) + \frac{a^2}{2!} f''(x_i) - \frac{a^3}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (4.2-3).$$

Y considerando que  $a \ll 1$ , se llega a la siguiente ecuación:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - a)}{a}, \quad (4.2-4).$$

también conocida como una aproximación de la primera derivada de  $f(x_i)$  con diferencias hacia atrás.

Sin embargo, si se resta miembro a miembro la Ec. 4.2-3 de la 4.2-1 y tomando en cuenta las mismas consideraciones anteriores se obtiene la siguiente expresión:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + a) - f(x_i - a)}{2a}. \quad (4.2-5).$$

Esta expresión es conocida como la aproximación a la primera derivada de  $f(x_i)$  con diferencias centrales.

En cambio, sí, de las expresiones 4.2-1 y 4.2-3, se desprecian el quinto, sexto y subsecuentes términos del lado derecho y se suman miembro a miembro los términos que quedan, se obtiene lo siguiente:

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} = f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + a) - 2f(x_i) + f(x_i - a)}{a^2}, \quad (4.2-6).$$

siendo esta expresión una aproximación de la segunda derivada de  $f(x_i)$  por diferencias centrales. En la Tabla 4.2-1 se agrupan estas ecuaciones.

**Tabla 4.2-1.** Aproximaciones a primeras y segundas derivadas. Reimpreso (adaptado) con permiso de Elsevier. S. Venkateshan, *Computational Methods in Engineering (1ª edición)*, 2014.

Aproximación a primeras derivadas	
Atrasada	$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$
Adelantada	$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$
Centrales	$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$
Aproximación a segundas derivadas	
Atrasada	$f''_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2}$
Adelantada	$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2}$
Centrales	$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$

### 4.3 Ecuación de balance de energía en diferencias finitas

Sea la ecuación de calor unidimensional del Capítulo 3:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.3-1).$$

con la condición inicial siguiente, que representa los valores de temperatura  $T$  en cualquier punto del dominio al tiempo  $t = 0$ :

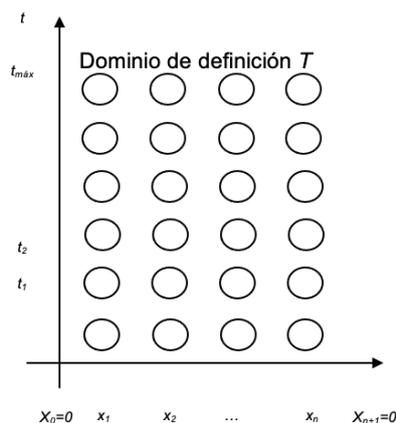
a)  $T(x, 0) = f(x); 0 < x < L,$

y con las siguientes condiciones de frontera, siendo los valores de temperatura  $T$  en los extremos de la geometría a cualquier tiempo  $t$  ( $t > 0$ ):

b)  $T(0, t) = g_1(t),$

c)  $T(L, t) = g_2(t).$

Las expresiones anteriores constituyen un problema de valores iniciales en la frontera (PVIF). Se pueden representar con ayuda de un sistema coordenado, definiendo el dominio como un rectángulo, así como se representa en la Fig. 1.3-1. En este sistema coordenado  $x$  vs  $t$ , los puntos de cruce de las horizontales  $t = t_1, \dots, t_{max}$  y las verticales  $x = x_1, \dots, x_n$ , son llamados nodos.



**Figura 4.3-1.** Dominio de definición de la función solución del problema de valores iniciales y a la frontera. Reimpreso (adaptado) con permiso de John Wiley and Sons. P. Brandimarte, *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction* (2ª edición), 2006.

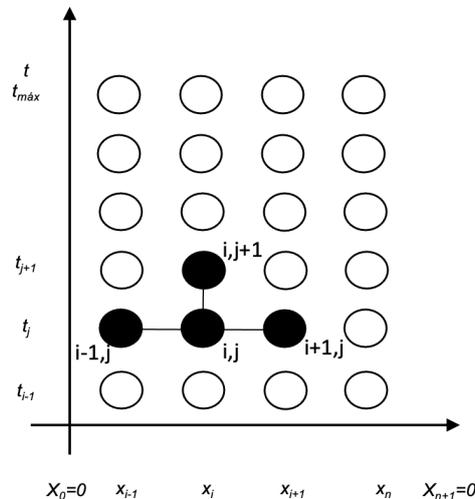
La ecuación de balance de energía (ecuación de difusión) es válida en todo el dominio de definición  $(x_i, t_j)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(x_i, t_j)} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(x_i, t_j)}, \quad (4.3-2).$$

Aproximando con diferencias finitas hacia adelante en el tiempo y diferencias centrales en el espacio, se obtiene:

$$\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2}, \quad (4.3-3).$$

En la Fig. 4.3-2 se representa de manera gráfica los nodos básicos para aproximar la Ec. 4.3-3, donde los nodos marcados con un punto negro son los nodos para aproximar en el tiempo y los nodos marcados con una cruz se emplean para aproximar en el espacio.



**Figura 4.3-2.** Nodos básicos para aproximar la solución de la ecuación de balance de energía. Reimpreso (adaptado) con permiso de John Wiley and Sons. P. Brandimarte, *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction* (2ª edición), 2006.

La Fig. 4.3-2 es también conocida como red o malla. La solución de esta malla conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden ser simultáneas o no, dependiendo de la forma de discretización especificada, como se describe a continuación.

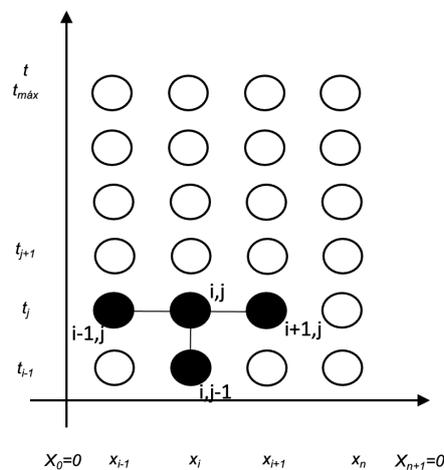
## 4.4 Método implícito

En el método implícito se utiliza la Ec. 4.3-3 planteada en el Capítulo anterior, pero aproximando en el tiempo con diferencias finitas hacia atrás y diferencias finitas centrales en el espacio, para así obtener una expresión que puede aproximar la solución de la ecuación de balance de energía con el método de diferencias finitas (Hurtado, 2014).

Este método es muy útil, ya que es uno de los métodos más utilizados para aproximar ecuaciones diferenciales parciales por su versatilidad, a comparación de otros métodos. En este trabajo se tomará un algoritmo implícito para aproximar la solución de los balances de energía que representan al proceso de rotomoldeo. A continuación se ejemplifica la implementación de la discretización de un método implícito en la ecuación de difusión de energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_{(x_i,t_j)} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\bigg|_{(x_i,t_j)}, \quad (4.4-1).$$

$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2}, \quad (4.4-2).$$



**Figura 4.4-1.** Nodos básicos para el método implícito<sup>1</sup>. Reimpreso (adaptado) con permiso de John Wiley and Sons. P. Brandimarte, *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction* (2<sup>a</sup> edición), 2006.

<sup>1</sup> En el libro de Hurtado titulado “Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería” se proporcionan más detalles de deducción y ejemplos aplicados a estos métodos.

## 5. Análisis del proceso de rotomoldeo

El proceso de rotomoldeo parece ser un método de manufactura sencillo, sin embargo, conlleva elementos técnicos que deben conocerse para realizar el proceso de manera adecuada.

En el rotomoldeo se consideran múltiples variables, las cuales se deben de conocer; algunas de éstas son la temperatura del horno, la temperatura en la superficie del molde, y la temperatura del aire encerrado en el molde (Olson, 1998). Se han desarrollado modelos matemáticos en función de estas variables, con el fin de obtener aproximaciones numéricas que ayuden al control del proceso. El uso de termopares permite la medición de algunas de estas temperaturas, que son el objetivo predictivo de los modelos matemáticos planteados.

En el proceso de rotomoldeo se tienen dos etapas: calentamiento y enfriamiento. En estas etapas están presentes dos mecanismos de transferencia de energía (Greco, 2003):

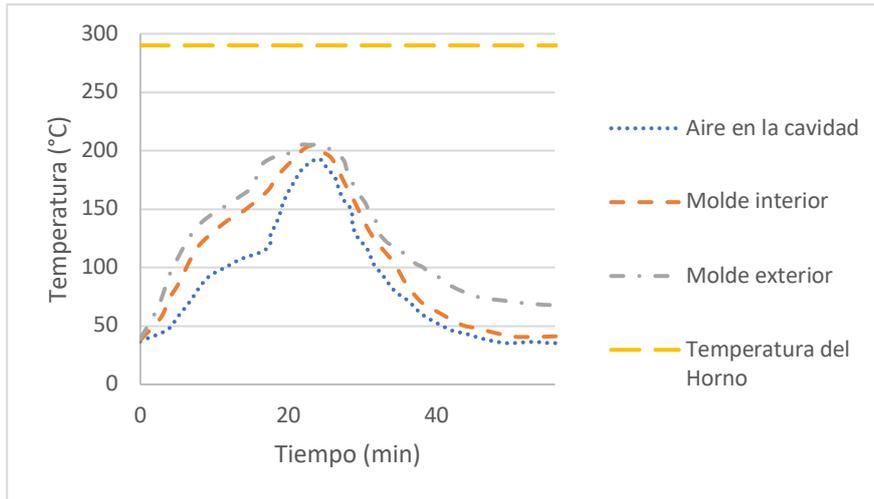
- **Conducción:** Es la transmisión de calor entre cuerpos sólidos en contacto. Se da entre la pared del molde y la capa de polímero que se forma durante el proceso.
- **Convección:** Es la transmisión de calor debida a un fluido en movimiento. Este mecanismo de transferencia se da entre el aire caliente que está en el horno y la pared exterior del molde, y entre la pared del polímero y el aire interior del molde.

Durante estas etapas, se presenta una diferencia de temperaturas entre la superficie exterior del molde y la cavidad interior que contiene el aire.

En las siguientes secciones del presente trabajo se presentarán los modelos utilizados para la obtención de la temperatura del proceso de rotomoldeo, estos modelos consideran el coeficiente de transferencia de energía interno como una variable y se basan en el planteamiento de las ecuaciones de conservación de energía de cada fase en el proceso.

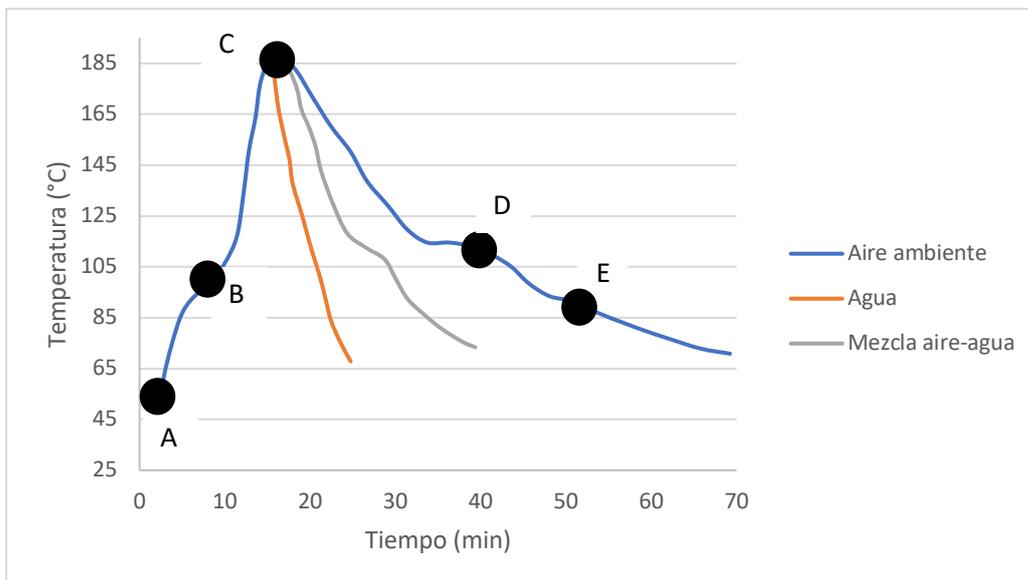
Por medio de estas ecuaciones de balance podemos conocer de manera aproximada la temperatura del molde y del aire en su interior.

Para comprender el proceso de rotomoldeo en la Fig. 5-1 se muestra un gráfico típico de datos experimentales para este proceso. La adquisición de estos datos permite graficar de manera precisa diferentes parámetros de interés, como son la temperatura del molde, la temperatura interior del molde, la temperatura del aire encerrado en la cavidad interna, así como relacionar el comportamiento de estas variables con los cambios sufridos por el polímero (Crawford, 2002).



**Figura 5-1.** Temperatura contra el tiempo en un proceso de rotomoldeo típico. Reimpreso (adaptado) con permiso de Elsevier. R. Crawford, *Rotational Molding Technology*, 2002.

En la Fig. 5-1 se puede observar el comportamiento de la temperatura de manera global (molde exterior e interior) a lo largo del proceso de rotomoldeo. Se tiene un comportamiento interesante al final de la fase de calentamiento, ya que cuando la temperatura del aire en el interior del molde se aproxima a la temperatura del molde, el molde se retira del horno y comienza la etapa de enfriamiento, representado por el descenso exponencial de la temperatura.



**Figura 5-2.** Temperatura del aire en la cavidad interna contra el tiempo. Reimpreso (adaptado) con permiso de Elsevier. R. Crawford, *Rotational Molding Technology*, 2002.

La Fig. 5-2 muestra el comportamiento que presenta el aire encerrado en la cavidad interna del molde en un proceso típico de rotomoldeo, así como también el comportamiento que se observa al enfriar el molde por medio de diferentes fluidos: agua (aspersión), aire ambiente (convección natural), mezcla aire agua (aire saturado).

Estas curvas características pueden explicarse de la siguiente manera de acuerdo con los puntos marcados con literales (Crawford, 2002):

- A) Es la sección donde el polímero comienza a adherirse a las paredes del molde.
- B) Debido a que la capa de polvo comienza a crecer, se incrementa la diferencia de temperaturas entre la superficie externa del molde y la cavidad de aire. Este punto indica, aproximadamente, cuando todo el polímero está adherido a la pared del molde y comienza el proceso de cambio de fase.
- C) En esta sección, el polímero es una capa monolítica; se reduce el aire que existía en ella y se aproxima la temperatura de la cavidad de aire a la temperatura del molde. Aquí, el molde es retirado del horno para su enfriamiento.
- D) Inicia la cristalización del polímero (cambio de fase).
- E) Termina la cristalización.

## 6. Objetivos

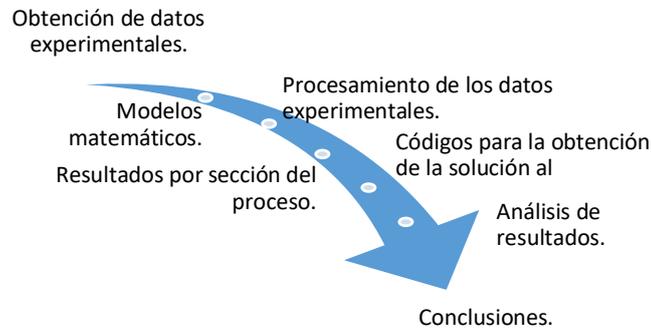
El objetivo principal de este escrito es diseñar un modelo matemático que sea capaz de reproducir datos experimentales del proceso de rotomoldeo.

## 7. Hipótesis

En otros trabajos de investigación se han planteado el uso de diferentes métodos, tales como el método de elementos finitos (Olson, 1998) y el método de parámetros agrupados (Gogos, 1998), con el fin de reproducir los datos experimentales del proceso de rotomoldeo. Sin embargo, estos métodos consideran el coeficiente de transferencia de energía interno como una constante, en este trabajo se tiene como principal hipótesis que este coeficiente no es constante en todo el proceso, además de que en las ecuaciones de transferencia de energía se tiene que considerar la entalpía de fusión y cristalización, en el calentamiento y enfriamiento respectivamente.

## 8. Metodología

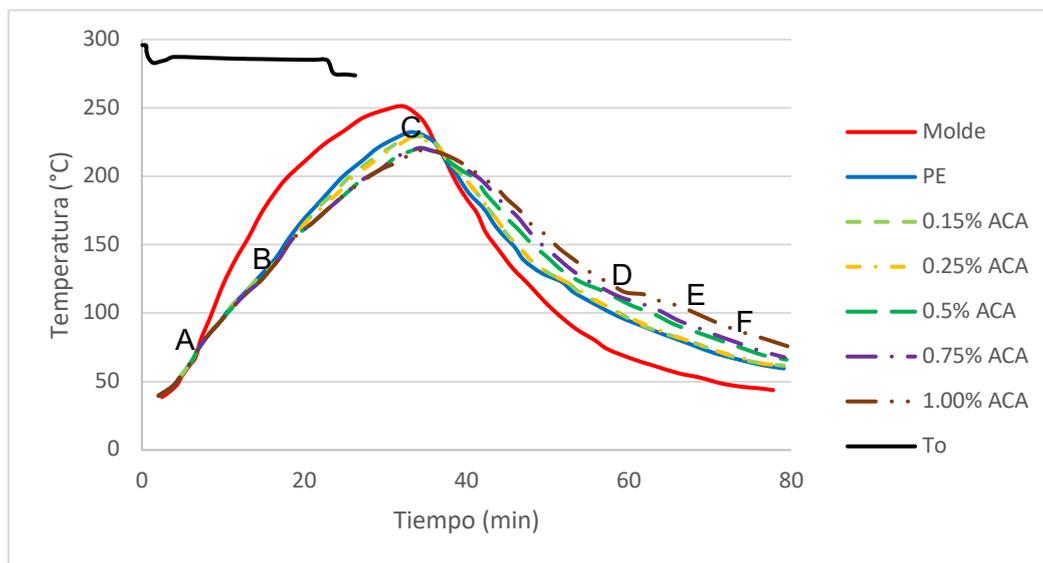
En el presente escrito se siguió la siguiente metodología (Fig. 8-1) para la predicción de temperaturas en el proceso de rotomoldeo a través de ecuaciones diferenciales parciales (ecuación de balance de energía).



**Figura 8-1.** Metodología para el modelado del proceso de rotomoldeo.

### 8.1 Obtención de los datos experimentales.

El presente escrito se basó en los resultados experimentales reportados por González-Núñez et al., y que se ilustran en la Fig. 8.1-1.



**Figura 8.1-1.** Perfiles de temperatura del aire interno en función del tiempo para LLDPE espumado y no espumado a diferentes concentraciones de azodicarbonamida grado comercial (ACA). Reimpreso (adaptado) con permiso de John Wiley and Sons. R. González-Núñez, *Thermal Analysis of Foamed Polyethylene Rotational Molding Followed by Internal Air Temperature Profiles*. *Polymer Engineering and Science*, 2017, **58(11)**, E235-E241.

Estos resultados experimentales fueron obtenidos en una máquina de rotomoldeo biaxial a escala de laboratorio, modelo 22 ROTO-LAB de Medkeff-Nye (USA) con un molde de aluminio de dimensiones de 20 cm x 20 cm x 20 cm y 4 mm de espesor de pared. Las mezclas secas de LLDPE y ACA (0, 0.15, 0.25, 0.5, 0.75 y 1 % en peso) se prepararon en un mezclador de alto corte LAR-15LMB (Skyfood, USA) a 3320 RPM de 4 a 5 minutos (En este escrito solamente se enfocó en los resultados de LLDPE) (González-Núñez et al., 2017).

Se seleccionó una relación de rapidez de rotación de 1:4. La temperatura interna del aire fue monitoreada con un termopar colocado dentro del molde a través de una ventila. Durante el ciclo de calentamiento, el horno se configuró a 285 °C y se puso una carga de LLDPE de 650 g. Después del ciclo de calentamiento, se utilizó enfriamiento por aire forzado hasta que la temperatura interna del aire cayera a 60°C; después de llegar a esta temperatura, la pieza final es desmontada (González-Núñez et al., 2017).

La Fig. 8.1-1 representa las secciones en las que se puede dividir el proceso, siendo éste gobernado por el transporte de energía por convección y conducción.

Calentamiento: la Sección *A* es la fase en la cual el polímero es calentado. La Sección *B* que indica el proceso de fusión del polímero y su adherencia a la pared del molde. En la Sección *C* se lleva a cabo el calentamiento de la pared compuesta por el molde y el polímero fundido, y se alcanza la temperatura máxima del proceso; es la sección en el que se prepara el molde para su enfriamiento.

Enfriamiento: la trayectoria de *C* a *D* representa el enfriamiento del polímero en su fase líquida, y de la Sección *D* a la *E* es el proceso de cristalización, siendo la sección *F* el enfriamiento del producto terminado.

## 8.2 Modelo matemático

El modelo matemático propuesto se divide en Secciones *A*, *B* y *C* para el calentamiento y las Secciones *D*, *E* y *F* para el enfriamiento (Fig. 8.1-1). Las secciones de *B* a *C* y de *D* a *E* representan un cambio de fase (fusión y cristalización del polímero, respectivamente). Se usaron las entalpías de fusión y cristalización, dadas por las Ec. 8.2-4 y 8.2-10, respectivamente, para estas secciones.

La Fig. 8.2-1 permite visualizar de manera eficiente el uso de las ecuaciones de transferencia de energía durante el proceso.

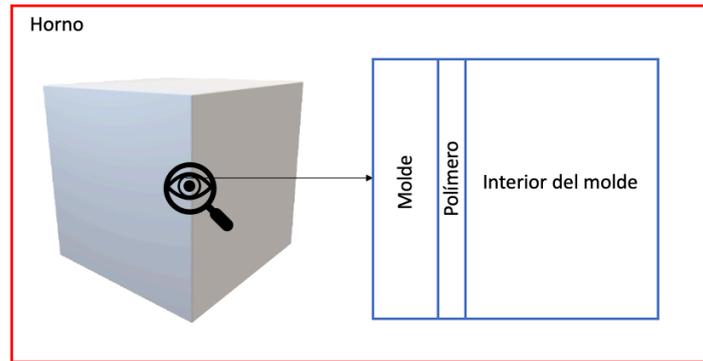


Figura 8.2-1. Representación del proceso de rotomoldeo. En rojo la frontera del horno y una vista en una dimensión para el molde, donde se representan los espesores del molde, del polímero y el aire interno.

Los mecanismos de transferencia de energía involucrados durante el calentamiento son:

1. Convección del horno al molde.
2. Conducción, donde el molde transfiere la energía obtenida del horno al polímero.
3. Convección al aire interno (Fig. 8.2-2).

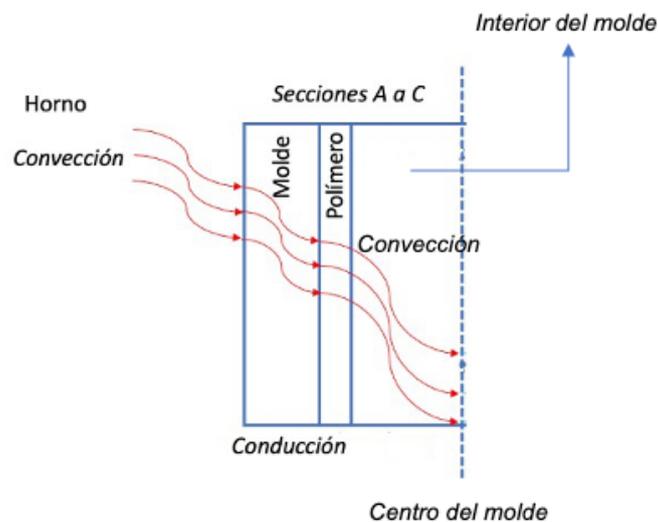


Figura 8.2-2. Representación de los mecanismos de transferencia de energía a lo largo del proceso (calentamiento).

Los mecanismos de transferencia de energía involucrados durante el enfriamiento son:

1. Convección del aire interno a las paredes del molde.
2. Conducción, donde el polímero transfiere la energía obtenida del aire interno al molde.
3. Convección en la zona de enfriamiento (Fig. 8.2-3).

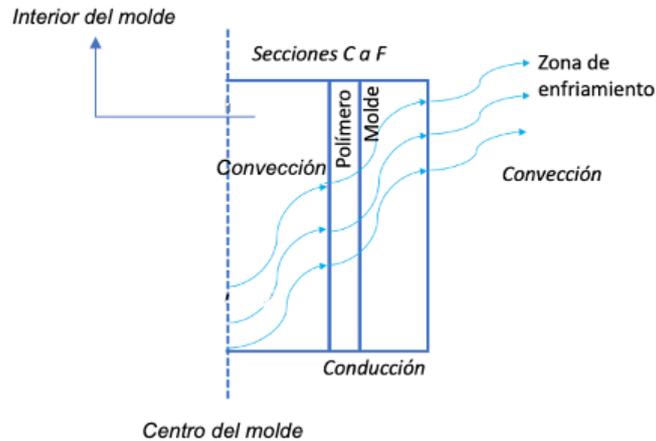


Figura 8.2-3. Representación de los mecanismos de transferencia de energía a lo largo del proceso (enfriamiento).

Para la sección de calentamiento se propuso el siguiente modelo:

- Ecuación de balance de energía del molde:

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{h_o A_m}{\rho_m c_{p_m} V_m} (T_o - T_m) + \frac{k_m}{\rho_m c_{p_m}} \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2}. \quad (8.2-1).$$

- Condición inicial:  $T_{\text{inicial}} =$  Temperatura final de la sección anterior. Para el caso de la Sección A se utiliza la temperatura al inicio de la lectura de datos experimentales.
- Primera condición de frontera.

En  $x = 0$  (en la interfaz del horno – molde):

$$-k_m \frac{dT_m}{dx} = h_o (T_o - T_m^{x=L}), \quad \forall t. \quad (8.2-2).$$

- En la interfaz entre el horno y el molde en todo el dominio del tiempo, la transferencia de energía se da por conducción.
- Segunda condición de frontera (interfaz molde-polímero).

$$x = L - \delta_m, \quad -k_m \frac{dT_m}{dx} = -k_p \frac{dT_m}{dx}, \quad \forall t. \quad (8.2-3).$$

- En la interfaz entre el molde y el polímero en todo el dominio del tiempo, se establece que la transferencia de energía es continua, por lo tanto el flux de calor es el mismo para el molde y el polímero.
- Ecuación de balance de energía del polímero (cambio de fase):

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{k_p}{\rho_p c_{p_p}} \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} - \frac{H_M}{\rho_p} \frac{dX_M}{dt} - \frac{h_i(t)A_p}{\rho_p c_{p_p} V_p} (T_m - T_i^{x=0}), \quad (8.2-4).$$

donde:

$H_m$  es el Entalpía de fusión. Para el caso de las secciones en las que no hay cambio de fase (A y C), este valor es igual a cero.  $dX_m/dt$  representa el cambio del grado de fusión.

- Condición inicial:  $T_{inicial} =$  Temperatura final de la sección anterior. Para el caso de la Sección A se utiliza la temperatura al inicio de la lectura de datos experimentales.

- Primera condición de frontera:

$$x = L - \delta_m; -k_m \frac{dT_m}{dx} = -k_p \frac{dT_m}{dx}, \quad \forall t. \quad (8.2-5).$$

- Al igual que en la Ec. 8.2-3 se considera que el flux de calor es el mismo para el molde y el polímero.

- Segunda condición de frontera:

$$x = L - \delta_m - \delta_p; \quad -k_p \frac{dT_p}{dx} = h_i(t)(T_p - T_i^{x=0}), \quad \forall t. \quad (8.2-6).$$

- En la interfaz entre el polímero y el aire interno en todo el dominio del tiempo, la transferencia de energía se da por convección.

- Ecuación del aire:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{k_{air}}{\rho_{air} c_{p_{air}}} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{h_i(t)A_{air}}{\rho_{air} c_{p_{air}} V_{air}} (T_p - T_i^{x=0}). \quad (8.2-7).$$

- Condición inicial: tal y como en la Ec. 8.2-1 se tomará como temperatura inicial la final de la sección anterior, siendo para A la temperatura al inicio de la lectura de los datos experimentales.

- Primera condición de frontera.

$$x = L - \delta_m - \delta_p \text{ (en la interfaz del polímero - aire);}$$

$$T_i = T_p, \quad \forall t. \quad (8.2-8).$$

- Para todo el dominio del tiempo, se considera que la temperatura interna y la temperatura del polímero en la interfaz son iguales.

- Segunda condición de frontera:

$$x = L, \frac{\partial T_i}{\partial x} = 0, \forall t. \quad (8.2-9).$$

- En el centro del molde se considera que la distribución de temperaturas es la misma por condiciones de simetría, ya que la mitad del cuerpo de estudio está sujeto a las mismas condiciones térmicas.

Para el caso del enfriamiento, se utilizan las mismas ecuaciones. Sin embargo, en la sección donde hay cambio de fase en el polímero (Ecuación 8.2-4) se sustituye por la ecuación siguiente.

- Ecuación del polímero (cambio de estado):

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{k_p}{\rho_p c_p} \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{H_c}{\rho_p} \frac{dX_c}{dt} - \frac{h_i(t)A_p}{\rho_p c_p V_p} (T_m - T_i^{x=0}), \quad (8.2-10).$$

donde:

$H_c$  = Calor de cristalización, para el caso de las secciones en las que no hay cambio de fase (D y F) este valor es igual a cero.

$dX_c/dt$  = cambio del grado de cristalización.

- Condición inicial:  $T_{\text{inicial}} =$  Temperatura final de la sección anterior.
- C.F.1:  $x = L - \delta_m; -k_m \frac{dT_m}{dx} = -k_p \frac{dT_p}{dx}, \forall t. \quad (8.2-11).$ 
  - Al igual que en la Ec. 6.2-5 se considera que el flux de calor es el mismo para el molde y el polímero.
- C.F.2:  $x = L - \delta_m - \delta_p;$

$$-k_p \frac{dT_p}{dx} = h_i(t)(T_p - T_i^{x=0}), \forall t. \quad (8.2-12).$$

- Al igual que en la ecuación 6.5-7, para todo el dominio del tiempo la transferencia de energía se da por convección.

### 8.3 Procesamiento de datos experimentales

Una vez obtenidos los datos experimentales, éstos se sometieron a un procesamiento de ajuste con ecuaciones racionales usando Matlab y su aplicación Curve Fitting. Esto con el fin de tener una función que describa los datos experimentales en función del tiempo y, así, obtener su primera derivada para el cálculo del coeficiente interno de calor.

La aplicación Curve Fitting de MATLAB (Anexo 1) permite ajustar una serie de datos existentes en el ambiente de trabajo de MATLAB mediante varios tipos de ecuaciones. Los ajustes pueden ser de tipo polinomial, racional e incluso personalizado; para dos o tres dimensiones (en el presente escrito se utilizó del tipo racional).

### 8.3.1 Ajuste racional

Una función racional de una variable es una función que puede ser expresada de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (8.3.1-1).$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios, los cuales pueden ser de cualquier grado y  $x$  una variable, siendo  $Q$  distinto del polinomio nulo. Las funciones racionales están definidas o tienen su dominio de definición en todos los valores de  $x$  que no anulen el denominador. Esta definición puede extenderse a un número finito pero arbitrario de variables, usando un polinomio de varias variables.

La palabra "racional" hace referencia a que la función racional es una razón o cociente (de dos polinomios); los coeficientes de los polinomios pueden ser números racionales o no, siempre y cuando no se indetermina la función  $f(x)$ .

En el presente escrito se utilizaron las funciones racionales con el fin de obtener una función que reproduzca los datos experimentales y con ello obtener su primera derivada para el cálculo de los coeficientes de transferencia de energía.

## 8.4 Procedimiento para la solución del problema de rotomoldeo

El calentamiento y el enfriamiento del molde se trató como un problema de paredes compuestas (Figura 8.4-1), siendo el molde, el polímero y el aire las paredes de este planteamiento.

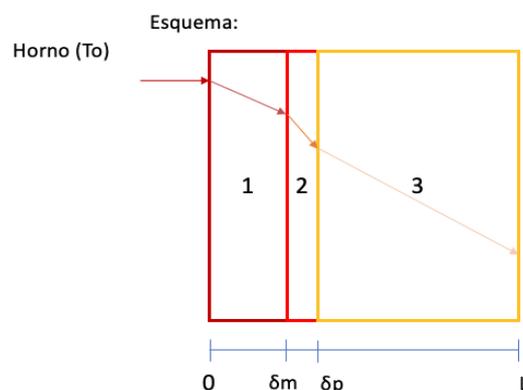


Figura 8.4-1. Esquema del proceso de calentamiento.

Para el cálculo del coeficiente interno de transferencia de energía se propuso usar la ecuación para un problema típico de paredes compuestas y suponiendo que se conoce  $h_o$ :

$$\rho_{air} C p_{air} \frac{V_{air}}{A_{air}} \frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{h_o} + \frac{\delta_m}{k_m} + \frac{\delta_p}{k_p} + \frac{\delta_{air}}{k_{air}} + \frac{1}{h_i}} (T_o - T_i), \quad (8.4-1).$$

$$h_i = \left( \frac{(T_o - T_i)}{\rho_{ap} C p_{ap} \frac{V_{ap}}{A_{ap}} \frac{dT_i}{dt}} - \frac{1}{h_o} - \frac{\delta_m}{k_m} - \frac{\delta_p}{k_p} - \frac{\delta_{air}}{k_{air}} \right)^{-1}. \quad (8.4-2).$$

Utilizando las Ec. 8.2-1 a 8.2-11 planteadas en el Capítulo 8.2, se discretiza la primera condición de frontera en la interfase del horno-molde.

#### 8.4.1 Discretización de las ecuaciones del modelo

Utilizando una malla como ejemplo de 9 espacios en el tiempo, la C.F. 1: interfase horno-molde (nodo 1):

$$-k_m \frac{dT_m}{dx} = h_o (T_o - T_m^{x=L}), \forall t, \quad (8.4-3).$$

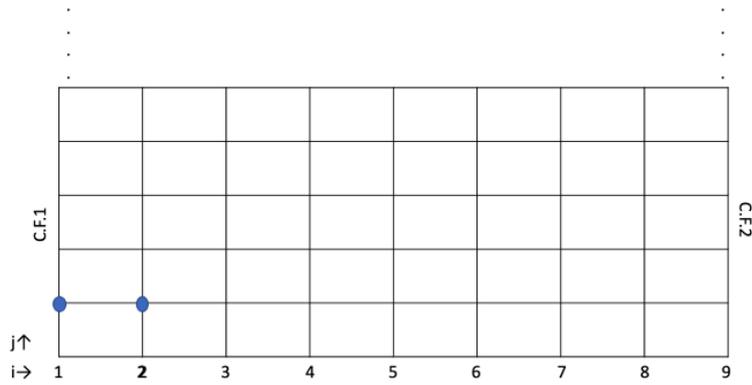
se puede discretizar por diferencias finitas hacia adelante en el espacio (Figura 8.4-2), resultando:

$$-k_m \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x_m} = h_o (T_o - T_{i,j}), \quad (8.4-4).$$

$$i = 1; -k_m \frac{T_{2,j} - T_{1,j}}{\Delta x_m} = h_o (T_o - T_{1,j}). \quad (8.4-5).$$

Como se ilustra en la Fig. 8.4-2, la discretización en el espacio y el tiempo se connotará de la siguiente forma:

- Discretización en el espacio.
- ✕ Discretización en el tiempo.

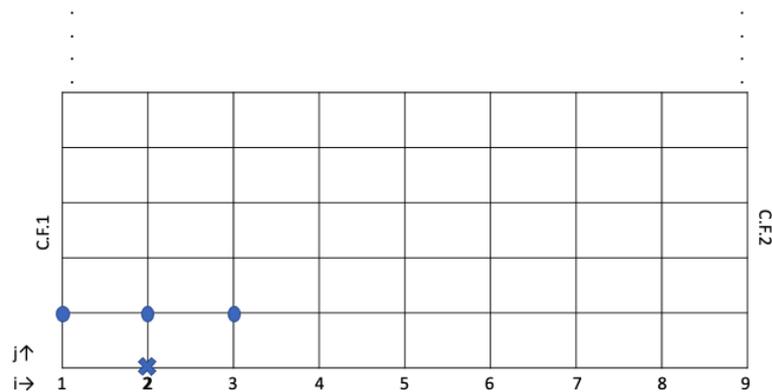


**Figura 8.4-2.** Malla para la primera condición de frontera para la ecuación del molde.

La discretización de la ecuación del molde se provee en la Ec. (8.4-7), los nodos a considerar son  $2 \leq i \leq n_m$  (espacio que comprende el espesor del molde, sin considerar la interfaz horno-molde) donde  $n_m$  es el número de pasos en el molde (Fig. 6.4-3). Aquí, se utilizan diferencias finitas hacia atrás en el tiempo y centrales en el espacio:

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{k_m}{\rho_m c p_m} \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{h_o A_m}{\rho_m c p_m V_m} (T_o - T_m), \quad (8.4-6).$$

$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{k_m}{\rho_m c p_m} \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x_m^2} + \frac{h_o A_m}{\rho_m c p_m V_m} (T_o - T_{i,j}). \quad (8.4-7).$$

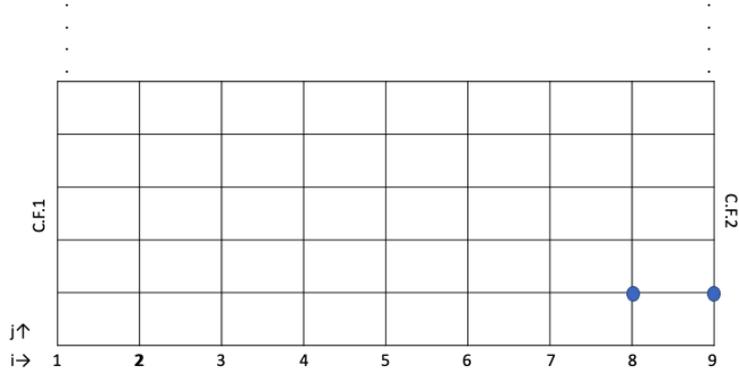


**Figura 6.4-3.** Malla para la ecuación del molde.

La discretización de la segunda condición de frontera en la interfase del molde-polímero se ilustra en la Fig. 8.4-4. La C.F.2: interfase horno-molde (nodo  $n_m+1$ ) establece que:

$$-k_m \frac{dT_m}{dx} = -k_p \frac{dT_m}{dx}, \quad (8.4-8).$$

$$-k_m \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_m} = -k_p \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_m}. \quad (8.4-9).$$



**Figura 8.4-4.** Malla para la segunda condición de frontera de la ecuación del molde.

Realizando el algebra para despejar los términos conocidos de las ecuaciones 8.4-3 a la 8.4-9, se agruparon los parámetros de las ecuaciones (Ec. 8.4-10 - 8.4-14) para crear su respectiva matriz, provista en la Fig. 8.4-4:

$$M_1 = (1 + C_{1m}); C_{1m} = \frac{-h_o \Delta x_m}{k_m}, \quad (8.4-10).$$

$$M_2 = (1 + 2Fo_m + C_{3m}); Fo_m = \frac{\alpha_m \Delta t}{\Delta x_m^2}, C_{3m} = \frac{h_o A_m}{\rho_m c p_m V_m} \Delta t, \quad (8.4-11).$$

$$M_3 = -Fo_m, \quad (8.4-12).$$

$$M_4 = (C_{4m} - 1); C_{4m} = \frac{k_p}{k_m}, \quad (8.4-13).$$

$$M_5 = (1 - C_{4m}). \quad (8.4-14).$$

$$\begin{pmatrix} M_1 T_{1,j} & T_{2,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_3 T_{1,j} & M_2 T_{2,j} & M_3 T_{3,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_3 T_{2,j} & M_2 T_{3,j} & M_3 T_{4,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 T_{3,j} & M_2 T_{4,j} & M_3 T_{5,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_3 T_{4,j} & M_2 T_{5,j} & M_3 T_{6,j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_3 T_{5,j} & M_2 T_{6,j} & M_3 T_{7,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_3 T_{6,j} & M_2 T_{7,j} & M_3 T_{8,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_3 T_{7,j} & M_2 T_{8,j} & M_3 T_{9,j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_4 T_{8,j} & M_5 T_{9,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1m} T_o \\ T_{2,j-1} + C_{3m} T_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{8,j-1} + C_{3m} T_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Figura 8.4-4.** Matriz solución para la ecuación del molde y sus condiciones de frontera.

En la sección del polímero, la condición de frontera en la interfase molde-polímero será la calculada en el punto anterior por lo que la solución del sistema mostrado y esta será una condición de Dirichlet.

A partir de este punto, la ecuación del polímero (Ec. 8.4-6) y la del aire se resolverán de manera simultánea. Cada sección (molde y aire) tienen números de pasos independientes uno del otro y dependientes de su espesor.

De igual manera, la discretización de la ecuación del polímero queda como:

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{k_p}{\rho_p c_p} \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} - \frac{H_m}{c_p} \frac{dx_m}{dt} - \frac{h_i(t)A_p}{\rho_p c_p V_p} (T_m - T_i^{x=0}), \quad (8.4-15).$$

$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{k_p}{\rho_p c_p} \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x_p^2} - \frac{H_m}{c_p} \frac{dx_m}{dt} - \frac{h_i(t)A_p}{\rho_p c_p V_p} (T_{nm+1} - T_{nair+1}). \quad (8.4-16).$$

Para el caso de las secciones en las que no se tiene cambio de fase, la entalpía asociada a esos procesos es nula, i.e.  $H_m = 0$ .

La discretización de la ecuación del aire queda como:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{k_{air}}{\rho_{air} c_p} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{h_i(t)A_{air}}{\rho_{air} c_p V_{air}} (T_p - T_i^{x=0}), \quad (8.4-17).$$

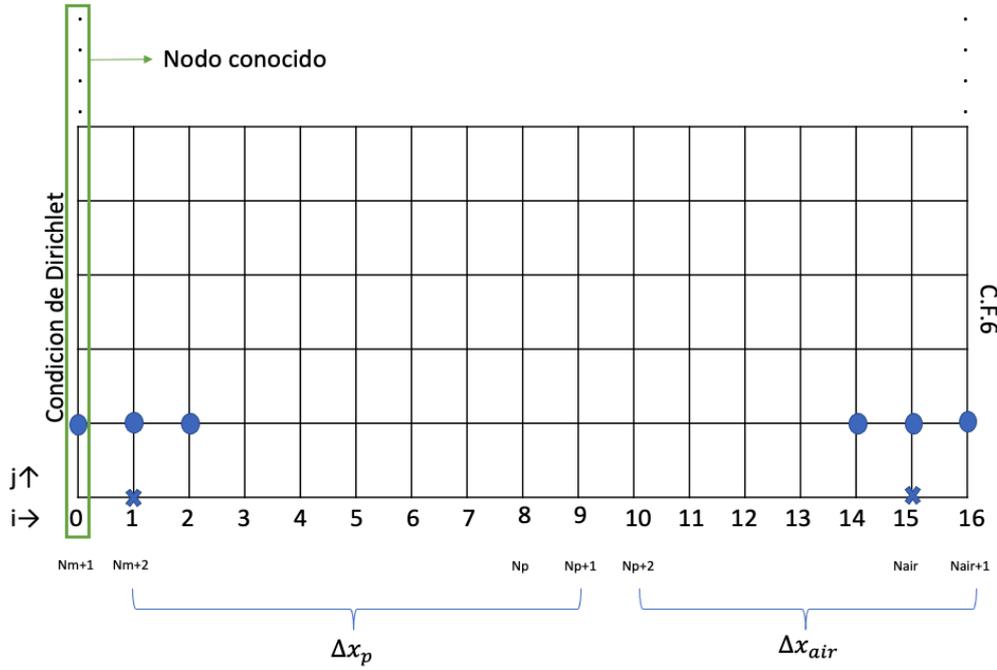
$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{k_{air}}{\rho_{air} c_p} \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x_{air}^2} + \frac{h_i(t)A_{air}}{\rho_{air} c_p V_{air}} (T_{np+1} - T_{nair+1}). \quad (8.4-18).$$

Y la discretización de la condición de frontera en  $L$ :

$$x = L, \frac{\partial T_i}{\partial x} = 0, \forall t, \quad (8.4-19).$$

$$\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_{air}} = 0. \quad (8.4-20).$$

La ecuación del polímero comprende de  $n_m+2 \leq i \leq n_p+1$  (espacio que comprende el espesor del polímero, sin considerar la interfaz molde-polímero) y la ecuación del aire comprende de  $np+2 \leq i \leq nair+1$  (espacio que comprende el aire dentro del molde y el centro del cuerpo), de acuerdo con la malla de la Fig. 8.4-5.



**Figura 8.4-5.** Malla para la solución de la ecuación del polímero y aire.

La matriz del sistema de ecuaciones para el polímero y el aire se muestran en la Fig. 8.4-6. Para simplificar el manejo de las ecuaciones utilizadas y la construcción del sistema de ecuaciones, se definieron parámetros que ayudan en la agrupación de los elementos de su respectiva matriz:

$$A_1 = 1 + 2Fo_p; Fo_p = \frac{\alpha_p \Delta t}{\Delta x_p^2}, \quad (8.4-21).$$

$$A_2 = Fo_p, \quad (8.4-22).$$

$$A_3 = h_{i,j} C_{2p}; C_{2p} = \frac{h_o A_p}{\rho_p C_p V_p}, \quad (8.4-23).$$

$$A_4 = Fop - h_{i,j} C_{2p}, \quad (8.4-24).$$

$$A_5 = C_{1pt} \frac{dx}{dt}; C_{1pt} = \frac{H_m}{C_p} \Delta t, \quad (8.4-25).$$

$$A_6 = 1 - C_{3p} h_{i,j}; C_{3p} = \frac{-\Delta x_p}{k_p}, \quad (8.4-26).$$

$$A_7 = h_{i,j} C_{3p}, \quad (8.4-27).$$

$$B_1 = h_{i,j} C_{2p} - Fo_{air}; Fo_{air} = \frac{\alpha_{air} \Delta t}{\Delta x_{air}^2}, \quad (8.4-28).$$

$$B_2 = 1 + 2Fo_{air}, \quad (8.4-29).$$

$$B_3 = -Fo_{air}, \quad (8.4-30).$$

$$B_4 = h_{i,j} C_{2air}; C_{2air} = \frac{h_o A_{air}}{\rho_{air} C_{p_{air}} V_{air}} \Delta t, \quad (8.4-31).$$

$$B_5 = -Fo_{air} - h_{i,j} C_{2air}. \quad (8.4-32).$$

$$\begin{pmatrix}
A1T_{1,j} & A2T_{2,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A3T_{16,j} \\
A2T_{1,j} & A1T_{2,j} & A2T_{3,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A3T_{16,j} \\
0 & A2T_{2,j} & A1T_{3,j} & A2T_{4,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A3T_{16,j} \\
0 & 0 & A2T_{3,j} & A1T_{4,j} & A2T_{5,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A3T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & A2T_{4,j} & A1T_{5,j} & A2T_{6,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A3T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & A2T_{5,j} & A1T_{6,j} & A2T_{7,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A3T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A2T_{6,j} & A1T_{7,j} & A2T_{8,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A3T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{7,j} & A4T_{8,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A5T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B1T_{8,j} & B2T_{9,j} & B3T_{10,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B4T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B4T_{8,j} & B3T_{9,j} & B2T_{10,j} & B3T_{11,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B4T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B4T_{8,j} & 0 & B3T_{10,j} & B2T_{11,j} & B3T_{12,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & -B4T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B4T_{8,j} & 0 & 0 & B3T_{11,j} & B2T_{12,j} & B3T_{13,j} & 0 & 0 & 0 & -B4T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B4T_{8,j} & 0 & 0 & 0 & B3T_{12,j} & B2T_{13,j} & B3T_{14,j} & 0 & 0 & -B4T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B4T_{8,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & B3T_{13,j} & B2T_{14,j} & B3T_{15,j} & 0 & -B4T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B4T_{8,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B3T_{14,j} & B2T_{15,j} & B5T_{16,j} & -B4T_{16,j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{15,j} & -T_{16,j} & 0
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
T_{1,j-1} + T_{nm+1,j}(-A2 + A3) \\
T_{2j-1} + T_{nm+1,j}(A3) \\
\vdots \\
\vdots \\
T_{7j-1} + T_{nm+1,j}(A3) \\
0 \\
T_{8j-1} \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
T_{15j-1} \\
0
\end{pmatrix}$$

**Figura 8.4-6.** Matriz para la solución de las ecuaciones del polímero y el aire interno (Ecuaciones 8.4-15 a 8.4-32).

Para el caso del enfriamiento, se sigue un procedimiento análogo, sólo cambiando el término de cristalización.  $H_c = 0$  solo para las secciones en las que no se tienen cambio de fase:

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{k_p}{\rho_p c_p} \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{H_c}{\rho_p} \frac{dX_c}{dt} - \frac{h_i(t)A_p}{\rho_p c_p V_p} (T_m - T_i^{x=0}), \quad (8.4-33).$$

La discretización de la ecuación de balance del polímero en la sección de enfriamiento es:

$$\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{k_p}{\rho_p c_p} \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x_p^2} + \frac{H_c}{c_p} \frac{dX_c}{dt} - \frac{h_i(t)A_p}{\rho_p c_p V_p} (T_{nm+1} - T_{nair+1}), \quad (8.4-34).$$

## 8.5 Algoritmos para la solución del problema del rotomoldeo

Para las soluciones de las ecuaciones anteriormente planteadas se hizo uso del software Matlab. Se utilizó un algoritmo implícito de diferencias finitas (Figura 8.5-1).

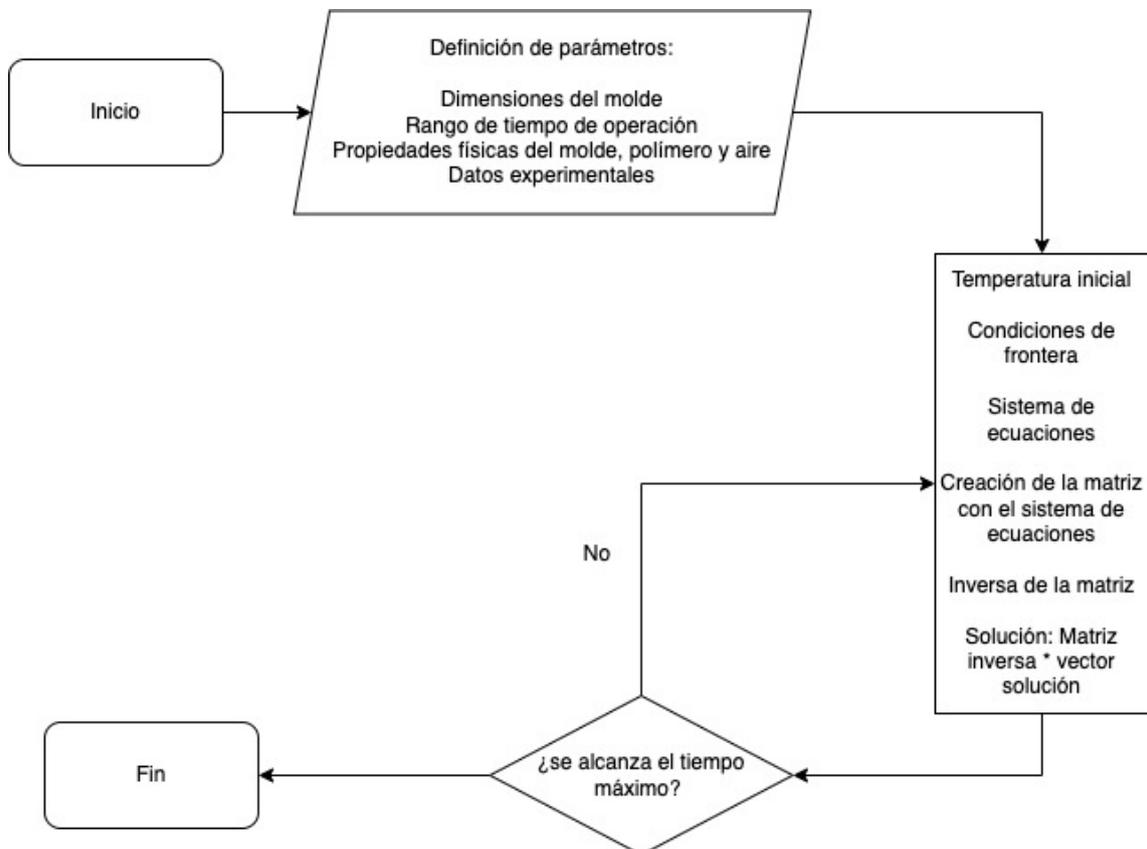


Figura 8.5-1. Algoritmo para la solución del proceso de rotomoldeo.

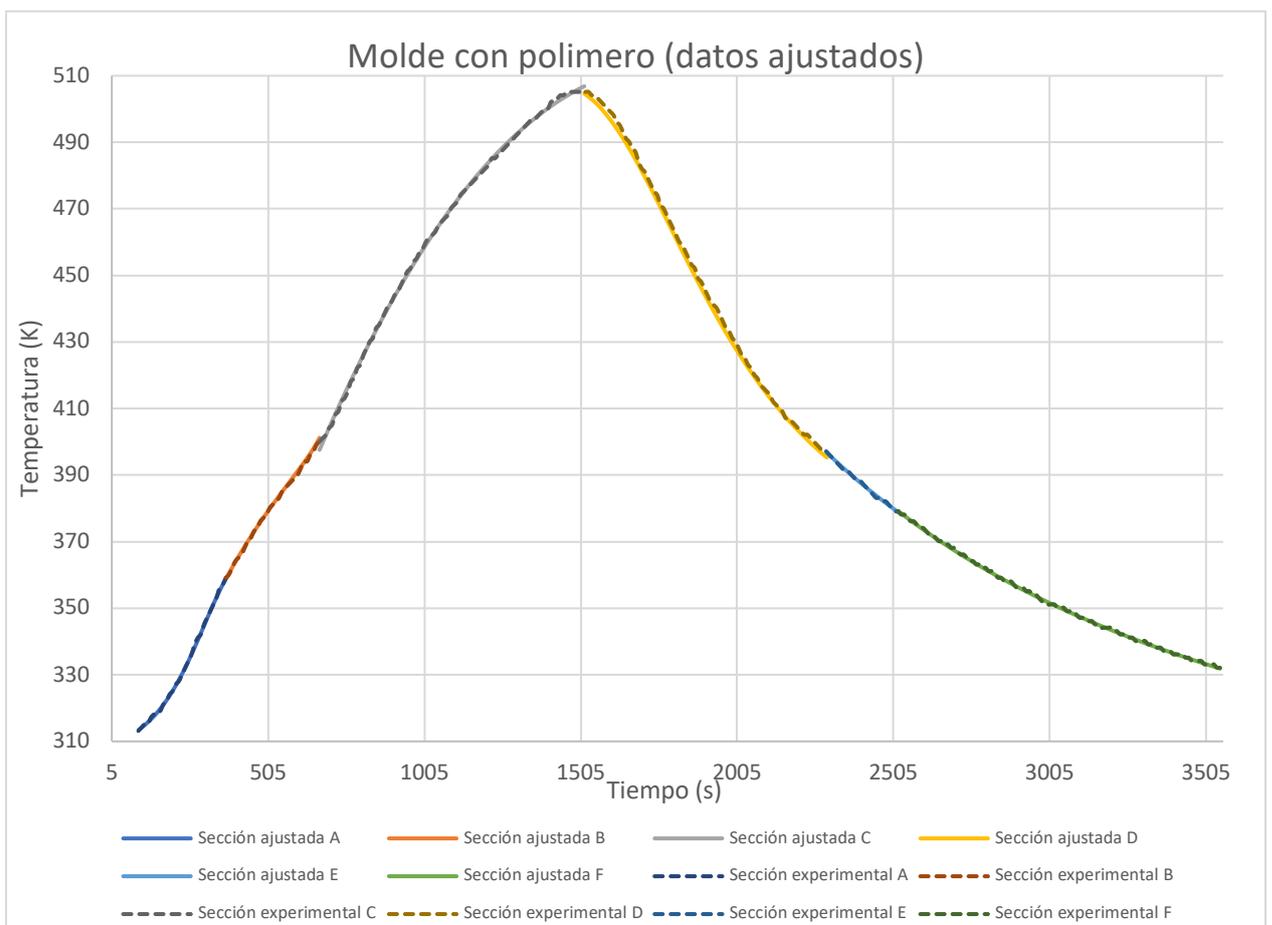
## 8.6 Resultados

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos por sección del ajuste racional, el cálculo de  $h_i$  y los modelos matemáticos. Posteriormente se abordará el análisis de resultados.

### 8.6.1 Ajuste racional

Como ya se mencionó anteriormente, se utilizó la aplicación de Matlab llamada Curve Fitting en la que se ajustaron los datos experimentales con una ecuación racional (Figura 8.6.1-1). En todas las secciones del proceso, se utilizó el mismo modelo de ecuación racional de segundo grado para el numerador y tercer grado para el denominador (Ecuación 8.6.1-1). Los parámetros correspondientes se muestran en el Anexo 2 sección por sección.

$$f(t) = \frac{p1 \cdot T^2 + p2 \cdot T + p3}{x^3 + q1 \cdot x^2 + q2 \cdot x + q3}, \quad (8.6.-1).$$



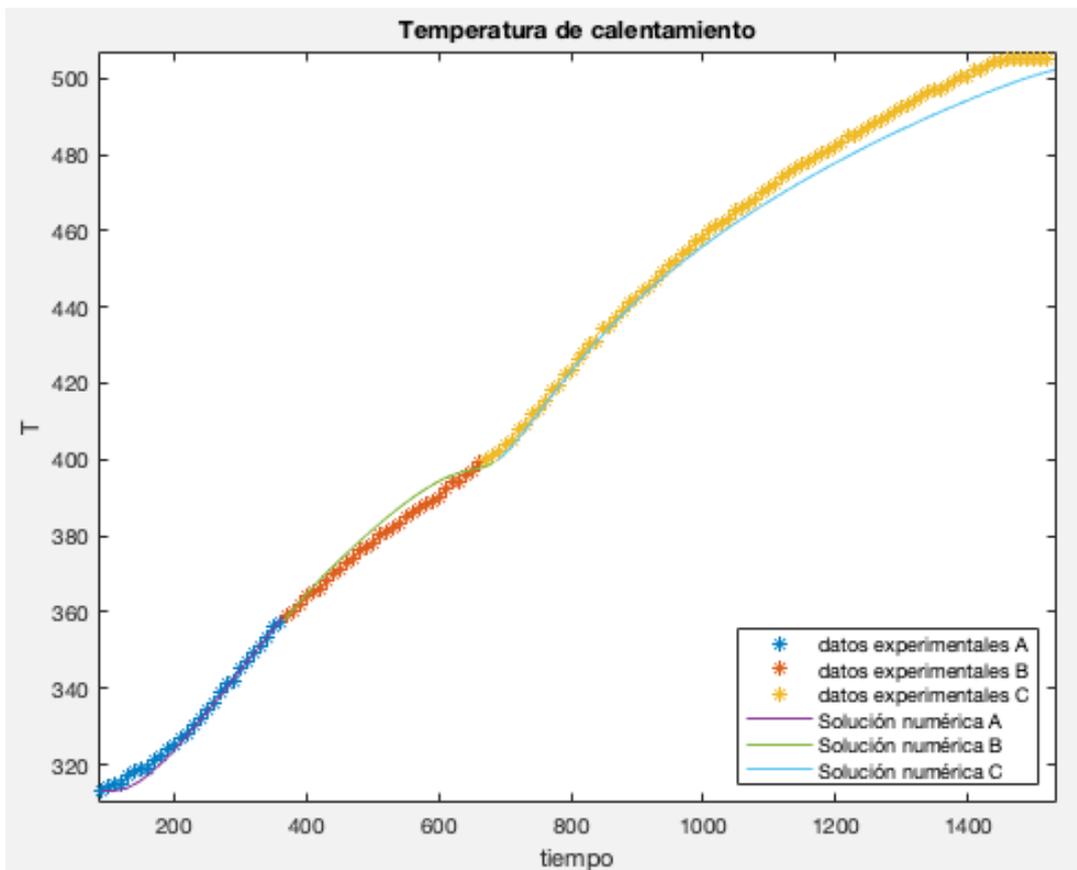
**Figura 8.6.1-1.** Resultados del ajuste racional (líneas continuas: ajuste racional, líneas punteadas: datos experimentales).

### 8.6.2 Resultados del cálculo de $h_i$

Los resultados de  $h_i$  se muestran en el análisis de resultados y fueron calculados utilizando la Ecuación 8.4-2, la cual sólo se utilizó para el calentamiento.

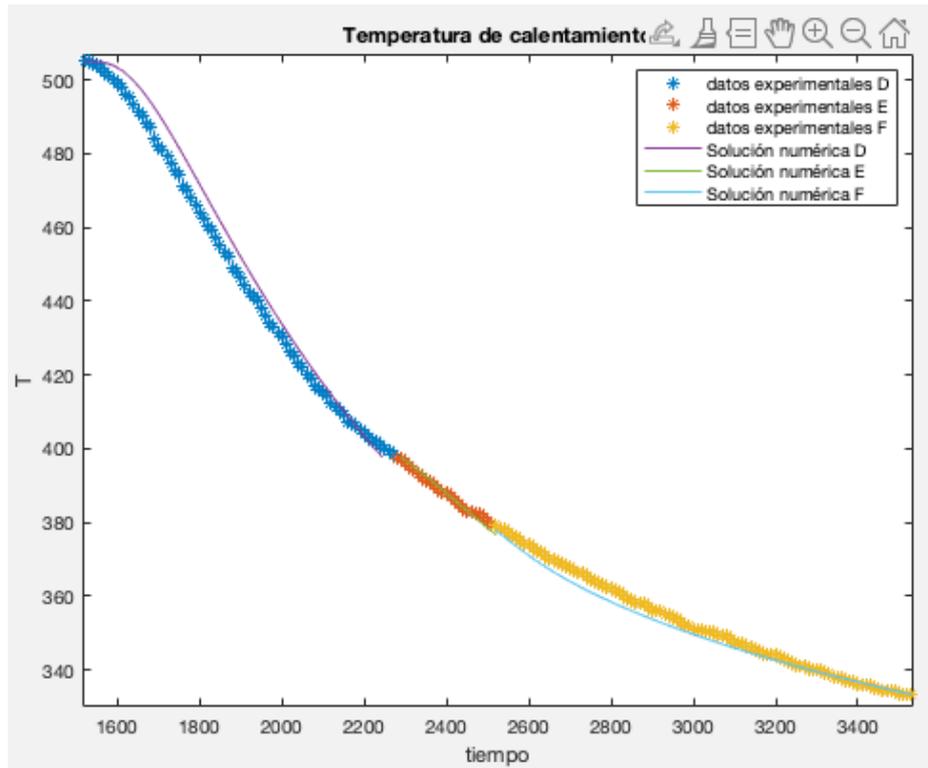
### 8.6.3 Resultados de los modelos de calentamiento y enfriamiento

Los resultados del calentamiento y enfriamiento se muestran en la sección “análisis de resultados”. Los cálculos se realizaron sección por sección utilizando ecuaciones diferenciales parciales, aproximadas por el método implícito. En la Fig. 8.6.3-1 se compara la solución numérica (línea continua) del calentamiento global contra datos experimentales, los cuales se representan con asteriscos, además de que se diferencia por color una sección de otra.



**Figura 8.6.3-1.** Gráfica global de la etapa de calentamiento.

Y en la Fig. 8.6.3-2 se compara la solución numérica (línea continua) del enfriamiento global contra datos experimentales, al igual que en la Fig. anterior, éstos se representan con asteriscos y se diferencian por color de una sección a otra.



**Figura 8.6.3-2.** Gráfica global de la etapa de enfriamiento.

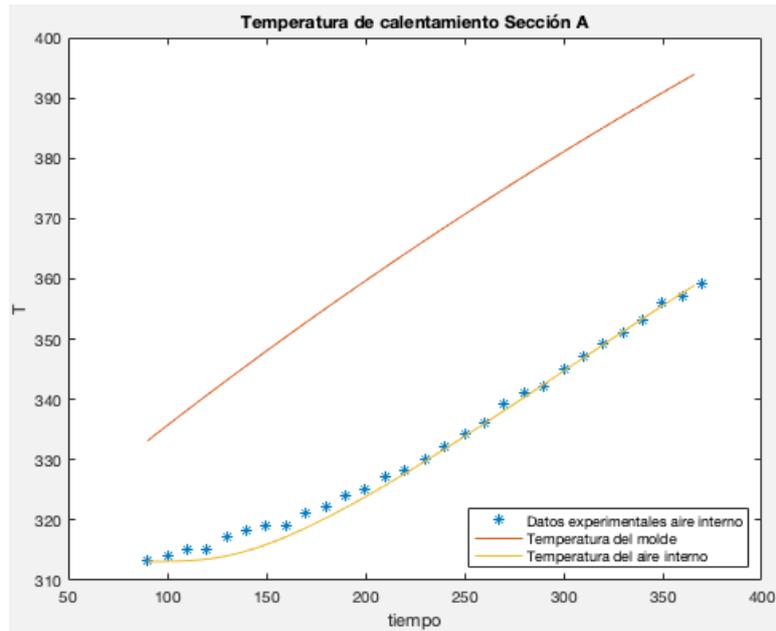
#### 8.6.4 Análisis de resultados

En esta sección se analizan, sección por sección, las etapas del proceso de rotomoldeo.

##### Sección A

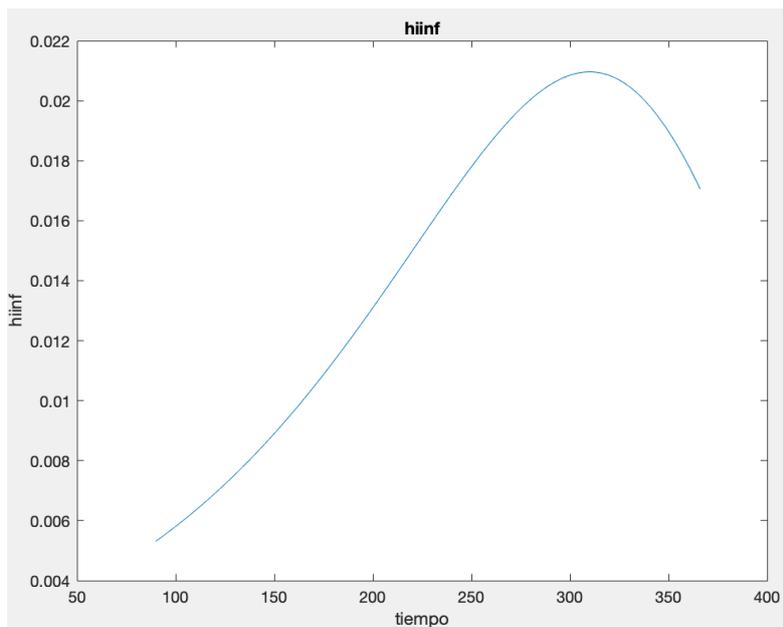
Calentamiento del molde con polímero en estado sólido.

En esta sección del proceso, el polímero es calentado hasta su punto de fusión. A tiempos bajos, hay una diferencia entre los datos obtenidos y los datos experimentales. Conforme avanza el tiempo, los datos obtenidos empatan con los datos experimentales (Fig. 8.6.4-1), por lo que es al arranque donde al modelo propuesto le es difícil reproducir los datos experimentales. Esto puede ser debido al cálculo de  $h_i$ , que no es constante y va cambiando con el tiempo. En esta sección se utilizó  $h_o$  como una constante igual a  $5.5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (en las tres secciones de calentamiento).



**Figura 8.6.4-1.** Solución gráfica del modelo de calentamiento para la Sección A.

En la Fig. 8.6.4-2 se evidencia una variación en el coeficiente de transferencia de energía interno, a diferencia de otras propuestas para la solución del problema de rotomoldeo (Gogos, 1998). En este escrito se estipula que  $h_i$  es variable. Además, los resultados obtenidos considerando un problema típico de paredes compuestas dan un valor más pequeño que los reportados en la literatura (Cao, 2010).



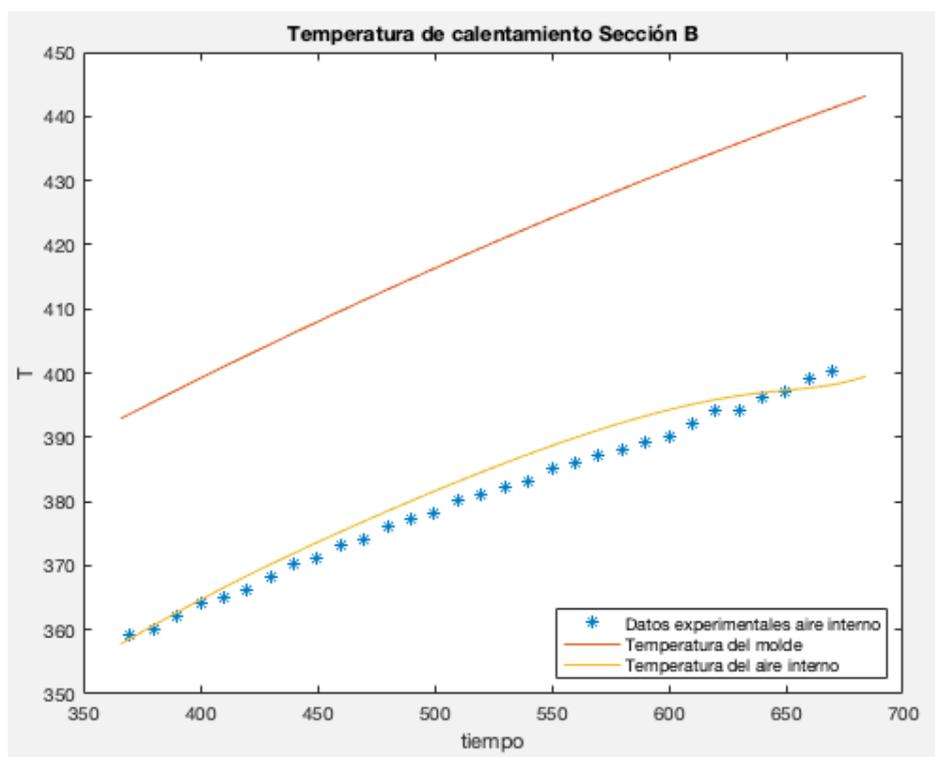
**Figura 8.6.4-2.** Comportamiento del coeficiente de transferencia de energía interno en la Sección A.

## Sección B

Calentamiento del molde con polímero (cambio de estado).

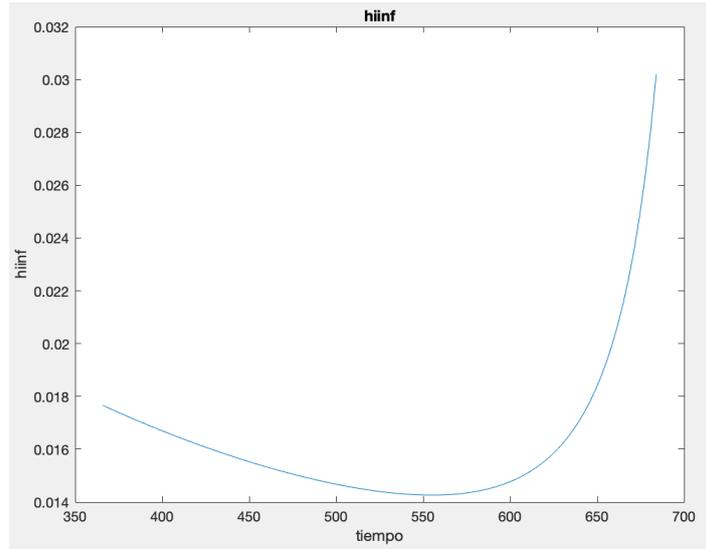
Cuando se alcanza el punto de fusión, el polímero comienza a cambiar de estado, de sólido a líquido. Se agrega un término de cambio de fase en la Ec. 8.2-10 debido a este cambio de estado (Greco, 2003).

A tiempos bajos, la solución obtenida se ajustan bien a los datos experimentales; sin embargo, conforme avanza el tiempo, se tiene una diferencia notable entre los datos experimentales y la solución (Fig. 8.6.4-3).



**Figura 8.6.4-3.** Resultados de la simulación de calentamiento en la Sección B: cambio de estado del polímero.

Como se observa en la Fig. 8.6.4-4, el coeficiente de transferencia de energía interno se mantuvo dentro del rango (Tabla 3.3-1), pero muestra un comportamiento exponencial, siendo decreciente al inicio y conforme avanza en el tiempo tiende a crecer.

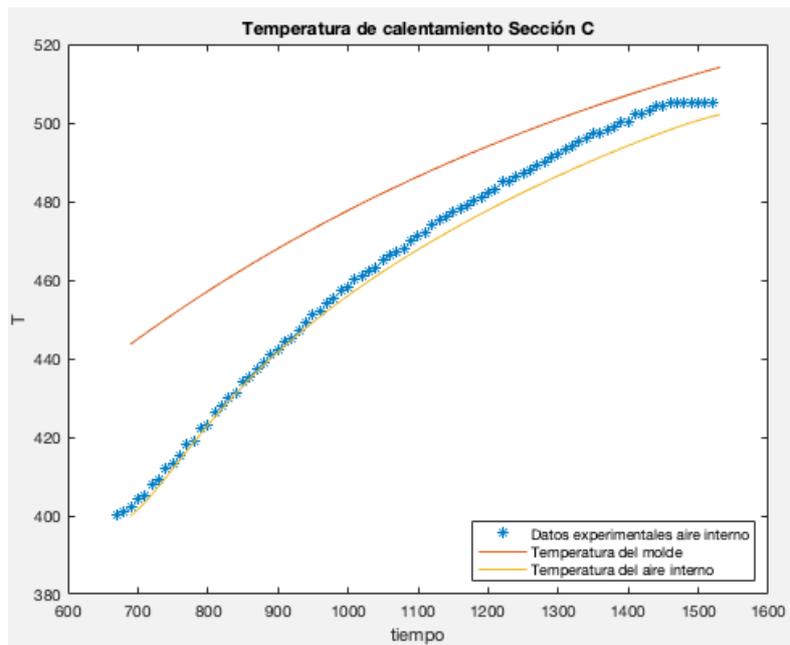


**Figura 8.6.4-4.** Coeficiente de transferencia de energía interno en la Sección B de calentamiento.

### Sección C

Calentamiento del molde con polímero en líquido.

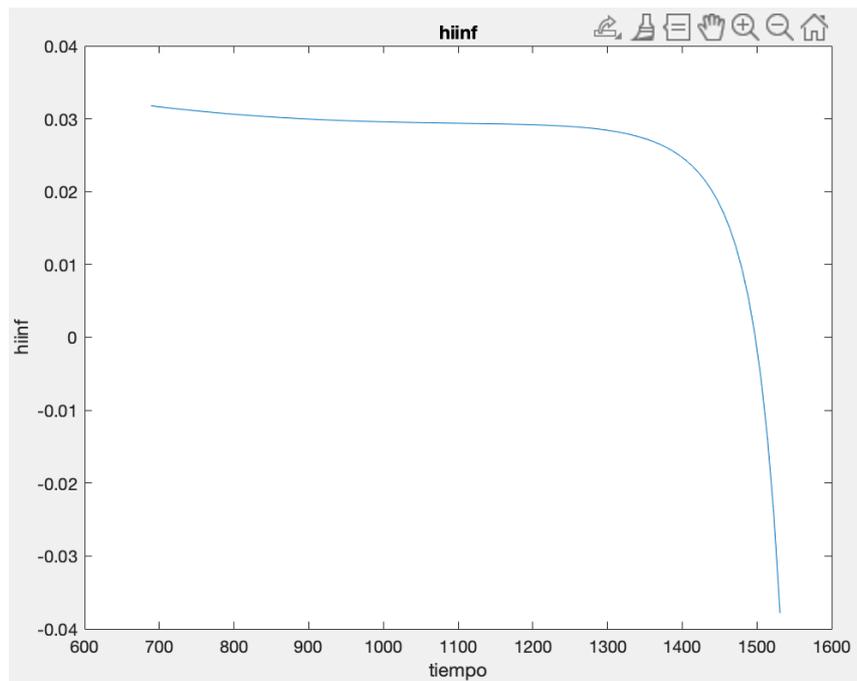
Una vez que termina el cambio de fase, el polímero está completamente en estado líquido. El modelo puede reproducir los datos experimentales al inicio en esta sección del proceso, pero, conforme pasa el tiempo, el modelo despliega deficiencias, lo cual puede deberse al cambio de la velocidad del calentamiento durante el experimento. Lo anterior se ilustra en la gráfica de  $h_i$  de la Fig. 8.6.4-5, donde al inicio tiene un comportamiento constante y decrece conforme se acerca al punto final de la sección.



**Figura 8.6.4-5.** Resultados del calentamiento del polímero en estado líquido.

En esta sección, los valores de  $hi$  (Fig. 8.6.4-6) se mantienen dentro del rango de los valores reportados en la literatura (Cao, 2010); además,  $hi$  es prácticamente constante, a diferencia de las secciones anteriores.

Los valores negativos al final de la sección se deben a que los datos experimentales decrecen, por lo que la derivada de la temperatura con respecto al tiempo es negativa (Fig. 8.6.4-6).



**Figura 8.6.4-6.** Coeficiente de transferencia de energía interno en la última Sección C de calentamiento.

## Sección D

Enfriamiento del molde con polímero en líquido.

Una vez que se alcanza el punto o temperatura máximos de proceso (PIAT) se inicia el enfriamiento, donde la temperatura del molde y la temperatura interna son iguales.

En esta sección de enfriamiento se utilizó convección forzada; sin embargo, no es posible calcular el coeficiente de transferencia externo debido a la falta de datos experimentales, tales como velocidad del aire de los ventiladores, tipos de ventiladores, y procedimiento de manipulación del molde, entre otros factores. Así, se propone un  $h_o$  de  $6.5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , siendo una unidad más grande que en el calentamiento y, por ende, se propone  $hi$  constante.

Por tanto, se consideró como condición inicial que la temperatura del aire interno y el molde eran la misma. Esto ayudó al modelo a seguir el mismo comportamiento de los datos experimentales, pero no logró replicarlos (Fig.

8.6.4-7). Debido a la falta de datos experimentales como ya se mencionó anteriormente.

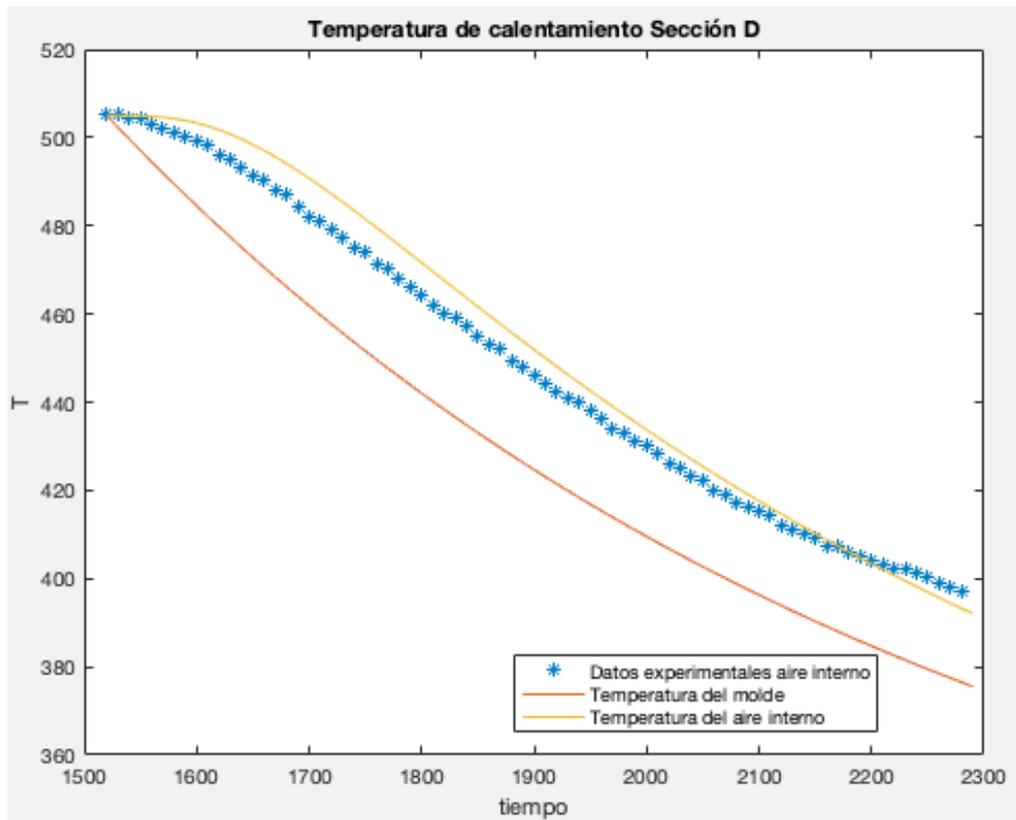


Figura 8.6.4-7. Enfriamiento del polímero en estado líquido.

Como ya se mencionó antes, en esta sección se utilizó un  $h_i$  constante. Se consideró así porque se supuso que, dentro del molde, la masa del aire está estático. Se propuso un  $h_i=0.08 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , siendo un poco más grande que el de calentamiento.

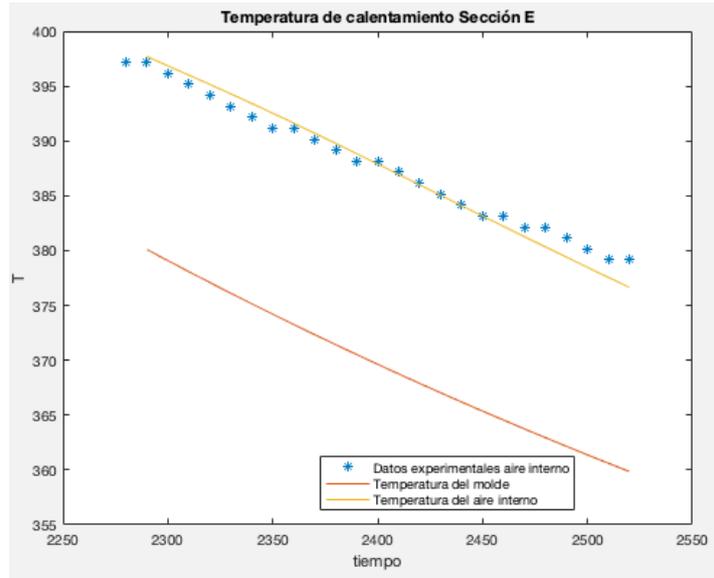
### Sección E

Enfriamiento del molde con polímero (cambio de estado)

Una vez alcanzado el punto de cristalización del polímero, se utilizó un término de cambio de fase de cristalización propuesto por Greco (2003).

En esta sección, se propuso un  $h_i$  constante de  $0.018 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , valor en el que oscilaba el cálculo del coeficiente de transferencia de energía interno durante el proceso de calentamiento.

La variación que se tiene entre los datos experimentales y los resultados del modelo se puede atribuir a las lecturas del termopar, ya que el modelo sigue la misma tendencia entre los datos experimentales y los datos obtenidos con el modelo propuesto (Fig. 8.6.4-8).

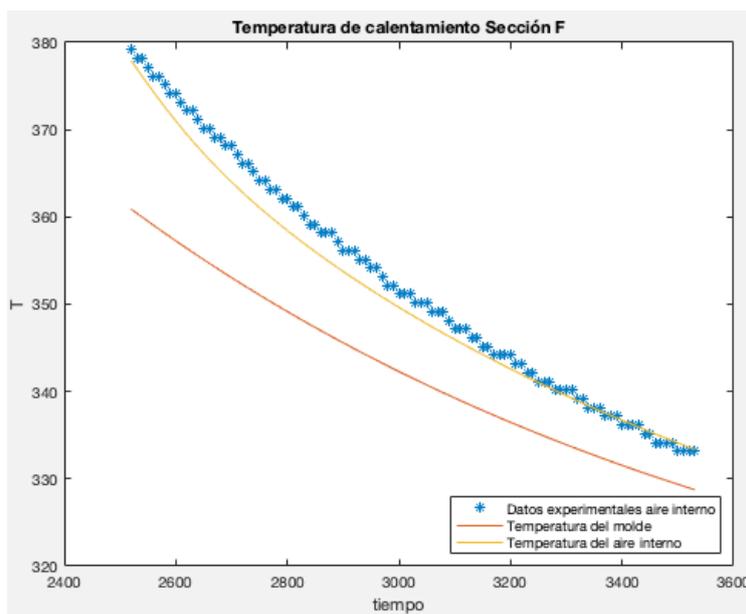


**Figura 8.6.4-8.** Enfriamiento del polímero durante el cambio de fase.

### Sección F

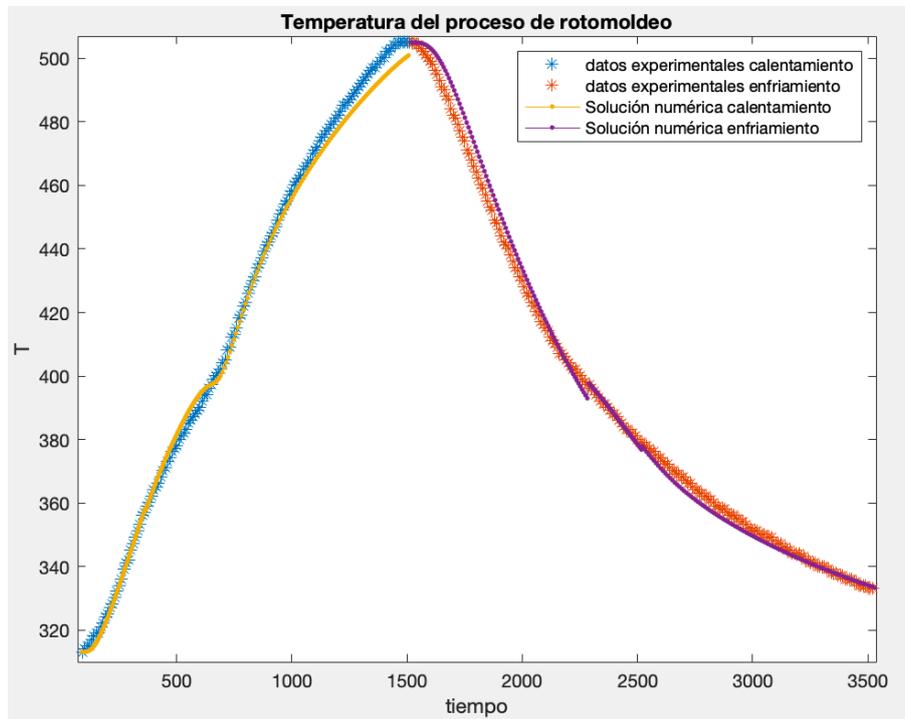
Enfriamiento del molde con polímero en estado sólido.

Una vez que se termina de cristalizar todo el polímero, se propone un  $h_o$  de  $4 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , menor al que se utilizó en los casos anteriores. Esto se debe a que no se tiene información suficiente de cómo es que se llevó a cabo esta última fase del proceso de enfriamiento. Este valor propuesto para  $h_o$  puede ser atribuible a que se disminuyó la velocidad de los ventiladores, provocando una caída del valor de  $h_o$ . Sin embargo, al igual que en la primera sección, el modelo tiene deficiencias al reproducir los datos experimentales y probablemente se debe al manejo de esta etapa final (Fig. 8.6.4-9).



**Figura 8.6.4-9.** Final del proceso de enfriamiento.

En la Fig. 8.6.4-10 se muestran los resultados en un solo gráfico, en el cual se puede apreciar los resultados obtenidos con el modelo planteado.



**Figura 8.6.4-10. Resultado de la aproximación del proceso de rotomoldeo.**

Estas aproximaciones nos muestran que el coeficiente de transferencia interno es variable durante el calentamiento y es posible observar este hecho en las figuras anteriores, además, de que este coeficiente tiene comportamiento exponencial conforme avanza el tiempo.

Durante el enfriamiento hicieron falta valores experimentales para poder calcular el coeficiente externo de transferencia de energía y el interno, por lo que se consideraron valores constantes. Sin embargo, en cada una de las secciones se usaron valores distintos de estos coeficientes lo que indica que también son valores variables durante el proceso de enfriamiento

Si se observan cada una de las secciones por separado podemos visualizar que se tienen grandes diferencias entre los datos experimentales y los datos obtenidos. Sin embargo, este efecto visual se logra por el dominio del tiempo, si lo se observan todas las secciones en un solo gráfico se tiene el efecto visual que el modelo propuesto ajusta a los datos experimentales.

El modelo propuesto es una herramienta que ayuda a acercarse a los datos experimentales y es susceptible a optimización para tener un mejor ajuste.

## 8.7 Conclusiones

El proceso de rotomoldeo ha sido objeto de estudio por un sinnúmero de autores, tales como Nugent (1992) y Gogos (1998), por mencionar algunos. Estos autores buscaron obtener un modelo capaz de reproducir los datos experimentales. La razón por la que se busca un modelo eficiente es poder reducir costos y tiempos de investigación, ya que cada corrida del proceso representa un gasto considerable, además de optimizar el proceso a grande escala.

Partiendo de esta búsqueda de un modelo eficiente se plantearon distintos modelos, de los cuales resultaron en pruebas fallidas, dichas pruebas llevaron a la investigación al planteamiento de un coeficiente de transferencia de energía variable.

Aunque Nugent (1992) y Gogos (1998) mencionan que el coeficiente de calor es constante en todo el proceso. Con el desarrollo de este trabajo, es posible concluir que en el proceso de calentamiento que se tiene un comportamiento variable del coeficiente de calor,  $h$ .

Las soluciones numéricas obtenidas tienen puntos de mejora, ya que en algunas secciones como en  $C$  o  $F$ , no ajustan al 100% los datos experimentales. A pesar de ello, el modelo muestra una concordancia cualitativa con los datos experimentales.

Este comportamiento puede ser atribuido a que se requieran más datos experimentales, tales como la temperatura del molde y del manejo del proceso.

El manejo del proceso puede ser un factor importante en el cambio de calentamiento y enfriamiento, ya que se debe saber qué paso en este intermedio. Por ejemplo, el tiempo que tardó el molde en pasar a la etapa de enfriamiento puede ser un factor importante.

Debido a que no se sabe cuál fue el control del proceso en el intermedio del calentamiento y enfriamiento, el tiempo de inicio afecta el reporte de datos experimentales y, por tanto, de la información inferida desde los datos experimentales. Esto, al final, repercutirá en las soluciones obtenidas. A consecuencia de ello, en este trabajo se observa un enfriamiento lento en la simulación (comparado con los datos experimentales).

A pesar de todo lo mencionado anteriormente, este modelo matemático puede ser comparado con modelos de otros autores como Gogos (1998) y Greco (2003), teniendo un mejor ajuste en algunas secciones. Lo anterior abre camino a nuevas investigaciones donde se involucren coeficientes de transferencia de energía variables a lo largo del proceso.

El tener un modelo matemático que pueda describir este proceso puede ser muy útil para el estudio del rotomoldeo, ya que la experimentación de este proceso implica una inversión económica muy alta, además de que se necesita personal capacitado para su operación. Lo anterior puede implicar pérdidas económicas. El emplear modelos matemáticos que ayuden a describir procesos permite

conocer la naturaleza de estos, sin recurrir a diferentes corridas experimentales.

## 9. Anexo 1

La herramienta Curve Fitting (Fig. 9-1) se encuentra en la pestaña “APPS” de MATLAB, en la sección con el mismo nombre.



Figura 9-1. Localización de la aplicación Curve Fitting de Matlab.

Los datos por ajustar deben existir en el ambiente de trabajo de MATLAB, por lo que es necesario importar los datos a procesar en formato xlsx. Para importar datos desde un archivo de xlsx utilizamos el botón Import Data (Fig. 9-2).

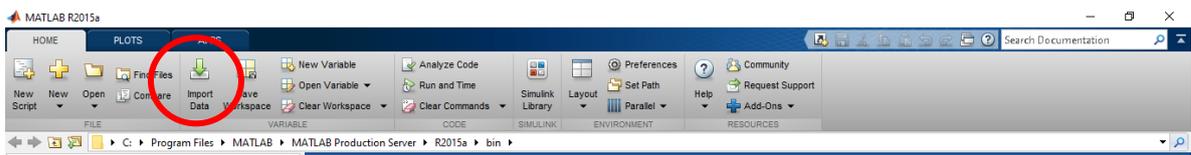


Figura 9-2. Botón Import Data se encuentra en la pestaña Home, en la sección VARIABLE.

Desde la ventana de importación de datos (Fig. 9-3), se selecciona el archivo con los datos a importar.

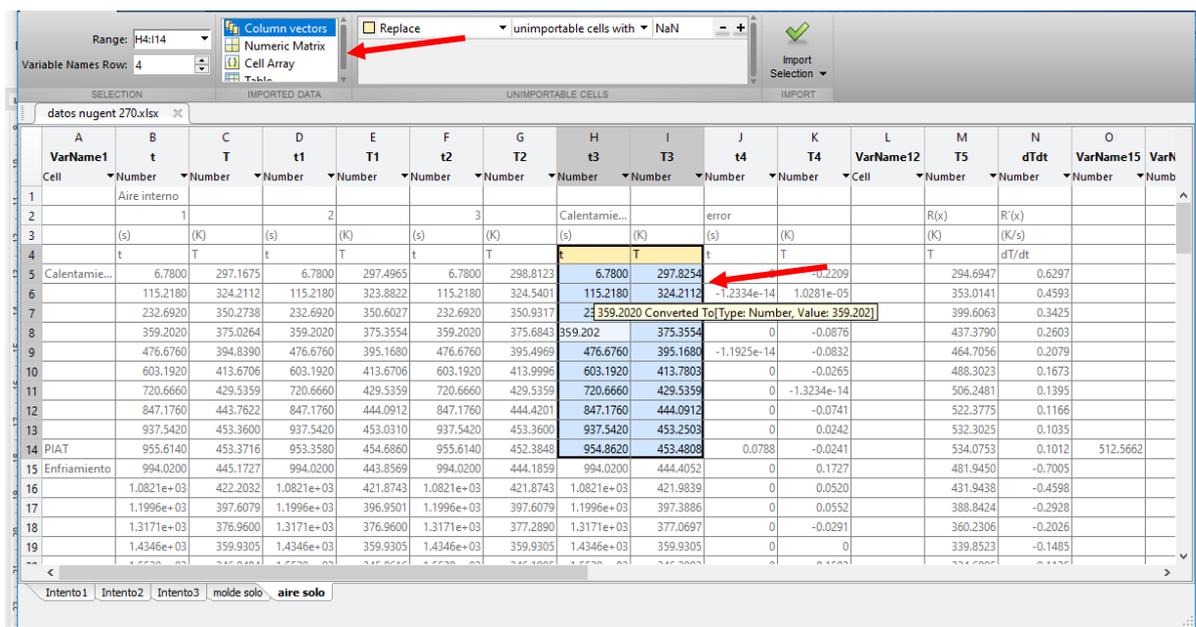


Figura 9-3. Ventana de importación de datos.

En esta ventana es posible visualizar los datos y navegar entre las hojas del documento, tal y como si se tratara de un archivo.xlsx. Se seleccionan los datos a importar y la forma deseada en la que importarlos, ya sean vectores columna, arreglos de celdas o matriz; en el caso del presente escrito se selecciona vector columna (Fig. 9-4).

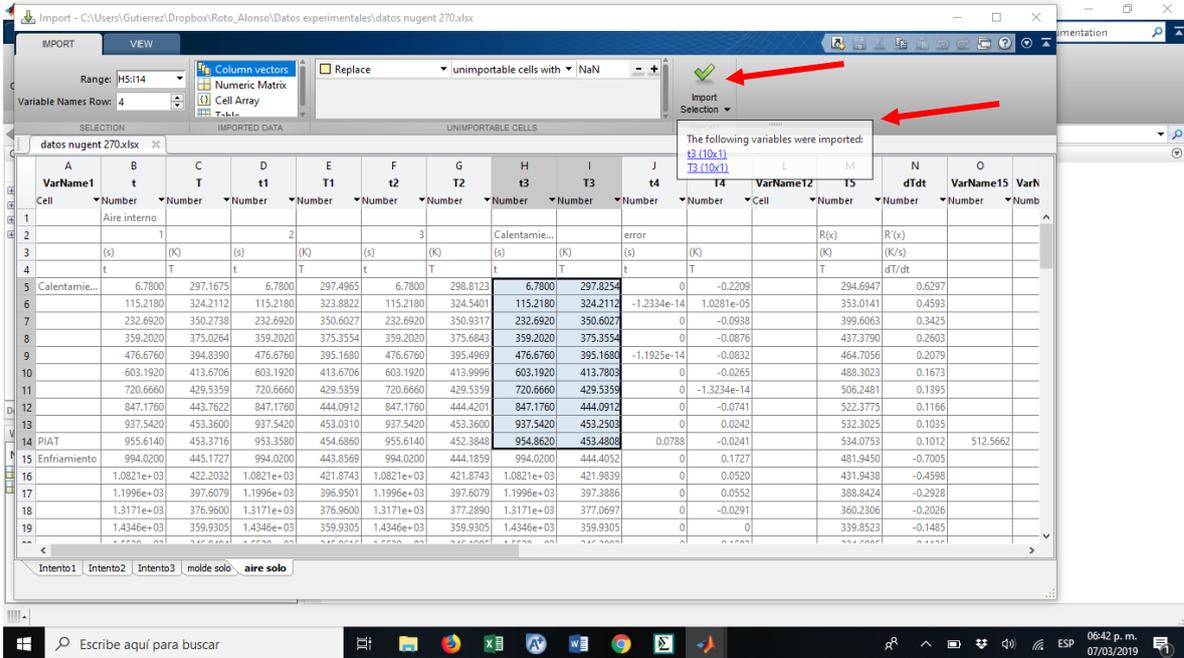


Figura 9-4. Selección de datos a importar.

Como se muestra en la Fig. 9-5, en la aplicación Curve Fitting se pueden seleccionar las variables que queremos ajustar y dar un nombre a nuestro ajuste.

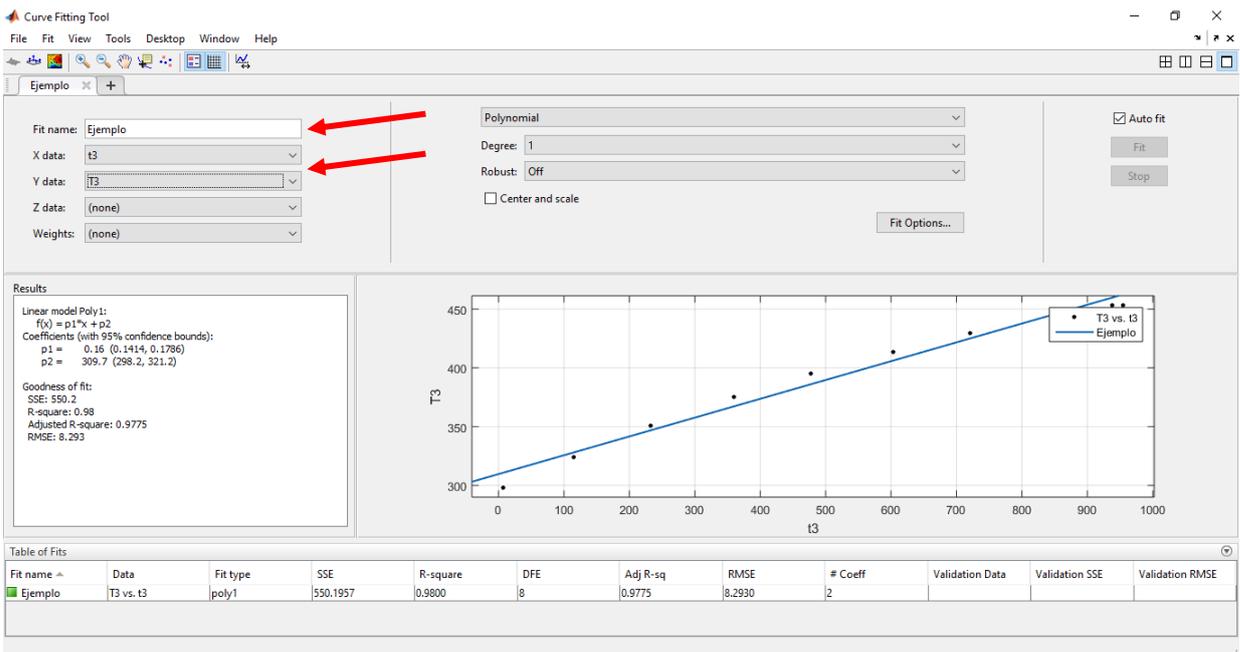


Figura 9-5. Ventana de configuración de la aplicación de Curve Fitting.

Automáticamente se genera un ajuste para nuestros datos. Para cambiar el tipo de ajuste, se seleccionan las diferentes opciones que ofrece esta aplicación.

En este escrito se creó un ajuste racional (Fig. 9-6).

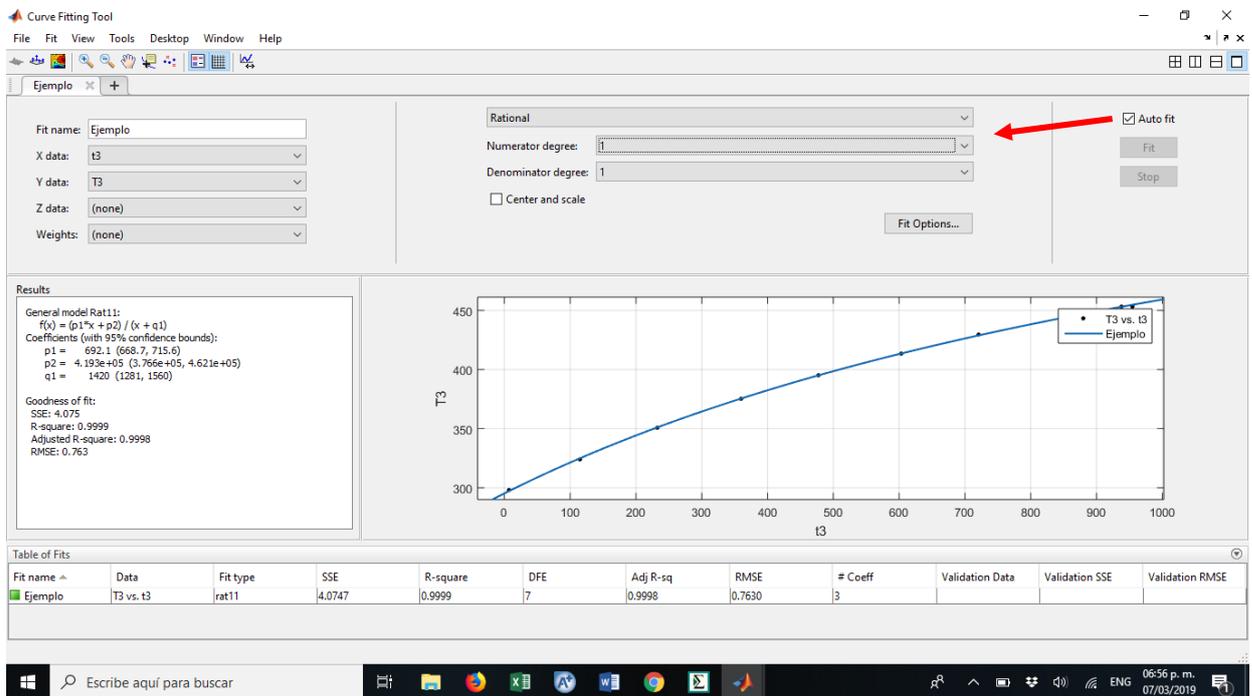


Figura 9-6. Selección de ajuste.

Los resultados de la regresión se muestran en la sección "Results". En la pestaña File se puede guardar la sesión dando clic en el botón "save session" (Fig. 9-7).

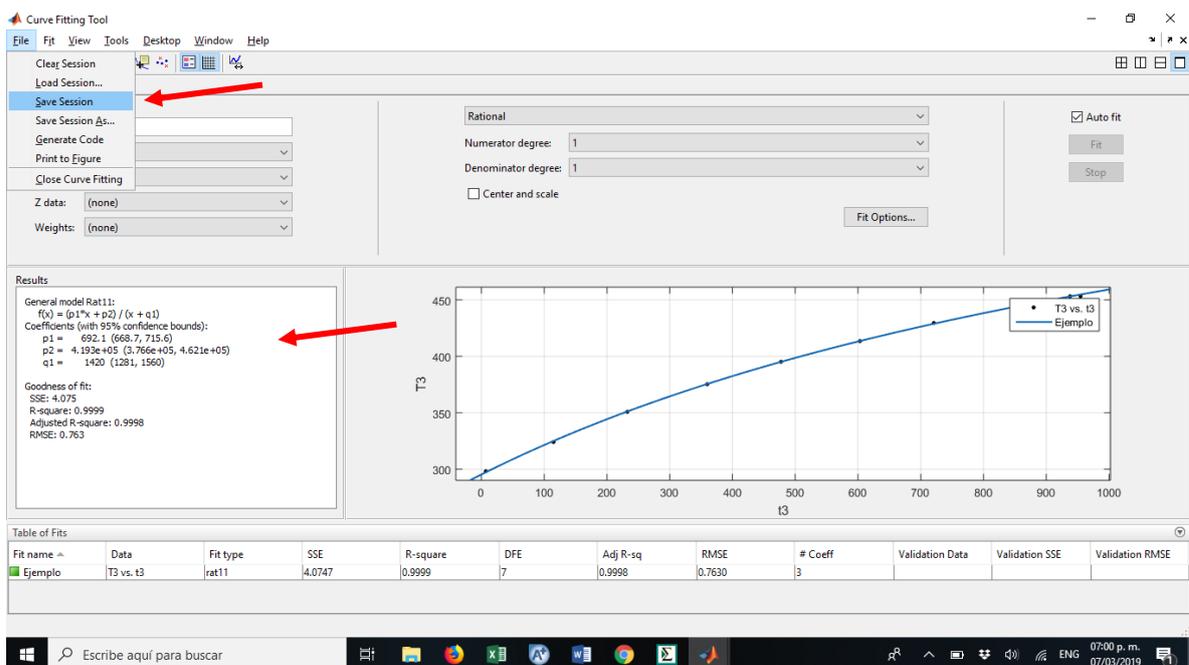


Figura 9-7. Resultados y salvado de la sesión de ajuste.

## 10. Anexo 2

Parámetros de las ecuaciones racionales usados para ajustar los datos experimentales.

- Sección A

General model Rat23:

$$f(x) = (p1*x^2 + p2*x + p3) / (x^3 + q1*x^2 + q2*x + q3)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

p1 = 1.302e+09 (-8.578e+12, 8.581e+12)  
p2 = -9.135e+11 (-6.017e+15, 6.015e+15)  
p3 = 2.484e+14 (-1.635e+18, 1.636e+18)  
q1 = 4.133e+06 (-2.723e+10, 2.723e+10)  
q2 = -3.033e+09 (-1.998e+13, 1.997e+13)  
q3 = 8.034e+11 (-5.289e+15, 5.291e+15)

Goodness of fit:

SSE: 4.35  
R-square: 0.9993  
Adjusted R-square: 0.9991  
RMSE: 0.4349

- Sección B

General model Rat23:

$$f(x) = (p1*x^2 + p2*x + p3) / (x^3 + q1*x^2 + q2*x + q3)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

p1 = -3.737e+09 (-8.248e+13, 8.248e+13)  
p2 = 2.08e+12 (-4.588e+16, 4.589e+16)  
p3 = 5.227e+14 (-1.154e+19, 1.155e+19)  
q1 = -7.664e+06 (-1.691e+11, 1.691e+11)  
q2 = 2.701e+09 (-5.955e+13, 5.956e+13)  
q3 = 2.226e+12 (-4.915e+16, 4.915e+16)

Goodness of fit:

SSE: 4.222  
R-square: 0.9991  
Adjusted R-square: 0.9989  
RMSE: 0.411

- Sección C

General model Rat21:

$$f(x) = (p1*x^2 + p2*x + p3) / (x + q1)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

p1 = -0.7741 (-1.822, 0.2736)  
p2 = 3288 (-319.9, 6895)  
p3 = 1.502e+06 (-6.428e+05, 3.647e+06)  
q1 = 7772 (-2507, 1.805e+04)

Goodness of fit:

SSE: 45.73  
R-square: 0.9995  
Adjusted R-square: 0.9995  
RMSE: 0.7468

- Sección D

General model Rat23:

$$f(x) = \frac{(p1*x^2 + p2*x + p3)}{(x^3 + q1*x^2 + q2*x + q3)}$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

p1 = 1.9e+07 (-2.096e+08, 2.476e+08)  
p2 = -5.962e+10 (-7.686e+11, 6.494e+11)  
p3 = 5.497e+13 (-6.005e+14, 7.105e+14)  
q1 = 4.63e+04 (-5.852e+05, 6.778e+05)  
q2 = -1.493e+08 (-2.072e+09, 1.773e+09)  
q3 = 1.328e+11 (-1.54e+12, 1.805e+12)

Goodness of fit:

SSE: 21.68  
R-square: 0.9998  
Adjusted R-square: 0.9998  
RMSE: 0.5487

- Sección E

General model Rat23:

$$f(x) = \frac{(p1*x^2 + p2*x + p3)}{(x^3 + q1*x^2 + q2*x + q3)}$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

p1 = 2.204e+09 (-1.86e+17, 1.86e+17)  
p2 = -8.864e+09 (-1.125e+24, 1.125e+24)  
p3 = 1.618e+05 (-5.022e+24, 5.022e+24)  
q1 = 8.441e+06 (-2.036e+14, 2.036e+14)  
q2 = -6.641e+09 (-4.309e+21, 4.309e+21)  
q3 = -2.954e+09 (-3.391e+24, 3.391e+24)

Goodness of fit:

SSE: 2.343  
R-square: 0.9967  
Adjusted R-square: 0.9958  
RMSE: 0.3608

- Sección F

General model Rat23:

$$f(x) = \frac{(p1*x^2 + p2*x + p3)}{(x^3 + q1*x^2 + q2*x + q3)}$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

p1 = 3.492e+09 (-4.068e+14, 4.068e+14)  
p2 = 4.746e+11 (-1.21e+18, 1.21e+18)  
p3 = 4.518e+09 (-2.27e+20, 2.27e+20)  
q1 = 1.395e+07 (-1.626e+12, 1.626e+12)  
q2 = -1.087e+10 (-6.326e+15, 6.326e+15)  
q3 = 4.175e+11 (-3.8e+18, 3.8e+18)

Goodness of fit:

SSE: 11.58  
R-square: 0.9994  
Adjusted R-square: 0.9994  
RMSE: 0.3438

## 11. Anexo 3

### Lista de símbolos y acrónimos:

LLDPE	polietileno lineal de baja densidad	HDPE	polietileno de alta densidad
XLPE	polietileno reticulado	MDPE	Polietileno de densidad media
LDPE	Polietileno de Baja Densidad	ABS	acrilonitrilo butadieno estireno
PVC	Policloruro de vinilo	CNC	Control Numérico por Computadora
$\alpha$	Indica que dos valores son proporcionales	$\Delta T$	Diferencia de temperaturas
$Q_{cond}$	the rate of conduction heat transfer	$\Delta x$	Diferencia de dos puntos en el espacio (espesor).
$k$	thermal conductivity	$q_x$	Flux de energía ( $Q_{cond}/A$ )
$A$	Área	$T$	Temperatura
$\rho$	Densidad	$C_p$	Capacidad calorífica (revisar)
$h$	Coefficiente de transferencia de energía	$T_\infty$	Temperatura del fluido circulante
$A_s$	Área de transferencia de energía	$T_s$	Temperatura de superficie
$x$	Punto en el espacio	$G$	Flujo de generación de energía dentro del elemento.
$\Delta t$	Diferencia de tiempo (intervalo)	$\frac{\Delta E}{\Delta t}$	Rapidez de cambio de energía contenida en el elemento.
$m$	masa	$g$	Rapidez de generación de energía
$\alpha$	Difusividad termica	$U$	Coefficiente global de transferencia de energía
$W$	Ancho de la pared cuadrada	$H$	Altura de la pared cuadrada
$x$	Valor verdadero	$x^*$	Valor aproximado
$E$	Error absoluto	$e$	Error relativo
$f(x)$	Función de x	$f'(x)$	Primera derivada de la función de x

$f''(x)$	Segunda derivada de la función de x	$f'''(x)$	Tercera derivada de la función de x
$a$	Es un punto en el dominio de una función	PVIF	Problema de Valores Iniciales en la Frontera
$x_i$	Nodo en el espacio x	$t_j$	Nodo en el tiempo
$V$	Volumen	<i>Subíndice m</i>	Referencia al molde
<i>Subíndice p</i>	Referencia al polímero	<i>Subíndice air</i>	Referencia al aire interno
$T_o$	Temperatura del horno.	$T_i$	Temperatura del aire interno.
$T_m$	Temperatura del molde	ACA	Azodicarbonamida
$\forall$	Utilizado para indicar para todo un rango en específico	$H_m$	Entalpía de fusión
$dX_m/dt$	Cambio de grado de fusión	$\delta_m$	Espesor del molde
$\delta_p$	Espesor de la capa de polímero	$L$	Longitud del molde
$H_c$	Calor de cristalización	$dX_c/dt$	cambio del grado de cristalización.
$\delta_p$	Espesor del aire que ocupa dentro del molde.	C.F.	Condición de frontera
$n_m$	Número de pasos en el molde	$n_p$	Número de pasos en el polímero
$n_{air}$	Número de pasos en el aire	$h_i$	Coefficiente de transferencia de energía dentro del molde
$h_o$	Coefficiente de transferencia de energía en el exterior del molde.	PIAT	temperatura máxima del aire interno

## Bibliografía

- Attaran, M. T. (1998). Computer Modelling of the Rotational Moulding Process. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 17(14). <https://doi.org/10.1177/073168449801701405>.
- Banerjee, S., Yan, W., & Bhattacharyya, D. (2008). Modeling of Heat Transfer in Rotational Molding. *Polymer Engineering and Science*, 48(11), 2188-2197. <https://doi.org/10.1002/pen.21164>.
- Bird, R. B., Stewart, W. R., Lightfoot, E. N. (1960). *Transport Phenomena* (1ª edición). New York: John Wiley & Son.
- Brandimarte, P. (2006). *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction* (2ª edición). John Wiley & Son.
- Burden, R. L., Faires, J. D., Burden, A. M. (2017). *Análisis Numérico* (10ª edición). CENGAGE Learning.
- Cao, E. (2010). *Heat Transfer in Process Engineering* (1ª edición). McGraw-Hill.
- Cengel, Y. A. (2003). *Heat Transfer: A Practical Approach* (2ª edición). McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics.
- Crawford, R. J., Kearns, M. P. (2003). *Practical Guide to Rotational Moulding* (2ª edición). Smithers Rapra.
- Crawford, R. J. (2002). *Rotational Molding Technology*. New York: Plastics Design Library: William Andrew publishing.
- Crawford, R. J. (2012). About Rotomolding. *Magazine for the Rotational Molding & Plastics Design Industries*. <https://acortar.link/oXh6je>
- Crawford, R. J., Throne J. L. (2000). *Rotational Molding Technology* (1ª edición). Plastic Design Library William Andrew.
- Drummer, D., Lohner, M., Mattner T. (2016). Fundamental Process Knowledge on Rotational Molding. Innovative production processes. Innovative Production Processes. NMP-18-2014, Ref. Ares (2017)1764425.
- Edge, E. (2021). Properties of Air at 1 ATM Pressure. *Engineers Edge*. <https://acortar.link/oXh6je>
- García, M. J. (2003). *Rotomoldeo: Economía y Versatilidad en una sola Técnica*. Plástico. <https://acortar.link/oXh6je>
- Gogos, L. G. (1998). New Models for Rotational Molding of Plastics. *Polymer Engineering and Science*, 38(9), 1387-1398. <https://doi.org/10.1002/pen.10309>.
- González-Núñez, R., Moscoso-Sánchez, F., Aguilar J., López-González Núñez, R. G., Robledo-Ortíz, J. R., Rodríguez, D. (2017). Thermal Analysis of Foamed Polyethylene Rotational Molding Followed by Internal Air Temperature Profiles. *Polymer Engineering and Science*, 58(11), E235-E241. <https://doi.org/10.1002/pen.24725>.
- Greco, A., Maffezzoli, A., Vlachopoulos, J. (2003). Simulation of Heat Transfer During Rotational Molding. *Advances in Polymer Technology*, 22(4), 271-279. <https://doi.org/10.1002/adv.10055>.

- Green, D. W., Perry, R. H. (2008). Perry's Chemical Engineer's Handbook. Kansas: McGraw-Hill.
- Hurtado, A. N. (2014). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería. México, D.F.: Grupo Editorial Patria .
- Kosky P., Balmer R., Keat W., Wise G. (2013). Exploring Engineering (3ª edición), Academic Press.
- Licas, J. (1975). Engineering Design Handbook: Rotational Molding of Plastic Powders. Alexandria: AMC PAMPHLET.
- Liu, S. J., Fu, K. H. (2008). Experimental Investigation and Numerical Simulation of the Heating/Cooling Process in Rotational Molding Enhanced with Fins. Journal of Applied Polymer Science, 108(3), 1696-1705. <https://doi.org/10.1002/app.27294>.
- Mackay, D., Shiu, W. Y., Lee S. C. (2006). HANDBOOK of Physical-Chemical Properties and Environmental Fate for Organic Chemicals (2ª edición). Florida: Taylor & Francis. <https://doi.org/10.1201/9781420044393>
- Mark, J. E. (2007). Physical Properties of Polymers Handbook. Ohio: Springer.
- More, J. (2015). Plastics Insight. World's Top 10 Importing Countries For Rotational Moulding Machine. <https://acortar.link/oXh6je>
- Nicolás, J. C. (2003). Procesos Industriales Rotomoldeo para Diseñadores Industriales (Volumen 3). Ciudad de México: Colección CIDI Tecnología.
- Nielsen, L. E. (1978). Predicting the Properties of Mixtures: Mixture Rules in Science and Engineering (1ª edición). Missouri: Marcel Dekker, Inc.
- Nugent, P. (2017). Rotational Molding. Applied Plastics Engineering Handbook, Processing, Materials, and Applications (2ª edición). Plastics Design Library.
- Nugent, P. (2022). Rotational Molding Industry Overview. RotoWorld Magazine for the Rotational Molding & Plastics Design Industries. <https://acortar.link/oXh6je>
- Nugent, P. J. (1992). Computer Prediction Of Cycle Times During Rotational Molding of Plastics. Advances in Polymer Technology, 11(3), 181-191. <https://doi.org/10.1002/adv.1992.060110302>.
- Ogila, K. O., Shao, M., Yang, W., Tan, J. (2017). Rotational Molding: A Review of the Models and Materials. eXPRESS Polymer Letters. 10.3144/EXPRESSPOLYMLETT.2017.75.
- Olson, L. G., Crawford R., Kearns M., Geiger N. (2000). Rotational Molding of Plastics: Comparison of Simulation and Experimental Results for an Axisymmetric Mold. Polymer Engineering and Science, 40: 1758-1764. <https://doi.org/10.1002/pen.11307>
- Prasad, P. N., Fai, J. E., Mark J. E. (1995). Polymers and other Advanced Materials (1ª edición). Malasia: Springer Science + Business Media, LLC.
- Rotobasque (2017). Rotomoldeo de plásticos. <https://acortar.link/oXh6je>
- Salakhov, I.I., Shaidullin, N.M., Chalykh, A.E.; Matsko, M.A., Shapagin, A.V., Batyrshin, A.Z., Shandryuk, G.A., Nifant'ev, I.E. (2021). Low-Temperature Mechanical Properties of High-Density and Low-Density Polyethylene and Their Blends. Polymers 2021, 13, 1821. <https://doi.org/10.3390/polym13111821>

Technology, N. I. (2021). Determining m and n for Rational Function Models. Obtenido de Engineering Statistics Handbook. <https://acortar.link/oXh6je>

Venkateshan S., Swaminathan P. (2014). Computational Methods in Engineering (1ª edición). Academic Press.

Viale, J., Nony, F., Mazabraud, P. et al. Rotational Moulding of Thermosets: Understanding of a Reactive Forming Process. Int J Mater Form 1 (Suppl 1), 803–806 (2008). <https://doi.org/10.1007/s12289-008-0257-z>

Welty, J. R. (1994). Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa (2ª edición). Limusa S.A. de C.V.

Yan, Y., Zhang, L., Ma, X., Wang, H., Wang, W., Zhang, Y. (2022) Research on the End-Face Distribution of Rotational Molding Heating Gun Based on Numerical Simulation Method. Processes 2022, 10, 97. <https://doi.org/10.3390/pr10010097>

Yaws, C. L. (1999). Chemical Properties Handbook (1ª edición). Texas: McGraw-Hill Education.