UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

¿DE QUÉ ESTÁ HECHO EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO? JUGUEMOS A DESCUBRIRLO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ALMA ROSA ORTEGA GIL

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA DE LA PAZ ÁLVAREZ SCHERER

2023

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Ortega
Apellido materno	Gil
Nombre(s)	Alma Rosa
Teléfono	5545611434
Universidad Nacional Autónoma de México	
Facultad de Ciencias	
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	310302317

2. Datos del tutor

Grado	Dra.
Nombre(s)	María de la Paz
Apellido paterno	Álvarez
Apellido materno	Scherer

3. Datos del sinodal 1

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Francisco de Jesús
Apellido paterno	Struck
Apellido materno	Chávez

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Nombre(s)	Pablo
Apellido paterno	Rosell
Apellido materno	González

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dra.
Nombre(s)	Natalia
Apellido paterno	Jonard
Apellido materno	Pérez

6. Datos del sinodal 4

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Gasde Augusto
Apellido paterno	Hunedy
Apellido materno	López

7. Datos del trabajo escrito

Título	¿De qué está hecho el pensamiento matemático?
Subtítulo	Juguemos a descubrirlo.
Número de páginas	
Año	2023

Agradecimientos

A mi querida Paz, por su interés en este trabajo, apoyo, paciencia y consejos, no solo en el ámbito académico. Gracias por compartir tus conocimientos y acompañarme en el proceso de este trabajo.

A mis sinodales Natalia Jornard, Gasde Hunedy, Pablo Rosell y Francisco Struck, por el tiempo y la atención dedicada a esta tesis

A Ramón Hernández y Berta Gamboa, que creyeron en mí, me enseñaron tantas cosas e impulsaron a seguir por este camino de la divulgación tanto dentro de Universum como de Matemorfosis, respectivamente.

A mis papás Roberto y María, por su apoyo, consejos, enseñanzas, ayuda, amor y motivación. Espero tenerlos mucho tiempo conmigo, les debo tanto.

A mis “conejillas de indias” Nancy, Sarai y Jenny, porque de alguna manera, ustedes fueron la inspiración y participes de esta tesis.

A Hernán, por estar desde tiempos inmemorables y motivarme a ser una mejor persona, escucharme y estar ahí siempre que lo he necesitado.

A mis seres queridos que se adelantaron pero que siempre me motivaron a seguir creciendo.

A mis personas, amigas. amigos compañeras y compañeros, que de alguna manera me han apoyado en este camino.

“Aunque no puedo definir los juegos matemáticos más rigurosamente que la poesía, sí mantengo que, sean lo que fueren, las matemáticas recreativas proporcionan el mejor camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la matemática elemental. Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden estimular mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones “prácticas”, sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos. Y si el “juego” se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia”

-Martin Gardner. Circo matemático-

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

“Siempre he creído que el mejor camino para hacer las Matemáticas interesantes a los alumnos y profanos es acercarse a ellos en son de juegos”

- Martin Gardner -

Esta tesis surge como apoyo para la sala Imaginario Matemático del Museo de Ciencias UNIVERSUM de la Universidad Nacional Autónoma de México, pues después de la remodelación de dicha sala y de una estancia de dos años en ella, me percaté de algunas problemáticas que se pueden presentar al querer divulgar Matemáticas.

La antigua sala de Matemáticas era un espacio con contenidos clásicos y aparatos, un tanto antiguos, que podían ser manipulados libremente por el público, además de que había una sección para talleres y actividades lúdicas, por mencionar algunas, ajedrez, rompecabezas infinito, rompecabezas múltiple, torres de Hanoi, el juego de las ligas, entre otros. Sin embargo, por el guión museográfico como por la apariencia “vieja” de la sala, algunos visitantes se quedaban con la idea de que la matemática era una ciencia muerta y antigua, se dejaba de lado las investigaciones y descubrimientos más recientes hasta que se remodeló la sala, cambiando desde el nombre hasta la perspectiva que se daba de la matemática. La ahora sala Imaginario Matemático causó sensación entre los matemáticos y personas interesadas en esta ciencia, pero para el público diverso (niñas y niños, adolescentes, madre y padres de familia, profesionistas de otras áreas, entro otros) era como una galería de arte, pues a pesar de ser una sala visualmente atractiva, donde se muestra la belleza de las matemáticas e investigaciones más recientes, se dejó de lado las actividades lúdicas, los equipos donde los visitantes pudieran tocar libremente, experimentar y jugar con las matemáticas.

La remodelación de la sala Imaginario Matemático no sólo fue difícil para el público, sino también para los anfitriones de la misma pues, aunque la mayoría teníamos conocimiento de los temas, lo complicado era poder llegar a las personas, no abrumarles con tantos datos o términos matemáticos, y poder ganar su atención e interés. Pero lo más complicado era ¡hacer mediación con los más pequeños!, si bien en la antigua sala era difícil, ahora con temas más complejos y sin talleres resultaba aún más.

Y entonces, fue así como me puse a pensar porqué yo disfrutaba más la mediación en la sala anterior, por qué la antigua sala era más “sencilla” y por qué los visitantes, en mi impresión, se iban más contentos de ella, qué era “eso” que había en la Sala de Matemáticas que ahora no estaba en la Sala Imaginario Matemático. Llegando la conclusión de que, aunque la nueva sala era mucho más llamativa y moderna esto no bastaba. La experiencia me ha hecho ver que para que la divulgación tenga un mayor alcance, nunca deja de ser necesario tener una interacción más personal, cara a cara con los visitantes.

Y esta interacción cara a cara con el visitante se puede lograr, en particular, con talleres en especial con talleres en forma de “juegos”. Juegos que, además de contener algún tema matemático, se basen en el desarrollo del pensamiento lógico para hacer un cambio de pensamiento y contribuir a que las personas den solidez a sus fundamentos, tengan seguridad en los procedimientos desarrollados y confianza en los resultados obtenidos. Todo esto con el fin de alcanzar acciones en la solución de los problemas a los que se enfrentan cada día.

Así, mi intención es mostrar la importancia de un discurso recreativo basado en el juego recopilando actividades en un manual de apoyo para los anfitriones de la Sala Imaginario Matemático pero que también pueda ser llevado a ferias matemáticas e incluso escuelas pues tiene la particularidad de que se pueden llevar a cabo con materiales sencillos. Dichas actividades son descritas en el Capítulo III.

Cabe recalcar que la mayoría de las cosas que yo menciono en esta tesis son opiniones o conclusiones propias hechas a partir de mi experiencia en dicha sala y serán justificadas con base en algunas lecturas hechas sobre matemáticas recreativas. Además de que algunas actividades no son de mi autoría.

Es importante mencionar también que algunas de las actividades se han puesto en práctica no solo en el museo UNIVERSUM, sino que también han sido parte de “Matemáticas en la calle” del 52 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, del club de matemáticas de una escuela primaria pública y de ferias de matemáticas recreativas en plazas públicas.

CAPÍTULO I

La divulgación de la ciencia y su necesidad

1.1 Introducción

Hace más de dos milenios, en una pequeña región comprendida entre el Sureste de Europa y el Norte de África, algunos conocimientos que hoy consideramos modernos (como la esfericidad de la Tierra, el tamaño de nuestro planeta, la existencia de un cosmos formado por millones de estrellas, las relaciones geométricas de los cuerpos) ya habían sido recogidos por algunos filósofos. Dichos conocimientos fueron almacenados en la antigua biblioteca de Alejandría, con el fin de fundar una ciudad que iluminara el saber del mundo entero. Sin embargo, todo ese saber humano desapareció de la noche a la mañana cuando la biblioteca fue destruida por un incendio (se dice provocado) en el siglo III de nuestra era. Pero ¿cómo es que pudo suceder una destrucción de tal magnitud?

A pesar de que en Alejandría se situaba la mejor biblioteca de Occidente, a la cual acudían estudiosos de todo el mundo, la población vivía en un régimen de semi-esclavitud, sin acceso a una educación básica, donde el fanatismo y la superstición eran las creencias/actividades más predominantes en el pueblo. Situaciones que probablemente, influyeron en que gran parte de la población se mostrará indiferente y, quizá, hasta partícipe de la destrucción de la biblioteca, pues para ellos era algo ajeno. Y les era ajeno porque nunca tuvieron acceso a ella, o no llegaban a comprender qué contenía.

Desde entonces las cosas han cambiado mucho, pero, si se quiere mantener viva la ciencia como herramienta de conocimiento y progreso hay que mostrar a la sociedad su importancia. No es que en la actualidad se vayan a quemar los “templos del saber”; sin embargo, en países como México se recorta el presupuesto a la educación y a la investigación científica y desarrollo tecnológico.

No está de más mencionar que en el último siglo, la ciencia y la tecnología se han desarrollado tremendamente y algunas disciplinas han incrementado mucho su complejidad. Cada día surgen problemas para los que hay que buscar soluciones, pero también cada día contamos con nuevos desarrollos e inventos científicos y tecnológicos que aparecen como consecuencia de investigaciones. Desgraciadamente, mucha gente cree que la única forma en que puede estar en contacto directo con el conocimiento científico es a través de la escuela y el estudio. Es por ello que la labor de divulgación de la ciencia es importante, especialmente para aquellos que desconfían de ella por el simple hecho de que no la conocen, en especial la divulgación de las matemáticas pues existe un rechazo social hacia esta ciencia y esto influye en el impedimento de la realización de cualquier actividad que tenga algo que ver con las matemáticas.

Y dado que la divulgación es un campo multidisciplinario que se puede abordar desde diferentes perspectivas valiéndose de diversos medios y espacios educativos, nos resulta imposible llevarla a cabo con una intensidad, frecuencia y cobertura acorde al país, señalando lo relevante en el quehacer científico, mostrando la relación de la ciencia con otras actividades y las consecuencias del desarrollo científico. Resulta importante recalcar que con la divulgación no solo se busca sólo dar información acerca del quehacer científico, sino también proveer (al público) de elementos para que la ciencia se aproveche más en la vida cotidiana, para que los ciudadanos reflexionen sobre cómo se hace la ciencia, distingan entre lo que es y no es ciencia y posean criterios para tomar decisiones, tanto en lo personal como en lo social, sobre asuntos relacionados con la ciencia, la tecnología y sus aplicaciones. Para que así la población opine con mayor conocimiento en decisiones lo suficientemente importantes en temas de ciencia y tecnología, haya un contra peso ante la difusión de las pseudociencias y probablemente como consecuencia que los jóvenes muestren una mayor inclinación vocacional hacia las ciencias.

Pero el fomentar una cultura científica en la sociedad es una tarea conjunta de los que hacen investigación científica, los que enseñan y los que divulgan (científicos y no científicos) sin importar que sus actividades, investigación, docencia y divulgación respectivamente, tengan objetivos y espacios diferentes.

Y aunque existan algunas dificultades y obstáculos para los divulgadores, como el que no se apoya ni se considera a la divulgación como algo formal o que se piense que para comunicar la ciencia basta con que un investigador de una charla, debemos recordar que "*como en otros tiempos era necesario hablar latín para apropiarse y aprovechar la cultura de la época, ahora es indispensable disponer de un conocimiento científico básico para comprender la vida actual y beneficiarse de las condiciones en que se desarrolla". (*Estrada, 2018).

1.2 Los museos como un espacio/medio para la divulgación

Como ya se ha mencionado anteriormente, la divulgación se vale de diferentes medios para transmitir el conocimiento científico. No existe un medio que garantice el "éxito" total pues cada uno tiene sus potencialidades y limitaciones, más bien, dependiendo de los objetivos que se desean alcanzar, el público meta y los temas que se quieren transmitir es como se elige el medio para divulgar.

Los medios más empleados son,

1. Medios escritos (cuentos, ensayos, novelas, publicaciones periodísticas y prensa).
2. Medios masivos de comunicación (radio, TV) y medios electrónicos (computadoras).
3. Actividades de comunicación directa con el público (conferencia, charlas y demostraciones.
4. Museos y Centros de divulgación científica[1].

Por el enfoque de este trabajo, en esta ocasión solo describiré brevemente de los alcances y limitaciones para comunicar la ciencia que tienen los Museos y Centros de Ciencias.

Los centros y museos de ciencia son considerados como espacios donde se propicia el aprendizaje informal. A diferencia de los museos tradicionales, son lugares donde los visitantes tienen la libertad de escoger lo que quiere aprender, al ritmo que quiera y en el orden que desee. Implementan diferentes recursos, como exposiciones y equipamientos, por medio de los cuales presentan fenómenos y conceptos de ciencia y tecnología a un público

[1] Por Centro de divulgación científica vamos a entender como aquellos lugares y/o instituciones dedicadas a aumentar el grado de percepción pública de la ciencia y de la tecnología.

no especializado. Dichos equipos tienen la intención de invitar a los visitantes a la participación e interacción.
La interacción es la principal ventaja de estos museos. Pero como la interacción física del público (de diversas edades e intereses) no basta para generar un acercamiento hacia la ciencia de forma paralela también se realizan conferencias, charlas, actividades como el teatro científico, demostraciones y talleres como actividades complementarias para la comunicación de la ciencia y la tecnología. Sin embargo, la mayor desventaja es que por diversas razones de accesibilidad (sobre todo por el costo y la distancia) no se puede visitar estos lugares con mucha frecuencia.

Hablando particularmente de UNIVERSUM, el Museo de las Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México se ha convertido en un centro de divulgación de las ciencias y pionero en Latinoamérica. El público que visita el museo es heterogéneo con diferentes gustos e intereses. Donde desde su inauguración, el 12 de diciembre de 1992, hasta la fecha ha permanecido activo con la construcción de nuevos equipos, la apertura de nuevas salas y la modificación de otras. Actualmente cuenta con 15 exposiciones permanentes y constantemente llegan diferentes exposiciones temporales.

1.2.1 La Sala Imaginario Matemático y algunas problemáticas de la divulgación

La existencia de una sala de matemáticas en un museo de ciencias es muy importante, pues la matemática es la ciencia de la que menos se habla en parte por que no se ve, tan fácil, reflejada directamente su aplicación a la vida diaria lo que nos lleva a que la sociedad hoy en día tenga una imagen negativa, llegando a considerarlas como algo aburrido, mecánico y sin utilidad en la vida real, salvo el ir a la tiendita y saber cuánto deben pagar o cuánto deben recibir de cambio. Estos prejuicios generan a su vez una dificultad en su comprensión y aprendizaje llevando a las personas a rehuir todo lo que tenga que ver con la palabra "matemáticas".

Estos hechos hacen suponer que todos los prejuicios sobre las matemáticas se construyen en la escuela, pero si así lo fuera no podemos quedarnos con los brazos cruzados y dejar todo en manos de las y los docentes. Lugares como los museos de ciencias pueden ayudar para que los visitantes recuperen esa capacidad de asombro y curiosidad y a través de experiencias nuevas, atractivas, interactivas y motivantes se fomente la participación y socialización del público.

La ahora sala Imaginario Matemático “es una exposición que vincula conceptos matemáticos con el arte, equipos interactivos e imágenes, abordando diversos temas como los números primos y la teoría de nudos, de manera sencilla y lúdica” (Imaginario matemático, obtenido de: www.universum.unam.mx/exposiciones). Sin embargo, durante la remodelación de la Sala de Matemáticas de UNIVERSUM me percaté de que existen tres mayores problemáticas a la hora de querer divulgar.

I. Existe una **diferencia entre el público meta** para quien fue planeada la exposición y **el público real que la visita**.

   Si bien es cierto que tener definido el público es fundamental en la planeación, diseño y desarrollo de exposiciones y actividades siempre existen diferencias entre un público real y uno hipotético, cambiando factores como su edad, su escolaridad, sus intereses, creencias y gustos.

   Un ejemplo es la misma Sala Imaginario Matemático que inicialmente fue diseñada para jóvenes de secundaria hasta personas de edad adulta, pero, qué pasa si llega un adulto con su hijo, sobrino o hermanito en busca de algún tema, no se le puede negar entrada solo por el simple hecho de que la sala no fue diseñada para niños.

II. El **diseño del mensaje** de la sala se hace en función a los intereses y gustos del divulgador, en lugar del interés del público, olvidando que estamos en un museo de ciencias donde el principal objetivo es acercar al público a la cultura científica y no crear más miedos o prejuicios.

III. En ocasiones se olvida de los posibles obstáculos que se pueden presentar para entender los temas de la exposición. Con eso me refiero al **diseño de equipos y su distribución**.

En ocasiones los equipos están diseñados para uso de una persona o un grupo reducido de personas. Otras veces, los equipos u objetos no son tan fáciles de entender o son complicados de manejar. También puede llegar a haber ocasiones, sobre todo en aparatos tecnológicos, en las que por una u otra razón el equipo está fallando o está fuera de servicio. Y finalmente, hay otras ocasiones, en las que el visitante busca algo más que leer cédulas, ver imágenes y animaciones: por ejemplo, una actividad lúdica como antes se hacía con "ligas", a los participantes se les hacía increíble lo que pasaba, se mostraban asombrados y más interesados, y se preguntaban entre sí ¿cómo podrá resolverse? y esto, ¿qué tiene que ver con matemáticas?.

.

Es cierto que hacer divulgación entre un público diverso es más difícil conforme se quiere comunicar temas matemáticos que no son tan elementales; pero sí me parece importante mostrar, además, de conceptos matemáticos, que hacer matemáticas es un proceso de análisis, razonamiento, conversación, participación, formulación de preguntas e hipótesis y la búsqueda de su comprobación. Tratar de ir más allá de presentar los temas científicos escritos en una cédula, sino que también apoyarse de que el visitante pueda manipular y jugar con los objetos que conforman la exposición pero que también exista la posibilidad de que el visitante desarrolle su creatividad, que sea él quien haga hipótesis, cree, invente y construya, que se pregunte "¿Y esto qué es?", "¿Para qué sirve?", que dude y reflexione. Y que además se incluyan contenidos equilibrados y actividades que sean en la medida de lo posible para un público diverso.

CAPÍTULO II

El juego como herramienta para la comprensión y aprendizaje de las matemáticas.

“El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿Por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?”

-Miguel de Guzmán-

2.1 Introducción

UNIVERSUM, como la mayoría de los museos de ciencias, se apoya en mayor o menor medida en la interacción de los visitantes con los equipos interactivos, estrategia que sirve para atraer al público y lograr su satisfacción. Pero durante mi estancia en la sala Imaginario Matemático me di cuenta que no solo se puede depender de los equipos interactivos para mediar con el público; si bien es cierto que estos atraen en mayor medida al visitante e invitan a la participación física del público, sin embargo, el solo accionar el equipo no garantiza que el visitante genere una experiencia significativa. Esta experiencia significativa se puede lograr teniendo un acercamiento más personal con actividades paralelas al meramente accionar de los equipos exhibidos, “*este acercamiento se puede lograr mediante actividades que estimulen el trabajo y aprendizaje colaborativo, desarrollen el pensamiento reflexivo y crítico, accedan al conocimiento mediante un proceso guiado, promuevan la creatividad y favorezcan la interacción y comunicación entre los participantes*” (Meza y García, 2007).

2.2 ¿Qué podemos hacer?

“Los talleres son la mejor forma para comunicar conceptos de ciencia, propiciar cambios de actitud y entablar un diálogo con los visitantes”

-Reynoso, 2007-

Una manera de afrontar las diversas problemáticas antes mencionadas es partir de actividades que resulten lo más lúdicas y cotidianas posibles. Buscar talleres en los que el participante ponga a prueba sus habilidades, reúna evidencias y forme sus propias conclusiones.

En cuestión de divulgación de las matemáticas, se pretende que con este tipo de actividades los participantes encuentren el sentido a las matemáticas, se vean más motivados e interesados por solucionar los diferentes retos que se les presenten.

En particular lo que yo busco a la hora de desarrollar un taller es,

- Que los participantes interactúen con las matemáticas a nivel físico, intelectual y emocional.

- Que al provocar el deleite se aliente a la participación y se cambie la forma de ver las matemáticas.

- Que se despierte el espíritu explorador de los participantes.

- Que se desarrolle el razonamiento matemático, así como algunas otras habilidades y destrezas.

- Que sea un proceso lúdico en el que los participantes asuman el rol de investigadores llegando a conjeturar resultados después de discusiones y demostraciones tanto acertadas como fallidas. Y así se valore más la importancia del proceso y no solo de los resultados que se obtengan, aprender del propio error y del error de los demás.

2. 2. 1 Talleres y el juego…

Si una buena parte de la matemática formal debe su nacimiento a un acertijo o juego matemático, por ejemplo, el nacimiento de la Topología con el problema de los puentes de Königsberg, ¿por qué no usar el juego como herramienta para divulgar la ciencia?

A continuación, algunos puntos sobre la importancia del juego en las matemáticas

- **Atrae a un público diverso.**

Las actividades basadas en el juego atraen a niños, jóvenes y también a los no tan jóvenes logrando que los participantes interactúen con las matemáticas a nivel físico, intelectual y emocional.

- **Fomenta el interés y motivación de los participantes.**

Las actividades basadas en el juego despiertan el espíritu explorador de los participantes, generan confianza en ellos mismos sobre su capacidad para afrontar contenidos sin miedo.

- **Crea un vínculo emocional positivo.**

Las actividades basadas en el juego alientan a la participación llegando incluso a cambiar la forma de ver las matemáticas. Para empezar, las personas se sorprenden a sí mismas disfrutando una actividad vinculada con las matemáticas y descubriendo que el razonamiento matemático no sólo es lógico, sino que también es válido e importante apoyarse en la intuición.

- **Romper con la rutina de los ejercicios mecánicos.**

Las actividades basadas en el juego crean un proceso lúdico en el que los participantes tienen la oportunidad de interactuar, comunicarse y socializar con más personas asumiendo el rol de investigadores, llegando a conjeturar resultados después de muchas discusiones, aceptando o rechazando distintos puntos de vista.

- **Existe una vinculación de la matemática con el juego.**

El juego y las matemáticas tienen muchas cosas en común, a continuación, se hace un análisis comparativo de los procedimientos implicados en el juego y en las matemáticas

1. El juego se inicia con la introducción de normas, reglas o procedimientos. Y las matemáticas comienzan con el establecimiento de axiomas, definiciones y posteriormente la generación de teoremas.
2. Jugar requiere adquirir familiaridad con las normas. En matemáticas requieren interactuar con elementos de una teoría.
3. Avanzar en el dominio de un juego supone construir progresivamente estrategias que puedan dar buenos resultados. En la práctica matemática supone exactamente lo mismo,
4. En el juego se ayuda de procedimientos usados por otros jugadores avanzados o jugadas difíciles. En matemáticas se dan a conocer métodos y teoremas que se han ido gestando a lo largo de los siglos.
5. Examinar un juego lleva a descubrir problemas interesantes y a resolver situaciones inéditas. En la práctica matemática se investigan problemas abiertos vinculados a complicaciones inesperadas.
6. Crear juegos nuevos da lugar a estrategias originales y a procedimientos innovadores. Crear matemáticas nuevas da lugar a nuevas situaciones potencialmente motivadoras de nuevos modelos y teorías.

Finalmente es importante no dejar el taller realizado como un simple juego, pasatiempo o momento de diversión pues se puede dar una falsa imagen de lo que son las matemáticas. Debemos cuidar de proporcionar a los participantes juegos apropiados para que desarrollen hábitos de pensamiento e ideas para la elaboración de herramientas adecuadas para la resolución de problemas tanto matemáticos como no matemáticos. Se sugiere aprovechar el espacio de comunicación y experimentación que se tiene donde la interacción cara a cara con el público nos ayudará a guiar el proceso de mediación y crear o recrear ideas mediante la reflexión asegurándonos de que:

- ✓ Antes de comenzar a jugar, que se entienda de qué se trata: verificar que sean claras las reglas del juego.
- ✓ Propiciar la búsqueda de una estrategia
- ✓ Ver si la estrategia es la estrategia ganadora.
- ✓ Llevar preguntas para casa, aprovechar la solución ya obtenida para usarla en juegos similares.

2. 2. 2 Las y los talleristas

Es importante hacer hincapié en que los talleres no solo requieren de materiales lúdicos y didácticos, sino que también es importante la presencia de personal para desarrollar, preparar y realizar las actividades.

El tallerista será quien acerque las matemáticas al público de todas las edades, será quien motivará y fomentará el interés en los participantes. Será el facilitador en el proceso de conversación y diálogo entre los participantes buscando tomar como punto de partida el contexto y los conocimientos previos que los participantes poseen respecto a determinado tema y trabajar con base a ellos. Es por ello que el tallerista es parte fundamental en el buen desarrollo de un taller y conviene establecer una serie de características (ideales) que deben tener. A continuación, se enlistan las características que considero de mayor importancia:

- Interés. Es importante que quienes se dediquen a realizar talleres deben hacerlo por voluntad propia, nunca forzados por terceros. El éxito de las actividades estará influenciado por la actitud del facilitador. El tallerista debe disfrutar y entregarse por completo a sus actividades, no solo al momento de realizarlas sino también al momento de prepararlas.

- Desenvolvimiento, si bien no es indispensable, sería favorable que los talleristas sean personas extrovertidas, que no se les dificulte hablar en público e incluso lograr que todos los participantes hablen y se involucren en la actividad.

- Voz, sería útil trabajar en la voz de los talleristas pues muchas veces se trabaja con grupos grandes, en los que si no se usa un tono de voz adecuado algunas personas acaban por distraerse.

- Edad, si bien es cierto que la edad no debe verse como una barrera sin embargo la experiencia me ha hecho ver que es necesario que los talleristas cuenten con la suficiente madurez, interés, conocimiento y habilidades necesarias para fungir como talleristas. Es por ello que se plantea una edad mínima de 15 años. En cuanto a un límite superior no se establece mientras se disfrute de esta actividad. En conclusión, el tallerista debe disfrutar sus actividades, entregarse por completo y convertirse en un verdadero estímulo para los participantes.

- Capacitación, la necesidad de una capacitación antes de llevar a cabo la actividad para conocer las características del taller y su contenido pues de lo contrario el taller podría no funcionar y/o se estaría divulgando conceptos e ideas erróneas al público participante. Así mismo, preparar a las y los talleristas para estar listos a ajustarse, dentro de las actividades, a la edad y al nivel cognoscitivo de los participantes. Y dar herramientas para que, si el taller no se desarrolla en condiciones ideales[2], los talleristas puedan ser capaces de ser flexibles y ágiles para seguir desarrollando las actividades.

  Encontrar un lugar adecuado para desarrollar el taller y tener una dinámica de trabajo debe ser, también, parte de la formación del tallerista. Considerar evitar que se encuentren distractores cerca del área donde se realizarán las actividades. De lo contrario se requerirán esfuerzos extra por parte del tallerista sólo para conseguir la atención de los participantes, lo que se convertirá en un obstáculo para el alcance de los objetivos específicos de la actividad.

- Lenguaje, el uso de un lenguaje adecuado resulta complicado sobre todo cuando se quiere divulgar matemáticas pues es común usar términos complejos para el público

[2] Por condiciones ideales nos referiremos a situaciones en las que el público que asiste al taller es el teníamos en mente y que tiene los conocimientos necesarios y suficientes para llevar el taller en tiempo y forma.

no especializado. Es por ello que es necesario tratar de exponer con las palabras más sencillas posibles, pero sin perder la formalidad[3], cuidando de no alterar el mensaje y que el lenguaje no represente una barrera.

Por otra parte, hacer uso de un lenguaje inclusivo a la hora de referirse a un público diverso, esto con el fin de hacer sentir incluidas a todas las personas que participan en ese momento y además contribuir a la disminución de brechas de desigualdad, prejuicios y exclusiones. Hoy en día existen varios manuales de lenguaje incluyente.

Dentro del cuidado del lenguaje y la inclusión, quien facilite la actividad, debe tener en cuenta a las personas con diversas capacidades. Por ejemplo, es común que digamos "como vemos en la imagen" pero si estamos con un grupo de personas con debilidad visual, se puede hacer el esfuerzo de omitir el "como vemos".

- Saber escuchar, prestar atención a las ideas aportadas por quienes forman parte de la actividad para lograr mejores resultados. El tallerista debe estar consciente de que no es poseedor de la verdad absoluta.

- Uso de preguntas, con el fin de estimular al participante a que analice, critique y piense. También construir una realimentación que permita que los participantes obtengan un mayor provecho de las actividades, sin dejar de vincular las actividades con elementos que les resulten cotidianas. El uso de preguntas también ayudará a identificar el nivel en el que se trabajará.

- Reglas, establecer reglas antes de iniciar las actividades es necesario para el buen desarrollo de los talleres. Y aunque el tallerista no debe dar una imagen de "disciplinador" es conveniente, si se llega a dar el caso, de que algún participante se muestre indiferente a modificar su comportamiento inadecuado y habiéndose agotado los esfuerzos positivos para que participe, tenga que ser excluido de la actividad

[3] Un ejemplo de esto podría ser cuando se piensa que la palabra "ángulos" es muy complicada para el público y sustituirla por la palabra "piquitos".

CAPÍTULO III

Guión de actividades

Introducción

Las actividades que aquí se presentan buscan acercar las matemáticas a un público diverso y fomentar en ellos el desarrollo de diferentes habilidades y aptitudes matemáticas, destacando de entre ellas el uso y desarrollo del razonamiento lógico. En algunas actividades también se propone el desarrollo de diferentes conocimientos y conceptos matemáticos. Sin embargo, la principal característica de estas actividades es que se basan en el juego, pues, en la tarea de iniciar a los más jóvenes (y también, a los no tan jóvenes) en la materia de las matemáticas, el juego puede influir, de tal modo que lo haga más motivante, agradable y para algunos otros más apasiónate, restaurando así, lo que las personas sienten por las matemáticas.

Es importante mencionar, que las siguientes actividades fueron diseñadas y puestas en práctica con un público educativo de zonas semi urbana, esto no quiere decir que cualquier otro tipo de público que no entre en esta categoría no podría realizar las actividades. Pues como estas comienzan con el juego, basta con que el público comprenda las reglas, después de esto dependiendo de la madurez de conocimiento del público es como se puede ir avanzando o mostrando los temas matemáticos.

Con el propósito de que las personas interesadas en la divulgación de las matemáticas con actividades lúdicas y didácticas, puedan llevar a cabo las actividades, aunque nunca las haya visto o escuchado, en cada una de ellas se proponen, para la facilitación de su desarrollo, algunos de los doce siguientes puntos descritos, esto dependerá de las necesidades de cada actividad[4].

Dichos puntos se eligieron pues, en mi experiencia y en mi trabajo son los que mejor han funcionado para una sistematización de talleres. A continuación, los doce puntos.

[4] Para el desarrollo de algunas actividades es necesario el uso de plantillas, las cuales se pueden consultar en la sección de Apéndice.

a. **Título.** Nombre de la actividad.

b. **Descripción.** Breve descripción de la actividad, donde el tallerista puede darse cuenta si la actividad es lo que está buscando o es de su interés.

c. **Objetivo.** Metas en cuanto a habilidades y aptitudes matemáticas que se buscan desarrollar en el participante, o bien, los conocimientos matemáticos que se pueden abarcar durante el desarrollo del taller.

c. **Edad.** Edad sugerida de los participantes.

d. **Duración**. Tiempo sugerido de duración, considerando el tiempo necesario para la explicación. Cada actividad se puede acortar o alargar dependiendo de lo que el tallerista vea necesario.

e. **Material.** Insumos necesarios para llevar a cabo la actividad.

f. **Capacidad máxima.** Cantidad de público sugerido de acuerdo a los materiales y tiempo.

g. **Procedimiento**. Son los lineamientos generales, separados paso a paso, para llevar a cabo la actividad.

i. **Preguntas.** Sugerencias para que los talleristas inviten a los participantes a la reflexión, elaboración de conjeturas y desarrollo de conclusiones.

j. **Dinámicas útiles.** Actividades complementarias para dar claridad o profundizar en algún tema en específico.

k. **Información complementaria**. Información adicional que no necesariamente es para dar dentro del taller pero que pretende dar una base más sólida al tallerista. Estos pueden ir desde un poco de historia, vínculos con la vida cotidiana, páginas web para jugar en línea o problemas extras que pueden ser llevados a casa para continuar con la reflexión del problema.
l. **Referencias.** Se presentan al final de cada descripción del taller para facilitar, si se desea, una búsqueda más profunda.

A continuación, las actividades.

Lotería de patrones

Descripción:
El juego es una adaptación de Figurino Juego de Mesa de Ravensburger, basado en las reglas del juego de lotería mexicana, las imágenes se eligieron pensando en que fueran llamativas para los participantes; sin embargo, se pueden sustituir por números o figuras geométricas para así también repasar conceptos matemáticos básicos. La actividad está pensada principalmente para los más pequeños, que además pueden estar acompañados de un adulto.

Objetivo:
El objetivo es desarrollar en la o el participante habilidades de destreza, de observación, percepción visual y reconocimiento de patrones. Así como el desarrollo de una idea intuitiva sobre qué es el azar.

Edad: 4-10 años

Duración: 30 minutos.

Material:
3 dados de diferentes colores[5]
6 tableros de 3X3
36 fichas (piedritas, bolitas de papel, frijoles)

Capacidad máxima: 6 participantes.

Procedimiento:
Una vez que todos los participantes tengan su tablero de combinaciones, cada participante en su turno tirará de los tres dados, *Un dado indica el color del aro, el segundo, el color del fondo, y el tercero, la figura.* El tallerista, quien dirigirá el juego, "cantará" la combinación dada por los dados. Si dicha combinación está en el tablero de algún jugador, se deberá marcar con una ficha. La o el tallerista continuará "cantando" las combinaciones hasta que algún

[5] Uno indicará el color del aro, otro el color del fondo, y el tercero, la figura

jugador llene todo el tablero. En cuanto la o el jugador vea que ya tiene marcado todo el tablero, inmediatamente debe gritar "¡lotería!". Dicho participante será la o el ganador del juego.

Fig. 1 Tableros originales del juego Figurino. Obtenidos de https://tloregalo.com/producto/figuro/

Preguntas:

¿Cuántas combinaciones posibles existen al tirar los tres dados?

¿Habrá siempre un ganador, o existirá el empate?

¿Podríamos saber quién será el ganador?

Dinámicas Útiles:

- Se plantea cambiar el uso de los dados del apéndice por tres dados de colores diferentes, digamos dado verde, dado blanco y dado negro, cada uno de estos indicará la figura, otro el color del aro y otro el color del fondo, como se muestra en la tabla de la Fig. 2.

  Es recomendable tener la tabla impresa en grande para que no solo el tallerista, sino que también los jugadores participen cantando cual es la combinación dada en cada tirada de dados.

DADO VERDE		DADO BLANCO		DADO NEGRO	
6		1		6	
5		2		5	
4		3		4	
3		6		1	
2		5		2	
1		4		3	

Fig. 2 Tabla de dados

- Si no es posible tener los tres dados, con un solo dado también se puede jugar, el *primer tiro indicará la figura*, *segundo tiro indicará el color del aro* y *el tercer tiro indicará el color del fondo.*

  De nuevo, es recomendable tener una tabla guía, como la de la Fig. 3.

Primer tiro		Segundo tiro		Tercer tiro	
6		1		6	
5		2		5	
4		3		4	
3		6		1	
2		5		2	
1		4		3	

Fig. 3 Tabla de tiros

- Para explorar la pregunta ¿Cuántas combinaciones existen al tirar los tres dados? se puede comenzar explorando con la pregunta ¿Cuántas combinaciones posibles existen al tirar los dos dados? pues este resultado ya sea mediante un diagrama de árbol o usando una fórmula podemos deducir que por cada cara del dado A hay 6 maneras diferentes de que caiga el dado B, por tanto, 6x6 son 36 combinaciones diferentes. Véase Fig. 4

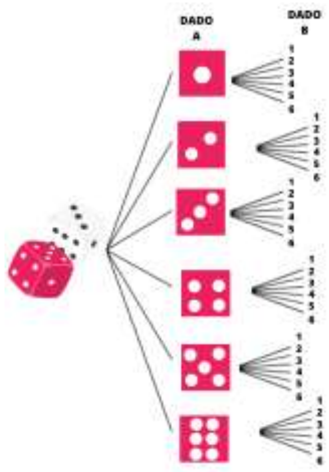


Fig. 4 Diagrama de árbol de todos los resultados posibles al tirar dos dados.

Siguiendo este mismo razonamiento, pero ahora para tres dados se puede llegar a la conclusión de que en total habrán 6x6x6 = 6^3= 216 combinaciones diferentes.

- Se puede hacer enlazar con el contexto sociocultural haciendo referencia a la lotería mexicana, su historia, evolución y popularidad en México. En las referencias se adjuntan algunas páginas de apoyo que se pueden consultar

Referencias:

El juego fue una adaptación de Figurino Juego de Mesa Ravensburger

Vargas, S. (2021). *La lotería mexicana: conoce la historia de este icónico juego de azar*. junio 28, 2022, de My modern met en español Sitio web: https://mymodernmet.com/es/loteria-mexicana/

(s.f.). *La Lotería Mexicana: Una breve historia de un juego famoso. junio 28, 2022, de Amigo* Energy. Sitio web: https://amigoenergy.com/blog/es/la-loteria-mexicana-una-breve-historia-de-un-juego famoso/#:~:text=La%20loter%C3%ADa%20tradicional%20tiene%20sus,gracias%20a%20las%20ferias%20itinerantes.

(2022) *Lotería (juego).* Junio 28, 2022 de *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Sitio web https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Loter%C3%ADa_(juego)&oldid=144043816

SET

Descripción:

Es un juego formado por una serie de 81 cartas, cada una de las cuales consta de un diseño sobre un fondo blanco. Este diseño está determinado por cuatro características:

i. La forma de los símbolos (círculos, cuadrados u ondas)
ii. Los colores (azul, amarillo o rojo)
iii. El número de símbolos (uno, dos o tres)
iv. El fondo del símbolo (relleno, rayado o vacío)

El juego consiste en formar tríos especiales de cartas, y para lograrlo, la o el participante deberá evaluar, una a una, cada una de las características de cada carta.

Objetivo:

Desarrollar en la o el participante habilidades de destreza visual, razonamiento lógico, comprensión de formas y análisis de patrones. Además de conceptos matemáticos como conjuntos, combinatoria y probabilidad.

Edad: 10 años en adelante

Duración: 30 – 45 minutos

Materiales:

81 cartas del juego de set

Capacidad máxima: 5 personas

Procedimiento:

Siempre es recomendable acomodar a las personas participantes alrededor de una mesa, de manera que todos puedan ver hacia el centro de la mesa. Una vez acomodados, el tallerista deberá explicar el objetivo del juego: de entre 12 cartas (colocadas sobre la mesa formando un rectángulo de 4X3) el objetivo es conseguir formar un SET. Tres cartas forman un SET si, respecto a cada una de las cuatro características, evaluadas una a una, las tres cartas son iguales o las tres son diferentes.

Cada que un participante encuentre uno, deberá gritar “¡SET!”, en ese momento el juego se detendrá para asegurarse de que las tres tarjetas seleccionadas en realidad conforman un SET.

Después se deberá denominar a un repartidor que será el que barajeará todas las cartas (se sugiere que el tallerista sea el repartidor). A continuación, el repartidor colocará 12 cartas que deben estar boca arriba encima de la mesa, se sugiere que, para tener más orden, se coloquen las cartas formando un rectángulo de 4X3 cartas.

Si se desea hacer más clara la actividad, se puede ir describiendo, qué tipo de característica hay en cada una de las tarjetas y hacer hincapié de que haremos colecciones de tarjetas con las mismas (o diferentes) características.

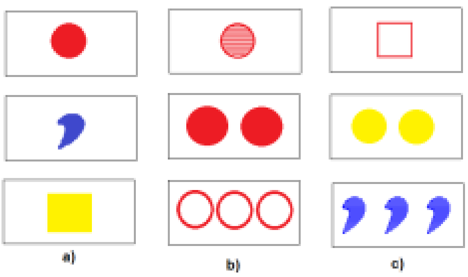


Fig. 1. Ejemplos de tercias de cartas que forman un SET.

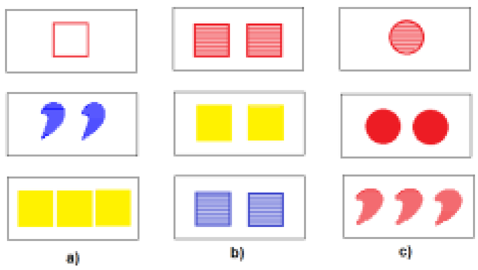


Fig. 2. Ejemplos de tercias de cartas que **no** forman un SET

Por ejemplo, en la Fig. 1 a) se muestra un SET donde las tres cartas tienen el mismo número de figuras (uno), con el mismo fondo (relleno) pero también cada una de las tres cartas tienen diferente figura y color. En el SET b) las tres cartas comparten la característica de tener la misma figura (círculo) y el mismo color (rojo) y cada una de las cartas tienen diferente número y fondo. Y en el SET c) las tres cartas tienen diferentes figuras, color, número y fondo.
En cambio, en la Fig. 2 el conjunto de cartas a) no es un SET pues a pesar de que las tres cartas tienen diferente color, número de figuras y fondo, dos de las tres cartas tienen la misma figura (cuadrado) pero la tercera ya no (onda). En b) dos de las cartas son cuadrados con fondo rayado mientras la tercera es un cuadrado con fondo relleno. En c) de nuevo no comparten la característica de tener el mismo fondo, una carta tiene dos círculos rojos con fondo sólido mientras las otras dos cartas tienen fondo relleno.

Preguntas:

¿Cuántas cartas hay en total?

¿Cuántos SET´s distintos se podrán realizar con todas las cartas del juego?

¿Será posible que con una misma carta se pueda formar más de una tercia de SET? ¿Qué pasa con dos cartas? ¿cuántos SET´s diferentes se podrían formar?

¿Es posible que, al sacar tres cartas al azar, del mazo de 81 cartas se obtenga un SET?

¿Qué sucede si agregamos una característica más? ¿Y dos más? ¿Qué tal 10 características más?

Dinámicas útiles:

- Modo sencillo.

Es una dinámica útil para los más pequeños e incluso también para introducir a los participantes de cualquier edad al juego y que las reglas queden claras.
Se trata de eliminar todas las cartas con una característica, digamos, las cartas de fondo rayado y jugar con el resto de las cartas siguiendo las mismas reglas.

- Adaptación con figuras “más llamativas”.

Es una adaptación en las imágenes por figuras que les pueda interesar o llamar más la atención como dinosaurios, monstruos, carros y características de interés.
En la Fig. 3 se muestra un ejemplo de adaptación, donde las características son más llamativas visualmente para las y los jugadores, sobre todo para los más pequeños: *un gato con diferente color de manchas, con una pelota de diferente color y en una vivienda diferente.*

Fig. 3. Ejemplos de SET modo sencillo

- Juego individual.

Encontrar la mayor cantidad de SET´s en un tiempo definido (por ejemplo, 10 minutos).

- Dos o más jugadores.

En esta dinámica no existen turnos. El repartidor coloca 12 cartas sobre la mesa e inmediatamente los jugadores deben observar las cartas, en cuanto algún jugador identifique un SET de tres cartas, debe gritar “SET”.

El juego se detiene hasta asegurarse de que la tercia seleccionada cumpla con todas las características. Si es así, esas tres cartas se las queda dicho jugador y el repartidor agrega tres nuevas cartas a la mesa.
Si el SET no es correcto, el jugador devolverá las tres cartas a su sitio, y perderá tres de sus cartas ganadas anteriormente (en caso de tenerlas).

Si en algún momento de la partida es imposible encontrar un SET, el repartidor puede añadir tres cartas más, teniendo quince cartas sobre la mesa, las tres cartas no se reemplazan cuando el siguiente SET sea retirado de la mesa

Nota: si con quince cartas tampoco se puede formar un SET, se vuelven a añadir tres cartas más, y así hasta que sea posible encontrar un SET.

El juego continúa hasta que se acaben las cartas del mazo y gana el jugador que haya conseguido más SET´s.

- Encontrando un intruso.

Se pueden hacer cuartetos o incluso quintetos de tarjetas donde solo tres de ellas tengan las características para ser un SET, y el resto sean tarjetas que no cumplen. Un ejemplo se puede observar en la Fig. 4 donde la tarjeta intrusa es la C.

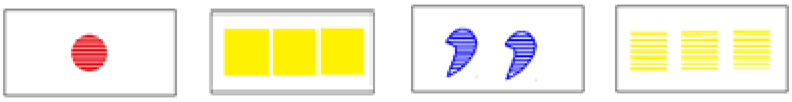


Fig. 4. Ejemplos de un cuarteto de cartas, donde una es un intruso

Se puede jugar de manera individual o con más de dos personas, asignando a cada participante un turno para que el taller no se vuelva caótico.

- SET pares complementarios

Se trata de encontrar, sobre las 12 cartas puestas sobre la mesa, dos pares de tarjetas tales que con una tercera carta (en común) formen un SET por cada par de tarjetas. La tarjeta complementaria no necesariamente debe estar presente en las cartas puestas sobre la mesa. Si se encuentra un SET por pares complementarios, se reemplazan las cuatro cartas por otras cuatro nuevas. De lo contrario se agregan cuatro cartas más. En caso de que la tarjeta complementaria esté presente en las cartas puestas sobre la mesa, se reemplazarán cinco cartas.

En la Fig. 5, se muestran dos pares de cartas y una carta en la parte centro superior. Las dos cartas a la izquierda (par 1) forman un SET con la carta superior. Del mismo modo, las dos cartas a la derecha (par 2) también forman un SET con la carta superior. Por lo tanto, el par 1 y el par 2 son pares complementarios.

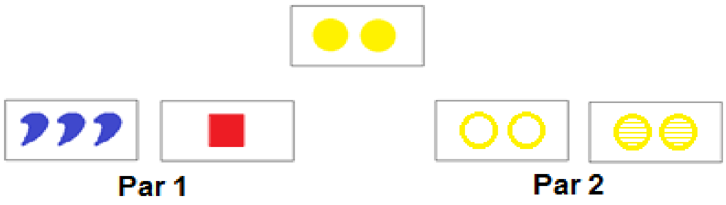


Fig. 5 Dos SET´S con dos pares de cartas que tienen como tercera carta, la misma.

Información complementaria:

✔ Para facilitar la comprensión del juego podemos clasificar los SET´s según la cantidad de características que comparten: ninguna, una, dos o tres características.

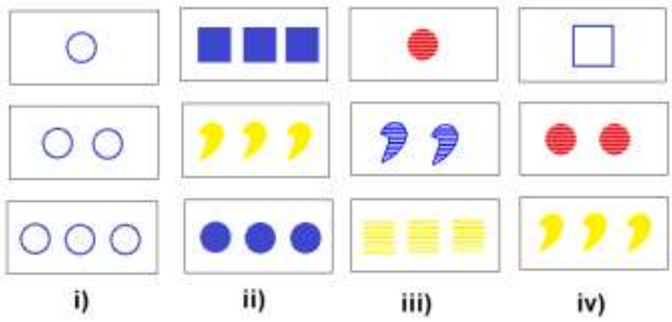


Fig. 6 Clasificación de SET´s

- Visualmente las ternas de cartas más fáciles de identificar son aquellas que comparten tres de las cuatro características totales. A estas ternas las llamaremos 3-SET.

  Un ejemplo de 3-SET es la columna (i) de la Fig. 6 (un **círculo vacío azul**, dos **círculos vacíos azules**, tres **círculos vacíos azules**) que comparten 3 características: la forma, el relleno y el color.

- Llamaremos 2-SET al conjunto de tres cartas que compartan dos de las cuatro características. Véase la columna (ii) de Fig. 6 como ejemplo (**tres** cuadrados **rellenos** azules, **tres** ondas rellenas amarillas, **tres** círculos **rellenos** azules) que comparten el número y relleno.

- Cuando una tercia de cartas comparte una sola característica de las cuatro totales, la llamaremos 1-SET. Un ejemplo de 1-SET es la columna (iii) de la Fig. 6 (un círculo **relleno** rojo, dos ondas **rellenas** azules, tres cuadrados **rellenos** amarillos) que comparten solo el relleno.

- Un 0-SET son las ternas de cartas para las cuales todas las características difieren y son, visualmente, las más difíciles de identificar. Para un ejemplo de dicho SET, véase la columna (iv) de Fig. 6 (un cuadrado vacío azul, dos ondas royas rayadas, tres círculos rellenos amarillos)

✔ El juego de cartas SET fue diseñado por la genetista Marsha J. Falco en 1974 y comercializado en 1991 a través de la empresa SET Enterprises.
Marsha J. Falco estaba tratando de entender si la epilepsia en los perros pastores alemanes era hereditaria. Para estudiar los genes y cromosomas de las células de los perros, la genetista creó unas cartas en las que incluía la información de cada perro.
Dado que ciertos bloques de información eran los mismos en cada carta utilizó símbolos para representar bloques de información, en lugar de escribir explícitamente toda esa información. Utilizó símbolos con diferentes características para representar diferentes combinaciones de genes. Mientras estaba explicando las combinaciones a los veterinarios con los que trabajaba, se dio cuenta de lo divertido de las combinaciones de los diferentes símbolos, y nació así el juego de cartas SET.

✔ ¿Cuántos SET´s distintos se pueden formar con todo el mazo de cartas?

Observación: Dado que existen todas las combinaciones posibles de las cuatro características entonces dadas dos cartas cualesquiera existen exactamente una carta que junto a las dos anteriores forma un SET (por ejemplo, si esas dos cartas tienen el mismo color, habrá una tercera que también lo tendrá, pero si esas dos cartas tienen dos fondos diferentes, habrá una tercera carta que tendrá el fondo que falta).

Como cada dos cartas determinan un SET, parecería que la respuesta a cuántos SET´s distintos se pueden formar, es el número de formas que hay de elegir dos cartas entre las 81 que hay, pero de esta manera estamos contando cada SET tres veces, entonces lo que falta es dividir entre tres, luego entonces existen:

$$\frac{C(81,2)}{3} = \frac{81x80}{2x3} = 1080\, SET\acute{}s \;\; distintos$$

- ¿Qué es la probabilidad?

Es una rama de la matemática que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Por experimento aleatorio entenderemos, todo aquel experimento que cuando se le repite bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo; un ejemplo sencillo y cotidiano de un experimento aleatorio es lanzar una moneda o un dado.
En otras palabras, la probabilidad se utiliza para estudiar la aleatoriedad y proporcionar predicciones sobre qué tan posible es que ocurra un evento.

- La probabilidad de que sacando tres cartas al azar del mazo de 81 cartas se obtenga un SET (m = 3) se calcula fácilmente (no hace falta una computadora), puesto que es el número de SET´s posibles (1080, como hemos calculado anteriormente) dividido por el número total de grupos de tres cartas.

$$C(81,3)$$

Pero también, si tomamos las dos primeras cartas del mazo (81 cartas) de manera arbitraria, la tercera carta será única entre los 79 restantes (por la *observación* anterior). Entonces la probabilidad es 1/79.

- Se puede realizar un juego de cartas de SET generalizado, en el cual los diseños de las cartas estuvieran determinados por *n* características distintas, y que cada característica, como en el juego original, tuviese 3 opciones (donde el número de características podía ir desde la simplicidad de una única característica, $n = 1$, pasando por el juego original de $n = 4$ características, o cualquier otra cantidad *n* de características). En consecuencia, el número de cartas que formarían el juego "conjunto" generalizado sería de 3^n.

- La variante de Pares complementarios fue desarrollada por Michael Sherman, un profesor en Nueva York, y lo llamó *Complementary Pairs*. Tiempo después se descubrió que ya se había propuesto la misma variación de Set, pero con el nombre de *Super Set* .

- Existen varias páginas web para jugar al SET online. Algunos ejemplos son: https://setwithfriends.com/ y https://www.setgame.com/set/puzzle.

Referencias:

El juego está basado en SET de Marsha J. Falco. Página web de la empresa SET Enterprises

Omatos, A. (2016). *Juego de cartas SET.* julio 20, 2022, de Matematiczando la realidad. Sitio web: http://mates.aomatos.com/juego-de-cartas-set/

Ibáñez, R. (2016). *Matemáticas en el juego de cartas SET (1)*. julio 20, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web:

Matemáticas en el juego de cartas SET (1) | Matemoción | Cuaderno de Cultura Científica

Ibáñez, R. (2016). *Matemáticas en el juego de cartas SET (2).* julio 20, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: Matemáticas en el juego de cartas SET (2) | Matemoción | Cuaderno de Cultura Científica

Klarreich, E. (2016). *Simple Set Game Proof Stuns Mathematicians*. julio 20, 2022, de Quantamagazine. Sitio web: https://www.quantamagazine.org/set-proof-stuns-mathematicians-20160531

Mancala

Descripción:

El Mancala, también es conocido como *kalaha,* es un juego de captura tradicional africano compuesto por un tablero de madera que contiene dos filas con seis huecos y dos espacios más grandes en cada esquina, dando un total de catorce huecos. En este juego solo pueden participar dos jugadores, donde cada jugador debe poner constante atención en el conteo de semillas para anticipar jugadas y provocar situaciones favorables para asegurar su victoria.

Objetivo:

Desarrollar aptitudes matemáticas como el conteo, la numeración, la estimación y el cálculo mental. Así como el desarrollo del pensamiento lógico y estratégico.

Edad: 8 años en adelante

Duración: 30 a 45 minutos

Material:

Tablero (ver Fig. 1)

48 semillas

Capacidad máxima: 2 jugadores por tablero

Procedimiento:

La o el tallerista deberá preparar el tablero en su posición inicial. La posición inicial del tablero es colocando cuatro semillas en cada hueco, a excepción del hueco más grande, dicho hueco lo llamaremos almacén. Véase Fig. 1.

Fig. 1 Tablero del juego de Mancala. Imagen recuperada de https://www.correodelmaestro.com/anteriores/2004/junio/nosotros97.htm

Pedir a los jugadores colocarse frente a frente con el tablero, en su posición inicial, entre los dos jugadores. Los seis huecos que quedan de frente a cada uno de los jugadores serán de su propiedad. Y el hueco más grande a mano derecha de cada jugador será su casilla almacén.

Y explicar las reglas del juego:

- Alternadamente, los jugadores tomarán las semillas que haya en un hueco y estas, las irán sembrando (repartiendo), en sentido contrario a las manecillas del reloj, una semilla en cada hueco.[6]

- Si se pasa por la casilla almacén del adversario no se podrá sembrar semillas ahí, es decir, se saltará esa casilla.

- Si la última semilla cae en el almacén del que siembra, vuelve a escoger otro hueco para seguir sembrando.

- Si la última semilla cae en un hueco vacío propiedad del que está sembrando, esa semilla y todas las que estén en el hueco de enfrente del contrario son capturadas y depositadas en el almacén del jugador que siembra.

- El juego termina cuando uno de los dos jugadores, en su turno, logra dejar todos sus huecos vacíos. Las semillas que quedan en los huecos del otro jugador pasarán a ser parte de su propio almacén.

- Gana aquel jugador con más semillas en su almacén.

Preguntas:

¿Alguno de los dos jugadores tendrá ventaja?

¿Habrá alguna estrategia que garantice ganar a cualquier jugador?

¿Cambiará el juego si agregamos más semillas? ¿Y si reducimos el número de semillas?

[6] *Una manera de decidir qué jugador jugará primero es que uno de los jugadores esconda una semilla en una de sus manos. Si la o el oponente adivina en qué mano está la semilla él empezará el juego. De lo contrario será el otro jugador quien comenzará el juego.*

Dinámicas Útiles:

- **Tchuka Ruma**

Antes de pasar a un juego en parejas y para que de manera individual cada participante comprenda la acción de “sembrar'' (tomar las fichas de una casilla y dejarlas caer una a una en las casillas siguientes), se propone el juego de Tchuka Ruma.

Se trata de un tablero compuesto de cinco hoyos o casillas, siendo la quinta más grande de lo normal, esta recibe el nombre de ruma o almacén, y en cada uno de los cuatro hoyos pequeños hay dos fichas o semillas.

Las reglas son las siguientes:

- Se toman las fichas de una casilla cualquiera y se reparten de una en una en las casillas siguientes en dirección a la Ruma (almacén). No puede saltar ningún hoyo ni alterar el orden
- Si una vez colocada una ficha en el almacén quedan fichas en la mano se sigue sembrando las fichas comenzando por la primera casilla pequeña del tablero.
- Al sembrar la última ficha pueden ocurrir tres casos:
    1. Que caiga en una casilla que tenga fichas. En ese caso se toman las fichas de esa casilla y se sigue sembrando.
    2. Que caiga en el almacén. Entonces el jugador elige en dónde empezar una nueva jugada y seguir con la siembra.
    3. Que caiga en una casilla vacía. En este caso el jugador pierde la partida y hay que comenzar de nuevo.
- El objetivo del juego es conseguir acumular todas las fichas en el almacén

Algunas variantes de Tchuka Ruma:

- Realizar el juego partiendo de un número distinto de semillas iniciales en cada casilla.
- Realizar el juego partiendo de un número distinto de hoyos.

➢ Los tableros, tanto del juego de Mancala como de Tchuka Ruma se pueden realizar de manera casera, el tablero puede estar impreso/dibujado en papel, con recipientes o taparroscas; y las semillas pueden ser bolitas de papel, frijoles, piedras, botones (no importa que sean del mismo color o tamaño).
Es importante tomar en cuenta que el diseño del tablero puede ser de manera lineal o con forma circular. Véase Fig. 2

Fig. 2 Versiones diferentes de dos tableros de Tchuka Ruma

Información complementaria:

✔ Mancala es el nombre genérico que se utiliza para nombrar a toda una familia de juegos, que se suelen jugar en un tablero con dos, tres e incluso hasta cuatro filas de agujeros, en el suelo o en un bloque de madera, sobre los que se depositan fichas, o "se siembran semillas", y cuyo objetivo es la captura, o "recolección", de estas. Las versiones de *Mancala* más conocidas en Europa, son el *Awale* (también llamado *Wari*) consiste en dos filas de 6 hoyos, con 4 semillas en cada uno de ellos, y opcionalmente, dos hoyos en los laterales para colocar las semillas que recolecta cada uno de los jugadores., el *Kakua*, el *Mweso* o *Hus* (que se juega con 64 fichas en un tablero de 32 huecos) y el *Kalah*, *Kalaha* o conocido simplemente como *Mancala*, que es la variante egipcia, la más extendida y conocida en Occidente, y es la implementada en este apartado.

- ✔ Historia del Mancala:

  El Mancala ha sido considerado durante mucho tiempo como un juego de estatus en la historia de la realeza africana.

  Por ejemplo, hace varios cientos de años, en el país de Uganda, cada rey nuevo debía recoger semillas de cierto árbol, que luego usaba como piezas para jugar el juego de Mancala en la corte real. La habilidad del rey nuevo para jugar Mancala, era de gran importancia pues si era un jugador inteligente de Mancala, esto se tomaba como una señal de que, como gobernante, su gente no lo burlaría

  En la actualidad, el juego de Mancala es considerado como un juego para hombres y el ganador es recompensado trayendo fama a su familia y a su pueblo entero. Incluso a veces se le celebra con una canción especial escrita sobre él y su victoria.

- ✔ El juego Mancala también se ha incorporado al folklore de ciertas culturas africanas. Existe la suposición entre la gente de Boran del norte de Kenia que antes de que los leones decidan salir a cazar, cavan un hoyo en la arena con sus patas y juegan Mancala. Si los presagios del juego son buenos, los leones salen a cazar, si no, esperan.

- ✔ Link para jugar Mancala en línea https://www.minijuegos.mx/juego/mancala

Referencias:

Ibáñez, R. (2014). *Juegos del mundo: el mancala*. julio 15, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: https://culturacientifica.com/2014/07/02/juegos-del-mundo-el-mancala/

Rodríguez, P. (2004). Juegos y matemática: mancala. *Correo del maestro, num.97*. Sitio web: https://www.correodelmaestro.com/anteriores/2004/junio/nosotros97.htm

De Voogt, A. (2001). Mancala, Games that Count, Expedition 43, 38-46. Recuperado desde: https://www.penn.museum/documents/publications/expedition/PDFs/43-1/Mancala.pdf

De Voogt, A., Rougetet, L., & Epstein, N. (2018). Using Mancala in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Teacher*. Vol.112, 14-21. Recuperado desde: https://pubs.nctm.org/view/journals/mt/112/1/article-p14.xml

[Lumino Luxx]. (2017). ¿Cómo no jugar Mancala? TUTORIAL (para perderse completamente). Sitio web: https://www.youtube.com/watch?v=hoDwqEDveb4

Tomé, C. (2013). *Tchuka Ruma, el mancala solitario* de Cuaderno de Cultura Científica . julio 16, 2022. Sitio web: https://culturacientifica.com/2013/11/20/tchuka-ruma-el-mancala-solitario/

Alquerque De Sevilla, G., Antonio, J., Cc, H. M., María De Los, S., José Muñoz, R., Ies, S. & Antonio Fernández-Aliseda, M. (s/f). Tchuka Ruma. octubre 11, 2022. Sitio web: https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/55/075-079.pdf

RANAS Y SAPOS

Descripción:

Ranas y sapos es un juego de intercambio de fichas, individual o en parejas, que consta de un tablero lineal de 1×9 y 4 fichas color “oscuro” y 4 color “claro”, en el que el objetivo es intercambiar las posiciones de las fichas “oscuras” y “claras” en la menor cantidad de movimientos. Véase Fig. 1

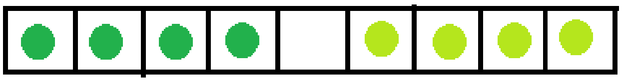


Fig. 1 Tablero en su posición inicial

Objetivo:

Propiciar en el participante la búsqueda de solución de problemas mediante la observación, reflexión y uso del razonamiento lógico.

Edad: 6 años en adelante

Duración: 30-45 minutos

Material:

1 tablero lineal de 1×9 casillas

8 fichas (4 fichas claras y 4 fichas oscuras).

Capacidad máxima: 2 jugadores por tablero

Procedimiento:

El juego comienza con el tablero, en su posición inicial (véase Fig. 1), colocado entre los dos jugadores. Se determina un color para cada jugador y al azar se elige el jugador que se moverá primero, después es turno del segundo jugador, y así sucesivamente. Este no es un juego de competencia, más bien es un juego colaborativo en el que entre los dos participantes tienen que llegar a la solución del problema.

En el juego solo están permitidos dos tipos de movimientos:

1. Deslizamientos: una ficha “oscura” o una “clara” se puede mover a una casilla vecina, solo si está vacía.

2. Saltos por encima de otra ficha (una ficha “oscura” puede saltar por encima de una ficha “clara” y un “clara” por encima de una “oscura”), siempre y cuando la siguiente casilla esté vacía.

No está permitido que dos fichas ocupen una misma casilla y las fichas color “oscuro” siempre se desplazan hacia la derecha y las de color “claro” hacia la izquierda (las fichas no pueden retroceder).

El juego termina cuando algún jugador consigue el objetivo de trasladar todas las fichas a las posiciones opuestas o cuando se queda bloqueado, sin poder mover ya ninguna ficha, con lo cual habrá que volver a empezar.

Preguntas:
¿Existe más de una solución a este juego?
¿Será posible dar solución al juego con el mínimo número de pasos posibles?
Si eliminamos la condición de que no se pueden retroceder las fichas, ¿Cambia en algo la solución al problema?

Dinámicas útiles:

- Si se desea plantear este juego a niños y niñas, se puede utilizar una descripción más literaria, por ejemplo, tenemos un río cuyas orillas están unidas por nueve piedras alineadas, donde las fichas “oscuras” son Ranas y las fichas “claras” son Sapos. También si se desea, previamente se puede comenzar el reto con menos cantidad de ranas y sapos, e incluso cambiar las rana y sapos por animales de su interés.

- Si el jugador se quedó muy interesado se pueden proponer los siguientes retos y analizar que sucede en cuanto la cantidad de movimientos:

    - Juego general: n fichas de cada color y un número impar de casillas $2n + 1$.

    - Juego con las mismas reglas, 1 casilla vacía solo que ahora será diferente entre sí el número de ranas y sapos (puede haber m ranas, n sapos).

    - Juego con las mismas reglas, n ranas, n sapos pero más de una casilla vacía.

- Ranas y Sapos (bidimensional)

En este juego ahora el tablero es más grande. En la Fig. 2 se muestra el tablero de 5×5 casillas en su posición inicial con las 24 fichas, de las cuales 12 son claras y 12 son fichas oscuras.

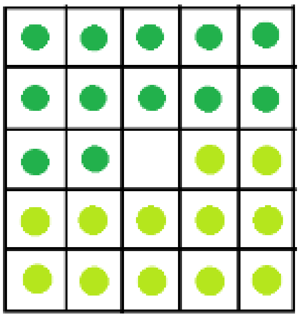


Fig. 2 Tablero de ranas y sapos (bidimensional)

El objetivo del juego, es intercambiar las posiciones de las fichas oscuras y claras, para lo cual las fichas solo se pueden desplazar a una casilla adyacente vacía o saltar sobre una ficha del color opuesto, en horizontal y vertical, pero no en diagonal.

Sugerencia: Se sugiere ya haber jugado ranas y sapos (lineal) para obtener la solución más fácil con ayuda de la anterior. Sin embargo, también se puede jugar independientemente del otro.

Información Complementaria:

- ✔ La cantidad mínima de pasos para la solución de Solución Ranas y sapos (lineal) se muestra a continuación:

Si colocamos sobre el tablero solo las fichas oscuras, se necesitan $n+1$ deslizamientos para trasladar cada una de las fichas a su posición final (recorriendo la casilla vacía y las n casillas que ocupan las fichas contarías).
Por lo que la cantidad final total de deslizamientos para las fichas oscuras será:

$$n(n+1)$$

Análogamente para las fichas claras: $n(n+1)$

Así el número total de desplazamientos ("si no hubiese saltos") es:

$$2n(n+1)$$

Sin embargo, las fichas de un color entorpecen el movimiento de las fichas del otro color, motivo por el cual deberán ir saltándolas. Como cada ficha de un color debe saltar a todas las fichas del color opuesto, el número de saltos total es de: $n \times n = n^2$

Así el número total de saltos es de n^2

Más aún, como cada salto lleva una ficha a dos casillas más allá, es decir se ahorra uno de los desplazamientos considerados anteriormente, así el número de movimientos necesarios para resolver el salto de la rana deberá ser

$$2n(n+1) - n^2 = 2n^2 + 2n - n^2 = n^2 + 2n$$

Es decir, se producen n^2 saltos y $2n$ desplazamientos.

✔ Solución óptima a Ranas y Sapos

- **Ranas y sapos Lineal:**

En el diagrama de la Fig. 4 se muestran todos los posibles movimientos que puede hacerse en un juego de 2 ranas y 2 sapos, un proceso análogo puede hacer para n= 3, 4, 5.

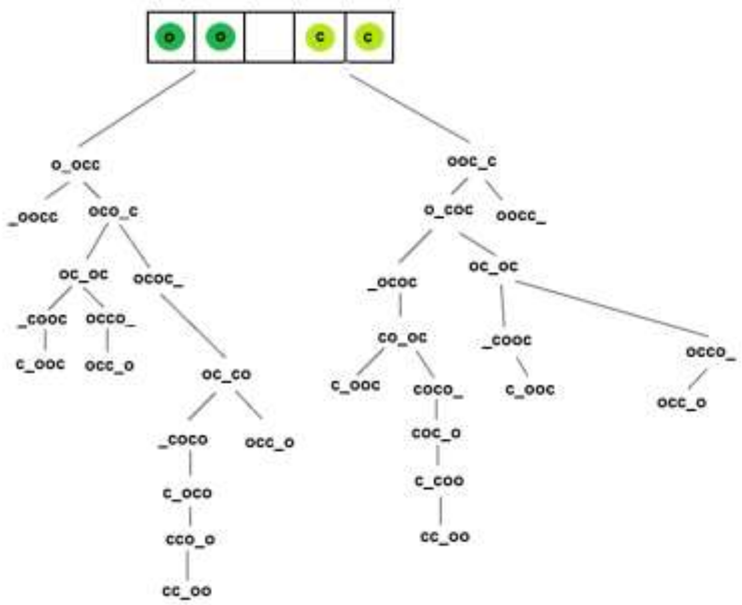


Fig. 4 Diagrama de solución

- **Ranas y sapos Bidimensional:**

Como en el razonamiento anterior de rana y sapos, la idea es realizar un primer cambio de todas las fichas en la columna central. Es decir, pasar de la Fig. 5 a las Fig. 6

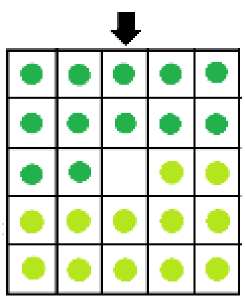


Fig. 5

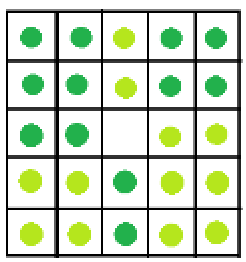


Fig. 6 Paso 1

Después, en la fila central hacer un movimiento (el que sea posible), en este caso pasar una ficha clara a la casilla adyacente vacía.

Observar que al mover esa ficha dejamos el espacio vacío que pertenece a otra columna que no es la central. Es decir, el espacio vacío se movió a una columna diferente. Véase Fig. 7

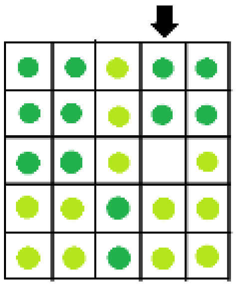
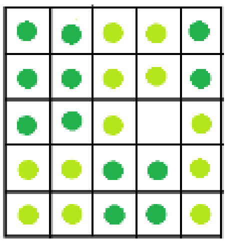


Fig. 7 Paso 2



Ahora haremos el cambio de todas las fichas de la columna donde se encuentra el espacio vacío. Véase Fig. 8

Fig. 8 Paso 3

Y así, al seguir haciendo un cambio (posible) en la fila central, el espacio vacío se moverá de columna. Solo nos basta con ver en qué columna quedó el espacio vacío para luego hacer el cambio de todas las fichas de dicha columna.

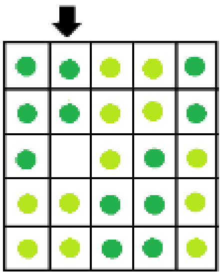


Fig. 9 Paso 4

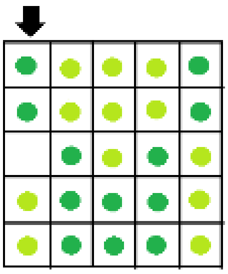


Fig. 10 Paso 5

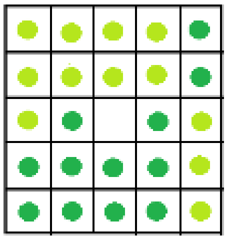


Fig. 11 Paso 6

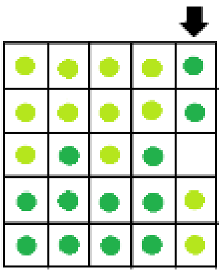


Fig. 12 Paso 7

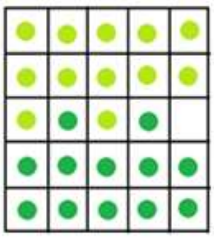


Fig. 13 Paso 8

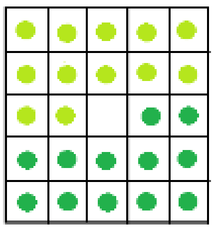


Fig. 14 Paso 9

Notemos que para cada cambio de todas las fichas por columna son necesarios 8 movimientos. Hay cinco columnas, entonces el número total de movimientos para cambiar las fichas de todas las columnas es

$$8 \times 5 = 40$$

Agregando los movimientos de la fila central, que al intercalar los movimientos con el cambio de columnas logramos también cambiar la posición de todas las fichas de la fila, es decir, hacemos 8 movimientos más.

Así el número total de movimientos necesarios y suficientes para intercambiar la posición de las fichas "claras" con la de las fichas "oscuras" es de **48 movimientos**.

- ✔ Existe una generalización de ranas y sapos a un juego un poco más complicado, **el reto "a proa y popa"** (Fore and Aft puzzle), **reto dieciséis inglés** (English sixteen puzzle) o **juego diagonal**.

Fig.15 Imagen del **reto "a proa y popa"**. Obtenido de: http://divermates.es/blog/fore-and-aft/

La invención de este juego suele atribuirse al autor de matemáticas recreativas e inventor de rompecabezas y juegos, el norteamericano Sam Loyd (1841-1911) y aparece en su libro *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums with Answers*, publicado en 1914. En la explicación del juego Loyd dice que el inventor fue un marino inglés que trabajó en Sailor's Snug Harbor (Staten Island, NY) y que se sacaba un dinero extra vendiendo este reto, aunque el juego había sido creado en Londres y por eso se denominó "rompecabezas dieciséis inglés".

El tablero está formado por dos cuadrados 3×3 con una casilla común, como lo muestra la Fig. 15. Hay 16 fichas, 8 “claras” y 8 “oscuras”, de forma que en el inicio las fichas de cada color ocupan las casillas de un cuadrado, salvo la casilla común, como se muestra en la imagen. De nuevo el objetivo es intercambiar las posiciones de las fichas “oscuras” y “claras” con el menor número de movimientos posibles, para lo cual las fichas se pueden desplazar a una casilla adyacente o saltar sobre una ficha del color opuesto a una casilla vacía, en vertical y horizontal, pero no en diagonal.

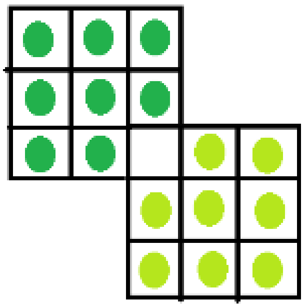


Fig. 15 Tablero de A proa y popa.

El Profesor Hoffman dio una solución en 52 movimientos que para muchos era la solución mínima; Ball por su parte ofreció una solución en 48 movimientos en la primera edición de su libro *MRE*; pero es el matemático Henry E. Dudeney (1857-1930), experto en rompecabezas y juegos matemáticos, quien en un artículo para la revista inglesa Tit-Bits (número 33, 1898) da una solución simétrica en 46 movimientos, que es la que se recoge en el libro de Sam Loyd y en otros libros de juegos.

Referencias:

Gardner, M. (1959). Mathematical puzzles of Sam Loyd. New York: Dover Publications.

Ibáñez, R., (2014). El salto de la rana y familia. *Matemoción*, *cuaderno de cultura científica*. Recuperado desde: https://culturacientifica.com/2014/01/15/el-salto-de-la-rana-y-familia/

Hoffman, P. (1893). *Puzzles old and new*. Frederick Warne and Co. p.269. Disponible en https://archive.org/details/puzzlesoldnew00hoff

Berlekamp, E., Conway, J. & Guy, R.. (1982). Whose game?. En Winning ways for your mathematical plays. Lodres: Academic Press Inc. p.63. Disponible en: https://annarchive.com/files/Winning%20Ways%20for%20Your%20Mathematical%20Plays%20V1.pdf

Topos en aventuras

Descripción:
Es una actividad que consiste en resolver una serie de laberintos. Los laberintos muestran a un topo queriendo salir de un sistema de túneles y madrigueras, en el camino el topo puede encontrarse con algunos obstáculos. La actividad se divide en dos secciones, una llamada "Entre túneles" y otra "El laberinto del topo", cada una de estas secciones tienen instrucciones particulares y diferentes.
Además de entre los acertijos presentados hay algunos que tienen una única solución, otros que tienen más de una solución y algunos más que no tienen solución, mostrando a las y los participantes que un problema puede tener diferentes maneras de llegar a la solución y que en matemáticas existen problemas que hasta el momento no tienen solución.

Objetivo:
Desarrollar en las y los participantes el pensamiento crítico, habilidades para la resolución de problemas. Mostrar la relación de problemas cotidianos de la vida y su relación con la teoría matemática. Así como introducir conceptos matemáticos tales como gráfica, vértices de una gráfica, aristas de una gráfica y caminos y ciclos eulerianos y hamiltonianos en una gráfica.

Edad: 6 años en adelante

Duración: 30 minutos

Material:
Plumones de agua
Borrador
Hojas con los laberintos impresos [consultar en apéndice][7]
*Para reutilizar las hojas se recomienda enmicarlas o usar una superficie de acrílico transparente que se pueda poner sobre la hoja y dibujar la solución sobre dicha superficie.

---

[7] Dentro de los retos propuestos se pueden encontrar algunos que NO se puedan resolver. Esto es de manera intensional para que se invite a la reflexión sobre cuando si se puede encontrar una solución y cuando no.

Capacidad máxima: 2 personas por reto

Procedimiento:

Antes de comenzar con cualquier reto, se le recomienda a la o el facilitador mostrar un ejemplo de laberinto y aclarar a qué le vamos a llamar "túnel", a que "madriguera", qué significa "recorrer cada túnel o madriguera una sola vez".

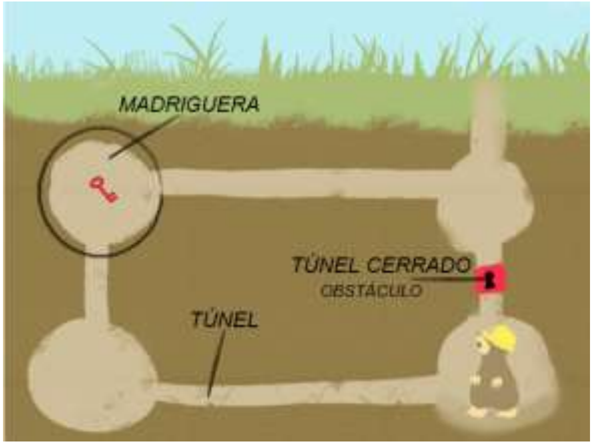


Fig. 1. Imagen ilustrativa de un reto

En los retos de "Entre túneles", las indicaciones son recorrer, cada túnel una y solo una vez (es decir, sin pasar más de una vez por cada túnel). El reto termina cuando el topo haya llegado al final del laberinto pasando por todos los túneles (sin haber repetido alguno).

Por otro lado, en los retos de "El laberinto del topo", la consigna es recorrer cada madriguera una y solo una vez y mostrar en qué posición debe iniciar y terminar el topo.

Es importante hacerle ver a los participantes que en algunos retos hay túneles que están cerrados y que no se podrá pasar por ahí a menos que se tenga una llave (del mismo color de la puerta) para abrir ese túnel.

Nota: una sola llave puede abrir más de una puerta, siempre y cuando sean del mismo color.

Preguntas:

¿Habrá una única solución?

¿Habrá una forma de saber si se puede encontrar una solución para cada acertijo? ¿De qué manera podría estar seguro de que el reto no se puede resolver dadas las instrucciones?

Dinámicas útiles:

- **Sin levantar el lápiz del papel**

Dado que el problema de los Puentes de Königsberg (recorrer todas las aristas de la gráfica sin pasar dos veces por alguna arista) es equivalente a realizar el dibujo, del diagrama asociado al problema, sin levantar el lápiz del papel ni trazar dos veces la misma línea es posible sustituir las plantillas de *Entre túneles* por diagramas como los de la Fig. 2. El tallerista puede crear más diagramas a los propuestos.

En la Fig. 2 se muestran diagramas donde no es posible recorrerlos sin levantar el lápiz del papel y otros que sí tienen solución y dicha solución se encuentra al seguir la sucesión de números marcados en cada arista. Queda como tarea para el participante ver si es posible tener más de una solución posible.

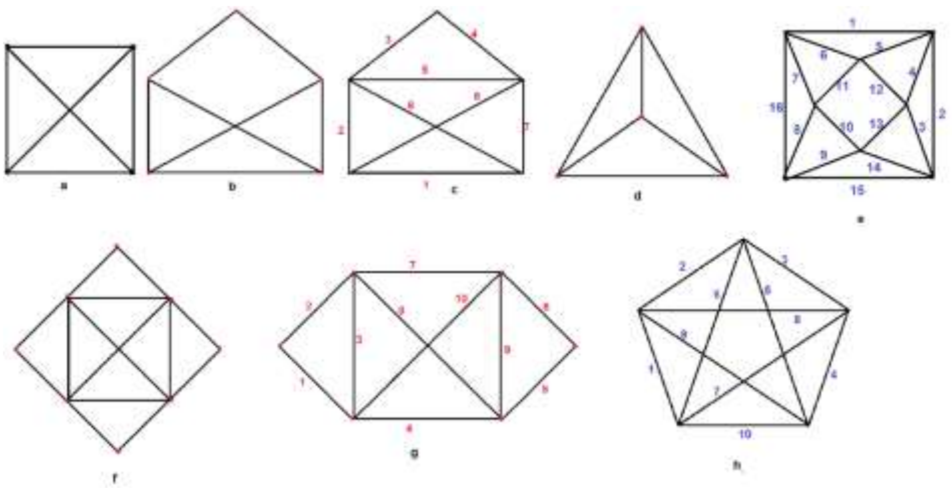


Fig. 2 Diagramas para trazar sin levantar el lápiz del papel

- **Icosian Game**

En 1859, Hamilton desarrolló un juego, llamado “Icosian Game” que consistía en un dodecaedro regular (poliedro regular formado por doce caras pentagonales regulares iguales) de madera donde cada uno de sus 20 vértices estaban etiquetados con 20 nombres de ciudades importantes: Bruselas, Cantón, Delhi, Frankfurt, etc. El jugador debía encontrar un recorrido a lo largo de las aristas del dodecaedro, que pase exactamente una vez por cada ciudad, y volver a la ciudad de la cual se partió. Por ser el dodecaedro incómodo de manejar (Fig. 3), Hamilton desarrolló una versión del juego en que el mismo es reemplazado por la representación geométrica con vértices y aristas del dodecaedro como se muestra en la Fig.4.

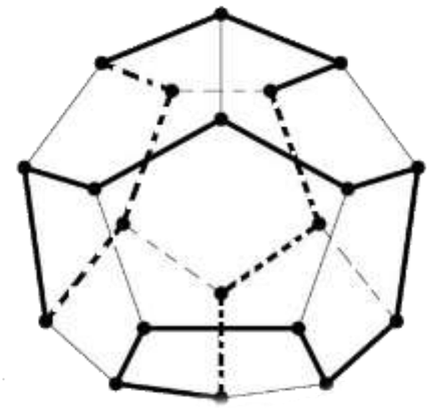


Fig. 3

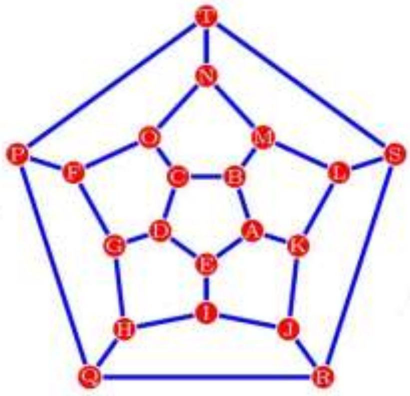


Fig. 4

Una solución a este problema se muestra en la Fig. 5, donde se recorren todos los vértices o ciudades una sola vez y se regresa a la ciudad de donde se partió Cuando el viaje inicia y termina en la misma ciudad se llama ciclo Hamiltoniano Fig. 5 (a), y si inicia, pero no termina en la misma ciudad se llama camino Hamiltoniano Fig. 5 (b).

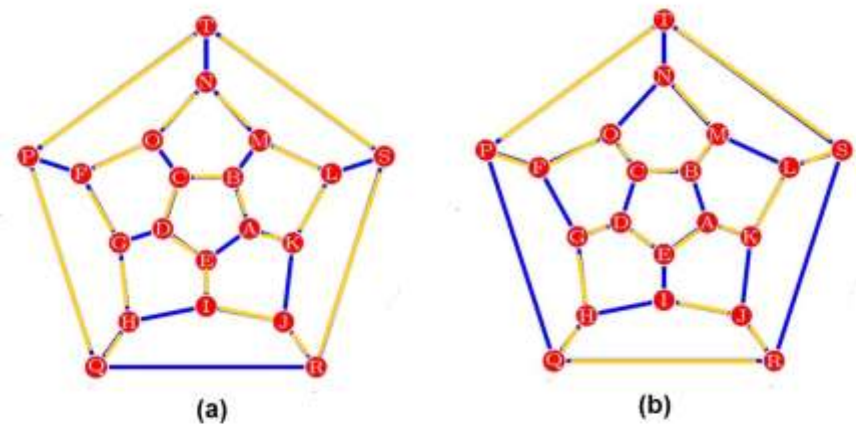


Fig. 5 Soluciones a Icosain game

Información complementaria:

- ✔ Historia de los Puentes de Königsberg,

La ciudad de Königsberg, en Prusia, era cruzada por el río Pregel, dividiéndola en cuatro áreas que se conectaban entre sí por medio de siete puentes. Los puentes están distribuidos en la ciudad como se ve en la Fig. 6.

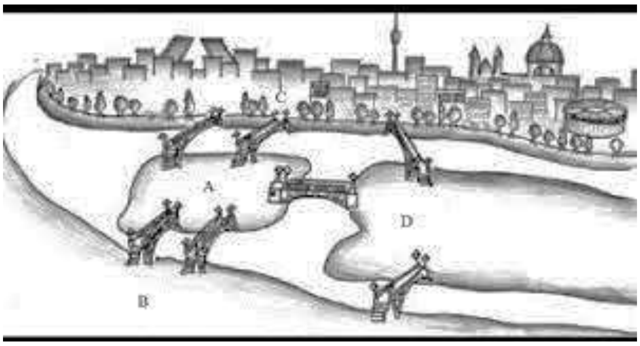


Fig. 6 Ilustración de los Puentes de Königsberg. Recuperado de http://www.expansion.com/accesible/blogs/conthe/2011/08/17/circuito-gallardoniano.html

Se dice que, una tradición de la ciudad era hacer un paseo en el que se recorrieran los siete puentes sin pasar dos veces por ninguno de ellos. Nadie había logrado resolver el problema hasta que llegó a oídos del matemático suizo Leonhard Euler. Euler resolvió el problema usando lo que hoy se conoce como teoría de gráficas. Esta rama de las matemáticas estudia las propiedades de las gráficas[8], para este problema en particular solo definiremos gráfica plana[9], un camino[10] y un ciclo[11]. Véase Fig. 7

[8] *Una gráfica o grafo es un conjunto finito de vértices y aristas en donde toda arista tiene un vértice en cada extremo. Toda gráfica se puede representar geométricamente mediante un dibujo, en el cual los vértices son puntos y las aristas son líneas que conectan a los puntos.*

[9] *Una gráfica es plana cuando puede trazarse sobre un plano sin que las aristas se intersequen en un punto distinto de los vértices.*

[10] *Un camino como una secuencia de vértices y aristas tal que en de cada uno de sus vértices existe una arista hacia el vértice sucesor:* $v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_n$ *Donde* v_i *son los vértices,* a_i *las aristas y cada arista* a_i *tiene en sus extremos a los vértices* v_i *y* v_{i-1}*.*

[11] *Un ciclo como un camino cerrado, es decir, un camino que empieza y acaba en el mismo vértice.*

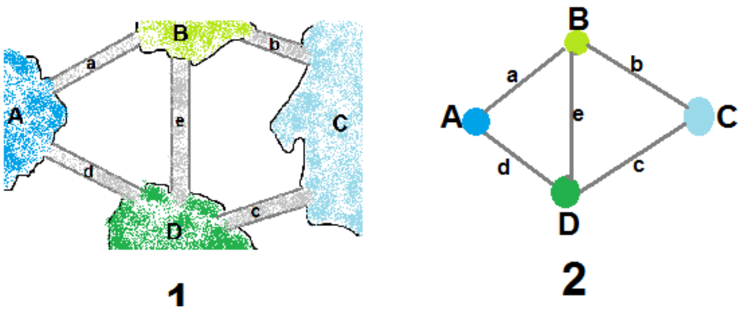


Fig. 7 Gráfica G definida por los vértices V = {A, B, C, D} y el conjunto de aristas E = {a, b, c, d, e} (Fig.2.1) y su representación geométrica (Fig.2.2)

Para resolver el problema de los puentes de Königsberg, Euler hizo un diagrama de la ciudad, donde representó con puntos (marcados con las letras de la A a la D) a cada región y con líneas que unen a dos puntos si existe un puente que conecte dos regiones como lo muestra el diagrama de la Fig. 8.[12]

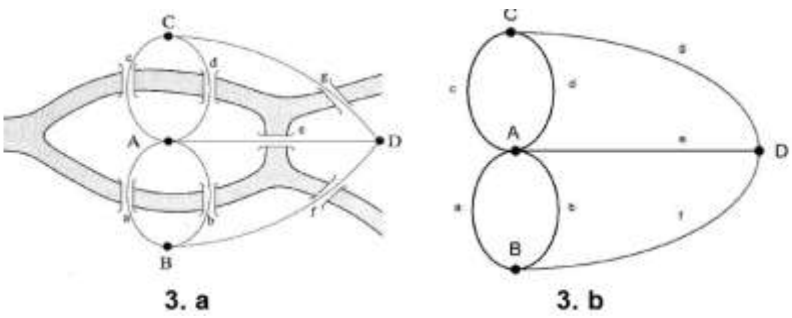


Fig. 8 Representación gráfica de los puentes de Königsberg. Imagen recuperada de https://steemit.com/spanish/@carolina88/los-puentes-de-koenigsberg-nacimiento-de-la-teoria-de-grafos

Leonhard Euler resolvió el problema demostrando que es imposible recorrer todos los puentes una sola vez sin pasar dos veces por alguno de ellos. Y la explicación es que en la Fig. 8, podemos ver que al vértice C llegan 3 aristas, al vértice A llegan 5 aristas, al vértice B llegan 3 aristas y al vértice D llegan 3 aristas.

Euler descubrió muchas propiedades sobre los vértices pares[13] y sobre los vértices impares[14];

[12] *En particular el diagrama de la Fig. 3 es un grafo con aristas múltiples, es decir, dos vértices están conectados por más de una arista, a este tipo de diagramas en Matemáticas se les conoce como multigráfica o multígrafo.*

[13] *Vértices pares, son aquellos a los que llega un número par de aristas*

[14] *Vértices impares, aquellos a los que llega un número impar de aristas*

en particular se dio cuenta de que, si un vértice es impar, el recorrido por la gráfica debe empezar o terminar en ese vértice. Así para que una gráfica pueda recorrer pasando por todas las aristas y sin recorrer dos veces alguna de ellas, es necesario que la gráfica tenga únicamente dos vértices impares (uno sería el comienzo del recorrido y el otro sería el final) o que todos sus vértices sean pares (no importa en qué vértice se comience el recorrido).
Como la gráfica de los puentes de Königsberg tiene cuatro vértices impares es imposible recorrerla de esa manera y por lo tanto el problema no tiene solución.

Euler, además demostró que una gráfica tiene un camino euleriano[15] siempre que no existan más de dos vértices a los que llegue un número impar de aristas.

- ✔ El juego del dominó puede modelarse en términos de teoría de gráficas.

Es conocido que el dominó es un juego que tiene 28 fichas en las que aparecen todas las cifras entre 0 y 6. La idea del juego consiste en colocar una ficha detrás de otra con la condición que dos fichas pueden ser consecutivas si y sólo si éstas comparten la misma cifra.
Se dice que una partida es perfecta si se utilizan todas las fichas de dominó. Una partida es semiperfecta si se utilizan todas las fichas de dominó, pero empieza y termina con números distintos.
Ahora si dibujamos un vértice por cada número que aparece en nuestro conjunto de fichas y dos vértices van a estar conectados si en nuestro conjunto de fichas aparece una que tenga las dos cifras correspondientes a los vértices.
Para ejemplificar, véase en la Fig. 9 la siguiente partida: (6,5), (5,0), (,1), (1,3), (3,5), (5,4), (4,1), (1,5), (5,2), (2,1), (1,4).

[15] *Un camino que pasa una sola vez por cada arista de la gráfica se llama camino euleriano. En cambio, sí un camino euleriano es un camino cerrado, es decir, que recorre cada arista exactamente una vez y empieza y termina en el mismo vértice se dice que es un ciclo euleriano. Por otra parte, en honor de William Rowan Hamilton (matemático y astrónomo irlandés) existen los caminos y ciclos hamiltonianos, un camino hamiltoniano es un camino que pasa por cada vértice exactamente una vez. Y un ciclo hamiltoniano es un camino que pasa por cada vértice exactamente una vez excepto el vértice del que parte y al cual llega.*

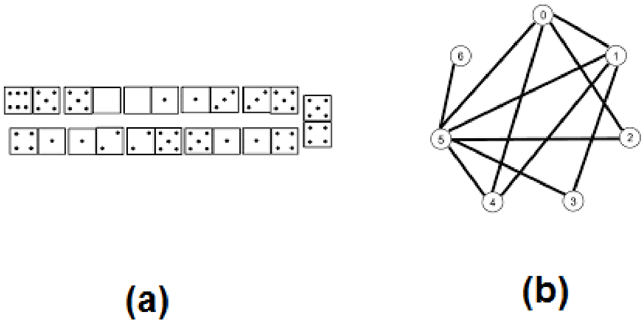


Fig. 9 (b) Representación gráfica de una partida de dominó.

Así la gráfica asociada a todas las fichas del juego tiene 7 vértices y 28 aristas como se muestra en la Fig.10:

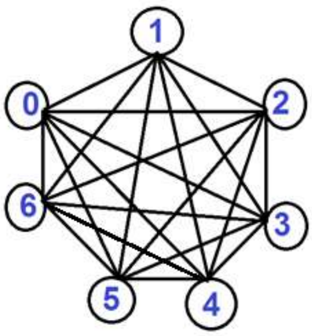


Fig. 10 Representación gráfica de las fichas del juego de dominó.

De la figura anterior, se puede ver que, encontrar una partida perfecta en el dominó es equivalente a encontrar un camino Euleriano en nuestra gráfica. Por ejemplo, el camino dado por la sucesión de fichas (6,0), (0,3), (3,1), (1,0), (0,4), (4,1), (1,6), (6,4), (4,2), (2,6), (6,5), (5,1), (1,2), (2,5), (5,3), (3,2), (2,0), (0,5), (5,4), (4,3), (3,6) (véase Fig. 10).

✔ También podemos considerar el problema de colorear los vértices y las aristas de una gráfica de forma que cumplan ciertas condiciones. Esta área surge como un intento por resolver el famoso problema de los cuatro colores.

La primera referencia escrita sobre este problema data de 1852, cuando Augustus de Morgan, profesor de matemáticas en el University College de Londres, le envía una carta a Sir William Hamilton. En esa carta le cuenta que un estudiante suyo (Frederick Guthrie) le pregunta la razón por la cual todo mapa puede colorearse con cuatro colores de forma que dos países vecinos no tengan el mismo color, es decir, dos países que comparten una franja de frontera deben recibir colores distintos. El problema de los cuatro colores fue demostrado por Kenneth Apple y Wolfgang Haken en 1976.

Esta demostración es basada en teoría de gráficas, se realizó de forma computacional, en donde cada región del mapa es representada por un vértice, las aristas representan la relación fronteriza entre las regiones, y donde dos regiones “pintadas” con el mismo color no podían estar conectadas entre sí por ninguna arista. La gráfica resultante se conoce como la gráfica dual del mapa. Así el problema de colorear un mapa se convierte en un problema de coloración de los vértices de una gráfica (plana).

En la Fig. 11 se muestra un mapa y su gráfica dual con la coloración de sus vértices de forma que vértices vecinos reciben colores distintos y utiliza a lo más cuatro colores.

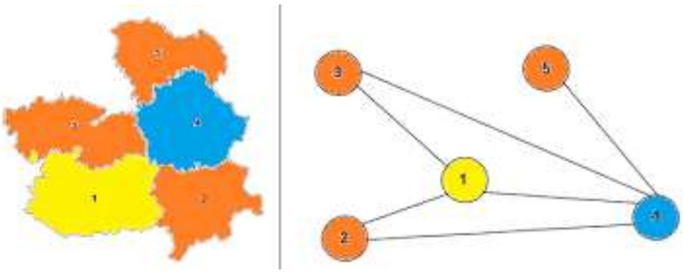


Fig. 11 Mapa de una región y su grafica dual

Fig. 12 Ejemplos de mapas coloreados con cuatro colores. Imagen obtenida de https://www.revistac2.com/c2/wp-content/uploads/2016/12/world_map.png

- ✔ Existen algunas aplicaciones de juegos sobre teoría de gráficas que pueden descargar en sus dispositivos móviles (Ladybug Pathfinder, One Touch Drawing, GraphTastic, Graph Puzzle, Graph Isomorphism, Planaritify, Graph 31, etc.) y que corresponden a conceptos de teoría de gráficas desarrollados en esta actividad.

Referencias

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications Inc.

Wilson, R. (1983). *Introducción a la teoría de grafos*. Madrid: Alianza Editorial.

Hevia H. (1996). *El Problema de los siete puentes de Könisberg: Leonhard Euler y la Teoría de Grafos*. *Educación matemática*, Vol.8, pp.108-115.

Stadler, M. (2017). *¿Qué es la Topología?* agosto 22,2019, de grupo alquerque Sitio web: http://www.grupoalquerque.es/ferias/2016/archivos/pdf/1_que_es_topologia.pdf

Del Castillo, B. (2017). *El Problema de los Cuatro Colores*. agosto 22, 2019, de C2 Ciencia y Cultura. Sitio web: https://www.revistac2.com/el-problema-de-los-cuatro-colores/

PITARRA

Descripción:

Es un juego autóctono mexicano para dos jugadores, quienes por turnos colocarán una ficha sobre el tablero (véase Fig. 1) y deberán crear estrategias, siguiendo unas simples reglas, para lograr capturar fichas del contrincante y ser el jugador vencedor de la partida.

Objetivo:

Desarrollar la destreza mental, observación, pensamiento crítico y la búsqueda de una estrategia ganadora.

Edad: 8 años en adelante

Duración: 30 minutos

Material:

1 tablero de Pitarra

24 fichas, 12 azules y 12 rojas

Capacidad máxima: 2 jugadores por tablero

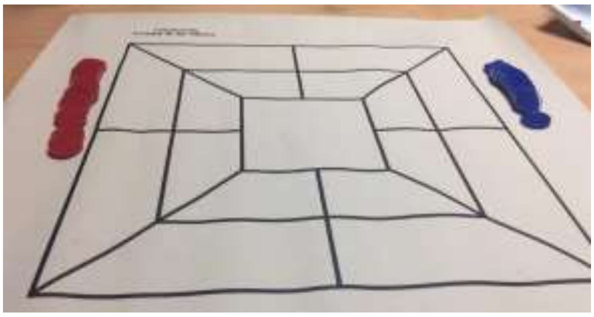


Fig. 1. Tablero de Pitarra.

Procedimiento:
Colocar el tablero entre los dos participantes. Cada participante debe tener 12 fichas (para cada jugador un color diferente) ya sea azules, o rojas. El juego consiste en ir formando “tercias”, esto es colocar tres fichas consecutivas del mismo color alineadas en línea recta horizontal, vertical o diagonal, para poder retirar del tablero una ficha del oponente a elección y conveniencia

Reglas del juego:

- La apertura del juego es por sorteo. Luego, por turnos cada jugador deberá colocar una ficha en cualquier casilla marcada dentro del tablero. Los jugadores pueden seguir colocando fichas siempre y cuando haya alguna casilla vacía.
  El objetivo es lograr colocar 3 fichas alineadas ya sea en línea horizontal, vertical o diagonal. Cuando se logre esto, se dirá que se formó una “tercia”

- Al realizar una tercia el jugador podrá tomar una ficha del contrincante a su elección y conveniencia. Cuando al mover una ficha, se forma más de una tercia, sólo se tendrá que elegir entre alguna “tercia” y obtener solo una ficha contraria.

- Una vez que todos los jugadores hayan colocado todas sus fichas sobre el tablero, hay dos casos. El primero es que ya no haya espacios vacíos para colocar las fichas, en ese momento se termina el juego y se declara como empate. El segundo caso es que aun existan espacios vacíos entonces lo que sigue es mover alguna de sus fichas directo a algún espacio libre, sin saltar fichas contrarias o propias, siguiendo el trazo de las líneas del tablero. Las fichas pueden moverse en cualquier dirección.

- Cuando se tiene una tercia ya formada, cualquier ficha de ésta puede moverse a otro espacio y regresar, valiendo este movimiento como una nueva tercia, esta jugada o movimiento se conoce como “columpio”.

- El juego se termina al no contar con fichas suficientes para formar tercias; por empate, acuerdo o rendición.

- Gana el jugador con más fichas contrarias.

Preguntas

¿Habrá alguna estrategia para ganar siempre?

¿Cambia si soy yo el jugador que empieza o soy el segundo en tirar?

Dinámicas útiles

- Pitarrita

Se sugiere esta actividad como dinámica más sencilla para introducir al juego de Pitarra o para niños de cinco años en adelante.

A diferencia de Pitarra, el tablero de Pitarrita son nueve puntos conectados vertical y horizontalmente y por dos diagonales. Aquí solo se proporcionan tres fichas de diferente color a cada jugador y por turnos éstas serán colocadas en alguno de los puntos marcados sobre tablero, siempre y cuando no esté ocupado ya por otra ficha. Véase Fig. 2. Si al terminar de colocar todas sus fichas aún no se forma ninguna tercia, por turnos, se comienza a mover alguna ficha hacia un punto vacío. La primera persona que logre formar "tres en línea" vence el juego.

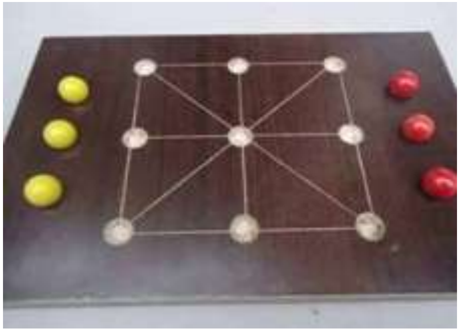


Fig. 2. Tablero de Pitarrita. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=aVfA5OHc8xw

- Molino

Juego de estrategia muy antiguo cuyo origen no es del todo conocido, también conocido como el *Morris* (o Morris de nueve hombres), el *Alquerque de nueve*, el *Tres en raya triple* o *La danza de los nueve hombres*.

Es un juego para dos personas. Cada jugador dispone de nueve piezas, u "hombres", que se mueven en el tablero entre veinticuatro intersecciones. El objetivo del juego es dejar al oponente con menos de tres piezas o sin movimiento posible.

- El juego comienza con un tablero vacío. Los jugadores se turnan para colocar sus fichas en los puntos vacíos marcados en la Fig.3

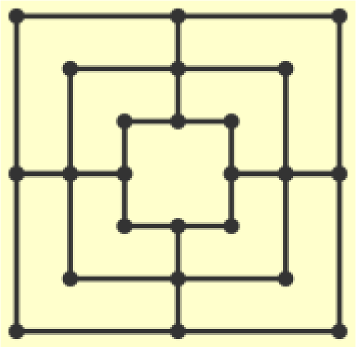


Fig.3. Imagen del tablero del juego de El Molino. Recuperada de https://culturacientifica.com/2013/07/17/mujeres-jugando-el-juego-del-molino/

- Una vez colocadas todas las fichas sobre el tablero comienza la segunda fase, durante la cual cada jugador en su turno mueve una de sus fichas a un punto adyacente libre a través de alguna de las líneas del tablero.

- En cualquier momento si un jugador llega a formar secuencia de tres fichas del mismo color situadas sobre los tres puntos de una misma línea, debe capturarse una ficha adversaria; la ficha capturada es sacada del tablero y no puede volver a ser jugada. El jugador que realiza la captura elige libremente la ficha a capturar entre todas las fichas del adversario que no forman parte de algún molino. En el caso de que todas las fichas del rival formen parte de algún molino, elige libremente entre todas

- Si llega el momento en el que un jugador solo tiene tres fichas sobre el tablero, sus piezas pueden "volar", "brincar" o "saltar" a cualquier intersección vacía, no sólo a las adyacentes

Un jugador vence la partida en estos dos casos:

- Cuando ha realizado 7 capturas, como consecuencia de lo cual el rival tiene sólo dos fichas y no puede formar nuevos molinos.

- Cuando el rival no puede realizar ningún movimiento por estar todas sus fichas bloqueadas.

La partida acaba en tablas cuando:

- Ambos jugadores mueven 50 veces cada uno sin que se realice ninguna captura.
- Se repite 3 veces la misma posición de las fichas sobre el tablero.

Información Complementaria:

✔ Existen diferentes variantes del juego en función del diseño del tablero y del número de fichas empleadas por cada jugador (3, 5, 7 ó 12). En la Fig. 4 se muestran algunas variantes.

Fig. 4. Diferentes diseños de tableros

✔ Pitarra es un juego autóctono proveniente de la comunidad rural mestiza de Los Navajos, originario del Municipio El Marqués, Estado de Querétaro. Los **juegos autóctonos** son aquellos propios de una región o país en particular que forman parte de la cultura y las tradiciones. Por lo general tienen un origen ancestral y son producto del ingenio popular. Dado que provienen de culturas antiguas en ninguna otra parte del mundo existen, pues son auténticos y su conservación actual se debe a una exigencia histórica: proteger un valor cultural del pasado, vigente en nuestro presente. Algunos ejemplos de los juegos autóctonos, también denominados juegos tradicionales, son el juego del trompo, las canicas, stop, el lazo, el palo encebado, el brinca burro, la perinola, entre otros.

- El juego de El Molino fue estudiado en 1993 por Ralph Gasser, quien demostró que el número de posiciones posibles era del orden de 10^{10}, que el número de juegos posibles era aproximadamente 10^{50} y que si se juega bien es un juego que siempre terminará en tablas.

Referencias:

Ibánez, R. (2013). Mujeres jugando (el juego del molino). septiembre 13, 2022 *de Cuaderno de cultura científica.* Sitio web: https://culturacientifica.com/2013/07/17/mujeres-jugando-el-juego-del-molino/

Gasser, R. (1996). *Solving nine men´s morris.* septiembre 13, 2022, de Games of No Chance MSRI Publications. Sitio web: http://library.msri.org/books/Book29/files/gasser.pdf

Arnedo, C., Beita, T., Crespo, R., Fernández, B. & Usón, C. (2005). *Juegos de estrategia: Una cultura para el mundo, un reto para la imaginación*. septiembre 11, 2022, de Centro virtual de divulgación matemática Sitio web: http://www.divulgamat.net/

Jugando en cuadrículas.
Gatos, sudokus y más juegos con cuadrículas.

Descripción:

En este apartado se presentan juegos basados en el acomodo de números o figuras (el juego del gato, cuadrado latino, sudoku, cuadrado mágico y ken ken), dentro de una cuadrícula, de acuerdo a una serie de reglas fáciles de comprender y recordar. Dado que los juegos aquí presentados no necesitan de conocimientos previos de ningún tipo para intentar darle solución es atractivo para todas las edades, sin embargo, esto no quiere decir que su solución se consiga fácilmente. La dificultad dependerá del número de casillas rellenas inicialmente y de los métodos que la o el jugador utilice para resolverlo.

Objetivo:

Desarrollar en la o el participante el pensamiento crítico, el razonamiento lógico, el ingenio, la atención, concentración, paciencia; Propiciar el desarrollo y uso de estrategias para la resolución de un problema y determinar y crear patrones. Así como el reconocimiento de números naturales, practicar operaciones aritméticas básicas y establecer relaciones numéricas.

Edad: 6 años en adelante

Duración: 30 minutos

Material:

Cantidad suficiente de cuadrículas impresos

(La cantidad será en función del número de participantes en el taller)

Capacidad máxima: 2 personas por cuadrícula

Procedimiento:

La o el facilitador deberá de elegir alguna de las actividades adelante propuestas para presentar a su grupo. La mayoría de las actividades están pensadas para realizarse de manera individual, sin embargo, las instrucciones se pueden dar de manera grupal.

A continuación, se presentan las reglas e instrucciones para cada actividad.

- **El juego del gato**

El juego del gato es quizá el juego más conocido, al menos en México. Es un juego específicamente para dos jugadores, donde cada jugador se identifica con un símbolo diferente: **X** y **O,** y por turnos cada jugador debe colocar su símbolo en alguna casilla del tablero de **3x3** casillas. El objetivo del juego es ser el primer jugador en trazar una línea con tres de sus símbolos.

1. No es posible marcar sobre una casilla ya jugada. En caso de que el jugador haga trampa el ganador será el otro.
2. El juego termina cuando alguno de los jugadores coloca tres de sus símbolos alineados o ya no hay espacios vacíos en el tablero.
3. El jugador que consiga trazar primero una línea con tres de sus símbolos, ya sea vertical, horizontal o diagonal resulta ganador (véase Fig. 1).
4. Si el tablero es ocupado completamente, sin conseguir ninguna línea marcada para ninguno de los jugadores, entonces se declara empate (véase Fig. 2).

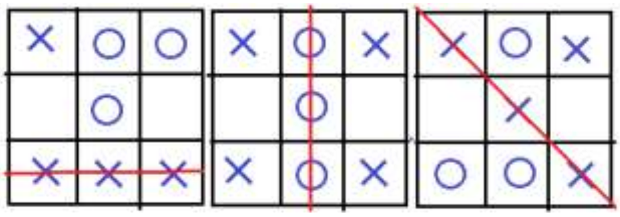


Fig. 1 Tres posibles jugadas ganadoras en el juego de gato

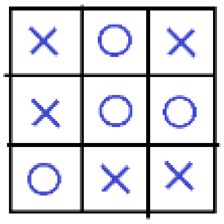


Fig. 2 Un ejemplo de un juego de gato terminado en empate

- **Sudoku**

El sudoku se juega sobre un tablero. El tablero tradicional es una cuadrícula de 9X9 casillas, casillas que a su vez están divididas en regiones de 3X3 casillas.

Al principio del juego, algunas de las celdas ya están llenas. El objetivo del juego es llenar las celdas vacías con números del 1 al 9 de modo que, en cada fila, en cada columna y en cada celda pequeña de 3x3, cada número aparezca solo una vez.

Fig. 2 Ejemplo de sudoku

Si se cree necesario, se puede dar un esquema de lo válido y no válido dentro del juego:

a) El número sólo puede aparecer una vez por fila

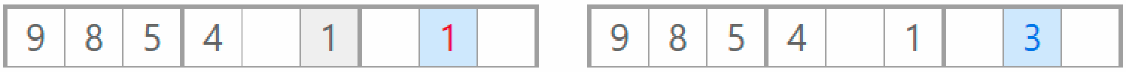


Fig. 3 Ejemplo no válido (izquierda) y válido (derecha)

b) El número sólo puede aparecer una vez por columna

Fig. 4 Ejemplo no válido (izquierdo) y válido (derecha)

c) El número solo puede estar una vez en cada celda pequeña de 3x3

Fig. 5 Ejemplo no válido (izquierdo) y válido (derecha)

- **Cuadrado mágico**

Un cuadrado mágico es un cuadrado de **3 x 3**, o de **4 x 4**, o en general, de **n x n**, en el que se acomodan ciertos números de manera que no se repitan por columnas o filas y que además cumplen que la suma de cualquier renglón, la suma de cualquier columna y la suma de cualquiera de cualquiera de las dos diagonales es siempre la misma, a este número se le llama **constante mágica.**

Para cada cuadrado de **n x n**, habrá **n**^{2} casillas y los números que se tendrán que acomodar serán del 1 a **n**^{2}.

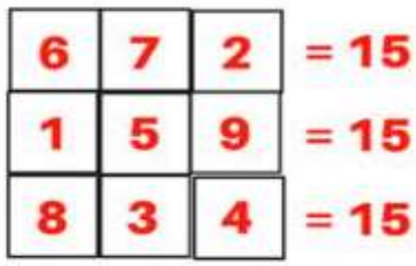


Fig. 6 Ejemplo de cuadrado mágico con constante mágica igual a 15

- **Ken ken**

Consiste en una cuadrícula, en general, de **n x n** dividida en grupos llamados jaulas o regiones. Las regiones vienen en diferentes tamaños: 1, 2, 3 y a veces hasta **n** cuadrados. Cada región indica el número al que se debe llegar y la o las operaciones que deben usarse.

La tarea es llenar la cuadrícula (**n x n**) usando solamente los números 1, 2, 3… n, de tal manera que:

a) Cada número aparezca sólo una vez por fila.
b) Cada número aparezca sólo una vez por columna.
c) Cada número aparezca sólo una vez por región.
d) Los números en cada región, al combinarse con la operación dada, den por resultado el número al que se debe llegar.

La Fig. 7 muestra un ejemplo de un ken ken resuelto de manera correcta

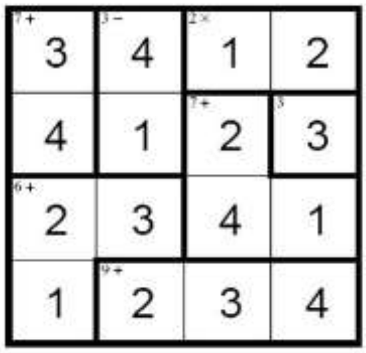


Fig. 7 Ejemplo de Ken ken de 4x4

Preguntas:

¿Qué estrategia usaste para ganar/resolverlo? ¿Habrá una estrategia “ideal”?
¿La solución será única?, Si es así ¿Qué condiciones iniciales deben darse para que la solución de cualquier sudoku sea única?
¿Alguno de los dos jugadores tiene ventaja?

Dinámicas útiles

- **Gato tridimensional** [16]

Es una variante en tres dimensiones del gato tradicional. Se juega entre dos personas el objetivo es ganar obteniendo tres X o O seguidas de forma diagonal, horizontal o vertical.

[16] En el apéndice se puede encontrar una plantilla para jugar Gato tridimensional en papel

El truco es que, en lugar de una cuadrícula de nueve cuadrados, se tienen tres cuadrículas de nueve cuadrados apiladas una encima de otra. Algunos ejemplos de cuadriculas, se muestran en la Fig. 8 y Fig. 9.

Fig. 8 Adaptación de tablero de gato tridimensional. Recuperado de https://www.legler-online.com/es/tic-tac-toe-quot-3d-quot.html

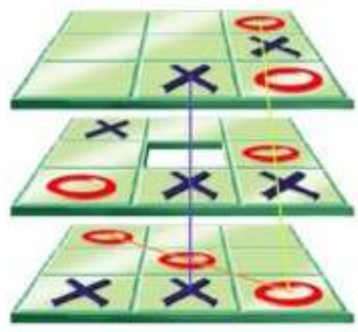


Fig. 9. Tablero de gato tridimensional sin la casilla central.

- **Gato en superficie cilíndrica**

Es un juego con las mismas reglas del gato tradicional pero donde se intercambiará su tablero cuadrado estándar con uno sobre un tubo de papel; se puede jugar marcando los lados que se pegarían para hacer el tubo, también llamado, cilindro.

Para ello, se propone una configuración inicial dada por resolver individualmente. Aquí presentamos 2 retos, véase Fig. 10 y Fig. 11. La o el tallerista puede proponer algunos más.

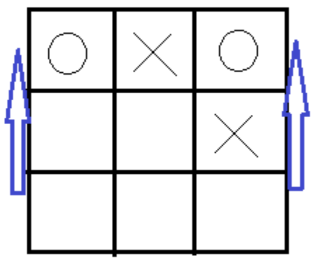


Fig. 10 Reto 1

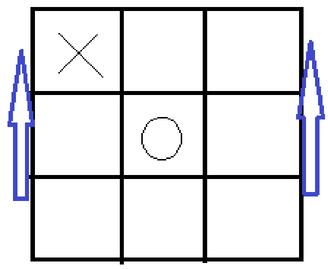


Fig. 11 Reto 2

En la Fig. 12 se muestra una jugada ganadora para el jugador para el jugador: X.

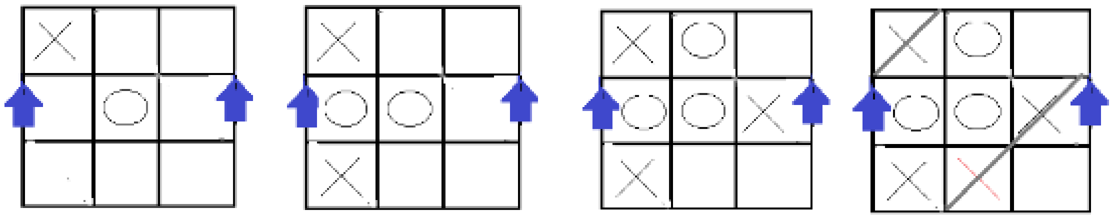


Fig. 12. Victoria para X en una jugada ideal. El movimiento ganador se muestra en rojo y la línea ganadora está marcada en gris.

➢ Cuadrado Latino

Un cuadrado latino es una cuadrícula de **n x n** en el que en cada cuadrado (entrada) se colocan los números del **1** al **n**, aunque los elementos de la cuadrícula pueden ser n símbolos cualesquiera, por ejemplo, letras del alfabeto, figuras, cifras e incluso colores., de tal forma que cada elemento aparezca una, y solo una vez, en cada fila y columna.

A diferencia de los cuadrados mágicos, en estos retos no hay necesidad de hacer operaciones aritméticas.

1	2	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1
2	1	3	4

Fig. 13 Cuadrado Latino de números

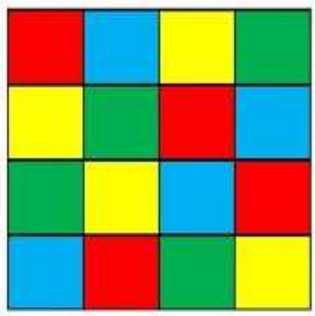


Fig. 14 Cuadrado Latino de colores

➢ Kid Sudoku

Es la variante más sencilla del Sudoku, pensada para que practiquen los más pequeños. Tiene una cuadrícula de 4×4 casillas, divididas en cuatro regiones de 2×2. El objetivo del sudoku es que dada la cuadrícula se le pida al participante completar el tablero con las diferentes figuras de manera tal que estas figuras no se repitan en una misma fila, columna o región de 2×2 cuadrados.

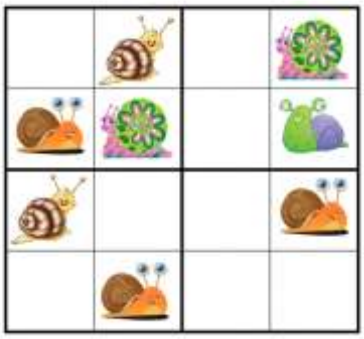


Fig. 15 Ejemplo de Kid Sudoku. Obtenido de https://www.tuexperto.com/2017/08/01/sudoku-mas-de-350-imagenes-para-jugar-e-imprimir/

Otra dinámica, sobre todo para los más pequeños, es proporcionar a las niñas y los niños la cuadrícula y por aparte las imágenes, las cuales deben colocar sobre la cuadrícula siguiendo las reglas del sudoku.

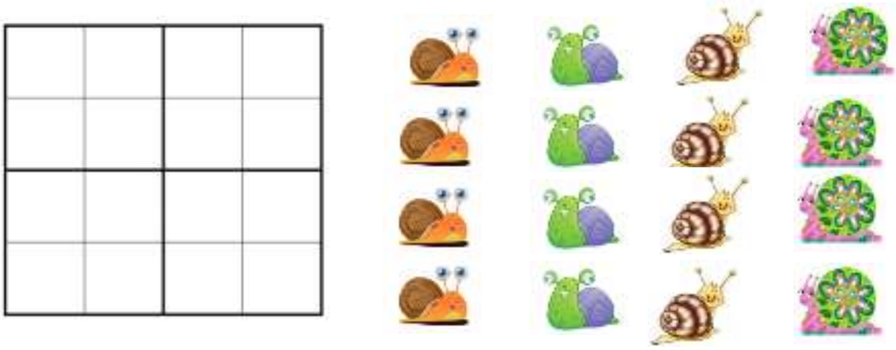


Fig. 16 Ejemplo de dinámica útil para niñas y niños

- **Sudoku principiante**

Para los que se inician en este reto se tiene una cuadrícula de 4×4 casillas, divididas en cuatro regiones de 2×2. El objetivo es completar las casillas vacías con dígitos del 1 al 4, sin que se repitan en una misma fila, columna o región de 2×2. véase Fig. 17

Si se desea hacer más llamativo, se puede cambiar los números por figuras o colores. La Fig. 18 muestra un ejemplo de sudoku con colores, en este quien participa debe colorear cada casilla con el color que corresponda siguiendo las reglas del sudoku ya antes mencionadas. En la Figura 19, se muestra un ejemplo de sudoku en el que además de tomar en cuenta los colores, quienes participan también debe de percatarse de la figura geométrica utilizada.

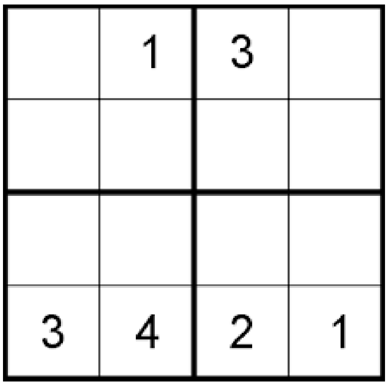


Fig. 17 Ejemplo de sudoku números. Imagen obtenida de https://pdst.ie/sites/default/files/sudoku%20workbook%20final.pdf

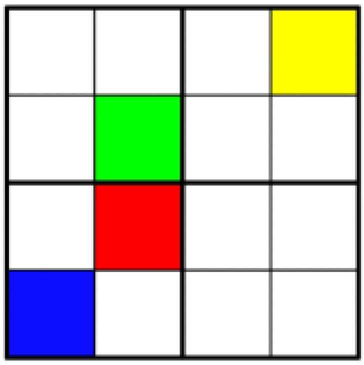


Fig. 18 Ejemplo de sudoku colores. Obtenido de https://matematicinfantil.wordpress.com/2017/09/19/sudoku-de-colores/

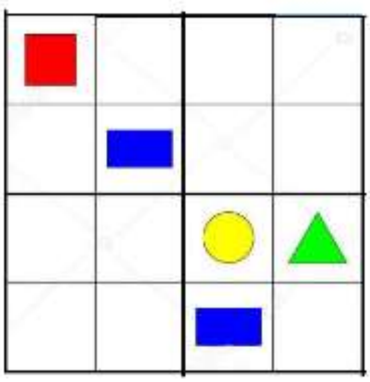


Fig. 19 Ejemplo de sudoku figuras y colores. Imagen obtenida de https://mx.depositphotos.com/221324504/stock-illustration-sudoku-game-pictures-geometric-shapes.html

- **Megasudoku**

Son los sudokus habituales, pero de cuadrículas de 12×12 o 16×16 en la que las regiones son asimétricas, debiéndose rellenar todas las casillas de una cuadrícula vacía de forma que, en cada columna, fila y en cada una de esas regiones asimétricas se coloquen los dígitos del 1 al 12 o al 16, sin repetir ninguno. Véase Fig. 20

Al igual que en el anterior, si se desea que el sudoku sea más llamativo se pueden cambiar los números por figuras. Véase Fig. 21.

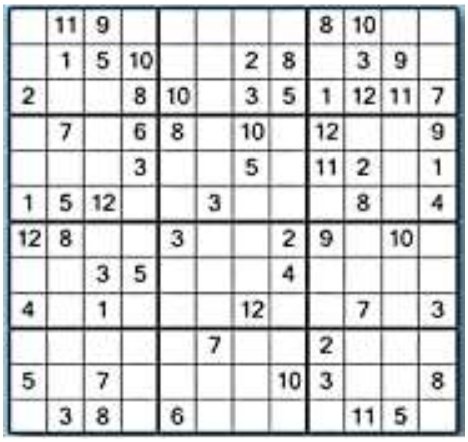


Fig. 20 Sudoku números. Imagen obtenida de https://www.websudoku.com/syndication.php

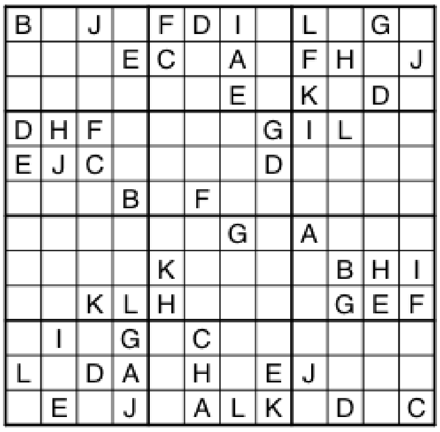


Fig. 21 Sudoku con letras. Imagen obtenida de https://www.websudoku.com/syndication.php

➢ Logi-5

Es un sudoku habitual con cuadrícula de 5X5 donde el objetivo del juego es rellenar todas las casillas vacías de forma que cada columna, fila y región se coloquen los dígitos del 1 al 5, sin repetir ninguno, la diferencia es que la forma de cada región es un pentominó.

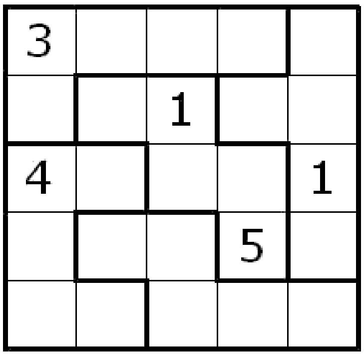


Fig. 22 Ejemplo de Logi-5. Imagen obtenida de http://pentomino.classy.be/pipuzzele.html#

➢ Cuboku o Sudokube

Se trata de una variante que consiste en la combinación de un sudoku con uno de los rompecabezas más populares en el mundo, el Cubo Rubik. El propósito de este juego es el mismo que en el cubo Rubik pero con el objetivo adicional de resolver los sudokus que oculta (uno por cada cara). Para poder resolver los seis sudokus que aparecen, es necesario que las caras del cubo están ordenadas de forma que todos los dígitos que aparecen en una cara miren hacia el mismo lado, lo cual solo se consigue resolviendo el cubo Rubik previamente a la resolución de los sudokus.

Fig. 23 Sudokube. Imagen obtenida de https://www.speedcuberperu.com/catalogo/comprar-3x3-cuboku/

➢ **Sujiko**

El tablero del sujiko es una cuadrícula 3 x 3, con cuatro espacios circulares colocados en las cuatro intersecciones de las líneas horizontales y verticales de la cuadrícula, en los cuales hay escritos cuatros números (S1, S2, S3 y S4). El objetivo del pasatiempo es colocar los números del 1 al 9 en las celdas, aunque puede haber ya alguno colocado, como pista, de forma que la suma de los números que estén en los recuadros alrededor de cada círculo es exactamente el número escrito en el mismo. Véase Fig. 24.

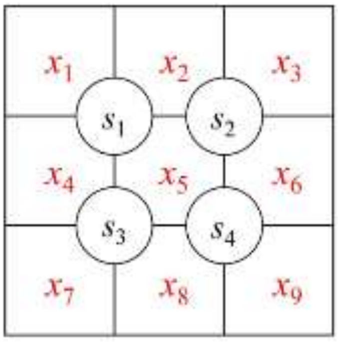


Fig. 24 Imagen ilustrativa de Sujiko

Información complementaria:

- ✔ El juego del gato es popular en diferentes partes del mundo es por ello que tiene diversos nombres como, por ejemplo, Tic tac toe, Ceros y Cruces, Tres en línea, Tres en raya, Ta Te Ti (Tatetí), Triqui Traka, entre otros nombres más.

- ✔ En el juego del gato se puede comprobar, siguiendo las distintas jugadas con algún tipo de diagrama (diagrama de árbol, por ejemplo), que, a cada nueva jugada del primer jugador, el segundo tiene siempre disponible una respuesta de bloqueo. Recíprocamente, se puede ver también que por cada jugada de quien no haya empezado el juego, el primer jugador también tiene disponible una respuesta de bloqueo. Así tenemos dos casos:

    - Ganar o empatar al empezar primero

    - Empatar al ser el segundo en tirar

Viendo que, en este juego, el primer jugador tiene ventaja, pero si el segundo jugador responde con una estrategia de ataque. Es decir, los dos jugadores juegan sin equivocarse, siempre se acaba en “empate”. En la Fig. 25 se muestra un ejemplo de dicho análisis.

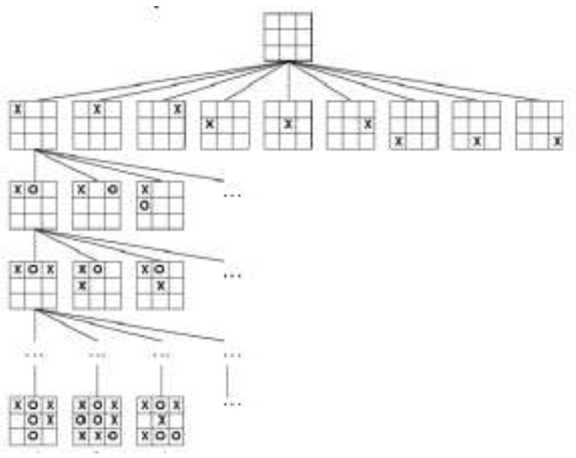


Fig. 25 Análisis de las posibles jugadas en el juego de gato. Extraída de https://es.slideshare.net/LeonardoDaVinciMX/gato-tic-tactoe

- En la página de Proyecto Arquímedes del Dr. José Luis Abreu León hay un apartado en el que se puede intentar programa y crear su propio juego del gato. El línk es el siguiente:
  https://arquimedes.matem.unam.mx/mati/actividades/actividad_gato/index.html

- El matemático Leonhard Euler en el siglo XVIII al establecer las pautas para el cálculo de probabilidades para representar una serie de números sin repetir, indirectamente fue quien creó el juego de Sudoku.

  Aunque otras fuentes indican que el origen del sudoku surgió a finales de los años 1970 en New York, cuando la revista *Math Püzzles and Logic Problems*, una revista especializada en rompecabezas matemáticos y problemas lógicos, publicó un juego llamado “Number Place” (el lugar de los números), considerada como la primera versión del sudoku.

Posteriormente en 1984, Nikoli, una empresa japonesa especializada en pasatiempos para revistas y periódicos, exportó ese juego a Japón para publicarlo en el periódico *Monthly Nikolist* bajo el nombre de “Suji wa dokushin ni kagiru”, que se puede traducir como “los números deben estar solos”. Fue así como después el juego fue abreviado hasta su nombre actual Sudoku (su=número, doku=solo, número solo). De esa forma y tras algunas variaciones tomadas hasta dar con la fórmula de hoy en día, el sudoku se extendió por Japón y comenzó su salto al resto del mundo.

- ✔ Página para jugar sudoku en línea
https://sudokutable.com/?_r=0.7533112407305196

- ✔ Página para jugar ken ken en línea
http://www.kenkenpuzzle.com/

Referencias:

Weeks, J. *La forma del espacio. Cómo visualizar superficies y variedades tridimensionales*. (García, L., Sousa, G. Trad.). México: Facultad de Ciencias, UNAM. (Obra original publicada en 1985).

Gardner, M. (1985). *Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas.* España: Labor.

Paenza, A. (2007). *Matemática... ¿Estás ahí?* Episodio 3,14. Siglo Veintiuno Editores. Colección “Ciencia que Ladra...”

D´Andrea, C. (s.f). *Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras*. octubre 10, 2022. Sitio web: http://www.ub.edu/arcades/D'Andrea.pdf

Higgins, M. C. (2009). *Sudoku* [PDF]. Junior Certificate School Programme Support Service. Consultado en https://pdst.ie/sites/default/files/sudoku%20workbook%20final.pdf

Pegg, Ed, Jr. (2005). *Math Games: Sudoku Variations.* The Mathematical Association of America. Disponible en https://web.archive.org/web/20051003205240/http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_09_05_05.html

Ibáñez, R. (2020). *Rompecabezas matemáticos con números*. octubre 15, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: https://culturacientifica.com/2020/10/21/rompecabezas-matematicos-con-numeros/

Ibáñez, R. (2020). *Más rompecabezas matemáticos con números*. octubre 15, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica.Sitio web: https://culturacientifica.com/2020/11/04/mas-rompecabezas-matematicos-con-numeros/

Portal Académico CCH. *Cuadrados mágicos.* octubre 13, 2022. Sitio web: https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1/unidad1/OpNumerosEnteros/cuadrosMagicos

Jugando con Palillos y más

Descripción:

En este apartado se presentan algunos juegos que requieren solo de palillos de dientes para ser jugados. Por la sencillez del planteamiento y del material utilizado, que puede fácilmente sustituirse por cerillos, palitos de madera, popotes o simplemente dibujos de acuerdo a la edad de los participantes, es un buen ejercicio mental para todas las edades.

Se plantean 3 categorías diferentes: juegos de posición o transformación, juegos de construcción y Juegos para inferir. En cada categoría se trabaja un objetivo diferente y se presentan varios retos.

Objetivo:

Desarrollar en las y los participantes el pensamiento geométrico, el razonamiento lógico, la inteligencia visual espacial, el planteamiento y desarrollo de una estrategia para resolución del problema presentado y el conteo. Así como propiciar un espacio para que las y los participantes potencien y desarrollen sus capacidades para la observación, el descubrimiento, la imaginación, la creatividad y la reproducción de un modelo. Además, se pueden recordar propiedades de las figuras geométricas (qué es un cuadrado, qué es un triángulo, entre otras).

Edad: 7 años en adelante

Duración: 30 minutos

Material:

Palillos (de dientes o manualidades), popotes o cerillos[17].

Tarjetas con los retos

Plastilina*

Capacidad máxima: 2 personas por reto

[17] *En el caso de trabajar con niños pequeños, por seguridad se recomienda cortar el extremo inflamable de los cerillos.*

Procedimiento:

Para realizar la actividad es necesario estar sobre una superficie plana. Es importante recalcar que no es válido cortar alguno de los palillos ni encimarlos. Al realizar cada reto no debe sobrar ningún palillo ni tampoco se pueden utilizar palillos de más.

A continuación, se deja un listado de actividades, no es necesario que la o el participante realice todas, puede elegir las que les parezca más llamativas.

En principio las actividades están divididas en 3 categorías:

Juegos de posición o transformación.

En esta sección presentaremos una serie de retos que consisten en que, de entre dos modelos de figuras formadas por palillos, más o menos difíciles, replicar la primera figura para luego modificarla (quitando, agregando o moviendo de lugar algún o algunos palillos) hasta conseguir como resultado la segunda figura.

Para apoyar a la o el facilitador se muestra la solución a la derecha de la figura modelo.

- **Retos de movimiento**. Consisten en obtener la figura deseada **moviendo** un número determinado de palillos.

1. De la Fig. 1 mover cuatro palillos de tal modo que queden cuatro cuadrados del mismo tamaño.

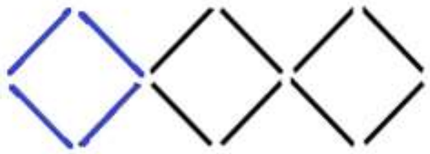


Fig. 1 Reto

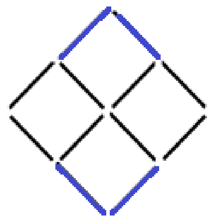


Fig. 1 Solución

2. Esta llave Fig. 2 puede transformarse en tres cuadrados de igual tamaño al mover cuatro palillos. ¿Cuáles son los cuatro palillos que se deben mover?

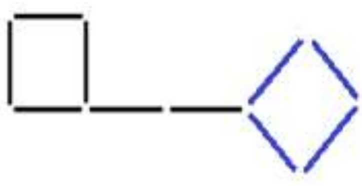


Fig. 2 Reto

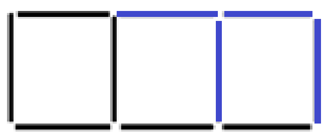


Fig. 2 Solución

3. ¿La casa de la Fig. 3 puede transformarse en dos casitas al mover sólo un palillo?

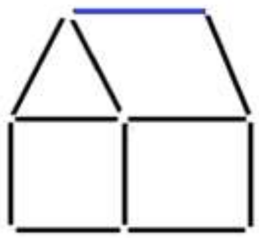


Fig. 3 Reto

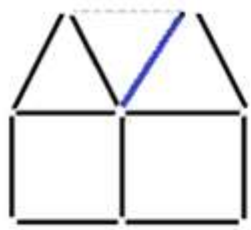


Fig. 3 Solución

4. ¿Cómo puede voltearse el perro de la Fig. 4 al mover solo un palillo?

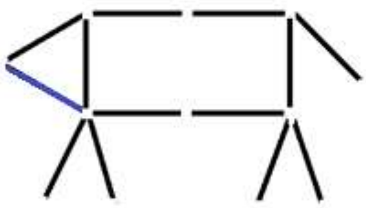


Fig. 4 Reto

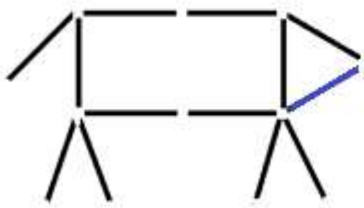


Fig. 4 Solución

5. ¿Es posible hacer que el pez de la Fig. 5 nade en dirección contraria, moviendo solo tres palillos?

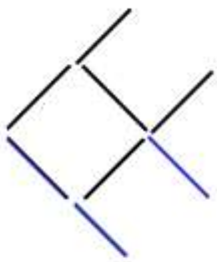


Fig. 5 Reto

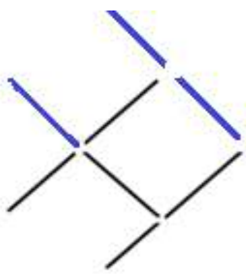


Fig. 5 Solución

6. De la Fig. 6 cambiar de lugar tres de los trece palillos de modo que queden formados tres cuadrados del mismo tamaño.

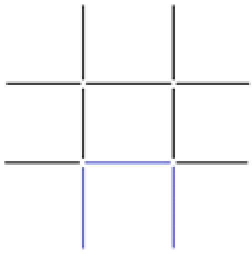


Fig. 6 Reto

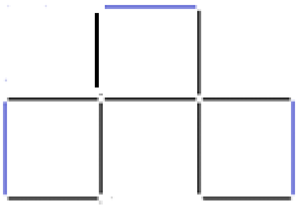


Fig. 6 Solución

7. ¿Es posible mover dos palillos para dejar la estrella[18] fuera de la pala? Véase la Fig. 7

Observación: La pala puede quedar en cualquier dirección, pero sí debe conservar la forma original.

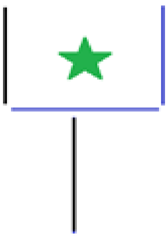


Fig. 7 Reto

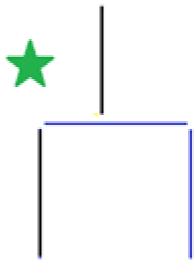


Fig. 7 Solución

8. Mover dos palillos para que la Fig. 8 solo tenga dos triángulos

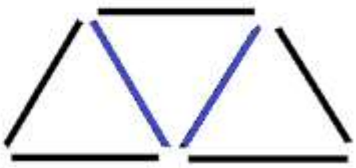


Fig. 8 Reto

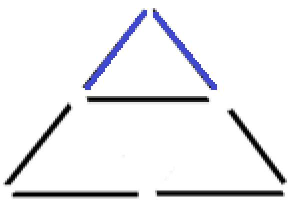


Fig. 8 Solución

[18] La estrella puede sustituirse por cualquier objeto que se tenga a la mano.

9. Invertir el patrón de la Fig. 9 al mover solo cuatro palillos

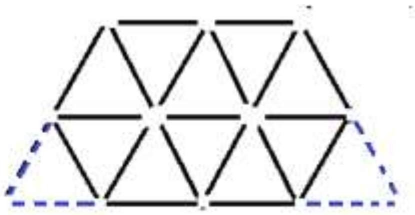


Fig. 9 Reto

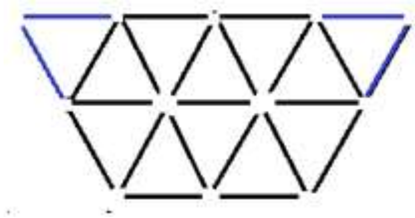


Fig. 9 Solución

10. Convertir los dos rectángulos de la Fig. 10 en dos cuadrados al mover solo dos palillos

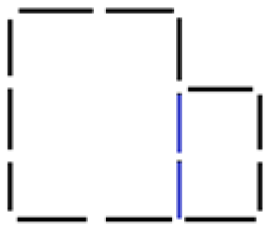


Fig. 10 Reto

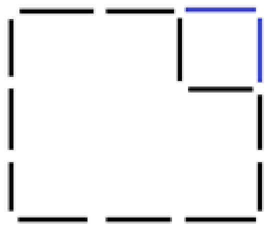


Fig. 10 Solución

11. El triángulo equilátero de la Fig.11 puede transformarse en cinco triángulos equiláteros al mover cinco palillos. ¿Cuáles palillos deberán moverse?

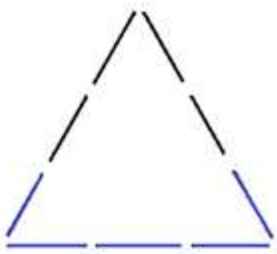


Fig. 11 Reto

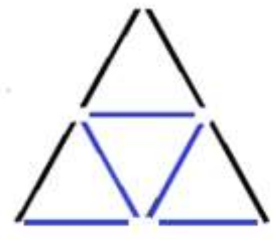


Fig. 11 Solución

12. De la Fig. 12 cambiar de lugar cuatro de los doce palillos de modo que queden formados cinco rombos

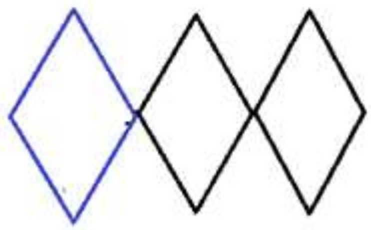


Fig. 12 Reto

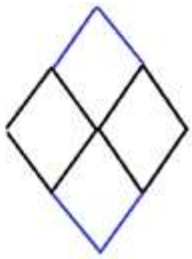


Fig. 12 Solución

13. De la Fig. 13 obtener tres triángulos moviendo solo 4 palillos.

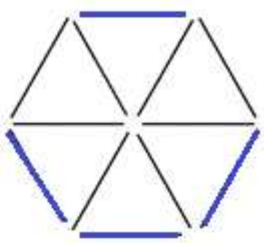


Fig. 13 Reto

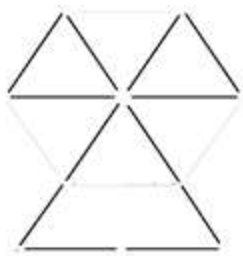


Fig. 13 Solución

14. La siguiente lámpara de mesa se puede transformar en cinco triángulos al mover tres palillos. Véase la Fig. 14

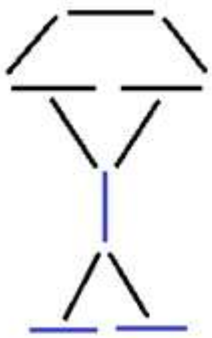


Fig. 14 Reto

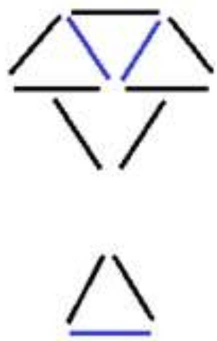


Fig. 14 Solución

15. Transformar la siguiente Fig. 15 en seis diamantes al mover solo seis palillos

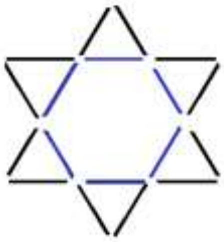


Fig. 15 Reto

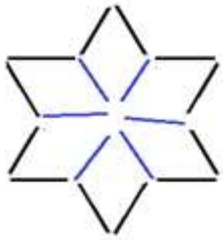


Fig. 15 Solución

16. Convertir la Fig. 16 en una figura compuesta por tres rombos moviendo solo tres palillos de lugar.

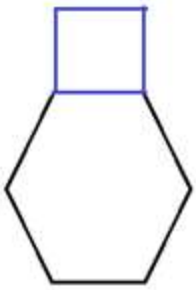


Fig. 16 Reto

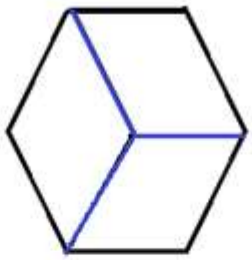


Fig. 16 Solución

- **Retos de quitar**. Consisten en obtener la figura deseada **quitando** un número determinado de palillos.

1. De la Fig. 17 Quitar dos palillos de modo que queden solo dos cuadrados

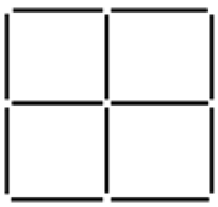


Fig. 17 Reto

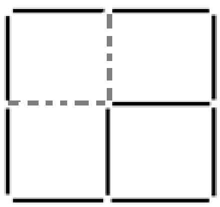


Fig. 17 Solución

2. De la Fig. 18 quitar cuatro palillos de modo que se forme cuatro triángulos

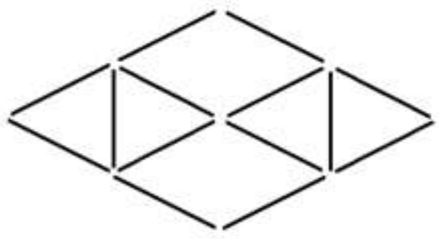


Fig. 18 Reto

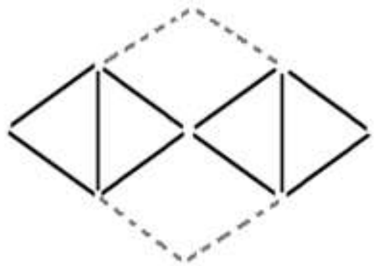


Fig. 18 Solución

3. Dados diecisiete palillos ordenados como en la Fig. 19, quita cinco del total de palillos de modo que queden tres cuadrados

Fig. 19 Reto

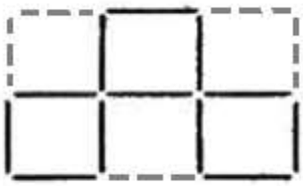


Fig. 19 Solución

4. Transformar la Fig. 20 en seis triángulos equiláteros al quitar tres palillos.

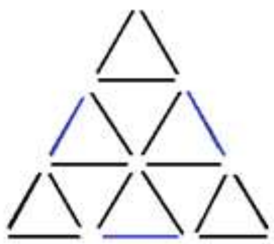


Fig. 20 Reto

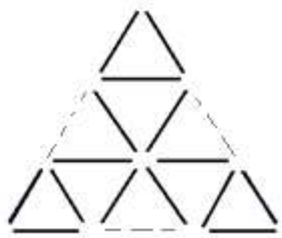


Fig. 20 Solución

5. La Fig. 21 contiene nueve triángulos, se deben quitar seis palillos de manera que queden sólo cuatro triángulos iguales.

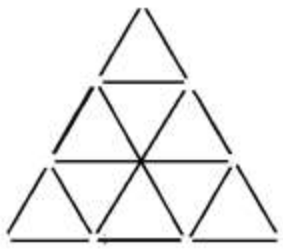


Fig. 21 Reto

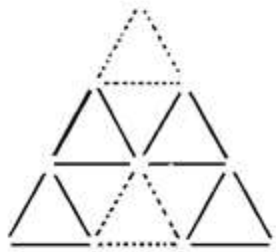


Fig. 21 Solución

6. De la Fig. 22 quitar tres palillos para formar tres triángulos.

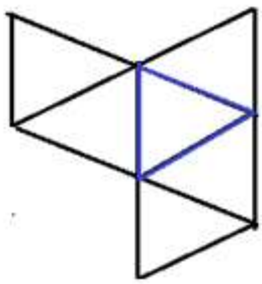


Fig. 22 Reto

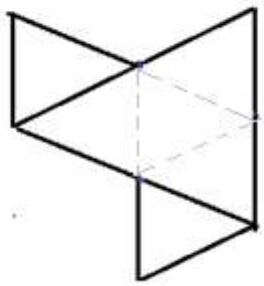


Fig. 22 Solución

7. De la Fig. 23 separar nueve palillos, de modo que no quede ninguno de los cuadrados, grandes ni pequeños, que la constituían.

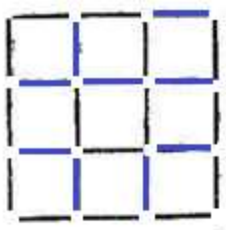


Fig. 23 Reto

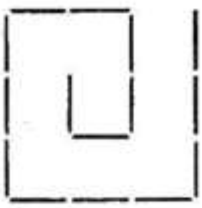


Fig. 23 Solución

8. De la Fig. 24 quita ocho palillos de manera que el patrón continúe siendo simétrico y contenga cuadrados

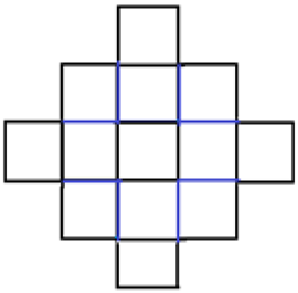


Fig. 24 Reto

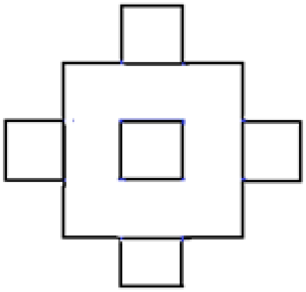


Fig. 24 Solución

9. De la Fig. 25 quitar cuatro palillos para obtener cinco cuadrados
Observación: se tiene más de una solución.

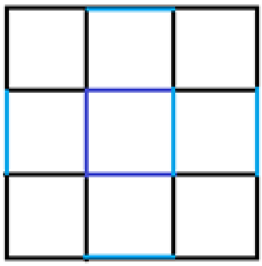


Fig. 25 Reto

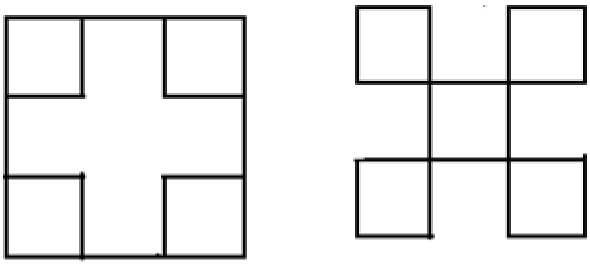


Fig. 25 Solución

10. ¿Cómo se puede transformar la Fig. 26 en dos cuadrados al quitar ocho palillos?
Observación puede haber más de una solución

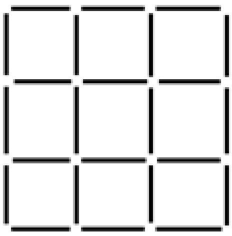


Fig. 26 Reto

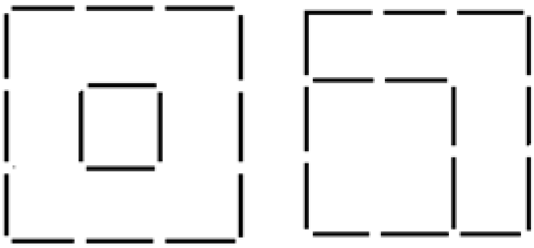


Fig. 26 Solución

Juegos para construir

Esta sección consiste en construir figuras geométricas planas y/o espaciales, ayudándose de bolitas de plastilina, para ver los conceptos de vértice, arista y cara, así como polígonos y poliedros regulares e incluso prismas y pirámides.

- **Construir figuras planas**

1. Construye una figura compuesta de 3 palillos, 4 palillos, 5 palillos, 6 palillos, y más. Vale la pena tomar más tiempo en la construcción de figuras con 4 palillos para analizar la mayor cantidad de figuras distintas que se pueden realizar.
   La o el facilitador puede apoyarse de tarjetas como las que se muestran en la Fig. 27 para los más pequeños.

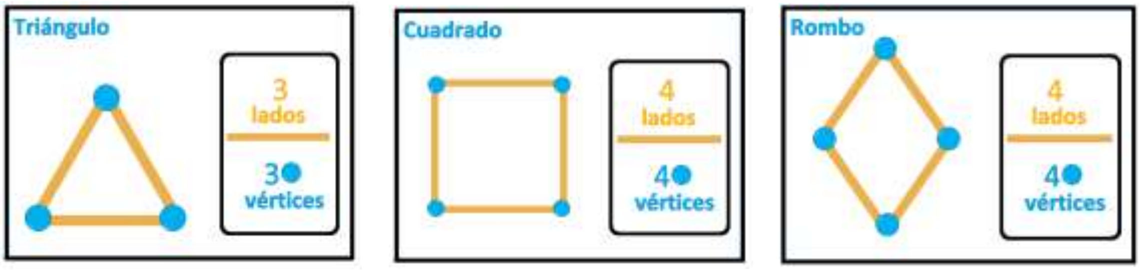


Fig. 27 Ejemplos de tarjetas

- **Construir figuras espaciales**

Con los mismo palillos y plastilina se pueden realizar ahora figuras con volumen; Se podría empezar por los poliedros regulares para después si el tiempo lo permite seguir con pirámides y prismas.

Para iniciar con la actividad, una manera es haciendo la siguiente pregunta: Usando 6 palillos, ¿Será posible construir cuatro triángulos iguales?, después de intentarlo un rato las y los participantes dirán que no es posible construir los triángulos pedidos, entonces la o el tallerista les proporciona cuatro bolitas de plastilina y les preguntará ¿Será posible construir cuatro triángulos iguales con seis palillos y cuatro bolitas de plastilina?

Es este momento, las y los participantes se darán cuenta que el problema no se puede resolver si se pretende colocar los palillos en un solo plano (como lo que estábamos haciendo anteriormente), pero que con las bolitas de plastilina pueden generar una figura (con volumen) compuesta de cuatro triángulos. Véase Fig. 28

Fig. 28 Construcción de un tetraedro usando gomitas y palillos

Otra estrategia, es usar de nuevo tarjetas que muestren la imagen del poliedro a construir, de esta manera las y los participantes estarán desarrollando su percepción visual. Véase Fig. 29.

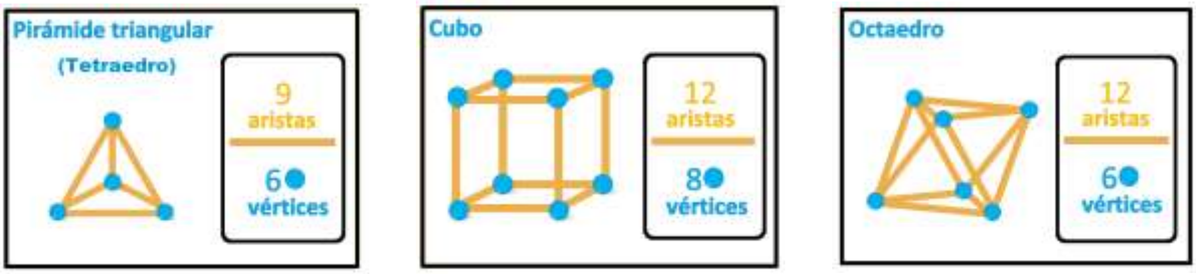


Fig. 29 Ejemplos de tarjetas para la construcción de poliedros.

Juegos para inferir

Siguiendo con el uso de palillos en esta sección se muestran algunas actividades donde el objetivo general es que las y los participantes analicen las situaciones planteadas y logren deducir o inferir algún método para dar solución a los problemas.

- **Encontrar la solución**

1. Un granjero posee un terreno en forma de L, véase Fig. 30, que desea repartir entre sus cuatro hijos, de tal modo que cada uno de sus hijos tuviera una sola pieza que sea del mismo tamaño y la misma forma que las otras. ¿Cómo puede dividir el granjero su terreno?

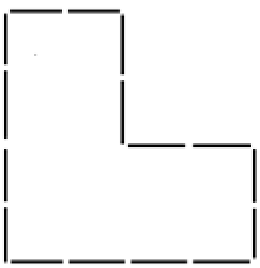


Fig. 30 Reto

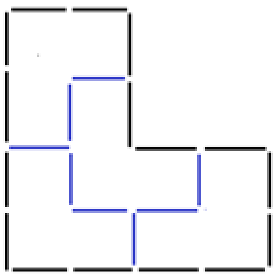


Fig. 30 Solución

2. ¿Cómo puede dividirse el patrón de la Fig. 31 en cuatro figuras idénticas al agregar cinco palillos?

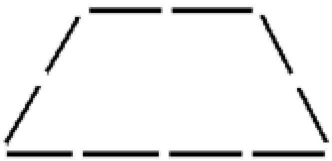


Fig. 31 Reto

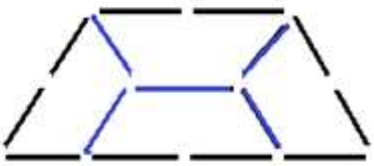


Fig. 31 Solución

- **¿cuántos palillos tendrá la siguiente figura?**

  La o el participante, a través de la observación deberá inferir el número de palillos necesarios para la construcción de la siguiente figura, siguiendo la sucesión dada.

1. Observa la Fig. 32 y contesta las siguientes preguntas:
La primera figura está formada por _ _ _ palillos

La segunda figura está formada por _ _ _ palillos

La tercera figura está formada por _ _ _ palillos

La cuarta figura está formada por _ _ _ palillos

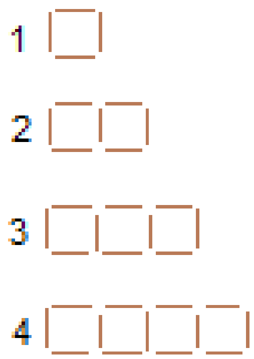


Fig. 32 Reto

Siguiendo la secuencia de cuadrados, ¿cuántos palillos tendrá una figura que está formada por 10 cuadrados? ¿y con 18? ¿y con 100 cuadrados?

2. Observa la Fig. 33 y contesta las siguientes preguntas:
La primera figura está formada por _ _ _ palillos

La segunda figura está formada por _ _ _ palillos

La tercera figura está formada por _ _ _ palillos

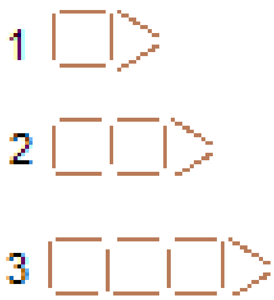
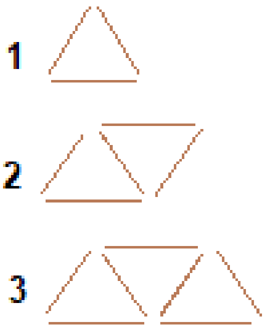


Fig. 33 Reto

Siguiendo la secuencia,
¿cuántos palillos tendrá una figura que está formada por 6 cuadrados? ¿Y con 12? ¿y con 100 cuadrados?

3. Observa la Fig. 34 y contesta las siguientes preguntas:



La primera figura está formada por _ _ _ palillos

La segunda figura está formada por _ _ _ palillos

La tercera figura está formada por _ _ _ palillos

Fig. 34 Reto

Siguiendo la secuencia de cuadrados, ¿cuántos palillos tendrá una figura que está formada por 8 triángulos? ¿Y con 20? ¿Y con 100 triángulos?

- **Inferir o formular estrategias.** Por medio de juegos, se reta a la o el participante a desarrollar una estrategia para ser el ganador.

1. El juego de Nim

Es un juego de estrategia, para dos personas que consiste en retirar, alternativamente, palillos de un montón de 16 palillos[19] (acomodados como se muestra en la Fig. 35). Cada jugador retira, en su turno, uno o dos palillos del montón. Gana el juego el que consiga llevarse el o los últimos palillos del montón.

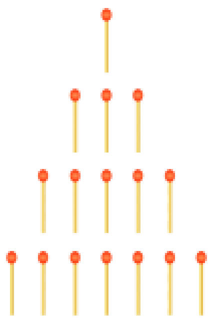


Fig. 35 El juego de NIM

[19] Los palillos se pueden sustituir por bolitas, piedras, fichas, dulces, cualquier objeto que se tenga a la mano.

2. Variante de Nim

Distribuye nueve objetos en tres filas como se ve en la Fig. 36. Los jugadores, por turnos, deben sacar uno o más objetos siempre que todas pertenezcan a la misma fila. Por ejemplo, un jugador podría sacar un objeto de la fila superior, o todos los objetos de la fila inferior. La persona que se ve obligada a tomar la última moneda, pierde.

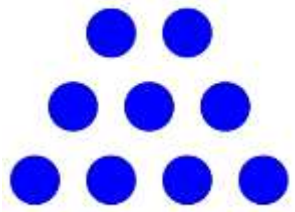


Fig. 36 Variante del juego de NIM

3. Nimbi

En el juego de Nimbi es para dos jugadores y en él hay varias hileras de igual número de objetos, tantas como se quiera, véase Fig.37. Por turnos, cada jugador puede tomar el número de objetos consecutivos que quiera. Es decir, no puede tomar ninguna hilera o columna entera, si en ella hay un hueco dejado por otro objeto retirado previamente. El que retira el último objeto gana la partida.

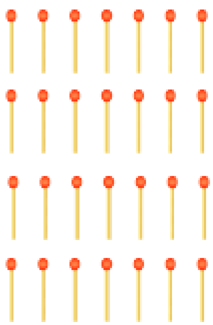


Fig. 37 El juego de Nimbi

Dinámicas útiles:

- Jugar a inventar sus propias estructuras. Para los más pequeños esta dinámica puede ser útil para desarrollar su creatividad e imaginación.

➢ Descripción de las figuras en parejas. Los dos participantes se colocan frente a frente con un obstáculo en medio, de tal manera que no puedan ver lo que hace cada uno. El tallerista describe cada figura (por medio de pistas) y cada participante hará su modelo de la figura descrita.

➢ Existen varios rompecabezas 3D con los cuales se trabaja con un tetraedro y un hexaedro. Aquí sugerimos dos muy llamativos para los participantes y fáciles de recrear con material en casa:

1. “La pirámide de bolas”

A partir de un número específico de piezas formadas por esferas pegadas una tras otra, armar un tetraedro o pirámide, como en la Fig. 38, sobreponiendo las piezas dadas, sin desarmar ninguna de las piezas dadas.

Fig. 38 Pirámide armada

De este reto, existen dos versiones:

- Pirámide de 4 piezas. Las piezas utilizadas en este rompecabezas se pueden ver en la Fig. 39

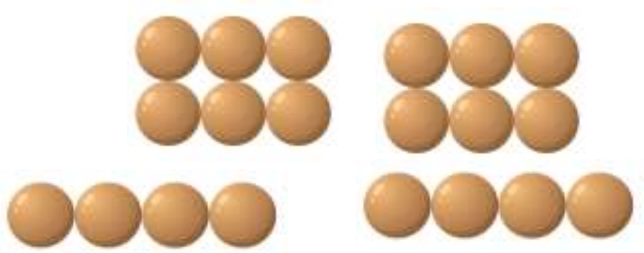


Fig. 39 Piezas para armar la pirámide

- Pirámide de 6 piezas. Las piezas que conforman este rompecabezas se pueden observar en la Fig. 40

Fig. 40 Piezas para armar la pirámide

2. Cubo Soma

El cubo soma tiene 7 piezas construidas por cubos pegados cara con cara, véase Fig.41. Cada pieza tiene entre 3 y 4 cubos y le se asocia una letra porque tiene parecido con la letra (valga la redundancia).

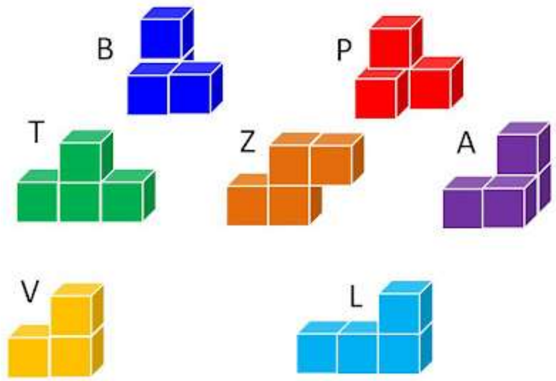


Fig. 41 Piezas para armar el cubo soma

Fig. 42 Cubo soma armado

Además, con las piezas del cubo soma, no solo se puede armar un cubo, si no que muchas más figuras. En la Fig. 43 podemos ver algunos ejemplos.

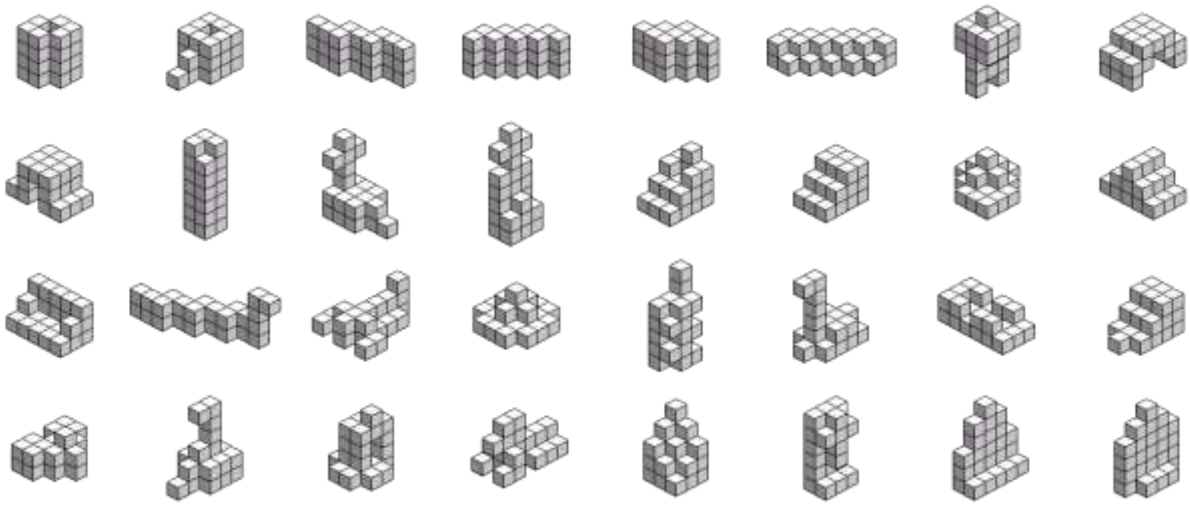


Fig. 43 Ejemplos de otras figuras que se pueden armar con las piezas del cubo soma

Información complementaria:

- A los poliedros regulares también se les conoce con el nombre de **sólidos platónicos** en honor a Platón (siglo IV a. de C.) que los cita en el *Timeo*, pero lo cierto es que no se sabe en qué época llegaron a conocerse.
  Para Platón los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares, asignando el *fuego al tetraedro* (*El fuego tiene la forma del tetraedro, pues el fuego es el elemento más pequeño, ligero, móvil y agudo)*, la *tierra al cubo* (el poliedro más sólido de los cinco), el *aire al octaedro* (Para los griegos *el aire, de tamaño, peso y fluidez, en cierto modo intermedios, se compone de octaedros)* y el *agua al icosaedro* (*El agua, el más móvil y fluido de los elementos, debe tener como forma propia o "semilla", el icosaedro, el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que con mayor facilidad puede rodar)*, mientras que el *dodecaedro el universo* (Como los griegos ya tenían asignados los cuatro elementos, dejaba sin pareja al dodecaedro. De forma un tanto forzada lo relacionaron con el Universo como conjunción de los otros cuatro: *La forma del dodecaedro es la que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos.* Dios lo utilizó para todo cuando dibujó el orden final).

- ✔ "Nim" es una palabra en inglés antiguo que significa "robar o llevarse". En una época se creyó que el juego de NIM era de origen chino, pero el nombre "Nim"

  le fue dado hasta 1901 por Charles Leonard Bouton, un profesor de Matemática de la Universidad de Harvard, que fue el primero en realizar su análisis completo.

- ✔ Nim puede jugarse con cualquier número de fichas dispuestas en cualquier número de filas. Y la generalización del juego de NIM es la siguiente:

  Dos jugadores disponen ante ellos de un montón de n objetos. Cada jugador retira, en su turno, un número de objetos entre uno y m (un mínimo de 1 y un máximo de m), m≤n. Gana el jugador que consiga llevarse el último objeto del montón.

- ✔ Para jugar Nim en línea visite: http://www.archimedes-lab.org/game_nim/play_nim_game.html

- ✔ Las piezas del cubo soma son conocidas como policubos. Un policubo es una figura formada de la unión de uno o más cubos iguales, de forma que cada uno de ellos tenga al menos una cara en común con algún otro cubo del conjunto (salvo en el caso trivial de un único cubo). Los policubos son los análogos tridimensionales de los poliminós (figuras obtenidas de unir uno o varios cuadrados del mismo tamaño de forma que cada par de celdas vecinas compartan un lado).

Referencias

Estalella, J. (2008). *Ciencia recreativa*. Cap. 2, Cuestiones geométricas. Barcelona. Consultado en http://www.librosmaravillosos.com/cienciarecreativa/index.html

Canaviri, P. F. *Jugando con fosforitos.* Consultado en https://orientacionsanvicente.files.wordpress.com/2012/05/juegos-matemc3a1ticos.pdf

Gardner, M. (1988). *Hexaflexagons and other mathematical diversions*. Chapter 15, Nim and Tac Tix; 151- 161. United States of America: University of Chicago Press.

(2006) *Matemáticas para la familia "Para aprender juagando"*

Gardner, M. (1987) *The Second Scientific American book of mathematical puzzles and diversions*. Chapter 1, "The five platonic solids", 13- 23. Chicago: The University of Chicago Press.

Ibáñez, R. (2014). *El cubo soma: diseño, arte y matemáticas*. septiembre 55, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: https://culturacientifica.com/2014/12/03/el-cubo-soma-diseno-arte-y-matematicas/

Cortando Cuadrados

Descripción:

Un recurso popular para abordar una gran cantidad de conceptos y problemas geométricos de manera visual es el Tangram, sin embargo, existen otras figuras que se pueden cortar en un número finito de piezas y que, reacomodando estas mismas piezas, ya sea usando traslaciones y/o rotaciones, se puede obtener otra figura, en particular un cuadrado. Esto es lo que se pretende mostrar con esta actividad, en la que las y los participantes podrán interactuar con el material para armar y desarmar diferentes polígonos, pero siempre llegar a un cuadrado, todo esto a modo de rompecabezas.

Objetivo:

Desarrollar en el participante conceptos matemáticos como polígonos, áreas y cuadratura de polígonos. Además del desarrollo de habilidades como la percepción visual, intuición, imaginación y el pensamiento lógico.

Edad: 10 años en adelante

Duración: 30 – 60 minutos

Material:

Material recortado de diferentes disecciones[20]

Plantillas del contorno de los polígonos a diseccionar[21]

Capacidad máxima: 2 persona por plantilla

Procedimiento:

En esta actividad se trata de que los participantes experimenten un poco. Para ello se les dará las piezas del reto a resolver y los moldes previamente ya marcados y recortados con

[20] Ver anexo

[21] Es opcional, sin embargo, para introducir a la actividad estas pueden ayudar.

una configuración inicial para después ellos intenten ver que otro polígono puede realizarse al reacomodar las piezas, en particular pedir que formen un cuadrado.
En la Fig. 2 se observan algunos ejemplos de disecciones de polígonos.

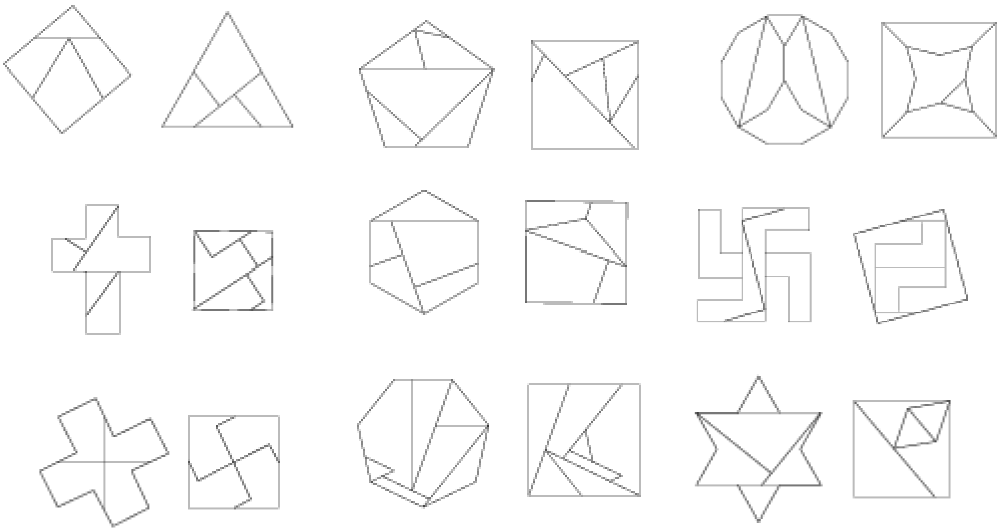


Fig. 2 Ejemplo de disecciones cuadráticas de figuras con solución

Preguntas:

Si cortamos en diferentes piezas un triángulo ¿será posible reacomodar dichas piezas para convertir el cuadrado en un pentágono? ¿O viceversa? ¿Qué pasa si lo intentamos con un pentágono? ¿Y un octágono?
En general, ¿Qué polígonos regulares podremos convertir a cuadrados mediante cortes?
¿Las figuras que acabas de formar tienen la misma forma? ¿Cambia el área? ¿y el perímetro?
¿Dos figuras podrían tener misma área, pero diferente forma?

Dinámicas útiles

- Como actividad introductoria, el tallerista puede proporcionar a los participantes un cuadrado (de lado 2 cm) y un triángulo equilátero (de base 2 cm y altura 4 cm.) y hacer ver que ambos polígonos tienen la misma área para después pedirles que piensen en alguna manera en la que puedan cortar el triángulo en un número (finito) de piezas de tal que al reacomodar dichas piezas se forme el cuadrado. Véase Fig. 3.

Esto se puede resolver mediante dos opciones

1. Proporcionar moldes y tijeras para dejar que los participantes lo intenten.
2. Dar molde (previamente hecho con piezas articuladas) de la cuadratura del triángulo.

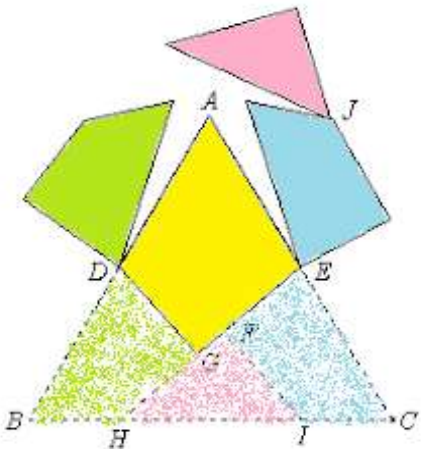


Fig. 3 Molde de la cuadratura del triángulo

- Para los más pequeños puede funcionar para repasar el nombre de los polígonos. A ellos es recomendable darles el molde con el contorno y las divisiones de cada pieza ya marcadas como en la Fig. 4 y Fig. 5.

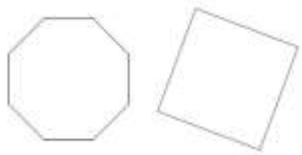


Fig. 4 Moldes del contorno de las figuras

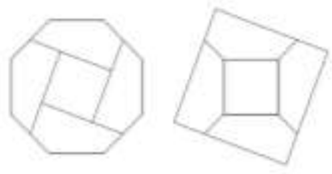


Fig. 5 Moldes del contorno de las figuras con la división de las piezas marcadas

- Como una dinámica introductoria se puede utilizar el Tangram[22], ya que a partir de un cuadrado cortado en 7 piezas se pueden construir una infinidad de figuras, entre ellas algunos polígonos regulares e irregulares, un ejemplo de ello son las siguientes 13

[22] Tangram es un rompecabezas chino tan rico que se puede explotar en más cosas, es por ello que en la parte de Apéndice se da alguna información complementaria al respecto.

figuras convexas, que fueron demostradas en 1942 dos matemáticos chinos, Fu Tsiang Wang y Chuan-Chih Hsiung. Véase Fig. 6

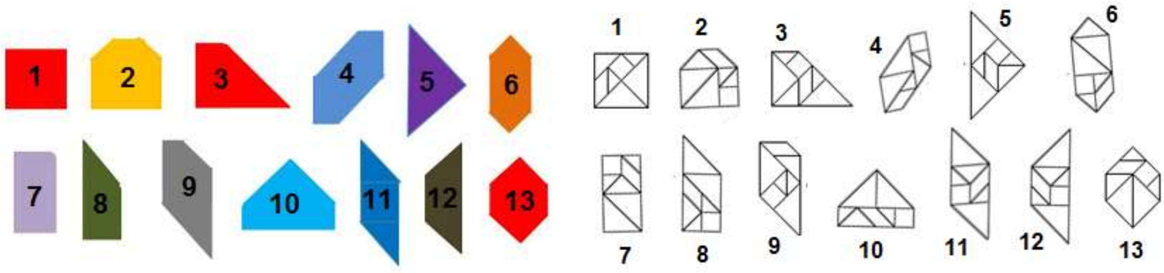


Fig. 6 Polígonos convexos construidos con Tangram. Imagen obtenida de http://juegos-de-mates-manuel.blogspot.com/2009/10/57bis-tangram-chino-y-poligonos.html

- También se pueden plantear otros problemas de disecciones geométricas en los que no necesariamente se tenga que llegar a un cuadrado. En la Fig. 7 se muestran algunos ejemplos.

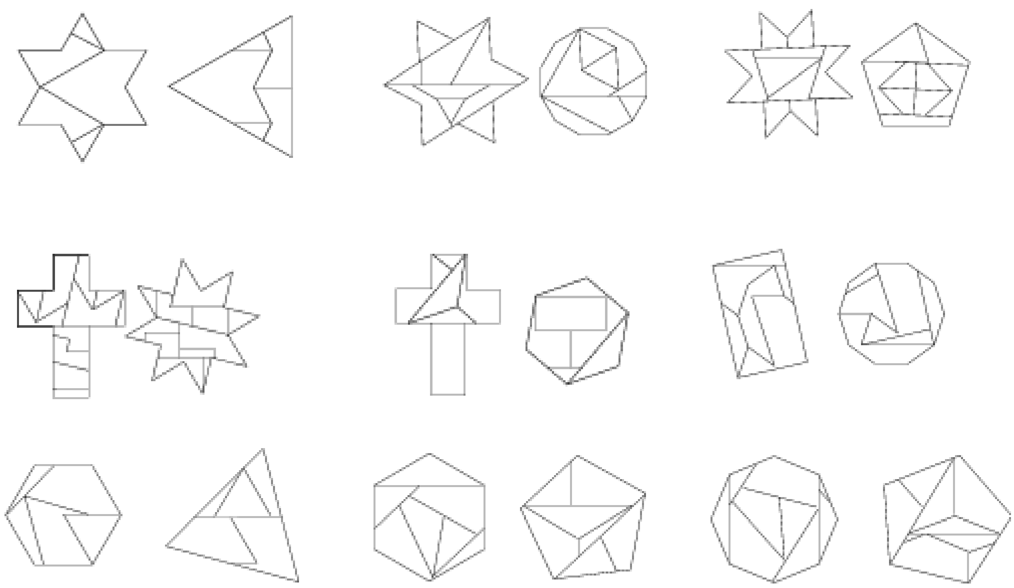


Fig. 7 Ejemplo de más disecciones de figuras con solución

Información complementaria

- ¿Y qué pasaría con el círculo?

Teóricamente si es posible, aunque físicamente no se pueda pues las piezas en las que hay que dividir el círculo no son posibles pues las piezas no son medibles.
Este problema se denomina Tarski's circle-squaring problem fue propuesto por Alfred Tarski en 1925 y demostrado por Miklós Laczkovich en 1990, cuya descomposición usa unas 10^{50} piezas.

- ¿Y con los poliedros?

En general un poliedro no puede ser diseccionado en otros poliedros.
Este problema es conocido como el Tercer problema de Hilbert[23] que dice:

> *Dados dos poliedros de igual volumen, ¿Es siempre posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede formado el segundo?*

Dehn demostró que no siempre es posible. Para ello introdujo el llamado, Invariante de Dehn, una cantidad que debería ser igual para los dos poliedros siempre que fuera posible pasar del uno al otro.

- Muestra por disección de polígonos del Teorema de Pitágoras[24]

Esta prueba es atribuida a Annairiz de Arabia (900 A.C) y se ve como los cuadrados de los catetos deben ser cortados y reacomodados para formar el cuadrado de la hipotenusa. Las piezas en los cuadrados sobre lo catetos deben encajar en el cuadrado de la hipotenusa y/o viceversa

---

[23] Problemas de Hilbert: es una lista de 23 problemas matemáticos compilada por el matemático alemán David Hilbert (1990 aprox.). En aquel momento todos los problemas planteados no tenían solución, actualmente, varios de los problemas ya fueron resueltos o demostrados.
De los 23 problemas el tercer problema fue el primero en ser resuelto.

[24] El Teorema de Pitágoras dice:
En cualquier triángulo rectángulo se cumple que la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
Si a y b representan los catetos y c la hipotenusa; tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$.

Como las áreas de estas figuras no cambian, podemos observar que cuando sumamos las áreas de los cuadrados de los catetos, obtenemos el área del cuadrado de la hipotenusa, con lo cual comprobamos el teorema de Pitágoras. Véase Fig. 7.

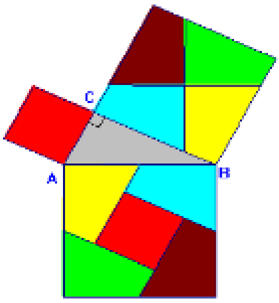


Fig. 7 Teo. De **Pitágoras** prueba con **Disecciones de cuadrados.** Imagen obtenida de http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm

Referencias

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. (2005). *"Cuadraturas de polígonos regulares"*, Suma, 48, pp. 65-68

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. (2011). *"Puzles de cuadraturas",* Suma 66, pp.43-46

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A (2010), *"Cuadraturas de cruces, letras y estrellas"*, Suma 64, pp. 49-52

Hans, J. A.; Muñoz, J.; Fernández-Aliseda, A.; Blanco, J y Aldana, J. (2003): *"Rompecabezas del Teorema de Pitágoras",* Suma, n. º 43, Junio, Zaragoza, pp. 119-122.

Frederickson, Greg (1997): *Dissections: Plane & Fancy. Cambridge University Press.*

Cuadraturas y disecciones geométricas (animaciones). Disponible en http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/puzzles.htm

CAPÍTULO IV

Conclusiones

Como se mencionó en la introducción, algunas de las actividades desarrolladas en el anterior apartado fueron puestas en práctica en UNIVERSUM, en el 52 y 55 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, con grupos de estudiantes de diversos grados de primaria y secundaria pública, tanto semiurbana como rural, así como con docentes de diversos grados escolares y en ferias de matemáticas recreativas, todo esto interactuando presencialmente, cara a cara con los participantes y obteniendo respuestas como pasar de un estado de miedo, temor o negación a poco a poco perder el miedo hasta llegar al asombro, ver que todas y todos tienen la capacidad de entender, proponer ideas, plantear hipótesis, resolver problemas, y aprender matemáticas y fomentar las ganas por descubrir más.

Sé que estas experiencias, por sí solas, no bastan para poder hacer una evaluación sistemática pero sí se logró cambiar la idea sobre qué son las matemáticas, sin olvidar que las fórmulas y operaciones, que, aunque son complejas, son parte del lenguaje matemático y no tienen por qué alejarlo de su aprendizaje, dar confianza en ellas y ellos mismos y dado que la mayoría de las actividades son juegos esto permite dejar la intriga de seguir descubriendo, ya que no necesariamente queremos que los participantes se vuelvan matemáticos o científicos, sino que en general comienzan a perder el miedo a las matemáticas, quitarles esa idea errónea de que solo se trata de hacer operaciones e incentivarlos a desarrollar su pensamiento lógico y que les sirva para su vida diaria y lo apliquen en la vida diaria.

Es cierto que el público que participa en estas actividades didácticas y lúdicas ven y hacen muchas cosas en un corto espacio de tiempo y que no en todos los participantes o en todas las actividades se tiene un impacto, pero sin duda, en algunos o algunas actividades aflorarán días, semanas, meses e incluso hasta años más tarde y, por tanto, aunque la contribución de estos talleres no sea inmediata y directa, sí puede tener un efecto indirecto. Es por esta razón que veo importante la necesidad de continuar con actividades de este tipo ya sea en escuelas o en casa y espero este manual contribuya a esto.

Más aún si no se cuentan con la posibilidad de tener el material impreso, estas actividades propuestas también pueden ser adaptadas y trabajarse en la virtualidad mediante diversas plataformas (zoom, plataformas interactivas tales como jamboard, desmos, genially, mathigon, Gather town, entre otras más), que posibilitan el hecho de que aunque el tallerista no está presente con los participantes, pueda mantenerse al pendiente de cómo van avanzando los participantes en el taller, dando oportunidad de llevar las actividades a más partes del país e incluso fuera del país, creando nuevos contactos y generando colaboraciones.

Para muestra de esto, en el siguiente link **https://jamboard.google.com/d/1fDyefpXBVnX9C1j5qdYzHQ6fIjfvQuWco2QAxwBw2dY/edit?usp=sharing** se hace visible (brevemente) cómo se adaptan algunas actividades para un taller virtual, usando la plataforma de Jamboard, un pizarrón virtual colaborativo de manejo intuitivo y que cuenta con varias herramientas útiles para el desarrollo de las actividades.

El uso de la tecnología ayuda a llegar a lugares lejanos, siempre y cuando tengan los medios necesarios para realizar las actividades de manera remota, tales como una computadora, una tableta o un celular, más aún una conexión a internet, pero ¿qué pasa con aquellas personas que no tienen estas herramientas? De aquí la importancia de la formalización de la divulgación para continuar con los talleres presenciales y seguir capacitando a investigadores, profesores y personas entusiastas de la divulgación para juntos seguir con esta cadena de divulgación, visibilizar iniciativas encaminadas a la divulgación, en particular la divulgación de las matemáticas y sumarlas para potenciar todos los esfuerzos que muchas personas ya estamos haciendo. Más aún, conseguir el apoyo de instituciones que apoyen la divulgación porque aún y cuando haya personal suficiente si no se consiguen recursos suficientes será difícil continuar.

Espero quienes lean este trabajo se sumen a esta cadena de apoyo a la divulgación y les sirva en este camino.

APÉNDICE

Tableros Lotería de Patrones

Tablero 1

Tablero 2

Tablero 3

Tablero 4

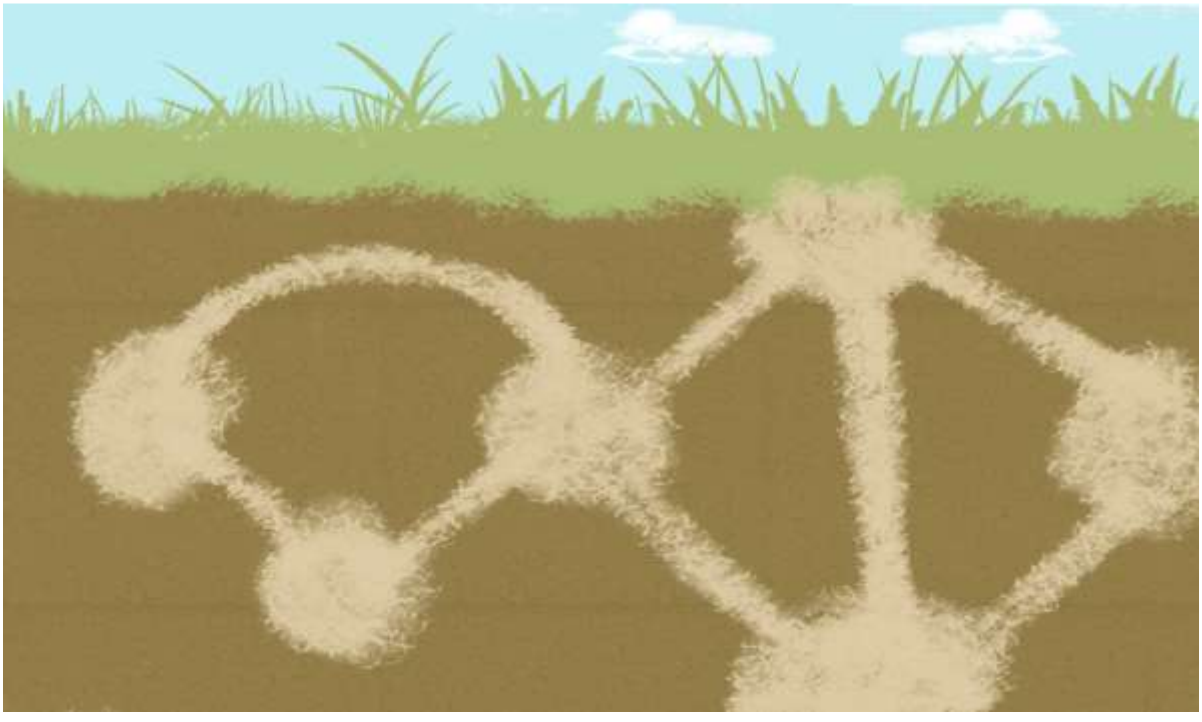
4

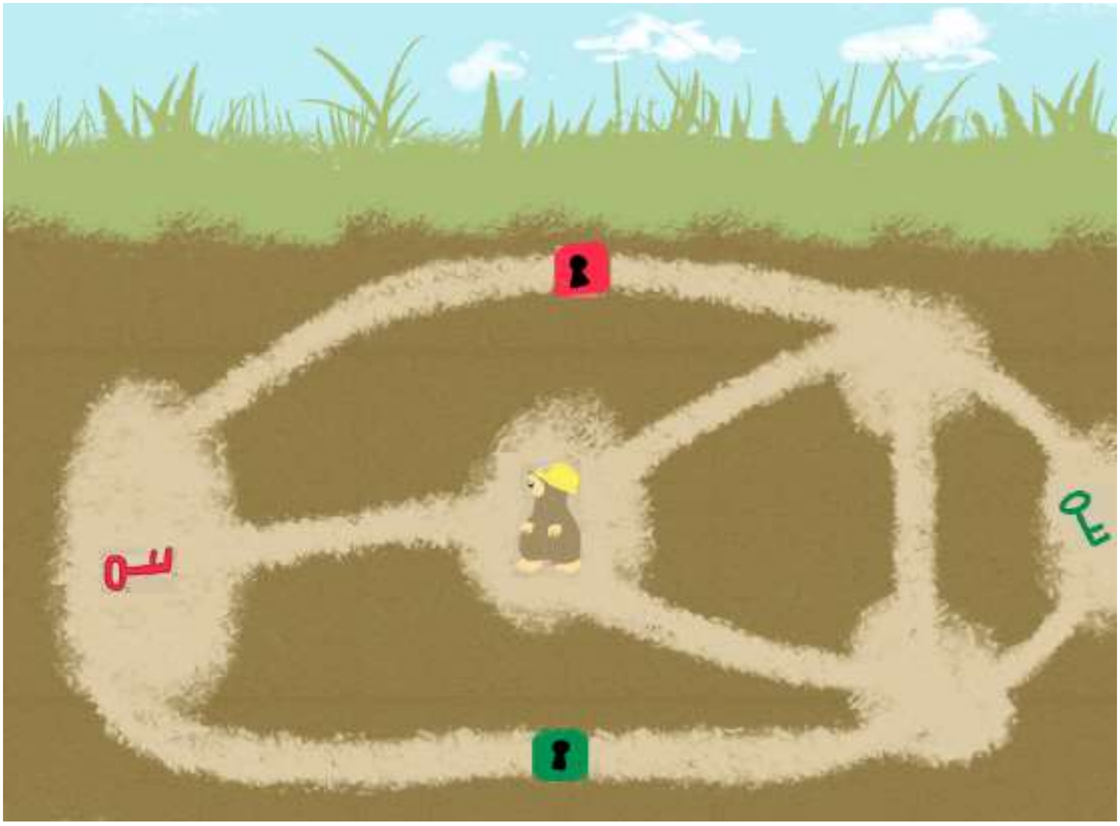
Tablero 5

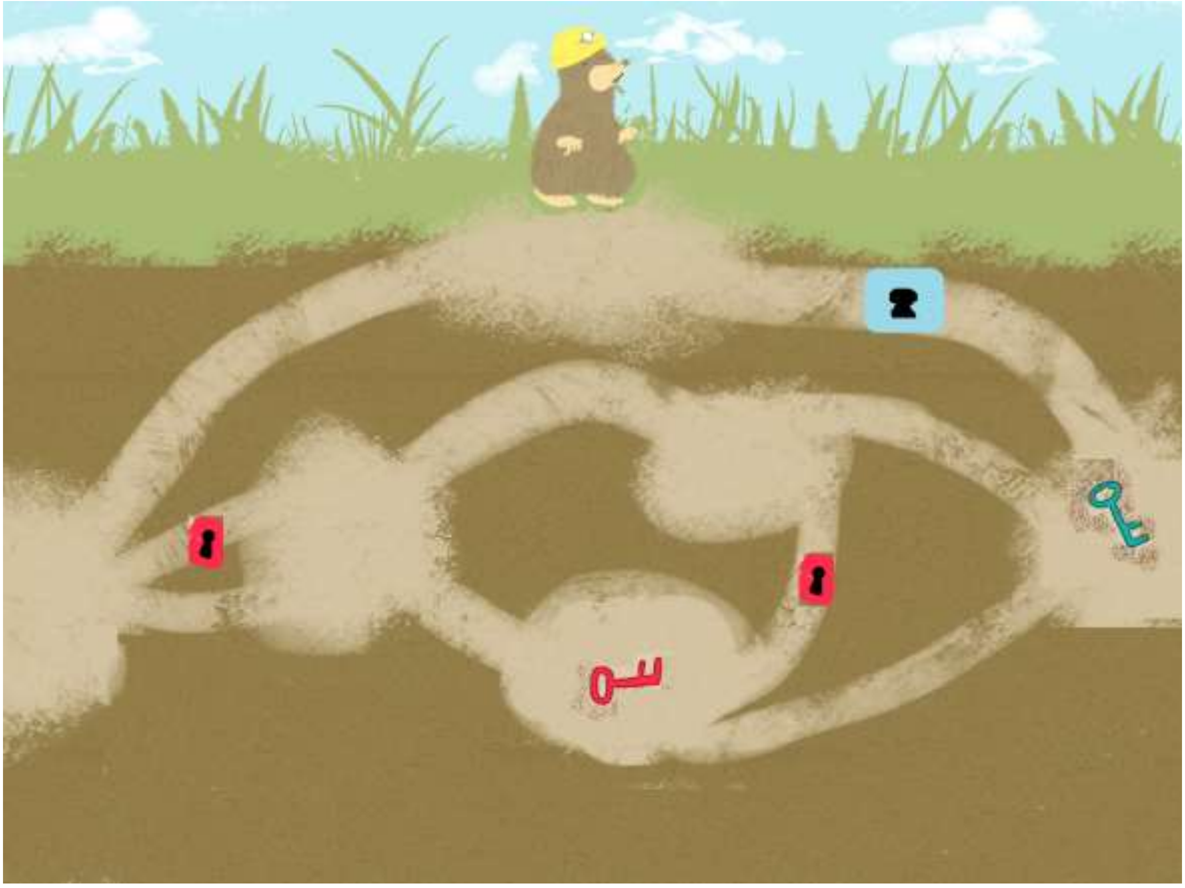
Tablero 6

Topos en aventuras

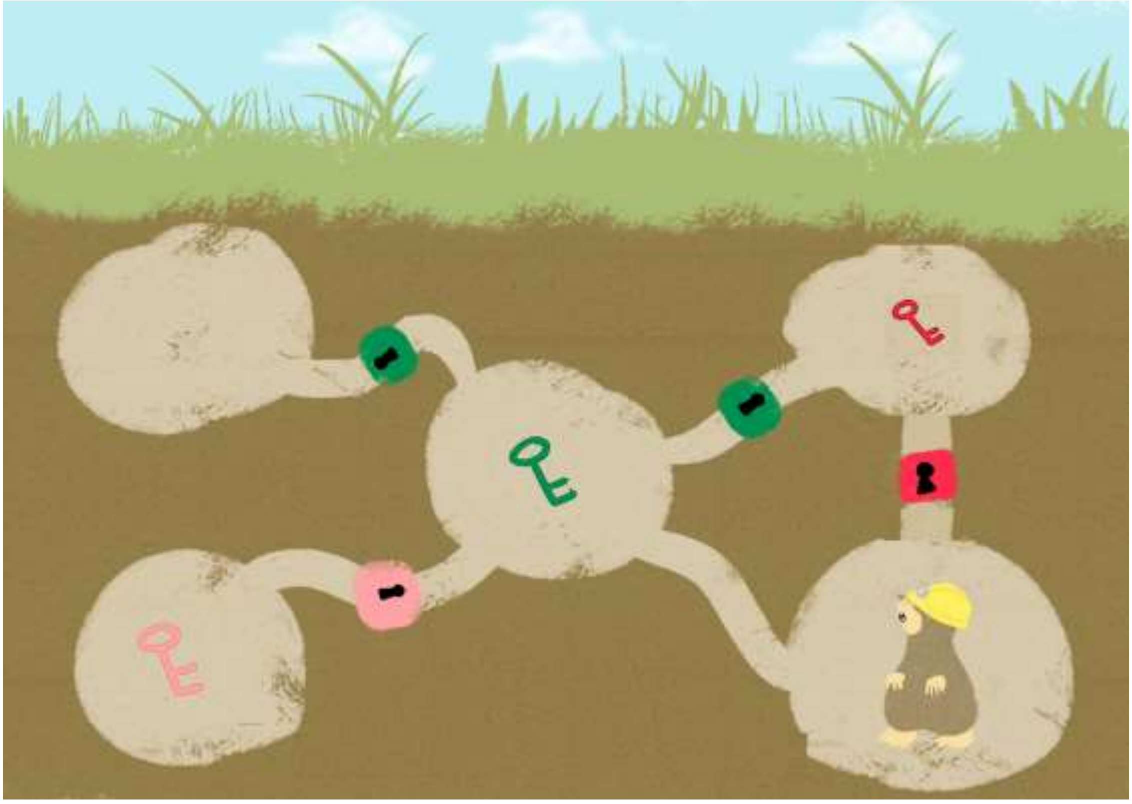
Eulerianos

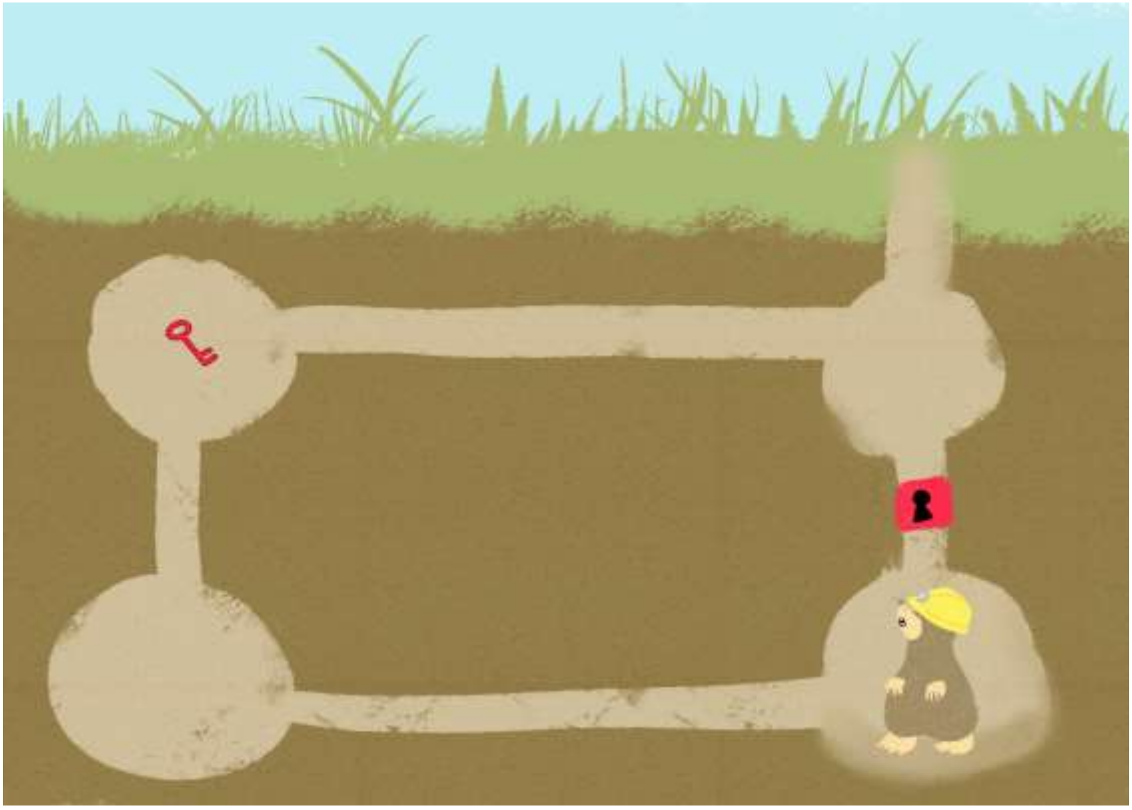


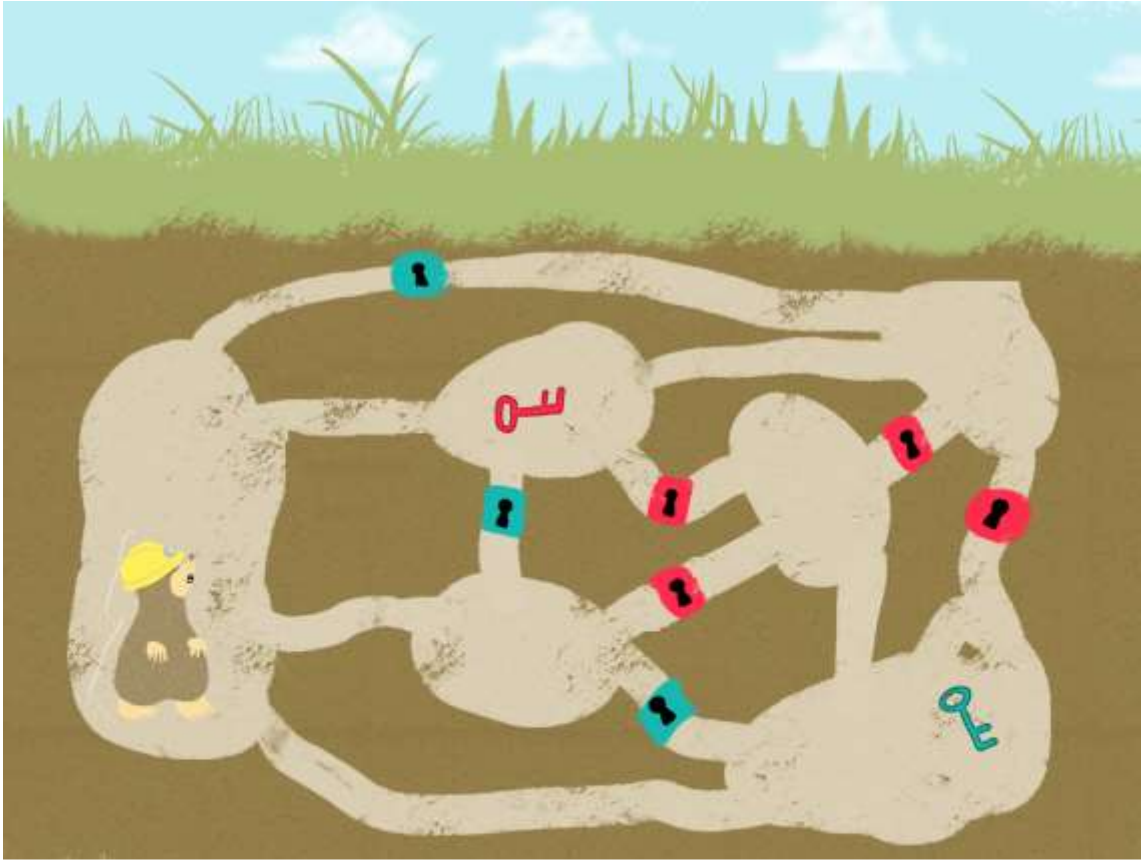


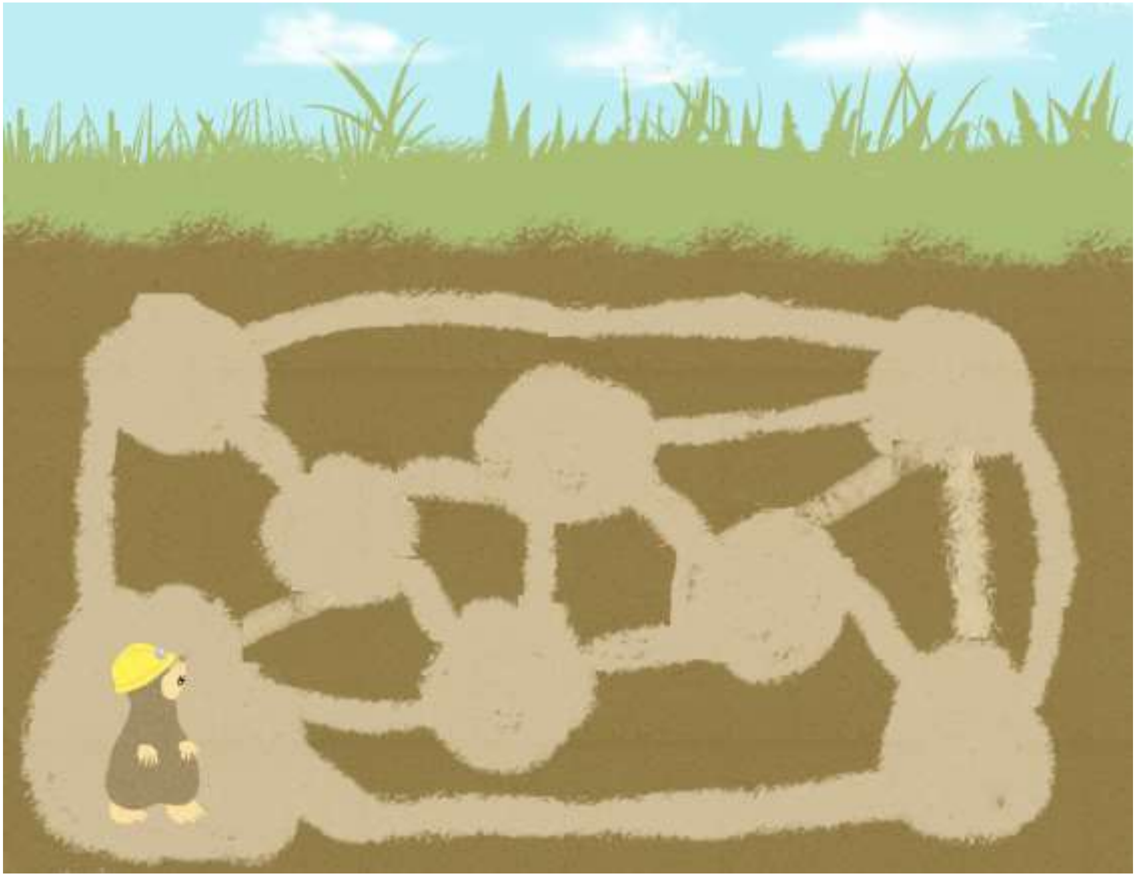


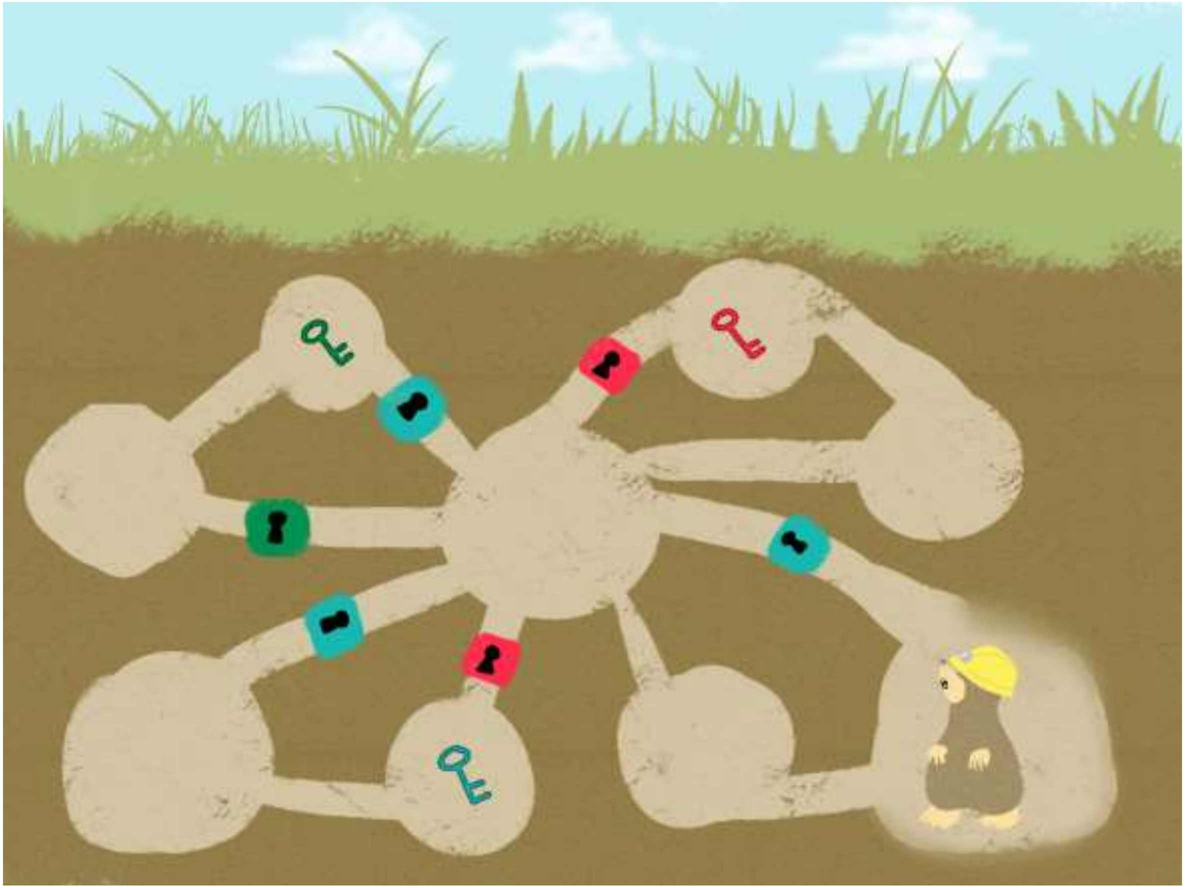
hamiltonianos:



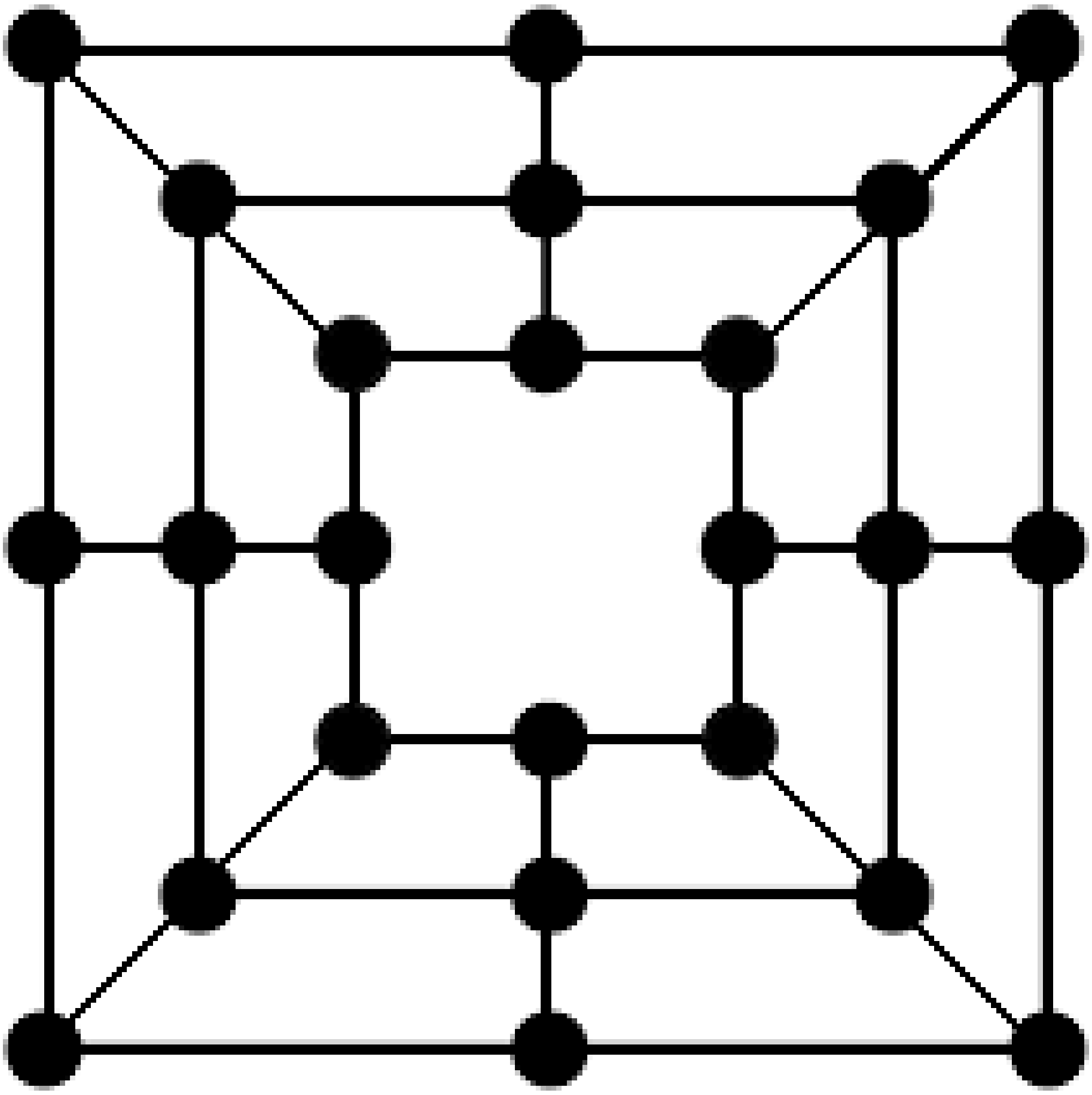




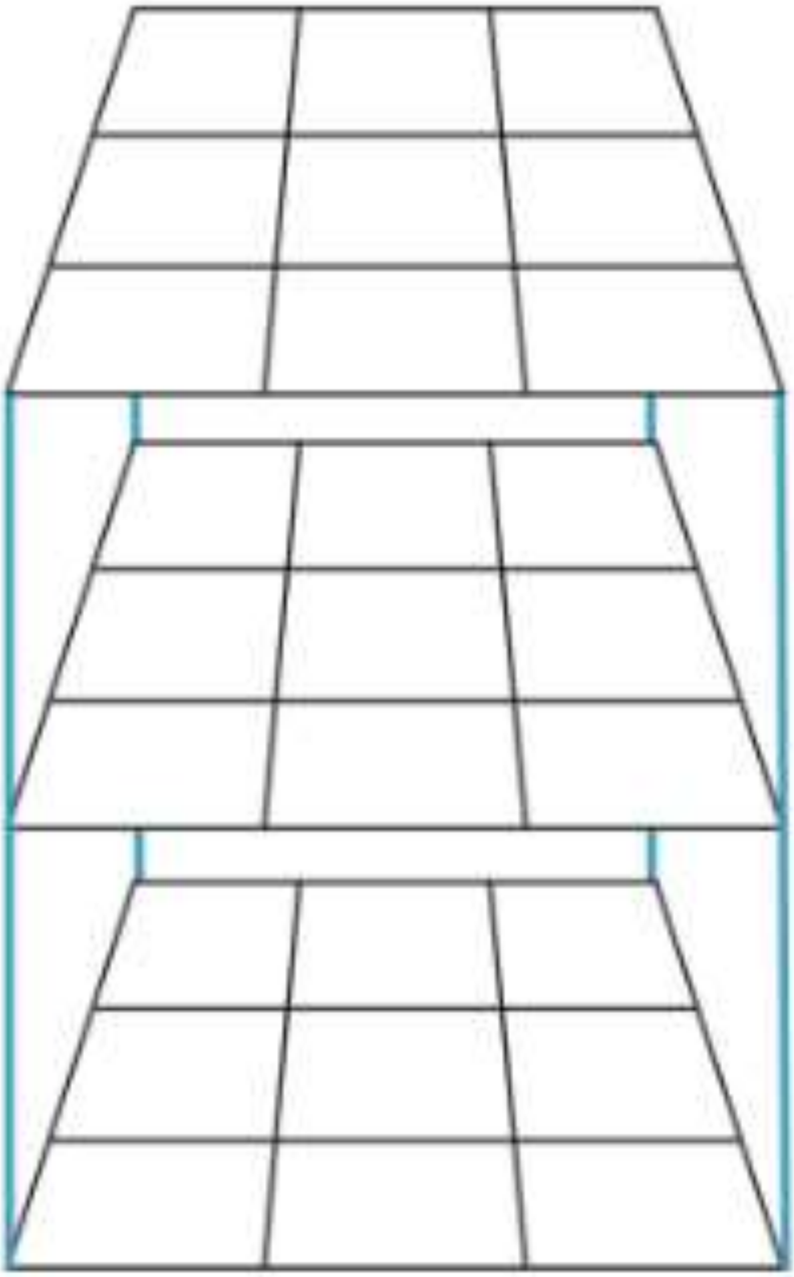




Tablero Pitarra

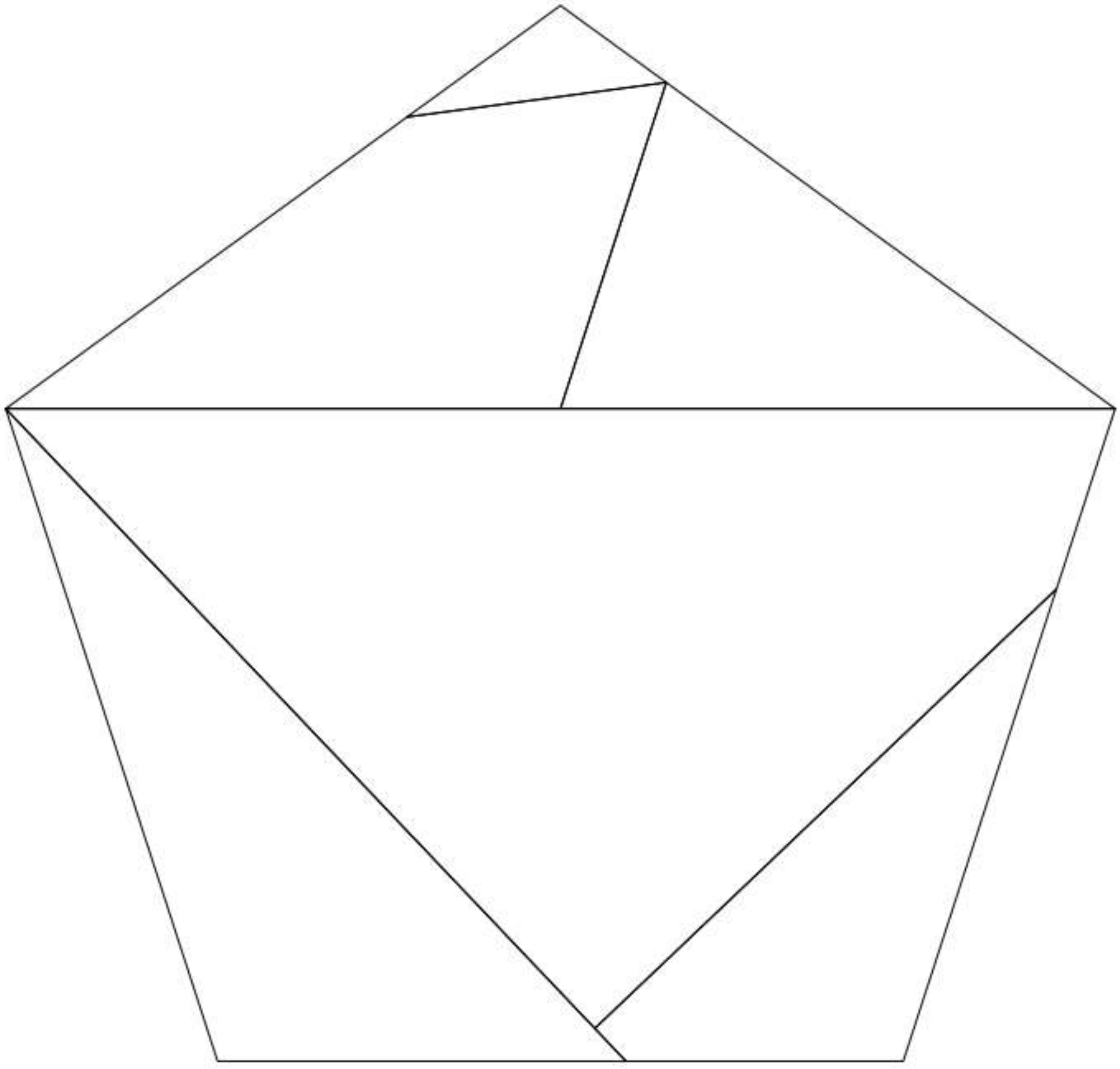


Plantilla El juego del gato tridimensional

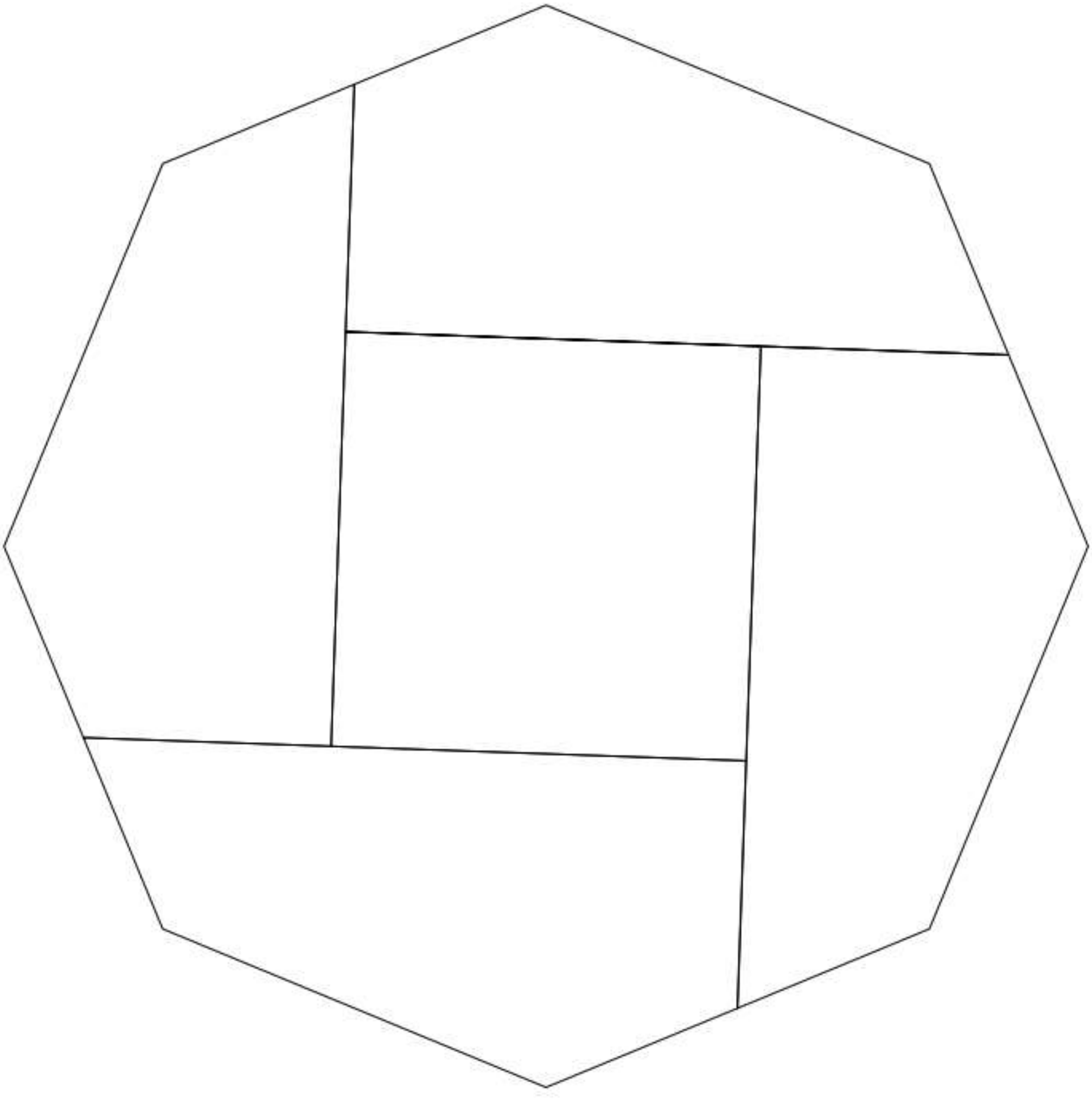


PLANTILLAS DE CORTANDO CUADRADOS

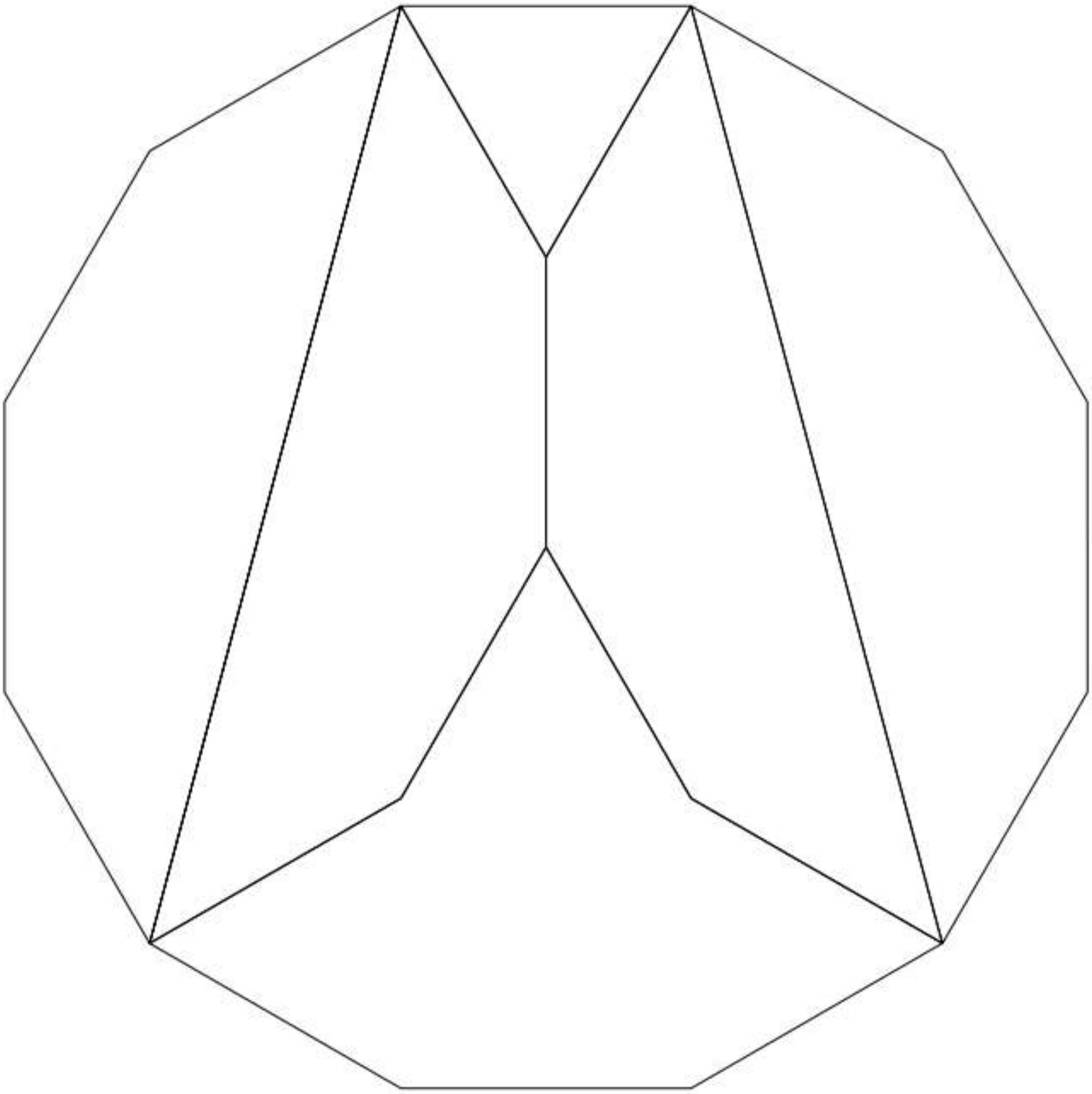
Pentágono - Cuadrado



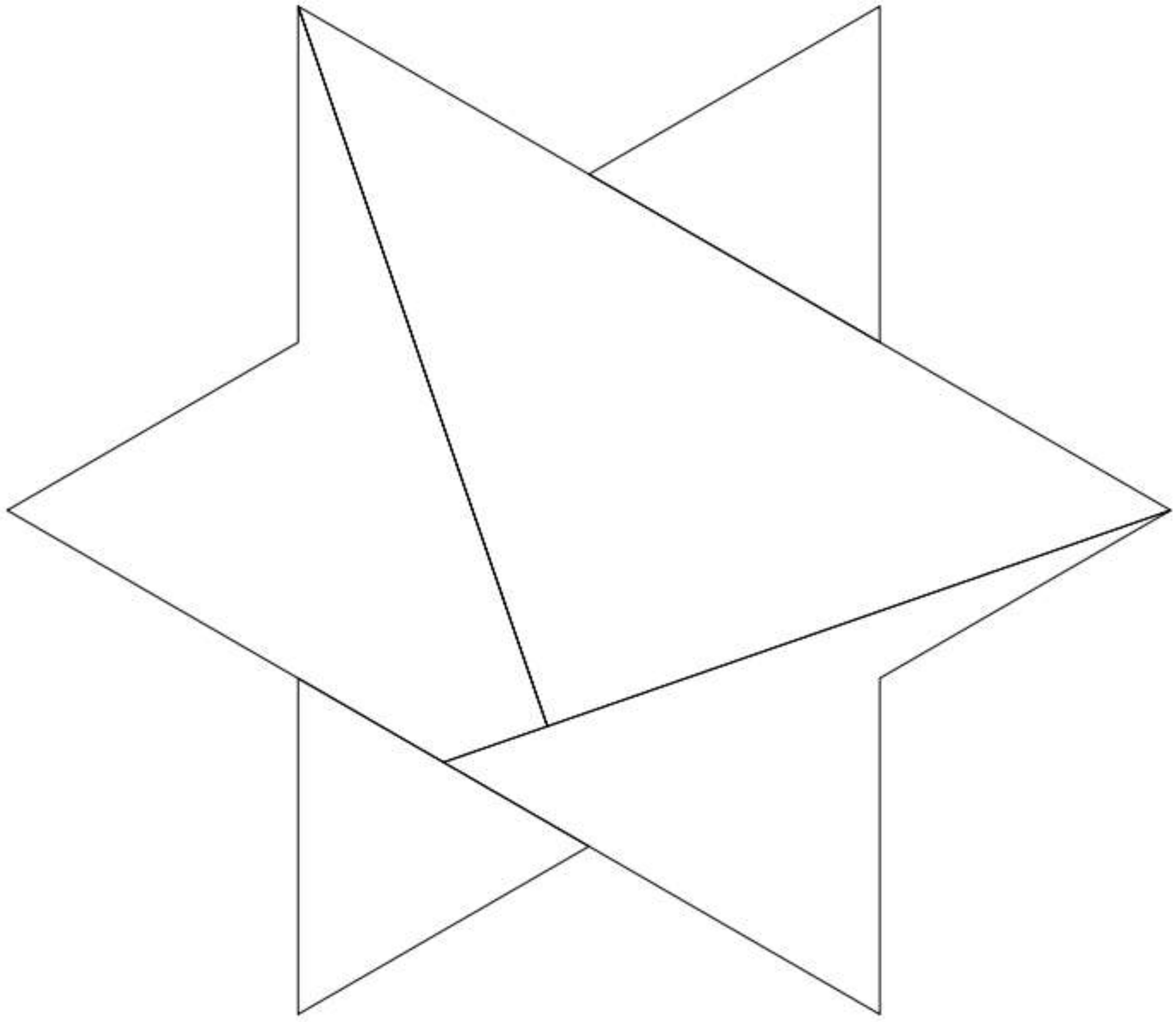
Octágono - Cuadrado



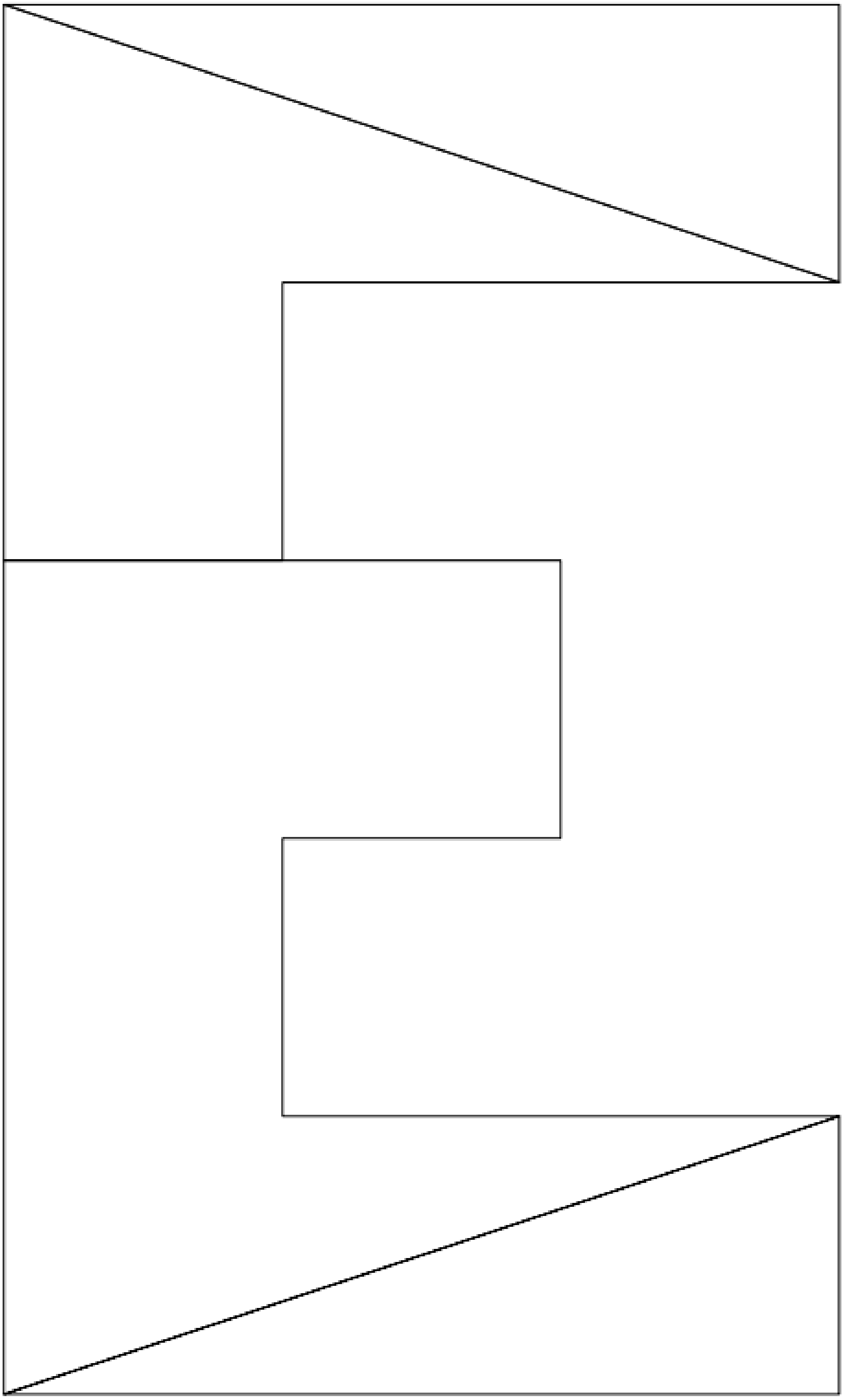
Dodecágono - Cuadrado



Estrella - Cuadrado



E - Cuadrado



Tangram

- Construcción

1.- Dibuja un cuadrado de X cm de lado

2.- Traza una de las diagonales del cuadrado

3.- Traza la recta paralela a la diagonal (antes trazada) que une los puntos medios n y m de dos lados consecutivos del cuadrado.

4.- Traza la otra diagonal del cuadrado. Dibújala hasta que toque la línea trazada en el paso 3. Al punto de intersección lo llamaremos X.

5.- Dividir la primera diagonal trazada en cuatro partes iguales. Llamemos a dichos puntos a, b, y c.

6.- Une con una recta el punto c con X

7.- Traza la recta que une a con el punto medio del lado

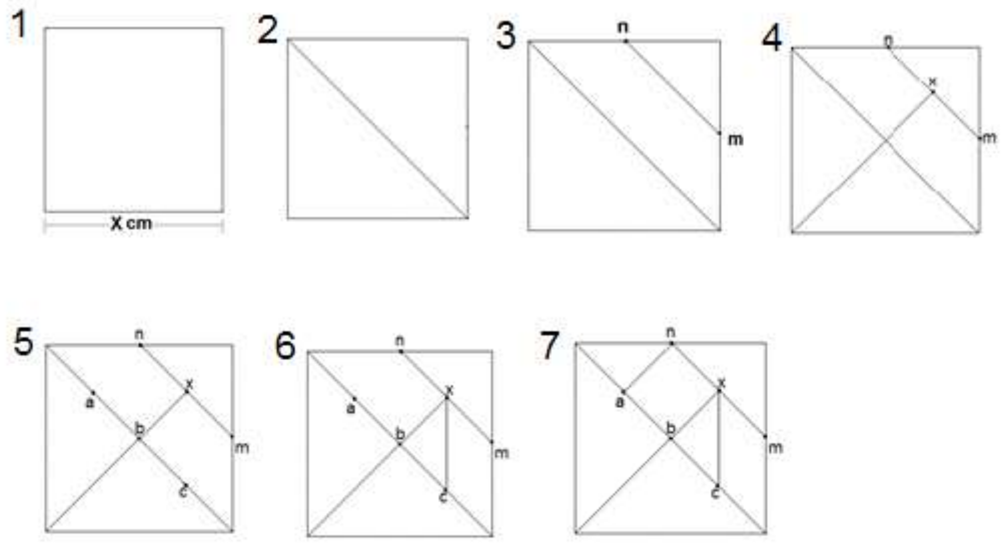
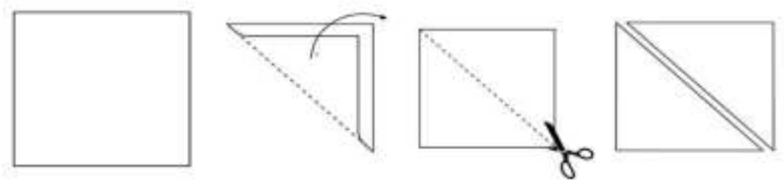


Fig. 1. Representación visual paso a paso de la construcción del Tangram con regla.

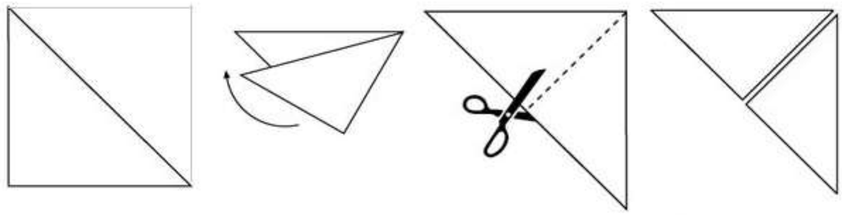
Una forma con dobleces de papel es la siguiente

1.- Corta un cuadrado de papel de X cm

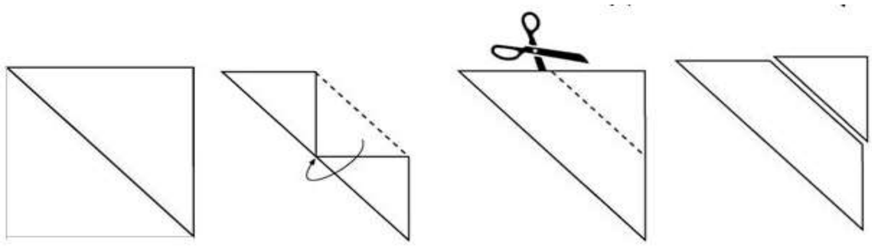
2.- Doblado por una de sus diagonales y recortamos por la línea del doblez para obtener dos triángulos



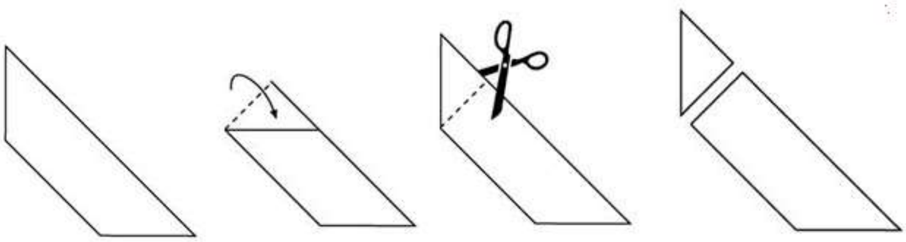
3.- Toma uno de los dos triángulos obtenidos en el paso anterior y dóblalo por el vértice del ángulo recto, de tal manera que éste quede divido en dos ángulos iguales y que los lados de igual tamaño del triángulo queden uno sobrepuesto al otro. Recortar por el doblez para obtener dos triángulos, obteniendo así las primeras piezas de nuestro tangram.



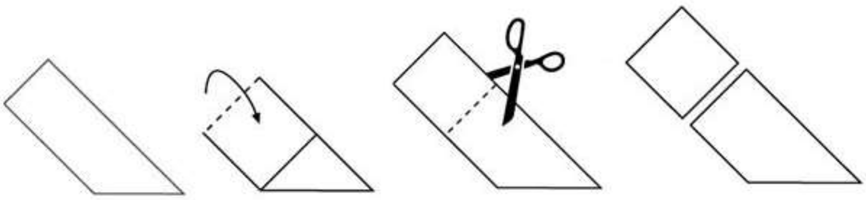
4.- Con el otro triángulo, lleva el vértice del ángulo recto hacia la hipotenusa del triángulo de manera que la línea que resulte del doblez sea paralela a ese lado. Recorta por el doblez para obtener un trapecio y un triángulo (tercera pieza del tangram).



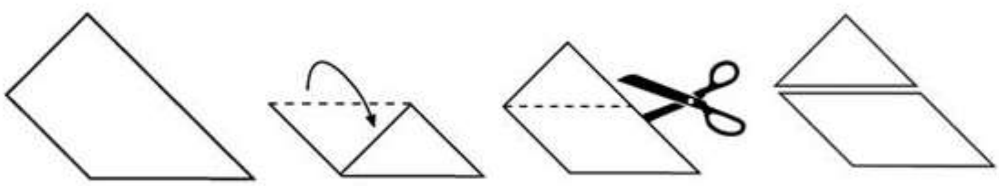
5.- Toma el trapecio restante, dobla por uno de los vértices del lado menor de tal manera que el doblez sea perpendicular tanto al lado menor del trapecio como al lado mayor. Recorta por el doblez para obtener otro triángulo (cuarta pieza del tangram) y un trapecio rectangular.



6.- Dobla el trapecio rectangular por el lado que tiene los ángulos rectos, de tal manera que el doblez sea perpendicular tanto al lado menor como al lado mayor, y dividimos en dos partes iguales el lado menor. Recorta por el doblez y obtenemos un cuadrado (quinta pieza de nuestro tangram) y de nuevo un trapecio rectangular.



7.- Tomamos el nuevo trapecio rectangular y doblamos de tal forma que el vértice del ángulo recto del lado mayor coincida con el vértice del ángulo obtuso del lado menor. Recortamos por el doblez y obtenemos un triángulo y un paralelogramo (sexta y séptima piezas de nuestro tangram).

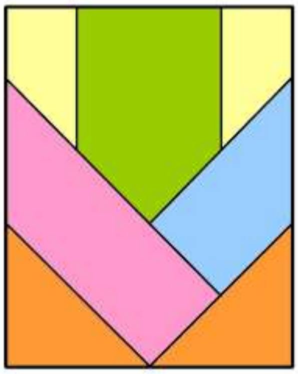
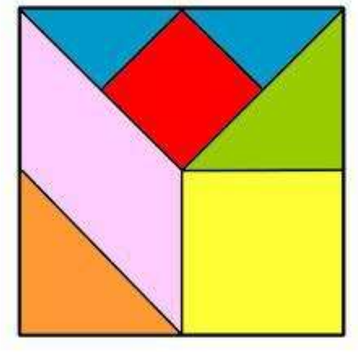
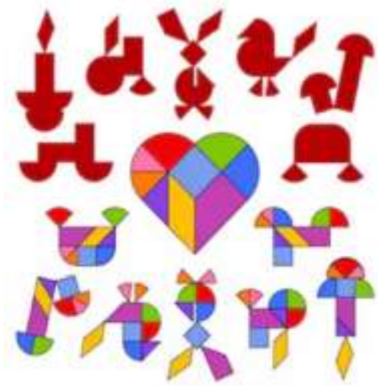
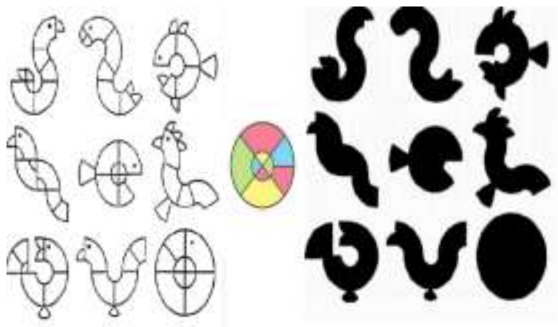


- Leyenda:

Cuenta la leyenda que un emperador chino mandó que fabricaran para él una hoja de vidrio cuadrada de grandes dimensiones. Durante el transporte de la misma, se cayó y se rompió en siete pedazos, y al intentar reconstruir la pieza original, los sirvientes comprobaron que se podían unir de muchas maneras distintas, componiendo no solo el cuadrado original, sino también gran cantidad de figuras geométricas o de objetos cotidianos. Maravillados ante las posibilidades de las siete piezas en las que se había roto el cuadrado de vidrio inicial, siguieron su camino hasta palacio y allí presentaron al emperador las siete piezas que formaban el cuadrado de vidrio, así como algunas de las configuraciones que se podían crear con ellas. El emperador quedó maravillado con el juego, por suerte para los sirvientes, que así salvaron sus vidas.
Así el puzle se extendió por Europa y América a principios del siglo XIX, fruto de las relaciones comerciales con China, y fue conocido como el rompecabezas chino.

En el libro de Sam Loyd, titulado *El octavo libro de Tan* (1903) contiene otra historia sobre su origen, fruto de le mente creativa del autor. Según el libro, el juego fue inventado hace 4.000 años por el dios Tan, y fue descrito en los siete primeros libros de Tan, cada uno de los cuales contenía 1.000 figuras o diagramas (Tan-grams) que se suponía que ilustraban la creación del mundo y el origen de las plantas y animales. También relacionaba las siete piezas del puzle con los 7 “planetas” (cuerpos visibles en el cielo) de la antigüedad, la Luna, Marte, Mercurio, Júpiter, Venus, Saturno y el Sol. Sam Loyd propuso 652 figuras en su libro, algunas cuyo origen estaba en las publicaciones chinas y otras inventadas por él.

- Existen otras variantes de rompecabezas que siguen los principios del tangram y es por eso que también toman el nombre de Tangrams, los más representativos son los siguientes:


Imágenes ilustrativas de algunos de los diferentes tipos de tangram

Bibliografía

General:

Sánchez, C, Macías, A. (2018) *Los museos de ciencias: Universum, 25 años de experiencia* Primera edición. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, dirección General de Divulgación de la Ciencia.

Estrada L. (2018). *La comprensión del universo: una vida en la divulgación*. Primera edición. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, dirección General de Divulgación de la Ciencia.

Sandoval, B, García, M. (2014) *La ciencia en nuestras manos. Una perspectiva de los talleres de divulgación sin el color de rosa*. Primera edición.

García, M. (2008). *Ciencia en todos los rincones: manual de divulgación en talleres.* Zacatecas, Mexico: Universidad Autónoma de Zacatecas, Coordinación de Investigación y Posgrado.

Reynoso, E. (2006). Sobre la evaluación de los divulgadores y sus productos. *El muégano divulgador*, 32: 4-4

Reynoso, E. (2000). *El museo de las ciencias: un apoyo a la enseñanza formal*. [Tesis de maestría inédita]. Universidad Nacional Autónoma de México.

Reynoso, E. (s.f) *La formación de divulgadores para museos de ciencias.* Red de popularización de la ciencia y la tecnología en América Latina y el Caribe. Sitio web: https://redpop.lat/la-formacin-de-divulgadores-para-museos-de-ciencia

García, R. (2011). Ciencia recreativa: un recurso didáctico para enseñar deleitando. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 8, págs. 370-392.

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *SUMA 4*, 61 - 64.

Alsina, C. (1989). Hacia unas matemáticas populares. *SUMA 4*, 83 - 120.

Aizencang, N. (2005). *Jugar, aprender y enseñar. Relaciones que potencian los aprendizajes escolares*. Buenos Aires, AR: Editorial Manantial.

(2013). *Recreation in the public communication of science and technology*. En: La recreación para la re-creación del conocimiento. Mexico: SOMEDCyT, págs. 89-101.

(1998) Pérez C., Díaz, M., Echevarría, I., Moretin, M. y Cuesta, M. *Centros de Ciencia. Espacios interactivos para el aprendizaje.* Universidad del País Vasco.

Reynoso, E., Sanchez Mora, C., & Tagüeña, J. (2005). *Lo "Glocal", nueva perspectiva para desarrollar museos de ciencia. Elementos: ciencia y cultura*. Elementos, revista de ciencia y cultura. https://elementos.buap.mx/post.php?id=510

Ruiz, C. (2012) *Matemáticas para profesores de preescolar y primaria*. México: UNAM, Facultad de Ciencias. Siglo XXI Editores. Primera edición. Pp.17-51

Lotería de patrones:

El juego fue una adaptación de Figurino Juego de Mesa Ravensburger

Vargas, S. (2021). *La lotería mexicana: conoce la historia de este icónico juego de azar*. junio 28, 2022, de My modern met en español Sitio web: https://mymodernmet.com/es/loteria-mexicana/

(s.f.). *La Lotería Mexicana: Una breve historia de un juego famoso. junio 28, 2022, de Amigo* Energy. Sitio web: https://amigoenergy.com/blog/es/la-loteria-mexicana-una-breve-historia-de-un-juego famoso/#:~:text=La%20loter%C3%ADa%20tradicional%20tiene%20sus,gracias%20a%20las%20ferias%20itinerantes.

SET:

El juego está basado en SET de Marsha J. Falco. Página web de la empresa SET Enterprises

Omatos, A. (2016). *Juego de cartas SET.* julio 20, 2022, de Matematiczando la realidad. Sitio web: http://mates.aomatos.com/juego-de-cartas-set/

Ibáñez, R. (2016). *Matemáticas en el juego de cartas SET (1)*. julio 20, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web:
Matemáticas en el juego de cartas SET (1) | Matemoción | Cuaderno de Cultura Científica

Ibáñez, R. (2016). *Matemáticas en el juego de cartas SET (2).* julio 20, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: Matemáticas en el juego de cartas SET (2) | Matemoción | Cuaderno de Cultura Científica

Klarreich, E. (2016). *Simple Set Game Proof Stuns Mathematicians*. julio 20, 2022, de Quantamagazine. Sitio web: https://www.quantamagazine.org/set-proof-stuns-mathematicians-20160531

Mancala:

Ibáñez, R. (2014). *Juegos del mundo: el mancala*. julio 15, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: https://culturacientifica.com/2014/07/02/juegos-del-mundo-el-mancala/

Rodríguez, P. (2004). Juegos y matemática: mancala. *Correo del maestro, num.97*. Sitio web: https://www.correodelmaestro.com/anteriores/2004/junio/nosotros97.htm

De Voogt, A. (2001). Mancala, Games that Count, Expedition 43, 38-46. Recuperado desde: https://www.penn.museum/documents/publications/expedition/PDFs/43-1/Mancala.pdf

De Voogt, A., Rougetet, L., & Epstein, N. (2018). Using Mancala in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Teacher*. Vol.112, 14-21. Recuperado desde: https://pubs.nctm.org/view/journals/mt/112/1/article-p14.xml

(2017). ¿Cómo no jugar Mancala? TUTORIAL (para perderse completamente). Sitio web: https://www.youtube.com/watch?v=hoDwqEDveb4

Tomé, C. (2013). *Tchuka Ruma, el mancala solitario* de Cuaderno de Cultura Científica. julio 16, 2022. Sitio web: https://culturacientifica.com/2013/11/20/tchuka-ruma-el-mancala-solitario/

Alquerque De Sevilla, G., Antonio, J., Cc, H. M., María De Los, S., José Muñoz, R., Les, S. & Antonio Fernández-Aliseda, M. (s/f). Tchuka Ruma. octubre 11, 2022. Sitio web: https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/55/075-079.pdf

Ranas y sapos:

Gardner, M. (1959). Mathematical puzzles of Sam Loyd. New York: Dover Publications.

Ibáñez, R., (2014). El salto de la rana y familia. *Matemoción*, *cuaderno de cultura científica*. Recuperado desde: https://culturacientifica.com/2014/01/15/el-salto-de-la-rana-y-familia/

Hoffman, P. (1893). *Puzzles old and new*. Frederick Warne and Co. p.269. Disponible en https://archive.org/details/puzzlesoldnew00hoff

Berlekamp, E., Conway, J. & Guy, R. (1982). Whose game? En Winning ways for your mathematical plays. Lodres: Academic Press Inc. p.63. Disponible en: https://annarchive.com/files/Winning%20Ways%20for%20Your%20Mathematical%20Plays%20V1.pdf

Topos en aventuras:

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications Inc.

Wilson, R. (1983). *Introducción a la teoría de grafos*. Madrid: Alianza Editorial.

Hevia H. (1996). *El Problema de los siete puentes de Könisberg: Leonhard Euler y la Teoría de Grafos*. *Educación matemática*, Vol.8, pp.108-115.

Stadler, M. (2017). *¿Qué es la Topología?* agosto 22,2019, de grupo alquerque Sitio web: http://www.grupoalquerque.es/ferias/2016/archivos/pdf/1_que_es_topologia.pdf

Del Castillo, B. (2017). *El Problema de los Cuatro Colores*. agosto 22, 2019, de C2 Ciencia y Cultura. Sitio web: https://www.revistac2.com/el-problema-de-los-cuatro-colores/

Pitarra:

Ibánez, R. (2013). Mujeres jugando (el juego del molino). septiembre 13, 2022 *de Cuaderno de cultura científica.* Sitio web: https://culturacientifica.com/2013/07/17/mujeres-jugando-el-juego-del-molino/

Gasser, R. (1996). *Solving nine men´s morris.* septiembre 13, 2022, de Games of No Chance MSRI Publications. Sitio web: http://library.msri.org/books/Book29/files/gasser.pdf

Arnedo, C., Beita, T., Crespo, R., Fernández, B. & Usón, C. (2005). *Juegos de estrategia: Una cultura para el mundo, un reto para la imaginación*. septiembre 11, 2022, de Centro virtual de divulgación matemática Sitio web: http://www.divulgamat.net/

Jugando en cuadrículas. Gatos, sudokus y más juegos con cuadrículas:

Weeks, J. *La forma del espacio. Cómo visualizar superficies y variedades tridimensionales*. (García, L., Sousa, G. Trad.). México: Facultad de Ciencias, UNAM. (Obra original publicada en 1985).

Gardner, M. (1985). *Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas.* España: Labor.

Paenza, A. (2007). *Matemática... ¿Estás ahí?* Episodio 3,14. Siglo Veintiuno Editores. Colección "Ciencia que Ladra..."

D´Andrea, C. (s.f). *Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras*. octubre 10, 2022. Sitio web: http://www.ub.edu/arcades/D'Andrea.pdf

Higgins, M. C. (2009). *Sudoku* [PDF]. Junior Certificate School Programme Support Service. Consultado en https://pdst.ie/sites/default/files/sudoku%20workbook%20final.pdf

Pegg, Ed, Jr. (2005). *Math Games: Sudoku Variations.* The Mathematical Association of America. Disponible en https://web.archive.org/web/20051003205240/http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_09_05_05.html

Ibáñez, R. (2020). *Rompecabezas matemáticos con números*. octubre 15, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: https://culturacientifica.com/2020/10/21/rompecabezas-matematicos-con-numeros/

Ibáñez, R. (2020). *Más rompecabezas matemáticos con números*. octubre 15, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: https://culturacientifica.com/2020/11/04/mas-rompecabezas-matematicos-con-numeros/

Portal Académico CCH. *Cuadrados mágicos.* octubre 13, 2022. Sitio web: https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1/unidad1/OpNumerosEnteros/cuadrosMagicos

Jugando con palillos:

Estalella, J. (2008). *Ciencia recreativa*. Cap. 2, Cuestiones geométricas. Barcelona. Consultado en http://www.librosmaravillosos.com/cienciarecreativa/index.html

Canaviri, P. F. *Jugando con fosforitos.* Consultado en https://orientacionsanvicente.files.wordpress.com/2012/05/juegos-matemc3a1ticos.pdf

Gardner, M. (1988). *Hexaflexagons and other mathematical diversions*. Chapter 15, Nim and Tac Tix; 151- 161. United States of America: University of Chicago Press.

Gardner, M. (1987) *The Second Scientific American book of mathematical puzzles and diversions*. Chapter 1, “The five platonic solids”, 13- 23. Chicago: The University of Chicago Press.

Ibáñez, R. (2014). *El cubo soma: diseño, arte y matemáticas*. septiembre 55, 2022, de Cuaderno de Cultura Científica. Sitio web: https://culturacientifica.com/2014/12/03/el-cubo-soma-diseno-arte-y-matematicas/

Cortando cuadrados:

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. (2005). *“Cuadraturas de polígonos regulares”*, Suma, 48, pp. 65-68

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. (2011). *“Puzles de cuadraturas”,* Suma 66, pp.43-46

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A (2010), *“Cuadraturas de cruces, letras y estrellas”*, Suma 64, pp. 49-52

Hans, J. A.; Muñoz, J.; Fernández-Aliseda, A.; Blanco, J y Aldana, J. (2003): *"Rompecabezas del Teorema de Pitágoras",* Suma, n. º 43, junio, Zaragoza, pp. 119-122.

Frederickson, Greg (1997): *Dissections: Plane & Fancy. Cambridge University Press.*

Cuadraturas y disecciones geométricas (animaciones). Disponible en http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/puzzles.htm