



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
GRAVITACIÓN

**SOBRE LA RELACIÓN ENTRE TERMODINÁMICA Y GRAVEDAD EN  
UNIVERSOS FLRW**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
M.C. LUIS MIGUEL SÁNCHEZ HERNÁNDEZ

**TUTOR PRINCIPAL:**  
DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:**  
DR. VÍCTOR ROMERO ROCHÍN  
INSTITUTO DE FÍSICA  
DR. LUIS FERNANDO DE LA PEÑA AUERBACH  
INSTITUTO DE FÍSICA

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
<b>2. Gravitación</b>	<b>14</b>
2.1. Relatividad General . . . . .	14
2.2. Agujeros negros . . . . .	22
2.3. Cosmología FLRW . . . . .	27
2.4. Teorías alternativas de gravedad: Gauss-Bonnet y Lovelock . . . . .	33
<b>3. Horizontes</b>	<b>39</b>
3.1. Horizonte de eventos . . . . .	39
3.2. Horizonte de Killing . . . . .	39
3.3. Horizonte de Rindler . . . . .	40
3.4. Congruencias y ecuación de Raychaudhuri . . . . .	42
3.5. Definición de horizonte aparente . . . . .	46
3.6. Horizontes FLRW . . . . .	50
<b>4. Termodinámica</b>	<b>54</b>
4.1. Leyes de la termodinámica . . . . .	55
4.2. Ecuación fundamental y ecuaciones de estado . . . . .	56
4.3. Funciones de respuesta . . . . .	60
4.4. Termodinámica del gas ideal . . . . .	63
4.5. Termodinámica del gas ideal . . . . .	63
<b>5. Aspectos termodinámicos de la gravedad</b>	<b>66</b>
5.1. Termodinámica de agujeros negros . . . . .	66
5.2. Efecto Unruh . . . . .	71
5.3. Las ecuaciones de Einstein como ecuación de estado . . . . .	72

5.4. Ecuaciones de Friedmann y la primera ley de la termodinámica . . . . .	75
5.5. Ecuaciones de Einstein como una identidad termodinámica en el horizonte . .	79
<b>6. Termodinámica del horizonte aparente FLRW (<math>\Lambda = 0</math>)</b>	<b>82</b>
6.1. Ecuación Fundamental . . . . .	82
6.2. Primera ley unificada y ecuaciones de estado . . . . .	86
6.3. Funciones de respuesta . . . . .	89
6.4. Segunda ley . . . . .	91
<b>7. Termodinámica de horizonte aparente FLRW(<math>\Lambda \neq 0</math>)</b>	<b>96</b>
7.1. Ecuación Fundamental . . . . .	96
7.2. Primera ley unificada y ecuaciones de estado . . . . .	99
7.3. Funciones de Respuesta . . . . .	100
7.4. Segunda ley . . . . .	102
7.5. Segunda ley generalizada . . . . .	103
<b>8. Conclusiones</b>	<b>106</b>

# Publicaciones

El trabajo presentado aquí está basado en la investigación realizada entre julio de 2019 y julio de 2023 en el departamento de Gravitación y Teoría de campos del Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, como parte del programa de Doctorado en Ciencias Físicas. Los resultados que se discuten en los últimos dos capítulos fueron publicados en

L. M. Sanchez and H. Quevedo, “Thermodynamics of the FLRW apparent horizon,” *Phys. Lett. B* **839**, 137778 (2023) doi:10.1016/j.physletb.2023.137778 [arXiv:2208.05729 [gr-qc]].

# Agradecimientos

La memoria es la condición de posibilidad del agradecimiento. Pues ¿cómo podríamos agradecer lo que no recordamos?. Sin memoria lo olvidaríamos todo, todo. En tal caso solo habría una cosa que podríamos agradecer y esa es que precisamente olvidáramos todo, pues sería demasiado doloroso recordar que hemos olvidado las cosas que nos hacen únicos. Por fortuna no es así. ¡Gracias a la memoria! No importa si es finita y falible, en realidad, los recuerdos más especiales no ocupan demasiado espacio, estoy seguro de que si los pudiéramos extraer se podrían acomodar en un librero pequeño. Si alguien estuviera interesado en nosotros, contando las historias de esos libros-recuerdos podríamos dar cuenta de nuestra vida con una precisión aceptable. Un físico incluso diría que se trata de una buena aproximación. Así, la memoria no necesita ser infinita, es suficiente si puede almacenar las cosas más importantes, las más significativas, las que de una u otra forma nos permiten construir un sentido, una identidad y una historia.

Gracias a la memoria puedo decir que es increíble mirar el pasado y darme cuenta de todo lo que ha tenido que pasar para llegar hasta donde estoy hoy. ¿Tendría que agradecer por cada una de esas cosas? Indudablemente, sí. Sin embargo, aunque quisiera enunciar cada una de ellas y darle el espacio que le corresponde, no es posible. Al escribir esto mi memoria solo ha seleccionado casi (sin consultármelo) algunos eventos a los que les ha reservado un lugar especial. Estos eventos han dejado una huella permanente en mi línea de mundo. Algunas de estas huellas son inseparables de ciertos nombres, en realidad, de ciertas personas. Quizá mencionar estos nombres sea una manera, aunque aún injusta por su incompletitud, de relatar aquellos eventos que me tiene aquí, a punto de obtener un doctorado en física teórica. Primero que nada, debo agradecer a mis padres, Cecilia y Miguel, ellos fueron la causa de ese pequeño Big Bang que me dio origen. Y no solo eso, lo más importante es que cuidaron de mí y me dieron lo mejor que pudieron a cada momento. Fue suficiente, lo han hecho bien, ¡mírenlo!. Se los agradezco inmensamente.

¿Y qué sería del universo sin un solo objeto que lo habitara? Por fortuna no lo sé. Siempre he estado acompañado por seres increíbles; mis hermanos, Eduardo, Diana y Alan; mi compañera Ángeles, mis primos y mis tíos. Gracias por existir; por la risa, por las aventuras, por su compañía, su apoyo, sus consejos y su amor. Por supuesto, no pueden faltar aquí los nombres de mis amigos: Daniel, Rodrigo, Brian, Isaías, Fernando, con los que compartí la misma cuna en la facultad de Ciencias, ahí nos escuchamos unos a otros balbucear nuestras primeras ideas, qué quizá apenas ahora comienzan a poder entenderse, a

llegar a ser palabras. También quiero agradecer a amigos de la maestría: Andrés, Gustavo, Lalo y Ernesto, ustedes, son algunas de las personas más inteligentes que he conocido, gracias por su compañía. Aprendí mucho de ustedes. Aunque ahora nuestras vidas no estén del todo unidas, jamás podrán estar del todo separadas. Hay correlaciones (¿cuánticas?) que nos vinculan; no importa cuánto me aleje de ustedes, simplemente los sigo sintiendo.

Quiero agradecer especialmente a mi asesor y también amigo, el Dr. Hernando. Quizá solo él y yo sabemos lo que este proceso de Doctorado significó y costo para mí. Agradezco su guía y acompañamiento. Realmente ha sido *Doktorvater*.

¿Es demasiado corto este agradecimiento? Sí, lo es. Aun así, me parece que contiene lo esencial, lo que quería decir. Podría escribir más, pero me temo que no importa que tan extenso pudiera llegar a ser, siempre quedaría algo fuera, siempre sería injusto e incompleto. No ahí nada que hacer al respecto, así es la memoria y así somos los humanos; ni siquiera las matemáticas son completas, ¿cómo podría serlo un escrito que es menos perfecto?

# Resumen

En esta tesis estudiamos la relación entre gravedad y termodinámica en el horizonte aparente del espaciotiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Asumiendo que el horizonte aparente FLRW puede interpretarse como un sistema termodinámico, obtenemos la ecuación fundamental, la cual, según las nociones de la termodinámica estándar, contiene toda la información relevante del sistema. Una vez determinada, usamos la ecuación fundamental y la primera ley de la termodinámica unificada para calcular las ecuaciones de estado y las funciones de respuesta. El análisis se hace para el horizonte aparente con y sin constante cosmológica  $\Lambda$ . En el caso sin constante cosmológica, la ecuación de estado que se obtiene implica que las variables termodinámicas permanecen constantes durante la evolución del sistema, mientras que en el caso con constante cosmológica, las variables evolucionan. En ambos casos, tanto las capacidades caloríficas como las compresibilidades, son negativas, lo cual se puede explicar por el carácter de largo alcance de las interacciones gravitacionales. Se calcula el índice adiabático siendo el mismo para ambos casos y de este se deduce que el horizonte aparente tiene solo dos grados de libertad.

Con la ecuación fundamental en la representación entrópica, se analiza la segunda ley de la termodinámica examinando la primera y segunda derivada de la entropía con respecto al tiempo. Encontramos que los criterios  $\dot{S} > 0$  y  $\dot{S} < 0$  no se satisfacen para todos los valores de los parámetros del sistema, con lo cual se concluye que el horizonte aparente no siempre se puede considerar como un sistema termodinámico. Finalmente, se analiza la segunda ley de la termodinámica generalizada (SLG), donde se contemplan la entropía del horizonte más la entropía de la materia, resultando que el cambio respecto al tiempo de la entropía total es una cantidad definida positiva, con lo cual la SLG se cumple satisfactoriamente.



# Estructura de la tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el primer capítulo, a manera de introducción, se discuten brevemente algunos aspectos históricos y se da una descripción general sobre la relación entre la gravedad y la termodinámica. En el capítulo 2 se presentan los elementos básicos de la relatividad general. Presentamos los principios angulares de la teoría de la gravitación de Einstein: el principio de equivalencia y el principio de relatividad general (covarianza). Posteriormente, se introduce el tensor de energía-momento y se realiza una deducción heurística de las ecuaciones de campo de Einstein. Enseguida, se discuten dos de las soluciones de las ecuaciones de campo: el espaciotiempo de Schwarzschild y de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW).

En el capítulo tercero se introducen las definiciones y propiedades más relevantes sobre los horizontes. Se desarrollan las nociones de horizonte, de eventos, de Killing y aparentes. Se presta especial atención a la definición del horizonte aparente: partiendo del concepto de congruencia de geodésicas nulas, se define la expansión de la congruencia y se describe la ecuación de Raychaudhuri con la que se llega a la noción de superficies atrapadas. Se da una clasificación de superficies en función del comportamiento de la expansión de las congruencias. Se presentan las definiciones de gravedad superficial asociadas a cada tipo de horizonte y se introduce la llamada primera ley unificada, además de la energía de Misner-Sharp. Por último, se presentan los horizontes cosmológicos: de partículas, de eventos y el horizonte aparente del espaciotiempo FLRW.

En el capítulo cuatro se introducen los conceptos clave de la termodinámica: se presentan las leyes de la termodinámica, se discute la relación entre la ecuación fundamental y las ecuaciones de estado. Enseguida se da la noción de homogeneidad y su relevancia en la descripción termodinámica, así como la relación de Gibbs-Duhem. En la sección siguiente se estudia la definición de las funciones de respuesta. Posteriormente, se exponen las transformaciones de Legendre y los potenciales termodinámicos. Por último, se aplican los conceptos y se desarrolla la termodinámica del gas ideal.

En el capítulo cinco se exploran algunos trabajos que muestran diversos aspectos del carácter termodinámico de la gravedad, en concreto, se revisa la termodinámica de agujeros negros, mostrando la relación entre las leyes dinámicas que los describen y las leyes de la termodinámica además de la ecuación fundamental asociada a estos objetos gravitacionales. Después, se discute brevemente el efecto Unruh y su parecido con la radiación de Hawking. Luego, se presenta el trabajo de T. Jacobson, donde se prueba que es posible obtener

las ecuaciones de Einstein partiendo de argumentos termodinámicos del espaciotiempo. A continuación se presenta el trabajo de T. Padmanabhan, donde muestra que para espaciotiempo con simetría esférica, las ecuaciones de Einstein evaluadas en el horizonte se pueden escribir como la primera ley de la termodinámica. Por último, se desarrolla el trabajo de R.G Cai, donde se muestra como las ecuaciones de Friedman se pueden obtener partiendo de argumentos termodinámicos del horizonte aparente FLRW.

Los capítulos sexto y séptimo contienen la parte principal de esta trabajo. En ellos se presentan los resultados originales que se obtuvieron en nuestra investigación. En el capítulo sexto se discuten la termodinámica de horizonte aparente FLRW sin constante cosmológica. Asumiendo que el horizonte aparente FLRW puede interpretarse como un sistema termodinámico, obtenemos la ecuación fundamental, luego, aplicando los procedimientos de la termodinámica estándar, se calculan las ecuaciones de estado y las funciones de respuesta. Estas expresiones determinan lo que llamamos termodinámica del horizonte aparente FLRW. Por último, se analiza y discute la validez de la segunda ley de la termodinámica y la segunda ley generalizada en el horizonte aparente.

En el capítulo séptimo se analiza la termodinámica del horizonte aparente con constante cosmológica  $\Lambda$ . Considerando que  $\Lambda$  puede tomarse como una presión efectiva, se obtiene la ecuación fundamental del horizonte aparente. Con esta se calculan las ecuaciones de estado y funciones de respuesta. Se discute la validez de la segunda ley de la termodinámica y de la segunda ley generalizada.

Finalmente, en el octavo capítulo, a manera de resumen, se presentan las conclusiones principales a las que se llegaron en el proyecto de investigación.

## Convenciones

Aquí presentamos algunas de las convenciones que utilizaremos a lo largo de la tesis.

La signatura de la métrica se toma como  $(-, +, +, +)$ . Los índices latinos  $a, b, c, \dots$  son índices abstractos que denotan ecuación tensoriales que son válidas en cualquier sistema de coordenadas.

Se consideran unidades tales que  $c = G = \hbar = k_B = 1$ . No obstante, procurando la claridad, en algunas expresiones estos son incluidos explícitamente.

# Capítulo 1

## Introducción

La gravedad sigue siendo hoy en día, quizá, la menos entendida de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. A pesar de lo simple que puede parecer que una manzana caiga, las razones más profundas detrás del fenómeno que lo causa permanecen aun sin conocerse de todo. En el hilo del tiempo, se han ensayado diversas ideas y teorías que tratan de explicar de los fenómenos gravitacionales. Aristóteles desarrolló uno de los primeros sistemas que pretendían dar una explicación lógica y coherente a los fenómenos que se observan en el mundo. Para Aristóteles, la naturaleza de los objetos era revelada por su movimiento. De esta manera, con el objetivo de entender el movimiento, planteo y estudió las nociones que lo definen: espacio, tiempo y desplazamiento. Creó un modelo geométrico del mundo basado en esferas concéntricas alrededor de la tierra. Tal modelo le permitió definir nociones espaciales, como arriba: alejándose del centro de la esfera que definía la tierra, y abajo: acercándose a dicho centro [1]. Con esto, pudo clasificar el movimiento de los cuerpos que se mueven hacia arriba y los que se mueve hacia abajo. No obstante, Aristóteles no asoció estos movimientos con una noción de fuerza (lo cual sí hizo Newton siglos después) sino que los explicó en función de lo que creía era una tendencia natural de los cuerpos a ocupar cierto lugar en el espacio [2]. Sin embargo, aunque Aristóteles describió de manera lógica el movimiento de los cuerpos, para él, muchos de los fenómenos que hoy sabemos son causados por la gravedad, estaban desconectados. No fue hasta que Newton, en el siglo XVII, introdujo los conceptos de espacio y tiempo absolutos y formuló sus leyes de la mecánica y de la gravitación universal, que se entendió que aquello que hace caer una manzana en la Tierra tiene el mismo origen que aquello que hace girar los planetas alrededor del Sol: la gravedad. Si bien, Newton, con su ley de gravitación universal, lograba explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol y de los objetos que caen en la Tierra, no fue capaz de dar razón sobre la gravedad en sí misma y se vio obligado a introducir el concepto de acción a distancia. A pesar de esto, la formulación de la ley de la gravitación universal puede ser considerada como uno de los grandes logros de la humanidad, ya que dio por primera vez un modo sistemático de interpretar, explicar y estudiar los fenómenos gravitacionales. Tres siglos después, Einstein introduce la relatividad especial y unifica los conceptos de espacio y tiempo basado en el postulado de la constancia de la velocidad de la luz y el principio de relatividad

especial, que establece que las leyes de la física deben ser iguales para todos los observadores inerciales. Minkowski, interpreta esta unificación de manera geométrica, introduciendo la noción de espaciotiempo: un espacio geométrico, plano, de cuatro dimensiones, descrito por una métrica pseudoeuclídeana. El principio de relatividad especial, no es satisfactorio del todo, pues como Einstein creía, las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores y no solo para los inerciales. Esto lo lleva a buscar una generalización del principio de relatividad para incluir sistemas no inerciales. Al extender el principio de relatividad, Einstein, descubrió uno de los principios más profundos de la física teórica: el principio de equivalencia. Así, la generalización del principio de relatividad especial, lo llevo simultáneamente a una teoría de la gravitación. Einstein encontró que una manera de pasar de sistemas inerciales a no inerciales es cambiando la geometría del espaciotiempo; pasando de una métrica plana a una con curvatura. Con esto, relaciona los efectos no inerciales con la curvatura del espaciotiempo y en un momento de auténtica genialidad se da cuenta de que, localmente, un observador en un sistema acelerado es equivalente a un observador en un sistema inercial con un campo gravitacional. Más tarde comprende que, de hecho, la métrica que describe la geometría del espaciotiempo puede usarse para representar un campo gravitacional. Esto lo conduce a formular su teoría de la gravedad: considerando que ni el espacio ni el tiempo son absolutos, sino que el espaciotiempo es descrito por una variedad diferencial y dinámica de cuatro dimensiones, la relatividad general (RG) establece que la geometría del espaciotiempo describe el campo gravitacional. Así, la gravedad no es más una fuerza, sino una medida de la curvatura del espaciotiempo, la cual, a su vez, es creada por el contenido de materia sobre él. De este modo, las ecuaciones del campo gravitacional relacionan la curvatura del espaciotiempo con el contenido de materia del mismo.

Con la relatividad general, Einstein da una nueva manera de entender la gravedad. Su teoría no solo puede dar razón de hechos que no se podían entender desde el punto de vista Newtoniano, por ejemplo, el perihelio de Mercurio, sino que, además, predice la existencia de otras propiedades intrínsecas de la gravedad que la teoría de Newton no permitía ver, como la conexión indisoluble que tiene esta con el propio espaciotiempo, (pues se describe con el mismo objeto matemático que determina la geometría del espaciotiempo) o la deflexión de la luz por un campo gravitacional, lo cual confirmó Eddington el 29 de mayo 1919 [3]. Así, la teoría de la relatividad general no solo es una mejor teoría de la gravedad en el sentido de que explica una mayor cantidad de fenómenos, sino que, también, y quizá más importante, revela aspectos que permanecían ocultos hasta entonces y que han permitido entender con más profundidad la naturaleza de la gravedad. La relatividad general predice la existencia de los llamados agujeros negros y de su característica más desconcertante, el horizonte de eventos. Los agujeros negros son regiones del espaciotiempo cuyo campo gravitacional es tan intenso que ni la luz puede escapar. El estudio de los agujeros negros en los años 1970 llevó a descubrir una analogía entre la gravedad y la termodinámica. Primero, Bekenstein [4] propone que estos sistemas se pueden entender como sistemas termodinámicos caracterizados por una entropía que es proporcional a su área. Después Hawking [5] descubre que, de hecho, estos sistemas pueden emitir radiación a una temperatura proporcional a su gravedad superficial. Esto lleva a la idea de que los agujeros negros pueden ser entendidos como auténticos sistemas termodinámicos que están caracterizados por cuatro leyes dinámicas que son idénticas a las leyes de la termodinámica.

Después de preguntarse si esta relación con la termodinámica es exclusiva de los agujeros negros, Hawking muestra que estos resultados se pueden extender a otros espaciotiempo. En 1973, junto con Gibbons muestran [6] que un universo de de Sitter tiene un horizonte que también puede ser caracterizado con propiedades termodinámicas análogas a las de agujeros negros. Este resultado impulsa la naciente idea de que la descripción termodinámica es relevante en la gravitación. Así, paso de creerse que esta conexión era una coincidencia matemática a pensarse que podría tratarse de otra de las propiedades intrínsecas de la gravedad. Los horizontes han revelado el carácter termodinámico del campo gravitacional, pues tienen definida una entropía y una temperatura. Esta es una cualidad sorprendente, pues de alguna manera, que no terminamos de entender, esto sugiere que el espaciotiempo tiene propiedades termodinámicas. Una evidencia más de esto, la mostró Unruh [7], al descubrir que un observador acelerado de Rindler, detecta partículas con un espectro térmico, donde un observador inercial detecta vacío. Dicho espectro térmico, corresponde al de un cuerpo negro que radia con una temperatura proporcional a la aceleración del observador. Este efecto es equivalente a la radiación de Hawking que emite un agujero negro.

Extendiendo estas ideas, Jacobson [8] muestra que las ecuaciones de Einstein se pueden obtener partiendo de la relación de Clausius  $TdS$ , lo cual sugiere que las ecuaciones de campo pueden ser entendidas como una ecuación de estado. Para llegar a este resultado, Jacobson, toma la relación entropía-área y la temperatura de Unruh para horizontes de Rindler definidos en cada punto del espaciotiempo. Otro de los aspectos donde aparece relación entre la termodinámica con las ecuaciones de campo lo mostró Padmanabhan. En el caso de espaciotiempo estáticos con simetría esférica, al evaluar las ecuaciones de Einstein en el horizonte, es posible interpretarlas como la identidad termodinámica  $TdS = dE + PdV$  [9] [10]. Esta relación se puede extender a horizontes estáticos esféricamente simétricos en la gravedad de Lanczos-Lovelock [11]. Una gran cantidad de trabajos de Padmanabhan exponen otros aspectos de la relación gravedad-termodinámica, por ejemplo, [12] [13] [14] [15] [16]. Para una reseña ver [9]. En esa misma dirección, en 2005, R. G. Cai y S.P. Kim [17] encuentran una relación entre las ecuaciones de Friedmann y la primera ley de la termodinámica, no solo para relatividad general, sino en distintas teorías de la gravedad como Gauss-Bonnet y Lovelock. Asumiendo que  $S = \frac{A}{4}$  y  $T = \frac{1}{2\pi r}$  se cumplen para el horizonte aparente del espaciotiempo FLRW y usando la primera ley unificada y la relación de Clausius obtienen las ecuaciones de Friedmann. De la misma manera, en [18], se estudia el comportamiento termodinámico de las ecuaciones de Friedmann y demuestran que estas pueden ser escritas en la forma exacta de la primera ley de la termodinámica. Es decir, la analogía entre las ecuaciones de Friedmann y la primera ley es válida en ambas direcciones.

Al existir tal relación entre las ecuaciones de Friedmann y la primera ley de la termodinámica, es posible incorporar nuevas posibilidades en la cosmología que tienen su origen en argumentos termodinámicos: tomando relaciones entropía-área modificadas es posible obtener ecuaciones de Friedmann modificadas. Un ejemplo de esto se estudia en [19] donde se considera la llamada *entropía de Borrow*, que es una modificación de la entropía de Bekenstein-Hawking que incorpora efectos cuánticos. A partir de esta, es posible obtener unas ecuaciones de Friedmann que contienen términos nuevos, los cuales permiten formular interpretaciones alternativas para estudiar la energía oscura. Otra manera de utilizar la relación termodinámica-gravedad en modelos cosmológicos se muestra en el trabajo [20].

Donde se considera que el universo es un sistema termodinámico, lo cual, entre otras cosas, le permite al autor estudiar un proceso de enfriamiento, para el que obtienen un coeficiente de Joule-Thomson positivo, lo cual significa que el sistema se está enfriando. Su resultado tiene sentido, puesto que el universo se está expandiendo. Además, muestra como el universo puede ser considerado como una máquina térmica para la cual se puede calcular su eficiencia. Este trabajo es interesante porque sugiere que es posible aplicar conceptos de la termodinámica estándar al universo FLRW y sobre horizonte aparente del que está dotado, y obtener resultados consistentes. Otros trabajos sobre la termodinámica en modelos FLRW pueden consultarse en [21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] y en las referencias ahí citadas. Por otro lado, desde la perspectiva de termodinámica, todo sistema está descrito por una ecuación fundamental; una relación entre las variables extensivas relevantes del sistema que contienen toda la información del sistema y que permite hacer una descripción completa de él [28]. Por tanto, si los horizontes se comportan como sistema termodinámico, debería existir una ecuación fundamental que los describa completamente. En el caso de los agujeros negros, la ecuación fundamental es conocida [29]. Ahora bien, dado que la relación gravedad-termodinámica también está presente en el espaciotiempo FLRW, mediante la existencia del horizonte aparente, consideramos que también es posible definir una ecuación fundamental para este sistema. Este es precisamente el objetivo que nos planteamos y que se discute en esta tesis; encontrar la ecuación fundamental que caracterice al horizonte aparente FLRW como sistema termodinámico. Una vez conocida la ecuación fundamental, será posible aplicar el formalismo de la termodinámica para estudiar la segunda ley de la termodinámica, y las propiedades termodinámicas del sistema, tales como ecuaciones de estado y funciones de respuesta, las cuales podrían ser importantes para comprender con más detalle la relación entre termodinámica y gravedad en escenarios cosmológicos.

## Capítulo 2

# Gravitación

La relatividad general es quizá el logro más grande de la física teórica. Al considerar que el espaciotiempo es descrito por una variedad diferenciable de cuatro dimensiones, Einstein vio la similitud entre la física en presencia de un campo gravitacional y los espacios con curvatura; identificó las trayectorias de partículas en cada libre, es decir, las que se mueven solo en presencia de un campo gravitacional, con las geodésicas de un espaciotiempo con curvatura [30]. De esta manera, la relatividad general da una descripción simple y elegante de la gravedad en función de la geometría dinámica del espaciotiempo: la geometría del espaciotiempo le indica a la materia como moverse, y, a su vez, el contenido de materia le indica al espaciotiempo como curvarse.

En este capítulo daremos un resumen de algunos de los conceptos más importantes de esta teoría.

### 2.1. Relatividad General

La relatividad especial esta fundada en dos postulados

#### **Principio de Relatividad Especial**

*Todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes (covarianza de Lorentz). Las leyes de la física son covariantes con respecto a las transformaciones entre marcos de referencia inerciales.*

#### **Principio de la constancia de la velocidad de la luz**

*La velocidad de la luz es constante en todos los sistemas de referencia inerciales.*

De esto se sigue que la teoría de la relatividad especial solo es válida para una clase especial de observadores; aquellos que se mueven unos respecto de otros con velocidad constante. Einstein no estaba conforme con esto; su intuición, más bien le decía que "The laws of physics must be of such a nature that they apply to systems of reference in any

kind of motion” [31]. Bajo esta convicción trabajó en generalizar el principio de relatividad. Por otro lado, dado que la relatividad especial no contemplaba los fenómenos gravitacionales, Einstein se planteaba como modificar la teoría de Newton para incorporarla al marco relativista. Las cosas resultaron mucho mejor de lo que pudo haber imaginado, pues ambos problemas resultaron tener la misma solución. Al extender el principio de relatividad para incluir toda clase de sistemas de referencia, Einstein dio con el que es, quizá, el descubrimiento más fantástico que un humano ha hecho jamás; **localmente, las leyes de la física en un sistema de referencia con aceleración uniforme son equivalentes a las leyes de la física en un sistema de referencia inercial con un campo gravitacional estático y uniforme** [32]. Este principio lo llevó a formular su teoría de la gravedad. En los párrafos anteriores están condensadas las ideas de los dos principios angulares sobre los que está fundamentada la teoría de la Relatividad General: el principio de covarianza y el principio de equivalencia.

## Principio de covarianza

La relatividad general no solo es una teoría de la gravedad, sino que también da un criterio sobre cómo debe construirse una teoría física. Mediante el principio de covarianza se entiende que una teoría no se debe limitarse a las conclusiones a las que un observador llega mediante la experimentación y la observación en un marco de referencia particular, sino que la teoría debe permitir concluir lo mismo a un observador que se encuentra en un marco de referencia distinto. Lo anterior implica que una teoría debe incorporar una estructura tal que en esta se manifieste explícitamente, que las únicas magnitudes que deben tener sentido físico son aquellas que permanecen invariantes ante una transformación de un sistema de referencia a otro. Este es el contenido esencial del principio de relatividad general o principio de covarianza, el cual podemos enunciar como sigue

### Principio de Relatividad General

*Todos los sistemas de referencia son equivalentes (covarianza general). Las leyes de la física son idénticas (covariantes) para todos los observadores, independientemente del sistema de referencia desde el que las describan.*

La estructura requerida por el principio de covarianza es incorporada en la física al expresar las leyes en términos de tensores. Estos son adecuados para expresar las leyes físicas porque son objetos geométricos intrínsecos en una variedad. Los tensores pueden ser representados por sus componentes; números específicos asociados a ellos mediante la elección de un sistema de coordenadas particular, pero con leyes de transformación generales, que permiten pasar de un sistema coordinado a otro. Así, la utilidad de los tensores radica justamente en que una ecuación expresada en forma tensorial, de manera natural, cumplirá con el principio de covarianza, puesto que su expresión matemática será válida para cualquier sistema de referencia. Se emplea el término covarianza (y no invarianza) porque los componentes de los tensores no son invariantes bajo transformaciones de coordenadas, pero sus reglas de transformación son tales que, las ecuaciones escritas en términos tensoriales, que son válidas en un sistema coordinado, se mantienen válidas en cualquier otro sistema, siempre y cuando estén



relacionados mediante un difeomorfismo[33]. Es decir, que las leyes pueden parecer diferentes para distintos observadores, i.e., en distintos marcos de referencia, pero es posible encontrar expresiones que sean independientes del sistema de referencia. Esto es, en última instancia, lo que permite que distintos observadores puedan interpretar y comparar sus mediciones. De esta manera, lo que el principio de covarianza general significa, es que sin importar el tipo de observadores: inerciales, rotantes, acelerados, etc., si sus sistemas de referencia están relacionados mediante un difeomorfismo, las ecuaciones en notación covariante (tensorial) son válidas para todos los observadores. En esencia, lo que este principio establece, es que el universo no está dotado naturalmente con una estructura que podamos identificar como un sistema de coordenadas. Es decir, que los sistemas coordenados son construcciones matemáticas que usamos los humanos para describir las leyes de la física, pero no existen por sí mismos en la naturaleza [33]. Por tanto, las leyes de la física deben ser independientes de los sistemas de coordenadas. Esto es precisamente lo que Einstein buscaba al generalizar el principio de la relatividad especial: que las leyes de la física que se formulan en un sistema de referencia acelerado deben ser las mismas que se formulan en un sistema de referencia inercial. De esta manera, el principio de relatividad general encuentra su expresión formal en el principio de covarianza. Más aún, al generalizar el principio de relatividad especial, Einstein encontró algo mucho más grande.

## Principio de equivalencia

En relatividad general, las partículas puntuales en caída libre, siguen trayectorias tipo tiempo que son geodésicas de la métrica y cuya ecuación de movimiento resulta ser independiente de su masa. Estas trayectorias están determinadas por la ecuación de las geodésicas, que en coordenadas arbitrarias podemos expresar como

$$\frac{d^2 x^b}{ds^2} + \Gamma^b_{ac} \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\Gamma^b_{ac}$  son los símbolos de Christoffel y  $s$  es un parámetro afin. Las soluciones de esta ecuación definen una clase especial de trayectorias a través del espaciotiempo conocidas como trayectorias inerciales; toda partícula en caída libre se mueve siguiendo estas curvas. Esto significa, que todas las partículas de prueba en un campo gravitacional se mueven con la misma aceleración independientemente de su masa. La gran consecuencia que se deriva de aquí es la equivalencia de la masa gravitacional  $m_g$  y la masa inercial  $m_i$ <sup>1</sup>

$$\frac{m_g}{m_i} = 1. \quad (2.2)$$

Con esto en mente, podemos enunciar el principio de equivalencia débil de la siguiente manera

---

<sup>1</sup>De hecho, esta es la manera de probar experimentalmente la validez del principio de equivalencia débil. Los límites experimentales actuales que comprueban dicha equivalencia son del orden de  $10^{-13}$  [34].

### Principio de equivalencia débil

En una región suficientemente pequeña del espaciotiempo, el movimiento de partículas en caída libre, es el mismo en un campo gravitacional y en un marco de referencia con aceleración uniforme.

Dado que, en esencia, la gravedad es de naturaleza geométrica, para poder describirla es necesario generalizar la noción de espaciotiempo plano  $(\mathcal{N}, \eta)$  de la relatividad especial. En relatividad general, el espaciotiempo es descrito como una variedad diferencial pseudo-Riemanniana  $(\mathcal{M}, g)$ <sup>2</sup>. A grandes rasgos se puede definir una variedad  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}$  como un espacio que localmente tiene el aspecto de  $\mathbb{R}^n$ . Esto significa que en cada punto  $p$  de la variedad se puede definir un espacio tangente  $T_p(\mathcal{M}^N)$  que es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Las métricas Riemannianas y Lorentzianas tiene la propiedad especial de que cada espacio tangente está dotado con un producto interno  $g$ . De hecho, en la Relatividad General, la variable dinámica fundamental es el tensor métrico  $g_{ab}$ , el cual permite definir la distancia entre dos eventos del espaciotiempo

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \quad (2.3)$$

además de otras propiedades métricas como el ángulo entre dos curvas, área de una superficie y volumen. Lo que la hace que una variedad sea ideal en este escenario, es que mediante el tensor de Riemann es posible definir una noción invariante de curvatura. El tensor de Riemann está dado por

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{bd} - \partial_d \Gamma^a{}_{bc} + \Gamma^e{}_{bd} \Gamma^a{}_{ec} - \Gamma^e{}_{bc} \Gamma^a{}_{ed}, \quad (2.4)$$

donde los coeficientes de Christoffel  $\Gamma^c{}_{ab}$  están dados en función de los componentes de métrica  $g_{ab}$  que describe el espaciotiempo

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (2.5)$$

La propiedad más importante de una variedad es que, localmente, se puede considerar como un espacio plano. Esto tiene consecuencias físicas importantes. Si recordamos que la relatividad especial está formulada en un espacio plano y en ausencia de campos gravitacionales, las consideraciones anteriores conducen al

### Principio de equivalencia de Einstein: PEE

En regiones lo suficientemente pequeñas del espaciotiempo, las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial. Es imposible detectar la existencia de campos gravitacionales mediante experimentos locales. [35]

Considerando que uno de los resultados fundamentales de la relatividad especial es la equivalencia entre masa y energía, el PEE extiende el principio de equivalencia para formas

<sup>2</sup>A diferencia de una variedad Riemanniana, en una Lorentziana, la métrica no es definida positiva; puede ser negativa, nula o positiva, lo que define las trayectorias, tipo tiempo ( $ds^2 < 0$ ), nulas ( $ds^2 = 0$ ) y tipo espacio ( $ds^2 > 0$ ). Asimismo, permite clasificar a los vectores en tipo tiempo, nulos y tipo espacio, respectivamente.

más generales de energía. En resumen, el PED dice que la gravedad se acopla solo a la masa, mientras que el PEE asegura que el campo gravitacional se acopla a otras formas de energía, como la electromagnética. Esta noción se puede extender aún más para incluir efectos gravitacionales, en tal caso se habla del principio de equivalencia fuerte (PEF) que dice que el campo gravitacional se acopla a sí mismo (de ahí el carácter no lineal de la teoría). Para una discusión profunda ver [35] [32].

El PEE es sumamente importante, pues implica que al considerar regiones lo suficientemente pequeñas en sistemas de referencia en caída libre, la formulación de las leyes de la física está dada por las reglas de la relatividad especial. De esto se sigue que los marcos inerciales de la relatividad especial pueden ser identificados con marcos en caída libre en relatividad general. En tales marcos de referencia, la gravedad no está presente, y, por tanto, no se necesita modificar la forma de las leyes de la física para tener en cuenta los efectos gravitacionales. Desde la perspectiva matemática, esto significa que existe una transformación de coordenadas para la cual los símbolos de Christoffel se anulan, lo cual elimina el campo gravitacional haciendo que localmente el espaciotiempo sea plano. En un espaciotiempo general  $(\mathcal{M}, g)$  siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas locales (coordenadas de Riemann) tales que los símbolos de Christoffel se anulen en tal punto. También es posible encontrar coordenadas locales (coordenadas de Fermi) tal que los símbolos de Christoffel se anulan a lo largo de una geodésica. Esto se debe a que en vecindades lo suficientemente pequeñas de una geodésica, las aceleraciones relativas de objetos en caída libre se anulan (en [32] se da el procedimiento para obtener dichas coordenadas). Por otro lado, esto implica que la forma covariante de las leyes será idéntica a las de la relatividad especial, lo único que debe cambiar para tomar en cuenta la presencia de campos gravitacionales es que el espacio plano de Minkowski válido solo para la descripción de sistemas inerciales, debe reemplazarse por un espaciotiempo más general  $(\mathcal{M}, g)$  que esté descrito por la métrica  $g$ , es decir,  $\eta \rightarrow g$ . Esto último sugiere que la gravedad es de naturaleza puramente geométrica, pues, para incluirla en la formulación de las leyes físicas solo basta con pasar del espaciotiempo de Minkowski  $(\mathcal{N}, \eta)$  a otro espaciotiempo más general  $(\mathcal{M}, g)$ . Así, al hacer un cambio en la geometría introducimos gravedad. A su vez, esto implica que la métrica, en última instancia, determina los efectos de la gravedad. No obstante, en una variedad general, no es posible encontrar un sistema de coordenadas en el cual todos los símbolos de Christoffel sean nulos. En tales casos, los efectos gravitacionales no se pueden identificar con los efectos inerciales y es ahí donde la gravedad muestra su carácter absoluto [32]. Las inhomogeneidades del campo gravitacional dan lugar a las llamadas fuerzas de marea y estas son consideradas como la manifestación fundamental de la gravedad [30]. Matemáticamente, al tener un tensor de curvatura diferente de cero, los efectos gravedad se presentan mediante la aceleración relativa de partículas de prueba <sup>3</sup>. Desde el punto de vista de la teoría de Newton, dicha aceleración se atribuye a una fuerza que actúa entre las partículas y que las obliga a cambiar su estado de movimiento. Sin embargo, en relatividad general, se considera que la aceleración de las partículas es causada por la curvatura del espaciotiempo y no por una fuerza que actúa entre ellas. Es decir, lo que clásicamente se considera como una fuerza gravitacional, en el contexto de relatividad general, es un efecto debido a la curvatura del espaciotiempo. En resumen, uniendo todos los puntos anteriores, Einstein descubrió que el espaciotiempo

---

<sup>3</sup>Tal efecto es descrito por la ecuación de desviación geodésica.

puede modelarse como una variedad que localmente es plana (donde las reglas de la relatividad especial son válidas) pero globalmente puede tener curvatura, y, que, la gravedad debería ser entendida como el efecto debido a la curvatura del espaciotiempo, es decir, que la gravedad es geometría.

## Tensor de Energía-Momento

Si bien, hemos dicho que el tensor de Riemann da una medida de la curvatura del espaciotiempo, hasta el momento no hemos averiguado nada acerca de qué causa que el espaciotiempo se curve. Para poder responder esta pregunta recordemos que en la teoría clásica de Newton, la masa es la fuente del campo gravitacional <sup>4</sup>. De esto se sigue que, si la masa es la fuente del campo, entonces también debe ser la causa de que el espaciotiempo se curve. No obstante, Einstein se dio cuenta de que no solo la masa podía causar curvatura, sino que también la energía. Por tanto, como la materia no es suficiente para describir la fuente de curvatura, es necesario considerar el tensor de energía-momento, el cual generaliza la noción de fuente del campo gravitacional.

El tensor de energía-momento  $T_{ab}$  es un tensor simétrico, es decir,  $T_{ab} = T_{ba}$  que en forma matricial está dado por

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

El término  $T_{00}$  se corresponde con la densidad de energía, los términos  $\{T_{10}, T_{20}, T_{30}\}$ , se interpretan usualmente como la densidad de momento,  $\{T_{12}, T_{13}, T_{23}\}$  representan las contribuciones de esfuerzo cortante, es decir, términos disipativos y finalmente  $\{T_{11}, T_{22}, T_{33}\}$  definen la presión. Por otro lado, puesto que la energía y el momento deben conservarse,  $T_{ab}$  debe satisfacer

$$\nabla_a T^{ab} = 0. \quad (2.7)$$

## Ecuaciones de campo de Einstein

El principio de Mach [36] expresa la idea de que la inercia de un objeto es el resultado de la interacción de dicho objeto con el resto del universo. Einstein conocía este principio y probablemente, influido por este, pensó que la curvatura del espaciotiempo debería estar relacionada localmente con la presencia o ausencia de materia. La descripción de la materia queda determinada por el tensor de energía-momento  $T_{ab}$  y la curvatura del espaciotiempo, mediante el tensor de Riemann  $R^a{}_{bcd}$ . Así, en principio, con esto debería ser posible describir como la materia curva el espaciotiempo. Por tanto, el punto era encontrar una manera matemáticamente consistente de relacionar el tensor de curvatura con el tensor de energía-momento.

Desde el punto de vista Newtoniano, la gravedad es descrita por dos ecuaciones. La primera

---

<sup>4</sup>esto se ve claramente en la ecuación de Poisson,  $\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$ , donde  $\rho$  es la densidad de masa que actúa como fuente del campo  $\phi$

describe la trayectoria de una partícula en el espacio. Si una partícula está moviendo en presencia de un campo gravitacional representado mediante el potencial  $\phi$ , la segunda ley de Newton está dada por

$$F = ma = -m\nabla\phi. \quad (2.8)$$

Esta la podemos escribir como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\phi. \quad (2.9)$$

Podemos notar que 2.9 es análoga a la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{D^2\eta^a}{D\tau^2} = R^a{}_{bcd}u^b u^c \eta^d. \quad (2.10)$$

Comparando las ecuaciones (2.9) y (2.10), obtenemos una pista sobre como describir el comportamiento de la materia en respuesta a un campo gravitacional. Ahora, consideremos la ecuación de Poisson que describe como la masa actúa como fuente de un campo gravitacional

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho. \quad (2.11)$$

Observamos que, por un lado, la fuente del campo está dada por la densidad de materia  $\rho$ . Sin embargo, desde la perspectiva relativista, dada la equivalencia entre materia y energía, no solo la materia sería fuente del campo, sino también la energía. Por tanto, para representar correctamente la fuente del campo se debe usar el tensor de energía-momento. Por otro lado, la métrica contiene toda la información geométrica del espacio y puesto que la gravedad está relacionada con la curvatura del espaciotiempo, es natural pensar que esta toma el papel del potencial gravitacional, por tanto, para obtener una expresión análoga a la ecuación (2.11) necesitamos una expresión que considere segundas derivadas de la métrica. Los coeficientes de Christoffel  $\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$  solo tienen primeras derivadas de la métrica, sin embargo, el tensor de Riemann al estar definido mediante derivadas de los símbolos de Christoffel contienen segundas derivadas  $R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{bd} - \partial_d \Gamma^a{}_{bc} + \Gamma^e{}_{bd} \Gamma^a{}_{ec} - \Gamma^e{}_{bc} \Gamma^a{}_{ed}$ . La ecuación de Poisson relaciona la traza de  $\nabla_a \nabla_b \phi$  con la densidad de masa  $\rho$ , así, una expresión más parecida a esta envolvería términos relacionados con la traza del tensor de Riemann la cual define el tensor de Ricci  $R_{ab}$ . Así, como una primera aproximación podemos escribir

$$R_{ab} \propto T_{ab}. \quad (2.12)$$

No obstante, dado que el tensor de energía-momento debe satisfacer la restricción  $\nabla_b T^{ab} = 0$ , el lado izquierdo de la ecuación también debe satisfacer una expresión análoga, sin embargo,  $\nabla_b R^{ab} \neq 0$ . De hecho, se puede mostrar que  $\nabla_b R^{ab} = \frac{1}{2}g^{ab}R$ . Esto nos da una pista de cuál debería ser la expresión correcta que debe ir del lado izquierdo de la ecuación. Definimos el tensor de Einstein como

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (2.13)$$

el cual satisface  $\nabla_b G^{ab} = 0$ . De esta manera llegamos a las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (2.14)$$

donde  $\kappa$  es una constante que se determina en el límite de campo débil, comparando con las ecuaciones Newtonianas y que resulta estar dada por  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ . En unidades naturales las ecuaciones son [37]

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}. \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones describen la dinámica del espaciotiempo, y, por tanto, el campo gravitacional.

Las ecuaciones de campo predicen que el universo es dinámico. Sin embargo, en la época de Einstein, se creía que el universo debería ser estático, así, guiado por esta premisa, Einstein introdujo la llamada constante cosmológica que daba la posibilidad de obtener modelos estáticos. Tiempo después, Hubble descubrió que el universo de hecho se expandía. Einstein desechó la constante de sus ecuaciones, llamándola el peor error de su vida. En la época actual, las observaciones cosmológicas sugieren la existencia de una clase de energía de vacío que causa que el universo se expanda aceleradamente. Esto se puede modelar introduciendo de nuevo la constante cosmológica. Si se define la densidad de energía de vacío como  $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi}$  y se incluye este término, las ecuaciones de campo se leen

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + g_{ab}\Lambda = 8\pi T_{ab}. \quad (2.16)$$

El procedimiento que se ha mostrado aquí, es un esbozo, sobre como Einstein pudo determinar la relación entre la curvatura del espaciotiempo y la energía que causaba dicha curvatura. Por tal razón, debe considerarse como un postulado, más que una derivación de primeros principios. Sin embargo, existe una manera rigurosa de calcular las ecuaciones de campo a partir de métodos variacionales.

## Principio de acción en Relatividad General

Las ecuaciones de Einstein se pueden obtenerse del principio de mínima acción, al variar la acción

$$S = S_g + S_m, \quad (2.17)$$

donde  $S_g$  es la acción del campo gravitacional y  $S_m$  la acción que corresponde a los campos de materia. La acción del campo gravitacional está dado por [38]

$$S_g = \frac{1}{16\pi} \int R dV, \quad (2.18)$$

donde  $dV = \sqrt{-g} d^4x$  es el elemento invariante de volumen. Al variar (2.18) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{16\pi} \left( R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \right). \quad (2.19)$$

Por otro lado, la acción de la materia la podemos escribir como

$$S_m = \int \mathcal{L} dV, \quad (2.20)$$

de tal manera que el tensor de energía momento queda definido por la expresión

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{ab}}. \quad (2.21)$$

Al variar la acción total,  $S = S_g + S_m$  obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{ab}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ab}} = 0 \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{16\pi} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) - \frac{1}{2} T_{ab} = 0, \quad (2.23)$$

de donde se siguen las ecuaciones de campo

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.24)$$

## 2.2. Agujeros negros

Esta sección está basada siguiendo las discusiones que se presentan en [39].

Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas de segundo orden, lo que hace extremadamente difícil su resolución analítica. La suma de dos soluciones no es una nueva solución. Esto se debe a que la curvatura del espaciotiempo no solo se acopla a la materia y a la energía, sino también, a sí misma, lo que implica que la propia curvatura genera curvatura. De ahí el carácter no lineal de las ecuaciones. Aunque el propio Einstein pensaba que sus ecuaciones no se podrían solucionar, poco tiempo después de que publicara su teoría, tuvo noticia de la primera solución analítica: la métrica de Schwarzschild. Con el paso del tiempo fueron apareciendo nuevas soluciones [40], no obstante, la mayoría de soluciones analíticas conocidas son casos con mucha simetría. La métrica de Schwarzschild es una solución estática con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en vacío y es un buen modelo para describir el campo gravitacional causado por objetos esféricos, como estrellas, planetas y agujeros negros. Para entender la solución de Schwarzschild, primero, es necesario introducir algunas definiciones. Un espaciotiempo se dice que es estacionario si admite un vector de Killing  $\xi^a$  tipo tiempo i.e  $g_{ab}\xi^a\xi^b = -1$ . En tal caso, existe un sistema de coordenadas donde  $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ , y, por tanto,  $\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = 0$ . Un espaciotiempo es estático si es estacionario, es decir, si tiene un vector de Killing tipo tiempo  $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ , que además satisface

$$\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]} = 0. \quad (2.25)$$

La condición de estaticidad del vector de Killing, significa que este es ortogonal a hipersuperficies espaciales de  $t = cte$ . Un espaciotiempo estático no evoluciona, de lo cual se sigue que existe un sistema de coordenadas donde la métrica no depende del tiempo. A su vez, geoméricamente esta condición se traduce en que  $ds^2$  debe ser invariante ante inversiones

temporales  $t \rightarrow t' = -t$ , lo que su vez implica que  $g_{ti} \equiv 0$ . La métrica de un espaciotiempo estático toma la forma

$$ds^2 = g_{tt}(x^1, x^2, x^3)dt^2 + g_{ij}(x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j. \quad (2.26)$$

donde  $i, j, k$  pueden tomar valores 1, 2, 3.

Por otro lado, para un espaciotiempo estacionario pero no estático  $g_{ti} \neq 0$ . Por ejemplo, el espaciotiempo de Kerr, el cual representa un agujero negro rotante, la transformación  $t \rightarrow t' = -t$  cambia el sentido de la rotación.

Un espaciotiempo es esféricamente simétrico, sí admite tres vectores de Killing tipo espacio, linealmente independientes, que satisfacen el álgebra de SO(3)

$$[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ijk}\xi_k, \quad (2.27)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo totalmente antisimétrico con  $\epsilon_{123} = 1$ .

En coordenadas esféricas, la métrica de un espaciotiempo con estas características se puede escribir como

$$ds^2 = g_{tt}(t, r)dt^2 + 2g_{tr}(t, r)dtdr + g_{rr}(t, r)dr^2 + b^2(t, r) [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]. \quad (2.28)$$

De las expresiones (2.26) y (2.28), se sigue que la forma de la métrica de un espaciotiempo estático con simetría esférica debe tener la forma [41]

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]. \quad (2.29)$$

Las funciones  $B(r)$  y  $A(r)$  son desconocidas, por tanto, la idea es introducir este Anzats en las ecuaciones de Einstein en vacío (puesto que la solución de Schwarzschild está dada en ausencia de materia) para poder determinarlas. Utilizando  $\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$  obtenemos los símbolos de Christoffel no triviales:

$$\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2B} \frac{dB}{dr}, \quad (2.30)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2A} \frac{dB}{dr}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2A} \frac{dA}{dr}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \text{sen}^2\theta}{A}, \quad (2.31)$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\text{sen}\theta \cos\theta, \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta, \quad \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}. \quad (2.33)$$

Con estos, calculamos los elementos del tensor de Ricci:

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'}{A}, \quad (2.34)$$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'}{A}, \quad (2.35)$$



$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{A}, \quad (2.36)$$

$$R_{\varphi\varphi} = -\text{sen}^2\theta + \frac{r\text{sen}^2\theta}{2A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + \frac{\text{sen}^2\theta}{A}, \quad (2.37)$$

donde las cantidades primadas representan derivadas con respecto a  $r$ . Por otro lado, las ecuaciones de Einstein en vacío están dadas por

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0. \quad (2.38)$$

Si contraemos (2.38) con la métrica  $g^{ab}$  las ecuaciones de campo se reducen a <sup>5</sup>

$$R_{ab} = 0. \quad (2.39)$$

Usando las componentes del tensor de Ricci podemos comprobar que

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = \frac{1}{rA} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) = 0, \quad (2.40)$$

por tanto tenemos la ecuación diferencial  $A'B - B'A = (AB)' = 0$  de donde  $AB = \text{cte}$ . Para determinar la constante, podemos pedir que cuando  $r$  tiende a infinito la métrica (2.29) tienda a la métrica de Minkowski, así  $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1$ . Por tanto,  $A = \frac{1}{B}$ . Con este resultado podemos escribir

$$R_{\theta\theta} = -1 + rB' + B = -1 + (rB)', \quad (2.41)$$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rB}. \quad (2.42)$$

Con esto  $R_{ab} = 0$  se reduce a

$$R_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow B = 1 + \frac{\text{cte}}{r}. \quad (2.43)$$

En el límite Newtoniano  $g_{tt} \rightarrow -1 + \frac{MG}{r}$ , así, al ser  $B(r)$  la componente  $tt$  de la métrica (2.29) obtenemos

$$B(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (2.44)$$

Por tanto, la métrica de Schwarzschild está dada por

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (2.45)$$

Esta métrica describe un objeto esférico y estático situado en el origen. Esto lo podemos saber por qué en la mecánica Newtoniana el potencial de un objeto esférico con masa  $m$  es precisamente  $\Phi = -\frac{GM}{r}$ . De esta manera,  $M$  se puede interpretar como la masa del

---

<sup>5</sup> $g^{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}g_{ab} = R - 2R = 0$ , donde se uso  $g^{ab}g_{ab} = \delta^a_b = 4$ .

objeto que causa la curvatura del espacio. Resulta inmediato observar que (2.48) tiene una singularidad en el llamado radio de Schwarzschild,  $r = 2M$ , no obstante, esta no es una singularidad del espaciotiempo físico, sino una singularidad de las coordenadas. La manera de distinguir entre estas, es analizando los invariantes de curvatura. En el caso de Schwarzschild, tanto  $R$  como  $R_{ab}R^{ab}$  resultan inútiles, pues la métrica es una solución en vacío ( $R = 0, R_{ab} = 0$ ). Sin embargo, al calcular el escalar de Kretschmann, obtenemos [39] [42]

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (2.46)$$

Aquí podemos ver que  $r = 2M$  es una singularidad de coordenadas, puesto que el escalar es regular en ese punto. En contraste, en  $r = 0$  si se tiene una singularidad física, ya que en ese punto la curvatura se vuelve infinita. Nótese que aun cuando un invariante sea regular en un punto, no es seguro que se trate de una singularidad de coordenadas, pues podría existir otro escalar que diverja en ese punto.

Desde la perspectiva matemática, las singularidades del espaciotiempo se entienden como puntos en los que la métrica no está definida o no es diferenciable, sin embargo, estrictamente, estos puntos no deberían considerarse como pertenecientes al espaciotiempo. Así, las singularidades podría entenderse como hoyos que se dejan en el espaciotiempo al remover estos puntos. No obstante, se cree que una interpretación física no se podrá dar hasta que no se tenga una teoría cuántica de la gravedad.

A pesar de que  $r = 2M$  es una singularidad de coordenadas, esta tiene una interpretación física, como se verá más adelante. La métrica (2.48) está escrita en las llamadas coordenadas de Schwarzschild; estas solo son útiles para describir la región donde  $r > 2M$ . Para entender la estructura causal de este espaciotiempo es necesario usar unas coordenadas que no sean singulares en  $r = 2M$ . Las coordenadas de Eddington-Finkelstein están dadas por [39]

$$v = t + r + 2M \ln(r - 2M) \quad u = t - r - 2M \ln(r - 2M), \quad (2.47)$$

por lo que la métrica queda como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dvdu + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (2.48)$$

En estas coordenadas las geodésicas nulas entrantes y salientes son

$$\tilde{t} = -r + C, \quad \tilde{t} = r + 4M \ln|r - 2M| + C. \quad (2.49)$$

En estas coordenadas notamos que para  $r \gg 2M$ , los conos de luz se comportan como en el espacio de Minkowski, esto es de esperarse, pues, la métrica de Schwarzschild es asintóticamente plana. Por otro lado, al acercarse a  $r = 2M$ , los conos comienzan a inclinarse en dirección a la singularidad, porque el ángulo de las geodésicas salientes se vuelve cada vez mayor debido a que la curvatura del espaciotiempo es tan intensa que les cuesta salir. Al llegar a  $r = 2M$ , las geodésicas salientes forman un ángulo de 90 grados con el eje  $r$ . De esta manera, un rayo de luz emitido hacia el exterior se queda a una distancia fija  $r = 2M$ . Es decir, se queda atrapada en la superficie  $r = 2M$ . Para radios  $r < 2M$ , la curvatura es tan intensa que líneas geodésicas salientes no pueden escapar y terminan en la singularidad.

De ese análisis podemos concluir que el radio de Schwarzschild define una hipersuperficie nula (ya que en ella se mueven los rayos de luz) que actúa como una membrana unidireccional que divide el espacio en dos regiones causalmente desconectas. Esta membrana es el horizonte de sucesos. Este también puede ser entendido como la frontera de una región del espaciotiempo más allá de la cual los eventos físicos no pueden afectar o ser comunicados a un observador en el exterior. La región interior de esta frontera, es decir, donde  $r < 2M$ , es llamada agujero negro. Una definición más formal se dará más adelante.

Notemos que si  $M < 0$  no habría horizonte de eventos que cubriera a la singularidad y, por tanto, estaría desnuda. No obstante, la conjetura de censura cósmica establece que las singularidades desnudas no ocurren en la naturaleza.

Las coordenadas que describen por completo el espaciotiempo de Schwarzschild son las coordenadas de Kruskal. En estas coordenadas la métrica se escribe como

$$ds^2 = \frac{16M^2}{r} e^{\frac{-r}{2M}} (dT^2 - dR^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.50)$$

donde  $T$  y  $R$  se relacionan con las coordenadas de Schwarzschild mediante

$$T = e^{\frac{r}{4M}} \sqrt{r - 2M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad R = e^{\frac{r}{4M}} \sqrt{r - 2M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (2.51)$$

A diferencia de las coordenadas de Schwarzschild que solo cubren la región con  $r > 2M$ , las coordenadas de Kruskal cubren por completo todo el espaciotiempo. Estas forman lo que ese llama la extensión máxima de la métrica de Schwarzschild. Desde la perspectiva Newtoniana también existe manera de definir una noción de agujero negro. La velocidad de escape de una masa esférica  $M$  de radio  $R$  satisface  $\frac{1}{2}v_{esc}^2 = \frac{M}{R}$ , o  $v_{esc} = \sqrt{\frac{2M}{R}}$ . Notemos que la velocidad de escape  $v_{esc}$  excedería la velocidad de la luz si  $R < r_s = \frac{2M}{c^2}$  por lo que en principio se debe cumplir  $R > r_s$ . El radio  $r_s$  se denomina radio de Schwarzschild para la masa  $M$ . De esta manera, la región con  $R < r_s$  define una región de la que ni la luz podría salir. Conceptualmente, esto podría tomarse como la definición Newtoniana de un agujero negro. Finalmente, debemos mencionar que existen teoremas de unicidad que establecen que un agujero negro -en la teoría de Einstein-Maxwell en el vacío- puede ser caracterizados solo por tres parámetros: su masa  $M$ , su momento angular  $J$  y su carga  $Q$ . Las anteriores propiedades llevan a enunciar el teorema de no pelo, que básicamente establece que toda otra información adicional -a la masa, la carga y el momento angular- de la materia que forma el agujero negro o que está cayendo en él, desaparece detrás del horizonte de sucesos y es inaccesible a un observador externo. El término no pelo fue acuñado por John Archibald Wheeler para referirse al hecho de que no importa la naturaleza de los objetos que caen en el agujero, el estado final de este es siempre independiente del cuerpo original, tanto de sus propiedades físicas, como de su forma. A consecuencia de esto, existen solo cuatro soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que describen estos objetos:

- La solución de Schwarzschild (1916), estática y esféricamente simétrica.
- La solución de Reissner-Nordström (1918), estática, esféricamente simétrica; describe un objeto con masa  $M$  y con carga eléctrica  $Q$ .
- La solución de Kerr (1963), estacionaria, axisimétrica; describe un objeto con masa  $M$  y con momento angular  $J$ .

- La solución de Kerr-Newman (1965), estacionaria, axisimétrica; describe un objeto que depende de los tres parámetros que permite el teorema de no pelo, masa  $M$ , carga  $Q$  y momento angular  $J$ .

De lo anterior es claro que la solución de Kerr-Newman es la más general de un agujero negro en equilibrio que satisface el teorema de no pelo. Dicha solución en las coordenadas de Boyer-Lindquist puede ser expresada como

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.52)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2},$$

donde  $a = \frac{J}{M}$  es el momento angular específico y  $r_+$  es la distancia a la que se encuentra el horizonte de eventos. Si consideramos  $a = 0$  y  $Q = 0$  obtenemos las métricas de Reissner-Nordstrom y Kerr respectivamente, si se toman simultáneamente recuperamos la solución de Schwarzschild.

Nótese que de la expresión  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$  los parámetros que caracterizan un agujero negro no pueden tomar valores arbitrarios, sino que los únicos permitidos son aquellos que satisfacen la condición de masa positiva  $a^2 + Q^2 \leq M^2$ .

## 2.3. Cosmología FLRW

Esta sección se escribió siguiendo las referencias [35] [33].

Encontrar una solución analítica a las ecuaciones de campo es una tarea sumamente complicada. No obstante, al considerar espaciotiempos con mucha simetría esta dificultad se reduce. Este es el caso de la cosmología, donde se considera que el espaciotiempo del universo debe satisfacer el principio cosmológico, el cual asegura, basado en observaciones, que el universo, visto a grandes escalas, es homogéneo e isotrópico. Esto significa que el universo se ve igual independientemente del lugar (homogeneidad) y la dirección (isotropía) desde el cual se observa. Estas características imponen restricciones sobre la forma que debe tener la métrica para que capture y represente la estructura espaciotemporal del universo completo.

Desde el punto de vista matemático, la homogeneidad implica que el espaciotiempo debe tener una simetría ante traslaciones y la isotropía, una simetría ante rotaciones. Un espaciotiempo que es homogéneo e isotrópico, es máximalmente simétrico, lo cual significa que tiene el máximo número posible de vectores de Killing.

Para espacios máximalmente simétricos, el tensor de Riemann satisface [42] [35]

$$R_{cdab} = k(g_{ca}g_{db} - g_{cb}g_{da}), \quad (2.53)$$

donde la curvatura  $k$  está dado en términos de escalar de Ricci

$$k = \frac{R}{n(n-1)}. \quad (2.54)$$

En estos espaciotiempo el escalar de Ricci  $R$  es constante y son caracterizados localmente por el signo de  $k$ . En relatividad general se tienen tres espaciotiempo máximalmente simétricos: Minkowski para  $k = 0$ , de de Sitter para  $k > 0$  y para  $k < 0$ , anti de Sitter.

Algo importante que se debe considerar es que las observaciones muestran que el universo es homogéneo e isotrópico en el espacio, más no en el tiempo, porque evoluciona. De esto se sigue que solo la parte espacial de la métrica debe satisfacer las condiciones que se describieron líneas arriba. Esto se puede entender de la siguiente manera. Supongamos que puedo tomar fotos del universo para cada instante de tiempo. Las fotos representan rebanadas espaciales del universo y es en cada una de las fotos, donde se presenta la homogeneidad y la isotropía. Si comparo dos fotos tomadas en  $t$  y en  $t + t_1$ , el universo es diferente porque evolucionó de un tiempo a otro, pero en cada una de las fotos se cumplen las condiciones de homogeneidad e isotropía. Matemáticamente, eso significa que el espaciotiempo se puede foliar con hipersuperficies tipo espacio que son máximalmente simétricas.

La métrica que cumple con las condiciones que hemos discutido tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2, \quad (2.55)$$

donde  $a(t)$ , el factor de escala, es una función desconocida. Una vez que se haya determinado la forma explícita de la métrica, i.e., al conocer  $d\sigma^2$ , y esta sea introducida en las ecuaciones de Einstein, la solución de dichas ecuaciones impondrá restricciones para  $a(t)$ . Tales restricciones darán lugar a las ecuaciones que determinan la evolución del universo. Ahora determinemos la forma de  $d\sigma^2$ .

Si el espacio es máximalmente simétrico, debe tener simetría esférica, así, se puede mostrar [35] que la métrica más general que satisface los criterios es

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.56)$$

donde  $k$  es una constante que describe la curvatura espacial. Esta puede tomar tres valores:  $k = 1$  describe un universo cerrado, i.e., de volumen finito,  $k = 0$  describe un universo plano y  $k = -1$  un universo abierto.

Una vez determinada la forma espacial podemos escribir la métrica completa,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.57)$$

Esta es la métrica de Friedmann-Lemaître -Robertson-Walker (FLRW).

Diversas observaciones señalan que el universo se está expandiendo, de esta manera, los puntos del universo se separan a medida que el tiempo transcurre, por tanto,  $a(t)$  es una función que depende explícitamente del tiempo.

El factor de escala en el tiempo presente se define como  $a(t = 0) = 1$ . Por otra parte, observamos que la métrica FLRW describe un universo isotrópico, porque no tiene términos cruzados entre el tiempo y el espacio, esto significa que no hay una dirección privilegiada. También describe el universo homogéneo debido a la simetría esférica.

La métrica FLRW se obtuvo al suponer las propiedades geométricas de homogeneidad e isotropía. Sin embargo, sí se pretende que esta métrica describa el espaciotiempo del universo que observamos, debemos exigir que satisfagan las ecuaciones de Einstein. Ahora bien, para resolver dichas ecuaciones es necesario proporcionar el tensor de energía-momento que describa el contenido de materia-energía del universo. Un modelo consistente con las simetrías de la métrica (2.57) es el fluido perfecto — un sistema termodinámico que exhibe isotropía y homogeneidad—. De esta manera, se propone que el contenido material de universo está dado por el tensor de energía-momento

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}, \quad (2.58)$$

donde  $g_{ab}$  es la métrica FLRW,  $\rho = \rho(t)$  la densidad de energía,  $p = p(t)$  la presión y  $u_a$  la cuadrivelocidad de un observador comovil. Con esta información es posible resolver las ecuaciones de Einstein para la métrica FLRW.

Primero, podemos comprobar que

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma^t_{\theta\theta} = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma^t_{\phi\phi} = a\dot{a}r^2 \sin^2\theta, \quad (2.59)$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = \sin^2\theta \Gamma^r_{\theta\theta} \quad \Gamma^r_{tr} = \Gamma^{\theta}_{t\theta} = \Gamma^{\phi}_{t\phi} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.60)$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{1}{\tan\theta}. \quad (2.61)$$

Asimismo, las componentes del tensor de Ricci son

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad R_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \quad (2.62)$$

Mientras que el escalar de Ricci viene dado por

$$R = -\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (2.63)$$

Al introducir estas expresiones junto con los respectivos componentes del tensor de energía-momento en las ecuaciones de Einstein, obtenemos las ecuaciones que debe satisfacer  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  y  $p(t)$ .

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (2.64)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p). \quad (2.65)$$

Estas son las ecuaciones de Friedmann, las cuales determinan la evolución del universo. Podemos ver que la dinámica de la métrica se reduce a la dinámica del factor de escala, que es el parámetro indeterminado del que se habló antes. Nótese que derivando respecto al tiempo la ecuación (2.64) y sustituyéndola en (2.65) se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt} a^3 = 0 \quad (2.66)$$

Si tomamos  $V = a^3$  y  $U = \rho a^3$ , esta ecuación muestra la misma estructura que la primera ley de la termodinámica  $TdS = dU + PdV = 0$ , lo que sugiere que la evolución del universo es un proceso adiabático.

Si definimos el parámetro de Hubble  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  podemos expresar las ecuaciones de Friedmann como

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (2.67)$$

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + p). \quad (2.68)$$

Por otro lado, si en las ecuaciones de campo de Einstein incluimos explícitamente la constante cosmológica, i.e.,  $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$ , se obtienen las expresiones

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.69)$$

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + p). \quad (2.70)$$

Estas ecuaciones diferenciales ordinarias, de segundo orden, rigen la evolución del universo y han sido utilizadas con mucho éxito en la cosmología moderna, pues encajan de manera notable con las observaciones.

Consideremos la ecuación de conservación del tensor de energía-momento

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad (2.71)$$

en particular, fijemonos en la componente temporal

$$\nabla_a T^a_t = \partial_a T^a_t + \Gamma^a_{ac} T^c_t - \Gamma^c_{at} T^a_c = 0, \quad (2.72)$$

donde  $T^a_b = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ . Al usar los símbolos de Christoffel que se calcularon con anterioridad se obtiene

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.73)$$

Notemos que esta expresión, que determina la conservación de la energía, también puede obtenerse de las ecuaciones de Friedmann (2.67) y (2.68) por lo que no son independientes

entre sí. Las ecuaciones de Friedmann no forman un sistema algebraico cerrado, pues se tiene dos ecuaciones y tres incógnitas; para resolver el sistema se tiene que dar una ecuación adicional. La forma más sencilla de completar el sistema, es proponer una relación entre  $\rho$  y  $p$ , es decir, una ecuación de estado. En cosmología se suele usar la ecuación de estado barotrópica dada por

$$p = \omega\rho, \quad (2.74)$$

donde  $\omega$  es el factor barotrópico que determina si el fluido en cuestión se trata de radiación ( $\omega = 1/3$ ), materia ( $\omega = 0$ ) o energía oscura ( $\omega = -1$ ).

La ecuación de estado, permite reescribir (2.73) como

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.75)$$

Integrando esta última obtenemos,

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (2.76)$$

Para el caso de radiación, materia y energía oscura obtenemos, respectivamente,

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4}, \quad (2.77)$$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (2.78)$$

$$\rho = \rho_0 = cte. \quad (2.79)$$

Observamos que la densidad de energía disminuye más rápido cuando el contenido material del universo está dado solo por radiación que cuando está dado solo por materia, mientras que en el caso de energía oscura se mantiene constante.

## Ecuaciones de Friedmann y parámetro de densidad

Consideremos las ecuaciones sin constante cosmológica. De (2.67) podemos escribir como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi}{3H^2} \rho - 1 = \frac{\rho}{\rho_c} - 1, \quad (2.80)$$

donde la densidad crítica  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}$  define el valor que la densidad de energía  $\rho$  debe tomar al tiempo  $t$  para que el espaciotiempo sea plano. A su vez, definiendo el parámetro de densidad  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$  esta la podemos reescribir como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1. \quad (2.81)$$



Podemos notar que el signo de la curvatura queda determinado por

$$\text{sgn}(k) = \text{sgn}(\Omega - 1). \quad (2.82)$$

Así:  $\Omega > 1 \leftrightarrow k = 1$ ,  $\Omega < 1 \leftrightarrow k = -1$ ,  $\Omega = 1 \leftrightarrow k = 0$ . El parámetro de densidad define que tipo de universo se tiene; cerrado, abierto o plano.

### Evolución de un universo plano

Consideremos un universo plano, i.e  $k = 0$ , en cuyo caso la ecuación de Friedmann es

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho. \quad (2.83)$$

La cual, en términos del factor de escala, se lee como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.84)$$

Esta ecuación diferencial para  $a(t)$  puede integrarse para obtener

$$a(t) = a_0(H_0 t)^{2/(3(1+\omega))}. \quad (2.85)$$

Al considerar distintos valores de  $\omega$  se obtienen las soluciones,

$$a(t) = a_0(H_0 t)^{1/2}, \quad \omega = 1/3, \quad (2.86)$$

$$a(t) = a_0(H_0 t)^{2/3}, \quad \omega = 0, \quad (2.87)$$

$$a(t) = a_0 e^{H_* t}, \quad \omega = -1. \quad (2.88)$$

Por otro lado, si consideramos la densidad crítica actual  $\rho_{0,c} = \frac{3H_0^2}{8\pi}$  podemos escribir la ecuación de Friedmann como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{0,c}}. \quad (2.89)$$

En la cosmología actual, se considera que hay tres clases de materia que abunda en el universo: radiación, materia y energía oscura. Cada una con una densidad y abundancia distinta. Con esto podemos definir la densidad total  $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda$  y escribir

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_{0,r}}{\rho_{0,c}} a^{-4} + \frac{\rho_{0,m}}{\rho_{0,c}} a^{-3} + \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,c}}. \quad (2.90)$$

En términos del parámetro de densidad podemos escribir

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}, \quad (2.91)$$

donde

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1. \quad (2.92)$$

Esta se debe satisfacer para todo tiempo, en particular para  $t_0$ ,  $\sum_i \Omega_{0,i} + \Omega_{0,k} = 1$ . Las observaciones recientes muestran que sus valores son  $\Omega_{0,r} \approx 5.3 \times 10^{-5}$ ,  $\Omega_{0,m} \approx 0.30$ ,  $\Omega_{0,\Lambda} \approx 0.69$ . Esto indica que nuestro universo actual está dominado por la llamada energía oscura.

## 2.4. Teorías alternativas de gravedad: Gauss-Bonnet y Lovelock

Esta sección está basada en [43] [44].

En la relatividad general, las ecuaciones de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con su contenido de materia

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.93)$$

Sin embargo, es natural preguntarse si estas son las únicas ecuaciones que puede describir el campo gravitacional.

La parte izquierda de (2.93), contiene la información de la geometría del espaciotiempo relevante para describir el campo gravitacional. Ambos términos tienen la propiedad de ser tensores simétricos que solo depende de la métrica ( $g_{ab}$ ), su primera  $g_{ab,c}$  y segunda derivada  $g_{ab,cd}$ . De esta manera, dado que la métrica es la variable fundamental, las ecuaciones de movimiento son de segundo orden. Otra de las propiedades importantes que define la teoría, es que tanto el tensor de Einstein como el tensor de energía-momento tienen que tener divergencia nula. Bajo estas consideraciones, la pregunta por la unicidad de las ecuaciones de Einstein se reduce a responder si  $G_{ab} + \Lambda g_{ab}$  es el único objeto matemático que puede representar la geometría del campo gravitacional. Lovelock respondió esta pregunta mostrando que existen teorías de la gravedad más generales que la relatividad general.

### Teoría de la gravedad de Lovelock

Interesado en responder si las ecuaciones de campo de Einstein son únicas, Lovelock concluyó que un tensor  $A^{ab}$  que satisficiera las siguientes condiciones

$$A^{ab} = A^{ba}, \quad (2.94)$$

$$\nabla_b A^{ab} = 0, \quad (2.95)$$

$$A^{ab} = A^{ab}(g_{mn}, g_{mn,p}, g_{mn,pq}), \quad (2.96)$$

sería un buen candidato para la parte izquierda de las ecuaciones de campo, pues bajo estas condiciones se podría acoplar al tensor de energía-momento. Con esto, se planteó encontrar todos los posibles tensores que cumplieran con los requerimientos de simetría (2.94), conservación (2.95) y que producirán ecuaciones de movimiento de segundo orden en la métrica (2.96).

Cartan y Weyl habían investigado <sup>6</sup> esta posibilidad antes que Lovelock, mostrando que si, además de las condiciones (2.94-2.96), se imponía que  $A^{ab}$  fuera lineal en las segundas derivadas de  $g_{ab}$ , la única solución posible, tenía la forma

$$A^{ab} = cG^{ab} + dg^{ab}, \quad (2.97)$$

---

<sup>6</sup>Ver referencias citadas en [45] [46].

donde  $G^{ab}$  es el tensor de Einstein y  $c, d$  constantes. Por tanto, bajo estas condiciones, las ecuaciones de Einstein son únicas.

Lovelock, relajó la condición de linealidad en  $A^{ab}$  y con esto mostró que existe una gran cantidad de posibles tensores que satisfacen las condiciones (2.94-2.96) y que, por tanto, podrían ser candidatos para representar la parte geométrica de las ecuaciones de campo. Algo importante es que en estas soluciones no se introducía ningún grado de libertad adicional, sino que la teoría de la gravedad que resultaba de ellas seguía teniendo los grados de libertad provenientes solo de la métrica. Además, Lovelock probó que [46]

**Teorema I:** En un espaciotiempo de cuatro dimensiones, el único tensor que satisface las condiciones (2.94-2.96) son el tensor de Einstein  $G_{ab}$  y el tensor métrico  $g_{ab}$ .

Lo cual implica que en cuatro dimensiones, solo una combinación de la forma  $aG^{hk} + bg^{hk}$ , es decir, el tensor de Einstein más un término proporcional a la métrica (constante cosmológica), pueden representar la geometría de un campo gravitacional que se acople al tensor de energía-momento.

Esto muestra, que para poder construir una teoría de la gravedad diferente a la relatividad General, pero que satisfaga las condiciones (2.94-2.96) se tiene que considerar un espaciotiempo con más de cuatro dimensiones. En general, relajando cualquiera de las condiciones mencionadas, se podrían obtener teorías diferentes, por ejemplo, con ecuaciones de movimiento de orden mayor a dos, teorías que no son simétricas, o que su divergencia sea distinta de cero, es decir, sin conservación. Además, si se agrega un campo extra se obtienen teorías donde la gravedad no es capturada de manera única por la métrica. Por ejemplo, si se relaja la condición (2.96) y se considera que la teoría no solo depende de la métrica, sino de otros grados de libertad provenientes de un campo escalar, entonces se obtiene una clase de teorías conocidas como escalar-tensorial. En ellas, el campo gravitacional es mediado por la métrica y un campo escalar. La más general de estas son las teorías de gravedad de Horndeski [47].

Por otro lado, si no se introducen grados de libertad adicionales a los de la métrica, esto es, si se sigue considerando que la métrica es el único mediador del campo gravitacional, pero se consideran espaciotiempo con más de cuatro dimensiones, se obtienen las teorías de Lovelock. Esta generalización implica que es posible construir teorías geométricas de la gravedad en dimensiones mayores a cuatro.

Lovelock demostró que [45]

**Teorema 2:** El tensor más general que satisface las condiciones (2.94-2.96), es decir, que tiene divergencia nula, es simétrico y cuyas ecuaciones de movimiento solo depende de la métrica y sus primeras dos derivadas, es

$$A^a_b = - \sum_j \frac{\alpha_j}{2^{j+1}} \delta_{bm_1 n_1 \dots m_j n_j}^{ap_1 q_1 \dots p_j q_j} \prod_{i=1}^j \mathcal{R}^{m_i n_i}_{p_i q_i}. \quad (2.98)$$

Este tensor da lugar a una teoría modificada de la gravedad, la cual resulta ser la teoría más general con ecuaciones de movimiento de segundo orden, que es covariante y que considera que la métrica es el único mediador del campo gravitacional. Las ecuaciones de campo de

## 2.4. TEORÍAS ALTERNATIVAS DE GRAVEDAD: GAUSS-BONNET Y LOVELOCK35

Lovelock están dadas por

$$A_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.99)$$

Estas se obtienen de un principio variacional, donde la densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \sum_{j=0}^{j_f} \alpha_j \mathcal{R}^j, \quad (2.100)$$

donde  $\mathcal{R}^j$

$$\mathcal{R}^j = \frac{1}{2^j} \delta_{m_1 n_1 \dots m_j n_j}^{p_1 q_1 \dots p_j q_j} \prod_{i=1}^j \mathcal{R}^{m_i n_i}_{p_i q_i}, \quad \delta_{m_1 n_1 \dots m_j n_j}^{p_1 q_1 \dots p_j q_j} = j! \delta_{[m_1}^{p_1} \delta_{n_1}^{q_1} \dots \delta_{m_j}^{p_j} \delta_{n_j}^{q_j]}. \quad (2.101)$$

Los coeficientes  $\alpha_j$  son constantes.

El tensor (2.98) puede obtenerse al variar la densidad lagrangiana (2.100). Primero,  $\mathcal{L}$  puede integrarse sobre una región de  $D$  dimensiones  $\Omega$  para construir una acción. Luego, al variar esta acción se obtiene [43]

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int_{\Omega} d^D x \sqrt{-g} A_{ab} \delta g^{ab} + \int_{\partial\Omega} d^{D-1} x \sqrt{-h} B \quad (2.102)$$

donde  $A^a_b$  está dado por (2.98) y  $h$  es la métrica inducida en  $\partial\Omega$ . Para una discusión más profunda ver [48].

De acuerdo al Teorema 1, en cuatro dimensiones, el tensor  $A_{ab}$  se reduce a

$$A^a_b = -\frac{1}{2} \alpha_0 \delta^a_b + \alpha_1 \left( R^a_b - \frac{1}{2} \delta^a_b R \right). \quad (2.103)$$

### Teoría de la gravedad de Gauss-Bonnet

Entre las teorías con términos de curvatura más altos que las ecuaciones de Einstein se encuentra la teoría de Gauss-Bonnet. Al considerar un espaciotiempo de cinco dimensiones, la densidad lagrangiana (2.100) se reduce a

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [\alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 \mathcal{G}]. \quad (2.104)$$

Notemos que aquí aparece un término cuadrático adicional a los de Einstein dado por

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}. \quad (2.105)$$

Este es conocido como el término de Gauss-Bonnet.

Al variar (2.104), junto con el lagrangiano del tensor de energía-momento, se obtienen unas ecuaciones de campo que satisfacen las condiciones (2.94-2.96).

## 2.4. TEORÍAS ALTERNATIVAS DE GRAVEDAD: GAUSS-BONNET Y LOVELOCK36

Se puede probar que en  $D = 4$  el término de Gauss-Bonnet es una derivada total y, por tanto, no contribuye a la dinámica gravitacional. Esto se puede ver de la siguiente manera; al variar  $\mathcal{G}$ , su contribución a las ecuaciones de Einstein es [49]

$$\frac{g_{nb}}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{GB}}{\delta g_{mb}} = -2R^{mp}{}_{bq} R^{bq}{}_{np} + 4R^{mp}{}_{nr} R^r{}_p + 4R^m{}_p R^p{}_n - 2RR^m{}_n + \frac{1}{2}\mathcal{G}\delta^m_n. \quad (2.106)$$

La traza de esta expresión, resulta

$$\frac{g_{ab}}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{GB}}{\delta g_{ab}} = (D - 4) \times \frac{\alpha}{2}\mathcal{G}. \quad (2.107)$$

Esto significa que las posibles contribuciones del término Gauss-Bonnet son proporcionales a  $D - 4$ , de ahí, que en cuatro dimensiones, no hay contribución a las ecuaciones de movimiento.

Otra manera de entender esto, es que en  $D = 4$ ,  $\mathcal{G}$  puede considerarse como término topológico, pues está relacionado con la característica de Euler de la siguiente manera

$$\chi = \frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{G}. \quad (2.108)$$

Por tanto, en cuatro dimensiones, al ser un término topológico y no geométrico, no contribuye en la dinámica del espaciotiempo. No obstante, para dimensiones mayores que cuatro  $\mathcal{G}$  si aporta información a la dinámica del campo.

La acción de la teoría Gauss-Bonnet en  $n + 1$  dimensiones está dada por <sup>7</sup>

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^{n+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \alpha\mathcal{G}) + S_m, \quad (2.109)$$

donde la constante cosmológica se toma como  $\Lambda = -(n - 1)(n - 2)/l^2$  [50].

Al variar esta acción, se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein-Gauss-Bonnet [17]

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} - \alpha \left( \frac{1}{2}Rg_{ab} - 2RR_{ab} + 4R_{ac}R^c{}_b + 4R_{cd}R^c{}_a{}^d{}_b - 2R_{acde}R_b{}^{cde} \right) = 8\pi T_{ab}. \quad (2.110)$$

### Solución de agujero negro

Las ecuaciones de Einstein-Gauss-Bonnet aceptan soluciones estáticas de agujero negro. La métrica de un agujero negro estático y esféricamente simétrico en esta teoría está definido por [50]

$$ds^2 = -F^2(r)dt^2 + \frac{1}{G^2(r)}dr^2 + r^2 h_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu, \quad (2.111)$$

<sup>7</sup>Para ser consistente con la notación de [50], [17], hagamos  $D = n$ , para denotar el número de dimensiones.

## 2.4. TEORÍAS ALTERNATIVAS DE GRAVEDAD: GAUSS-BONNET Y LOVELOCK 37

donde  $h_{\mu\nu}$  es la métrica de una esfera  $S^{n-2}$  de curvatura constante  $(n-2)(n-3)k$ , con  $k = 0, \pm 1$ . Al solucionar las ecuaciones correspondientes se obtiene que

$$F^2(r) = G^2(r) = k + \frac{r^2}{2\tilde{\alpha}} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{64\pi\tilde{\alpha}M}{n(n-1)\Sigma_k r^{n-1}} + \frac{8\tilde{\alpha}\Lambda}{(n-1)(n-2)}} \right), \quad (2.112)$$

donde  $\Sigma_k$  es el volumen de  $S^{n-2}$  y  $\tilde{\alpha} = (n-3)(n-4)\alpha$ .

De manera análoga a la teoría de Einstein, este agujero negro también tiene asociada una temperatura y una entropía

$$T = \frac{(n-1)r_+^4 + (n-3)kl^2r_+^2 + (n-5)\tilde{\alpha}k^2l^2}{4\pi l^2 r_+ (r_+^2 + 2\tilde{\alpha}k)}, \quad (2.113)$$

$$S = \frac{r_+^{n-2}\Sigma_k}{4} \left( 1 + \frac{2\tilde{\alpha}(n-2)}{(n-4)r_+^2} \right), \quad (2.114)$$

con  $r_+$  el radio del horizonte.

### Solución FLRW en la teoría Gauss-Bonnet

Al considerar el tensor de energía-momento de un fluido perfecto y la métrica de FLRW en  $(n-1)$  dimensiones

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \right), \quad (2.115)$$

donde  $\Omega_{n-1}^2$  es el elemento de línea de una esfera unitaria en  $(n-1)$  dimensiones y  $k = 0, \pm 1$ , la constante de curvatura, las ecuaciones de Friedmann en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet están dadas por [17]

$$\left( 1 + 2\tilde{\alpha} \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \right) \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) = -\frac{8\pi G}{n-1} (\rho + p), \quad (2.116)$$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} + \tilde{\alpha} \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^2 = \frac{16\pi}{n(n-1)} \rho, \quad (2.117)$$

donde  $\tilde{\alpha} = (n-1)(n-2)\alpha$ . Notemos que, cuando  $\alpha = 0$  recuperamos las ecuaciones de Friedmann de la relatividad general.

### Solución FLRW en la teoría de Lovelock

En el caso de la teoría de gravedad de Lovelock las ecuaciones de Friedmann están dadas por [17]

$$\sum_{i=1}^m i \hat{c}_i \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{i-1} \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) = -\frac{8\pi G}{n-1} (\rho + p), \quad (2.118)$$

$$\sum_{i=1}^m \hat{c}_i \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^i = \frac{16\pi}{n(n-1)} \rho, \quad (2.119)$$

donde  $\hat{c}_i = c_i \Pi_{j=3}^{2m} (n+1-j)$  y  $c_i$  son los coeficientes que aparecen en el lagrangiano de Lovelock escrito en la forma  $\mathcal{L} = \sum_{i=0}^m c_i \mathcal{L}_i$ . Para más detalles ver [17].

Gran parte del interés de la física teórica por el término Gauss-Bonnet, es que este aparece en diversas teorías de cuerdas, las cuales predicen que a nivel clásico las ecuaciones de Einstein están sujetas a correcciones de términos superiores en la curvatura [51] [52].

Sin embargo, en lo que respecta a nuestra investigación, estamos interesados en las teorías de Lovelock y Gauss-Bonnet debido a que se ha mostrado [17][10] [53] [11] que en estas teorías persiste la relación entre gravedad y termodinámica, es decir, que esta no es única de la teoría de Einstein. Esto es muy importante, pues demuestra que el carácter termodinámico de la gravedad es muy general.

## Capítulo 3

# Horizontes

El carácter geométrico de la relatividad general, permite que en ciertas configuraciones espaciotemporales existan superficies que se comportan de una manera muy particular: los horizontes. Podemos entender un horizonte como una barrera causal que separa el espaciotiempo en dos regiones, de tal manera que la información de los eventos que suceden más allá del horizonte no se puede filtrar y llegar donde se encuentra el observador. Si bien todos los horizontes comparten la característica anterior, no todos son iguales, sino que dependen de las propiedades específicas del espaciotiempo que los contiene. En este capítulo exploramos las definiciones y propiedades de algunos tipos de horizontes, poniendo énfasis en la definición de horizonte aparente que es el concepto clave en nuestro trabajo. La presentación que se hace aquí está basada en gran medida en [54][55].

### 3.1. Horizonte de eventos

Una de las configuraciones espaciotemporales donde se presenta un horizonte es en la descrita por la métrica de Schwarzschild, la cual modela un agujero negro. Esta tiene asociado un horizonte de eventos. La definición más formal de este se hace de la siguiente manera:

Si  $\mathcal{J}^+$  denota el futuro nulo infinito y  $J^-(\mathcal{J}^+)$  es el conjunto de todos los eventos que pueden enviar señales de luz a  $\mathcal{J}^+$ , es decir, su pasado causal, entonces, el horizonte de eventos está dado por la frontera del pasado causal de  $\mathcal{J}^+$  esto es  $\partial(J^-(\mathcal{J}^+))$ . De esta definición notamos el carácter global del horizonte de eventos, pues para poder definirlo sería necesario conocer toda la historia futura de un espaciotiempo. En el caso del agujero negro de Schwarzschild, la superficie  $R = 2M$  es un horizonte de eventos.

### 3.2. Horizonte de Killing

Un horizonte de Killing  $\mathcal{H}$ , se define como una hipersuperficie nula que es tangente en todos sus puntos a un vector de Killing que satisface  $k^a k_a = 0$  sobre  $\mathcal{H}$ , y  $k^a k_a < 0$  en la



región que tiene  $\mathcal{H}$  como frontera. El horizonte de eventos de Schwarzschild, es, a su vez, un horizonte de Killing. Se puede probar que el vector de Killing  $k = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$  es tipo tiempo en la región  $R > 2M$ , es decir, fuera del horizonte y que sobre el horizonte, es decir, en  $R = 2M$  se vuelve un vector nulo. Así mismo, dentro del horizonte, el vector de Killing se vuelve tipo espacio  $k^a k_a > 0$ .

Una de las razones por la que los horizontes de Killing son interesantes es que estos permiten definir la noción de gravedad superficial, que, como veremos luego, está relacionada con la temperatura de horizonte mediante  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ . Si  $k$  es un vector de Killing que define un horizonte, entonces satisface

$$k^a \nabla_a k^b = \kappa k^b. \quad (3.1)$$

Para un espacio estático, la gravedad superficial se puede entender de la siguiente manera: supongamos que un observador se encuentra en el infinito y que, mediante una cuerda sin masa, mantiene una masa de prueba unitaria sobre el horizonte. Es ese caso, la gravedad superficial se definiría como la fuerza necesaria que el observador debería ejercer sobre la cuerda para mantener la masa de prueba justo sobre el horizonte. Una manera alternativa de definir la gravedad superficial es

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^a k^b) (\nabla_a k_b). \quad (3.2)$$

Lo dicho aquí supone la existencia del vector de Killing tipo tiempo  $k = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ , el cual a su vez supone que el espacio es estacionario. Así, los horizontes de Killing solo están definidos para esta clase de espaciotiempo. No obstante, para espacios con simetría esférica, el vector de Kodama (que es equivalente a un vector de Killing en estos espacios), permite definir la noción de horizonte aparente.

### 3.3. Horizonte de Rindler

Esta sección está basada en [35].

Consideremos el espaciotiempo de Minkowski visto por un observador acelerado. Para un observador inercial, la métrica de Minkowski en dos dimensiones está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2. \quad (3.3)$$

Las trayectorias de un observador moviéndose con una aceleración  $a$  están dadas por

$$x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau), \quad t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau). \quad (3.4)$$

En este caso las componentes de la aceleración están dadas por

$$a^t = a \sinh(a\tau), \quad a^x = a \cosh(a\tau). \quad (3.5)$$

Podemos comprobar que la magnitud de la aceleración es

$$\begin{aligned} a_m a^m &= \sqrt{a^2 (\cosh^2(a\tau) - \sinh^2(a\tau))} \\ &= a, \end{aligned} \quad (3.6)$$

y que las trayectorias de estos observadores satisfacen

$$x^2 = t^2 + a^2. \quad (3.7)$$

De este modo, los observadores acelerados se mueve describiendo hipérbolas asintóticas a las líneas nulas  $x = \pm t$ , i.e., líneas a 45 grados en el espacio de Minkowski.

Consideremos ahora las coordenadas de Rindler dadas por

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta), \quad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta). \quad (3.8)$$

Estas no cubren por completo el espacio de Minkowski, si no solo la región  $x < |t|$  llamada cuña de Rindler.

Notemos que (3.8) no es una transformación de Lorentz, pues lleva a de un sistema inercial a uno acelerado, por tanto, bajo esta transformación de coordenadas la métrica de Minkowski adquiere la forma

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (3.9)$$

No obstante, aun cuando la métrica de Rindler (3.9) no tenga la forma de una métrica plana, calculando el tensor de Riemann se puede comprobar que este es cero. Por lo que en realidad se trata de un espaciotiempo plano.

Lo interesante de esta métrica es que presenta una singularidad (que es de coordenadas, pues ya dijimos que su tensor de Riemann es nulo) en  $a = 0$  la cual corresponde a  $x = \pm t$ . De hecho, la estructura causal de este espaciotiempo es muy parecida a la de un agujero negro en las coordenadas de Kruskal, donde las líneas nulas  $x = \pm t$  definen una superficie nula llamada horizonte de Rindler.

Al observar la métrica (3.9) notamos que sus componentes son independientes de la coordenada  $\eta$ , esto significa que la métrica tiene una simetría asociada a traslaciones en la dirección de esta coordenada. Esto nos lleva a considerar que el vector  $\partial_\eta$  es un vector de Killing asociado a esta isometría. Este vector de Killing, puede ser expresado como [35]

$$\partial_\eta = a(x\partial_t + t\partial_x). \quad (3.10)$$

Asimismo, se puede mostrar que la gravedad superficial asociada a este vector de Killing es [35] [55]

$$\kappa = a. \quad (3.11)$$

Ya dijimos que a pesar de su forma, la métrica de Rindler representa un espaciotiempo plano, por lo que no hay un campo gravitacional real. Sin embargo, por el principio de equivalencia, tiene sentido que la gravedad superficial del horizonte de Rindler esté dada por la aceleración.

### 3.4. Congruencias y ecuación de Raychaudhuri

Los horizontes son hipersuperficies nulas que dividen el espacio en dos regiones causalmente desconexas. No obstante, aunque en ciertos casos esta definición es útil, para sistemas dinámicos es necesario extender estas nociones. En general, las definiciones más formales de los horizontes se hacen en función del comportamiento de congruencias de geodésicas nulas que entran y salen de una superficie. Las congruencias (entendidas como un flujo) son caracterizadas por tres parámetros: la expansión  $\theta$ , el corte  $\sigma$  y la rotación  $\omega$ . La expansión resulta fundamental para definir las propiedades de las superficies, por ejemplo, si son atrapadas, antiatrapadas o marginales. Asimismo, las ecuaciones de Raychaudhuri describen la evolución de las congruencias en función de los parámetros  $\theta, \sigma, \omega$ .

Para poder definir el horizonte aparente, el cual es de importancia fundamental para este trabajo, es necesario hacer un resumen de las nociones más importantes relacionadas con la congruencia de geodésicas y cómo estas se usan para estudiar el comportamiento de superficies. Comencemos estudiando el concepto de congruencia.

Sea  $O$  una región abierta del espaciotiempo. Una congruencia es una familia de curvas tal que por cada punto de  $O$  pasa una y solo una curva de la familia. Dado que las superficies que nos interesan son nulas (horizontes), consideremos una congruencia de geodésicas nulas. Una geodésica nula es una curva en el espaciotiempo que tiene una tangente nula,  $l^a$ , es decir,  $l^a l_a = 0$ , y satisface la ecuación de las geodésicas.

$$l^b \nabla_b l^a = 0. \quad (3.12)$$

Desde el punto de vista conceptual, es posible establecer una analogía entre una congruencia y un flujo [56]; puesto que los flujos pueden entenderse como las curvas integrales generadas por un campo vectorial dado, si se identifican dichas curvas con geodésicas, entonces la congruencia, se identifica con el conjunto de curvas integrales, es decir, el flujo. En pocas palabras, si un flujo es el conjunto de líneas integrales generadas por un campo vectorial, entonces, una congruencia es un conjunto de curvas geodésicas generadas por un campo vectorial. En particular, si este campo vectorial  $l^a$  es nulo, obtenemos una congruencia de geodésicas nulas.

Si una congruencia puede pensarse como un flujo, resulta natural preguntarse por las propiedades que caracterizan dicho flujo. Podemos imaginar que a medida que nos movemos de un punto a otro a lo largo del flujo, la forma de este cambia; aun incluyendo el mismo conjunto de líneas geodésicas, este puede ser más pequeño (o más grande), cortado o torcido. Este razonamiento sugiere que existen algunas cantidades que dan cuenta de estas posibles deformaciones.

Para responder concretamente esta pregunta consideremos el gradiente del campo  $l_a$  [56]

$$\nabla_a l_b = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{n-1} h_{ab} \theta, \quad (3.13)$$

donde  $n$  es la dimensión del espacio en cuestión. Notamos que este es un tensor de segundo rango, que se divide en tres términos. Estos representan los tipos de deformaciones (vistos

en una sección transversal), que el fluido puede experimentar a medida que evoluciona.

Sí tomamos una sección transversal del flujo (congruencia), entonces el esfuerzo cortante está dado por

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2} (\nabla_a l_b + \nabla_b l_a) - \frac{1}{n-1} h_{ab} \theta, \quad (3.14)$$

donde  $h_{ab} = g_{ab} - l_a n_b + l_b n_a$  es la métrica del 2-espacio ortogonal a  $l^a$  y  $n_a$  es un vector auxiliar tal que  $n^a n_a = 0$  y  $l^a n_a = -1$ .

Por otro lado, la rotación, la parte antisimétrica, está definida por la expresión

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\nabla_a l_b - \nabla_b l_a). \quad (3.15)$$

Por último, la expansión es

$$\theta = \nabla_a l^a. \quad (3.16)$$

Esta describe cómo el área de la sección varía con respecto al parámetro afín. Ahora bien, estas definiciones son válidas en el caso de que las líneas geodésicas estén afínmente parametrizadas, sin embargo, para calcular la expansión del vector nulo  $l^a$  cuando la geodésica a la que es tangente no está necesariamente caracterizada por un parámetro afín se usa la ecuación [54]

$$\theta = h^{ab} \nabla_a l_b = \left[ g^{ab} + \frac{l^a n^b + n^a l^b}{(-n^c l^d g_{cd})} \right] \nabla_a l_b. \quad (3.17)$$

Por otro lado, la dinámica de estas cantidades está descrita por las ecuaciones de Raychaudhuri. En particular, la propagación de la expansión a lo largo de una geodésica nula se rige por

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\theta^2}{2} - \sigma^2 + \omega^2 - R_{ab} l^a l^b. \quad (3.18)$$

Esta ecuación describe cómo las geodésicas nulas (líneas de flujo) convergen  $\frac{d\theta}{d\lambda} < 0$  o divergen  $\frac{d\theta}{d\lambda} > 0$  en función de la expansión misma, el esfuerzo de corte, la rotación y la materia (relacionada con  $R_{ab}$  a través de las ecuaciones de Einstein). Notamos que el esfuerzo cortante actúa como la gravedad, es decir, de manera atractiva, mientras que la rotación actúa en la dirección opuesta. Esto último tiene sentido incluso en la teoría Newtoniana, donde un cuerpo rotando experimenta una fuerza centrífuga que actúa en dirección contraria a la gravedad.

## Teorema de convergencia

Para entender la relevancia de la ecuación de Raychaudhuri respecto al comportamiento de las congruencias, analicemos el teorema de enfoque o convergencia <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Focussing theorem

Primero notemos que la ecuación (3.24) la podemos escribir como [56]

$$\frac{d^2 F}{d\lambda^2} + \frac{1}{3} (\sigma^2 - \omega^2 + R_{ab} l^a l^b) F = 0, \quad (3.19)$$

donde se toma  $\theta = 3 \frac{F'}{F}$ .

Dado que la expansión define el ritmo de cambio del área de la sección transversal de la congruencia, si esta tiende al infinito negativo, implica que el conjunto de geodésicas converge, mientras que al acercarse al infinito positivo, divergen. En particular, el comportamiento convergente de las geodésicas se pueden asociar con carácter atractivo de la gravedad. Por tanto, estamos interesados en las condiciones que se deben cumplir para que la expansión de una congruencia converja. Sin más preámbulos se puede mostrar que converge si [56]

$$\sigma^2 - \omega^2 + R_{ab} l^a l^b \geq 0. \quad (3.20)$$

Para el caso de campos vectoriales que son ortogonales a hipersuperficies, el término rotacional es nulo y considerando, además, que el corte es despreciable respecto al tensor de Ricci obtenemos

$$R_{ab} l^a l^b \geq 0. \quad (3.21)$$

En relatividad general, la curvatura es causada por el contenido de materia. Usando las ecuaciones de Einstein se puede reescribir el tensor de Ricci como

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T. \quad (3.22)$$

De esta manera, el criterio para la convergencia de la congruencia es a su vez un criterio sobre el tensor de energía momento. Es decir, para que una congruencia en un espaciotiempo con materia converja, es necesario que el tenso de energía momento satisfaga

$$\left( T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) l^a l^b \geq 0. \quad (3.23)$$

Esta define la condición de energía fuerte; el equivalente relativista del enunciado Newtoniano que asegura que la fuerza gravitacional es atractiva solo si la masa es positiva. Regresando a la ecuación de Raychaudhuri, la cual, usando los resultados obtenidos puede ser reescrita como

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\theta^2}{2} - \sigma^2 - \left( T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) l^a l^b. \quad (3.24)$$

Nótese que al cumplirse la condición de energía fuerte, entonces,  $\frac{d\theta}{d\lambda} \leq 0$ . Con esto comprobamos que a medida que el parámetro afín avanza, la expansión se vuelve más y más pequeña, lo cual significa que las geodésicas se van acercando unas a otras, atraídas entre sí. De esta manera, la naturaleza atractiva de la gravedad se manifiesta en la convergencia de las geodésicas.

En resumen, si la materia es positiva, lo cual es equivalente a decir que la gravedad es atractiva, las geodésicas convergen, lo cual es caracterizado por una disminución del área,

es decir, una expansión negativa. Mientras más grande es la cantidad de materia en el espaciotiempo, mayor es la curvatura y las geodésicas se atraen con mayor intensidad. De esto podemos ver que el comportamiento gravitacional de una congruencia es caracterizado por su expansión. Ahora bien, puesto que un horizonte (superficie nula) puede entenderse como un conjunto de líneas geodésicas nulas (generadores de la superficie), la expansión puede usarse para caracterizar el comportamiento gravitacional de los horizontes.

### Hipersuperficies nulas

Una hipersuperficie nula está caracterizada [35] por ciertas propiedades específicas. Primero, una hipersuperficie  $\Sigma$  es una subvariedad de  $n - 1$  dimensiones en una variedad (espaciotiempo)  $M$  de  $n$  dimensiones. Esta puede definirse mediante una función  $f(x)$  que permanece constante en una región del espaciotiempo y cuyo gradiente es normal a  $\Sigma$ . Si el vector gradiente es nulo, entonces la hipersuperficie es nula y el vector normal es tangente a  $\Sigma$ . Si es tipo tiempo, la hipersuperficie es espacialoide y si el vector gradiente es tipo espacio, la hipersuperficie es temporaloide. La propiedad más importante de una hipersuperficie nula es que esta puede entenderse como un conjunto de geodésicas nulas (congruencia)<sup>2</sup>, llamadas generadores de la hipersuperficie.

Un horizonte es una hipersuperficie nula que divide el espaciotiempo en dos regiones, una (el exterior) cuyos puntos pueden conectar con el infinito<sup>3</sup> y otra (el interior) cuyos puntos no pueden conectarse con el infinito. Las curvas del interior de un horizonte, no pueden escapar hacia el infinito, porque están atrapadas. Se dice entonces que el horizonte está definido por una superficie atrapada, de hecho, se puede pensar un horizonte como la frontera de una región atrapada.

Para entender conceptualmente lo que es una superficie atrapada, consideremos una esfera de dos dimensiones en el espaciotiempo de Minkowski. Imaginemos dos conjuntos (congruencias) de rayos de luz; consideremos que el primer conjunto emana de la esfera, y, que, por tanto, al alejarse de esta, los rayos dibujan esferas de radios crecientes, es decir, divergen. El segundo conjunto, son rayos de luz que están dirigidos hacia la esfera, de tal manera que estos dibujan esferas de radios cada vez más chicos, y, por tanto, de áreas cada vez más pequeñas, lo cual, ya vimos, que implica una convergencia. Este es el comportamiento que se esperaría en una superficie normal i.e., en un espacio plano. Ahora, imaginemos este escenario en el interior de un agujero negro. En esas condiciones, la curvatura es tan extrema que los rayos de luz viajan de tal manera que las esferas que van dibujando, tanto los rayos entrantes como los salientes, son de radios cada vez más pequeños; esto significa, que incluso los rayos que intentan salir de la esfera y escapar hacia el infinito, son obligados (por la curvatura) a converger de vuelta hacia la esfera; de aquí, que en un agujero negro solo puedan entrar cosas, pero que nada pueda salir. En otras palabras, las esferas dibujadas por los rayos entrantes y salientes son cada vez de áreas más y más pequeñas, lo cual significa que ambos conjuntos de rayos convergen, y, que, por tanto, su expansión es nega-

<sup>2</sup>Esta es la razón por la que al estudiar la cinemática (expansión, corte y rotación) y dinámica (ecuación de Raychaudhuri) de las congruencias, se pueden conocer las propiedades de una hipersuperficie, en particular de la que define un horizonte.

<sup>3</sup>El espacio asintóticamente plano que está más allá de un agujero negro.

tiva. En este sentido, se dice que los rayos de luz están atrapados. La región de la cual no pueden escapar define una región o superficie atrapada. Por tanto, según los razonamientos que hemos presentado, podemos concluir que tales superficies están caracterizadas por una expansión negativa.

### Clasificación de hipersuperficies

En general, es posible clasificar las hipersuperficies de acuerdo al comportamiento de las expansiones  $\theta_l$  y  $\theta_n$ , asociadas a congruencias de geodésicas nulas, salientes y entrantes, respectivamente. Las siguientes son algunas definiciones [55] válidas para 2-superficies:

- Una superficie normal está caracterizada por  $\theta_l > 0$  y  $\theta_n < 0$ . Este es el caso, por ejemplo, de una 2-esfera en el espacio de Minkowski.
- Una superficie atrapada está caracterizada por  $\theta_l < 0$  y  $\theta_n < 0$ . En este caso, los rayos nulos entrantes y salientes dirigidos hacia el futuro, convergen: la luz que se propaga hacia el exterior es arrastrada hacia atrás (por la gravedad).
- Una superficie marginalmente exterior atrapada (o marginal) (MOTS) corresponde a  $\theta_l = 0$  y  $\theta_n < 0$ .
- Una superficie no atrapada es aquella con  $\theta_l \theta_n < 0$ .

El lector interesado puede encontrar más detalles sobre la clasificación de horizontes en [57] [55] [58] [59].

### 3.5. Definición de horizonte aparente

Con la descripción anterior podemos dar la siguiente definición [57] [54]  
Un horizonte aparente es una hipersuperficie marginal caracterizada por las expansiones

$$\theta_l = 0, \tag{3.25}$$

$$\theta_n < 0. \tag{3.26}$$

En pocas palabras, es la frontera que divide las superficies atrapadas de las no atrapadas. La ecuación (3.25) indica que las geodésicas nulas salientes dejan de propagarse hacia afuera y se quedan atrapadas sobre la superficie del horizonte. Este comportamiento se explicó cuando se estudiaron las geodésicas (2.49) de agujeros negros. La condición (3.26) distingue entre agujeros negros y agujeros blancos.

Como ejemplo, consideremos un espaciotiempo con simetría esférica dado por la métrica en coordenadas Painlevé-Gullstrand  $(\tau, R, \theta, \phi)$

$$ds^2 = [c^2(\tau, R) - v^2(\tau, R)] d\tau^2 + 2v^2(\tau, R)d\tau dR + dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (3.27)$$

donde  $c(\tau, R) = \frac{e^{-\phi(t, R)}}{\partial\tau/\partial t}$  y  $v = c(\tau, R)\sqrt{\frac{2M}{R}}$  y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .

Las congruencias asociadas a las geodésicas nulas, radiales, salientes y entrantes, están dadas respectivamente por[55]

$$l^a = \frac{1}{c(\tau, R)} (1, c(\tau, R) - v(\tau, R), 0, 0), \quad (3.28)$$

$$n^a = \frac{1}{c(\tau, R)} (1, -c(\tau, R) - v(\tau, R), 0, 0). \quad (3.29)$$

Así, usando (3.59) podemos calcular las expansiones que resultan ser

$$\theta_l = \frac{2}{R} \left( 1 - \sqrt{\frac{2M}{R}} \right), \quad \theta_n = -\frac{2}{R} \left( 1 + \sqrt{\frac{2M}{R}} \right). \quad (3.30)$$

En el caso de un agujero negro de Schwarzschild, las superficies atrapadas son aquellas donde  $R < 2M$ , las superficies no atrapadas aquellas donde  $R > 2M$  y la frontera entre estas es  $R = 2M$ , que corresponde con el radio de Schwarzschild. Nótese que el horizonte  $R = 2M$  está definido por la condición  $\theta_l = 0$ . En este caso el horizonte aparente coincide con el horizonte de eventos. Más adelante definiremos el horizonte aparente FLRW.

## Horizonte aparente y Energía de Misner-Sharp

Consideremos un espaciotiempo con simetría esférica, cuya métrica está dada por

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + R^2 d\Omega^2, \quad (3.31)$$

donde  $h_{ab}$  es la métrica del plano  $(t, R)$ , y los índices  $a, b$  solo toman valores 0, 1 tales que  $dx^0 = dt$  y  $dx^1 = dR$ .

En esta clase de espaciotiempo el horizonte aparente puede ser estudiado, alternativamente, usando la energía Misner-Sharp. Esta es una cantidad invariante en el espacio  $(t, R)$  y solo está definida para espaciotiempo esféricamente simétricos. Una de las propiedades que la hace especialmente útil desde el punto de vista físico y matemático es que esta es la corriente de Noether conservada asociada con el vector de Kodama. La energía de Misner-Sharp está definida como

$$E = \frac{R}{2} (1 - h^{ab} \partial_a R \partial_b R). \quad (3.32)$$

En función de esta cantidad, las condiciones sobre superficies se pueden escribir como [22]



- atrapada  $h^{ab}\partial_a R\partial_b R < 0$ ,
- marginal  $h^{ab}\partial_a R\partial_b R = 0$ ,
- no atrapada  $h^{ab}\partial_a R\partial_b R > 0$ .

El horizonte aparente es la frontera entre superficies atrapadas y no atrapadas, por tanto, es una superficie marginal que satisface la condición

$$h^{ab}\partial_a R\partial_b R = 0. \quad (3.33)$$

De la ecuación (3.32) observamos que esto implica  $R = 2E$ , que en caso de un agujero negro, donde  $E = M$ , define el radio de Schwarzschild. Nótese que esta expresión es consistente con el criterio  $\theta_l = 0$  en (3.30). En la literatura se muestra que ambos criterios están relacionados. En [22] se muestra que al considerar un espaciotiempo con simetría esférica en  $n - 1$  dimensiones con la métrica en la forma doble nula

$$ds^2 = -2e^{-f}d\xi^+d\xi^- + r^2d\Omega_{n-1}^2, \quad (3.34)$$

las expansiones estarán dadas p

$$\theta_{\pm} = (n - 1)\frac{\partial_{\pm}}{r}, \quad (3.35)$$

donde  $\partial_{\pm} = \partial/\partial\xi^{\pm}$ .

De esto se sigue que

$$g^{ab}\partial_a R\partial_b R = -\frac{2}{(n - 1)^2} e^f \theta_+ \theta_-, \quad (3.36)$$

una esfera es atrapada si  $\theta_+ \theta_- > 0$ , no atrapada por  $\theta_+ \theta_- < 0$  y marginal si  $\theta_+ \theta_- = 0$ . Otro ejemplo de esto se da en [60] donde, de hecho, se escribe explícitamente

$$\theta_l = h^{ab}\partial_a R\partial_b R = 0. \quad (3.37)$$

## Gravedad superficial de un horizonte aparente

Desde el punto de vista físico, la energía de Misner-Sharp es una cantidad invariante en el 2-espacio  $(t, R)$  y está asociada a la cantidad de energía gravitacional contenida en una esfera de radio  $R$ . Una de las propiedades que la hace especialmente importante es que resulta ser la corriente de Noether conservada asociada con el vector de Kodama.

El vector de Kodama, al igual que la energía de Misner-Sharp, solo está definido para espacios con simetría esférica y está dado por [61]

$$K^a = \epsilon^{ab}\nabla_b R, \quad (3.38)$$

donde  $\epsilon_{ab}$  es el tensor antisimétrico en el plano  $(t, R)$  [62]. De esta forma,  $K^a$  está definido solo en este 2-espacio; por tanto, tiene la forma  $K_a = (K_t, K_R, 0, 0)$ . El vector de Kodama, al igual que un vector de Killing, está relacionado con la simetría del espaciotiempo. De hecho, se puede pensar que el vector de Kodama es al espacio con simetría esférica, lo que

el vector de Killing al espacio estacionario; en particular, en espacios estáticos el vector de Kodama es paralelo al vector de Killing.

La propiedad que hace especial a este vector, es que su divergencia se anula

$$\nabla_a K^a = 0. \quad (3.39)$$

Esto implica que la corriente

$$J^a = G^{ab} K_b, \quad (3.40)$$

donde  $G_{ab}$  es el tensor de Einstein, resulta ser una cantidad conservada aun cuando no exista un vector de Killing tipo tiempo. Esta es una propiedad tan excepcional que se le conoce como el milagro de Kodama [63].

En un espacio dinámico no se tiene un vector de Killing tipo tiempo, y, por tanto, no se tiene una dirección de invariante en el tiempo; sin embargo, el vector de Kodama sigue dando una dirección de tiempo preferida, de esta manera  $K^a$  satisface una ecuación equivalente a la ecuación de Killing,

$$K^a (K_a \nabla_b + K_b \nabla_a) = 8\pi R \psi_b, \quad (3.41)$$

donde

$$\psi_a = T_a^b \nabla_b R - W \nabla_a R, \quad (3.42)$$

es el llamado vector de flujo de energía, el cual, en este contexto, lo podemos entender como una cantidad que mide que tanto se aleja el espaciotiempo en cuestión, de un espaciotiempo estático. Al igual que el vector de Kodama  $\psi_a$  solo esta definido en el 2-espacio  $(t, R)$  y tiene la forma  $\psi_a = (\psi_t, \psi_R, 0, 0)$ .

$T$  es el tensor de energía momento y  $W$  es la densidad de trabajo definida como

$$W = -\frac{1}{2} T^{ab} h_{ab}, \quad (3.43)$$

De manera análoga a la ecuación (3.1), el vector de Kodama permite definir una noción de gravedad superficial dada por

$$\frac{1}{2} g^{ab} K^c (\nabla_c K_a - \nabla_a K_c) = \kappa K^b. \quad (3.44)$$

Esta expresión puede ser reescrita, de manera que resulte más practica para realizar los cálculos, como

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}} \partial_a \left( \sqrt{-h} h^{ab} \partial_b R \right). \quad (3.45)$$

o bien

$$\kappa = G \frac{E}{R^2} - 4\pi W R. \quad (3.46)$$

La expresión (3.45) define la gravedad superficial que se asocia a un horizonte aparente.

### Primera ley unificada

Las cantidades que se han mencionado en esta sección no son todas independientes entre sí, sino que satisfacen la llamada primera ley unificada [57] [64] [65]

$$\nabla_a E = A\psi_a + W\nabla_a V. \quad (3.47)$$

donde,  $E$  es la energía de Misner-Sharp,  $\psi$  el vector de flujo de energía,  $W$  la densidad de trabajo y  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$  el volumen áreal.

Esta expresión representa una generalización de la primera ley (de la termodinámica) de agujeros negros para el caso de espaciotiempo dinámicos.

Podemos verificar [66] [62] que (3.47) es equivalente a la expresión

$$A\psi_a = R\nabla_a \left( \frac{E}{R} \right) + \frac{\kappa}{8\pi} \nabla_a A. \quad (3.48)$$

Asimismo, al proyectar sobre el horizonte, se obtiene

$$A\psi_a = \frac{\kappa}{8\pi} \nabla_a A. \quad (3.49)$$

Esta expresión se puede entender como la versión espaciotemporal de la relación de Clausius  $\delta Q = TdS$ ; el término  $A\psi_a$  puede ser interpretado como un flujo de energía (calor) que atraviesa el horizonte;  $\frac{\kappa}{2\pi}$ , al igual que en agujeros negros, se interpreta como la temperatura y el área  $A$  como la entropía. Así, (3.49) establece que un flujo de energía a través del horizonte es proporcional a un aumento en el área de dicho horizonte.

Las definiciones y conceptos presentados aquí son fundamentales para entender la termodinámica asociada a los horizontes aparentes. En particular, en el capítulo 5 veremos como aplicando estos conceptos al espaciotiempo de FLRW es posible obtener las ecuaciones de Friedmann a partir de la relación de Clausius.

## 3.6. Horizontes FLRW

En esta sección revisaremos los horizontes definidos en el espaciotiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

### Horizonte de partículas y horizonte de eventos

De acuerdo con la cosmología moderna, el universo no puede ser observado en su totalidad; solo podemos ver una parte pequeña de él, lo que se suele llamar, el universo observable. La razón de esto, es que el proceso de expansión del universo hace que la distancia propia entre dos objetos aumente con el tiempo, lo cual, da lugar al horizonte de partículas y el horizonte de eventos.

Podemos entender el horizonte de partículas como una esfera centrada en el observador comovil en  $r = 0$ , cuyo radio está dado por [54]

$$R_{HP} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.50)$$

El horizonte de partículas define la distancia máxima que podemos observar en el tiempo presente. Está definido por el conjunto de todas las señales de partículas que han llegado al observador en el intervalo de tiempo comprendido entre el Big Bang ( $t = 0$ ) y el tiempo  $t$ .

Una característica de los horizontes cosmológicos, es que estos evolucionan con el tiempo, de manera que lo que al tiempo  $t$  no se puede observar, podría observarse a un tiempo posterior. De hecho, derivando la expresión (3.50) podemos probar que la evolución del horizonte de partículas está dada por

$$\dot{R}_{HP} = HR_{HP} + 1. \quad (3.51)$$

Para un universo que se expande, el horizonte se extiende con el tiempo, es decir,  $\dot{R}_{HP} > 0$ , lo cual significa que a medida que se avanza al futuro, un número mayor de señales provenientes del pasado pueden llegar al observador.

El horizonte de partículas, al igual que el horizonte de un agujero negro, es una hipersuperficie nula que divide el espaciotiempo en dos regiones. En este caso, lo que está más allá del horizonte, son los eventos que el observador, a un tiempo  $t$ , no puede conocer. En contraste con el horizonte de un agujero negro, el horizonte de partículas evoluciona con el tiempo y depende del observador. Otra diferencia significativa es que en el horizonte de agujeros negros el observador está situado fuera del horizonte, mientras en un contexto cosmológico, el observador está dentro del horizonte.

Consideremos ahora el horizonte de eventos.

En 1929 E. Hubble descubrió que cuanto más lejos se encuentra una galaxia de otra, más rápido se aleja una de otra <sup>4</sup>

$$v = H_0 D. \quad (3.52)$$

Esta es la ley de Hubble y establece una relación entre la velocidad de recesión y la distancia de una galaxia.

Si se asume que a ley de Hubble es válida para todas las distancias, es posible que una galaxia se aleje con velocidades más grandes que las de la luz [67]. En tal caso, la luz que emiten hoy esas galaxias jamás podrá alcanzarnos. Esto nos lleva al horizonte de eventos, el cual se puede definir como la distancia más grande desde la cual la luz emitida hoy nos alcanzara en cierto momento en el futuro. El radio del horizonte de eventos está dado por

$$R_{HE} = a(t) \int_t^{+\infty} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.53)$$

---

<sup>4</sup>De sus observaciones pudo deducir que el corrimiento al rojo de una galaxia es proporcional a la distancia a la que esta se encuentra.

Si comparamos con el radio del horizonte de partículas (3.50), el horizonte de eventos puede considerarse como su complemento.

El horizonte de eventos también es un hipersuperficie nula y al igual que el horizonte de partículas es dinámico, por lo que al derivar (3.53) encontramos que su evolución está determinada por

$$\dot{R}_{HE} = HR_{HE} - 1. \quad (3.54)$$

### Horizonte aparente

Anteriormente vimos que el horizonte aparente está definido por las condiciones  $\theta_l = 0$  y  $\theta_n < 0$ . Por tanto, para determinar el horizonte aparente, primero tenemos que calcular las expansiones de las congruencias entrantes y salientes del espaciotiempo FLRW.

La métrica FLRW está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right). \quad (3.55)$$

Para obtener las congruencias radiales entrantes y salientes consideremos el espacio  $(t, r)$ , es decir, hacemos  $d\theta = d\phi = 0$ , así

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{p_1}{p_0} = \pm \frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a}. \quad (3.56)$$

donde tomamos  $p_0 = \frac{dt}{d\lambda}$  y  $p_1 = \frac{dr}{d\lambda}$ .

Con esto podemos determinar que las geodésicas nulas radiales, salientes y entrantes tienen campos tangentes definidos respectivamente por

$$l^a = \left( 1, \frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a(t)}, 0, 0 \right), \quad n^a = \left( 1, -\frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a(t)}, 0, 0 \right). \quad (3.57)$$

Reescribiendo la métrica (3.55) como

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.58)$$

donde  $R = a(t)r$ ,  $h_{ab} = \text{diag} \left( -1, \frac{a^2}{1 - kr^2}, 0, 0 \right)$  y usando la ecuación (3.59)

$$\theta = h^{ab} \nabla_a l_b = \left[ g^{ab} + \frac{l^a n^b + n^a l^b}{(-n^c l^d g_{cd})} \right] \nabla_a l_b, \quad (3.59)$$

podemos calcular las expansiones, las cuales están dadas por [21]<sup>5</sup>

$$\theta_l = 2 \left( H + \frac{1}{R} \sqrt{1 - \frac{kR^2}{a^2}} \right), \quad (3.60)$$

<sup>5</sup>El cálculo explícito se hace en la página 69 de [54]

$$\theta_n = 2 \left( H - \frac{1}{R} \sqrt{1 - \frac{kR^2}{a^2}} \right). \quad (3.61)$$

En este caso, el horizonte aparente está definido por  $\theta_n = 0$  y  $\theta_l < 0$ . Lo cual conduce a

$$R_h = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}}. \quad (3.62)$$

Por otro lado, podemos probar que siguiendo el método de la energía de Misner-Sharp obtenemos el mismo resultado. La condición que determina el horizonte aparente según el criterio (3.33), es

$$h^{ab} \frac{\partial R}{\partial x^a} \frac{\partial R}{\partial x^b} \Big|_{R=R_h} = 0. \quad (3.63)$$

Así,

$$\left[ h^{tt} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial t} + h^{rr} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial r} \right]_{R=R_h} = 0, \quad (3.64)$$

$$\frac{a^2}{1 - kr^2} (R_h H)^2 - a^2 = 0, \quad (3.65)$$

$$(R_h H)^2 + k \frac{R_h^2}{a^2} = 1, \quad (3.66)$$

$$R_h^2 = \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{-1}, \quad (3.67)$$

donde se ha considerado  $\partial_t R = RH$  y  $\partial_r R = a$ . Por tanto, el radio del horizonte aparente es

$$R_h = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}}. \quad (3.68)$$

Notemos que esta expresión es exactamente igual a la ecuación (3.62) que obtuvimos al calcular el radio con el método de la expansión. Esto muestra la consistencia de las dos definiciones.

## Capítulo 4

# Termodinámica

La termodinámica estudia las propiedades físicas de la materia a nivel macroscópico. Esto significa que aun cuando a nivel fundamental la materia tenga una estructura interna formada por partículas elementales, átomos, moléculas, etc., las relaciones establecidas mediante los métodos de la termodinámica deben permanecer invariantes ante cambios en los modelos microscópicos de la materia [68] [69].

Podemos considerar que el problema de la termodinámica queda descrito de la siguiente manera: tomemos un sistema aislado formado por dos subsistemas simples, no necesariamente aislados, por ejemplo, un recipiente con una pared que divide al sistema en dos partes, donde en cada parte se encuentra un gas. Supongamos que el sistema total se encuentra en equilibrio respecto a ciertas ligaduras internas, e.g, la pared que divide a los dos gases. Ahora bien, si algunas de estas ligaduras internas se remueven, esto causa una serie de procesos en el sistema que con el tiempo determinan una nueva condición de equilibrio. Por ejemplo, al quitar la pared que divide los dos gases, estos se mezclan entre sí hasta que alcanzan un nuevo estado de equilibrio.

Así, el problema esencial de la termodinámica es encontrar el estado de equilibrio final que alcanza un sistema compuesto aislado después de que algunas ligaduras internas han sido removidas [28]. En termodinámica, los estados de equilibrio se encuentran caracterizados por un número pequeño de parámetros que se denominan variables de estado. Cuando se alcanza un estado donde las variables de estado permanecen sin cambios, se dice que el sistema está en equilibrio.

El problema que hemos descrito se soluciona considerando que existe una cantidad física que alcanza un valor máximo cuando las variables de estado precisamente han alcanzado su estado de equilibrio. Esta cantidad fundamental se denomina entropía. Una vez que la entropía se ha determinado para un sistema concreto, los métodos de la termodinámica permiten obtener, a partir de esta, toda la información termodinámica concerniente al sistema. De esta manera, el problema de la termodinámica se resuelve por completo.

## 4.1. Leyes de la termodinámica

El formalismo de la termodinámica está fundado en cuatro postulados, a partir de los cuales, es posible deducir relaciones entre las propiedades de la materia. Estos postulados son conocidos como leyes de la termodinámica

### Ley cero

*Existen estados macroscópicos particulares llamados de equilibrio caracterizados por el hecho de que las propiedades macroscópicas del sistema no varían con el tiempo. Todos los sistemas en equilibrio con un sistema dado están en equilibrio unos con otros.*

### Primera ley

*Existe una función de estado denominada energía interna  $U$  y una forma de energía  $Q$  transmitida por medios no mecánicos llamada calor, las cuales guardan una relación de conservación con el trabajo mecánico  $W$*

$$dU = \delta Q - \delta W. \quad (4.1)$$

### Segunda ley

*Existe una función de estado denominada entropía, dependiente de los parámetros extensivos, tal que al liberar un sistema de sus ligaduras, este evoluciona hacia un estado de equilibrio de entropía mayor, en el que los parámetros extensivos toman valores que maximizan dicha función*

$$dS \geq 0, \quad d^2S \leq 0. \quad (4.2)$$

### Tercera ley: Postulado de Nernst

*No es posible alcanzar el estado para el que  $\frac{\partial U}{\partial S} = 0$  en un número finito de pasos.*

Hagamos algunas observaciones sobre estos enunciados.

El equilibrio térmico es caracterizado por una propiedad intensiva común a todos los sistemas que se denominan temperatura  $T$ . Asimismo, el equilibrio mecánico es caracterizado por la presión  $p$ , que en la perspectiva termodinámica es una cantidad intensiva; el equilibrio químico está caracterizado por el potencial químico  $\mu$ . Cuando todas estas cantidades permanecen sin cambio en dos o más (sub)sistemas que estén en contacto entre sí, se dice que los (sub)sistemas están en equilibrio termodinámico.

En la primera ley escribimos  $\delta Q$  y  $\delta W$  para señalar que estas no son necesariamente diferenciales de una cantidad de estado, a diferencia de  $dU$ , que si lo es. Esto significa, que la energía interna  $U$ , tiene un valor definido para cada estado del sistema, mientras que  $Q$  y  $W$  no lo tiene, es decir, para un sistema en un estado definido, no se puede decir que tenga una cierta cantidad de calor o trabajo [68].

Para que la entropía describa correctamente un sistema termodinámico, esta debe ser una función continua y diferenciable, aditiva, homogénea de primer orden y monótonamente creciente con respecto a la energía interna [28]. Que sea aditiva significa que la suma de las



entropías de dos sistemas debe ser la suma de la entropía de cada sistema, i.e.,  $S(A + B) = S(A) + S(B)$ . La homogeneidad de grado uno significa que la entropía debe ser una función extensiva, esto se analizara más adelante. Finalmente, que sea monótonamente creciente significa que  $\frac{\partial S}{\partial U} < 0$ , lo que a su vez implica que la temperatura, definida como,  $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}$  debe ser una cantidad positiva.

Matemáticamente, el principio de entropía máxima, implica que los cambios en la entropía, respecto de un parámetro extensivo que cambia, suceden de tal manera que la entropía siempre aumenta, es decir,  $dS > 0$  pero no solo eso, para que el sistema alcance un estado de equilibrio después de experimentar un cambio, por ejemplo, al retirar una ligadura, la entropía debe alcanzar un valor máximo, y esto implica que la segunda derivada de la entropía respecto al parámetro adecuado, debe ser negativa i.e.,  $S < 0$ . Si este criterio falla, la entropía podría crecer indefinidamente y el sistema no alcanzaría un estado de equilibrio.

Por último, con respecto a la tercera ley hay un debate sobre si debe o no considerarse como una ley, pues hay sistemas para los que parece no aplicar [70].

## 4.2. Ecuación fundamental y ecuaciones de estado

La entropía permite solucionar completamente el problema de la termodinámica. Si esta es expresada en términos de los parámetros extensivos, por ejemplo  $S = S(U, V, N)$ , entonces contiene toda la información termodinámica posible de un sistema. En tal caso, la entropía se denomina ecuación fundamental del sistema.

La ecuación fundamental da una descripción completa de un sistema: contiene toda la información termodinámica posible; equivale a tener todas las graficas y todos los datos numéricos existentes. Al conocer la ecuación fundamental, no queda un solo atributo termodinámico que no esté determinado, pues toda la información del sistema puede derivarse de esta [28]. Por tanto, la relación fundamental se convierte en la cantidad más importante en la Termodinámica. Es posible obtener la ecuación fundamental en dos representaciones: energética y entrópica.

Representación energética: Para un sistema simple, la energía interna como función de la entropía  $S$ , el volumen  $V$  y el número de partículas  $N$ , define la ecuación fundamental

$$U = U(S, V, N). \quad (4.3)$$

En este caso, la primera ley de la termodinámica está dada por

$$dU = TdS - pdV + \mu dN, \quad (4.4)$$

donde el término  $TdS$  es el calor intercambiado,  $pdV$  y  $\mu dN$  son los términos de trabajo.

Comparando la expresión anterior con la forma diferencial de la ecuación fundamental  $U(S, V, N)$ ,

$$dU(S, V, N) = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N} dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{V, S} dN \quad (4.5)$$

obtenemos las llamadas ecuaciones de estado

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} \quad p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} \quad \mu = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{V,S}. \quad (4.6)$$

Estas son derivadas parciales de la ecuación fundamental y definen a los parámetros intensivos en función de los parámetros extensivos independientes. De esto observamos que la ecuación fundamental contiene la información completa de las ecuaciones de estado. Alternativamente, si tenemos todas las ecuaciones de estado, estas son equivalentes a tener la ecuación fundamental. Sin embargo, si se tiene solo una ecuación de estado, la información del sistema está incompleta.

En la representación energética, en lugar del principio de máxima entropía, se tiene el principio de mínima energía

*En el equilibrio, los parámetros extensivos toman valores tales que minimizan la energía para un valor dado de entropía total*

Es posible mostrar la equivalencia [28] de este enunciado con el principio de entropía máxima, que se mencionó al inicio del capítulo.

Representación entrópica: para un sistema simple, la entropía como función de la energía interna  $U$ , el volumen  $V$  y el número de partículas  $N$ , define la ecuación fundamental en la representación entrópica

$$S = S(U, V, N). \quad (4.7)$$

Al diferenciar esta expresión obtenemos,

$$dS(U, V, N) = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} dU + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} dV + \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{V,U} dN. \quad (4.8)$$

Por otro lado, al despejar el diferencial de entropía de la primera ley (4.4)

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN, \quad (4.9)$$

y comparar con (4.8), obtenemos las ecuaciones de estado en la representación entrópica

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} \quad \frac{p}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} \quad \frac{\mu}{T} = - \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V}. \quad (4.10)$$

La entropía debe ser una función monótonamente creciente de la energía, i.e.,  $\left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V > 0$  por tanto, esta condición implica que la temperatura de un sistema termodinámico debe ser positiva.

## Extensividad y aditividad

Supongamos que tenemos un sistema en equilibrio y que dividimos dicho sistema en dos, de tal manera que cada parte ocupe el mismo volumen. Observamos, entonces, que algunas de las variables en cada subsistema, tiene la mitad del valor de las correspondientes al sistema total, pero otras, mantienen el mismo valor. La temperatura y la presión son ejemplos de estas últimas, mientras que la energía, la entropía y el volumen, son ejemplos de las primeras. Esta observación nos permite determinar que existen dos clases de variables termodinámicas: unas que no dependen del tamaño del sistema, i.e., del número de constituyentes elementales, y otras que si lo hacen. Las que dependen de tamaño del sistema se denominan variables extensivas y las que no dependen del tamaño del sistema se denominan variables intensivas. La propiedad que hace que una variable dependa del tamaño el sistema se denomina extensividad; los sistemas que satisfacen esto se llaman sistemas extensivos.

Otra propiedad importante para la termodinámica es la aditividad. Consideremos la energía del sistema. Al dividirlo en dos partes iguales, en general, la energía total  $E$  se podría escribir como  $E = E_1 + E_2 + E_{int}$ , donde  $E_{int}$  es la energía de interacción entre las dos partes. Examinemos ahora la expresión  $\frac{E}{E_1 + E_2} = 1 + \frac{E_{int}}{E_1 + E_2}$ . En el límite termodinámico, el cociente  $\frac{E_{int}}{E_1 + E_2}$  tiende a cero; pues al considerar sistemas macroscópicos, la energía de bulto es mucho mayor que la energía asociada a las superficies de contacto entre los sistemas. De esta manera, en este límite, la energía es aproximadamente la suma de la energía de las dos partes,  $E \approx E_1 + E_2$ . Se dice, entonces, que la energía es una variable aditiva. Los sistemas para los cuales su energía total satisface esta propiedad se denominan aditivos.

De estos razonamientos, podemos notar que existe una relación entre extensividad y la aditividad. Al dividir un sistema en dos partes iguales y definir la extensividad, si no se considera que la energía de interacción es despreciable, respecto a la energía de las partes, no sería posible concluir que la energía de cada parte del sistema es la mitad de la energía total. Por tanto, podemos decir, que la aditividad es necesaria para tener extensividad. La aditividad implica extensividad, pero la extensividad no implica necesariamente aditividad [71].

## Homogeneidad y ecuación de Gibbs-Duhem

El grado de extensividad de una variable se determinan por la respuesta que muestran ante escalamientos en el tamaño del sistema y se pueden caracterizar en términos de sus propiedades de homogeneidad.

Una función real de tres variables  $f(x, y, z)$  es homogénea de grado  $k$  si satisface

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z), \quad (4.11)$$

para algún  $k$  constante y un  $\lambda$  real.

De esto podemos concluir que los parámetros extensivos como la energía, el volumen y la entropía deben ser funciones homogéneas de grado uno, puesto que, al escalarlas, e.g., duplicar el tamaño del sistema, estas cantidades se duplican también. Por otro lado, las variables intensivas, como la temperatura, la presión y el potencial químico, corresponden

a funciones homogéneas de grado cero, pues al duplicar el tamaño del sistema estas no se duplican, sino que se mantienen igual.

En general, una función diferenciable homogénea de grado  $k$  está definida por el

**Teorema de Euler**

*Una función es homogénea de grado  $k$  si y solo si*

$$\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}) = kf(\vec{x}), \quad (4.12)$$

donde  $\vec{x} = (x, y, z, \dots)$  y  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \dots)$ .

Si  $f = U$  es la ecuación fundamental en términos del volumen, la entropía y el número de partículas, obtenemos que

$$S \frac{\partial U(S, V, N)}{\partial S} + V \frac{\partial U(S, V, N)}{\partial V} + N \frac{\partial U(S, V, N)}{\partial N} = kU(S, V, N). \quad (4.13)$$

Como la energía es una variable extensiva debe ser homogénea de grado  $k = 1$  y usando las expresiones de las ecuaciones de estado, obtenemos la ecuación de Euler

$$U = TS - pV + \mu N. \quad (4.14)$$

Al diferenciar ecuación de Euler se encuentra una restricción entre las variables intensivas dada por la relación de Gibbs-Duhem

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0. \quad (4.15)$$

La cual implica que no todas las variables intensivas son independientes entre sí. La relación de Gibbs-Duhem permite reducir en uno los grados de libertad necesarios para describir un sistema termodinámico. Como es usual en la física, la reducción del número de variables indica la existencia de una simetría del sistema. En este caso, tal simetría se refiere a la invarianza ante escalamientos de las propiedades intensivas que caracterizan el sistema. Esto se puede ver de la siguiente manera. Dada una función de tres variables, homogénea de grado  $k$

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda^k S(U, V, N) \quad (4.16)$$

es posible elegir  $\lambda = \frac{1}{N}$ , con lo cual podemos escribir

$$S\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, 1\right) = \frac{1}{N^k} S(U, V, N). \quad (4.17)$$

Así, para una función extensiva i.e  $k = 1$ , podemos rescribir  $S$  como

$$S(U, V, N) = NS\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, 1\right) = Ns(u, v), \quad (4.18)$$

donde  $u = \frac{U}{N}$ ,  $v = \frac{V}{N}$  y  $s = S(u, v, 1)$ . Esto significa que un sistema termodinámico de tres grados de libertad caracterizado por  $S(U, V, N)$  se puede describir como un sistema de dos grados de libertad caracterizado por  $s(u, v)$ , que es una función intensiva. O bien, que se

puede describir con dos ecuaciones de estado:  $T = \frac{\partial s}{\partial u}$ ,  $\frac{p}{T} = \frac{\partial s}{\partial v}$  (la tercera ecuación de estado no es independiente de estas dos y se puede obtener usando la relación de Gibbs-Duhem, i.e., integrando  $d\mu = -sdT + vdp$ ) Por otro lado, una función intensiva cumple

$$T(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda^0 T(U, V, N) = T(U, V, N). \quad (4.19)$$

Es decir, es una función homogénea de grado cero. En consecuencia, se mantiene invariante ante un escalamiento en el tamaño del sistema.

### Ecuaciones de estado y homogeneidad

Para analizar como la homogeneidad se incorpora en la termodinámica consideremos lo siguiente. Tomemos un sistema simple con ecuación fundamental  $U = U(S, V, N)$ . Usando la propiedad de homogeneidad podemos reescribir esta como,  $u = u(s, v)$ . Por tanto, al derivar, obtenemos las ecuaciones de estado en la forma

$$T = T(S, V, N) = T(s, v), \quad p = p(S, V, N) = p(s, v), \quad \mu = \mu(S, V, N) = \mu(s, v). \quad (4.20)$$

Así, pasamos de un sistema de tres variables  $(S, V, N)$  a uno de dos  $(s, v)$ . Si reemplazamos las ecuaciones de estado en la ecuación de Euler, podemos obtener la ecuación fundamental. De esto se sigue que cada ecuación de estado por sí sola contiene menos información que la ecuación fundamental. Por otro lado, si tenemos dos ecuaciones de estado, podemos obtener la tercera usando la ecuación de Gibbs-Duhem. De esta forma, tener dos ecuaciones de estado es suficiente para determinar la ecuación fundamental (salvo una constante). Por ejemplo, si tenemos las ecuaciones de estado  $T = T(s, v)$  y  $p = p(s, v)$ , podemos determinar la ecuación fundamental a partir de la relación

$$du = Tds - pdv. \quad (4.21)$$

Es posible expresar  $U$  en términos de otros parámetros, por ejemplo, podemos despejar  $S$  en función de  $T$  y con eso escribimos  $U = U(T, V, N)$ . Sin embargo, esta no contiene toda la información termodinámica del sistema y, por tanto, no es una relación fundamental. La expresión  $U = U(T, V, N)$  es una ecuación en derivadas parciales, pues la podemos escribir como  $U = U(\frac{\partial U}{\partial S}, V, N)$ . Al integrar esta ecuación se tendrá una función indeterminada de  $(V, N)$  por ello, al ser desconocida la dependencia de  $U$  con respecto a  $V$  y  $N$ , la información no estaría completa.

### 4.3. Funciones de respuesta

Las ecuaciones de estado están definidas como primeras derivadas (parciales) de la ecuación fundamental. Las segundas derivadas de la ecuación fundamental definen las funciones de respuesta del sistema. Estas son cantidades que indican cómo cambia una variable de estado en respuesta a cambios en otra variable bajo condiciones controladas, e.g., cómo cambia la entropía al variar la temperatura mientras se mantiene el volumen fijo. Estas funciones

están dadas por:

Funciones de respuesta térmica: capacidades caloríficas a volumen y presión constante

$$c_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V, \quad c_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p. \quad (4.22)$$

La capacidad calorífica es una propiedad extensiva que define el calor que debe ser suministrado a un sistema para producir un cambio de un grado en su temperatura.

Funciones de respuesta mecánica: compresibilidades isotérmica  $\kappa_T$  y adiabática  $\kappa_S$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S. \quad (4.23)$$

La compresibilidad mide la capacidad que tiene un sistema para cambiar su volumen al ser sometido a una presión mientras se mantiene constante su temperatura o su entropía.

Coefficiente de expansión térmica

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (4.24)$$

Podemos ver el carácter de segunda derivada de la siguiente manera

$$c_V^{-1} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_V = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \right)_V \quad (4.25)$$

donde se usó  $T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$ . Algo similar se puede mostrar para el resto de funciones de respuesta.

Estas cantidades no son todas independientes entre sí; están relacionadas mediante

$$c_p = c_V + \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T}, \quad \kappa_T = \kappa_S + \frac{TV\alpha^2}{c_p} \quad (4.26)$$

Por tanto, solo tres de las cinco son independientes. Además, se cumple que

$$\frac{c_p}{c_V} = \gamma = \frac{\kappa_T}{\kappa_S} \quad (4.27)$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático.

## Transformación de Legendre

La descripción de un sistema termodinámico en términos de la entropía  $S(U, V, N)$  (o energía interna  $U(S, V, N)$ ) presupone que el estado del sistema se describe especificando su, energía (entropía), volumen  $V$  y número de partículas  $N$ . Sin embargo, esta no es la

única posibilidad para determinar el estado del sistema. En ciertos sistemas, resulta de mayor utilidad, por ejemplo, manipular la presión que el volumen, entonces en este caso, es deseable que el estado del sistema se especifique en términos de la presión. Es decir, en ocasiones resulta más conveniente describir el sistema en términos de las variables intensivas. Pasar de un conjunto de variables independientes a otro sin perder información del sistema se denomina transformación de Legendre.

La derivada total de la energía es

$$dU(S, V) = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV. \quad (4.28)$$

Usando  $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$  y  $-p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ , ésta puede ser escrita como

$$dU(S, V) = TdS - pdV. \quad (4.29)$$

Si escribimos  $TdS = d(TS) - SdT$  y agrupamos los diferenciales obtenemos

$$d(U - TS) = -SdT - pdV. \quad (4.30)$$

El argumento de la diferencial es la energía del sistema expresada en términos de la temperatura y del volumen. Esta expresión es llamada energía libre de Helmholtz y es denotada como  $F = U - TS$ . Así, la transformación de Legendre de la energía interna con respecto a la entropía es

$$dF = -SdT - pdV. \quad (4.31)$$

Esta función permite estudiar los cambios de energía del sistema teniendo como variables de estado (o control) la temperatura y el volumen, i.e.

$$dF(T, V) = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV. \quad (4.32)$$

Comparando con (3.25) podemos verificar que

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T. \quad (4.33)$$

Mediante el procedimiento anterior es posible realizar la transformación de Legendre con respecto al volumen, en este caso el potencial que obtenemos es llamado entalpía

$$H = U + PV. \quad (4.34)$$

De esta definición se sigue que

$$dH = TdS + Vdp, \quad dH(S, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S dp, \quad (4.35)$$

y, por tanto,

$$T = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_p, \quad V = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_S. \quad (4.36)$$

De manera análoga, se define la energía libre de Gibbs,

$$G = U + PV - TS = H - TS. \quad (4.37)$$

Para la cual se cumple que

$$S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p, \quad V = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T. \quad (4.38)$$

Hasta aquí se presentó una revisión breve de los elementos mínimos para comprender la termodinámica. Ahora bien, en lugar de continuar con una explicación más exhaustiva, cosa que se hace de mejor manera en, por ejemplo, [28] preferimos mostrar con un ejemplo la aplicación de los conceptos ya revisados.

## 4.4. Termodinámica del gas ideal

## 4.5. Termodinámica del gas ideal

Un gas ideal se puede considerar como un fluido hipotético en el que sus componentes no interactúan entre sí. El sistema está caracterizado por los parámetros extensivos:  $U, S, V, N$  y los intensivos:  $T, p, \mu$ . Para estudiar las propiedades termodinámicas, es necesario, tener la ecuación fundamental, o bien, las ecuaciones de estado. Veamos, como a partir de las ecuaciones de estado, se puede obtener la ecuación fundamental.

Para este sistema las ecuaciones de estado están dadas por

$$U = \frac{3}{2}Nk_B T, \quad pV = Nk_B T. \quad (4.39)$$

Considerando la propiedad de homogeneidad podemos escribir  $u = \frac{U}{N}, s = \frac{S}{N}, v = \frac{V}{N}$ . Así, de la primera ley tenemos

$$du = Tds - pdv. \quad (4.40)$$

Usando las ecuaciones de estado (4.39) y (4.40) obtenemos

$$ds = \frac{3}{2}k_B \frac{dT}{T} + k_B \frac{dv}{v}, \quad (4.41)$$

e integrando

$$s(T, v) = k_B \ln \left[ \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{v}{v_0} \right] + s_0. \quad (4.42)$$



Por supuesto, esta no es la ecuación fundamental, pues no es función solamente de variables extensivas. Para encontrar la ecuación fundamental debemos encontrar  $S = S(N, U, V)$  o equivalentemente  $s = s(u, v)$ . Para expresar la entropía en esta forma usamos la ecuación de estado  $u = \frac{3}{2}k_B T$ , así

$$s(u, v) = \frac{3}{2}k_B \ln \frac{u}{u_0} + k_B \ln \frac{v}{v_0} + s_0. \quad (4.43)$$

La ecuación fundamental contiene toda la información termodinámica de un sistema, así que, de (4.43) podemos extraer toda la información necesaria para caracterizar el sistema. En efecto, por un lado, de la primera ley de la termodinámica tenemos

$$ds = \frac{1}{T} du + \frac{p}{T} dv \quad (4.44)$$

Por otro lado, tomando el diferencial de (4.43) se obtiene que

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_v du + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_u dv, \quad (4.45)$$

así

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_v = \frac{\frac{3}{2}k_B}{u}, \quad \frac{p}{T} = \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_u = \frac{k_B}{v}. \quad (4.46)$$

Las cuales coinciden con las ecuaciones de estado (4.39) con  $u = \frac{U}{N}$  y  $v = \frac{V}{N}$ .

Finalmente, la tercera ecuación de estado la podemos obtener de la ecuación de Gibbs-Duhem

$$d\mu = -s(T, p)dT + v(T, p)dp. \quad (4.47)$$

Sustituyendo las ecuaciones de estado e integrando obtenemos

$$\mu(T, p) = \mu_0 - k_B T \ln \left[ \left( \frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \frac{p_0}{p} \right] + \left( \frac{5}{2} - s_0 \right) k_B (T - T_0). \quad (4.48)$$

Podemos expresar todas las cantidades que hemos obtenido como función del número de partículas  $N$ . Para eso simplemente usamos la propiedad de homogeneidad  $S = Ns, U = Nu, V = Nv$ . En particular, con esto obtenemos la entropía (4.43) como función de la energía interna, el volumen y el número de partículas

$$S(U, V, N) = \frac{N}{N_0} S_0 + N k_B \ln \left[ \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \frac{V}{V_0} \left( \frac{N_0}{N} \right)^{5/2} \right]. \quad (4.49)$$

De las ecuaciones de estado (4.39) podemos calcular las funciones de respuesta. Primero, observamos que usando la regla de la cadena podemos reescribir la capacidad calorífica como

$$c_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v, \quad (4.50)$$

por tanto, al tomar la derivada parcial de  $u = \frac{3}{2}k_B T$ , obtenemos

$$c_v = \frac{3}{2}k_B. \quad (4.51)$$

De manera análoga, calculando las derivadas parciales de  $pv = k_B T$  obtenemos

$$\kappa_T = \frac{1}{p}, \quad \alpha = \frac{1}{T}. \quad (4.52)$$

Al tener,  $c_v$ ,  $\kappa_T$  y  $\alpha$  podemos usar las expresiones (4.26) para calcular

$$c_p = c_v + \frac{Tv\alpha^2}{\kappa_T} = \frac{5}{2}k_B, \quad \kappa_S = \kappa_T + \frac{Tv\alpha^2}{c_p} = \frac{3}{5p}. \quad (4.53)$$

Por tanto, podemos verificar que el índice adiabático para el gas ideal es

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{5}{3}. \quad (4.54)$$

Usando el teorema de equipartición se puede mostrar que

$$c_v = \frac{f}{2}k_B, \quad (4.55)$$

donde  $f$  son los grados de libertad del sistema. Por otro lado, para un gas ideal (en unidades donde  $k_B = 1$ ) se cumple

$$c_p - c_v = 1. \quad (4.56)$$

Por tanto, al tomar estas, junto con la definición del índice adiabático  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , encontramos una expresión que relaciona los grados de libertad  $f$  del sistema con el índice adiabático [72]

$$\gamma = \frac{2+f}{f}, \quad f = \frac{2}{\gamma-1}. \quad (4.57)$$

Así, obtenemos que, en este caso, un gas monoatómico tiene  $f = 3$  grados de libertad.

Estas nociones serán importantes en los capítulos sexto y séptimo cuando calculemos las propiedades termodinámicas de la ecuación fundamental del espaciotiempo FLRW.

## Capítulo 5

# Aspectos termodinámicos de la gravedad

En el capítulo 3 vimos que la Relatividad General permite la existencia de horizontes espaciotemporales que actúan como un límite causal y bloquean la propagación de información a un observador externo. Las propiedades de los horizontes gravitacionales aún no son comprendidas del todo, sin embargo, conocemos algo fundamental sobre ellos; están dotados de entropía y temperatura. Esta característica de los horizontes señala la existencia de una relación profunda entre la dinámica gravitacional y la termodinámica. Esta relación aparece de diversas formas dependiendo de los sistemas gravitacionales que se consideren. En este capítulo exponemos algunos de los aspectos más importantes <sup>1</sup>, de la relación gravedad-termodinámica. Gran parte del contenido que se discute aquí se escribió siguiendo [73].

### 5.1. Termodinámica de agujeros negros

El hecho de que los agujeros negros posean una frontera que actúa como un límite causal que bloquea la transmisión de información llevó a Bekenstein [4][74] en 1973 a encontrar argumentos suficientes para sugerir que estos sistemas deben poseer una entropía distinta de cero, ya que ocultan información del observador externo. Bekenstein sugirió que el área  $A$  del horizonte del agujero negro debería tomarse como su entropía física, puesto que esta tiene la propiedad de no poder disminuir [75]. Esta analogía ya había sido vista por Barden, Carter y Hawking [76] aunque para ellos solo se trataba de una simple coincidencia matemática, pues desde el punto de vista clásico un agujero negro tiene una temperatura nula y realmente no había indicios físicos para justificar que el área estuviera relacionada con la entropía. Si un agujero negro tuviera temperatura, este radiaría, pero esto contradecía la definición de un agujero negro, pues nada que entre en él podría salir.

No obstante, aunque clásicamente un agujero negro no emite radiación, al considerar

---

<sup>1</sup>en el contexto con los intereses de nuestro trabajo

efectos cuánticos las cosas cambian y de hecho fue el propio Hawking quien probó que los agujeros negros emiten radiación a una temperatura distinta de cero. En 1975, Hawking, mostró [5] que debido a procesos cuánticos es posible que un agujero negro emita un flujo de partículas con el espectro térmico de un cuerpo negro.

Para llegar a este resultado, Hawking consideró un campo cuántico en el colapso de un agujero negro. Primero toma un campo cuántico que se propaga sobre el espaciotiempo de tal manera que antes del colapso se encuentra definido por su estado de vacío. Después, calcula el estado de partículas para tiempos posteriores. El resultado de sus cálculos indican que el número de partículas observado en infinito tiene el espectro de radiación de un cuerpo negro. Esto le permite identificar la temperatura de radiación como  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ .

Este descubrimiento llevó a una visión alternativa y complementaria de un agujero negro, ya no solo se trataba de un sistema gravitacional, sino también de un sistema termodinámico con una temperatura bien definida que se podía explicar mediante un mecanismo físico concreto. Por otro lado, con este descubrimiento, la propuesta que había hecho Bekenstein terminó por confirmarse; un agujero negro tiene una entropía proporcional al área del horizonte dada por  $S = \frac{1}{4}A$ .

La relación entre la termodinámica y la dinámica de agujeros negros se volvió más evidente cuando se descubrieron otras propiedades de los agujeros negros. En particular, los teoremas de unicidad ([77]) establecían que un agujero negro estaba caracterizado completamente por un conjunto pequeño de parámetros que se podrían comparar con las variables de estado de un sistema termodinámico.

Las propiedades que caracterizan el comportamiento de los agujeros negros se condensaron en cuatro enunciados, llamados leyes de la dinámica de agujeros negros. Estas son expresiones análogas a las leyes de la termodinámica que describen el comportamiento mecánico de estos sistemas. Las cuatro leyes fueron formuladas explícitamente por Bardeen, Carter y Hawking en 1973 [76], aunque solo se consideraron con significado físico después de saber que los agujeros negros radiaban. No es de particular relevancia en este trabajo exponer una deducción formal ni detallada de estas, por lo que las enunciaremos de forma breve. El lector interesado puede encontrar una descripción amplia en [76] [78] [42].

### Ley Cero

Si las ecuaciones de Einstein se cumplen y el tensor de energía momento satisface la condición de energía dominante <sup>2</sup> entonces la gravedad superficial es constante sobre toda la superficie del horizonte de eventos de un agujero negro estacionario.

### Primera ley

Cuando un agujero negro caracterizado por los parámetros  $(M, Q, J)$  con un horizonte de eventos de gravedad superficial  $\kappa$ , potencial eléctrico  $\Phi$  y velocidad angular  $\Omega$  es llevado (perturbado) a un estado con masa  $M + dM$ , carga  $Q + dQ$  y momento angular  $J + dJ$  los

<sup>2</sup>La condición de energía dominante establece que para cualquier vector tipo tiempo  $\xi$ ,  $T_{mn}\xi^m\xi^n \geq 0$  y  $T_n^a\xi^n$  es causal [79]. Físicamente, esto significa que la velocidad del flujo de energía no puede fluir más rápido que la velocidad de la luz.

cambios en los parámetros están relacionados por la identidad [78]

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Phi dQ + \Omega dJ. \quad (5.1)$$

donde se cumple que  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$  y  $S = \frac{1}{4}A$ .

### Segunda ley

Si las ecuaciones de Einstein se cumplen y se satisface la condición de energía nula  $T_{ab}k^ak^b \geq 0$  y si, además, el espaciotiempo es asintóticamente predecible, entonces el área del horizonte de eventos es una función que nunca decrece con el tiempo,

$$dA \geq 0. \quad (5.2)$$

De esta manera, la segunda ley está definida por el teorema de no decrecimiento del área de Hawking [75].

### Tercera ley

Si el tensor de energía momento está acotado y satisface la condición de energía débil <sup>3</sup>, entonces la gravedad superficial  $\kappa$  no puede reducirse a cero en un tiempo o número de operaciones finito.

Si se considera que la gravedad superficial  $\kappa$ , el área  $A$  y la masa  $M$  juegan el papel de temperatura, entropía y energía interna respectivamente, las leyes de agujeros negros presentan una profunda semejanza con las leyes de la termodinámica.

Debemos mencionar que solo en espaciotiempo estacionarios, como agujeros negros, es posible relacionar la variación de cantidades definidas en el horizonte como el área, con cantidades como la masa o el momento angular que están definidos en el infinito ([80]). Ahí mismo se explica que para poder definir variables termodinámicas en un espaciotiempo no estacionario, estas deberían ser cantidades locales. En concreto, en ([59]) se investiga esta posibilidad mediante el estudio de horizontes aislados que precisamente se definen como hipersuperficies nulas con expansión y esfuerzo contante nulos. Esto es de suma importancia, pues en [8] considera estas como las condiciones de equilibrio que le permiten derivar las ecuaciones de Einstein, exigiendo que se cumpla la relación de Clausius  $\delta Q = TdS$ . Ver más adelante en este capítulo.

Sobre la tercera ley hay algo más que decir. En el caso de agujeros negros esta parece que no se cumple del todo, pues en principio es posible tener agujeros negros extremos [80] i.e,  $\kappa = 0$  con una área finita  $A \neq 0$ . Por otro lado, existen argumentos [70] que paren mostrar que la tercera ley no debería considerarse como tal.

<sup>3</sup>La condición de energía débil establece que para cualquier vector tipo tiempo  $\xi$ ,  $T_{mn}\xi^m\xi^n \geq 0$  [?]

## Segunda ley generalizada

Si un objeto cae en un agujero negro, todo lo concerniente a su información física desaparece, incluida su entropía, pues después de atravesar el horizonte, inevitablemente termina en la singularidad. Esto sugiere que la segunda ley de la termodinámica se viola, pues en lo que respecta a un observador externo la entropía del universo ha disminuido.

Puesto que esto no es físicamente aceptable, Bekenstein [74] [4] encontró una manera de resolver este problema. Su propuesta consistía en asociar una entropía al agujero negro, la cual es proporcional al área del horizonte de eventos. Luego, propone una entropía generalizada

$$S = S_{BH} + S_{materia}. \quad (5.3)$$

para la cual se cumple que

$$dS = d(S_{BH} + S_{materia}) \geq 0. \quad (5.4)$$

Esta es la segunda ley generalizada (SLG) de la termodinámica y establece que la entropía total  $S_{BH} + S_{materia}$  nunca decrece.

De esta manera, si la entropía de la materia disminuye al desaparecer en el agujero negro, esta es compensada por un aumento en la entropía  $S_{BH}$ . Es decir, cuando la materia entra al agujero negro, este proceso aumenta el área de su horizonte de eventos.

La SLG resulta especialmente útil a la hora de considerar un problema que surge al considerar efectos cuánticos en un agujero negro. Ya se dijo que en ese caso, un agujero negro radia, sin embargo, al ser un sistema aislado, este proceso implica que parte de su masa se evapora. Al disminuir la masa, el área del horizonte también disminuye, por lo que eventualmente el agujero negro desaparecería por completo. Como se puede observar, esto viola el teorema de área de Hawking <sup>4</sup>, y, por tanto, la segunda ley de agujeros negros. La SLG resuelve este problema, ya que aun cuando debido a efectos cuánticos el teorema de área no se satisface, el proceso de evaporación de agujeros negros no viola la segunda ley generalizada [80].

## Ecuación fundamental de agujeros negros

Otro aspecto importante que debemos considerar es que la noción de ecuación fundamental de la termodinámica ordinaria también se puede extender a la mecánica de agujeros negros. La ecuación fundamental que contiene toda la información termodinámica de un agujero negro que satisface el teorema de no pelo fue derivada por Smarr en 1973 [29]. En la representación de energía está dada por

$$M = \left[ \frac{\pi J^2}{S} + \frac{S}{4\pi} \left( 1 + \frac{\pi Q^2}{S} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.5)$$

---

<sup>4</sup>Esto se debe a que el tensor de energía momento asociado a la radiación que escapa del agujero negro no cumple la condición de energía nula

De esta expresión, igual que en la termodinámica, podemos calcular las funciones de estado. Tomando el diferencia de (5.5) obtenemos

$$dM = \left( \frac{1}{8\pi M} - \frac{4\pi^2(J^2 + \frac{1}{4}Q^2)}{8\pi MS^2} \right) dS + \frac{Q(\pi Q^2 + S)}{2SM} dQ + \frac{\pi J}{SM} dJ, \quad (5.6)$$

comparando esto con la primera ley (5.7)

$$dM = TdS + \Phi dQ + \Omega dJ, \quad (5.7)$$

podemos identificar las ecuaciones de estado

$$T = \left( \frac{\partial M}{\partial S} \right) = \frac{1}{8\pi M} \left( 1 - \frac{4\pi^2(J^2 + \frac{1}{4}Q^2)}{S^2} \right), \quad (5.8)$$

$$\Omega = \left( \frac{\partial M}{\partial J} \right) = \frac{\pi J}{SM}, \quad (5.9)$$

$$\Phi = \left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right) = \frac{Q(\pi Q^2 + S)}{2SM}. \quad (5.10)$$

En analogía con las variables intensivas en un sistema termodinámico en equilibrio, estas cantidades son las variables conjugadas y permanecen constantes en el horizonte.

Como es usual en termodinámica estándar, la ecuación (5.5) se puede describir en la representación entrópica,

$$S = \pi \left( 2M^2 - Q^2 + 2\sqrt{M^4 + M^2Q^2 - J^2} \right). \quad (5.11)$$

Otras propiedades interesantes tales como la capacidad calorífica y transiciones de fase han sido estudiadas en [81] [82]. Por otro lado, al considerar la constante cosmológica como una presión termodinámica, la masa del agujero negro pasa de ser la energía interna del sistema a ser interpretada como la entalpía. Además, bajo estas consideraciones surge una noción de volumen para agujeros negros [83] [84] [85].

En resumen, las cuatro leyes de la dinámica de agujeros negros tienen una profunda correspondencia con las leyes de la termodinámica si consideramos que  $\kappa$  juega el papel de la temperatura,  $A$  el de entropía y  $M$  el de la energía interna.

La ley cero de la termodinámica clásica establece que un sistema en equilibrio tiene una temperatura uniforme, en contraste para un agujero negro tenemos que la gravedad superficial  $\kappa$  es uniforme sobre todo el horizonte. La primera ley establece la conservación de la energía, mientras que para agujeros negros tenemos lo que podemos llamar la conservación de la masa —sin embargo, recordemos que  $E = Mc^2$ — que implica que un cambio en los parámetros  $Q$  y  $J$  implican necesariamente un cambio en  $M$ . La segunda ley define la dirección en la que fluye el calor, mientras que su análogo establece una dirección en la cual puede fluir información a través del horizonte. Finalmente, la tercera ley establece que no es posible alcanzar el cero absoluto de temperatura por un proceso adiabático, en el caso de agujeros negros esta o se cumple del todo. De esta discusión se puede observar la sorprendente analogía entre las leyes de la termodinámica y las leyes de la dinámica de agujeros

negros.

Puede haber controversia en sí, estas leyes son termodinámicas o no, pues, estrictamente hablando, las propiedades que relacionan son mecánicas y no termodinámicas, sin embargo, al descubrirse una relación directa entre temperatura-gravedad superficial y entropía-área, estas cantidades mecánicas adquieren un significado termodinámico y las leyes de agujeros negros pueden interpretarse como leyes termodinámicas. Además, si consideramos que la termodinámica es definida por la estructura matemática impuesta por las cuatro leyes que la rigen, es decir, que un sistema termodinámico es aquel que obedece dichas expresiones, entonces, al ser igual, la estructura matemática de las leyes dinámicas de agujeros negros a las leyes de la termodinámica, podemos decir que los agujeros negros son sistemas termodinámicos. Al menos esto debe ser cierto desde el punto de vista teórico. Desde el punto de vista experimental no se puede asegurar nada, pues por el momento resulta muy difícil implementar experimentos que permitan validar o rechazar estos enunciados. No obstante, el hecho de que un agujero negro se comporte como un sistema termodinámico, puede ser un indicio de una profunda relación entre la gravitación, la termodinámica y la mecánica cuántica.

## 5.2. Efecto Unruh

La estructura causal del espaciotiempo de Rindler es muy parecida a la de un agujero negro. De hecho, podemos notar que la métrica de un agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal (2.50)

$$ds^2 = \frac{16M^2}{r} e^{\frac{-r}{2M}} (dT^2 - dR^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.12)$$

es muy parecida a la métrica de Rindler (3.9)

$$ds^2 = e^{a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (5.13)$$

Ambas métricas presentan un horizonte, siendo el de Rindler el horizonte que detecta un observador acelerado.

Al considerar efectos cuánticos, el horizonte de eventos de un agujero negro, puede emitir radiación y, por tanto, tiene una temperatura bien definida. De estos razonamientos resulta natural preguntarse si el horizonte de Rindler está dotado también con estas propiedades. Este problema fue resuelto por Unruh y la respuesta es afirmativa: al estudiar la teoría cuántica de campos en un espaciotiempo de Rindler, resulta que es posible asociar una temperatura al horizonte percibido por observadores acelerados [7]. En concreto, un observador acelerado percibe el estado de vacío de Minkowski como radiación de espectro térmico a una temperatura dada por

$$T_U = \frac{a}{2\pi}, \quad (5.14)$$

donde  $a$  es la aceleración del observador. Este fenómeno es conocido como efecto Unruh. Para una derivación detallada de los cálculos que conducen a este resultado recomendamos [35] [86].



Podemos notar que, si el observador es inercial, la temperatura de Unruh es nula. Así, un observador inercial no experimentará este fenómeno. Esto tiene consecuencias importantes, pues de esto se sigue que un observador acelerado en el espacio de Minkowski percibe partículas, mientras que un observador inercial en el mismo espacio no detecta partículas. Por tanto, el efecto Unruh muestra directamente que la idea de vacío es una noción que depende del observador.

El efecto Unruh es idéntico a la radiación de Hawking en más de un sentido. El principio de equivalencia afirma que un observador con aceleración uniforme en un espaciotiempo plano es equivalente a un observador inercial en un campo gravitacional constante. Así, apelando a dicho principio, podemos explicar la similitud de las métricas (5.12) y (5.13), es decir, podríamos asumir que el observador de Rindler no se encuentra acelerado, sino que está inmerso en un campo gravitacional; de esta manera, el horizonte de Rindler sería causado por la curvatura del campo gravitacional; un observador de Rindler sería equivalente a un observador estático en el caso de agujeros negros y la temperatura de Unruh sería la temperatura de Hawking. Por otro lado, a pesar de estas similitudes, también debemos notar que hay diferencias importantes. La principal, por supuesto, es que la métrica de un agujero negro representa realmente una configuración del espaciotiempo con gravedad y no es solo un artificio dado por una transformación de coordenadas, como en el caso de la métrica de Rindler. Esto significa, que a diferencia del espacio de Rindler, el espaciotiempo de un agujero negro tiene curvatura; esto es fácil de mostrar porque su tensor de curvatura es distinto de cero, mientras que para Rindler, es nulo. Además, con esto se puede probar que la singularidad de un agujero negro es una singularidad física, mientras que en Rindler es una singularidad de coordenadas<sup>5</sup>.

En estos espaciotiempo el horizonte juega un papel fundamental como la superficie sobre la cual se puede asociar propiedades termodinámicas. Esto lo podemos notar claramente en el espaciotiempo de Rindler donde la temperatura es proporcional a la aceleración, por tanto, para un observador sin aceleración, el horizonte no existirá y la temperatura será cero. En [87], se argumenta que cualquier horizonte causal estará dotado de propiedades termodinámicas. No obstante, en [88] se muestra que es posible establecer una relación entre la termodinámica y la gravedad sin la necesidad de un horizonte.

### 5.3. Las ecuaciones de Einstein como ecuación de estado

En su artículo de 1995, T. Jacobson [8], demuestra que las ecuaciones de Einstein se pueden interpretar como una ecuación de estado, en el siguiente sentido: Se define un horizonte de Rindler en cada punto del espaciotiempo. Luego considera una clase de termodinámica gravitacional asociada a tales horizontes, de tal manera que el sistema se define como los grados de libertad ocultos tras el horizonte. De manera análoga a como un sistema termodinámico usual está separado del resto del universo por una barrera diatérmica, este sistema está separado por una barrera causal, i.e., el horizonte. Las condiciones de equilibrio para

<sup>5</sup>Granger, A. (2010). Thermodynamic gravity and the emergence of space with geometry (QFFF Dissertation). London: Imperial College. <https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/dissertations/2010/Andrew-Granger-Dissertation.pdf>

este sistema se especifican suponiendo que en cada horizonte local, la expansión, rotación y esfuerzo cortante son despreciables. Suponiendo, además, que la entropía es proporcional al área del horizonte y que la temperatura está dada por la temperatura de Unruh, las ecuaciones de Einstein se obtienen exigiendo que la relación de Clausius  $\delta Q = TdS$  se cumpla para todo observador de Rindler asociado a cada punto del espaciotiempo. En las siguientes líneas exponemos sus resultados con más detalles.

Dado un espaciotiempo arbitrario, se invoca el principio de equivalencia, para considerar que una región lo suficientemente pequeña alrededor de un punto  $p$  se puede tomar como plana. A continuación se introduce un marco de referencia acelerado de Rindler. En tal sistema, los observadores acelerados perciben un horizonte. Sea  $\xi^a$  el vector de Killing que genera dicho horizonte.

Puesto que en termodinámica que considera el calor como un flujo de energía entre los grados de libertad del sistema, aquí se define el calor como el flujo de energía que atraviesa el horizonte

$$\delta Q = \int_H T_{ab} \xi^a d\Sigma^b, \quad (5.15)$$

donde  $T_{ab}$  es el tensor de energía-momento.

Definiendo un vector tangente al horizonte de tal forma que  $\xi^a = -\kappa \lambda k^a$ , podemos expresar el elemento de volumen como  $d\Sigma^a = k^a dA d\lambda$ , donde  $A$  es el área del horizonte, con esto, el flujo de calor resulta

$$\delta Q = -\kappa \int_H T_{ab} k^a k^b \lambda d\lambda dA. \quad (5.16)$$

Por otro lado, el ritmo de cambio del área de un horizonte local con respecto al parámetro afín  $\lambda$  esta dado por la expansión

$$\theta = \frac{1}{\delta A} \frac{d(\delta A)}{d\lambda}, \quad (5.17)$$

de donde

$$\delta A = \int_H \theta d\lambda dA. \quad (5.18)$$

Anteriormente, se se dijo que la ecuación de Raychaudhuri (3.24) describe la evolución de las congruencias nulas que generan el horizonte. En el caso de campos vectoriales que son ortogonales a hipersuperficies, el término rotacional es cero debido al teorema de Frobenius [38]. Por tanto, en ese caso, la ecuación de Raychaudhuri es

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\theta^2 - \sigma^2 - R_{ab} k^a k^b. \quad (5.19)$$

Para definir el equilibrio en este sistema, se considera que la expansión y el esfuerzo cortante son despreciables <sup>6</sup> en el horizonte, por tanto, teniendo en cuenta esto e integrando (5.19) obtenemos

---

<sup>6</sup>En ([59]) se investiga los horizontes aislados que precisamente se definen como hipersuperficies nulas con expansión y esfuerzo contante nulos. Una discusión similar sobre las propiedades de los horizontes de agujeros negros que se pueden inferir de la ecuación de Raychaudhuri se hace en [78].

$$\theta = -\lambda R_{ab}k^ak^b. \quad (5.20)$$

De esta manera podemos escribir

$$\delta A = - \int_H R_{ab}k^ak^b \lambda d\lambda dA. \quad (5.21)$$

Finalmente, si se asume que la relación de Clausius  $\delta Q = TdS$  es válida para todos los horizontes locales de Rindler, con  $T$ , la temperatura de Unruh  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ <sup>7</sup> y  $S$ , proporcional al área, de tal manera que  $\delta S = \eta\delta A$ , obtenemos

$$\kappa \int_H T_{ab}k^ak^b \lambda d\lambda dA = \eta \frac{\kappa}{2\pi} \int_H R_{ab}k^ak^b \lambda d\lambda dA. \quad (5.22)$$

Esto implica que para todo vector nulo  $k^a$ , es decir, para todo vector de Killing  $\xi^a$  asociado a un horizonte en cualquier punto del espaciotiempo, se cumple

$$T_{ab}k^ak^b = \frac{\eta}{2\pi} R_{ab}k^ak^b. \quad (5.23)$$

Por otro lado, para todo vector nulo se satisface  $g_{ab}k^ak^b = 0$ , por lo que podemos escribir

$$T_{ab}k^ak^b = \frac{\eta}{2\pi} R_{ab}k^ak^b + f g_{ab}k^ak^b, \quad (5.24)$$

para toda función arbitraria  $f$ . Tomando la divergencia de esta ecuación y usando la conservación del momento  $\nabla^a T_{ab} = 0$  y la identidad de Bianchi  $\nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2}\nabla_b R$ , se encuentra que  $f = -\frac{1}{2}R + \Lambda$  por tanto, de (5.24) obtenemos las ecuaciones de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{2\pi}{\eta} T_{ab}. \quad (5.25)$$

Nótese que en esta derivación es fundamental considerar regiones donde  $\theta = 0$ , es decir, donde la expansión sea nula; los horizontes de Rindler satisfacen esta condición porque son estacionarios. En el capítulo 3 se mostró que esta es la condición que define un horizonte aparente. En particular, el horizonte aparente del espaciotiempo FLRW.

Los agujeros negros y el efecto Unruh ya habían dado evidencias de la relación entre termodinámica y gravedad. Sin embargo, el trabajo de Jacobson ha llevado está aún más lejos al mostrar que las ecuaciones de Einstein pueden ser entendidas como una ecuación de estado. Las implicaciones físicas de esto pueden ser muy importantes, ya que como el propio Jacobson discute, su resultado podrían implicar que cuantizar la gravedad no tendría más sentido que el de cuantizar una onda de presión. En realidad las cosas siguen siendo bastante inciertas sobre si es posible o no cuantizar la gravedad; sin embargo, este trabajo ha mostrado un aspecto importante de la gravedad. Con él, dio una dirección alternativa para investigar la relación entre termodinámica y gravedad. En particular, siguiendo sus ideas en

<sup>7</sup>En este caso  $\kappa$  es la aceleración de los observadores de Rindler

[89] se muestra que la noción de las ecuaciones de campo como ecuación de estado se puede extender para teorías  $f(R)$ . En ese mismo orden de ideas, en [90] E. Verlinde propone que la gravedad es una fuerza entrópica. Por otro lado, en [17] se aplican sus ideas al caso particular de universos FLRW, donde se muestra que de las ecuaciones de Friedmann pueden derivarse de la relación de Clausius. En la siguiente sección revisaremos estos cálculos.

## 5.4. Ecuaciones de Friedmann y la primera ley de la termodinámica

Para estudiar las propiedades termodinámicas de un espaciotiempo es necesario poder definir un horizonte. El espaciotiempo FLRW, descrito por la métrica

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad h_{ab} = \text{diag} \left( -1, \frac{a^2}{1-kr^2}, 0, 0 \right), \quad R = ar, \quad (5.26)$$

está dotado de un horizonte aparente definido por

$$h^{ab} \frac{\partial R}{\partial x^a} \frac{\partial R}{\partial x^b} = 0. \quad (5.27)$$

Nótese que  $h_{ab}$  está definida solo para el plano  $(t, r)$  donde los índices  $a, b$  toman valores tales que  $dx^0 = dt, dx^1 = dr$ .

La expresión (5.27) es una ecuación diferencial cuya solución,

$$R_h = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}}, \quad (5.28)$$

determina el radio del horizonte aparente. Donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  denota el parámetro de Hubble y es una cantidad que depende del tiempo; de donde se sigue que  $R_h$  es una cantidad que también depende del tiempo. Esta es una propiedad que lo diferencia del horizonte de eventos de un espaciotiempo estático.

Al tomar la derivada de  $R_h$  con respecto al tiempo, obtenemos la expresión que describe la dinámica del horizonte

$$\dot{R}_h = -R_h^3 H \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) \quad (5.29)$$

Estas cantidades resultan ser importantes, pues la entropía y temperatura están determinadas completamente por ellas. Nótese, que para un universo plano, es decir,  $k = 0$ , el radio del horizonte aparente es igual al llamado radio de Hubble  $r_H = \frac{1}{H}$ .

De manera análoga al caso de agujeros negros, se ha mostrado [91] que el horizonte aparente emite radiación de Hawking y que es posible asociarle una temperatura y entropía dadas por

$$S = \frac{A}{4}, \quad T = \frac{|\kappa|}{2\pi}, \quad (5.30)$$

donde  $A = 4\pi R_h^2$  es el área del horizonte y  $\kappa$  su gravedad superficial.

En el capítulo 3 definimos la gravedad superficial del horizonte aparente FLRW como

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}} \partial_a \left( \sqrt{-h} h^{ab} \partial_b R \right). \quad (5.31)$$

Considerando,

$$\sqrt{-h} = \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad \partial_t R = RH, \quad \partial_r R = a, \quad (5.32)$$

podemos hacer un cálculo explícito y obtener

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{2a} \left[ \partial_t \left( \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} (-RH) \right) + \partial_r \left( \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \frac{1-kr^2}{a^2} a \right) \right], \\ &= -\frac{1}{2a} \left( \dot{a}RH + R\ddot{a} + \frac{k}{a}R \right), \\ &= -\frac{R}{2} \left( 2H^2 + \dot{H} + \frac{k}{a^2} \right), \\ &= -\frac{R}{R_h^2} \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right), \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde se usaron las ecuaciones de Friedmann (2.64),(2.65), la definición del radio del horizonte (5.28) y su derivada (5.29). Por tanto, al evaluar en  $R = R_h$ , obtenemos que la temperatura del horizonte aparente está dada por

$$T = \frac{|\kappa|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_h} \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right). \quad (5.34)$$

Más detalles sobre la gravedad superficial y temperatura del horizonte aparente FLRW pueden consultar en [66] [62].

El carácter termodinámico de la gravedad en este escenario va más allá del hecho de poder definir una temperatura y entropía en el horizonte aparente, pues se ha demostrado [17][92][21][93] que las ecuaciones de Friedmann guardan una relación muy estrecha con la primera ley de la termodinámica y en específico con el término  $\delta Q = TdS$ .

La primera ley unificada está dada por la expresión (3.47). No obstante, en el artículo [17] no se toma la expresión más general sino una proyección [66] dada por

$$dE = \Psi A + WdV. \quad (5.35)$$

En el espaciotiempo FLRW el contenido de materia está dado por tensor energía-momento de un fluido perfecto (2.58). La proyección de este en el plano  $(t, r)$  es  $T_{ab} = (\rho+p)u_a u_b + p h_{ab}$ .

#### 5.4. ECUACIONES DE FRIEDMANN Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 77

Con este podemos calcular explícitamente la densidad de trabajo 3.43

$$W = -\frac{1}{2}T^{ab}h_{ab} = \frac{1}{2}(\rho - p), \quad (5.36)$$

y el vector de flujo 3.42

$$\psi_a = \left( -\frac{1}{2}(\rho + p)HR, \frac{1}{2}(\rho + p)a, 0, 0 \right), \quad \Psi = \psi_a dx^a = -\frac{1}{2}(\rho + p)HRdt + \frac{1}{2}(\rho + p)adr. \quad (5.37)$$

donde  $dx^0 = dt$ ,  $dx^1 = dr$ . Simplificando esta expresión y evaluándola en  $R = R_h$  podemos escribir

$$\Psi = \frac{1}{2}(\rho + p) \left( -2HR_h + \dot{R}_h \right) dt. \quad (5.38)$$

El volumen del horizonte aparente es  $V = \frac{4\pi}{3}R_h^3$ , por tanto,  $dV = AdR_h$  así, el cambio en la energía interna resulta dado por

$$dE = \Psi A + WdV = \rho(\dot{R}_h - HR_h)dt - ApHR_h dt, \quad (5.39)$$

donde  $A = 4\pi R_h^2$  es el área del horizonte aparente. Esta ecuación se puede reescribir como

$$\dot{E} = -ApHR_h \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{R_h H} \right) - ApHR_h. \quad (5.40)$$

Si se considera la aproximación  $\frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \ll 1$ , es decir, que horizonte evoluciona muy lentamente, el cambio en la energía estará dado por

$$dE = -4\pi(\rho + p)HR_h^3 dt. \quad (5.41)$$

Notemos que bajo esta aproximación el término dinámico de la temperatura (5.34) desaparece y solo queda  $T = \frac{1}{2\pi R_h}$ . Por otro lado, si se considera que un flujo de calor  $\delta Q$  a través del horizonte aparente es igual al cambio en su energía i.e.,  $\delta Q = -dE$ <sup>8</sup>, entonces, usando la relación de Clausius  $\delta Q = TdS$ , la primera ley de la termodinámica se puede escribir como

$$\begin{aligned} dE &= -TdS. \\ 4\pi(\rho + p)HR_h^3 dt &= \frac{1}{2\pi R_h} dS. \\ 4\pi(\rho + p)HR_h^3 &= \dot{R}_h, \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde se usó  $dS = 2\pi R_h dR_h$ .

---

<sup>8</sup>Al atravesar el horizonte, la energía no puede volver a salir, de ahí el signo negativo

Finalmente, al usar la expresión  $\dot{R}_h = -R_h^3 H \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right)$  obtenemos,

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + p). \quad (5.43)$$

Que es la ecuación de aceleración de Friedmann (2.65). Este es el resultado que se obtiene en [17] y que muestra una equivalencia entre las ecuaciones de Friedmann y la primera ley de la termodinámica. Además, es posible mostrar que este resultado es ambivalente, es decir, asumiendo las ecuaciones de Friedmann y la expresión para la temperatura, se puede obtener que la expresión para la entropía es  $S = \frac{A}{4}$  [18] [20].

Es importante notar que lo único que se asumió en este cálculo es que la temperatura y la entropía para el horizonte aparente del universo FLRW tiene la forma usual asociada al horizonte de agujeros negros, sin embargo, dado el resultado satisfactorio se podría justificar estas premisas, puesto que llevan a una solución consistente.

No obstante, en [62] [66] se critica este procedimiento y proponen una manera más general de realizar los cálculos sin hacer suposiciones ni aproximaciones. En resumen, se considera la definición más general de la primera ley unificada (3.48),

$$A\psi_a = R\nabla_a \left( \frac{E}{R} \right) + \frac{\kappa}{8\pi} \nabla_a A, \quad (5.44)$$

luego, esta se proyecta sobre un vector  $t^a$  que es tangente al horizonte  $t^a \nabla_a [\nabla^b R \nabla_b R] = 0$ . Los términos proyectado están dados por

$$t^a (A\psi_a) = -2\pi R^3 H (\rho + p) \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right), \quad (5.45)$$

$$t^a \nabla_a \frac{E}{R} = 0, \quad (5.46)$$

$$t^a \left( \frac{\kappa}{8\pi} \nabla_a A \right) = -\frac{R^3 \dot{R}_h}{2R_h^3} \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right). \quad (5.47)$$

Con esto, la proyección de la primer ley unificada es

$$-2\pi HR^3 (\rho + p) \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right) = -\frac{R^3 \dot{R}_h}{2R_h^3} \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right). \quad (5.48)$$

Simplificando y usando la definición  $\dot{R} = -R_h^3 H \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right)$  obtenemos

$$-4\pi (\rho + p) = \dot{H} - \frac{k}{a^2}. \quad (5.49)$$

Nótese que en este cálculo, en ningún momento fue necesario asumir la forma de la entropía ni de la temperatura. Por tanto, este es un cálculo mucho más general que el

hecho en [17]. Lo cierto es que R.G. Cai fue el primero en darse cuenta de la relación entre las ecuaciones de Friedmann y la primera ley de la termodinámica. De hecho, en su trabajo muestra que esta no solo es válida bajo el esquema de la relatividad general, sino que incluso, esta sigue siendo válida en teorías generalizadas como Gauss-Bonnet y Lovelock.

Siguiendo un procedimiento idéntico al que hemos revisado, Cai muestra que si se asume que la entropía del horizonte aparente en la teoría de Gauss-Bonnet es

$$S = \frac{A}{4} \left( 1 + \frac{2\tilde{\alpha}(n-1)}{R_h^2(n-3)} \right), \quad (5.50)$$

con  $A = n\Omega_n R_h^{n-1}$ ,  $\tilde{\alpha} = (n-2)(n-3)\alpha$  y que la temperatura  $T = \frac{1}{2\pi R_h}$  entonces, al usar la primera ley unificada para calcular  $dE$  y luego la relación de Clausius,  $\delta Q = TdS$ , identificando  $\delta Q = -dE$ , se obtiene que  $dE = -TdS$  implica

$$\left( 1 + 2\tilde{\alpha} \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \right) \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) = -\frac{8\pi G}{n-1} (\rho + p). \quad (5.51)$$

En el capítulo 2 vimos que es una de las ecuaciones de Friedmann (2.116) en la teoría Einstein-Gauss-Bonnet.

En el caso de la teoría de Lovelock, se considera que la entropía del horizonte aparente está dada por [17]

$$S = \frac{A}{4} \sum_{i=1}^m \frac{i(n-1)}{(n-2i+1)} \hat{c}_i R_h^{2-2i}. \quad (5.52)$$

donde  $A = n\Omega_n R_h^{n-1}$  es el área del horizonte aparente y los coeficientes  $\hat{c}_i$  se definieron en la sección 2.4. Aplicando el mismo procedimiento que describimos para el caso de relatividad general y Gauss-Bonnet, se encuentra que al exigir que se cumpla relación de Clausius  $\delta Q = TdS$ , se llega a la ecuación

$$\sum_{i=1}^m i\hat{c}_i \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{i-1} \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) = -\frac{8\pi G}{n-1} (\rho + p). \quad (5.53)$$

La cual es la ecuación de Friedmann (2.118) en la teoría de Lovelock.

## 5.5. Ecuaciones de Einstein como una identidad termodinámica en el horizonte

Otro de los aspectos de la relación entre termodinámica y gravedad, que también conecta la primera ley con las ecuaciones de Einstein, es, como mostró Padmanabhan [9] [10], que en un espaciotiempo estático con simetría esférica, es posible interpretar las ecuaciones de Einstein, evaluadas en el horizonte, como la identidad termodinámica  $TdS = dE + PdV$ .

Considérese una métrica esféricamente simétrica escrita de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.54)$$



Un espaciotiempo de estas características tiene un horizonte en algún punto  $r = a$  que puede ser localizado encontrando el punto donde se anula la función  $f(a)$ . Además, el horizonte tiene asociada una temperatura dada por la expresión

$$T = \frac{\sqrt{f'(a)g'(a)}}{4\pi}. \quad (5.55)$$

Para asegurar que la superficie definida en  $r = a$  sea un horizonte y no una singularidad, se imponen las condiciones  $g(a) = 0$  y  $f'(a) = g'(a)$ . Con esto, la temperatura se reduce a  $T = \frac{g'(a)}{4\pi}$ .

Las especificaciones anteriores impone restricciones sobre la forma del tensor de energía momento, que debe satisfacer

$$T^t|_{r=a} = T^r|_{r=a}, \quad T^\theta|_{r=a} = T^\phi|_{r=a}. \quad (5.56)$$

Bajo estas consideraciones, las ecuaciones de Einstein resultan ser

$$(1 - g) - rg'(r) = 8\pi Pr^2, \quad (5.57)$$

donde  $P = T^r_r$  es la presión radial.

Al evaluar 5.57 en  $r = a$  se obtiene

$$\frac{1}{2}ag'(a) - \frac{1}{2} = 4\pi Pa^2. \quad (5.58)$$

Ahora, se toman dos soluciones que solo difieren entre sí por un desplazamiento virtual dado por  $da$ , es decir, una solución para  $a$  y otra para  $a + da$ . Multiplicando la ecuación anterior por  $da$  se obtiene <sup>9</sup>

$$\frac{g'(a)}{4\pi}d\left(\frac{1}{4}4\pi a^2\right) - \frac{1}{2}da = Pd\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right). \quad (5.59)$$

Es claro que, si identificamos  $T = \frac{g'(a)}{4\pi}$ ,  $S = \frac{1}{4}A$ ,  $E = \frac{a}{2}$  y  $V = \frac{4\pi}{3}a^3$ , la ecuación anterior resulta ser la identidad termodinámica

$$TdS - dE = PdV.$$

Este resultado puede ser interpretado de la siguiente manera. La primera ley de la termodinámica asegura que dos estados en equilibrio que difieren por  $dS$ ,  $dE$  y  $dV$  pero que están definidos por las mismas propiedades intensivas  $T$  y  $P$ , están relacionados por  $TdS = dE + PdV$ . De una manera análoga, podemos decir que dos estados cuasiestáticos de equilibrio en un horizonte de simetría esférica que difieren por  $da$ , donde ambos tiene la misma fuente  $P = T^r_r$  y temperatura  $T = \frac{g'(a)}{4\pi}$  están conectados por la relación(5.59).

<sup>9</sup>La expresión con unidades se ve como  $\frac{\hbar cg'(a)}{4\pi} \frac{c^3}{G\hbar} d\left(\frac{1}{4}4\pi a^2\right) - \frac{1}{2} \frac{c^4 da}{G} = Pd\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right)$ .

Pero eso no es todo. Además de lo ya expuesto, en [10] se muestra que esta conexión entre termodinámica y gravedad no está restringida solo para espacios esféricos y estáticos, si no, que, de hecho, es posible interpretar las ecuaciones de Einstein como una identidad termodinámica para espacios estacionarios axisimétricos y para horizontes que evolucionan en el tiempo. En otros trabajos se muestra que esto se puede extender a horizontes estáticos esféricamente simétricos en la gravedad de Lanczos-Lovelock [11].

Padmanabhan ha desarrollado todo un programa sobre los aspectos termodinámicos de la gravedad, entre sus investigaciones se incluye los resultados presentados en esta sección, además de una larga lista de trabajos en los que se estudian otras formas de la relación entre la termodinámica y la gravedad. Entre los más destacados se puede mencionar que ha encontrado [94] [95] una relación holográfica entre el término de superficie y el término de bulto de la acción Einstein-Hilbert,

$$\sqrt{-g}L_{sur} = -\partial_c \left[ g_{ab} \frac{\partial \sqrt{-g}L_{bulk}}{\partial(\partial_c g_{ab})} \right]. \quad (5.60)$$

Esto significa que dada una acción en una superficie  $\partial V$  es posible determinar la acción total en el bulto  $V$ . De esta manera, prueba que las ecuaciones de Einstein se puede obtener de un principio de acción que solo involucra un término de superficie. Dicho término no es una expresión arbitraria, sino que, al evaluarse en el horizonte, resulta ser la entropía del horizonte.

Otro de sus trabajos [96] [97] muestra que la condición de entropía local  $\delta S_{grav} = \delta S_{mat}$  en términos de las variables termodinámicas percibidas por un observador de Rindler, implica las ecuaciones de campo

$$(G^{ab} - 8\pi T^{ab}) k_a k_b = 0, \quad (5.61)$$

para todo vector nulo  $k_a$ .

Más de sus investigaciones pueden consultarse en [12] [13] [14] [15] [16]. Para una reseña ver [9]. Algunas de estas propuestas también se encuentran desarrolladas en [73].

## Capítulo 6

# Termodinámica del horizonte aparente FLRW ( $\Lambda = 0$ )

El espaciotiempo de Friedmann tiene asociado tres horizontes diferentes: el horizonte de partículas, el horizonte de eventos y el horizonte aparente. Sin embargo, los horizontes de partículas y eventos solo están definidos bajo ciertas circunstancias [98], en particular, el horizonte de eventos solo existe para universos acelerados con  $p < -\rho/3$ [54]. En contraste, el horizonte aparente siempre está bien definido [54]. Por otro lado, la termodinámica asociada a los horizontes de partículas y eventos lleva a inconsistencias [99] [100]. Esto sugiere que el horizonte aparente es la superficie donde se puede estudiar el aspecto termodinámico de la gravedad en escenarios cosmológicos.

En este capítulo discutimos la termodinámica de horizonte aparente FLRW sin constante cosmológica. Asumiendo que el horizonte aparente FLRW puede tomarse como un sistema termodinámico, encontramos la ecuación fundamental que lo define, y aplicando el formalismo de la termodinámica estándar analizamos sus propiedades. Los resultados que se presentan a continuación son originales y fueron publicados en [101].

### 6.1. Ecuación Fundamental

Tomando el horizonte aparente FLRW como un sistema termodinámico, podemos considerar que las variables que caracterizan a este sistema son la entropía  $S$ , que está relacionada con el área del horizonte, y la densidad de energía  $\rho$ , que implícitamente relaciona la energía  $E$  y el volumen  $V$  del horizonte. La ecuación fundamental para este sistema, debería ser una expresión del tipo  $S = S(E, V)$  o bien en la representación energética  $E = E(S, V)$ . Para encontrar una relación significativa entre estas cantidades observemos lo siguiente.

El espaciotiempo de Friedmann-Lemaître -Robertson- Walker (FLRW)

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + R^2 d\Omega^2, \quad (6.1)$$

donde  $R(t) = a(t)r$ <sup>1</sup> y  $h_{ab} = \text{diag}(-1, \frac{a^2}{1-kr^2}, 0, 0)$ , está dotado de un horizonte aparente, el cual, es una hipersuperficie nula que satisface la ecuación (3.63)

$$h^{ab}\partial_a R\partial_b R = 0. \quad (6.2)$$

En el capítulo 3 y 5 vimos que la métrica  $h_{ab}$  esta definida solo en el plano  $(t, r)$ . La solución de la expresión (6.2) da el radio del horizonte aparente

$$R_h = \sqrt{\frac{1}{H^2 + \frac{k}{a^2}}}. \quad (6.3)$$

El radio del horizonte FLRW es una cantidad dinámica y su derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{R}_h = -R_h^3 H \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right). \quad (6.4)$$

Usando la ecuación de Friedmann  $\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + p)$  podemos expresar (6.4) en términos de la densidad de energía y de la presión

$$\dot{R}_h = 4\pi R_h^3 H (\rho + p). \quad (6.5)$$

Antes ya se discutió que la presencia de un horizonte en un espaciotiempo es lo que permite vincular la gravedad con la termodinámica. Por consiguiente, la existencia del horizonte aparente es lo que dota al espaciotiempo FLRW de propiedades termodinámicas.

La expresión que vincula directamente la termodinámica con la gravedad y la geometría es la relación entre entropía y área del horizonte

$$S = \frac{A}{4}, \quad (6.6)$$

donde  $A = 4\pi R_h^2$ . Expresada en función del radio del horizonte, la entropía es

$$S = \pi R_h^2. \quad (6.7)$$

Para poder encontrar una relación entre la entropía, la energía y el volumen, consideremos lo siguiente.

La ecuación de Friedmann

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (6.8)$$

relaciona la densidad de energía  $\rho$  con propiedades geométricas del espaciotiempo  $H, k$ . Si observamos la definición (6.3) notamos que es posible expresar la densidad de energía en términos del radio del horizonte de la siguiente manera

$$\rho = \frac{3}{8\pi R_h^2}. \quad (6.9)$$

---

<sup>1</sup>En adelante se denotará simplemente como  $R=ar$

Al eliminar el radio entre (6.7) y (6.9), obtenemos una expresión que vincula directamente la densidad de energía con la entropía del horizonte.

$$S = \frac{3}{8} \frac{1}{\rho}. \quad (6.10)$$

Observamos que aquí el radio del horizonte funciona como una especie de puente que permite conectar la entropía del horizonte (que no depende de las ecuaciones de Einstein) con la densidad de energía proveniente del tensor de energía-momento. Es interesante notar que debido a la naturaleza de las ecuaciones de Einstein, que ligan la geometría con la física, las ecuaciones de Friedmann, permiten expresar la densidad de energía en términos de una propiedad puramente geométrica como lo es el radio del horizonte aparente. Esto es, sin las ecuaciones de Einstein funcionando como puente entre la geometría y las cantidades físicas, no se podría relacionar directamente la entropía del horizonte con la densidad de energía. Es decir, no se podría escribir una ecuación fundamental.

Si tomamos  $\rho = \frac{E}{V}$ , lo cual está justificado como se verá más adelante, podemos escribir una relación entre entropía, energía y volumen

$$S(E, V) = \frac{3}{8} \frac{V}{E}. \quad (6.11)$$

Esta es una relación del tipo  $S = S(E, V)$  y según vimos en el capítulo 3, esta es justo la forma de una ecuación fundamental en la representación entrópica (4.7). Por tanto, proponemos (6.11) como la ecuación fundamental de la termodinámica del horizonte aparente FLRW[101].

De acuerdo a la termodinámica, es posible invertir esta ecuación para obtener la representación energética de la ecuación fundamental. En este caso, el cálculo es trivial, resultando

$$E(S, V) = \frac{3}{8} \frac{V}{S}. \quad (6.12)$$

Esta expresión es significativa desde el punto de vista de la gravitación, pues resulta ser la Energía de Misner-Sharp del sistema.

La energía de Misner-Sharp está definida mediante la expresión (3.32)

$$E = \frac{R}{2} (1 - h^{ab} \partial_a R \partial_b R). \quad (6.13)$$

Haciendo el cálculo podemos comprobar que

$$E = \frac{R}{2} (1 - h^{ab} \partial_a R \partial_b R), \quad (6.14)$$

$$= \frac{R}{2} [1 - (h^{tt} \partial_t R \partial_t R + h^{rr} \partial_r R \partial_r R)], \quad (6.15)$$

$$= \frac{R}{2} [1 - (-r^2(\dot{a}^2 - k) + 1)], \quad (6.16)$$

$$= \frac{R}{2} \left[ R^2 \left( H^2 - \frac{k}{a^2} \right) \right], \quad (6.17)$$

$$= \frac{R^3}{2} \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right), \quad (6.18)$$

donde se usó  $\partial_t R = RH$  y  $\partial_r R = a$ . Por tanto, al evaluar en el horizonte, encontramos

$$E = \frac{R_h^3}{2} \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (6.19)$$

Por otro lado, de la relación de la entropía (6.11) y el radio del horizonte (6.3) podemos escribir

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\pi}{S}. \quad (6.20)$$

Al sustituir, en (6.19) se llega a

$$E = \frac{\pi R_h^3}{2S}. \quad (6.21)$$

Finalmente, si se considera que el horizonte aparente tiene un volumen dado por  $V = \frac{4\pi R_h^3}{3}$ , obtenemos

$$E(S, V) = \frac{3V}{8S}. \quad (6.22)$$

Esta es justo la ecuación que se consiguió al invertir (6.11), por tanto, la representación energética de la ecuación fundamental resulta ser la energía de Misner-Sharp. Lo inverso también es correcto; si se considera la energía de Misner-Sharp como ecuación fundamental, entonces la entropía  $S = \frac{A}{4}$  (expresada en variables termodinámicas) es la representación entrópica de dicha ecuación fundamental.

Observemos que remplazando la ecuación de Friedmann (6.8) en la expresión (6.19) se obtiene que

$$E = \frac{4\pi R_h^3}{3} \rho = V\rho. \quad (6.23)$$

Lo que justifica tomar  $\rho = \frac{E}{V}$ .

## 6.2. Primera ley unificada y ecuaciones de estado

Según el formalismo teórico de la termodinámica [28] al tener la ecuación fundamental es posible obtener toda la información termodinámica del sistema. De particular importancia para la caracterización de un sistema son las ecuaciones de estado. Para obtenerlas es necesaria una definición de la primera ley. En el caso de la termodinámica del horizonte aparente es necesario usar la primera ley unificada que se estudió en los capítulos 3 y 5. Aquí adoptaremos la expresión (5.35)

$$dE = A\Psi + WdV. \quad (6.24)$$

Se puede demostrar que para el horizonte FLRW el primer término de esta se puede escribir como  $A\Psi = -TdS$ .

De (5.38),

$$\Psi = \frac{1}{2}(\rho + p) \left( -2HR_h + \dot{R}_h \right) dt.$$

podemos escribir

$$A\Psi = \frac{A}{2}(\rho + p) \left( -2HR_h + \dot{R}_h \right) dt \quad (6.25)$$

$$= -\frac{A}{2}(\rho + p)2HR_h \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right) dt. \quad (6.26)$$

Ahora, usando la expresión para la temperatura (5.34)

$$T = \frac{1}{2\pi R_h} \left( 1 - \frac{\dot{R}_h}{2HR_h} \right), \quad (6.27)$$

y el área como  $A = 4\pi R_h^2$ , obtenemos

$$A\Psi = -2\pi R_h \left( 4\pi R_h^3 H(\rho + p) dt \right) T. \quad (6.28)$$

Usando la derivada del radio del horizonte 6.5  $dR_h = 4\pi R_h^3 H(\rho + p)dt$ , la expresión anterior resulta

$$A\Psi = -2\pi R_h dR_h T. \quad (6.29)$$

Finalmente, si  $dS = 2\pi R_h dR_h$ ,

$$A\Psi = -TdS. \quad (6.30)$$

Por tanto, podemos escribir la primera ley unificada como <sup>2</sup> [102]

$$dE = -TdS + WdV. \quad (6.31)$$

---

<sup>2</sup>El signo proviene de considerar que el flujo de calor a través del horizonte es  $\delta Q = -dE$

Por otro lado, al tomar la diferencial de la ecuación fundamental en la representación energética 6.12 podemos escribir

$$dE = -\frac{3V}{8S^2}dS + \frac{3}{8S}dV, \quad (6.32)$$

o bien, en términos de la densidad de energía

$$dE = -\frac{8}{3}V\rho^2dS + \rho dV. \quad (6.33)$$

Así, por inspección, de (6.31) y (6.32) obtenemos las ecuaciones de estado del sistema

$$T = \frac{3}{8} \frac{V}{S^2}, \quad W = -\frac{3}{8} \frac{1}{S}. \quad (6.34)$$

En términos de la densidad de energía podemos escribir

$$T = \frac{3}{8}V\rho^2, \quad W = \rho. \quad (6.35)$$

Estas expresiones pueden considerarse como las condiciones de equilibrio termodinámico del horizonte aparente.

Nótese que al sustituir  $S = \pi R_h^2$  y  $V = \frac{4\pi}{3} R_h^3$ , en la expresión de la temperatura, obtenemos que  $T = \frac{1}{2\pi R_h}$ . Esto significa que en caso de considerar  $S = \frac{A}{4}$  como ecuación fundamental, la temperatura asociada a esta es  $T = \frac{1}{2\pi R_h}$ . En general, la temperatura tiene un término dinámico (ver 5.34), sin embargo, como se argumenta en [17] y [20] al tratarse de propiedades termodinámicas, la parte dinámica de la expresión no debería considerarse, por lo que toman la aproximación  $\frac{\dot{R}_h}{2R_h H} \ll 1$  la cual es válida cuando el horizonte evoluciona lentamente. Lo interesante es que, en nuestro caso, no necesitamos hacer ninguna aproximación, esta condición está implícita de alguna forma, pues al calcular las ecuaciones de estado, se obtiene la misma expresión para la temperatura.

En el capítulo 3 se definió la densidad de trabajo  $W$ . Luego, en el capítulo 4, al explorar los resultados de [17] vimos que para el caso del horizonte aparente FLRW  $W$  está dada por 5.36

$$W = \frac{1}{2}(\rho - p). \quad (6.36)$$

Por otro lado, del cálculo de las ecuaciones de estado, nosotros obtenemos que  $W = \rho$ . Comparando estas expresiones, concluimos que la única manera de que ambas sean consistentes es que

$$\rho + p = 0. \quad (6.37)$$

La expresión (6.37) representa una ecuación de estado barotrópica con  $w = -1$ . Este resultado es interesante desde el punto de vista cosmológico pues, como se sabe, los modelos



de Friedmann no forman un sistema de ecuaciones cerrado, por lo que para completarlo es usual introducir "a mano" una ecuación de estado. En este caso, las condiciones de equilibrio termodinámico provenientes de la ecuación fundamental, dan una ecuación de estado por sí mismas.

En el contexto de la termodinámica que estamos desarrollando (6.37) tiene sentido; observando que la derivada temporal del radio del horizonte se puede escribir como

$$\dot{R}_h = 4\pi R_h^3 H (\rho + p), \quad (6.38)$$

entonces, para una ecuación de estado  $\rho + p = 0$  la derivada es nula y con eso recuperamos el caso de un horizonte estático, el cual podemos considerar el equivalente mecánico del equilibrio termodinámico, como en el caso de agujeros negros. Otra consecuencia de la condición de compatibilidad (6.37) es que la densidad de trabajo  $W$  puede interpretarse como el negativo de la presión del fluido, es decir,

$$W = -p \quad (6.39)$$

lo cual se obtiene simplemente reemplazando  $W = \rho$  en (6.37). Este resultado es consistente con lo que se discute en [103] [102]).

De los razonamientos presentados hasta aquí, podemos decir que las principales variables termodinámicas del sistema son

$$S = \frac{3}{8\rho}, \quad T = \frac{3}{8}V\rho^2, \quad p = -\rho. \quad (6.40)$$

Integrando la ecuación de continuidad (2.75) se obtiene

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (6.41)$$

y usando la definición del parámetro de corrimiento al rojo,

$$z + 1 = \frac{a_0}{a}, \quad (6.42)$$

podemos expresar la densidad de energía de la siguiente manera

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{1+z}{a_0} \right)^{3(1+\omega)}. \quad (6.43)$$

Para un fluido barotrópico con  $\omega = -1$  la densidad de energía será constante y tendremos que

$$S = \frac{3}{8\rho_0}, \quad T = \sqrt{\frac{2\rho_0}{3\pi}}, \quad p = -\rho_0, \quad (6.44)$$

Es decir, las variables termodinámicas para el horizonte FLRW, sin constante cosmológica, permanecen constantes durante la evolución del sistema.

En resumen, la ecuación fundamental, junto con la primera ley unificada, nos permite encontrar las ecuaciones de estado del sistema. Estas implican que  $\rho = -p$  y que, por tanto, las cantidades termodinámicas permanecen constantes durante la evolución del sistema.

### 6.3. Funciones de respuesta

Al tener la ecuación fundamental y las ecuaciones de estado, podemos calcular otras propiedades del sistema. Consideremos ahora las funciones de respuesta. En el capítulo 3 vimos que estas miden la respuesta del sistema ante variaciones de los parámetros de estado. Estas son: la capacidad calorífica  $c_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$ , la compresibilidad  $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  y el coeficiente de expansión térmica  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ .

Primero, observemos que usando  $\rho = -p$ , podemos escribir

$$W = -p, \quad S = -\frac{3}{8p}, \quad T = \frac{3}{8}Vp^2. \quad (6.45)$$

Para calcular  $c_V$ , es necesario obtener  $S = S(T, V)$ ; de las ecuaciones (6.45) podemos obtener  $T = \frac{3}{8} \frac{V}{S^2}$ , luego despejando  $S$  de esta, encontramos

$$S(T, V) = \sqrt{\frac{3V}{8T}}. \quad (6.46)$$

Al calcular la derivada parcial con respecto a la temperatura, resulta

$$c_V = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3V}{8T}} = -\frac{1}{2} S(T, V), \quad (6.47)$$

o bien, usando  $S = \frac{3}{8} \frac{1}{\rho}$ ,

$$c_V = -\frac{3}{16} \frac{1}{\rho}. \quad (6.48)$$

Notamos que esta es negativa, igual que en el caso de agujeros negros [104] [105]; dado que la temperatura es proporcional a la masa  $M$ , podemos escribir  $M = \frac{1}{8\pi T}$ , por tanto,  $c_p = \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_\Lambda = -\frac{1}{8\pi T^2}$ . En este caso se considera que la constante cosmológica juega el papel de la presión [106] [84] [85]. Esta es una propiedad que resulta desconcertante para sistemas termodinámicos usuales, pues indicaría que el sistema aumenta su temperatura al extraer calor de él y que se enfría al suministrarle calor. Para un agujero negro la capacidad calorífica resulta negativa debido a que su temperatura disminuye cuando aumenta su masa (energía).

En general, para el caso de sistemas con interacciones de largo alcance, se sabe que la capacidad calorífica es negativa [107] [108]. El signo de la capacidad calorífica puede depender del ensamble e incluso para el ensamble canónico es posible obtener capacidades caloríficas negativas [109]. En el caso del sistema que estamos analizando, es decir, el horizonte aparente FLRW, se puede decir con seguridad que se trata de un sistema gravitacional y, por tanto, está gobernado por interacciones de largo alcance. De ahí el signo de (6.48).

Para calcular  $\alpha$  y  $\kappa_T$  necesitamos expresar el volumen como función de la temperatura y la presión i.e  $V = V(T, p)$ . De las ecuaciones de estado  $T = \frac{3}{8} \frac{V}{S^2}$  y  $S = -\frac{3}{8} \frac{1}{p}$  eliminamos la entropía, con lo cual se llega a

$$T = \frac{8}{3} V p^2. \quad (6.49)$$

Despejando el volumen de esta última, se consigue

$$V(T, p) = \frac{3}{8} \frac{T}{p^2}. \quad (6.50)$$

Notemos que esta es una cantidad definida positiva, como se esperaría para un volumen. Calculando las derivadas parciales a  $T$  y  $p$  constante, resulta

$$\alpha = \frac{3}{8} \frac{1}{Vp^2} = \frac{1}{T}, \quad (6.51)$$

$$\kappa_T = \frac{3}{4} \frac{T}{Vp^3} = \frac{2}{p} = -\frac{2}{\rho}. \quad (6.52)$$

Donde para obtener la última igualdad se usa la ecuación de estado  $p = -\rho$ . Finalmente, para calcular  $c_p$  es necesario encontrar  $S = S(T, p)$ , sin embargo, esto no se puede hacer, pues la ecuación  $S = -\frac{3}{8p}$  no depende explícitamente del volumen, y, por tanto, no se puede invertir. Lo mismo sucede con  $V(S, p)$ . De lo anterior se sigue que no podemos calcular directamente  $c_p$  ni  $\kappa_S$ . No obstante, para determinarlas podemos usar las expresiones que se presentaron en el capítulo 3.

$$c_p = c_V + \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T}, \quad \kappa_T = \kappa_S + \frac{TV\alpha^2}{c_p}. \quad (6.53)$$

Usando las ecuaciones (6.48) y (6.51) se obtiene que

$$c_p = -\frac{3}{8} \frac{1}{\rho}, \quad \kappa_S = -\frac{1}{\rho}. \quad (6.54)$$

Podemos verificar que se cumple la identidad

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S} = 2. \quad (6.55)$$

De donde, el índice adiabático es

$$\gamma = 2. \quad (6.56)$$

Para analizar más a fondo las funciones de respuesta dadas anteriormente, consideramos su dependencia explícita del parámetro de corrimiento al rojo  $z$ . Reemplazando las expresiones de las variables termodinámicas (6.44) en las funciones de respuesta, obtenemos

$$c_V = -\frac{3}{16\rho_0}, \quad \kappa_T = -\frac{2}{\rho_0}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3\pi}{2\rho_0}}. \quad (6.57)$$

Observamos que las compresibilidades también son negativas, lo que, de igual manera, puede explicarse por el carácter de largo alcance de la interacción gravitacional.

El hecho de que las capacidades caloríficas y las compresibilidades sean constantes durante la evolución del horizonte aparente FLRW nos permite realizar una comparación formal con las propiedades de un gas ideal.

F. Respuesta	H. Aparente FLRW ( $\omega = -1$ )	Gas ideal
$\alpha$	$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{3\pi}{2\rho_0}}$	$\frac{1}{T}$
$\kappa_T$	$\frac{1}{p} = -\frac{2}{\rho_0}$	$\frac{1}{p}$
$c_V$	$-\frac{3}{16\rho_0}$	$\frac{3}{2}$

En particular, esto nos permite usar la ecuación que relaciona el índice adiabático con los grados de libertad [f 4.57](#)

$$\gamma = \frac{2+f}{f}, \quad f = \frac{2}{\gamma-1}. \quad (6.58)$$

Así, al aplicarlo en nuestro caso resulta que el horizonte aparente se comporta como un sistema termodinámico que posee  $f = 2$  grados de libertad. En contraste, un gas monoatómico tiene  $f = 3$  (ver capítulo 3). Es probable que esta reducción del número de grados de libertad respecto al gas ideal, que es el sistema más simple que se conoce, sea consecuencia de la interacción de largo alcance del campo gravitacional. Otra posibilidad es que  $f = 2$  refleje el hecho de que el campo gravitacional tiene dos grados libertad. No obstante, es difícil poder probar esta suposición. Pero si es el caso, el índice adiabático estaría relacionado con los grados de libertad del campo gravitacional. Por otro lado, lo que si podemos decir, es que el horizonte aparente visto como un sistema termodinámico con ecuación fundamental  $S = \frac{3V}{8E}$  tiene dos grados de libertad, esto es sugerente, en el sentido de que el horizonte aparente, en principio, es una superficie de dos dimensiones. Por tanto, podríamos comparar su comportamiento termodinámico con un gas moviéndose sobre superficie de dos dimensiones, pues en ese caso, el sistema solo tendría dos grados de libertad. De esta discusión podemos decir que el horizonte aparente FLRW, visto como un sistema termodinámico, puede ser interpretado como un fluido caracterizado por un factor barotrópico  $\omega = -1$  (fluido tipo energía oscura), un índice adiabático  $\gamma = 2$  (lo cual sugiere que tiene solo dos grados de libertad) y con capacidades caloríficas y compresibilidades negativas.

## 6.4. Segunda ley

En el capítulo 4 se enunció la segunda ley de la termodinámica; la entropía nunca decrece, pero su evolución tiende a un máximo. Esto último garantiza que la entropía no crezca de manera indefinida, y, que, en cambio, llegue a un estado de equilibrio caracterizado por un valor máximo. En esta sección analizaremos la segunda ley para el horizonte aparente FLRW.

Tomando la entropía como  $S = \frac{3}{8\rho}$  y calculando su derivada con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{S} = -\frac{3\dot{\rho}}{8\rho^2}. \quad (6.59)$$

Para que (6.59) sea positiva, la densidad debe ser una función decreciente del tiempo, es decir,  $\dot{\rho} \leq 0$ . De acuerdo con la ley de conservación (2.75),  $\dot{\rho} = -3\rho H(\omega + 1)$  para un fluido barotrópico, esto conduce a

$$\dot{S} = \frac{9H}{8\rho}(1 + \omega). \quad (6.60)$$

Observamos que esta no es una expresión definida positiva. Sin embargo, si consideramos que el parámetro de Hubble y la densidad de energía positivos, la segunda ley impone una condición sobre los valores que puede tomar el factor barotrópico

$$\dot{S} \geq 0 \Rightarrow \omega \geq -1. \quad (6.61)$$

Es decir, la primera derivada de la entropía será positiva solo para valores del factor barotrópico que satisfagan  $\omega \geq -1$ . Puesto que  $\omega$  determina la ecuación de estado, esta condición implica que en el contexto del horizonte aparente FLRW, la segunda ley solo se cumple para cierta clase de fluidos. O mejor dicho, la segunda ley impone restricciones sobre la clase de fluidos que son físicamente aceptables. La condición (6.61) podría entenderse como un análogo a las condiciones de energía. De hecho, en [110] [111] se muestra que las condiciones de energía nula se pueden explicar mediante la segunda ley de la termodinámica. En un trabajo futuro se abordará este tema, pues parece posible que usando la ecuación fundamental en la representación energética (6.12) el principio de mínima energía imponga restricciones sobre el factor barotrópico que sean idénticas a las condiciones de energía gravitacionales.

Por otro lado, cabe mencionar que aquí estamos tratando al horizonte aparente como un sistema aislado. Esto nos lleva a que la segunda ley podría no cumplirse siempre, sino solo para ciertos fluidos como ya discutimos. Sin embargo, en el capítulo 5 vimos que en contexto de la gravitación, la segunda ley de la termodinámica se tiene que generalizar y que en realidad la cantidad que tiene que ser positiva es la entropía total  $\dot{S}_{tot} = \dot{S}_m + \dot{S}_h \geq 0$ . Esta es la segunda ley generalizada propuesta por Bekenstein [74]. En la siguiente sección nos ocuparemos de esta. Por ahora, analicemos la segunda derivada de la entropía del horizonte aparente.

Tomando la derivada de (6.59), obtenemos[101]

$$\begin{aligned} \ddot{S} &= \frac{3}{8} \left( 2 \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^3} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho^2} \right) \\ &= \frac{9}{2} \pi (1 + \omega)^2 - \frac{9k}{8\rho_0} (1 + \omega)(2 + 3\omega) \left( \frac{1+z}{a_0} \right)^{-1-3\omega}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde, para pasar a la segunda línea se usó  $\rho = \rho_0 \left( \frac{1+z}{a_0} \right)^{3(1+\omega)}$  y las ecuaciones de Friedmann.

Notamos que de la misma manera que la primera condición de la entropía  $\dot{S} > 0$  restringe los posibles fluidos que satisfacen la segunda ley, la segunda derivada  $\ddot{S} < 0$  impone condiciones similares, incluso más restrictivas. En efecto, podemos observar que la expresión (6.62) será positiva si se cumple que  $k(1+\omega)(2+3\omega) > 0$ , puesto que la función  $(1+z)^{-1-3\omega}$  es positiva durante la evolución. Aun así, tenemos tres casos particularmente importantes:

Para  $k = 1$ , la segunda derivada es positiva solo para fluidos con factor barotrópico  $\omega < -1$  or  $\omega > -2/3$ .

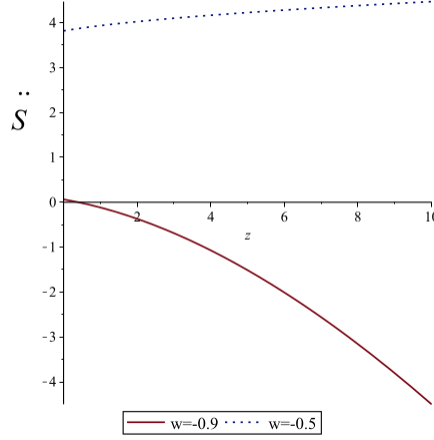


Figura 6.1: Comportamiento de la segunda derivada de la entropía en función del parámetro de corrimiento al rojo  $z$  para diferentes valores del factor barotrópico  $\omega$ . Donde se eligió  $\rho_0 = 0$ ,  $a_0 = 1$  y  $k = -1$ . Imagen tomada de [101]

Para  $k = -1$ , la segunda derivada restringe el valor del factor barotrópico a  $\omega \in (-1, -2/3)$ ,

Finalmente, para el caso  $k = 0$ , la única solución posible es  $\omega = -1$  y en este caso se tendría  $\ddot{S} = 0$ . Cabe mencionar que para este caso, usando la ecuación de Friedmann, la primera línea de (6.62) puede reescribirse como

$$\ddot{S} = 2\pi \left[ 3 \frac{\dot{H}^2}{H^4} - \frac{\ddot{H}}{H^3} \right], \quad (6.63)$$

lo cual es consistente con lo reportado en [27]. Esta expresión sigue siendo válida si en lugar de tomar las derivadas con respecto al tiempo i.e.,  $\dot{H} = dH/dt$ , se toma con respecto al factor de escala e.g.,  $H' = dH/da$ .

De estos razonamientos, concluimos que solo los horizontes aparentes que satisfagan las condiciones anteriores pueden considerarse como sistemas termodinámicos [101]. En la figura 6.1, se muestra el comportamiento de  $\ddot{S}$  en función del parámetro de corrimiento al rojo  $z$  para diferentes valores del factor barotrópico  $\omega$ . Para el caso  $k = -1$ , un fluido caracterizado por un factor barotrópico  $\omega = -0,9$  satisface la condición de máximo  $\ddot{S} \leq 0$ . En contraste, notamos que un fluido con  $w = -0.5$  y  $k = -1$  no la satisface: por tal motivo, este fluido, no puede considerarse como un sistema termodinámico. En caso  $\omega = -1$ , implica  $\ddot{S} = 0$ ; luego, aun cuando satisface la condición de máximo trivialmente, es un fluido aceptable desde el punto de vista termodinámico.

## Segunda ley generalizada

El hecho de que la primera derivada de la entropía del horizonte no sea positiva, supone un problema desde el punto de vista termodinámico, pues implicaría que en ciertos casos la segunda ley se podría violar. No obstante, es bien sabido [74] [4] que el caso de agujeros negros, la segunda ley debe extenderse para incluir no solo la entropía del horizonte  $S_h$  sino también la entropía de la materia  $S_m$  que entra o cae al agujero negro (ver capítulo 5). Bekenstein propuso una generalización de la segunda ley dada por

$$dS = dS_h + dS_m \geq 0. \quad (6.64)$$

En principio, esto permitiría que  $\dot{S}_h$  sea negativa siempre y cuando el cambio de la entropía total sea positiva. Se considera que la segunda ley generalizada es válida para cualquier horizonte y no solo para el caso de agujeros negros [80]. En particular, dadas las similitudes con agujeros negros, en el contexto cosmológico la segunda ley generalizada también se cumple [25] [99] [26].

La entropía del horizonte aparente es  $S = \frac{3V}{8E}$ . Ahora determinemos la entropía de la materia. Puesto que en principio esta es una entropía "normal", podemos usar la relación de Gibbs para calcularla [99] [25].

Partiendo de la primera ley

$$TdS_m = dE + pdV, \quad (6.65)$$

podemos escribir

$$TdS_m = Vd\rho + \rho dV + pdV. \quad (6.66)$$

Usando  $d\rho = -3H(\rho + p)dt$  y  $dV = 4\pi R_h^2 dR_h$ , obtenemos

$$TdS_m = (\rho + p)dV + Vd\rho = 4\pi R_h^2(\rho + p)dR_h - 4\pi R_h^3 H(\rho + p)dt \quad (6.67)$$

Así, considerado  $T = \frac{1}{2\pi R_h}$ , la derivada temporal de la entropía de la materia es

$$\dot{S}_m = 8\pi^2 R_h^3 (\dot{R}_h - R_h H) (\rho + p) \quad (6.68)$$

Por otro lado, la derivada de la entropía del horizonte es (6.59)

$$\dot{S}_h = 2\pi R_h \dot{R}_h = -\frac{3}{8} \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \quad (6.69)$$

Por tanto,

$$\dot{S}_{tot} = \dot{S}_m + \dot{S}_h = 8\pi^2 R_h^3 (\dot{R}_h - R_h H) (\rho + p) + 2\pi R_h \dot{R}_h \quad (6.70)$$

En las secciones previas vimos que la derivada del radio horizonte se puede escribir como  $\dot{R}_h = 4\pi R_h^3 H(\rho + p)$ . Reemplazando esta en la derivada de la entropía total (6.70) se llega a

$$\begin{aligned}\dot{S}_{tot} = \dot{S}_m + \dot{S}_h &= 32\pi^3 R_h^6 H (\rho + p)^2 - 8\pi^2 R_h^4 H (\rho + p) \\ &+ 8\pi^2 R_h^4 H (\rho + p),\end{aligned}\quad (6.71)$$

De esta manera, tenemos que el cambio en la entropía total es [101]

$$\dot{S}_{tot} = 32\pi^3 R_h^6 H (\rho + p)^2 \quad (6.72)$$

Nótese que para  $H > 0$  resulta ser una cantidad definida positiva. Por tanto, la segunda ley de la termodinámica generalizada se cumple sin ninguna restricción en el factor barotrópico.

Para la segunda derivada de la entropía total obtenemos

$$\ddot{S}_{tot} = 32\pi^3 H \left[ 2R_h^6 H (\rho + p) \dot{\rho} + 6R_h^5 \dot{R}_h (\rho + p)^2 \right] + 32\pi^3 R_h^6 (\rho + p)^2 \dot{H} \quad (6.73)$$

Ahora, usando la ecuación de continuidad  $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$  y  $\dot{R}_h = 4\pi R_h^3 H(\rho + p)$  se llega a

$$\ddot{S}_{tot} = 32\pi^3 R_h^6 H^2 (\rho + p)^2 \left[ -6 + 24\pi R_h^2 (\rho + p) + \frac{\dot{H}}{H^2} \right] \quad (6.74)$$

El signo de (6.74) queda definido por la expresión dentro del paréntesis. En general, esta no dice mucho, pero para el caso particular de  $k = 0$  y  $p = \omega\rho$  obtenemos que  $\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}(\omega + 1)$  y  $R_h = H^{-1}$  así,

$$\ddot{S}_{tot} \leq 0 \Rightarrow \omega \leq -\frac{1}{5} \quad (6.75)$$

En conclusión, el cambio en la entropía total con respecto a tiempo es una cantidad definida positiva y por esta razón satisface la segunda ley generalizada. Este resultado contrasta con el caso donde se toma el horizonte de manera aislada, en donde el cambio de su entropía con respecto al tiempo (6.60) no es definida positiva. En cambio, el criterio de máximo  $\dot{S}_{tot} \leq 0$  sigue condicionando (o estando condicionada por), los valores del factor barotrópico.



## Capítulo 7

# Termodinámica de horizonte aparente FLRW ( $\Lambda \neq 0$ )

La constante cosmológica juega un papel fundamental en la física moderna, pues en la gravitación está asociada a la expansión acelerada del universo. Sin embargo, desde la perspectiva termodinámica, esta puede ser entendida como una presión efectiva. Aquí se analiza la termodinámica del horizonte aparente con constante cosmológica. Los resultados que se exponen aquí fueron publicados en [101].

### 7.1. Ecuación Fundamental

En un escenario con constante cosmológica  $\Lambda$  las ecuaciones de Friedmann son

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + p), \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (7.1)$$

mientras que la ecuación de continuidad esta dada por

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (7.2)$$

Observamos que la combinación  $\rho + p$  hace que la dependencia explícita con la constante cosmológica desaparezca, sin embargo, al escribirlas en términos del factor de escala,  $\Lambda$  aparece directamente en ambas ecuaciones

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} \left( \rho + 3p - \frac{\Lambda}{3} \right). \quad (7.3)$$

Antes de continuar, conviene decir algo sobre la constante cosmológica en el contexto de la termodinámica de agujeros negros, puesto que esto justificará que tomemos la constante cosmológica como una presión efectiva en la descripción termodinámica del horizonte aparente.

Una de las cosas que resalta a simple vista al considerar la analogía de la primera ley dinámica de agujeros negros con la primera ley de la termodinámica es la ausencia del término  $pdV$  en el caso gravitacional. No obstante, las expresiones de la termodinámica de agujeros negros no sugieren una noción para la presión ni el volumen. En años recientes, esto ha causado un gran interés y han surgido intentos de definir tales conceptos. La idea esencial de estos planteamientos es proponer que la constante cosmológica  $\Lambda$  puede considerarse como una variable que tome el papel de presión [85] [84] [106] [112] [113] [114]. En este contexto, un agujero negro se entendería como un sistema inmerso en un ambiente con una presión causada por una constante cosmológica negativa  $P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$ .

En particular, un agujero negro asintóticamente anti de Sitter es solución de las ecuaciones de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (7.4)$$

donde  $\Lambda$  es negativa y está definida por

$$\Lambda = -\frac{(d-1)(d-2)}{2l^2}. \quad (7.5)$$

En este caso, la primera ley de la termodinámica puede escribirse como [85] [83]

$$dM = TdS + VdP + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (7.6)$$

donde la presión es interpretada como

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{(d-1)(d-2)}{16\pi l^2}, \quad (7.7)$$

y, asociada a esta, la variable conjugada es el volumen [115] [114]

$$V = \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,Q,J}. \quad (7.8)$$

Sí comparamos con la forma usual de la primera ley

$$dE = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (7.9)$$

notamos que al introducir  $\Lambda$ , la variable  $M$ , que se entendía como la energía interna, cambia su significado y ahora tiene más sentido que esta sea la entalpía del sistema, pues

$$dM = (TdS + \Omega dJ + \Phi dQ) + VdP = dE + VdP. \quad (7.10)$$

Así,  $M$  resulta ser la versión gravitacional de la entalpía,

$$M = E + PV. \quad (7.11)$$

La interpretación termodinámica de la entalpía para este caso, implicaría que  $M$  es la energía requerida para crear un agujero negro y ponerlo en un ambiente inmerso de una constante cosmológica negativa [85].

Quizá la idea más interesante que ha emergido de considerar el término  $PdV$  es la química de agujeros negros [84][116]. El punto es que al tener una presión surgen nociones como transiciones de fase [117] y puntos triples [118], así como la posibilidad de introducir modelos tipo Van del Waals [119]. El tema es demasiado extenso para tratarlo en su totalidad, sin embargo, aquí se han presentado las ideas esenciales, y, para nuestros propósitos, es suficiente. Para más detalles, el lector puede consultar la revisión que se hace en [85].

Siguiendo las ideas de la discusión que se ha hecho, aquí consideramos que las similitudes entre el horizonte de eventos de agujeros negros y el horizonte aparente FLRW son lo suficientemente razonables para extender la noción de constante cosmológica como presión al caso del espaciotiempo FLRW. En [20] se hace una suposición similar. De esta manera, tomaremos  $P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$  como una presión efectiva que nos permitirá tratar la constante cosmológica como una variable termodinámica en el horizonte aparente FLRW.

Bajo estos razonamientos, las ecuaciones de Friedmann pueden ser reescritas como

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + p), \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}(\rho - P). \quad (7.12)$$

La definición del radio del horizonte solo depende de la métrica que se considere, por tanto, al introducir la constante cosmológica, la definición (6.3) sigue siendo válida. En este caso  $R_h$  resulta ser

$$R_h = \sqrt{\frac{3}{8\pi(\rho - P)}}. \quad (7.13)$$

Nótese el radio del horizonte solo está definido para  $\rho > P$ .

Al introducir, la constante cosmológica, la interpretación de la variable  $\rho$  cambia. Podemos comprobar esto de la siguiente manera; despejando  $\rho$  de (7.13) escribimos,

$$\rho = \frac{3}{8\pi R_h^2} + P. \quad (7.14)$$

Ahora, tomado la entropía como un cuarto del área, es decir,  $S = \pi R_h^2$  y escribiendo  $\rho = \frac{\mathcal{H}}{V}$ , se obtiene

$$\mathcal{H} = \frac{3}{8} \frac{V}{S} + PV \quad (7.15)$$

donde se tomo el volumen como  $V = \frac{4\pi}{3} R_h^3$ . Esta estructura nos permite identificar  $\mathcal{H}$  como la entalpía

$$\mathcal{H} = E + PV, \quad (7.16)$$

donde  $E = \frac{3}{8} \frac{V}{S}$ , es la energía (6.12) del caso sin constante cosmológica que analizamos en la sección anterior.

Invirtiendo (7.15) podemos expresar la entropía como

$$S = \frac{3V}{8(\mathcal{H} - PV)}. \quad (7.17)$$

Esta es la ecuación fundamental en la representación entrópica, mientras que (7.15) es la representación energética. En este caso, la energía de Misner-Sharp, se puede calcular directamente de la ecuación (6.19)

$$E = \frac{R_h^3}{2} \left( H^2 + \frac{k}{a^2} \right) = V\rho - VP. \quad (7.18)$$

de donde  $V\rho = E + PV$ , en consistencia con (7.16).

## 7.2. Primera ley unificada y ecuaciones de estado

Una vez que la ecuación fundamental es conocida, podemos usarla para calcular las propiedades termodinámicas del sistema, tal como hicimos en el capítulo previo. Tomando la diferencial de (7.16) y la definición de la primera ley unificada (6.31), obtenemos

$$d\mathcal{H} = dE + VdP + PdV = -TdS + (W + P)dV + VdP. \quad (7.19)$$

Por otro lado, el diferencial de la ecuación fundamental (7.15) resulta ser

$$d\mathcal{H} = -\frac{3}{8} \frac{V}{S^2} dS + \left( \frac{3}{8S} + P \right) dV + VdP. \quad (7.20)$$

Comparando (7.19) y (7.20) obtenemos las ecuaciones de estado

$$T = \frac{3}{8} \frac{V}{S^2} = \frac{8}{3} V(\rho - P)^2, \quad W = \frac{3}{8S} = \rho - P. \quad (7.21)$$

Puesto que ni la métrica ni el tensor de energía momento cambian al introducir la constante cosmológica, la densidad de trabajo  $W = -\frac{1}{2}T^{ab}h_{ab}$ , definida en (3.43), sigue siendo  $W = \frac{1}{2}(\rho - p)$ . Así, al exigir que esta sea consistente con la ecuación de estado  $W = \rho - P$ , obtenemos, la condición de compatibilidad

$$\rho + p = 2P. \quad (7.22)$$

Observemos que en caso de que la constante cosmológica  $\Lambda = -8\pi P$  sea cero, obtenemos  $\rho + p = 0$ , que de hecho es la ecuación de estado (6.37) del capítulo anterior. Esto muestra la coherencia de este resultado.

Esta ecuación de estado nos permite integrar la ley de conservación (7.2) y obtener

$$\dot{\rho} = -6HP. \quad (7.23)$$

Utilizando la definición del parámetro de corrimiento al rojo (6.42) podemos reescribir (7.23) como

$$\rho = \rho_0 + 6P \ln \frac{1+z}{a_0}, \quad (7.24)$$

donde  $\rho_0$  es una constante de integración. En consecuencia, las principales variables termodinámicas son

$$S = \frac{3}{8 \left( \rho_0 - P + 6P \ln \frac{1+z}{a_0} \right)}, \quad (7.25)$$

$$T = \frac{8}{3} V \left( \rho_0 - P + 6P \ln \frac{1+z}{a_0} \right)^2, \quad (7.26)$$

$$p = 2P - \rho_0 - 6P \ln \frac{1+z}{a_0}. \quad (7.27)$$

Las cuales resultan de sustituir (7.24) en  $S = \frac{3}{8(\rho-P)}$ ,  $T = \frac{8}{3}V(\rho-P)^2$ ,  $\rho + p = 2P$ . Como notamos de la ecuación (7.13), el horizonte aparente existe solo en el intervalo  $\rho > P$ , que corresponde a  $z > \exp((1-\rho_0/P)/6) - 1$  con  $z > 0.18$  para  $\rho_0 = 0$ . Podemos observar que mientras el sistema evoluciona, la entropía aumenta a medida que disminuye la densidad. Por otro lado, la presión es negativa durante la mayor parte de la evolución, pero se vuelve positiva cerca del límite inferior de  $z$ .

Si comparamos con las expresiones del caso sin constante cosmológica (6.44), observamos que la principal diferencia radica en que, en el caso  $\Lambda = 0$ , las cantidades termodinámicas se mantienen constantes durante la evolución, mientras que con  $\Lambda \neq 0$  las variables evolucionan. Esto significa que la constante cosmológica actúa de tal manera que causa que el horizonte aparente evolucione. Incluso se podría decir, que es la fuente de la evolución. Una manera de ver esto con claridad es mediante la ecuación de estado (7.22). Al introducir  $\rho + p = 2P$  en la expresión de la derivada temporal del radio del horizonte se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{R}_h &= -R_h^3 H \left( \dot{H} - \frac{k}{a^2} \right), \\ &= 4\pi H R_h^3 (\rho + p), \\ &= 8\pi H R_h^3 P. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Notamos que  $P = 0 \Rightarrow \dot{R}_h = 0$ , lo que implicaría que el horizonte aparente no cambia en el tiempo, justo como en el caso del capítulo anterior, donde al tener  $\rho + p = 0$ , el horizonte permanecía sin evolución. Esta es una conclusión importante, pues, parece que la presencia de la constante cosmológica es el factor que garantiza la evolución del sistema.

### 7.3. Funciones de Respuesta

Para calcular las funciones de respuesta utilizaremos las definiciones dadas en el capítulo anterior.

En el escenario con constante cosmológica, las expresiones para la temperatura y la entropía pueden ser escritos como

$$T = \frac{8}{3} V (P - p)^2, \quad S = \frac{3}{8(P - p)}. \quad (7.29)$$

Estas se obtienen de (7.22), (7.21) y (7.17). Notemos que ambas expresiones dependen de la diferencia entre la presión asociada a la constante cosmológica y la presión del fluido. Si definimos la presión efectiva  $\mathcal{P} = p - P$ , podemos escribir

$$T = \frac{8}{3}V\mathcal{P}^2, \quad S = -\frac{3}{8\mathcal{P}}. \quad (7.30)$$

De hecho, de  $W = \rho - P$  y  $\rho + p = 2P$  podemos notar que  $W = -\mathcal{P}$ <sup>1</sup>.

De (7.30) podemos obtener la entropía como función del volumen y la temperatura

$$S(T, V) = \sqrt{\frac{3V}{8T}}. \quad (7.31)$$

Calculando la derivada parcial  $(\frac{\partial S}{\partial T})_V$  de esta ecuación, se obtiene la capacidad calorífica

$$c_V = -\frac{1}{2}S. \quad (7.32)$$

Expresando el volumen como función de la temperatura y la presión efectiva obtenemos

$$V(T, \mathcal{P}) = \frac{3}{8} \frac{T}{\mathcal{P}^2}. \quad (7.33)$$

Calculando  $\tilde{\kappa}_T = -\frac{1}{V} (\frac{\partial V}{\partial \mathcal{P}})_T$  y  $\alpha = \frac{1}{V} (\frac{\partial V}{\partial T})_{\mathcal{P}}$  obtenemos

$$\alpha = \frac{3}{8} \frac{1}{V\mathcal{P}^2} = \frac{1}{T}, \quad \kappa_T = \frac{3}{4} \frac{T}{V\mathcal{P}^3} = 2\frac{1}{\mathcal{P}}. \quad (7.34)$$

Notemos que usando  $S = -\frac{3}{8\mathcal{P}}$  podemos reescribir la compresibilidad como

$$\kappa_T = 2\frac{1}{\mathcal{P}} = -\frac{16}{3}S, \quad (7.35)$$

El resto de funciones de respuesta las podemos calcular usando las ecuaciones (6.53), así

$$c_{\mathcal{P}} = -S, \quad \kappa_S = -\frac{8}{3}S. \quad (7.36)$$

Con estos resultados podemos verificar que se sigue cumpliendo la identidad

$$\frac{c_{\mathcal{P}}}{c_V} = \gamma = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}, \quad \gamma = 2. \quad (7.37)$$

Como es de esperarse, ya que las variables  $T$ ,  $S$  y  $p$ , evolucionan, las funciones de respuesta son cantidades que también lo hacen. Podemos mostrar esto fácilmente al expresarlas en términos de las ecuaciones (7.38), (7.39) y (7.40), con lo que se obtiene

<sup>1</sup>En caso sin constante cosmológica se tenía  $W = -p$ ,  $T = \frac{8}{3}Vp^2$ ,  $S = -\frac{3}{8p}$ .

$$c_V = -\frac{3}{16 \left( \rho_0 - P + 6P \ln \frac{1+z}{a_0} \right)}, \quad (7.38)$$

$$\alpha = \frac{3}{8V \left( \rho_0 - P + 6P \ln \frac{1+z}{a_0} \right)^2}, \quad (7.39)$$

$$\kappa_T = \frac{2}{\rho_0 - P + 6P \ln \frac{1+z}{a_0}}. \quad (7.40)$$

## 7.4. Segunda ley

En esta sección analizamos las consecuencias de exigir el cumplimiento de las condiciones de entropía  $\dot{S} \geq 0$  y  $\ddot{S} \leq 0$ .

De la ecuación fundamental (7.17), obtenemos que

$$\dot{S} = -\frac{3}{8} \frac{\dot{\rho}}{(\rho - P)^2}, \quad (7.41)$$

lo que implica que la densidad debe ser una función creciente del tiempo, es decir,  $\dot{\rho} \leq 0$ .

De la ecuación de continuidad podemos escribir  $\dot{\rho} = -6HP$ . Así, para  $H > 0$  y  $P > 0$

$$\dot{S} = \frac{9}{4} \frac{HP}{(\rho - P)^2} \geq 0 \quad (7.42)$$

Este resultado contrasta con su análogo del capítulo anterior, donde la entropía del horizonte, tomado aisladamente, no era una cantidad definida positiva, sino que esta dependía del factor barotrópico. En este caso, al estar presente la constante cosmológica, el horizonte, aún aislado, satisface la segunda ley.

En cuanto a la segunda derivada de la entropía, se puede comprobar que

$$\ddot{S} = \frac{3}{8(\rho - P)^2} \left( \frac{2\dot{\rho}^2}{\rho - P} - \ddot{\rho} \right) \quad (7.43)$$

$$= \frac{54P^2}{(\rho - P)^2} - \frac{9k}{4} \frac{P(13P - \rho)}{a^2(\rho - P)^3}. \quad (7.44)$$

donde se ha usado la ley de conservación 2.75, las ecuaciones de Friedmann y la ecuación de estado (7.22).

Observamos que el primer término de (7.44) siempre es positivo, por tanto, en el caso de  $k = 0$ ,

$$\ddot{S} = \frac{54P^2}{(\rho - P)^2}. \quad (7.45)$$

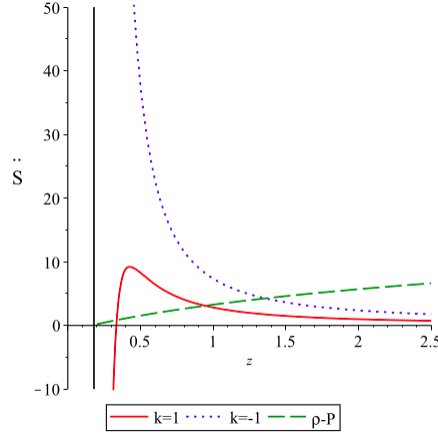


Figura 7.1: Segunda derivada de la entropía en función del corrimiento al rojo para diferentes valores de la curvatura espacial  $k$ . Las constantes se eligen como  $a_0 = 1$ ,  $P = 1$  y  $\rho_0 = 0.1$ . También se traza la curva  $\rho - P$ . La línea continua vertical indica el límite inferior para la existencia de un horizonte aparente. Imagen tomada de [101]

Esta cantidad nunca será negativa y a lo más se cumple  $\ddot{S} = 0$  para  $P = 0$ . Desde la perspectiva termodinámica, esto implicaría que la constante cosmológica no es compatible con un universo plano.

En general, para  $k \neq 0$ , notamos que la expresión  $k(13P - \rho) > 0$  determina el signo de la segunda derivada de la entropía.

Para que la segunda derivada sea negativa, en el caso  $k = -1$ ,  $\rho$  debe satisfacerse  $\rho > 13P$ , mientras que para  $k = 1$ ,  $\rho \in (P, 13P)$ .

En la figura 7.1 graficamos el comportamiento de  $\ddot{S}$  para  $k = \pm 1$ , así como la curva  $\rho - P$  que determina la región donde el horizonte aparente está bien definido<sup>2</sup>. Para graficar se han escogido los valores:  $P = 1$ ,  $\rho_0 = 0.1$  y  $a_0 = 1$  los cuales corresponden a  $z > 0.18$ .

## 7.5. Segunda ley generalizada

La primera derivada de la entropía del horizonte aparente con constante cosmológica (7.42), resulta ser positiva. No obstante, en el contexto de la termodinámica asociada a horizontes es necesario considerar la segunda ley generalizada.

Procederemos de manera análoga a como se hizo en el caso  $\Lambda = 0$ . Primero calcularemos la derivada de la entropía de la materia.

<sup>2</sup>Recordemos que el radio de horizonte aparente está dado por  $R_h = \sqrt{\frac{3}{8\pi(\rho - P)}}$



Considerando la constante cosmológica, podemos escribir la primera ley como [101]

$$TdS_m = dE + (p + P) dV. \quad (7.46)$$

tomando,  $E = (\rho - P)V$ , obtenemos

$$\begin{aligned} TdS_m &= Vd(\rho - P) + (\rho - P)dV + (p + P)dV, \\ &= (\rho + p)dV + Vd\rho, \\ &= 4\pi R_h^2(\rho + p)dR_h - 4\pi R_h^3 H(\rho + p)dt. \end{aligned} \quad (7.47)$$

donde tomé  $dP = 0$ , la ecuación de continuidad  $d\rho = -3H(\rho + p)dt$  y  $dV = 4\pi R_h^2 dR_h$ . Observamos que  $P$  se elimina de la ecuación <sup>3</sup>, aunque sigue estando implícita en el radio del horizonte, pues  $R_h = \sqrt{\frac{3}{8\pi(\rho - P)}}$ .

Finalmente, considerando  $T = \frac{1}{2\pi R_h}$ , la derivada temporal de la entropía de la materia es

$$\dot{S}_m = 8\pi^2 R_h^3 (\dot{R}_h - R_h H) (\rho + p). \quad (7.48)$$

Observemos que de hecho esta es idéntica a la ecuación (6.68), no obstante, en este caso  $R_h = R_h(\rho, P(\Lambda))$ . Lo mismo sucede con la entropía del horizonte, donde tenemos

$$\dot{S}_h = 2\pi R_h \dot{R}_h. \quad (7.49)$$

Por tanto, la segunda ley generalizada resulta en

$$\dot{S}_{tot} = \dot{S}_m + \dot{S}_h = 8\pi R_h^3 (\dot{R}_h - R_h H) (\rho + p) + 2\pi R_h \dot{R}_h. \quad (7.50)$$

Simplificando (7.50), se llega a

$$\dot{S}_{tot} = 32\pi^3 R_h^6 H (\rho + p)^2. \quad (7.51)$$

Donde se han usado la derivada del radio del horizonte  $\dot{R}_h = 4\pi H R_h^3 (\rho + p)$ . La ecuación (7.53) es idéntica en forma a su correspondiente en el caso sin constante cosmológica (6.70).

La otra cosa significativa que cambiar es la ecuación de estado para la materia en presencia y sin presencia de constante cosmológica. Para el caso  $\Lambda = 0$  esta resulta ser  $\rho + p = 0$  mientras que para  $\Lambda \neq 0$ ,  $\rho + p = 2P$ . De esta manera, en el primer caso, el cambio de la entropía total con respecto al tiempo es cero, mientras que en el segundo

$$\dot{S}_{tot} = 128\pi^3 R_h^6 H P^2. \quad (7.52)$$

---

<sup>3</sup>De la misma manera que lo hace en la ecuación de Friedmann (7.1) y la ecuación de continuidad

De hecho, si se considera, energía oscura, la ecuación para la entropía total se puede escribir como [101][25] [26]

$$\dot{S}_{tot} = 32\pi^3 R_h^6 H (\rho + p + \rho_{DE} + p_{DE})^2. \quad (7.53)$$

Para la segunda derivada de la entropía total obtenemos

$$\ddot{S}_{tot} = 32\pi^3 H \left[ 2R_h^6 H (\rho + p) \dot{\rho} + 6R_h^5 \dot{R}_h (\rho + p)^2 \right] + 32\pi^3 R_h^6 (\rho + p)^2 \dot{H}. \quad (7.54)$$

Usando la ecuación de continuidad  $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$  y  $\dot{R}_h = 4\pi R_h^3 H(\rho + p)$  obtenemos

$$\ddot{S}_{tot} = 32\pi^3 R_h^6 H^2 (\rho + p)^2 \left[ -6 + 24\pi R_h^2 (\rho + p) + \frac{\dot{H}}{H^2} \right]. \quad (7.55)$$

El término fuera del paréntesis es positivo, por tanto, el signo de la segunda derivada queda definido por la expresión

$$-6 + 24\pi R_h^2 (\rho + p) + \frac{\dot{H}}{H^2}.$$

Así, al tomar  $\rho + p = 2P$  y el caso particular  $k = 0$ , lo cual implica que  $\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3P}{\rho}$ , obtenemos

$$\ddot{S}_{tot} \leq 0 \Rightarrow P^2 + 7P\rho - 2\rho^2 \leq 0. \quad (7.56)$$

Por tanto, el criterio de máximo está condicionado aún para la entropía total.

## Capítulo 8

# Conclusiones

La relatividad general es quizá el logro más grande de la física teórica.

Aun así, a pesar de los éxitos de la teoría de Einstein, no hemos alcanzado a comprender del todo la naturaleza de los fenómenos gravitacionales. No obstante, se han hecho avances. En este sentido, la relación entre gravedad y termodinámica parece jugar un papel importante. Es bien conocido que ciertos sistemas gravitacionales se comportan como sistemas termodinámicos. El ejemplo más claro de esto son los agujeros negros; las leyes dinámicas que los describen muestran una estructura matemática y físicamente idéntica a las leyes de la termodinámica, lo cual indica la existencia de una relación profunda entre gravedad y termodinámica [80].

El punto clave en esta relación es la existencia de horizontes gravitacionales que exhiben propiedades termodinámicas. Las principales características de los horizontes es que es posible identificar su área como una medida de su entropía y su gravedad superficial como su temperatura.

En particular, en el caso de espaciotiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que está dotado de un horizonte aparente, el vínculo entre gravedad y termodinámica se ha estudiado con respecto a la primera ley de la termodinámica; es posible mostrar que las ecuaciones de Friedmann pueden ser obtenidas de la primera ley (unificada) de la termodinámica [17]. Esta perspectiva de la relación gravedad-termodinámica es relativamente nueva y sigue siendo poco entendida.

En este trabajo nos propusimos avanzar en esta dirección y explorar las propiedades del horizonte aparente FLRW desde una perspectiva termodinámica. Lo nuevo de este trabajo es que asumiendo que el horizonte aparente es un sistema termodinámico, pudimos calcular su ecuación fundamental y con ello estudiar sus propiedades termodinámicas, incluyendo la segunda ley.

El objetivo principal de esta investigación radicó en encontrar la ecuación fundamental que caracterizará el horizonte aparente FLRW.

Este objetivo se logró basándose en los conceptos provenientes de la termodinámica

de agujeros negros, donde es conocido que la entropía del horizonte de eventos, que es proporcional a su área, puede ser considerada como la ecuación fundamental del sistema. En el caso de un horizonte aparente, la entropía, que también es proporcional al área, puede ser determinada en términos del radio del horizonte. Este último, junto con su derivada temporal, permiten relacionar las ecuaciones de Friedmann con la entropía del horizonte y finalmente expresar la entropía en términos de la energía y el volumen. La relación que resulta de esto es  $S(E, V) = \frac{3V}{8E}$ , la cual propusimos como la ecuación fundamental del horizonte aparente FLRW. Por otro lado, mostramos que la energía de Misner-Sharp, expresada en términos de variables termodinámicas, puede ser entendida como la ecuación fundamental en la representación energética.

Se analizó el caso de espaciotiempo de FLRW con y sin constante cosmológica  $\Lambda$ . Primero, se estudió el caso con  $\Lambda = 0$  y con un fluido barotrópico como fuente. Utilizando las definiciones de entropía, radio del horizonte aparente y las ecuaciones de Friedmann, se obtuvo la ecuación fundamental en la representación entrópica. Una vez determinada la ecuación fundamental y usando la primera ley unificada de la termodinámica [65] se calculó la temperatura y la densidad de trabajo, resultando de estas una ecuación de estado tipo energía oscura  $\rho + p = 0$ . La forma particular de esta ecuación de estado implicó que las variables termodinámicas deben permanecer constantes a lo largo de la evolución del sistema.

También se obtuvieron las funciones de respuesta; las capacidades caloríficas y las compresibilidades son cantidades negativas, lo cual puede explicarse en función de las interacciones de largo alcance de los sistemas gravitacionales [108]. Con las expresiones de las funciones respuesta, se comprobó que satisfacen la identidad  $\frac{c_p}{c_v} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$ , de lo cual resultó un índice adiabático  $\gamma = 2$ .

Dado que las principales variables termodinámicas permanecen constantes durante de la evolución del sistema, fue posible establecer una comparación formal con un gas ideal y determinar que, desde la perspectiva termodinámica, el horizonte aparente tiene solo dos grados de libertad. Esto es razonable en el sentido de que este es una superficie de dos dimensiones.

Asimismo, se investigó la segunda ley de la termodinámica. Considerando el horizonte aparente como un sistema aislado, encontramos que sí se exige que la primera derivada con respecto al tiempo de la entropía sea positiva y la segunda derivada negativa (condición de máximo), se imponen restricciones sobre los valores que puede tomar el factor barotrópico  $\omega$ , y, por tanto, se restringe los tipos de fluidos que son físicamente aceptables. En el caso de la segunda derivada, incluso se imponen condiciones sobre la curvatura espacial  $k$  del modelo FLRW. Observamos que para ciertos valores de  $\omega$  y  $k$  es posible que el sistema no cumpla las condiciones ( $\dot{S} \geq 0$ ,  $\ddot{S} \leq 0$ ), lo cual sugiere que en esos casos el sistema no podría interpretarse como un sistema termodinámico. Sin embargo, al considerar los resultados obtenidos al estudiar la primera ley, es decir, la ecuación de estado  $\rho = -p$ , las condiciones de entropía son cumplidas, ya que en este caso se obtiene,  $\dot{S} = 0$  y  $\ddot{S} = 0$ .

Por otro lado, es sabido que el caso de la entropía de agujeros negros, la segunda ley podría no satisfacerse, pues cuando un objeto cae dentro de un agujero negro, su entropía desaparece para un observador externo. La solución para esto la dio Bekenstein [74] al

proponer que para estos sistemas gravitacionales la segunda ley debería generalizarse de tal manera que  $dS_{tot} = dS_h + dS_m > 0$ <sup>1</sup> Así, al considerar el horizonte aparente, no como un sistema aislado, sino tomándolo en conjunto con la materia [25] [26], se calculó el cambio en la entropía total, encontrándose que la expresión para la derivada temporal de la entropía total es una cantidad definida positiva. Mostrando con esto la validez de la segunda ley generalizada [101].

Con los resultados obtenidos concluimos que desde la perspectiva termodinámica, el horizonte aparente FLRW sin constante cosmológica puede ser interpretado como un fluido con una ecuación de estado barotrópica tipo energía oscura  $\rho = -p$  y un índice adiabático  $\gamma = 2$ , con dos grados de libertad, y capacidades caloríficas y compresibilidades negativas.

Considerando un escenario con constante cosmológica, los resultados obtenidos fueron diferentes. Primero, en analogía con el caso de agujeros negros, se consideró que la constante cosmológica puede tomarse como una presión efectiva,  $P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$ . Con esto, la variable que representaba la energía interna en el caso con  $\Lambda = 0$ , pasa a ser interpretada como la entalpía del sistema.

Usando la primera ley unificada para calcular la temperatura y la densidad de trabajo, resultó que para este sistema se cumple la ecuación de estado lineal  $\rho + p = 2P$ . Esta expresión implica que las variables termodinámicas no son constantes, como el caso con  $\Lambda = 0$ , sino que evolucionan en el tiempo.

Además, se calcularon las funciones de respuesta, obteniendo que las capacidades caloríficas y las compresibilidades son negativas y que el índice adiabático es  $\gamma = 2$ . Por otro lado, analizando la segunda ley, encontramos que en caso con constante cosmológica, la condición  $\dot{S} > 0$  se cumple, incluso para el horizonte como un sistema aislado. Sin embargo, la condición de máximo, impone restricciones sobre los valores que puede tomar la entalpía y la constante de curvatura del sistema. Este resultado lo interpretamos diciendo que no en todos los casos el horizonte aparente con constante cosmológica puede interpretarse como un sistema termodinámico. En particular, para el caso plano, es decir,  $k = 0$ , se deduce que la única posibilidad de que  $\dot{S} \leq 0$  es que  $P = 0$ , lo cual sugiere que un espaciotiempo plano no es compatible con la constante cosmológica vista como una presión termodinámica. Esto parece una contradicción con las observaciones de nuestro universo, lo que significa que tomar la constante cosmológica como una presión, no está plenamente justificado. Para aclarar estos puntos es necesario seguir investigando.

Como conclusión final, podemos decir que el horizonte aparente FLRW, puede ser considerado como un sistema termodinámico aislado siempre y cuando se tenga en cuenta que la segunda ley impone restricciones sobre los valores que pueden tomar los parámetros del sistema. No obstante, al ampliar el sistema y considerar la entropía del horizonte aparente, más la entropía de la materia, la segunda ley generalizada se cumple satisfactoriamente, por lo que la analogía entre gravedad y termodinámica se puede extender al caso del horizonte aparente FLRW.

---

<sup>1</sup>Esto, a su vez es el mejor argumento para entender que un agujero negro, en general un horizonte, tiene una entropía asociada, pues al caer un objeto dentro de él, la entropía del universo estaría desapareciendo, lo cual no puede ser. La solución es que el agujero negro tenga una entropía, la cual aumenta cuando un objeto cae dentro él, compensando la entropía del objeto que entró.

# Bibliografía

- [1] Tim Maudlin. *Philosophy of physics: Space and time*, volume 5. Princeton University Press, 2012.
- [2] Brian Clegg. *Gravity: How the weakest force in the universe shaped our lives*. St. Martin's Press, 2012.
- [3] Frank Watson Dyson, Arthur Stanley Eddington, and Charles Davidson. IX. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [4] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.
- [5] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. In *Euclidean quantum gravity*, pages 167–188. World Scientific, 1975.
- [6] Gary W Gibbons and Stephen W Hawking. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Physical Review D*, 15(10):2738, 1977.
- [7] William G Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Physical Review D*, 14(4):870, 1976.
- [8] Ted Jacobson. Thermodynamics of spacetime: the einstein equation of state. *Physical Review Letters*, 75(7):1260, 1995.
- [9] T Padmanabhan. Classical and quantum thermodynamics of horizons in spherically symmetric spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 19(21):5387, 2002.
- [10] Dawood Kothawala, Suddipta Sarkar, and T Padmanabhan. Einstein's equations as a thermodynamic identity: The cases of stationary axisymmetric horizons and evolving spherically symmetric horizons. *Physics Letters B*, 652(5-6):338–342, 2007.
- [11] Aseem Paranjape, Suddipta Sarkar, and T Padmanabhan. Thermodynamic route to field equations in lanczos-lovelock gravity. *Physical Review D*, 74(10):104015, 2006.

- [12] T Padmanabhan. Surface density of spacetime degrees of freedom from equipartition law in theories of gravity. *Physical Review D*, 81(12):124040, 2010.
- [13] T Padmanabhan. Is gravity an intrinsically quantum phenomenon? dynamics of gravity from the entropy of space–time and the principle of equivalence. *Modern Physics Letters A*, 17(18):1147–1158, 2002.
- [14] T Padmanabhan. Equipartition of energy in the horizon degrees of freedom and the emergence of gravity. *Modern Physics Letters A*, 25(14):1129–1136, 2010.
- [15] T Padmanabhan. Gravity as elasticity of spacetime: A paradigm to understand horizon thermodynamics and cosmological constant. *International Journal of Modern Physics D*, 13(10):2293–2298, 2004.
- [16] T Padmanabhan and Aseem Paranjape. Entropy of null surfaces and dynamics of spacetime. *Physical Review D*, 75(6):064004, 2007.
- [17] Rong-Gen Cai and Sang Pyo Kim. First law of thermodynamics and friedmann equations of friedmann-robertson-walker universe. *Journal of High Energy Physics*, 2005(02):050, 2005.
- [18] M Akbar and Rong-Gen Cai. Thermodynamic behavior of the friedmann equation at the apparent horizon of the frw universe. *Physical Review D*, 75(8):084003, 2007.
- [19] Emmanuel N Saridakis. Modified cosmology through spacetime thermodynamics and barrow horizon entropy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(07):031, 2020.
- [20] Ujjal Debnath. Thermodynamics of frw universe: heat engine. *Physics Letters B*, 810:135807, 2020.
- [21] Dongsu Bak and Soo-Jong Rey. Cosmic holography+. *Classical and Quantum Gravity*, 17(15):L83, 2000.
- [22] Rong-Gen Cai and Li-Ming Cao. Unified first law and the thermodynamics of the apparent horizon in the frw universe. *Physical Review D*, 75(6):064008, 2007.
- [23] Stefano Viaggiu. Planckian corrections to the friedmann flat equations from thermodynamics at the apparent horizon. *Modern Physics Letters A*, 31(04):1650016, 2016.
- [24] Pedro Bargueño, Ernesto Contreras, and Ángel Rincón. Thermodynamics of scale-dependent friedmann equations. *The European Physical Journal C*, 81:1–6, 2021.
- [25] Emmanuel N Saridakis and Spyros Basilakos. The generalized second law of thermodynamics with barrow entropy. *The European Physical Journal C*, 81(7):644, 2021.
- [26] Ashfaque H Bokhari and M Akbar. Generalized second law of thermodynamics in wormhole geometry. *International Journal of Modern Physics D*, 19(05):565–571, 2010.

- [27] Diego Pavón and Ninfa Radicella. Does the entropy of the universe tend to a maximum? *General Relativity and Gravitation*, 45(1):63–68, 2013.
- [28] Herbert B Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, 1998.
- [29] Larry Smarr. Mass formula for kerr black holes. *Physical Review Letters*, 30(2):71, 1973.
- [30] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2022.
- [31] Hendrik Antoon Lorentz, Albert Einstein, Hermann Minkowski, Hermann Weyl, and Arnold Sommerfeld. *The principle of relativity: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*. Courier Corporation, 1952.
- [32] Eric Poisson and Clifford M Will. *Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [33] Saúl Ramos-Sánchez. *Relatividad para futuros físicos*, volume 1. CopIt ArXives, 2018.
- [34] Clifford M Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living reviews in relativity*, 17:1–117, 2014.
- [35] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [36] Herbert Lichtenegger and Bahram Mashhoon. Mach’s principle. *arXiv preprint physics/0407078*, 2004.
- [37] Albert Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 844–847, 1915.
- [38] Eric Poisson. *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [39] Bert Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. <http://www.ugr.es/bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf>, 2013.
- [40] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein’s field equations*. Cambridge university press, 2009.
- [41] Eduardo Nahmad-Achar. *Differential Topology and Geometry with Applications to Physics*. IOP Publishing, 2018.
- [42] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [43] P Da Silva Fernandes. *Gauss-bonnet theories of gravity in four dimensions*. 2023.
- [44] Giuseppe Papallo. *Causality and the initial value problem in Modified Gravity*. PhD thesis, University of Cambridge, 2019.



- [45] David Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971.
- [46] David Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, 1972.
- [47] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10:363–384, 1974.
- [48] Thanu Padmanabhan and Dawood Kothawala. Lanczos–lovelock models of gravity. *Physics Reports*, 531(3):115–171, 2013.
- [49] Dražen Glavan and Chunshan Lin. Einstein-gauss-bonnet gravity in four-dimensional spacetime. *Physical review letters*, 124(8):081301, 2020.
- [50] Tim Clunan, Simon F Ross, and Douglas J Smith. On gauss–bonnet black hole entropy. *Classical and Quantum Gravity*, 21(14):3447, 2004.
- [51] Ignatios Antoniadis, S Feffara, R Minasian, and KS Narain. R4 couplings in m-and type ii theories on calabi-yau spaces. *Nuclear physics B*, 507(3):571–588, 1997.
- [52] Sergio Ferrara, Ramzi R Khuri, and Ruben Minasian. M-theory on a calabi-yau manifold. *Physics Letters B*, 375(1-4):81–88, 1996.
- [53] Dawood Kothawala and T Padmanabhan. Thermodynamic structure of lanczos-lovelock field equations from near-horizon symmetries. *Physical Review D*, 79(10):104020, 2009.
- [54] Valerio Faraoni. Cosmological apparent and trapping horizons. *Physical Review D*, 84(2):024003, 2011.
- [55] Valerio Faraoni. *Cosmological and Black Hole Apparent Horizons*, volume 907. 2015.
- [56] Sayan Kar and Soumitra Sengupta. The raychaudhuri equations: A brief review. *Pramana*, 69:49–76, 2007.
- [57] Sean A Hayward. General laws of black-hole dynamics. *Physical Review D*, 49(12):6467, 1994.
- [58] José MM Senovilla. Trapped surfaces. In *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, volume 7, pages 1–30. World Scientific, 2012.
- [59] Abhay Ashtekar, Christopher Beetle, Olaf Dreyer, Stephen Fairhurst, Badri Krishnan, Jerzy Lewandowski, and Jacek Wiśniewski. Generic isolated horizons and their applications. *Physical Review Letters*, 85(17):3564, 2000.
- [60] Xiangdong Zhang. Thermodynamics in new model of loop quantum cosmology. *The European Physical Journal C*, 81:1–5, 2021.

- [61] Hideo Kodama. Conserved energy flux for the spherically symmetric system and the backreaction problem in the black hole evaporation. *Progress of Theoretical Physics*, 63(4):1217–1228, 1980.
- [62] Alexis Helou. Dynamics of the cosmological apparent horizon: surface gravity & temperature. *arXiv preprint arXiv:1502.04235*, 2015.
- [63] Gabriel Abreu and Matt Visser. Kodama time: Geometrically preferred foliations of spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 82(4):044027, 2010.
- [64] Sean A Hayward. Gravitational energy in spherical symmetry. *Physical Review D*, 53(4):1938, 1996.
- [65] Sean A Hayward. Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 15(10):3147, 1998.
- [66] Pierre Binétruy and Alexis Helou. The apparent universe. *Classical and Quantum Gravity*, 32(20):205006, 2015.
- [67] Tamara M Davis and Charles H Lineweaver. Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 21(1):97–109, 2004.
- [68] Howard Reiss. *Methods of thermodynamics*. Courier Corporation, 1996.
- [69] Leopoldo García-Colín Sherer. *Introducción a la termodinámica clásica*. Trillas, 1976.
- [70] Michael Aizenman and Elliott H Lieb. The third law of thermodynamics and the degeneracy of the ground state for lattice systems. *Statistical Mechanics: Selecta of Elliott H. Lieb*, pages 333–351, 2004.
- [71] Alessandro Campa, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. *Physics Reports*, 480(3-6):57–159, 2009.
- [72] Marcelo Alonso, Edward J Finn, and Robert F Stetson. Fundamental university physics, vol. iii. *American Journal of Physics*, 37(2):235–235, 1969.
- [73] Dimitris Moustos. Gravity as a thermodynamic phenomenon. *arXiv preprint arXiv:1701.08967*, 2017.
- [74] Jacob D Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, 9(12):3292, 1974.
- [75] Stephen W Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Physical Review Letters*, 26(21):1344, 1971.
- [76] James M Bardeen, Brandon Carter, and Stephen W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31:161–170, 1973.

- [77] Markus Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, 1996.
- [78] Eric Poisson. An advanced course in general relativity. *University of Guelph*, 174:96, 2002.
- [79] Erik Curiel. A Primer on Energy Conditions. *Einstein Stud.*, 13:43–104, 2017.
- [80] Robert M Wald. The thermodynamics of black holes. *Living reviews in relativity*, 4(1):1–44, 2001.
- [81] Stephen W Hawking and Don N Page. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, 87(4):577–588, 1983.
- [82] Paul CW Davies. The thermodynamic theory of black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 353(1675):499–521, 1977.
- [83] David Kastor, Sourya Ray, and Jennie Traschen. Enthalpy and the mechanics of ads black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(19):195011, 2009.
- [84] Robert B Mann. The chemistry of black holes. In *1st Karl Schwarzschild Meeting on Gravitational Physics*, pages 197–205. Springer, 2016.
- [85] David Kubizňák, Robert B Mann, and Mae Teo. Black hole chemistry: thermodynamics with lambda. *Classical and Quantum Gravity*, 34(6):063001, 2017.
- [86] Paul M Alsing and Peter W Milonni. Simplified derivation of the hawking–unruh temperature for an accelerated observer in vacuum. *American Journal of Physics*, 72(12):1524–1529, 2004.
- [87] Ted Jacobson and Renaud Parentani. Horizon entropy. *Foundations of Physics*, 33:323–348, 2003.
- [88] Jonathan Oppenheim. A thermodynamic sector of quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/0112001*, 2001.
- [89] Emilio Elizalde and Pedro J Silva. F (r) gravity equation of state. *Physical Review D*, 78(6):061501, 2008.
- [90] Erik Verlinde. On the origin of gravity and the laws of newton. *Journal of High Energy Physics*, 2011(4):1–27, 2011.
- [91] Rong-Gen Cai, Li-Ming Cao, and Ya-Peng Hu. Hawking radiation of an apparent horizon in a frw universe. *Classical and Quantum Gravity*, 26(15):155018, 2009.
- [92] Rong-Gen Cai and Li-Ming Cao. Thermodynamics of apparent horizon in brane world scenario. *Nuclear Physics B*, 785(1-2):135–148, 2007.
- [93] M Akbar and Rong-Gen Cai. Friedmann equations of frw universe in scalar–tensor gravity, f (r) gravity and first law of thermodynamics. *Physics Letters B*, 635(1):7–10, 2006.

- [94] T Padmanabhan. Holographic gravity and the surface term in the einstein-hilbert action. *Brazilian Journal of Physics*, 35:362–372, 2005.
- [95] T Padmanabhan. Gravity from spacetime thermodynamics. *Astrophysics and space science*, 285:407–417, 2003.
- [96] T Padmanabhan. A physical interpretation of gravitational field equations. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1241, pages 93–108. American Institute of Physics, 2010.
- [97] Thanu Padmanabhan. Thermodynamical aspects of gravity: new insights. *Reports on Progress in Physics*, 73(4):046901, 2010.
- [98] Sourav Bhattacharya and Amitabha Lahiri. On the existence of cosmological event horizons. *Classical and Quantum Gravity*, 27(16):165015, 2010.
- [99] Bin Wang, Yungui Gong, and Elcio Abdalla. Thermodynamics of an accelerated expanding universe. *Physical Review D*, 74(8):083520, 2006.
- [100] P. C. W. Davies. Cosmological Horizons and Entropy. *Class. Quant. Grav.*, 5:1349, 1988.
- [101] Luis M. Sanchez and Hernando Quevedo. Thermodynamics of the FLRW apparent horizon. *Phys. Lett. B*, 839:137778, 2023.
- [102] Haximjan Abdusattar, Shi-Bei Kong, Wen-Long You, Hongsheng Zhang, and Ya-Peng Hu. First principle study of gravitational pressure and thermodynamics of frw universe. *arXiv preprint arXiv:2108.09407*, 2021.
- [103] Haximjan Abdusattar, Shi-Bei Kong, Yihao Yin, and Ya-Peng Hu. The hawking-page-like phase transition from frw spacetime to mcvittie black hole. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(08):060, aug 2022.
- [104] Stephen W Hawking. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, 13(2):191, 1976.
- [105] Swastik Bhattacharya and S Shankaranarayanan. Negative specific heat of black-holes from fluid-gravity correspondence. *Classical and Quantum Gravity*, 34(7):075005, 2017.
- [106] Clifford V Johnson. Holographic heat engines. *Classical and Quantum Gravity*, 31(20):205002, 2014.
- [107] D Lynden-Bell and PP Eggleton. On the consequences of the gravothermal catastrophe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 191(3):483–498, 1980.
- [108] Donald Lynden-Bell. Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 263(1-4):293–304, 1999.

- [109] Fabio Staniscia, A Turchi, D Fanelli, Pierre-Henri Chavanis, and G De Ninno. Negative specific heat in the canonical statistical ensemble. *Physical review letters*, 105(1):010601, 2010.
- [110] Maulik Parikh and Andrew Svesko. Thermodynamic origin of the null energy condition. *Physical Review D*, 95(10):104002, 2017.
- [111] Andrew Svesko. *Emergence of Spacetime: From Entanglement to Einstein*. PhD thesis, Arizona State University, 2020.
- [112] Brian P. Dolan. The cosmological constant and the black hole equation of state. *Class. Quant. Grav.*, 28:125020, 2011.
- [113] Brian P. Dolan. Where is the pdv term in the first law of black hole thermodynamics? in open questions in cosmology. *Intech, Rijeka, Croatian*, 2012.
- [114] Brian P Dolan. The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials. *Classical and Quantum Gravity*, 28(12):125020, 2011.
- [115] Mirjam Cvetič, Gary W Gibbons, D Kubizňák, and Christopher N Pope. Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume. *Physical Review D*, 84(2):024037, 2011.
- [116] David Kubizňák and Robert B Mann. Black hole chemistry. *Canadian Journal of Physics*, 93(9):999–1002, 2015.
- [117] Natacha Altamirano, David Kubizňák, and Robert B Mann. Reentrant phase transitions in rotating anti-de sitter black holes. *Physical Review D*, 88(10):101502, 2013.
- [118] Natacha Altamirano, David Kubizňák, Robert B Mann, and Zeinab Sherkatghanad. Kerr-ads analogue of triple point and solid/liquid/gas phase transition. *Classical and Quantum Gravity*, 31(4):042001, 2014.
- [119] Aruna Rajagopal, David Kubizňák, and Robert B Mann. Van der waals black hole. *Physics Letters B*, 737:277–279, 2014.