



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD

ESTRELLAS DE BOSONES, UNA APROXIMACIÓN DE  
ROTACIÓN LENTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

P R E S E N T A :

LUIS ENRIQUE MARTINEZ ROJAS

TUTOR

DR. MARCELO SALGADO RODRIGUEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*«To those who do not know mathematics it is difficult to get across a real feeling as to the beauty, the deepest beauty, of nature ... If you want to learn about nature, to appreciate nature, it is necessary to understand the language that she speaks in.»*

Richard P. Feynman



# Agradecimientos

En este trabajo de tesis me gustaría agradecer principalmente a mi asesor el Dr. Marcelo Salgado por las incontables tardes en las que se sentó a discutir sobre el avance de este trabajo, los consejos y todas las charlas que tuvimos. También a mi padres Olga, Raúl y hermano Jesús que siempre estuvieron ahí para apoyarme en todos los ámbitos, a ellos les dedico esta tesis.

A mis profesores por brindarme su conocimiento y la gran motivación que generaron en mí. A mi grupo de amigos los conocidos bosones. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>El presente trabajo de tesis recibió apoyo de los proyectos DGAPA-PAPIIT (UNAM) IN111719, IN105223 y CONACYT (FORDECYT-PRONACES) 140360.



# Índice general

Agradecimientos	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo de estrellas de bosones en simetría esférica</b>	<b>5</b>
2.1. Espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico . . . . .	5
2.1.1. Condiciones Asintóticas y de Regularidad . . . . .	9
2.1.2. Solución Numérica . . . . .	11
2.2. Compactificación de la variable $r$ . . . . .	15
2.2.1. Resultados numéricos empleando la compactificación . . . . .	16
2.3. Autointeracción . . . . .	17
2.3.1. Resultados numéricos . . . . .	19
<b>3. Modelo de estrellas de bosones con rotación (lenta)</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. Formalismo . . . . .	25
3.3. Ecuaciones de campo a partir de la forma covariante . . . . .	26
3.3.1. Tensor de energía momento . . . . .	27
3.4. Descomposición 3+1 . . . . .	27
3.5. Condiciones de regularidad y asintóticas . . . . .	31
3.5.1. Resumen de Ecuaciones diferenciales . . . . .	32
3.6. Algunos comentarios sobre la aproximación . . . . .	32
3.7. Ecuaciones simplificadas . . . . .	33
3.8. Comparación con la literatura . . . . .	35
<b>4. Resultados Numéricos (rotación lenta)</b>	<b>39</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>





# 1 Introducción

Las estrellas de bosones son hipotéticos objetos compactos autogravitantes <sup>1</sup> formados por un campo escalar complejo fundamental  $\psi$ , las cuales fueron propuestas y analizadas por primera vez en 1968 por Kaup [1] en el marco de la relatividad general (RG), bajo las hipótesis de simetría esférica y espacio-tiempo estático, y considerando un campo escalar (clásico) libre y masivo (ver Ref. [2] para una revisión detallada de estos objetos). Un análisis posterior utilizando teoría cuántica de campos fue publicado poco tiempo después por Ruffini & Bonazzola en 1969 [3].

Cabe destacar que las únicas soluciones de estrellas de bosones en equilibrio estacionario (espacio tiempo estático y esféricamente simétrico), en que el campo escalar  $\psi(t, r) = e^{i\omega t} R(r)$  es no trivial (i.e. distinto de cero) corresponden a soluciones estrictamente con valores en los complejos (i.e. soluciones con  $\omega \neq 0$ —ver Capítulo 2), lo cual permite que tanto el espacio-tiempo como el tensor de energía-momento asociado al campo escalar respeten la condición de estaticidad (i.e. existe un vector de Killing temporal y que satisface la condición de estaticidad) [1, 2]. Adicionalmente, las configuraciones (i.e. soluciones) del campo poseen una corriente conservada de Noether asociada a una simetría *global* del grupo  $U(1)$ . En consecuencia, estas configuraciones poseen una cantidad total conservada que corresponde al número total de partículas (bosones). En cambio, esto no ocurre para campos escalares *reales*, ya que no existen configuraciones no-triviales con  $\omega = 0$ , independientes del tiempo. Pueden existir configuraciones reales ( $\omega = 0$ ) no triviales cuando  $R(t, r)$  depende explícitamente del tiempo, en cuyo caso el espacio-tiempo resultante no es estático (no existe un vector de Killing temporal) [2]. Por consiguiente, en tal escenario tanto el espacio-tiempo como el campo escalar evolucionan necesariamente en el tiempo. En esta tesis, no estaremos interesados en ese escenario (cf. [4]).

Dos décadas después del análisis de Kaup, Colpi et al. [5] estudiaron las consecuencias de incluir un término de autointeracción de cuarto orden en el potencial del campo escalar. El resultado fue un incremento en la masa máxima de la estrella de bosones (cf. Apartado 2.3.1). Otros autores también consideraron una excitación del campo con nodos (i.e. con *ceros* o raíces) en la dependencia radial  $R(r)$ , y más aún, estudiaron nuevos tipos de estrellas de bosones llamadas *estrellas solitónicas en miniatura* [6].

---

<sup>1</sup>Es decir, objetos cuyo parámetro de compacidad  $2G_0M/c^2\mathcal{R}$ , definido entre su masa,  $M$  y “radio característico”  $\mathcal{R}$ , es cercano a 1; o alternativamente cuyo parámetro de corrimiento al rojo  $\alpha$  en el centro puede ser pequeño  $\alpha \ll 1$ , inclusive más pequeño al de estrella de neutrones (ver Tabla 2.1).

Las estrellas de bosones comparten características similares a las estrellas de neutrones [7] (cf. Capítulo 2 ), excepto, que éstas últimas son usualmente descritas en términos de un fluido perfecto y de una ecuación de estado, la cual no se conoce con certeza, en lugar de estar descritas por un solo campo escalar (cf. Apartado 2.1), como lo es el campo bosónico  $\psi$ . En cambio, en las estrellas de bosones la ecuación de estado está dada de manera implícita (o paramétrica) en términos del campo escalar mismo [8]. Es decir, la densidad de energía y presión efectivas, definidas en términos de su tensor de energía-momento correspondiente, están parametrizadas por dicho campo, por lo que no es necesario introducir una ecuación de estado fuera de la teoría misma que describe al campo escalar.

Al igual que las estrellas de neutrones, los modelos más simples de estrellas de bosones (estacionarios y esféricamente simétricos) poseen configuraciones estables e inestables ante el colapso gravitacional, el cual puede conducir a la formación de un agujero negro (cf. Capítulo 2) [9–11].

Puesto que no es claro que el campo escalar que constituye a este tipo de estrellas u objetos esté relacionado con alguno de los campos del modelo estándar de la física de partículas, se piensa en todo caso que estos objetos o campos podrían representar a la materia oscura del universo. Es quizás por esta razón, que las estrellas de bosones permanecen hasta el momento como entes puramente teóricos que no se han observado ni siquiera indirectamente.

Existen estudios que han intentado reproducir la fenomenología gravitacional de materia oscura (galáctica y/o cosmológica) a través de este tipo de estrellas [12]. Sin embargo, argumentos heurísticos y la falta de un análisis riguroso al respecto, hacen pensar que esto no es posible. Por ejemplo, las curvas planas de rotación galácticas [13], las cuales representan quizás la evidencia más sólida sobre la posible existencia de materia oscura alrededor de galaxias de tipo espiral (principalmente), indican que el halo de materia oscura (de forma esférica) posee una masa  $M_H$  que crece linealmente con la distancia al centro de la galaxia. En efecto, si  $M_H$  crece linealmente con  $r$ , la velocidad tangencial (kepleriana) de una estrella (o gas) alrededor del halo está dada por  $V^2 = \frac{GM_H}{r}$ , de donde concluimos que  $V^2 \sim \text{cte}$ . [14] En consecuencia dado que  $M_H(r) \sim 4\pi \int^r \rho_H(x)x^2 dx$ , esto requiere que la densidad del halo decrezca con la distancia de manera ‘muy lenta’ como  $1/r^2$ . Sin embargo, como es bien sabido, y como se describe en esta tesis también (cf. Apartado 2.1.1 ), el campo bosónico decrece de manera exponencial  $\sim e^{-\mu_{\text{eff}}r}/r$ , donde  $\mu_{\text{eff}}$  es la *masa efectiva* del campo. Por consiguiente, su densidad de energía decrecerá de una manera semejante [cf. Ecuación (2.18)]. Por esta razón, difícilmente se puede esperar que este tipo de modelos de materia oscura sean capaces de reproducir las curvas planas de rotación; sin mencionar el hecho de que cada curva posee una velocidad ‘terminal’  $V = \text{const}$  diferente para cada galaxia, lo cual en principio requeriría que el campo bosónico posea una masa  $\mu$  (u otro parámetro) distinta para cada galaxia (espiral). En otras palabras, aún si el campo bosónico se pudiera acomodar para que su densidad decreciera como  $1/r^2$ , parece que se requerirían tantos campos escalares distintos como galaxias hay en el universo. Claramente esto descarta la viabilidad natural de estos campos como modelo de materia oscura galáctica [15].

A este respecto es necesario enfatizar que en esta tesis no se intenta postular a

las estrellas de bosones como posible solución al problema de la materia oscura, más bien, el objetivo es explorar con mayor detalle sus propiedades teóricas. No obstante, no se descarta la posibilidad de que este tipo de objetos puedan existir en el universo. Por ejemplo, en algún momento se especuló que las ondas gravitacionales detectadas a través de los observatorios LIGO-VIRGO [16], y que actualmente se sabe provienen de la colisión de dos agujeros negros y/o de dos estrellas de neutrones, podrían generarse a través de la colisión de dos estrellas de bosones. Empero, simulaciones detalladas indican que una colisión de este tipo no ajusta a los datos arrojados por los observatorios LIGO-VIRGO [17].

Adicionalmente, las imágenes observadas recientemente por el proyecto EHT (telescopio de horizonte de sucesos, por sus siglas en inglés) suministran evidencia “suficiente” de que el objeto central en la galaxia M87 y en la nuestra también (SgrA\*) se trata de un agujero negro (ver [18] para una definición rigurosa) más que de una estrella de bosones (una estrella de bosones *no* posee un horizonte de eventos y por consiguiente la distorsión de las imágenes del disco de acreción a su alrededor producida por el campo gravitacional resultante no coincide con los datos observacionales). En conclusión, todo parece indicar que las estrellas de bosones permanecerán todavía en el imaginario teórico por largo tiempo.

Si bien este tipo de objetos especulativos se propusieron hace más de medio siglo, el estudio de estrellas de bosones en rotación es mucho más reciente. La razón de ello obedece en parte a que un análisis de tal índole requiere de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo *elíptico*, no lineales y acopladas [7], y por lo tanto, su análisis requiere de métodos numéricos mucho más sofisticados y poderosos que los que demanda el tratamiento en simetría esférica (cf. Capítulo 2). A este respecto es interesante mencionar que las primeras investigaciones de estrellas de bosones en rotación llegaron a especular que la rotación era matemáticamente ‘inconsistente’ en este tipo de objetos, aún de manera *no perturbativa* (i.e. sin ninguna aproximación en las ecuaciones) y que la aproximación de *rotación lenta* o perturbativa era igualmente inconsistente [19–29] (ver Apartado 3.8). Evidentemente este tipo de especulaciones resultaron erróneas, y eventualmente se descubrió que es posible construir de manera numérica y no perturbativa modelos de estrellas de bosones en rotación, siendo quizás el estudio de F. Schunck el primero en su tipo [30].

El objetivo de esta tesis es revisar la literatura relacionada con el análisis de estrellas de bosones en rotación y el de proponer una aproximación de rotación lenta que es parcialmente consistente. Para ello, ha sido necesario realizar un estudio preliminar muy detallado de los modelos con simetría esférica (tanto con un campo libre, como con un término de autointeracción del tipo  $\Lambda|\psi|^4$ ; cf. Apartado 2.3). Este análisis preliminar es necesario ya que los códigos de los modelos en rotación son modificaciones de los modelos en simetría esférica. Los detalles de este análisis tomaron varios meses y se detallan en el Capítulo 2 de esta tesis.

Una vez que se obtuvo la experiencia e intuición sobre los modelos con simetría esférica, se continuó con el escenario en rotación. Evidentemente, llevar a cabo un análisis completo y sin aproximaciones (mas allá de las numéricas), i.e., un análisis no perturbativo en este tipo de modelos [20] queda totalmente fuera del alcance de esta tesis. Como se mencionó anteriormente, un análisis de esta envergadura re-

quiere de resolver numéricamente ecuaciones parciales no lineales acopladas de tipo elíptico [20]. En esta tesis se propone, en cambio, la posibilidad de poder describir a las estrellas de bosones en rotación bajo ciertas aproximaciones. En particular, se propone una métrica similar a la de Papapetrou [18, 31] (la cual permite describir objetos en rotación) pero asumiendo que la rotación es una ‘perturbación’ del caso con simetría esférica (cf. Capítulos 3y 4). Si bien esta aproximación resulta ser estricta y matemáticamente inconsistente, puede considerarse como una aproximación para el campo bosónico en rotación cerca del ‘ecuador’ de la estrella ( $\theta = \pi/2$ ) y para configuraciones con ‘número magnético’  $k$  bajo (i.e.  $k = 1$ ) (cf. Apartado 3.2). Los detalles de esta aproximación, así como una breve discusión histórica sobre los primeros análisis de este tipo, se discuten en los Apartados 3.6 y 3.8.

Eventualmente la idea es comparar los resultados de esta tesis con aquéllos del análisis no perturbativo [20], para establecer hasta qué punto la aproximación propuesta puede ser razonable. Sin embargo, por cuestiones de tiempo esta comparación se deja como un análisis para el futuro y no se incluye en este trabajo.

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 2, se presenta el modelo usado para construir estrellas de bosones con simetría esférica como el propuesto por Kaup originalmente [1] y se obtienen las ecuaciones diferenciales para este problema a partir de las ecuaciones de Einstein, tanto en su forma covariante usual como también usando la llamada *formulación 3+1*. En Apartado 2.1 se presentan las ecuaciones diferenciales correspondientes y se resuelven numéricamente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. En el Apartado 2.2 se hizo una transformación de coordenadas donde la dependencia radial ( $r \in [0, \infty)$ ) se compactifica en el intervalo  $[0, 1)$  y se presentan los resultados observando el mismo comportamiento que en Apartado 2.1. En el Apartado 2.3, siguiendo la Ref. [5], se propone un término de autointeracción para el campo escalar obteniendo un comportamiento de las masas máximas de la estrella de bosones que depende del parámetro de autorinteracción elegido.

En el Capítulo 3 se estudian estrellas de bosones con rotación bajo una aproximación de *rotación lenta* y se presentan las ecuaciones diferenciales correspondientes obtenidas a partir de dos métodos diferentes con el objeto de verificar su consistencia y que no se cometieron errores algebraicos en su deducción. Estos dos métodos se basan en la formulación covariante usual (4+0) de la RG y en la descomposición 3+1 antes mencionada.

En el Apartado 3.5 se presentan las condiciones de regularidad y asintóticas que obedece este nuevo sistema de ecuaciones, y las cuales se toman en cuenta al momento de la resolución numérica. Al final de este capítulo (en Apartado 3.8) se hace un resumen de lo que otros autores han comentado sobre la “imposibilidad” de implementar esta aproximación de rotación lenta y donde discutimos la razón por la cual esos autores se equivocaron al respecto. Asimismo, se citan a los autores que proponen que la construcción de estrellas de bosones con rotación es factible. Finalmente en el Capítulo 4 se presentan los resultados numéricos bajo la aproximación de rotación lenta propuesta en esta tesis.

# 2 Modelo de estrellas de bosones en simetría esférica

## 2.1. Espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico

Como ya hemos mencionado en la Introducción las estrellas de bosones son hipotéticos objetos astrofísicos propuestos en 1968 por Kaup [1], y que posteriormente han sido analizados por muchos otros autores [2]. Estos objetos son descritos por un campo escalar complejo  $\psi$ , como parte del sistema conocido como Einstein-Klein-Gordon (EKG) ya que se consideran las ecuaciones del campo gravitacional (ecuaciones de campo de Einstein de la RG) junto con la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar bosónico.

En general el lagrangiano para el sistema EKG esta expresado como:

$$\mathcal{L} = \frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \psi^\dagger \nabla_\beta \psi + V(\psi^\dagger \psi)] \quad . \quad (2.1)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci,  $\kappa = 8\pi G$  (siendo  $G$  la constante de gravitación),  $\nabla_\alpha$  la derivada covariante compatible con la métrica  $g_{\alpha\beta}$ ,  $V(\psi^\dagger \psi) = \mu^2 |\psi|^2$  es el potencial del campo bosónico  $\psi$ , y  $\mu$  representa su masa [1]. La ecuación de movimiento para el campo escalar resultante del lagrangiano anterior está dada por:

$$\square \psi - \mu^2 \psi = 0 \quad , \quad (2.2)$$

donde  $\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$ , es el operador d'Alambertiano.

Por otro lado, las ecuaciones de campo de Einstein que resultan de (2.1) están dadas por:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad . \quad (2.3)$$

Usando  $T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial g^{\alpha\beta}}$  (donde  $\mathcal{L}_\psi$  es el lagrangiano del campo bosónico dado en (2.1)) llegamos a la siguiente expresión para el tensor de energía-momento (TEM) del campo bosónico,

$$T_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} \psi^\dagger \nabla_{\nu)} \psi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [\nabla^\alpha \psi^\dagger \nabla_\alpha \psi + 2V(\psi^\dagger \psi)] \quad . \quad (2.4)$$

De (2.1) observamos que la parte del lagrangiano correspondiente a  $\psi$  tiene una simetría interna global asociada al grupo  $U(1)$ , i.e., la transformación de fase global  $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\beta} \psi$ , deja invariante a la teoría, donde  $\beta = \text{const.}$

Definiendo  $\psi_a$  como nuestros campos escalares  $\psi_a = (\psi, \psi^\dagger)$ , y tomando la variación a primer orden en el parámetro  $\beta$  obtenemos que  $\delta(\psi, \psi^\dagger) = \psi'_a - \psi_a = \beta(i\psi, -i\psi^\dagger)$ . Partiendo de esta simetría podemos obtener la corriente conservada que está dada por  $j_\mu = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (\nabla^\mu \psi_a)} \delta \psi_a$ , y que explícitamente resulta

$$j_\mu = \frac{1}{2i} [(\nabla_\mu \psi^\dagger)\psi - (\nabla_\mu \psi)\psi^\dagger] . \quad (2.5)$$

Así podemos obtener una carga conservada que podemos asociar al número total de bosones [1]:

$$N = \int j^0 dV , \quad (2.6)$$

donde  $dV = \sqrt{-g} d^3x$ , y  $g$  es el determinante de la métrica<sup>1</sup>.

A continuación consideramos un espacio-tiempo *estático y esféricamente simétrico*, cuya métrica está dada en las *coordenadas de área*<sup>2</sup>:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + A^2(r)dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2 , \quad (2.7)$$

Propondremos un ansatz para el campo bosónico con una dependencia armónica en el tiempo de la siguiente forma:

$$\psi(t, r) = e^{i\omega t} R(r) , \quad (2.8)$$

donde  $R(r)$  es una función *real*. De esta manera el TEM (2.4) resulta compatible con la hipótesis de estaticidad y no tiene una dependencia temporal.

Por lo tanto, podemos expresar (2.6) como

$$N = 4\pi\omega \int_0^\infty \frac{A(r)}{\alpha(r)} R^2(r)r^2 dr . \quad (2.9)$$

donde se usó  $\sqrt{-g} = \alpha Ar^2 \sin \theta$ , y  $j_0 = \frac{i}{2}(\psi^\dagger \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^\dagger) = -\omega R^2$ .

El número  $N$  de bosones se puede calcular de manera numérica integrando la siguiente ecuación diferencial para  $N(r)$  en el dominio  $r \in [0, \infty)$ :

$$\frac{dN(r)}{dr} = 4\pi\omega \frac{A}{\alpha} r^2 R^2(r) . \quad (2.10)$$

y tomando  $N = N(r \rightarrow \infty)$ <sup>3</sup>.

A fin de verificar que las ecuaciones de campo obtenidas de las ecuaciones de Einstein (2.3) para la métrica (2.7) no contengan errores algebraicos (y en especial cuando se analice el escenario con rotación en el Capítulo 3), usaremos también la formulación 3 + 1 de RG donde las ecuaciones de Einstein (2.3) se escriben de la siguiente manera [32, 33]<sup>4</sup>:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 2\kappa\rho , \quad (2.11)$$

<sup>1</sup>Para el desarrollo de este trabajo se utilizará la signatura  $(-, +, +, +)$ .

<sup>2</sup>Coordenadas en donde el área de las 2-esferas está dada por  $4\pi r^2$ .

<sup>3</sup>En la práctica  $r \rightarrow \infty$  corresponde a tomar un valor de la coordenada  $r$  para el cual el campo escalar es prácticamente nulo, dentro de los límites de precisión numérica.

<sup>4</sup>Los índices latinos  $i, j, k$  son índices espaciales y toman los valores 1 – 3.

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = \kappa j^i , \quad (2.12)$$

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i , \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha [{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ij} K_j^k] + 4\pi\alpha [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}] . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Este sistema de ecuaciones está compuesto por la *constricción hamiltoniana* (2.11), la *constricción de momento* (2.12), la ecuación de evolución de la métrica tres-dimensional  $\gamma_{ij}$  (2.13), y por último la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca ( $K_{ij}$ ) dada por (2.14), donde  $K$  es la traza de esta misma,  ${}^{(3)}R$  es el escalar de Ricci tres-dimensional,  $D_i$  es la derivada covariante tres-dimensional (compatible con la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ ) y  $\beta^i$  es el vector de *shift*<sup>5</sup> (en el Capítulo 3 trabajaremos con la hipótesis de axisimetría y la aproximación de rotación lenta donde el shift tendrá únicamente la componente  $\beta^\varphi$  diferente de cero). En las Ecuaciones (2.11) y (2.14) hemos definido  $\rho \doteq n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$ ,  $S_{\mu\nu} \doteq P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$  y  $S = S^\mu_\mu = S^i_i$ , donde  $n^\mu$  es un vector temporal (i.e.  $n^\mu n_\mu = -1$ ) normal a las hipersuperficies espaciales 3-dimensionales  $t = \text{const.}$  (i.e.  $n_\mu = -\alpha \nabla_\mu t$ ), las cuales tienen por métrica a  $\gamma_{ij}$ , mientras que  $P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu$  es el *operador de proyección* sobre dichas hipersuperficies [32, 33], tal que  $P_\nu^\mu n^\nu \equiv 0$ . Por último, la función escalar  $\alpha = (n^\mu \nabla_\mu t)^{-1}$  es el *lapso*. En el escenario de este capítulo correspondiente a un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico en coordenadas de área,  $n^\mu = \delta_t^\mu / \alpha$ , y  $n_\mu = -\alpha \delta_\mu^t$ . En este contexto  $n^\mu$  coincide con la 4-velocidad de los *observadores estáticos*, y por consiguiente,  $\rho = -T_t^t$  corresponde a la densidad de energía medida por dichos observadores.

Dadas las ecuaciones (2.13) y (2.7) resulta  $K_{ij} \equiv 0$ , y entonces la constricción hamiltoniana (2.11) da lugar a una ecuación diferencial para  $A(r)$  en términos de la densidad de energía  $\rho(r)$  asociada al campo escalar  $\psi$ :

$$\partial_r A = A \left( \frac{(1-A)}{r} + \kappa r A \rho \right) . \quad (2.15)$$

Por conveniencia introducimos la siguiente parametrización para la variable  $A(r)$  en términos de la función  $m(r)$ :

$$A(r) = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1/2} . \quad (2.16)$$

y sustituyendo en (2.15) obtenemos:

$$m(r) = \frac{\kappa}{2} \int_0^r s^2 \rho(s) , \quad (2.17)$$

---

<sup>5</sup>Bajo la descomposición 3+1 las componentes (covariantes) del vector *shift* están dadas por  $\beta_i = g_{ti}$ , y  $\beta^i = \gamma^{ij} \beta_j$ , donde  $\gamma^{ij}$  es la inversa de la 3-métrica. En el caso con simetría esférica el vector *shift* es idénticamente nulo en las coordenadas de área.



que corresponde a la *función de masa*. En este caso  $M = m(r \rightarrow \infty)$  da lugar a la *masa gravitacional* o masa ADM de la estrella [18], y la expresión para la densidad  $\rho(r) = -T_t^t$ , está dada por:

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left[ R^2 \left( \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \mu^2 \right) + \left( \frac{R'}{A} \right)^2 \right] . \quad (2.18)$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Einstein (2.3) se puede obtener también la misma ecuación diferencial para  $A(r)$ , así como una ecuación diferencial de primer orden para la función *lapso*  $\alpha(r)$ :

$$G_{tt} = \frac{\alpha^2 (-A + A^3 + 2rA')}{r^2 A^3} , \quad (2.19)$$

$$G_{rr} = \frac{\alpha - A^2 \alpha + 2r\alpha'}{r^2 \alpha} . \quad (2.20)$$

De (2.4) y Ecuación (2.8), obtenemos:

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left( \alpha^2 \mu^2 R^2 + \omega^2 R^2 + \left( \frac{\alpha}{A} \right)^2 (R')^2 \right) , \quad (2.21)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2} \left( (R')^2 - A^2 \mu^2 R^2 + \left( \frac{A}{\alpha} \right)^2 \omega^2 R^2 \right) , \quad (2.22)$$

dando como resultado las ecuaciones de Einstein para  $A(r)$  y  $\alpha(r)$ :

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1 - A^2)}{2r} + \frac{\kappa A^2 r}{4} \left[ \frac{\omega^2 R^2}{\alpha^2} + \left( \frac{R'}{A} \right)^2 + (\mu R)^2 \right] , \quad (2.23)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{(A^2 - 1)}{2r} + \frac{\kappa A^2 r}{4} \left[ \frac{\omega^2 R^2}{\alpha^2} + \left( \frac{R'}{A} \right)^2 - (\mu R)^2 \right] . \quad (2.24)$$

Utilizando el siguiente cambio de variables (empleado también en Ref. [1]):

$$\alpha(r) = e^{\nu(r)} \quad (2.25)$$

$$A(r) = e^{\lambda(r)} \quad (2.26)$$

las Ecuaciones (2.24) y (2.23) se escriben respectivamente, <sup>6</sup>

$$\nu' = \frac{\kappa r}{4} \left( \frac{A}{\alpha} \right)^2 \omega^2 R^2 + \frac{\kappa r}{4} R'^2 - \mu^2 \frac{\kappa r}{4} A^2 R^2 + \frac{(A^2 - 1)}{2r} , \quad (2.27)$$

$$\lambda' = \frac{\kappa r}{4} \left( \frac{A}{\alpha} \right)^2 \omega^2 R^2 + \frac{\kappa r}{4} R'^2 + \mu^2 \frac{\kappa r}{4} A^2 R^2 + \frac{(1 - A^2)}{2r} . \quad (2.28)$$

---

<sup>6</sup>Las ecuaciones (2.27) y (2.28) son equivalentes a las ecuaciones (4.6) de Kaup [1].

Cabe señalar que la ecuación diferencial para  $\nu(r)$  se puede obtener también de la componente  $\theta - \theta$  de la ecuación (2.14).

De (2.2) y como  $\psi$  es un campo escalar, podemos utilizar la siguiente expresión  $\square\psi = \nabla_\mu V^\mu$  con  $V^\mu := \nabla^\mu\psi$ . De esta manera, podemos expresar el d'Alambertiano del campo  $\psi$  en su forma compacta:

$$\square\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\psi) . \quad (2.29)$$

Desarrollando (2.29) obtenemos

$$\square\psi = -\frac{1}{\alpha^2}\partial_t^2\psi + \frac{1}{\alpha Ar^2 \sin\theta}\partial_r\left(\alpha\frac{1}{A}r^2 \sin\theta\partial_r\psi\right) \quad (2.30)$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2}\partial_t^2\psi + \frac{1}{\alpha Ar^2}\left(\alpha'\frac{1}{A}r^2\partial_r\psi + 2\alpha\frac{1}{A}r\partial_r\psi\right) \quad (2.31)$$

$$+ \frac{1}{\alpha Ar^2}\left(\alpha\frac{1}{A}r^2\partial_r^2\psi - \alpha\frac{1}{A^2}r^2\partial_r\psi\right) . \quad (2.32)$$

Usando este resultado en (2.2) y el ansatz (2.8), se obtiene<sup>7</sup>:

$$R'' + R'\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{A} + \frac{2}{r}\right) + A^2\left[\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 - \mu^2\right]R = 0 . \quad (2.33)$$

Al introducir las variables adimensionales  $\hat{r} = \mu r$ ,  $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\mu}$ , y la elección de unidades  $\kappa = 8\pi G := 1$ , las Ecuaciones (2.27), (2.28) y (2.33) se pueden reescribir, respectivamente, como:

$$\nu' = \frac{\hat{r}}{4}e^{2(\lambda-\nu)}\hat{\omega}^2 R^2 + \frac{\hat{r}}{4}(R')^2 - \frac{\hat{r}}{4}e^{2\lambda}R^2 + \frac{(e^{2\lambda} - 1)}{2\hat{r}} , \quad (2.34)$$

$$\lambda' = \frac{\hat{r}}{4}e^{2(\lambda-\nu)}\hat{\omega}^2 R^2 + \frac{\hat{r}}{4}(R')^2 + \frac{\hat{r}}{4}e^{2\lambda}R^2 + \frac{(1 - e^{2\lambda})}{2\hat{r}} , \quad (2.35)$$

$$R'' + R'\left(\nu' - \lambda' + \frac{2}{\hat{r}}\right) + e^{2\lambda}(e^{-2\nu}\hat{\omega}^2 - 1)R = 0 , \quad (2.36)$$

donde ahora las  $R', R''$  son derivadas respecto a la variable adimensional  $\hat{r}$ .

Este es el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas a resolver numéricamente.

### 2.1.1. Condiciones Asintóticas y de Regularidad

El sistema de ecuaciones (2.34)-(2.36) se resolvió numéricamente con el método de Runge-Kutta de 4to orden (RK4). Debido a que estas ecuaciones tienen términos del tipo  $1/r$  se imponen condiciones de regularidad en el origen  $r = 0$ . A partir de Ecuación (2.23) si multiplicamos por  $r$ , y asumiendo que las derivadas y el campo son finitos en el origen (de lo contrario con derivadas no finitas se complicaría la solución

<sup>7</sup>La ecuación (2.33) es equivalente a la ecuación (4.7) de Kaup [1].

numérica), se concluye que  $A(0) = 1$  (i.e.  $\lambda(0) = 0$ ). Algo similar ocurre al utilizar la ecuación (2.24) para  $\alpha$ , excepto que el valor  $\alpha(0)$  resulta, en principio, ser arbitrario pues se observa que (2.34)-(2.36) son invariantes ante reescalamientos de la forma  $\alpha \rightarrow a\alpha$ ,  $\omega \rightarrow a\omega$ , donde  $a = 1/\alpha(0)$  es una constante. Por lo tanto podemos escoger sin pérdida de generalidad  $\alpha(0) = 1$  y al final normalizamos el lapso  $\alpha(r)$ , tal que asintóticamente  $\alpha(r)$  vaya a 1, i.e.,  $\alpha(r \rightarrow \infty) = 1$ . Además de la Ecuación (2.36)) resulta que  $R'(0) = 0$  y  $R(0)$  es un parámetro libre.

En resumen, se tienen las siguientes condiciones de regularidad en  $r = 0$ :

$$A(0) = 1 \rightarrow \lambda(0) = 0 , \quad (2.37)$$

$$\alpha(0) = 1 \rightarrow \nu(0) = 0 , \quad (2.38)$$

$$\alpha'(0) = 0 = A'(0) , \quad (2.39)$$

$$m(0) = 0 , \quad (2.40)$$

$$R(0) = \text{const.} , \quad (2.41)$$

$$R'(0) = 0 . \quad (2.42)$$

Por otro lado derivando (2.36) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = & \hat{r}R''' + (2 + \hat{r}\nu' - \hat{r}\lambda') R'' + (\hat{r}\nu'' + \nu' - \hat{r}\lambda'' - \lambda') R' \\ & + R'' + e^{2\lambda} (e^{-2\nu}\hat{\omega}^2 - 1) R + e^{2\lambda}\hat{r}^2 (-2e^{-2\nu}\nu'\hat{\omega}^2 - 1) R \\ & + \hat{r}e^{2\lambda} (e^{-2\nu}\hat{\omega}^2 - 1) R' . \end{aligned}$$

Nuevamente asumiendo que todas las derivadas en el origen son finitas, i.e.  $R''', R'' < \infty$ ,  $\nu', \nu'', \lambda', \lambda'' < \infty$ , y además  $R'(0) = 0$ , resulta también

$$R''(0) = \frac{1}{3} (1 - \omega^2) R(0) , \quad (2.43)$$

la cual es útil desde el punto de vista numérico, ya que evita que  $R''$  se vuelva singular en  $r = 0$  al momento de resolver numéricamente la Ecuación (2.36) a través del método RK4.

La Ecuación (2.36) es una ecuación de *eigenvalores* en “ $\omega$ ”, los cuales se fijan o se determinan de modo que  $R(r) \rightarrow 0$  asintóticamente, por lo que usaremos un método de *shooting* para encontrar el eigenvalor para cada condición “inicial”  $R(0)$ .

Como se mencionó arriba, asintóticamente se pide  $\alpha(r) \rightarrow 1$ , y  $A(r) \rightarrow 1$ , por lo tanto la Ecuación (2.33) implica que la solución se comporta asintóticamente de la siguiente forma:

$$R \sim B_1 \frac{e^{-\sqrt{\mu^2 - \omega^2}r}}{r} + B_2 \frac{e^{\sqrt{\mu^2 - \omega^2}r}}{r} , \quad (2.44)$$

donde  $B_1, B_2$  son constantes por determinar. El método de shooting permite eliminar el segundo término (i.e., el término que diverge asintóticamente) de tal manera que

$B_2 = 0$ <sup>8</sup>, y por lo tanto, permite que el espacio-tiempo resultante sea asintóticamente plano y que las cantidades globales  $N$  (número bosónico total) y  $M$  (masa de la estrella) sean finitas. Por otro lado, la constante  $B_1$  resulta al fijar  $R(0)$ . Además se requiere  $0 < \omega^2 < \mu^2$ . La masa efectiva del campo se puede expresar como  $\mu_{\text{eff}} = \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ , de modo que asintóticamente  $R \sim B_1 e^{-\mu_{\text{eff}} r} / r$ .

Utilizando las condiciones de regularidad y asintóticas procedemos a resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales.

### 2.1.2. Solución Numérica

Como se mencionó previamente, además del método RK4 se utilizó también el método de shooting a través del cual, dada una condición inicial  $R(0)$  fija, se determina la frecuencia  $\hat{\omega}$  tal que  $R(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Para encontrar dicha frecuencia se utilizó el condicional donde dependiendo del último valor del campo  $R$  (i.e., el último valor con respecto a la malla numérica asociada a la coordenada  $r$ ) se suma o resta el parámetro de incremento  $p$ .

```

if ( R > 0 ) then
    w = w + p
elseif ( R < 0 ) then
    w = w - p
end if

```

Para obtener el valor de  $\omega$  (la eigenenergía o eigenfrecuencia del campo  $\psi$ ) mediante el método de shooting se toma un valor inicial  $\omega_0 = 10^{-1}$  al que se le suma la variable ‘incremento’ definida por  $p = \pm 10^{-1}$ , donde el signo  $\pm$  es el mismo que el último valor de  $R$ . Cada que  $R$  cruza el cero, es decir, cada vez que  $R_\omega * R_{\omega+p} < 0$  (donde  $R_\omega$  corresponde al último valor del campo en la malla numérica obtenido con la eigenfrecuencia  $\omega$  y  $R_{\omega+p}$  al último valor del campo obtenido después del incremento a la eigenfrecuencia dado por  $\omega = \omega + p$ ), la variable ‘incremento’ se redefine  $p = 10^{-1} * p$  para que los incrementos sean en la siguiente cifra significativa y así detener el programa cuando 16 cifras del eigenvalor  $\omega$  ya no cambien; 16 cifras es la capacidad de doble precisión en Fortran. Cabe subrayar que en este análisis nos enfocamos únicamente en las soluciones de  $R(r)$  *sin nodos* (es decir soluciones donde  $R \neq 0$ ), por ser las soluciones más estables (conocidas en la literatura como *estado base*).

Como ejemplo tomemos la solución para el caso con  $R(0) = 0.4$  (ver Figura 2.1), logrando fijar 16 cifras significativas de  $\omega$  con el método de shooting. De este gráfico podemos obtener una aproximación del radio de la estrella de bosones  $R_{\text{bos}}$  usando el criterio bajo el cual el campo  $R(R_{\text{bos}}) = 10^{-3} R(0)$ . La Figura 2.1 muestra las soluciones para  $A(r)$  y  $\alpha(r)$ , donde  $\alpha(r)$  se ha normalizado de modo que  $\alpha \rightarrow 1$  asintóticamente.

---

<sup>8</sup>De manera similar a lo que ocurre en mecánica cuántica, e.g., en el oscilador armónico o en el átomo de hidrógeno, el eigenvalor de energía de la función de onda se determina al imponer que ésta se anule asintóticamente. Esto se implementa con el método de shooting al resolver numéricamente la ecuación de Schrödinger correspondiente. De esta forma la función de onda puede ser normalizada.

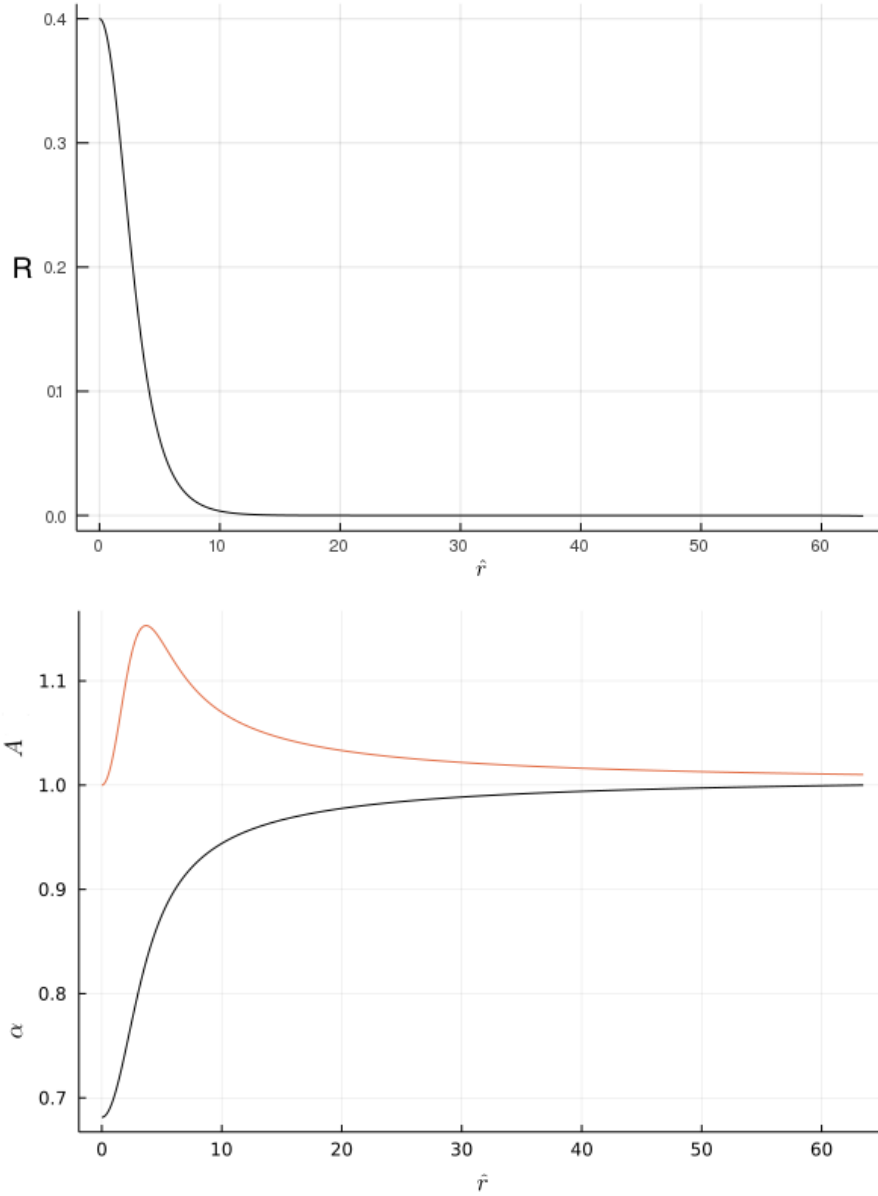


Figura 2.1: (Panel superior) Solución  $R(r)$  tomando  $R(0) = 0.4$ ; (Panel inferior) Solución para las variables asociadas a las componentes de la métrica  $\alpha(r)$  (línea negra) [ $g_{tt} = -\alpha^2(r)$ ] y  $A(r)$  (línea naranja) [ $g_{rr} = A^2(r)$ ]. El comportamiento asintótico de estas variables muestra convergencia a los valores de un espacio-tiempo de Minkowski, i.e.,  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $A \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

Así como en este ejemplo, se obtuvieron también soluciones para distintos valores del campo central  $R(0)$ . Las soluciones se presentan en la Figura 2.2, donde se observa el ‘colapso’ de la función lapso a medida que el campo central aumenta. En esta figura se ha utilizado una escala  $\log_{10}$  con el propósito de apreciar, tanto su comportamiento cercano al origen  $r = 0$ , como también su comportamiento asintótico.

La Tabla 2.1 muestra los valores obtenidos numéricamente para distintas canti-

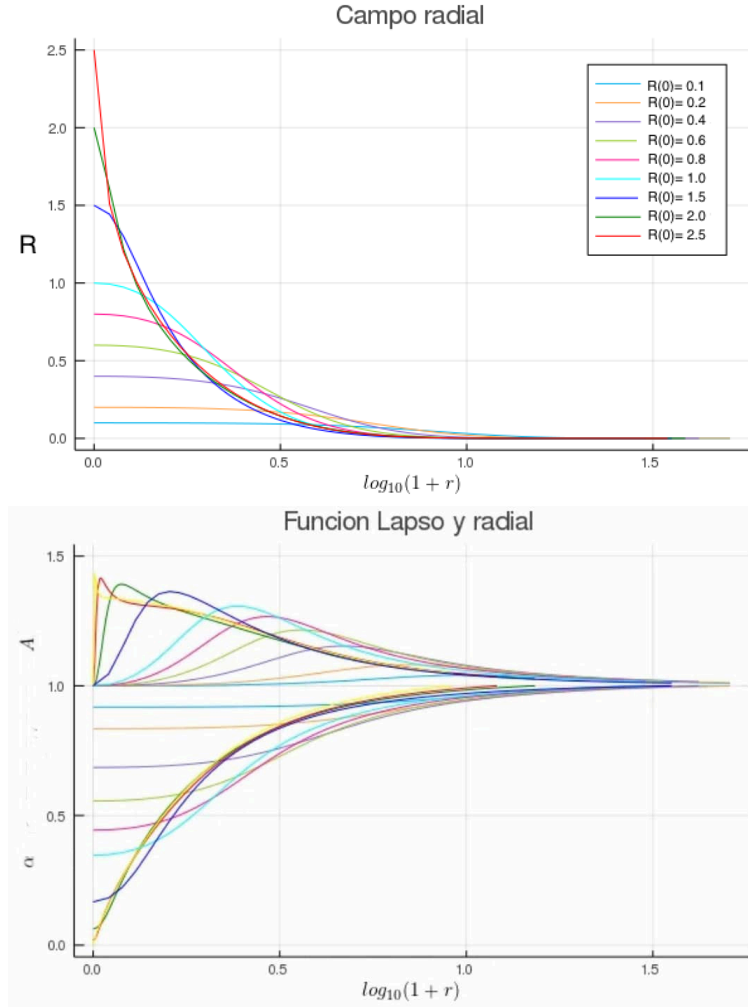


Figura 2.2: (Panel superior) Solución  $R(r)$  (para diferentes valores de  $R(0)$ ) en función de la coordenada  $r$  (usando una variable logarítmica); (Panel inferior) Soluciones para las variables métricas  $\alpha(r)$  y  $A(r)$ . El comportamiento asintótico de estas cantidades es similar al que se muestra en el panel inferior de la Fig.2.1.

dades en función de  $R(0)$ <sup>9</sup>.

La Figura 2.3 muestra el comportamiento de la masa  $M$  y del número total de partículas  $N$  de la estrella de bosones como función del campo central  $R(0)$ . Estas gráficas indican, al igual que en las estrellas de neutrones, la existencia de configuraciones estables e inestables: las configuraciones a la izquierda del primer máximo en el diagrama  $M - N$  .vs.  $R(0)$  implican estabilidad en la configuración, mientras que aquéllas que se encuentran a la derecha resultan ser inestables [9, 11], algunas de las cuales pueden colapsarse gravitacionalmente y formar un agujero negro, mientras que otras pueden migrar a las soluciones estables [9].

La Figura 2.3 es consistente con las reportadas en Refs. [1, 9].

<sup>9</sup>En esta Tabla, podría existir un factor de '1/2' en las unidades para  $p_c$  y  $\rho_c$  en comparación con [1] ya que en esa referencia las unidades para estas dos cantidades no están especificadas explícitamente.

Tabla 2.1: Valores de equilibrio del campo bosónico

$R(0)$	$E = \frac{\tilde{\omega}}{\alpha(0)}$	$1/\alpha(0)$	$M$	$N$	$p_c$	$\rho_c$
0.01	1.0074748	1.0020655	0.065208	0.064731	9.601524e-7	0.000100960155
0.1	0.95992684	1.0935225	0.949111	0.962633	0.0005093679	0.010509368
0.2	0.92433655	1.198639	1.167744	1.196121	0.0045508803	0.04455088
0.3	0.89175284	1.3193325	1.249567	1.287160	0.017288813	0.107288815
0.4	0.86304593	1.4572687	1.265106	1.305005	0.046542697	0.2065427
0.5	0.837721	1.6167336	1.243686	1.279274	0.104290314	0.3542903
0.6	0.8176334	1.7982786	1.200561	1.226133	0.20913802	0.56913805
0.8	0.78975224	2.255532	1.081393	1.074605	0.6953825	1.3353825
1.0	0.7808888	2.8836854	0.947517	0.900676	2.035386	3.035386
1.2	0.79126287	3.7763112	0.821383	0.737370	5.7084994	7.1484995
1.4	0.81923133	5.0837893	0.724539	0.615277	16.018642	17.978642
1.6	0.8494775	7.109922	0.681618	0.563075	45.412106	47.972103
1.8	0.86401427	10.412055	0.699223	0.5837	129.48819	132.72818
2.0	0.86176133	15.952524	0.739630	7.9309416	375.97476	379.97476
2.2	0.85486555	25.383347	0.762648	0.630942	1137.0653	1141.9054
2.4	0.84945947	41.88257	0.763172	0.658641	3642.5134	3648.2734
2.6	0.84893894	71.52709	0.754623	0.648461	12459.279	12466.039
2.8	0.8509499	126.70066	0.748924	0.641682	45563.227	45571.066
3.0	0.851925	233.47375	0.748761	0.641487	178024.78	178033.78
3.2	0.85203284	447.55276	0.750505	0.643557	744505.9	744516.1
3.4	0.85174996	894.2541	0.751207	0.644389	3.3533058e6	3.3533172e6
3.6	0.8520488	1875.835	0.750949	0.644082	1.6553621e7	1.6553634e7
3.8	0.8521451	4260.042	0.750725	0.643814	9.514632e7	9.514634e7

Las columnas corresponden respectivamente al valor central  $R(0)$  (en unidades de  $c^2/\sqrt{G}$ ), al eigenvalor normalizado, a la masa total  $M$  [en unidades de  $M_b/2 = M_{\text{Planck}}^2/(2\mu_f)$  (donde  $M_{\text{Planck}}^2 = \hbar c/G$ ), al número bosónico total [en múltiplos de  $M_{\text{Planck}}^2/(2\mu_f^2)$ ], y a la densidad y presiones centrales (ambas en unidades de  $(\mu_f c^3/\hbar)^2/G$ ). En estas unidades (i.e. cuando se reestablece  $\hbar$ ,  $c$  y  $G$ )  $\mu_f = \mu\hbar/c$  tiene unidades de masa y no de  $1/L$  (donde  $L$  es distancia). Cabe señalar que esta tabla es consistente con la presentada por Kaup en Ref. [1]. Sin embargo, al comparar con otros autores (cf. [2, 5, 20]) se debe tener en cuenta que la masa  $M$  se suele reportar en unidades de  $M_b$  y en consecuencia existe un factor de  $\frac{1}{2}$  de por medio (cf. Figura 2.5).

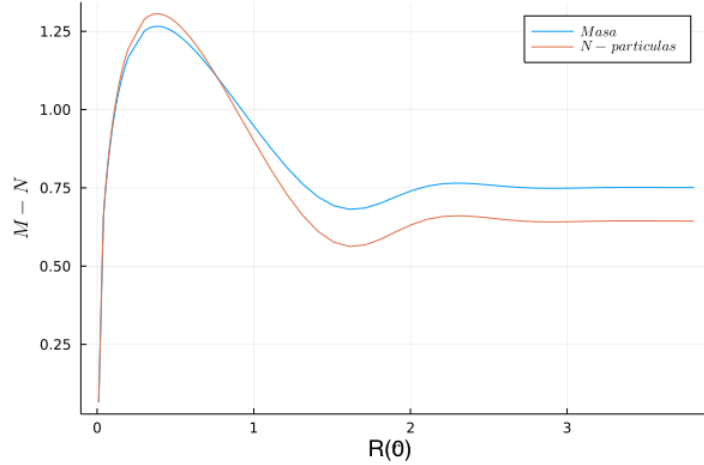


Figura 2.3: Comportamiento de la masa  $M$  (en unidades de  $M_b/2 = \hbar c/(2\mu G)$ ) y el número bosónico  $N$  en función de  $R(0)$ .

## 2.2. Compactificación de la variable $r$

Consideremos el siguiente cambio de variable,

$$\hat{r} = \frac{\xi}{1-\xi} = r\mu, \quad (2.45)$$

donde  $\xi \in [0, 1)$  y  $\hat{r} \in [0, \infty)$ . De esta forma estamos ‘compactando’  $\mathbb{R}$  en un intervalo finito  $[0, 1)$ , con lo que tenemos que el operador derivada estará dado por

$$\frac{d\hat{r}}{d\xi} = \frac{1}{(1-\xi)^2}.$$

Así, la métrica (2.7) toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \frac{A^2}{(1-\xi)^4} d\xi^2 + \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} d\Omega^2. \quad (2.46)$$

En términos de la variable  $\xi$ , las ecuaciones de campo para  $A(\xi)$ ,  $\alpha(\xi)$  y  $f(\xi)$  se escriben (tomando  $\kappa = 1$ ):

$$\begin{aligned} \partial_\xi^2 R(\xi) + \partial_\xi R(\xi) \left( \nu' - \lambda' + \frac{2}{\xi} \right) \\ + \frac{e^{2\lambda}}{(1-\xi)^4} (e^{-2\nu} \hat{\omega}^2 - 1) R(\xi) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-\xi)^2 \nu' &= \frac{\xi}{4(1-\xi)} e^{2(\lambda-\nu)} \hat{\omega}^2 R^2 + \frac{\xi(1-\xi)^3}{4} (R')^2 \\ &- \frac{\xi}{4(1-\xi)} e^{2\lambda} R^2 + \frac{(e^{2\lambda} - 1)}{2\xi} (1-\xi). \end{aligned}$$



$$(1 - \xi)^2 \lambda' = \frac{\xi}{4(1 - \xi)} e^{2(\lambda - \nu)} \hat{\omega}^2 R^2 + \frac{\xi(1 - \xi)^3}{4} (R')^2 + \frac{\xi}{4(1 - \xi)} e^{2\lambda} R^2 + \frac{(1 - e^{2\lambda})}{2\xi} (1 - \xi) .$$

### 2.2.1. Resultados numéricos empleando la compactificación

La Figura 2.4 muestra los resultados obtenidos al resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales a través de la compactificación de la variable  $r$ . Al comparar con la Figura 2.1 no se observan diferencias, lo cual indica que el método de integración numérica es independiente de las coordenadas  $r$  y  $\xi$ , y en especial, que se puede alcanzar la región asintótica de una manera más eficiente a través del empleo de la variable  $\xi$ .

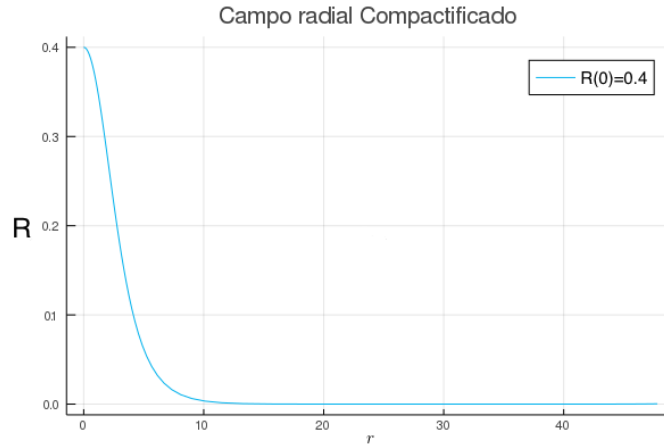


Figura 2.4: Solución para  $R(r)$  tomando  $R(0) = 0.4$ , después de realizar la descompactificación de coordenadas de  $\xi$  a  $r$  a través del cambio de variable (2.45).

## 2.3. Autointeracción

En el modelo de estrella de bosones con autointeracción [5], asumimos un potencial entre los bosones de la siguiente forma:

$$V(\psi) = \frac{\mu^2}{2}\psi^\dagger\psi + \frac{1}{4}\bar{\lambda}(\psi^\dagger\psi)^2 ,$$

donde  $\phi^2 = \psi^\dagger\psi$  es *real*, y  $\bar{\lambda}$  es la constante de acoplamiento<sup>10</sup>, el lagrangiano del campo escalar se escribe entonces:

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{2} \left[ g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \psi^\dagger \nabla_\beta \psi + \mu^2 \psi^\dagger \psi + \frac{1}{2} \bar{\lambda} (\psi^\dagger \psi)^2 \right] . \quad (2.47)$$

Además sabemos que: [32]

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial g^{\alpha\beta}} + \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \mathcal{L}_\psi ,$$

por lo tanto, el correspondiente tensor de energía momento (2.47) toma la forma:

$$T_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha} \psi^\dagger \nabla_{\beta)} \psi - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \left( g^{\gamma\delta} \nabla_\gamma \psi^\dagger \nabla_\delta \psi + \mu^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda} |\psi|^4 \right) . \quad (2.48)$$

Notemos que en Ref. [5], los autores no usan las mismas unidades que nosotros ( $\kappa \neq 1$ ), por lo que se debe tener cuidado al comparar nuestro resultado con los de ellos. En consecuencia, la función radial  $\sigma(r)$  usada por esos autores no es exactamente igual a la variable  $R(r)$  empleada por nosotros [cf. Ecuación (2.55)].

Dado que la forma de la métrica no cambia (seguimos interesados en describir un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico) y sólo se ha introducido el término de autointeracción en el potencial del campo escalar, entonces las componentes  $G_{rr}$  (2.19) y  $G_{tt}$  (2.20) que son puramente geométricas toman la misma forma que antes, y en consecuencia las ecuaciones de Einstein para las variables  $\nu$  y  $\lambda$  resultan,

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{r\kappa}{4} \left( e^{2(\lambda-\nu)} \hat{\omega}^2 R^2 + (R')^2 - (\mu^2 e^{2\lambda} R^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda} R^4) \right) \\ &+ \frac{(e^{2\lambda} - 1)}{2r} , \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{r\kappa}{4} \left( e^{2(\lambda-\nu)} \hat{\omega}^2 R^2 + (R')^2 + (\mu^2 e^{2\lambda} R^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda} R^4) \right) \\ &+ \frac{(1 - e^{2\lambda})}{2r} . \end{aligned} \quad (2.50)$$

En este caso la ecuación (2.2) se modifica de la siguiente manera,

$$\square\psi + m^2\psi - \bar{\lambda}|\psi|^2\psi = 0 . \quad (2.51)$$

---

<sup>10</sup>No confundir la variable  $\lambda(r)$  con la constante de acoplamiento  $\bar{\lambda}$ .

Del mismo modo como se hizo en el Apartado 2.1, obtenemos la nueva ecuación diferencial para la parte radial del campo:

$$R'' + R' \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{A} + \frac{2}{r} \right) + A^2 \left( \left[ \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 - \mu^2 \right] R - \bar{\lambda} R^3 \right) = 0 . \quad (2.52)$$

Las nuevas ecuaciones (con el término de autointeracción) están sujetas a condiciones de regularidad similares a las del caso sin autointeracción, excepto para  $R''(0)$ , la cual está dada por la expresión:

$$R''(0) = \frac{1}{3} R(0) (1 - \omega^2 - \Lambda R(0)^2) . \quad (2.53)$$

Por otro lado, la densidad total de energía  $\rho$  (2.18) también se modifica al incluir el término de autointeracción. Usando nuevamente la definición dada en [32]:

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = -T_t^t ,$$

donde  $n^\mu = \delta_t^\mu / \alpha$ , obtenemos:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 + \mu^2 \right] R^2 + \frac{1}{4} \bar{\lambda} R^4 + \frac{1}{2A^2} (R')^2 , \quad (2.54)$$

la cual evidentemente coincide con la expresión (2.18) en ausencia de autointeracción (i.e. cuando  $\bar{\lambda} \equiv 0$ ).

De acuerdo con [5] conviene introducir las variables adimensionales siguientes:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\bar{\lambda} M_{\text{Planck}}^2}{4\pi\mu^2} , \\ \hat{r} &= \mu r , \\ \hat{\omega} &= \frac{\omega}{\mu} , \end{aligned}$$

donde  $M_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ . Para poder comparar nuestros resultados numéricos con lo obtenidos en Ref. [5], transformamos nuestra función radial  $R(r)$  en la función  $\sigma(r)$  usada por esos autores a través del siguiente reescalamiento:

$$\sigma(r) = (4\pi G)^{1/2} R(r) = \frac{(4\pi)^{1/2}}{M_{\text{Planck}}} R(r) . \quad (2.55)$$

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales adimensionales a resolver, una vez introducida la parametrización (2.16), son las siguientes,

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{\hat{r} A(r)^2}{4} \left( (e^{-2\nu} \hat{\omega} - 1)^2 \sigma^2 + \frac{(\sigma')^2}{A(r)^2} - \frac{1}{2} \Lambda \sigma^4 \right) \\ &+ \frac{(A(r)^2 - 1)}{2\hat{r}} , \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\partial_{\hat{r}} m(\hat{r}) = \hat{r}^2 \left( \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 + 1 \right] \sigma^2 + \frac{1}{4} \Lambda \sigma^4 + \frac{1}{2A} (\sigma')^2 \right) , \quad (2.57)$$

$$\partial_{\hat{r}}^2 \sigma = \partial_{\hat{r}} \sigma \left( \frac{A'}{A} - \nu' - \frac{2}{\hat{r}} \right) + A^2 \left( \left[ 1 - (\hat{\omega} e^{-2\nu})^2 \right] \sigma + \Lambda \sigma^3 \right) . \quad (2.58)$$

Por otro lado, el número bosónico estará dado por la Ecuación (2.10), con el respectivo cambio de variables dado por (2.55).

### 2.3.1. Resultados numéricos

Las ecuaciones diferenciales de la sección anterior (2.56)–(2.58) se han resuelto de manera similar al caso sin autointeracción ( $\bar{\lambda} \equiv 0$ ) utilizando un método RK4 junto con un algoritmo de shooting. En particular, hemos calculado la masa  $M$  y el número total de bosones  $N$  para soluciones de campo sin nodos (i.e. sin *ceros* en la función radial  $\sigma(r)$ ).

En la Figura 2.5 se muestra el comportamiento de  $M$  como función de  $\sigma_0 = \sigma(0)$  para diferentes valores de la constante  $\Lambda$ . En esta figura notamos que para  $\Lambda = 0$  recuperamos una curva similar a Fig. 2.3. Además se observa que la masa máxima aumenta con el valor de  $\Lambda$ . Estos resultados son consistentes con los obtenidos en [5]. Esto significa que el término de autointeracción hace que el campo bosónico compense el campo gravitacional y le sea posible admitir más masa. La presión efectiva del campo se puede definir como  $p_{\text{eff}} = T_i^i/3$  la cual se relaciona con la densidad  $\rho$  a través del potencial del campo  $V(\psi)$  (entre otros términos, como los gradientes radiales del campo). En consecuencia, el aumento en los gradientes de presión debido al término de autointeracción, es capaz, presumiblemente, de compensar el aumento en “la atracción gravitacional” del campo debido al correspondiente incremento en la masa de la estrella.

La Figura 2.6 muestra el valor de la masa máxima en función de  $\Lambda$ . Como se ha hecho notar en [5], resulta interesante que a estos datos les podemos ajustar una función que depende de un sólo parámetro libre  $d$ , de la forma  $\hat{M}_{max} = d\Lambda^{1/2}$ , donde  $d = 0.224$ . Recordemos que  $\hat{M}_{max}$  está en unidades de  $M_{\text{Planck}}^2/\mu$ . La línea continua de la Figura 2.6 muestra la curva ajustada. El error relativo predicho por esta curva en relación con los datos numéricos para  $\Lambda \gg 1$  es del orden de 5.7%. Específicamente se tiene la siguiente expresión aproximada para la masa máxima cuando  $\Lambda \gg 1$ :

$$M_{max} = 0.224\Lambda^{1/2}M_{\text{planck}}^2/\mu \quad (2.59)$$

Habiendo analizado y recuperado los resultados de estrellas de bosones estáticas con simetría esférica (con y sin autointeracción), en el siguiente capítulo estudiamos algunas configuraciones de dichos objetos pero con rotación utilizando diferentes aproximaciones.

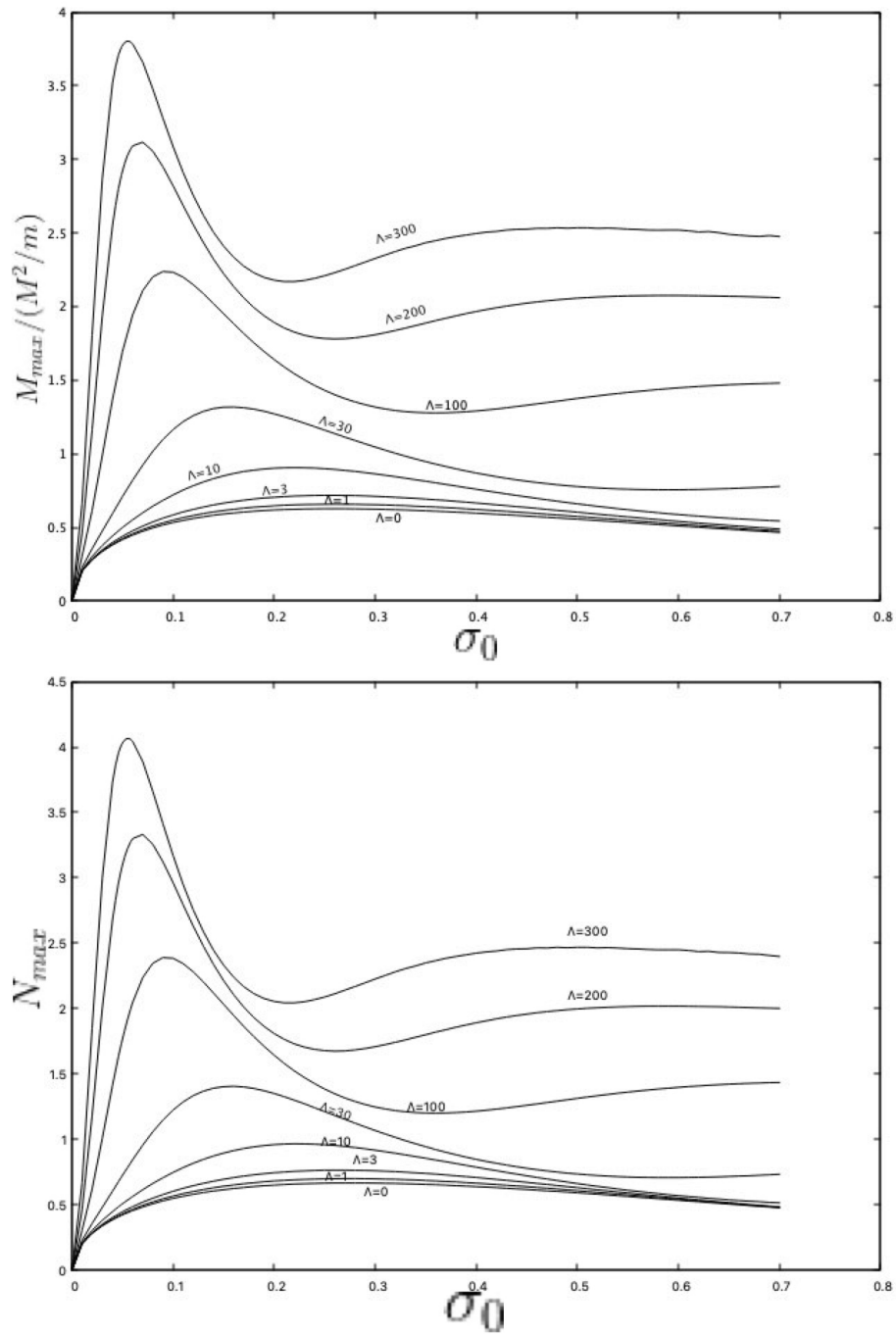


Figura 2.5: Masa total  $M$  y número de partículas  $N$  de una estrella de bosones como función de  $\sigma_0$  y  $\Lambda$ .

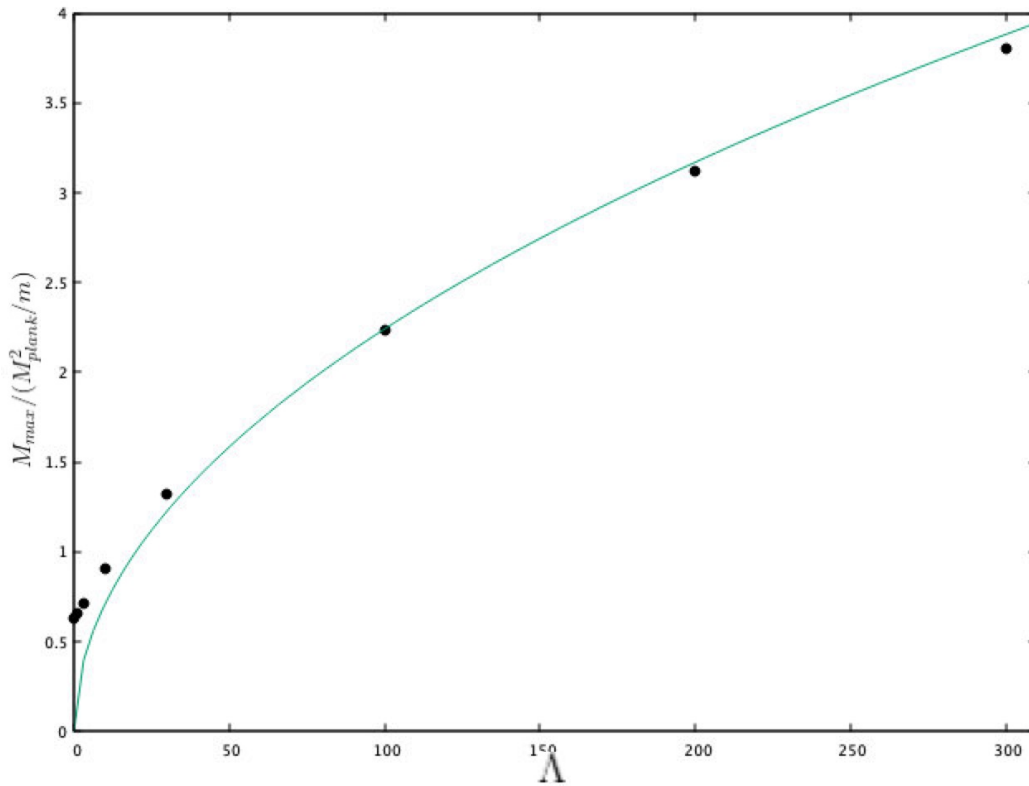


Figura 2.6: Masa máxima como función de la constante de acoplamiento  $\Lambda$ . Los puntos representan los resultados numéricos. La línea continua corresponde al ajuste dado por (2.6). Nótese que el ajuste mejora cuando  $\Lambda \gg 1$ .



# 3 Modelo de estrellas de bosones con rotación (lenta)

## 3.1. Introducción

Como discutiremos más adelante (Apartado 3.6), existen diferentes enfoques para estudiar las estrellas de bosones en rotación. Una manera de realizar dicho análisis es en forma *no perturbativa* [20, 30] resolviendo el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon para la métrica y el campo escalar al incorporar la rotación (de manera similar a como se realizó para el caso con simetría esférica donde se tomaron las ecuaciones completas de la teoría).

Para llevar a cabo ese tratamiento completo, usualmente se consideran las hipótesis de *estacionaridad* (asumiendo la existencia de un vector de Killing temporal), *axisimetría* (asumiendo la existencia de un vector de Killing axial espacial) y *circularidad* en un espacio-tiempo globalmente regular y asintóticamente plano (cf. Sec.7.1 de Ref. [18]). La hipótesis de circularidad involucra al tensor de energía-momento de la materia (en este caso el campo escalar) y establece que *no* existen corrientes *meridionales* (i.e. sólo existen flujos de materia alrededor del eje de simetría de la estrella). En el caso presente, esto permite que el TEM del campo bosónico se reduzca considerablemente [20]. Adicionalmente, esta hipótesis permite reducir la métrica substancialmente de manera que tenga la forma de Papapetrou [18]: sólo existe una componente del shift en la dirección axial, y las componentes no diagonales de la 3-métrica están ausentes [7, 18]. Es decir, usando coordenadas de tipo esférico, las únicas componentes no nulas de la métrica son  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $g_{rr}$ ,  $g_{\theta\theta}$  y  $g_{\varphi\varphi}$ . Estas componentes dependen exclusivamente de las coordenadas  $r, \theta$ . Bajo estas hipótesis las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas de tipo *elíptico* y no lineales para las componentes de la métrica, así como a una ecuación de eigenvalores para el campo escalar [20].

Las estrellas de bosones en rotación se han estudiado en el pasado de manera no perturbativa bajo diferentes métodos numéricos [20, 30, 34]. Sin embargo, el sistema de ecuaciones se vuelve extremadamente complicado y se requiere de sofisticados códigos numéricos para su resolución, cuyo análisis queda fuera del alcance de la presente tesis.

Por otro lado, en el caso de los fluidos perfectos, se desarrolló un método perturbativo para tratar estrellas de neutrones en la aproximación de *rotación lenta*, bajo



la cual se considera que la velocidad tangencial de rotación del objeto es pequeña (comparada con la velocidad de la luz,  $c$ ) y por consiguiente la dinámica del objeto difiere ligeramente de la simetría esférica [35]. En tal caso, la métrica toma la forma de un espacio-tiempo casi con simetría esférica, excepto que solamente se añade a la métrica la componente axial del shift  $\beta^\varphi$  [35]. Además, las componentes  $g_{tt}$ ,  $g_{rr}$  y  $g_{t\phi}$  solamente dependen de la coordenada  $r$ , a diferencia del caso no perturbativo en que también dependen de la coordenada  $\theta$ , como se mencionó anteriormente. Este tratamiento se realiza a nivel lineal en el shift  $\beta^\varphi$ , y en la velocidad angular de rotación de la estrella, de donde resulta una aproximación consistente a orden lineal en estas dos variables [35]. La idea de esta tesis es extender dicho estudio al caso de *rotación lenta* de una estrella de bosones. Un enfoque similar se trató de realizar en [36] obteniendo inconsistencias en la solución por no tener en cuenta la contribución del campo bosónico en la ecuación del shift, i.e., por no tener en cuenta la contribución del TEM en la ecuación que resulta de la constricción de momento (2.12) (ver Apartado 3.8). En el presente enfoque, nosotros tomaremos en cuenta esa contribución, y por lo tanto, no encontraremos esa inconsistencia. Por otro lado, para mantener la consistencia matemática asumiremos además que el campo bosónico no contribuye completamente como fuente de las ecuaciones de Einstein, en particular, en lo que concierne a la dependencia en la coordenada  $\theta$ . Para ello supondremos que el número  $l$  (relacionado con la dependencia en  $\theta$  del campo cuando se considera el problema de manera no perturbativa) solo adquiere el valor  $l = 1$ , y por lo tanto, esto restringe el valor  $k = 1$  en la dependencia del “número magnético”  $k$  asociado al campo bosónico (ver Apartado 3.2) (cf. [20]). Esta aproximación es un caso intermedio entre considerar el análisis completo no perturbativo [20] y el caso en que cierta contribución de la parte angular  $\theta$  del campo escalar es totalmente de “prueba” (i.e., cuando se asume que ciertas contribuciones de la parte angular del campo bosónico no afectan a las ecuaciones de Einstein). Por ejemplo, existen configuraciones de campo bosónico no triviales en el fondo de un espacio-tiempo de Kerr, llamadas *nubes bosónicas*, en que el TEM del campo respeta las simetrías anteriormente mencionadas pero sin tomar en cuenta su retroacción sobre el espacio-tiempo de fondo [37, 38]. En ese caso, la geometría de Kerr está completamente fija, y sólo se resuelve la ecuación del campo bosónico en ese fondo curvo como si se tratara de un *campo de prueba*. Este mismo problema se puede analizar tomando en cuenta la retroalimentación del campo en el espacio-tiempo, dando lugar a un agujero negro con pelo bosónico diferente al de Kerr [37, 38].

En nuestro caso, la aproximación propuesta es el análogo de esa situación de nubes, excepto que tomamos de manera completa la contribución de la parte radial del campo en la geometría, y sólo en la parte angular tomamos parte del campo como *si fuera de prueba*. Además, en el caso presente no asumimos la presencia de un agujero negro (i.e. la presencia de un horizonte de eventos) sino que consideramos una configuración del campo globalmente regular en todo el espacio-tiempo. Evidentemente la única manera de determinar si esta aproximación es satisfactoria es comparando con el correspondiente escenario completo (no perturbativo) asociado a  $l = 1 = k$  [20]. Esta comparación es un trabajo para el futuro ya que como mencionamos, para llevarla a cabo se requiere de implementar y resolver el sistema completo de ecuaciones

diferenciales parciales no lineales de tipo elíptico, junto con la ecuación de eigenvalores para el campo bosónico [20], lo cual, insistimos, está fuera de los alcances de esta tesis. Lo interesante es que aún con esta aproximación, obtenemos un cambio de topología en la estrella: los contornos de magnitud constante del campo escalar de la estrella poseen una topología toroidal en lugar de topología esférica (cf. [20], Apartado 3.8 y Capítulo 4). Esto se refleja en las condiciones de regularidad en la parte bosónica del campo (ver Apartado 3.5) donde la derivada radial no es cero en el origen, pero en cambio el campo es nulo ahí, contrariamente a lo que ocurre con los modelos en simetría esférica. Por lo tanto, bajo tales condiciones se resuelve la ecuación del campo bosónico y para la parte gravitacional se añade la ecuación para el shift, la cual también estaba ausente en el caso con simetría esférica. En esta tesis dicho análisis se lleva a cabo únicamente en el modelo masivo y sin auto interacción. Hasta donde sabemos, esta es la primera vez en la literatura en que esta aproximación es implementada, y por lo tanto, es el objetivo principal de esta tesis. Para tal efecto, fue necesario realizar todo el estudio en simetría esférica discutido en el capítulo anterior con el objeto de tener una idea precisa del tipo de modificaciones que esperábamos y además, dado que las ecuaciones diferenciales para el escenario con rotación son modificaciones del caso con simetría esférica.

## 3.2. Formalismo

Para llevar a cabo el análisis matemático y numérico descrito de manera cualitativa en la sección anterior, asumimos la métrica del caso estático y esféricamente simétrico analizado en el Capítulo 2, excepto que añadiremos la componente angular del shift asociada a la coordenada  $\varphi$  que corresponde a la existencia del vector de Killing rotacional  $(\partial/\partial\varphi)^a$  que caracteriza la axisimetría del problema. Esto se traduce en que el espacio-tiempo posee rotación, i.e., el término de *arrastre* (dragging inertial frame [18] ) está presente en la métrica. De [35] tenemos que la métrica puede ser expresada como:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + A^2(r)dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta(d\varphi + \beta_\varphi(r)dt)^2] . \quad (3.1)$$

Es decir, la métrica se ha escrito de acuerdo con la formulación 3 + 1 de la RG [32]:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i\beta^i) dt^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j + 2\beta_i dt dx^i , \quad (3.2)$$

donde tanto la función de lapso  $\alpha$ , como la variable  $A$ , y la componente angular del shift  $\beta_\varphi$  son funciones únicamente de la coordenada  $r$  [35]. En este caso las únicas componentes no nulas de la 3-métrica  $\gamma_{ij}$  son las componentes diagonales, las cuales toman la misma forma que en el caso con simetría esférica.

Para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales para las componentes de la métrica se tienen dos métodos, uno que es el covariante a partir de las ecuaciones usuales de Einstein, y el otro método consiste en usar, al igual que se hizo en el caso esférico, la descomposición 3+1 de la RG [32,33]. Esto permite verificar la consistencia del sistema

de ecuaciones obtenido por estos dos métodos y comprobar que no se cometieron errores algebraicos en su derivación.

En cuanto al campo bosónico, se asume un ansatz que toma en cuenta la dependencia angular  $\varphi$  y temporal  $t$  de forma armónica, generalizando el ansatz (3.3) del caso con simetría esférica:

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t + ik\varphi} f(r, \theta) , \quad (3.3)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia del campo y  $k$  es el número “cuántico magnético”, el cual es un número entero para que el campo  $\psi$  se mantenga univaluado (de manera similar a lo que ocurre con la función de onda del átomo de hidrógeno)<sup>1</sup>. Bajo este ansatz, el TEM asociado al campo bosónico no tiene dependencia en  $t$  (como sucede en el escenario estático y esféricamente simétrico) ni en  $\varphi$ , como es de esperarse debido a las hipótesis de estacionaridad y axisimetría. Por otro lado,  $f(r, \theta)$  es una *función real*, que en principio depende de las coordenadas  $r, \theta$ , aunque como veremos más adelante, por consistencia matemática despreciaremos una parte de la dependencia angular  $\theta$ . En especial, supondremos que  $\partial_\theta f \approx 0$ . Es decir, supondremos que los gradientes angulares son pequeños (en lo que concierne a los términos fuente de las ecuaciones de campo de Einstein) en comparación con los gradientes radiales, y entonces las ecuaciones para la métrica se resuelven considerando un  $\theta \sim cte$ . Esto es equivalente a suponer que  $f(r, \theta) \approx R(r) \text{sen } \theta$ , y en consecuencia, que la aproximación que resulta ser válida en el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$  se extrapola a todo  $\theta \in [0, \pi]$ . Aún más, esta aproximación también se puede considerar como si la solución asociada a la métrica se promediara en la dependencia angular  $\theta$ , pero esa dependencia se mantuviera explícita en el campo escalar (ver Secs. 3.6 y 3.7). Esto es consistente con el hecho de tomar la dependencia angular  $\theta$  de campo  $\psi$  como si fuera de prueba en lo que al espacio-tiempo concierne, pero esa dependencia sí se toma en cuenta al resolver la ecuación de Klein-Gordon para  $\psi$ . Más adelante veremos que esa dependencia en  $\theta$  del campo  $\psi$  es necesaria para que la configuración sea regular en el eje de simetría.

### 3.3. Ecuaciones de campo a partir de la forma covariante

Partiendo de las ecuaciones de Einstein (2.3), imponiendo el ansatz para la métrica (3.1), y tomando la componente  $tt$  a orden lineal en  $\beta_\varphi$  se obtiene:

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1 - A^2)}{2r} + \frac{\kappa A^2 r}{2\alpha^2} T_{tt} + \frac{\beta_\varphi \beta_\varphi''}{2r \sin(\theta)^2 \alpha^2} . \quad (3.4)$$

En este caso, se ha mantenido el término “cuadrático”  $\beta_\varphi \beta_\varphi''$  ya que de la componente  $G_{t\varphi} = \kappa T_{t\varphi}$  de las ecuaciones de Einstein, se obtiene una ecuación que involucra a  $\beta_\varphi''$  la cual se utiliza para reemplazar esta cantidad en la ecuación anterior. Este

---

<sup>1</sup>No confundir el número  $k$  con la constante  $\kappa = 8\pi G$ .

procedimiento conduce a la siguiente ecuación diferencial (tomada a orden lineal en  $\beta^\varphi = \beta_\varphi/r^2 \sin^2 \theta$ ):

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1 - A^2)}{2r} + \frac{\kappa A^2 r}{2\alpha^2} [T_{tt} - 2\beta^\varphi T_{t\varphi}] . \quad (3.5)$$

Por otro lado, la ecuación para la función del lapso se obtiene a partir de la componente  $G_{rr} = \kappa T_{rr}$  de las ecuaciones de Einstein, esto es:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{(A^2 - 1)}{2r} + \frac{\kappa r}{2} T_{rr} . \quad (3.6)$$

Por el momento las ecuaciones para el lapso y la función radial  $A$  se han expresado en términos de las componentes del TEM, las cuales más adelante se escriben de manera explícita en términos del campo bosónico.

Como se mencionó antes, la ecuación diferencial para la componente  $\beta^\varphi$  del shift se puede obtener a partir de la ecuación de Einstein  $G_{t\varphi} = \kappa T_{t\varphi}$ . Sin embargo, esa misma ecuación se puede obtener de una manera más directa [cf. Ecuación (3.17)] a través de la descomposición 3+1 que presentamos más adelante en Sec. 3.4.

### 3.3.1. Tensor de energía momento

Partiendo de la expresión (2.4) y usando la métrica (3.1), así como el ansatz para el campo (3.3) se obtiene:

$$T_{tt} = \omega^2 f^2 + \frac{\alpha^2}{2} \mathcal{H} , \quad (3.7)$$

$$T_{rr} = (\partial_r f)^2 - \frac{A^2}{2} \mathcal{H} , \quad (3.8)$$

$$T_{\theta\theta} = (\partial_\theta f)^2 - \frac{r^2}{2} \mathcal{H} , \quad (3.9)$$

$$T_{\varphi\varphi} = k^2 f^2 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \mathcal{H} , \quad (3.10)$$

$$T_{t\varphi} = -k\omega f^2 - \frac{\beta_\varphi}{2} \mathcal{H} , \quad (3.11)$$

donde se ha definido  $\mathcal{H}$  como

$$\mathcal{H} = -\frac{\omega^2 f^2}{\alpha^2} - \frac{2\beta^\varphi}{\alpha^2} k\omega f^2 + \left(\frac{\partial_r f}{A}\right)^2 + \left(\frac{\partial_\theta f}{r}\right)^2 + \frac{k^2 f^2}{r^2 \sin^2 \theta} + 2V(|\psi|) , \quad (3.12)$$

y además

$$\beta_\varphi = r^2 \sin^2(\theta) \beta^\varphi . \quad (3.13)$$

## 3.4. Descomposición 3+1

Para obtener las ecuaciones a través de la descomposición 3+1 de la GR discutida brevemente en el Capítulo 2 y con detalle en Refs. [32,33], usaremos las constricciones

y ecuaciones de evolución dadas por (2.11), (2.12) y (2.14), respectivamente. Para ello debe notarse que, dado que el espacio-tiempo es estacionario, los términos que tienen derivadas temporales ‘ $\partial_t$ ’ en (2.14) se anulan idénticamente. En particular la ecuación para  $A$  se obtiene de la constricción Hamiltoniana (2.11) la cual es una generalización de (2.15):

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1 - A^2)}{2r} + \frac{\kappa A^2 r}{2\alpha^2} [T_{tt} - 2\beta^\varphi T_{t\varphi}] . \quad (3.14)$$

Notemos entonces que la Ecuación (3.14) coincide con la Ecuación (3.5).

La ecuación para el lapso se obtiene de la componente  $\theta - \theta$  de la ecuación para la curvatura extrínseca (2.14), teniendo como resultado:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{(A^2 - 1)}{2r} + \frac{\kappa A^2 r}{2} \left( \frac{T_{rr}}{A^2} + \frac{T_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2(\theta)} - \frac{T_{\theta\theta}}{r^2} \right) . \quad (3.15)$$

Ahora bien, las ecuaciones para el lapso obtenidas mediante la forma covariante y la descomposición 3+1, (3.6) y (3.15), no son idénticamente iguales, sin embargo, al reescribir las componentes  $G_{\theta\theta}$  y  $G_{\varphi\varphi}$  de las ecuaciones de Einstein se obtiene la siguiente igualdad, dada por:

$$\frac{T_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} = T_{\theta\theta}$$

y por lo tanto al sustituirla en (3.15) se obtiene inmediatamente la igualdad entre las Ecuaciones (3.6) y (3.15). Del mismo modo, al usar las expresiones (3.7) y (3.11) y la aproximación a orden lineal en  $\beta^\varphi$  se puede obtener la Ecuación (3.14) de manera explícita. De esta manera hemos confirmado que obtenemos las mismas ecuaciones diferenciales para el lapso  $\alpha$  y para la variable  $A$  al usar la descomposición 3+1 y las ecuaciones de Einstein usuales.

Para obtener la ecuación del shift mediante la descomposición 3 + 1 utilizaremos las Ecuaciones (2.12) y (2.13). Primeramente, dado que la 3-métrica  $\gamma_{ij} = \text{diag}(A^2, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$  no depende del tiempo, el lado izquierdo de Ecuación (2.13), se anula idénticamente, con lo que se obtiene una expresión para las componentes  $K_{ij}$  en términos del lapso y del shift (cf. ecuación (1.57) de Ref. [7]):

$$K_{ij} = -\frac{1}{\alpha} D_{(i} \beta_{j)} = -\frac{1}{\alpha} (\beta^l \partial_l \gamma_{ij} + \gamma_{lj} \partial_i \beta^l + \gamma_{il} \partial_j \beta^l) , \quad (3.16)$$

donde los paréntesis redondos en (3.16) indican simetrización en los índices. Se pueden obtener las componentes mixtas de la curvatura extrínseca a través de  $K_i^j = \gamma^{lj} K_{il}$ , donde  $\gamma^{ij}$  es la inversa de la 3-métrica, la cual en el caso presente está dada por  $\gamma^{ij} = \text{diag}(\frac{1}{A^2}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta})$ .

Por otro lado, para poder escribir Ecuación (2.12) es conveniente utilizar la siguiente expresión obtenida en [7] [ecuación (3.8) de esa referencia]:

$$D_j K_i^j = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{\gamma} K_i^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{\gamma} K_i^\theta) \right] , \quad (3.17)$$

donde se utilizó el hecho que  $K_r^r = K_r^\theta = 0$  y  $K_\theta^r = K_\theta^\theta = 0$ , además que la traza  $K = 0$ , lo cual resulta como consecuencia de de (3.16) y de (3.1), siendo  $\gamma = A^2 r^4 \sin^2 \theta$  el determinante de la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ . De hecho, de (3.16) resulta que las únicas componentes no nulas de  $K_{ij}$  son

$$K_{r\varphi} = K_{\varphi r} = -\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2\alpha} \partial_r \beta^\varphi , \quad (3.18)$$

$$K_{\theta\varphi} = K_{\varphi\theta} = -\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2\alpha} \partial_\theta \beta^\varphi . \quad (3.19)$$

En vista de estas dos ecuaciones, y de que las otras componentes de  $K_{ij}$  son nulas, la única ecuación no nula que resulta de Ecuación (3.17) es la asociada a la componente  $\varphi$ . Dicha ecuación junto con la aproximación que hemos considerado donde no hay dependencia respecto de la coordenada angular  $\theta$  en las variables  $\alpha, A$  y  $\beta^\varphi$  (cf. Apartado 3.2) conduce al siguiente resultado:

$$D_\varphi K_\varphi^r = \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{A^2} \left[ \beta^{\varphi''} + \beta^{\varphi'} \left( \frac{4}{r} - \frac{A'}{A} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \right] . \quad (3.20)$$

Utilizando esta ecuación, y el hecho que la única ecuación no trivial de la constricción de momento (2.12) es para la componente angular  $j_\varphi = r^2 \sin^2 \theta j^\varphi$ , resulta la siguiente ecuación diferencial para el shift:

$$\beta^{\varphi''} + \beta^{\varphi'} \left( \frac{4}{r} - \frac{A'}{A} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) = 2A^2 \alpha j^\varphi . \quad (3.21)$$

El termino del lado derecho de la Ecuación (3.21) está dado por:

$$j^\varphi = -\frac{\csc^2(\theta)}{\alpha r^2} (T_{t\varphi} - \beta^\varphi T_{\varphi\varphi}) = \frac{\csc^2(\theta) k f^2}{\alpha r^2} (\omega + k) .$$

Por último, la ecuación del campo bosónico (2.2) se puede escribir recordando la siguiente expresión para el d'Alambertiano:

$$\square\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) .$$

Utilizando (3.1 y (3.3) se obtiene la siguiente ecuación para la amplitud  $f$  del campo  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{A^2} \left( \partial_{rr}^2 f + \partial_r f \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{A} + \frac{2}{r} \right) \right) + A^2 f \left( \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 + 2 \frac{\beta^\varphi k \omega}{\alpha^2} - \mu^2 \right) \\ + \partial_{\theta\theta}^2 f + \frac{1}{\tan(\theta)} \partial_\theta f - \csc^2(\theta) k^2 f = 0 . \end{aligned}$$

Dado que esta ecuación es lineal respecto de  $f$ , se puede resolver a través del método de separación de variables  $f(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , de tal forma que la ecuación de la parte radial esta igualada a la constante de separación  $l(l+1)$  y la parte angular debe esta

igualada a  $-l(l+1)$ , donde  $l$  es un número entero. En este caso del ansatz (3.3) se sigue que  $\Theta(\theta)e^{ik\varphi} \sim Y(\theta, \varphi)$  que corresponde a los armónicos esféricos. La ecuación diferencial que satisface  $\Theta(\theta)$  es la correspondiente a los polinomios asociados de Legendre:

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta[\sin\theta\partial_\theta\Theta(\theta)] - \frac{k^2\Theta(\theta)}{\sin^2\theta} \doteq -l(l+1)\Theta(\theta) . \quad (3.22)$$

Mientras que la ecuación diferencial para la parte radial  $R(r)$  está dada por:

$$\frac{r^2}{A^2} \left[ R''(r) + R'(r) \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{A} + \frac{2}{r} \right) + A^2 R(r) \left( \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 + \frac{2\beta^\varphi k\omega}{\alpha^2} - \mu^2 \right) \right] \doteq l(l+1)R(r) . \quad (3.23)$$

donde  $-l \leq k \leq l$ , o equivalentemente  $|k| \leq l$ .

Cabe resaltar que la Ecuación (3.23) es similar a la del caso con simetría esférica (2.33), excepto que la rotación cambia las expresiones debido a las contribuciones que contienen los términos con los coeficientes  $k$  y  $l(l+1)$ . Sin embargo, cuando  $l = 0 = k$ , Ecuación (3.23) se reduce a (2.33).

El sistema completo de ecuaciones diferenciales acopladas está dado por las expresiones escritas arriba para  $\alpha$  (3.6),  $A$  (3.5),  $\beta^\varphi$  (3.21),  $\Theta$  (3.22) y  $R$  (3.23).

Para obtener la cantidad conservada  $N$ , i.e. el número total de bosones, podemos escribir una ecuación diferencial para  $N$  (de manera semejante al caso con simetría esférica) partiendo de las Ecuaciones (2.5) y (2.6). Para ello se considera la componente  $t$  de la corriente conservada obteniendo:

$$j_t = -\omega R^2(r)$$

o bien con los índices arriba:

$$\begin{aligned} j^\mu &= g^{\mu\nu} j_\nu , \\ \implies j^t &= g^{t\nu} j_\nu = g^{tt} j_t + g^{t\varphi} j_\varphi , \end{aligned}$$

donde al calcular obtenemos que  $j^\varphi = kR^2(r)$ . Por lo tanto,

$$j^t = \frac{R^2}{\alpha^2} (\omega + k\beta^\varphi) . \quad (3.24)$$

De esta forma la Ecuación (2.6) se escribe en forma diferencial:

$$\frac{dN}{dr} = 4\pi \frac{A}{\alpha} r^2 R(r)^2 (\omega + k\beta^\varphi) . \quad (3.25)$$

La integral de esta ecuación diferencial desde  $r = 0$  hasta  $r = \infty$  proporciona el valor  $N$ . Nótese la contribución debida a la rotación dada por el término proporcional al número  $k$ .

Por otro lado, la ecuación diferencial para la función de masa  $m(r)$  está dada por,

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{rA'}{A^3} + \frac{m}{r} , \quad (3.26)$$

donde la masa total de la estrella de bosones en rotación corresponde a  $M = m(\infty)$ . La ecuación diferencial (3.26) es equivalente a

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{\kappa}{2} r^2 \rho , \quad (3.27)$$

donde  $\rho = (T_{tt} - 2\beta^\varphi T_{t\varphi})/\alpha^2$ , a orden lineal en  $\beta^\varphi$ .

### 3.5. Condiciones de regularidad y asintóticas

Ahora determinaremos las condiciones de regularidad para el campo bosónico en el origen  $r = 0$ . Asumiendo que la función radial y todas derivadas son acotadas en el origen, i.e.,  $|R|, |R'|, |R''| < \infty$ , al evaluar en  $r = 0$  la Ecuación (3.23), concluimos que  $R(0) = 0$ . Siguiendo con este proceso, se puede derivar una vez más la Ecuación (3.23), y dado que  $\alpha'(0), A'(0) = 0$  y  $\alpha(0), A(0) = 1$ , al evaluar en  $r = 0$  se obtiene la condición de regularidad sobre  $R'$  en el origen:

$$R'(0) \left[ 2 - l(l+1) \right] = 0 . \quad (3.28)$$

Para satisfacer (3.28) es necesario que:

$$2 = l(l+1) ,$$

pues de lo contrario,  $R'(0) = 0$  y dado que  $R(0) = 0$ , la solución del campo escalar sería trivial. En consecuencia, obtenemos que la única posibilidad es

$$l \doteq 1 . \quad (3.29)$$

resultado que es compatible con nuestro tratamiento de aproximación lenta en que sólo el modo que contribuye con el momento angular más bajo y distinto de cero se toma en cuenta [cf. Ecuación (3.49)]. Por lo tanto tomamos  $k = \pm 1$ . En particular, nos enfocamos en el caso  $k = 1$  ya que el caso  $k = -1$  es equivalente a cambiar el sentido de la rotación de la estrella. Para obtener la condición sobre  $R''(0)$  se deriva dos veces la Ecuación (3.23), y asumiendo las mismas condiciones de regularidad mencionadas arriba, se obtiene la condición  $R''(0) = 0$ . Por lo tanto, concluimos que uno de los parámetros libres que quedan es  $R'(0)$ .

Notemos que a diferencia de las condiciones de regularidad del caso con simetría esférica, donde  $R(0)$  queda libre como “condición inicial” y esto determina la configuración del campo, ahora para el escenario con rotación lenta tenemos que  $R(0) = 0$ , y la pendiente  $R'(0) \neq 0$  es nuestro parámetro libre que determina la configuración del campo bosónico en rotación.

Las condiciones de regularidad para la componente  $\beta^\varphi$  del shift, que en lo subsecuente denotamos simplemente por  $\beta$ , se obtienen de manera análoga a partir de la



ecuación (3.21). Al multiplicar esta ecuación por  $r$  y evaluar en el origen se concluye que  $\beta'(0) = 0$ , y al derivar nuevamente obtenemos para  $\beta''(0)$  la condición:

$$\beta''(0) = \frac{-2kR'(0)^2[\omega - \beta(0)k]}{5} . \quad (3.30)$$

Podemos observar que  $\beta''(0)$  depende de los parámetros  $R'(0)$  y  $\beta(0)$ , dejando como otro parámetro libre el valor del shift en el origen  $\beta(0)$ . Este último parámetro determina en gran medida el valor del momento angular de la estrella [cf. Ecuación (3.49)] y la forma de la solución con rotación.

### 3.5.1. Resumen de Ecuaciones diferenciales

El conjunto de ecuaciones diferenciales que hemos obtenido hasta ahora (con elección de unidades  $\kappa = 1$ ), es el siguiente:

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1 - A^2)}{2r} + \frac{A^2 r}{4} \left[ \frac{\omega^2 f^2}{\alpha^2} + \left( \frac{\partial_r f}{A} \right)^2 + \left( \frac{\partial_\theta f}{r} \right)^2 + \frac{\csc^2(\theta)}{r^2} (kf)^2 + \frac{2\beta^\varphi k \omega f^2}{\alpha^2} + (\mu f)^2 \right] , \quad (3.31)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{(A^2 - 1)}{2r} + \frac{A^2 r}{4} \left[ \frac{\omega^2 f^2}{\alpha^2} + \left( \frac{\partial_r f}{A} \right)^2 - \left( \frac{\partial_\theta f}{r} \right)^2 - \frac{\csc^2(\theta)}{r^2} (kf)^2 + \frac{2\beta^\varphi k \omega f^2}{\alpha^2} - (\mu f)^2 \right] , \quad (3.32)$$

$$\beta''^\varphi + \beta'^\varphi \left( \frac{4}{r} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{A} \right) = -\frac{2A^2 f^2 k}{r^2} (\omega - \beta^\varphi k) , \quad (3.33)$$

$$R'' + R' \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{A} + \frac{2}{r} \right) + A^2 R \left( \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 - \mu^2 \right) = A^2 R \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\beta^\varphi k \omega}{\alpha^2} \right] . \quad (3.34)$$

Como se obtuvo en Apartado 3.5, estas ecuaciones deben resolverse tomando los valores  $l \doteq 1 = k$ .

## 3.6. Algunos comentarios sobre la aproximación

Como ya hemos explicado, la aproximación de *rotación lenta* en una estrella de bosones consiste en considerar sólo contribuciones lineales en el shift, es decir, consideramos que  $|r\beta| \ll 1$ . Por otro lado, para llevar acabo el análisis de la solución de las ecuaciones que describen a una estrella de bosones en rotación hemos asumido una dependencia angular  $\theta$  en el campo bosónico que, en principio, influye (i.e. *backreacts*) en el espacio-tiempo. Esta aproximación es por el momento intrínsecamente inconsistente ya que si en el campo bosónico se mantiene la dependencia en la coordenada  $\theta$ , esto resulta inconsistente con el hecho de que ni el lapso  $\alpha$  ni la variable  $A$  dependen de  $\theta$ . Sin embargo, esta aproximación se puede extender y suponer que la parte angular  $\theta$  del campo es de “prueba” sobre el espacio-tiempo. En la práctica esto equivale a evaluar el campo en  $\theta = \pi/2$  (i.e. en el ecuador) y luego extrapolar la solución a todo  $\theta$ . Esta aproximación también se puede considerar como el resultado de

promediar las ecuaciones en la parte angular  $\theta$  ¿ Hasta qué punto esta aproximación es razonable y confiable ? La respuesta a esta interrogante sólo se puede responder tomando el escenario completo (no perturbativo) de una estrella de bosones en rotación [20], es decir, cuando las ecuaciones de Einstein diferenciales parciales de tipo elíptico, junto con la del campo bosónico se han resuelto numéricamente sin ninguna otra aproximación, y tomando el caso  $l = k = 1$ , para después comparar con la aproximación propuesta aquí.

En este sentido, cabe señalar que es común resolver las ecuaciones de un cierto campo en un espacio-tiempo curvo fijo sin tomar en cuenta el *backreaction* del campo en el espacio-tiempo<sup>2</sup>. En nuestro caso, esta aproximación es un caso intermedio en que parte del campo (la parte en la dependencia  $\theta$ ) es de “prueba”, mientras que el resto de las contribuciones del campo (la dependencia en las coordenadas  $t, r$  y  $\varphi$ ) sí son tomadas en cuenta en el *backreaction* sobre el espacio-tiempo (a través de la función radial  $R(r)$  y los parámetros  $\omega$  y  $k$ , asociados a la dependencia temporal y azimutal del campo bosónico).

Por otro lado, a partir de (3.22) es claro que  $\Theta(\theta) \sim \sin \theta$  cerca del eje de simetría, donde hay que recordar que estamos asumiendo que se pueden separar las variables como  $f(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Este comportamiento permite que el campo sea regular en dicho eje ( $\theta = 0, \pi$ ). Además esto se aprecia igualmente de la solución explícita de la parte  $\Theta(\theta) \sim \sin \theta$  al tomar  $l = 1$  en los armónicos esféricos.

Por último, en la aproximación tratada en este trabajo las condiciones de regularidad que se obtuvieron de la ecuación de campo dieron lugar a la condición (3.29), lo que nos limita a tomar solo el primer nivel del número  $k$ , que es justo cuando se “encienden” las variables involucradas en la rotación. Esta es una situación que era de esperarse en nuestra aproximación en virtud de lo que sucede en el caso de las estrellas compuestas por un fluido perfecto [35].

## 3.7. Ecuaciones simplificadas

Habiendo dejado claro que nuestra aproximación será “alrededor del ecuador” ya que así evitamos las inconsistencias que muestran nuestras ecuaciones al depender de  $\theta$  a través del campo, procedemos a adimensionalizar las ecuaciones presentadas en Sec. 3.5.1 . Para ello se introducen las variables adimensionales  $\hat{\mu}, \hat{r}, \hat{\beta}$  definidas de la siguiente forma:  $\hat{r} = \mu r$ ,  $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\mu}$  y  $\hat{\beta} = \frac{\beta}{\mu}$ . La forma final que toman las ecuaciones con base en las aproximaciones antes descritas es la siguiente:

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1 - A^2)}{2\hat{r}} + \frac{A^2\hat{r}}{4} \left[ \frac{\hat{\omega}^2 R^2}{\alpha^2} + \left( \frac{R'}{A} \right)^2 + \frac{(kR)^2}{\hat{r}^2} + \frac{2\hat{\beta}^\varphi k\hat{\omega}R^2}{\alpha^2} + R^2 \right], \quad (3.35)$$

<sup>2</sup>Un ejemplo concreto de esta situación y que está relacionado con el problema de esta tesis, son las llamadas *nubes bosónicas*, donde la ecuación del campo bosónico posee una solución no trivial en el exterior del fondo fijo de un agujero negro rotante de Kerr [37, 38].

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{(A^2 - 1)}{2\hat{r}} + \frac{A^2\hat{r}}{4} \left[ \frac{\hat{\omega}^2 R^2}{\alpha^2} + \left( \frac{R'}{A} \right)^2 - \frac{(kR)^2}{\hat{r}^2} + \frac{2\hat{\beta}^\varphi k\hat{\omega}R^2}{\alpha^2} - R^2 \right] , \quad (3.36)$$

$$\hat{\beta}''^\varphi + \hat{\beta}'^\varphi \left( \frac{4}{\hat{r}} - \frac{A'}{A} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) = -\frac{2A^2 R(r)^2}{\hat{r}^2} (\hat{\omega}k - \hat{\beta}^\varphi k^2) , \quad (3.37)$$

$$R'' + R' \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{A} + \frac{2}{\hat{r}} \right) + A^2 R \left( \left( \frac{\hat{\omega}}{\alpha} \right)^2 - 1 \right) = A^2 R \left[ \frac{l(l+1)}{\hat{r}^2} - \frac{2\hat{\beta}^\varphi k\hat{\omega}}{\alpha^2} \right] , \quad (3.38)$$

$$\frac{dN}{dr} = 4\pi \frac{A}{\alpha} \hat{r}^2 R^2 (\hat{\omega} + k\hat{\beta}^\varphi) , \quad (3.39)$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{rA'}{A^2 A} + \frac{m}{r} . \quad (3.40)$$

Además vale la pena resumir las condiciones de regularidad más relevantes:

$$R(0) = 0 , \quad (3.41)$$

$$R'(0) = (\text{parametro libre}) , \quad (3.42)$$

$$R''(0) = 0 , \quad (3.43)$$

$$\beta(0) = (\text{parametro libre}) , \quad (3.44)$$

$$\beta'(0) = 0 , \quad (3.45)$$

$$\beta''(0) = \frac{-2kR'(0)^2 [\omega - \beta(0)k]}{5} . \quad (3.46)$$

En particular estas condiciones permiten caracterizar la solución del campo escalar  $\psi$  y serán utilizadas en la integración numérica.

Resulta evidente que al “apagar” todas las variables correspondientes a la rotación, tales como  $\beta^\varphi = 0, k = 0, l = 0$ , el sistema (3.35)–(3.40) se reduce a (2.34)–(2.36) junto con las ecuaciones diferenciales para  $N$  y  $m$  en simetría esférica. En tal límite, las condiciones de regularidad que deben considerarse son las asociadas al escenario con simetría esférica discutidas en el Capítulo 2.

Adicionalmente a las condiciones de regularidad en el origen y en el eje de simetría, debemos imponer condiciones asintóticas. En este caso (como en el de simetría esférica) pedimos que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano. Para  $r$  suficientemente grande el comportamiento asintótico para la ecuación del shift se traduce en:

$$\beta'' + \beta' \frac{4}{r} = 0 . \quad (3.47)$$

A partir de esta ecuación se concluye que el comportamiento asintótico del shift es  $\beta \sim \frac{C}{r^3} + \beta_\infty$ , donde la constante  $\beta_\infty$  se toma como nula para que asintóticamente la métrica se reduzca a la de Minkowski. En efecto, sustituyendo  $\beta = \frac{C}{r^3}$  en (3.47) tenemos que esa ecuación se satisface idénticamente:

$$\frac{12C}{r^5} - \frac{12C}{r^5} = 0 . \quad (3.48)$$

En este caso, la constante  $C$  está relacionada con el momento angular total  $J$  de la estrella, dado por la ecuación (3.49) presentada más adelante, tal que  $C = 2J$  (cf. [35]).

### 3.8. Comparación con la literatura

En nuestra revisión sobre las diferentes aproximaciones de “rotación lenta” o enfoques perturbativos de estrellas de bosones, vale la pena citar de manera notoria el artículo de Kobayahsi, Kasai & Futamase [36], donde se cuestionan si es posible que exista un tipo de aproximación semejante, que es justamente el objetivo de este trabajo de tesis. La respuesta que ofrecen esos autores es que *a priori* dicha aproximación *no* puede existir. Esa conclusión errónea contrasta con la que hemos expuesto en el presente trabajo, y se debe a que los autores de [36] no tomaron en cuenta la posible dependencia del campo bosónico en la coordenada angular  $\varphi$  dada por Ecuación (3.3), sino que sólo usan un ansatz como en simetría esférica (2.8). Debido a esto, el TEM que consideran esos autores no contiene una contribución en la componente  $T^t_\varphi$ , y por consiguiente, el término fuente  $j^\varphi$  de la ecuación para el shift se anula. En consecuencia, esos autores concluyen que bajo la condición de un espacio-tiempo asintóticamente plano, la única posibilidad es que  $\beta^\varphi \equiv 0$ , y por lo tanto, que el campo bosónico no induce rotación en el espacio-tiempo. Adicionalmente, y debido a estos errores conceptuales, en dicho trabajo no analizan de manera adecuada las condiciones de regularidad sobre la parte real  $R(r)$  del campo bosónico  $\psi$ . Por lo tanto, no se dan cuenta que la rotación produce un cambio de topología en la configuración del campo [20], y que dicho cambio no es continuo, en el sentido de que los números  $l, k$  toman valores discretos. En efecto, dado que  $R(0) = 0$  y  $R'(0) = \text{const.}$ , la configuración de las posibles soluciones del campo no tienen topología esférica, sino de tipo toroidales [20]. Esto está en acuerdo con lo que se obtiene de manera no perturbativa [20], donde también se adopta el ansatz (3.3), el cual permite que el TEM satisfaga las simetrías impuestas sobre el espacio-tiempo (estacionaridad y axisimetría) aunque el campo mismo no las satisfaga. Además, dado que la rotación está controlada por el número  $k$ , al tomar  $k = 0$ , la única solución posible bajo las mismas condiciones de regularidad obtenidas para el caso axisimétrico es la solución trivial  $R(r) \equiv 0$ . Por consiguiente, las soluciones esféricamente simétricas no se conectan de manera continua con las soluciones axisimétricas. Sólo en el límite en que  $R'(0) \gg 1$  (usando variables adimensionales; ver Fig.4.1) es que la configuración toroidal se “estrecha” de manera que en la región asintótica dicha configuración parece como la de una “dona cuasi esférica” (i.e. una dona en que el “hoyo” se hace muy estrecho, dando la impresión de que vista desde muy lejos, la configuración del campo parece una 2-esfera—cf. Figs. 8 y 9 de Ref. [20]— y Fig.3.1). En otras palabras, a medida que  $R'(0) \gg 1$  (cf. Fig.4.1), la función  $R(r)$  cerca del origen aumenta abruptamente hasta alcanzar su máximo muy cerca de  $r = 0$  y luego decae, pareciéndose cada vez más a una configuración con simetría esférica donde el máximo de  $R(r)$  está en  $r = 0$  y luego decae monótonamente (cf. paneles superiores de las Figs. 2.1 y 2.2). En cambio, cuando  $R'(0) \ll 1$ , la densidad de energía asociada al campo bosónico es baja cerca de  $r = 0$  y su máximo lo alcanza “lejos” del origen (cf. Figs.4.1, 4.3 y 4.13). En este caso, las configuraciones se asemejan más a un toro que a una esfera. Algunos de estos aspectos se retoman en el próximo capítulo, donde se presentan los resultados de la integración numérica de las ecuaciones diferenciales de la sección anterior.

Como consecuencia del análisis presentado en [36], muchos estudios posteriores dieron por hecho que este tipo de aproximaciones no eran físicamente posibles [19, 21, 24, 39–41], e inclusive se llegó a cuestionar la existencia de soluciones de estrellas de bosones en rotación a nivel no perturbativo [41]. Por ejemplo, en [39, 40] los autores comentan que una aproximación de tal índole sólo es posible si se consideran bosones y fermiones simultáneamente (cf. [24]).

Por otro lado, Yoshida & Eriguchi [41] afirman: “*las estrellas de bosones estacionarias axisimétricas no pueden existir en lo que respecta a la rotaciones lenta debido a la naturaleza básica de los campos escalares. Los campos vectoriales construidos a partir de campos escalares son vectores polares. Tales vectores no pueden acoplarse con el momento angular del espacio-tiempo, es decir, con el arrastre de marco inercial. Por lo tanto, las estrellas de bosones que giran rápidamente no pueden existir si únicamente se consideran campos escalares libres*” [41]. Sin embargo, algunos meses después estos mismos autores analizan el caso con rotación de manera no perturbativa y para el caso de un campo escalar libre, i.e., sin autointeracción, y presumiblemente en contradicción con la afirmación anteriormente mencionada, encuentran soluciones bien comportadas y sin inconsistencias [42].

Ryan [19] propone una aproximación al tratamiento de estrellas de bosones en rotación el cual es similar en espíritu al análisis que se presenta en esta tesis, aunque es en ciertos aspectos aún más simplificado. Ese análisis consiste en tomar sólo la dependencia en  $t$  y  $\varphi$  del campo bosónico con la dependencia armónica como en (3.3). El autor muestra que bajo tales circunstancias el TEM del campo bosónico se reduce al de un fluido perfecto donde la 4-velocidad del fluido tiene únicamente componentes en las direcciones temporal y angular  $\varphi$  proporcionales a la eigenfrecuencia  $\omega$  y al número  $k$ , respectivamente.

Quizás el primer intento de analizar de manera no perturbativa modelos de estrellas de bosones en rotación es el realizado por Schunck & Mielke [43–45], el cual es posteriormente generalizado por los mismos autores para efectuar estudios más detallados en escenarios de relevancia astrofísica [43]. Estos autores encontraron por primera vez la correlación que existe entre el momento angular de la estrella de bosones en rotación con el número total conservado de partículas:

$$J = \int T_{\varphi}^t \sqrt{-g} d^3x = kN. \quad (3.49)$$

Esta relación muestra que el momento angular total de la estrella se anula cuando  $k = 0$ , y por lo tanto, en tal caso no existe rotación.

A raíz de las investigaciones de Schunck & Mielke, diversos autores confirmaron que los modelos de estrellas de bosones en rotación pueden construirse de manera no perturbativa. Entre estos autores se encuentran los mismos Yoshida & Eriguchi [42], quienes generalizaron su primer análisis [41] criticando el estudio de Schunck & Mielke en dos aspectos: a) consideran que esos autores analizan solamente configuraciones que corresponden a un régimen de “gravedad débil” (muy cercanas a un escenario newtoniano); b) especulan que sus soluciones no son lo suficientemente regulares en el eje de simetría. No obstante, previamente Schunck & Mielke [43], habían ya criticado

el artículo [41] en relación a su afirmación de que no era posible encontrar estrellas de bosones en rotación aún en el régimen no perturbativo y sin autointeracción.

Estudios más recientes y precisos sobre estrellas de bosones en rotación es el realizado en Ref. [20] utilizando métodos espectrales, tanto para el caso de un campo bosónico libre (i.e. masivo), como también para el caso con autointeracción como la considerada por nosotros en el Sec.2.3. En dicho trabajo los autores encuentran estrellas de bosones con ergoregiones (regiones donde la componente  $g_{tt} \geq 0$  de la métrica) y también enfatizan que la principal diferencia entre las estrellas de bosones con simetría esférica (i.e. sin rotación) y aquéllas con rotación es el cambio de topología del campo (cf. Figura 3.1). En particular, las condiciones de regularidad en el campo  $\psi$  implican que éste debe anularse en el eje de simetría, es decir, en los “polos” correspondientes a  $\theta = 0, \pi$ . En consecuencia, cerca de los polos la parte real  $f(r, \theta)$  del campo se comporta como  $f \sim (r \sin \theta)^{|k|}$ , y por consiguiente para  $k \neq 0$  se garantiza la regularidad del campo en el eje. En nuestro caso,  $l = k = 1$  corresponde a que la parte angular es proporcional a  $\sin \theta$ , y este comportamiento está asociado al armónico esférico  $Y_{11}$ .

Otro artículo donde afirman erróneamente que no existe una aproximación lenta en estrellas de bosones con base en [36], es la Ref. [21], en donde los autores especulan que estrellas de neutrones superfuidas en la aproximación de rotación lenta no pueden existir en ausencia de “vorticidad”, y que algo similar se manifiesta en las estrellas de bosones analizadas en Ref. [36].

Basados también en Ref. [36], otros autores especulan que agujeros negros rotantes con pelo escalar no pueden existir en la aproximación de rotación lenta [46]. Bajo la misma tónica, los autores [26, 27] afirman que la aproximación de rotación lenta en estrellas de bosones no es posible, citando a [36].

Por último, en Ref. [29] y en la tesis de Helfer [28], haciendo referencia a [36], los autores indican una vez más que la aproximación lenta en estrellas de bosones no es posible. En particular, Helfer enfatiza que las estrellas de bosones no existen en un régimen de rotación “arbitrariamente” lenta, y que de manera contraintuitiva, sí existen en el régimen de rotación rápida en razón de la brecha que existe entre los escenarios con simetría esférica y el de rotación debido a la “cuantización” del momento angular. En particular, hace referencia a la brecha entre los casos con  $k = 0$  y  $k = 1$ .

Esta revisión bibliográfica muestra que diversos autores han tomado las hipótesis equivocadas de Ref. [36] para justificar la ausencia de la mencionada aproximación de rotación lenta en estrellas de bosones. No obstante, como hemos analizado en esta tesis, una aproximación de esta índole no sólo es posible, sino que puede compararse con métodos no perturbativos [20] para evaluar su precisión. Por razones de tiempo, esta comparación queda fuera de los alcances de este trabajo y se deja para un estudio futuro.

En la próxima sección se presentan los resultados basados en el método aproximado que hemos explicado en las secciones anteriores y principalmente, basados en la solución numérica de las ecuaciones diferenciales presentadas en Sec. 3.7.

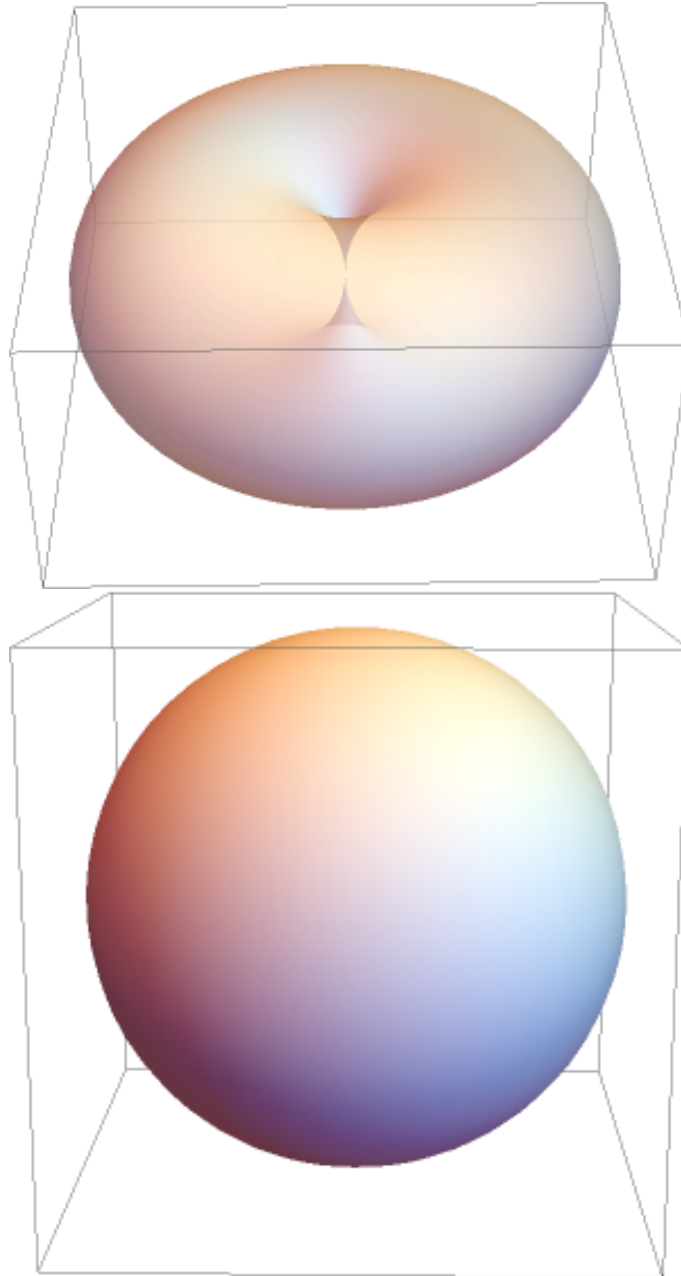


Figura 3.1: Diagramas esquemáticos de las topologías de las configuración del campo bosónico en rotación (panel superior) y estática (panel inferior). (contornos de  $\psi^*\psi = \text{const}$ ).

## 4 Resultados Numéricos (rotación lenta)

Las ecuaciones diferenciales que se obtuvieron en Sec.3.7 se resolvieron numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden para ODE's, que fue el mismo método empleado para analizar el caso con simetría esférica del Capítulo 2. Tomando como base el primer código desarrollado en ese primer escenario se agregó la ecuación asociada al shift y se añadieron los términos correspondientes a la rotación al resto de las ecuaciones (ecuaciones para el lapso  $\alpha$ , la variable  $A$ , así como la ecuación del campo bosónico). Adicionalmente, se tomaron en cuenta las nuevas condiciones de regularidad en el origen y eje de simetría para el campo bosónico. Para los resultados numéricos que se presentan a continuación se usó primero el valor central del shift  $\beta(0) = 0.05$  (posteriormente el valor  $\beta(0) = 0.5$ ) y se varió el valor de la derivada de la parte radial del campo bosónico  $R'(0)$ , el cual es el otro parámetro libre del sistema de ecuaciones. Para ello se consideraron valores de  $R'(0)$  en el rango  $(0, \frac{\pi}{2})$  cada  $5^\circ$  (grados), usando que  $p = \tan(5n)$  donde  $n \in 1, \dots, 17$ , ya que nos interesa que esta pendiente sea menor a  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ ). De esta manera se barrió un rango adecuado de valores para  $R'(0)$  aproximándonos lo suficiente al valor con la pendiente máxima que es  $90^\circ$ .

La Figura 4.1, muestra las distintas soluciones numéricas de la parte radial  $R(r)$  del campo bosónico para las distintas condiciones de regularidad  $R'(0)$  que se consideraron. Nótese la escala **logarítmica** en el eje X para poder apreciar mejor el valor del campo tanto cerca del origen  $r = 0$  como para  $r \rightarrow \infty$ . De esta figura se puede apreciar que a medida que  $R'(0)$  aumenta, el máximo de la configuración se pega al origen  $r = 0$ , y en consecuencia para valores  $R'(0) \gg 1$  la función  $R(0)$  crece abruptamente y luego decae. Tales configuraciones tienden, por consiguiente, a parecerse cada vez más a las del caso con simetría esférica, en donde el máximo de  $R$  está en el origen, y luego esta función decae monótonamente a cero. En cambio, en el otro extremo, cuando  $R'(0) \ll 1$ , el máximo de  $R(r)$  se aleja del centro de la estrella y, por consiguiente, el campo bosónico se extiende considerablemente más que en la situación en que  $R'(0) \gg 1$ . En tales circunstancias, la configuración toroidal del campo se vuelve cada vez más evidente (cf. Figuras 8 y 9 de Ref. [20]). Dado que la densidad  $\rho$  del campo posee contribuciones de  $R'^2$  y  $R^2$  (cf. Ecuación 3.27 y la expresión de la densidad  $\rho$  que aparece debajo de esa ecuación) entonces (en el origen  $r = 0$ )  $\rho(0)$  crece con el valor de  $R'(0)$ . De manera que cuando  $R'(0) \gg 1$  el máximo de la densidad se obtiene en una región muy cercana al origen, como sucede con las estrellas



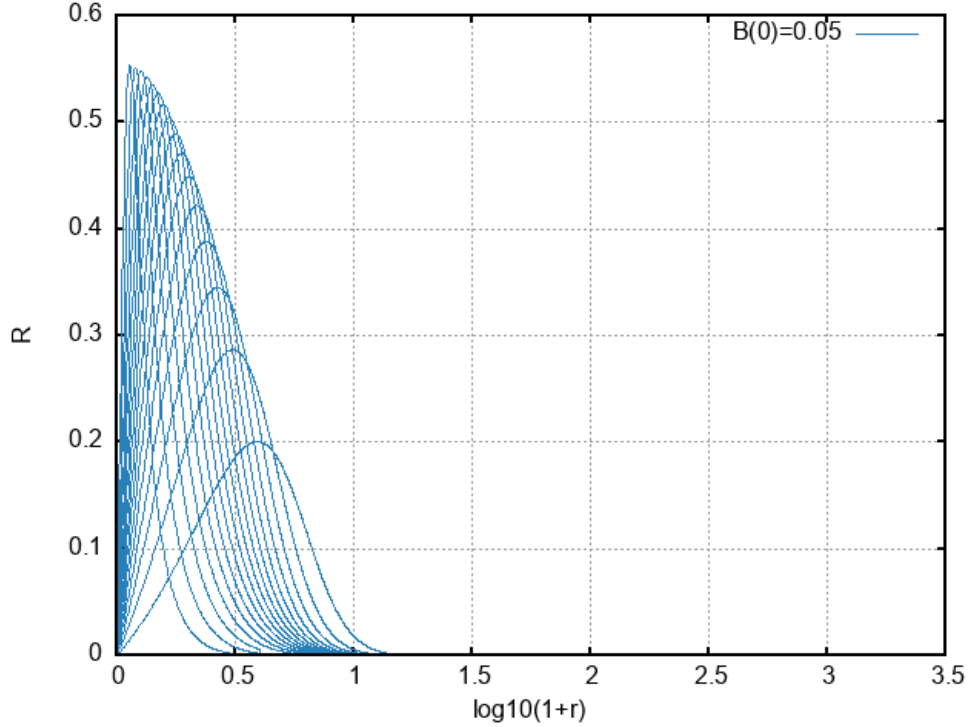


Figura 4.1: Parte radial  $R$  del campo bosónico calculada con  $\beta(0) = 0.05\mu$  (para diferentes valores  $R'(0)$ ) en función de la coordenada radial  $r$  (en unidades de  $1/\mu$ ). Nótese las condiciones de regularidad en el origen ( $R(0) = 0$ ) y asíntoticas  $R \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

de bosones con simetría esférica. En cambio, en el otro extremo, cuando  $R'(0) \ll 1$  la densidad tiene un mínimo local en el origen, crece cerca de éste y se vuelve máxima en el máximo de  $R(r)$  y finalmente decrece de manera similar a como lo hace  $R(r)$  (ver Figuras 4.3 y 4.13).

Como acabamos de enfatizar, las ecuaciones para la función radial  $A$  y el lapso  $\alpha$  tienen términos extras debido a que se agregó el efecto de rotación, pero esto no afecta el comportamiento asíntotico de ambas funciones (ver Fig. 4.2).

En cuanto, al shift,  $\beta(r)$ , si bien inicialmente se fijó el valor en el origen  $\beta(0) = 0.05$  (en unidades de  $\mu$  y para simplificar la notación se ha eliminado el “gorro”), este valor central no garantiza que su valor asíntotico se anule. De hecho, resulta que para cada valor de  $R'(0)$  existe un valor asíntotico del shift  $\beta(\infty) = \beta_\infty \neq 0$ . Esto se debe a que en realidad el comportamiento asíntotico del shift es  $\beta \sim C/r^3 + \beta_\infty$ , (como mencionamos al final de Sec.3.7). Con el propósito de que el shift se anule asíntoticamente y la métrica se reduzca a la del espacio-tiempo de Minkowski, al término de la integración numérica se ha “renormalizado” o redefinido el shift  $\beta(r)$  de la siguiente manera  $\beta_{\text{ren}}(r) = \beta(r) - \beta_\infty$ . La Figura 4.4 muestra el valor del shift renormalizado  $\beta_{\text{ren}}(r)$  (en la figura se ha eliminado la etiqueta ‘ren’), el cual tiene como consecuencia que  $\beta_{\text{ren}}(r)$  adquiera el siguiente valor en el origen,  $\beta_{\text{ren}}(0) = \beta(0) - \beta_\infty$ , el cual cambia para cada valor  $R'(0)$ , aún si  $\beta(0)$  está fijo. En consecuencia, se observa de Figura 4.4, que al aumentar  $R'(0)$  se incrementa el valor central  $\beta_{\text{ren}}(0)$ , lo cual produce un aumento del fenómeno de *arrastre* en el espacio-tiempo debido a

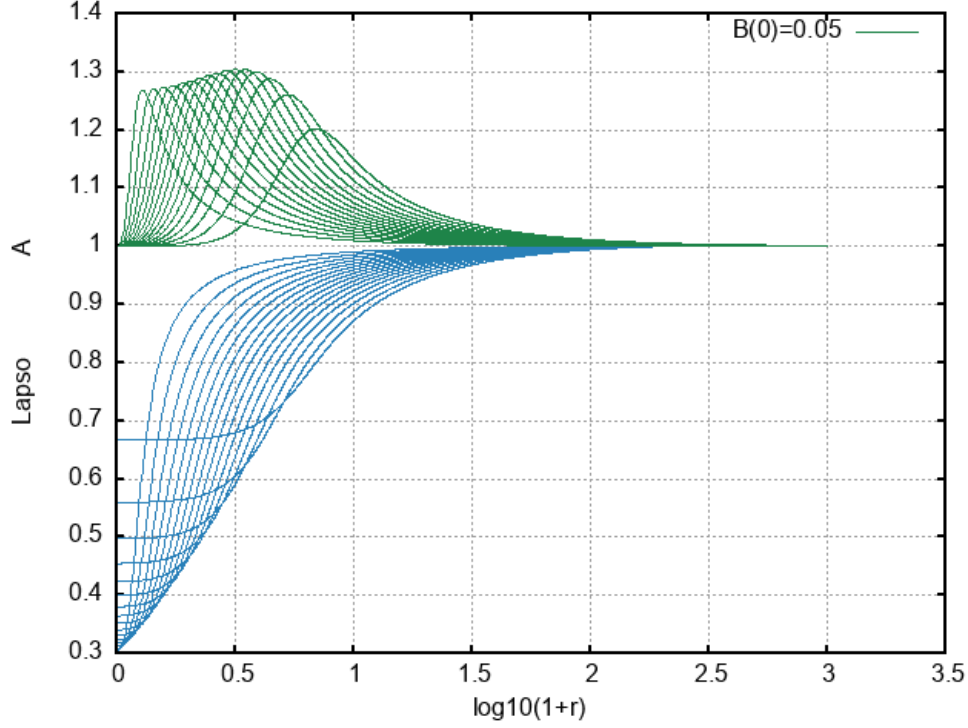


Figura 4.2: Lapso  $\alpha$  (líneas en azul) y función radial  $A$  (líneas en verde) asociados a las soluciones de la Figura 4.1.

su efecto en la métrica [18] y en el momento angular  $J$ .

En lo subsecuente eliminamos la etiqueta ‘ren’ y asumimos que  $\beta$  es el shift (renormalizado) definido de manera que  $\beta_{\text{ren}}(\infty) = 0$ .

De acuerdo al análisis que se realizó en la sección anterior, el comportamiento asintótico del shift (renormalizado) debe ser de la forma  $\beta \sim \frac{C}{r^3}$ . En consecuencia es evidente que  $\beta' \sim \frac{\text{const}}{r^4}$ . La Figura 4.5 muestra la cantidad  $r^4\beta'(r)$  donde se aprecia que en efecto ésta posee el comportamiento asintótico esperado  $r^4\beta'(r) \sim \text{const} = -6J$ .

A lo largo de nuestro análisis hemos asumido que el shift  $\beta$  es *pequeño*. Más específicamente, nos referimos a que la magnitud del shift  $\beta_i\beta^i = \gamma_{ij}\beta^i\beta^j = \beta^2 r^2 \sin^2 \theta$  es pequeña comparada con el lapso  $\alpha$ . Para tener un punto de comparación debemos tomar la componente  $-g_{tt} = \alpha^2 - \beta^2 r^2 \sin^2 \theta$  de la métrica (3.2) y verificar si en efecto la contribución del shift en este término es pequeña para así constatar a posteriori la consistencia de nuestras aproximaciones. Es decir, debemos checar si se cumple la siguiente condición:

$$\beta_i\beta^i|_{\theta=\pi/2} = r^2\beta^2 \sin^2 \theta|_{\theta=\pi/2} \ll \alpha^2 . \quad (4.1)$$

Es de esperar que la condición (4.1) dependa del valor que se escoge para  $\beta(0)$ , así como de la contribución del campo escalar. Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran la cantidad  $r^2\beta^2/\alpha^2$  para las soluciones numéricas encontradas, donde se aprecia la forma en que esta cantidad depende de los valores de  $\beta(0)$  y de los diferentes valores de  $R'(0)$ .

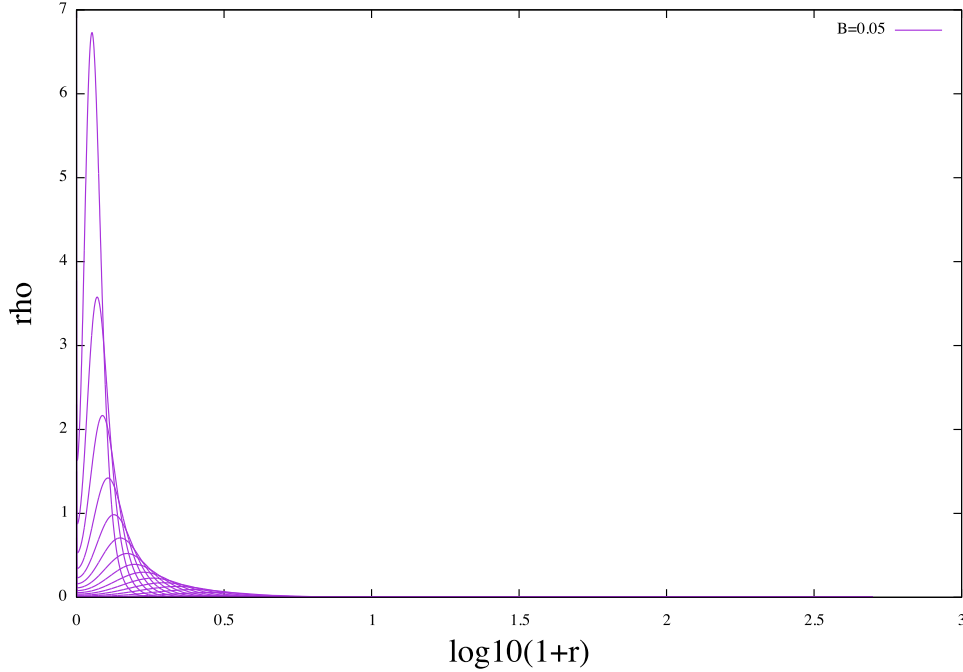


Figura 4.3: Densidad de energía  $\rho$  como función de  $r$  asociada a las soluciones de las Figuras 4.1, 4.2 y 4.4. Nótese que el máximo de la densidad no se alcanza en el centro de la estrella como sucede en el caso de las estrellas de bosones sin rotación.

Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran que existe una región cerca del centro de la estrella y también en la zona asintótica donde la condición (4.1) se cumple. Sin embargo, existe una zona intermedia de la estrella en donde esa condición no se cumple cuando  $\beta(0)$  no es lo suficientemente pequeña. En particular, se observa un aumento drástico cuando tomamos  $\beta(0) = 0.5$  en relación al valor  $\beta(0) = 0.05$  (cf. Figs. 4.4 y 4.11). Se puede observar que la aproximación funciona mejor para  $\beta(0)$  y  $R'(0)$  pequeños. Por lo tanto, las configuraciones en que (4.1) se cumple pueden considerarse como las más confiables dentro de nuestra aproximación. A este respecto cabe señalar que cuando la rotación es *rápida*, el shift puede ser tan grande como para que en alguna región de la estrella  $r^2\beta^2 \sin^2\theta \geq \alpha^2$  [20], i.e.,  $g_{tt} \geq 0$ , conocida como la *ergoregion* (donde ocurre la igualdad se denomina la *ergoesfera*) [18].

Por último, para obtener el número total de partículas del campo bosónico  $N$ , así como la masa total  $M$ , usamos respectivamente las ecuaciones (3.39) y (3.40). Se obtiene un valor para cada condición  $R'(0)$  con un  $\beta(0)$  dado (el valor central del shift no renormalizado). La Figura 4.8 muestra los diferentes valores de estas cantidades globales en función de  $R'(0)$ .

Las figuras (4.9)–(4.12) muestran las soluciones numéricas para otro valor  $\beta(0) = 0.5$  (el valor central del shift no renormalizado) con el objetivo de comparar su efecto respecto de las soluciones con el valor central  $\beta(0) = 0.05$  que se tomó antes, y barriendo nuevamente el valor  $R'(0)$  en el mismo rango que el descrito anteriormente. En esas figuras se aprecia un comportamiento cualitativo similar al caso  $\beta(0) =$

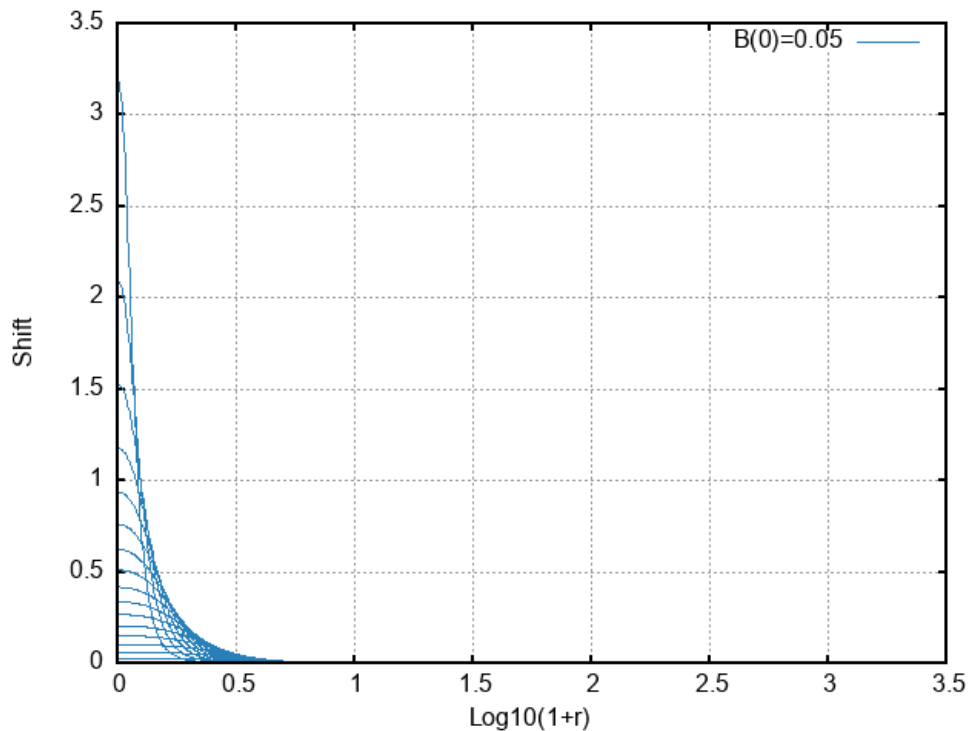


Figura 4.4: Shift  $\beta(r)$  (en unidades de  $\mu$ ) asociado a las soluciones de Figura 4.1, en donde se ha renormalizado su valor para que asintóticamente se anule.

0.05. Cuantitativamente existen pequeñas diferencias, tales como el aumento en la amplitud de  $R(r)$  (el máximo de la función) para ciertos valores de  $R'(0)$  relativamente bajos, mientras que dicha amplitud parece decrecer cuando  $R'(0) \gg 1$ . Este tipo de comportamiento, así como un análisis más detallado de las soluciones para otros valores de  $\beta(0)$  requieren de un mayor escrutinio que se deja para un estudio futuro. De igual manera, una evaluación más objetiva (cuantitativa) de la validez de nuestras aproximaciones requiere comparar nuestros resultados con los correspondientes de un escenario no perturbativo [20], el cual considera todos los efectos no lineales debidos a la rotación y al shift.

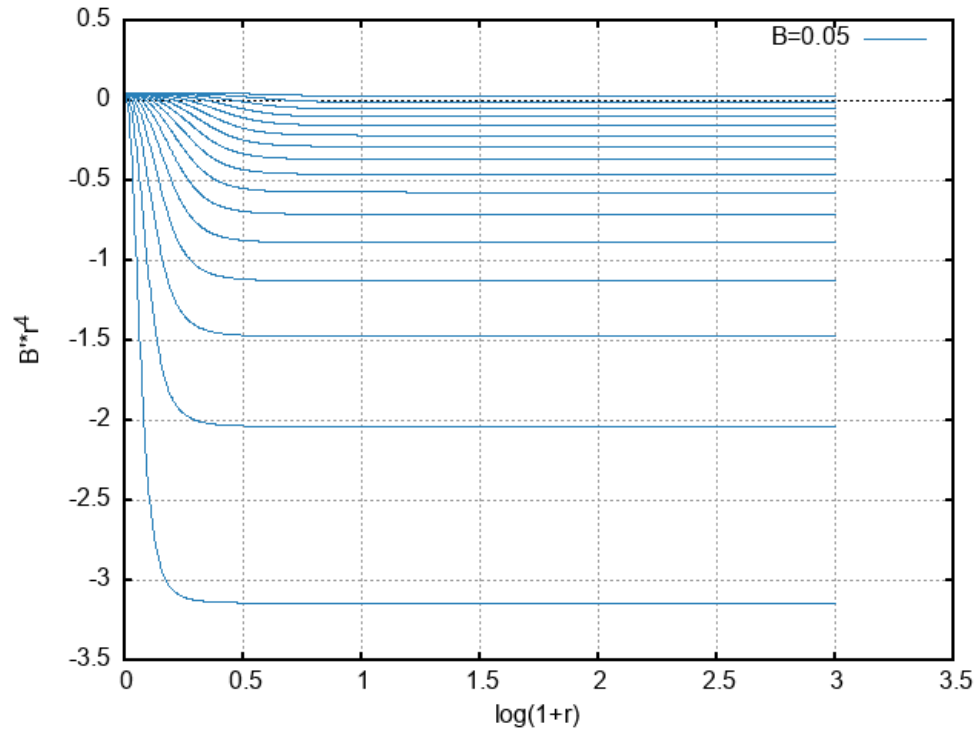


Figura 4.5:  $\beta'r^4$  asociado a las soluciones de Figura 4.1.

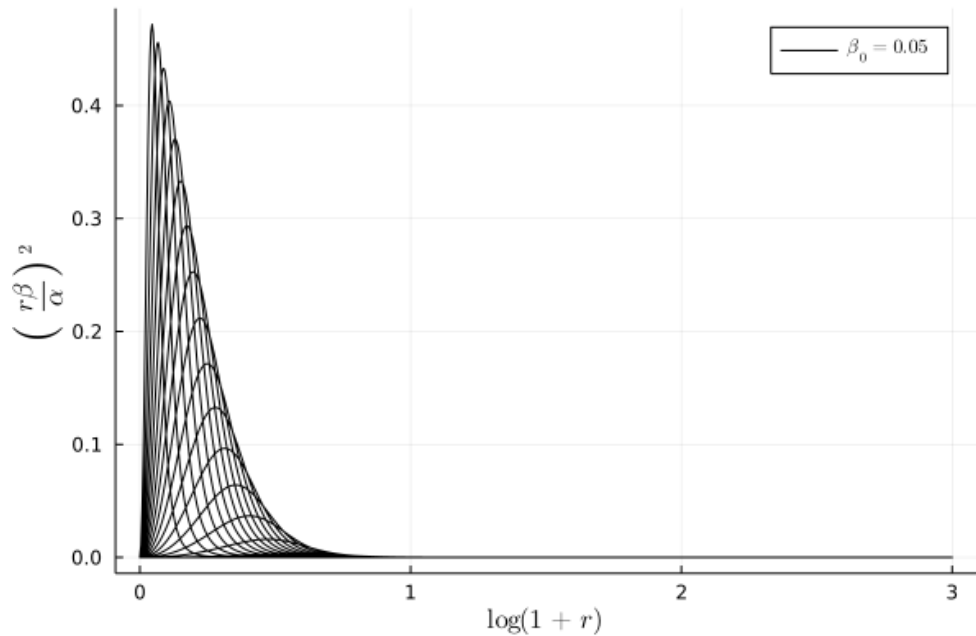


Figura 4.6: Comportamiento de la función  $r^2\beta^2/\alpha^2$  versus la coordenada  $r$  (usando una variable logarítmica). Cuando  $r^2\beta^2/\alpha^2$  es relativamente pequeño (comparado con la unidad) los resultados numéricos son consistentes con las hipótesis de la aproximación de *rotación lenta*.

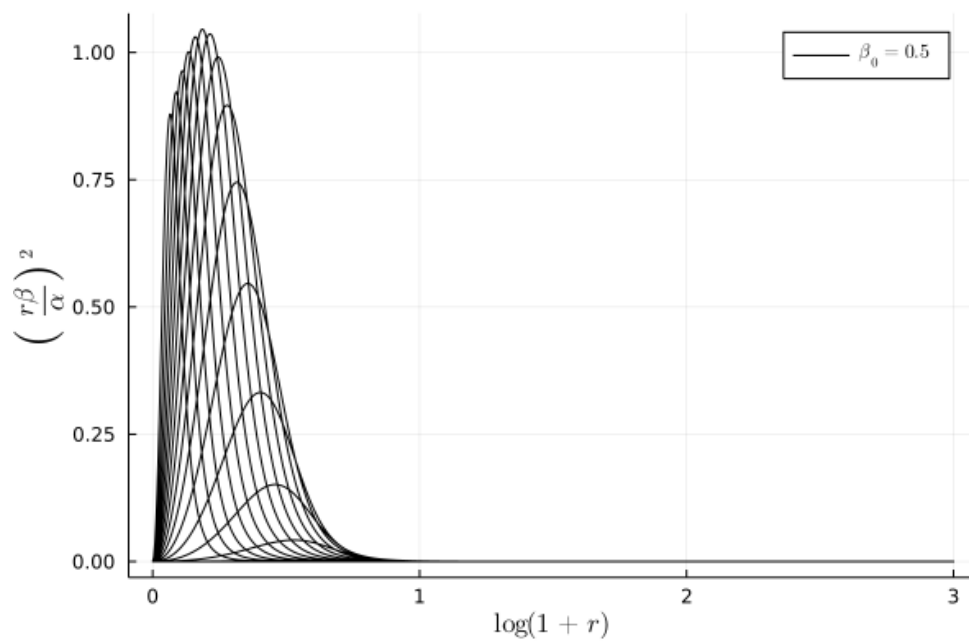


Figura 4.7: Similar a la Fig. 4.6, pero tomando  $\beta(0) = 0.5$

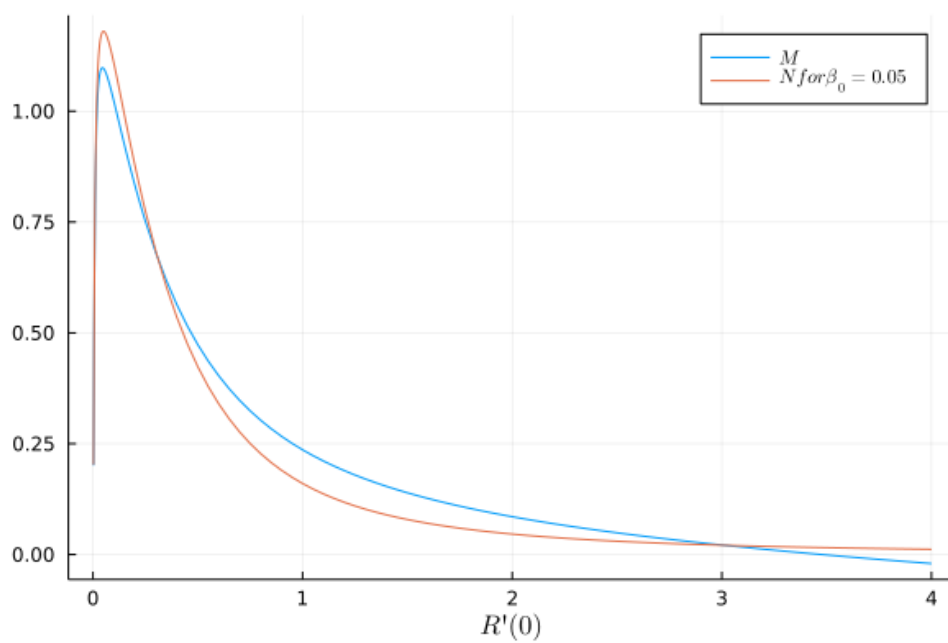


Figura 4.8: Masa total  $M$  (línea en azul) y número total de bosones  $N$  (línea en rojo) en función de valor central  $R'(0)$  con la condición inicial  $\beta(0) = 0.05$ .

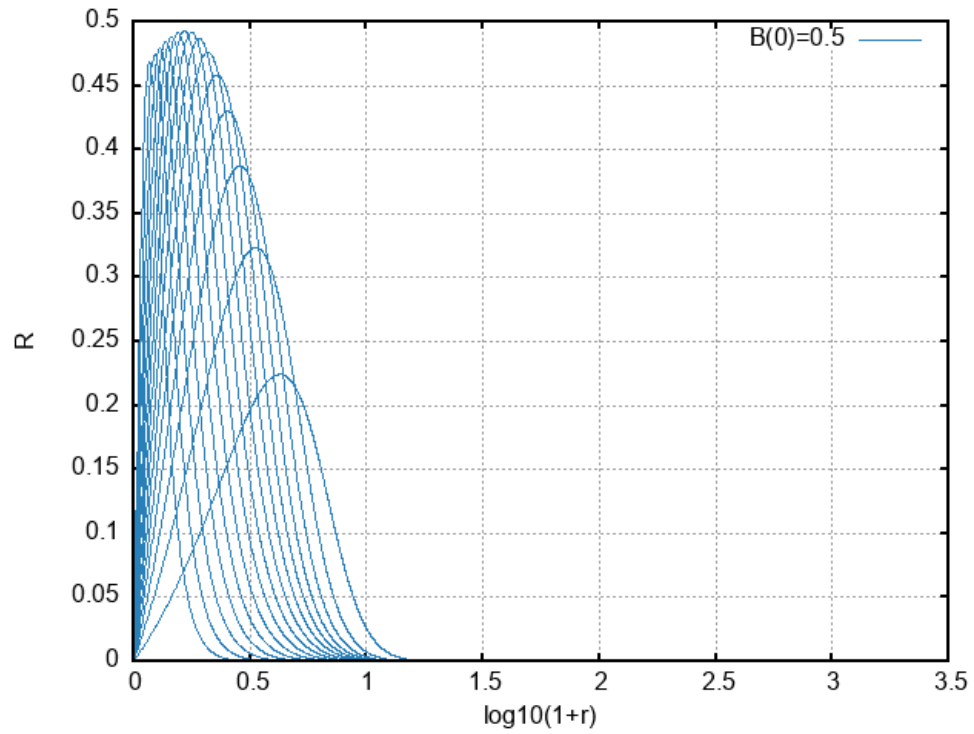


Figura 4.9: Parte radial  $R$  del campo bosónico calculada con  $\beta(0) = 0.5$  (para diferentes valores de la pendiente en el origen) en función de la coordenada radial  $r$  (en unidades de  $1/\mu$ ).

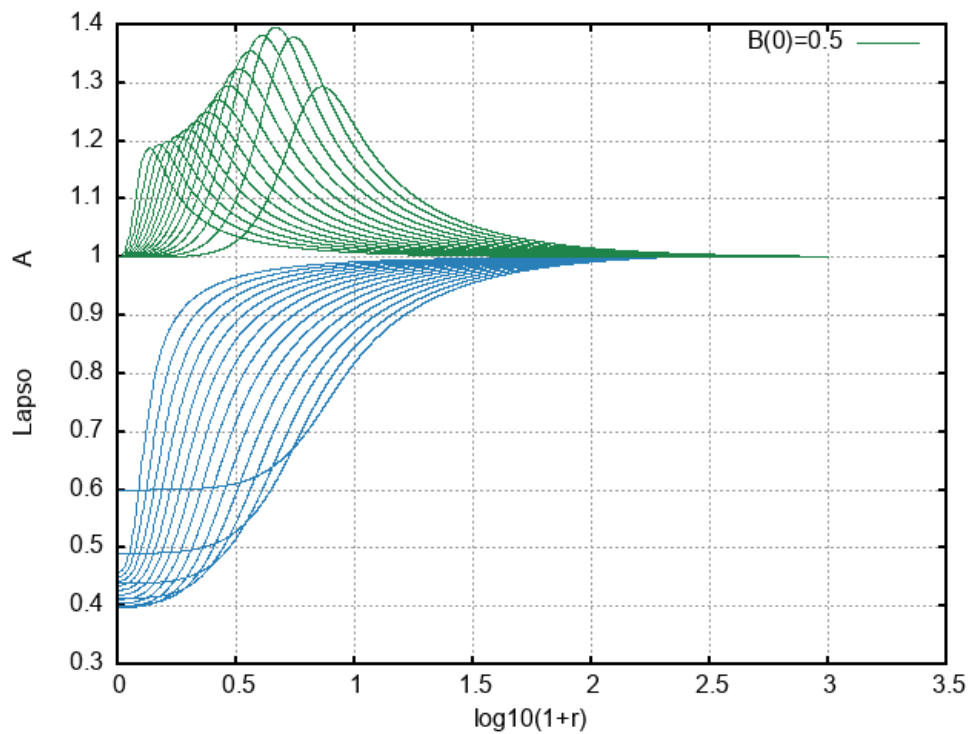


Figura 4.10: Lapso  $\alpha$  (líneas en azul) y función radial  $A$  (líneas en verde) asociados a las soluciones de la Figura 4.9.

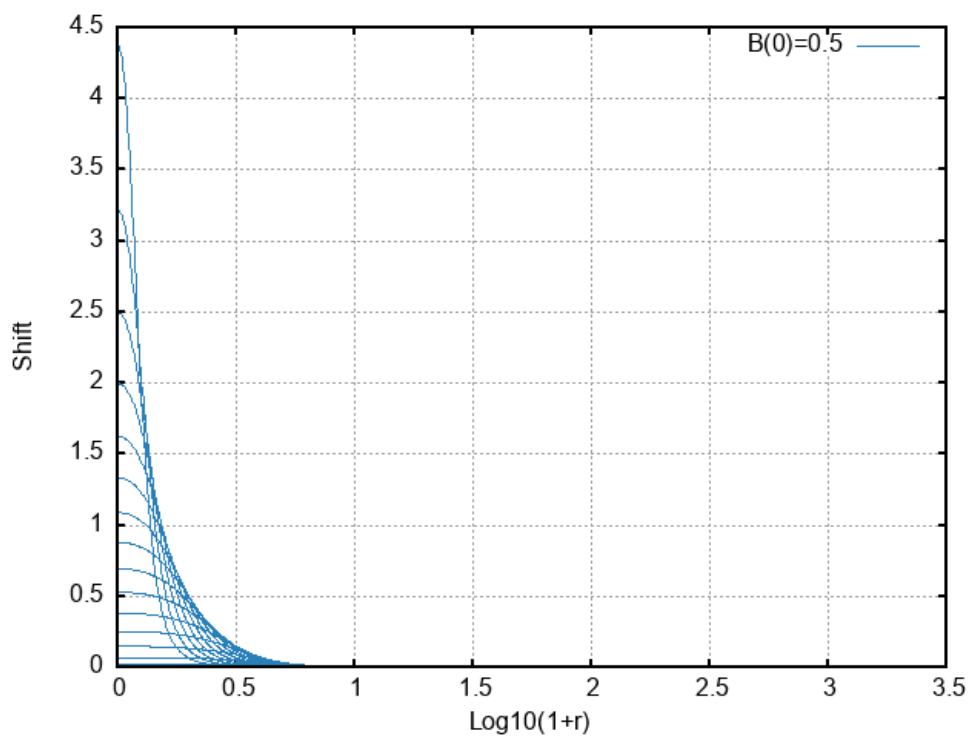


Figura 4.11: Shift  $\beta(r)$  (en unidades de  $\mu$ ) asociado a las soluciones de Figura 4.9, en donde se ha renormalizado su valor para que asintóticamente se anule .



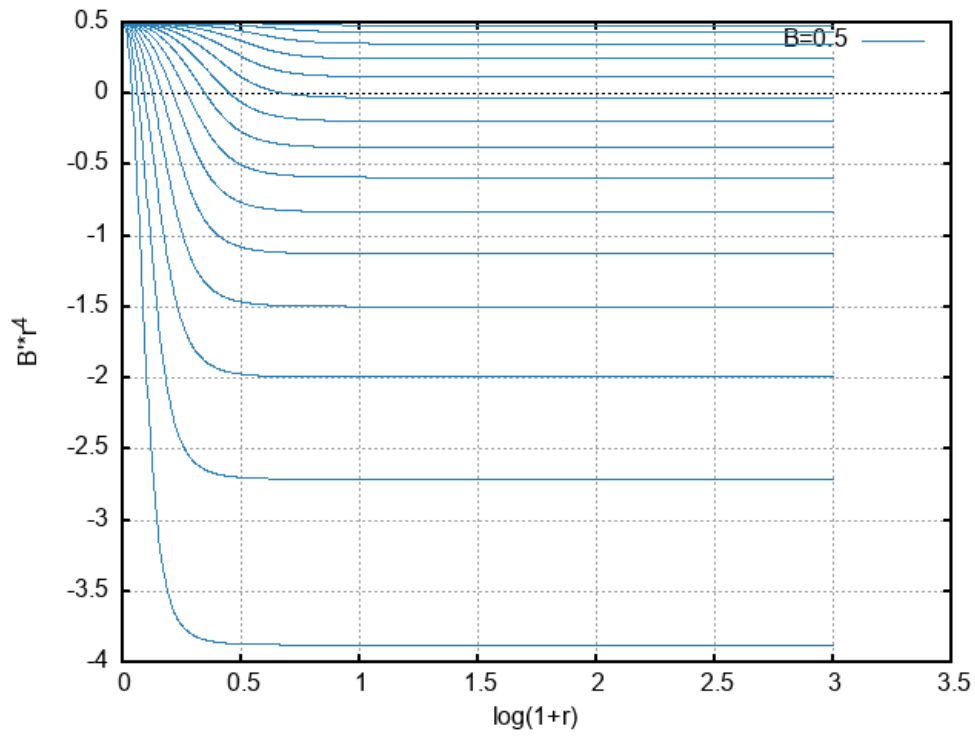


Figura 4.12:  $\beta' r^4$  asociado a las soluciones de Figura 4.9.

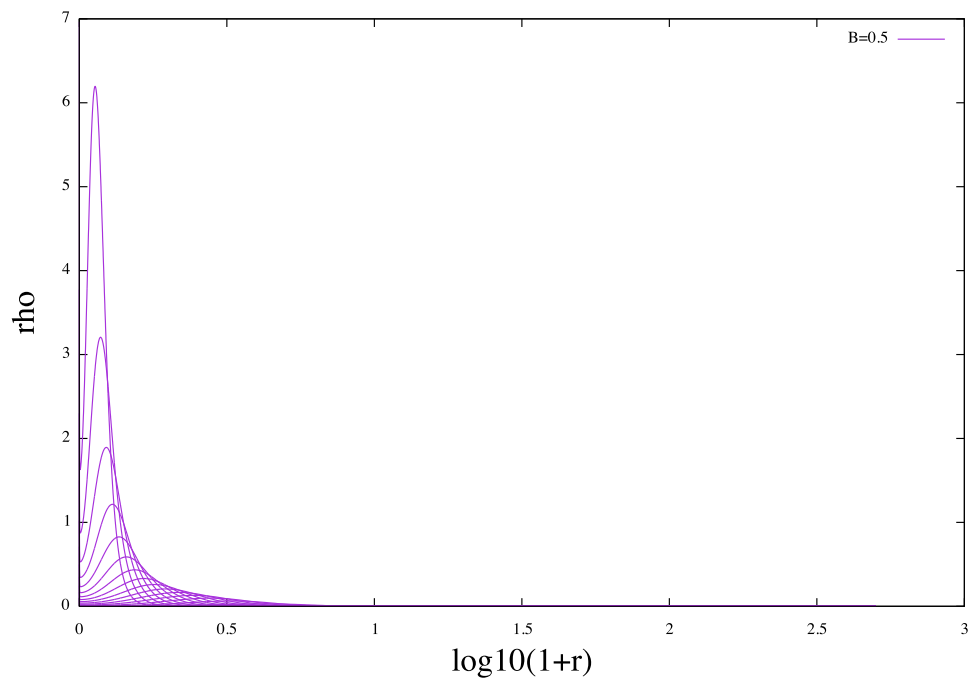


Figura 4.13: Densidad de energía  $\rho$  como función de  $r$  asociada a las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11.

# 5 Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue suministrar una aproximación de *rotación lenta* para estrellas de bosones (en particular para el caso del campo escalar complejo autogravitante en equilibrio estacionario). Para llevar a cabo este análisis fue necesario recuperar primeramente los resultados bien conocidos para el escenario sin rotación, tanto para el caso de un campo bosónico masivo libre como para el caso en que se añade también un potencial de autointeracción del tipo  $\lambda\phi^4$ . Para ello se desarrolló un código de integración numérica de las ecuaciones de Einstein (para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico) y de la ecuación de Klein-Gordon asociada al campo bosónico. Los resultados y detalles de este estudio (e.g. condiciones de regularidad en el origen  $r = 0$  y condiciones asintóticas) se reportan en el Capítulo 2 de esta tesis mostrando la compatibilidad con los resultados de los dos estudios pioneros [1, 5]. Con base en la experiencia obtenida en la resolución numérica de este tipo de sistemas, procedimos a incluir en la métrica el término correspondiente a la rotación (i.e. la componente  $\beta^\varphi$  del shift en la dirección de la axisimetría), así como la correspondiente modificación en la expresión del campo bosónico. Esta última condujo a una ecuación de eigenvalores modificada, donde aparecen los términos asociados a la rotación de la estrella. Para este segundo escenario, el cual se presenta en el Capítulo 3, se desarrolló un modelo de *rotación lenta* donde consideramos únicamente los términos lineales del shift en todas las ecuaciones, y únicamente la dependencia de la coordenada radial en las componentes no triviales de la métrica, en sintonía con una aproximación similar en fluidos perfectos [35]. Adicionalmente, se desprecia el *backreaction* de la parte angular  $\theta$  del campo bosónico en las ecuaciones de Einstein, o equivalentemente, se toma un promedio en esta variable, o bien, su valor en el *ecuador*  $\theta = \pi/2$ . De esta forma, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales aproximado pero auto consistente. Este análisis contrasta con varios estudios anteriores (cf. Sección 3.10) en donde diversos autores afirmaban que una aproximación de esta índole no era posible, e inclusive, algunos especularon que aún a nivel no perturbativo los modelos de estrellas de bosones con rotación no eran auto consistentes, conclusión prematura que eventualmente resultó ser falsa (cf. [30]).

De manera similar a lo realizado en el Capítulo 2, se impusieron nuevas condiciones de regularidad y asintóticas en el escenario con rotación, donde se mostró que existe un cambio de topología del campo escalar: topología toroidal en lugar de topología de tipo esférico, en donde dicho campo se anula en el eje de simetría. De esta forma, uno de los parámetros que determinan a las diferentes configuraciones de la estrella es la derivada radial del campo en el origen, contrariamente a lo que ocurre en el caso

esférico, donde es el valor de campo mismo en el origen el que básicamente determina la configuración final de la estrella. Adicionalmente, de las condiciones de regularidad surge que el único valor posible del número entero  $k$  (el cual controla la rotación) es  $k = \pm 1$ , lo cual se comprobó en el código numérico, y es consistente con el hecho de que este valor es el más pequeño permitido por una rotación no nula. Valores enteros mayores de este número  $k$  estarían asociados a una rotación rápida en donde pueden aparecer ergoregiones. En el caso presente, esta posibilidad está excluida. En particular, en el Apartado 3.8, se muestra que algunos autores no tomaron en cuenta una dependencia armónica del campo bosónico en la parte angular  $\varphi$ , y por consiguiente, no existe dependencia en el número  $k$ . Esto lleva automáticamente a un shift nulo, y por consiguiente aun escenario sin rotación.

Por último, se desarrolló un nuevo código numérico para tratar este problema, realizando las adecuaciones necesarias al código inicial con simetría esférica. Los resultados numéricos se reportan en el Capítulo 4.

En nuestro estudio con rotación sólo consideramos el caso de un campo bosónico masivo pero libre (i.e. sin autointeracción), ya que en el caso con autointeracción la ecuación del campo bosónico es no lineal y en principio ya no es separable en las partes radial y angular  $\theta$ . Aunque se podría añadir el término de auto interacción de manera ad-hoc únicamente en la parte radial y realizar el ejercicio numérico para ver su efecto en las configuraciones de la estrella, este análisis no se realizó ya que su justificación sería aún más dudosa<sup>1</sup>.

La conclusión final es que es posible construir de manera numérica y aproximada estrellas de bosones con rotación lenta (en el sentido que las contribuciones del shift son pequeñas comparadas con el lapso). Sin embargo, un problema que queda por analizar es el grado de precisión de esta aproximación, ya que para ello sería necesario compararla con los resultados de un código numérico completo no perturbativo donde se resuelven simultáneamente las ecuaciones de Einstein no lineales junto con la ecuación de eigenvalores del campo bosónico sin despreciar ningún término (cf. [20]). Este es un estudio que se deja para el futuro ya que se encuentra fuera de los alcances de esta tesis.

Por último, si bien las estrellas de bosones se han pensado en el pasado como posibles candidatos de materia oscura en el universo, el presente trabajo no toma esta postura, y sólo analiza la posibilidad de su existencia y consistencia teóricas, tanto en situaciones sin rotación como con la aproximación expuesta aquí de rotación lenta.

---

<sup>1</sup>En el análisis no perturbativo de estrellas de bosones con rotación realizado en Ref. [20], los autores muestran que al añadir un término de autointeracción la masa total de la estrella aumenta en comparación con el correspondiente escenario con rotación pero sin autointeracción.

# Bibliografía

- [1] D. Kaup, “Klein-gordon geon,” *Physical Review D*, vol. 172, p. 1331, 1968.
- [2] P. Jetzer, “Boson stars,” *Physics Reports*, vol. 220, pp. 163–227, Nov. 1992.
- [3] R. Ruffini and S. Bonazzola, “Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state.,” *Phys. Rev. 187: 1767-83(25 Nov 1969)*.
- [4] M. W. Choptuik, “The (unstable) threshold of black hole formation,” 1998.
- [5] M. Colpi, S. L. Shapiro, and I. Wasserman, “Boson stars: Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields,” *Physical Review D*, vol. 57, pp. 2485–2488, 1986.
- [6] R. Friedberg, T. D. Lee, and Y. Pang, “Mini-soliton stars,” *Physical Review D*, vol. 35, p. 3640, 1987.
- [7] E. Gourgoulhon, “An introduction to the theory of rotating relativistic stars,” arXiv: 1003.5015.
- [8] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects*. 1983.
- [9] E. Seidel and W.-M. Suen, “Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state,” *Phys. Rev. D*, vol. 42, pp. 384–403, Jul 1990.
- [10] J. Balakrishna and F. E. Schunck, “Gravitational evolution and stability of boson halos,” 1998.
- [11] F. E. Schunck and E. W. Mielke, “General relativistic boson stars,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, p. R301, sep 2003.
- [12] R. Sharma, S. Karmakar, and S. Mukherjee, “Boson star and dark matter,” arXiv: 0812.3470.
- [13] V. C. Rubin, J. Ford, W. K., and N. Thonnard, “Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc).,” , vol. 238, pp. 471–487, June 1980.
- [14] F. E. Schunck, “A scalar field matter model for dark halos of galaxies and gravitational redshift,” 1998.

- [15] U. Nucamendi, M. Salgado, and D. Sudarsky, “Alternative approach to the galactic dark matter problem,” *Physical Review D*, vol. 63, may 2001.
- [16] T. L. S. Collaboration and V. collaboration, “Ligo-virgo-kagra publications,” 2017. Accessed = 2023-04-28.
- [17] B. P. Abbott et al, “Tests of general relativity with gw150914,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 221101, May 2016 (LIGO-VIRGO collaboration).
- [18] R. M. Wald, *General relativity*. Chicago, IL: Chicago Univ. Press, 1984.
- [19] F. Ryan, “Spinning boson stars with large self-interaction,” *P. Review D*, vol. 55, pp. 6082–6091, 1997.
- [20] P. Grandclément, C. Somé, and E. Gourgoulhon, “Models of rotating boson stars and geodesics around them: New type of orbits,” *Physical Review D*, vol. 90, jul 2014.
- [21] H. Casini and R. Montemayor, “Vortex distribution in neutron stars: Gravitational effects,” 4 1997.
- [22] M. Heusler, N. Straumann, and M. S. Volkov, “On rotational excitations and axial deformations of BPS monopoles and Julia-Zee dyons,” *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 105021, 1998.
- [23] P. Pani, *Applications of perturbation theory in black hole physics*. PhD thesis, Cagliari U., 2011.
- [24] S. L. Liebling and C. Palenzuela, “Dynamical Boson Stars,” *Living Rev. Rel.*, vol. 15, p. 6, 2012.
- [25] N. Sennett, T. Hinderer, J. Steinhoff, A. Buonanno, and S. Ossokine, “Distinguishing Boson Stars from Black Holes and Neutron Stars from Tidal Interactions in Inspiring Binary Systems,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, no. 2, p. 024002, 2017.
- [26] L. G. Collodel, B. Kleihaus, and J. Kunz, “Structure of rotating charged boson stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 10, p. 104076, 2019.
- [27] J. Kunz, I. Perapechka, and Y. Shnir, “Kerr black holes with synchronised scalar hair and boson stars in the Einstein-Friedberg-Lee-Sirlin model,” *JHEP*, vol. 07, p. 109, 2019.
- [28] T. Helfer, *Exotic Compact Objects in Numerical Relativity*. PhD thesis, King’s Coll. London, 2020.
- [29] M. C. Teodoro, L. G. Collodel, and J. Kunz, “Tidal effects in the motion of gas clouds around boson stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 103, no. 10, p. 104064, 2021.
- [30] F. E. Schunck and E. W. Mielke, “TOPICAL REVIEW: General relativistic boson stars,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, pp. R301–R356, Oct. 2003.

- [31] A. Papapetrou, “A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution,” *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 51, pp. 191–204, 1945.
- [32] M. Alcubierre, *Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008.
- [33] T. Baumgarte and S. Shapiro, *Numerical Relativity: Solving Einstein’s Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- [34] S. Ontañón and M. Alcubierre, “Rotating boson stars using finite differences and global newton methods,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 38, p. 154003, jul 2021.
- [35] J. Hartle, “Slowly rotating relativistic stars. i. equations of structure,” *The Astrophysical Journal*, vol. 150, p. 1005, 1967.
- [36] T. Kobayashi, M. Kasai, and T. Futamase, “Does a boson star rotate?,” *Physical Review D*, vol. 50, p. 7771, 1994.
- [37] C. A. Herdeiro and E. Radu, “Kerr black holes with scalar hair,” *Physical Review Letters*, vol. 112, jun 2014.
- [38] G. Garcia, E. Gourgoulhon, P. Grandclément, and M. Salgado, “High precision numerical sequences of rotating hairy black holes.” arXiv:2302.06659, 2023.
- [39] C. M. G. D. Sousa and V. Silveira, “Slowly Rotating Boson-Fermion Star,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 10, pp. 881–892, dec 2001.
- [40] C. M. G. de Sousa, “Rotating boson and boson-fermion stars.” <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0612052v1>, 2006.
- [41] S. Yoshida and Y. Eriguchi, “New static axisymmetric and nonvacuum solutions in general relativity: Equilibrium solutions of boson stars,” *Physical Review D*, vol. 55, p. 2000, 1997.
- [42] S. Yoshida and Y. Eriguchi, “Rotating boson stars in general relativity,” *Physical Review D*, vol. 56, p. 770, 1997.
- [43] F. Schunck and E. Mielke, “Rotating boson star as an effective mass torus in general relativity,” *Physics Letters A*, vol. 249, 1996.
- [44] E. W. Mielke and F. E. Schunck, “Rotating boson stars,” pp. 391–420, 1996.
- [45] F. Schunck and E. Mielke, *Relativity and Scientific Computing*. Springer, 1996.
- [46] S. Bhattacharya and H. Maeda, “Can a black hole with conformal scalar hair rotate?,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, no. 8, p. 087501, 2014.

