Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad De Ciencias

Álgebras de Carcaj

T E S I S

que para obtener el título de

Matemática

presenta:

Elizabeth Chalnique Ríos Alvarado

Asesora:

Dra. Edith Corina Sáenz Valadez

Ciudad Universitaria, CDMX
2023

I've been the archer
I've been the prey

Taylor Swift

Índice general

Introducción

La idea de representar un objeto matemático complejo por uno más simple es tan antigua como las mismas matemáticas. Se sabe que en 1929, la matemática alemana Emmy Noether, interpretó a las representaciones de álgebras como módulos [7]. Con esto, introdujo a la Teoría de Representaciones todo el lenguaje del Álgebra Homológica y de la Teoría de Categorías.

Ahora bien, dado un campo K algebraicamente cerrado y un anillo unitario A decimos que A es una K-álgebra, si A tiene también estructura de K-espacio vectorial que es compatible con la estructura de anillo. Esto es, si para todo $a, b \in A$ y $k \in K$ se satisface que:

$$k(ab) = (ka)b = a(kb)$$

Decimos que la K-álgebra A es de dimensión finita si $\dim_K A < \infty$.

Por otro lado, a un carcaj Q (esto es Q es una gráfica orientada) se le puede asociar una K-álgebra que se denota por KQ y se conoce como el álgebra de caminos asociada a Q. Dichas K-álgebras son muy accesibles.

En el estudio de álgebras de dimensión finita se tiene un resultado muy importante, conocido como el *Teorema de Gabriel*, en honor al matemático que lo enunció y demostró, el cual se enuncia a continuación.

Teorema (Gabriel)**.** *Sean A una K-álgebra básica, conexa y de dimensión finta. Entonces existe un carcaj Q y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ tales que $A \cong KQ/\mathcal{I}$.*

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el teorema anterior, la tesis consta de cuatro capítulos y está dividida de la siguiente manera:

En el primer capítulo damos un breve resumen de la Teoría General de Álgebras de Dimensión Finita que será necesaria para los capítulos subsecuentes. Se omite la mayoría de las demostraciones pues suponemos que la lectora ha llevado un curso previo en Teoría de Representaciones de Álgebras.

En el segundo capítulo establecemos la Teoría General de las Álgebras de Carcaj y damos varios ejemplos para ilustrar cada uno de los resultados.
Por ejemplo, dado el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] \\ 1 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \\ & 4 \arrow[ul, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

se tiene que su álgebra de caminos asociada a Q es isomorfa a la siguiente álgebra:

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & 0 & 0 & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g \in K \right\}$$

En particular observamos que dichas álgebras pueden no ser de dimensión finita. Por ello, en el capítulo 3 introducimos el concepto de ideal admisible y mostramos que el álgebra cociente $KQ/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un ideal admisible, es siempre de dimensión finita.
Por ejemplo, dado el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift left, "\alpha_3"] & 4 \arrow[l, shift left, "\beta_3"] \end{tikzcd}$$

se tiene que el álgebra de caminos KQ no es de dimensión finita. Sin embargo, al considerar el ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha_2\alpha_1, \alpha_3\alpha_2, \beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2, \alpha_2\beta_2 - \beta_3\alpha_3, \alpha_3\beta_3 \rangle$ se tiene que el álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$ sí lo es.

Finalmente, en el capítulo 4 enunciamos y demostramos el famoso Teorema de Gabriel.
Gracias a dicho resultado, el estudio de las K-álgebras de dimensión finita se puede reducir a las K-álgebras de carcaj $KQ/\mathcal{I}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enunciarán las definiciones y resultados que se usarán a lo largo del trabajo. Se omiten las demostraciones de dichos resultados debido a que se presupone que ya se ha estudiado un curso introductorio en el tema de teoría de representaciones. Si se desea profundizar en el área puede leerse el libro *Elements of the representation theory of associative algebras: Techniques of representation theory* [2] o la tesis *Introducción a álgebras de dimensión finita* [5].

Definición 1.1. Sea K un campo. Una K**-álgebra** es un anillo con uno $(\Lambda, +, \cdot)$ tal que el grupo abeliano $(\Lambda, +)$ posee también estructura de K-espacio vectorial y de tal forma que para todo $\alpha \in K$ y para todo $a, b \in \Lambda$ se satisface:

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

Es decir, la operación producto del anillo es compatible con la operación producto por escalares del espacio vectorial.

Se dice que la K-álgebra es de **dimensión finita** si como K-espacio vectorial es de dimensión finita. En caso contrario se dice que es de **dimensión infinita**.

Se acostumbra denotar a una K-álgebra $(\Lambda, +, \cdot)$ por Λ o por A simplemente y se denotará por K a un campo algebraicamente cerrado. También algunas veces se referirá a una K-álgebra simplemente como álgebra.

Definición 1.2. Sea A una K-álgebra. Un K-subespacio vectorial B de A es una K**-subálgebra** de A si:

1. el elemento 1_A (el uno) de A pertenece a B.

2. para todo b, $b' \in B$ se tiene que $bb' \in B$.

Definición 1.3.

1. Un K-subespacio vectorial I de A es un **ideal izquierdo** de la K-álgebra A si para todo $x \in I$ y para todo $a \in A$, $ax \in I$.

2. Un K-subespacio vectorial I de A es un **ideal derecho** de la K-álgebra A si para todo $x \in I$ y para todo $a \in A$, $xa \in I$.

3. Un **ideal (bilateral)** de la K-álgebra A, es un ideal izquierdo y derecho de A.

Definición 1.4. Sea A un anillo unitario.

1. Un elemento $e \in A$ es **idempotente** si $e^2 = ee = e$.

2. Se dice que un elemento $a \in A$ es **nilpotente** si existe algún $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a^m = 0$. Se define el **índice de nilpotencia** de a como n, donde n es el mínimo entero positivo tal que $a^n = 0$.

3. Se dice que un subconjunto B de A es **nil** si todos sus elementos son nilpotentes.

4. Se dice que un subconjunto B de A es un **conjunto nilpotente** si existe algún $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_m \in B$ se tiene que $x_1 x_2 \cdots x_m = 0$.

Definición 1.5. Sean A y B K-álgebras. Se dice que un homomorfismo de anillos unitario $f\colon A \to B$ es un **homomorfismo de K-álgebras** si f es además una transformación lineal. Se dice que A y B son **K-álgebras isomorfas** si existe un homomorfismo de K-álgebras biyectivo.

Definición 1.6. Sea $f\colon A \to B$ un homomorfismo de K-álgebras. Se define el **kernel** de f, denotado por $\ker(f)$, como $\ker(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$ y la **imagen** de f, denotada por $\operatorname{im}(f)$, como $\operatorname{im}(f) = \{f(a) : a \in A\}$.

Proposición 1.7. Sean A y B dos K-álgebras y $f\colon A \to B$ un homomorfismo de álgebras. Entonces

1. $\ker(f)$ es un ideal de A.

2. $\operatorname{im}(f)$ es una subálgebra de B.

Demostración. Ver [5, Capítulo 1].

Definición 1.8. Sea A una K-álgebra e $I \subsetneq A$ un ideal (izquierdo, derecho o bilateral) de A. Se dice que I es un **ideal maximal** (respectivamente izquierdo, derecho o bilateral) de A si para todo ideal (respectivamente izquierdo, derecho o bilateral) J de A tal que $I \subseteq J$, se cumple que $J = I$ o $J = A$.

Definición 1.9. El **radical** de una K-álgebra A, denotado por $\operatorname{rad} A$, es la intersección de todos los ideales maximales izquierdos de A.

Lema 1.10. Sea A una K-álgebra y $a \in A$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $a \in \operatorname{rad} A$.
2. $\forall b \in A$ el elemento $(1 - ba)$ tiene inverso izquierdo.
3. $\forall b \in A$ el elemento $(1 - ba)$ es invertible.
4. $\forall b \in A$ el elemento $(1 - ab)$ es invertible.
5. $\forall b \in A$ el elemento $(1 - ab)$ tiene inverso derecho.
6. $a \in \bigcap\{I \subseteq A : I \text{ es ideal derecho maximal de } A\}$

Demostración. Ver [5, Capítulo 1].

Corolario 1.11. Sea A una K-álgebra. Entonces

1. $\operatorname{rad} A$ es la intersección de todos los ideales maximales derechos de A.
2. $\operatorname{rad} A$ es un ideal bilateral y $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad} A) = 0$.
3. Si I es un ideal bilateral nilpotente de A, entonces $I \subseteq \operatorname{rad} A$. Si además, el álgebra A/I es isomorfa al producto $K \times \cdots \times K$ de copias de K, entonces $I = \operatorname{rad} A$.

Demostración. Ver [5, Capítulo 1].

Definición 1.12. Un campo K es **algebraicamente cerrado** si todo polinomio no constante $p(x) \in K[x]$ tiene todas sus raíces en K.

Teorema 1.13 (Wedderburn - Malcev)**.** Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Si el campo K es algebraicamente cerrado, entonces existe una K-subálgebra B de A tal que existe una descomposición como K-espacio vectorial $A = B \oplus \operatorname{rad} A$ y la restricción del homomorfismo canónico suprayectivo de álgebras $\pi \colon A \to A/\operatorname{rad} A$ a B es un isomorfismo de álgebras.

Demostración. Ver [6, Sección VI.2] y [8, Sección 11.6].

Definición 1.14. Sea A una K-álgebra. Un **A-módulo izquierdo**, denotado por ${}_AM$, es el par $(M, \cdot)$ donde M es un K-espacio vectorial junto con una operación producto por elementos de A, $\cdot\colon A \times M \to M$ tal que $(a, m) \mapsto am$ que satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $a, b \in A$, $x, y \in M$ y $\lambda \in K$:

1. $(a + b)x = ax + bx$
2. $a(x + y) = ax + ay$
3. $a(bx) = (ab)x$
4. $1_A x = x$
5. $a(\lambda x) = (\lambda a)x = \lambda(ax)$

Se define de forma análoga un **A-módulo derecho**.

Dada B una K-álgebra, se define un $A-B$-**bimódulo** como un K-espacio vectorial M que es un A-módulo izquierdo y un B-módulo derecho, y que para cualesquiera $a \in A$, $b \in B$ y $x \in M$ se tiene que $a(xb) = (ax)b$. Y se denota como ${}_AM_B$. En este texto se trabajará con módulos izquierdos.

Definición 1.15. Sea M un A-módulo y $\varnothing \neq X \subseteq M$. Se dice que M es **generado** por X si $M = AX$. En el caso de que X sea un conjunto finito, se dice que M es un módulo **finitamente generado**. Si en particular X es un conjunto con un solo elemento, se dice que M es un módulo **cíclico**.

El corolario del siguiente lema será importante en el capítulo 4 de este trabajo.

Lema 1.16 (Nakayama)**.** Sea A una K-álgebra, M un A-módulo finitamente generado e $\mathcal{I} \subseteq \operatorname{rad} A$ un ideal bilateral de A. Si $\mathcal{I}M = M$, entonces $M = 0$.

Demostración. Ver [2, Sección I.2] ∎

Corolario 1.17. Si A es una K-álgebra de dimensión finita, entonces $\operatorname{rad} A$ es nilpotente.

Demostración. Ver [5, Capítulo 2.1] ∎

Definición 1.18. Sean A una K-álgebra y M, N dos A-módulos.

1. Un **A-homomorfismo de módulos** es una transformación K-lineal $f\colon M \to N$ tal que para cualquier $a \in A$ y $m \in M$ se tiene que $f(am) = af(m)$.

2. Un A-homomorfismo $f\colon M \to M$ se llama **A-endomorfismo** de M.

Se denota por $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ al conjunto de todos los A-homomorfismos de M a N y $\mathrm{End}(M) = \mathrm{Hom}_A(M, M)$.

Definición 1.19. Sean $M_1, M_2, \ldots, M_n$ A-módulos. Se define la **suma directa** de $M_1, M_2, \ldots, M_n$ como la suma directa de K- espacios vectoriales $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ junto con la operación producto por elementos de A dada por

$$\begin{aligned} \cdot\colon A \times \bigoplus_{i=1}^{n} M_i &\to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \\ (a, (m_1, m_2, \ldots, m_n)) &\mapsto (am_1, am_2, \ldots, am_n) \end{aligned}$$

Dada una K-álgebra A, se denota por A-Mod a la categoría cuyos objetos son A-módulos izquierdos y sus morfismos son los homomorfismos de A-módulos junto con la composición usual de funciones. Y se denota por A-mod a la subcategoría de A-Mod cuyos objetos son todos los módulos izquierdos finitamente generados.

Definición 1.20. Sea A una K-álgebra.

1. Un idempotente $e \in A$ es **central** si para toda $a \in A$, $ae = ea$.

2. Los idempotentes $e_1, e_2 \in A$ son **ortogonales** si $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$.

3. Un idempotente $e \in A$ es **primitivo** si e no puede ser escrito como suma $e = e_1 + e_2$ con e_1 y e_2 idempotentes ortogonales no cero de A.

Definición 1.21. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. A una descomposición del módulo regular ${}_AA = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $P_i = Ae_i$ y e_i son idempotentes ortogonales dos a dos, primitivos y tales que $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ se le llama **descomposición inescindible** de A. Además, se dice que el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un **conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos** de A.
En el caso donde e es un idempotente central tal que ${}_AA = {}_AAe \oplus {}_AA(1-e)$, se dice que ésta es una **descomposición en producto directo** interno del álgebra A.

Definición 1.22. Se dice que una K-álgebra es **conexa (o inescindible)** si no se puede descomponer como producto directo interno de dos K-álgebras.

Lema 1.23. Un álgebra de dimensión finita es conexa si y sólo si 0 y 1 son sus únicos idempotentes centrales.

Demostración. Ver [5, Capítulo 4.1].

Lema 1.24. Sea A una K-álgebra, $e \in A$ un elemento idempotente y M un A-módulo izquierdo.

1. La transformación K-lineal

$$\theta_M\colon \operatorname{Hom}_A(Ae, M) \to eM$$

   definida por $\varphi \mapsto \varphi(e) = e(\varphi(e))$, es un isomorfismo de eAe-módulos izquierdos.

2. El isomorfismo $\theta_{Ae}\colon \operatorname{End}(Ae) \xrightarrow{\cong} eAe$ induce un isomorfismo de K-álgebras.

Demostración. Ver [2, Sección I.4].

Definición 1.25. Se dice que un álgebra A es **local** si tiene un único ideal izquierdo maximal.

Lema 1.26. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es un álgebra local.
2. El conjunto de los elementos no invertibles de A es un ideal bilateral del álgebra.
3. Para cada $a \in A$ se cumple que a es invertible o bien $1-a$ es invertible.
4. Los únicos idempotentes de A son los idempotentes triviales.
5. Las K-álgebras $A/\operatorname{rad} A$ y K son isomorfas.

Demostración. Ver [5, Capítulo 4.1].

Corolario 1.27. Si A es un álgebra local, entonces $\operatorname{rad} A = \{x \in A : x \text{ no tiene inverso izquierdo}\}$

Demostración. Ver [5, Capítulo 4.1].

Corolario 1.28. Un idempotente $e \in A$ es primitivo si y sólo si los únicos idempotentes de $eAe \cong \operatorname{End}(eA)$ son 0 y e.

Demostración. Ver [2, Sección I.4].

Teorema 1.29 (Descomposición única)**.** Sea A una K-álgebra de dimensión finita.

1. Todo módulo M en $A-mod$ tiene una descomposición

$$M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

donde M_i es un módulo inescindible y la K-álgebra $\mathrm{End}({}_A M_i)$ es local para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Si $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \cong \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$ con M_i y N_j inescindibles para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Ver [2, Sección I.4].

Corolario 1.30. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Entonces existe una descomposición para el módulo regular

$${}_A A = {}_A P_1 \oplus {}_A P_2 \oplus \cdots \oplus {}_A P_n$$

tal que ${}_A P_i$ es inescindible para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Más aún, si existe otra descomposición

$${}_A A = {}_A Q_1 \oplus {}_A Q_2 \oplus \cdots \oplus {}_A Q_m$$

entonces, $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $P_i \cong Q_{\sigma(i)}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Además, como ${}_A A$ admite una descomposición como suma directa

$${}_A A = {}_A P_1 \oplus {}_A P_2 \oplus \cdots \oplus {}_A P_n$$

se tiene que $P_i = Ae_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ donde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos de A, por lo que cualquier conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos de A tiene cardinalidad n.

Definición 1.31. Sea A una K-álgebra.

1. Un par de A-homomorfismos $f \colon M' \to M$ y $g \colon M \to M''$ (con M', M y M'' A-módulos) es **exacto** si $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$. Se acostumbra decir que la sucesión $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta.

2. Una sucesión (finita o infinita) de homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

   es **exacta** si es exacta en cada M_n. Es decir, si para cada par sucesivo f_n, f_{n+1} se tiene que $\mathrm{im}(f_n) = \ker(f_{n+1})$.

3. En particular se dice que

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

   es una **sucesión exacta corta** si f es un monomorfismo, g es un epimorfismo e $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.

Nótese que el homomorfismo f tiene inverso izquierdo $p\colon M \to M'$ si y sólo si el homomorfismo g tiene inverso derecho $v\colon M'' \to M$. En este caso existen descomposiciones en suma directa $M = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(p) = \mathrm{im}(v) \oplus \ker(g)$ de M, y se dice que la sucesión exacta corta se **escinde**.

Lema 1.32. Si $0 \to M \to N \to L \to 0$ es una sucesión exacta corta y M y L son A-módulos finitamente generados. Entonces N es finitamente generado.

Demostración. Ver [1, Capítulo 3.1].

Definición 1.33. Sea A una K-álgebra y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Se dice que el álgebra es **básica** si para toda $i \neq j$, $Ae_i \ncong Ae_j$.

Proposición 1.34.

1. Una K-álgebra de dimensión finita es básica si y sólo si el álgebra $A/\operatorname{rad} A$ es isomorfa a un producto $K \times \cdots \times K$ de copias de K.

2. Todo módulo simple sobre una K-álgebra básica es unidimensional.

Demostración. Ver [2, Sección I.6].

Capítulo 2

Carcajes y álgebras

En este capítulo se definirán las estructuras gráficas que son de interés (carcajes) y la terminología relacionada. Después se probará que se puede asociar un álgebra a cada una de estas estructuras gráficas y se estudiarán sus propiedades.

Definición 2.1. Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es una cuádrupla que consiste de dos conjuntos: Q_0 (cuyos elementos son llamados **puntos** o **vértices**) y Q_1 (cuyos elementos son llamados **flechas**), y dos funciones: $s\colon Q_1 \to Q_0$ tal que asocia a cada flecha $\alpha \in Q_1$ con su **vértice inicial** $s(\alpha) \in Q_0$ y $t\colon Q_1 \to Q_0$ tal que asocia a cada flecha $\alpha \in Q_1$ con su **vértice final** $t(\alpha) \in Q_0$.

Una flecha $\alpha \in Q_1$ cuyo vértice inicial sea $s(\alpha) = a$ y cuyo vértice final sea $t(\alpha) = b$, se denota por $\alpha\colon a \to b$. Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ se denota usualmente como $Q = (Q_0, Q_1)$ o simplemente como Q.

Ejemplo 2.2.

1. Considérese el siguiente carcaj Q

$$\begin{tikzcd}
1 & & & \\
& 3 \arrow[ul, "\beta"] \arrow[r, "\gamma"] & 4 & 5 \arrow[l, "\delta"'] \\
2 \arrow[ur, "\alpha"'] & & &
\end{tikzcd}$$

   Es decir, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
   $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$$
\begin{array}{rl}
s\colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \alpha \mapsto 2 \\
& \beta \mapsto 3 \\
& \gamma \mapsto 3 \\
& \delta \mapsto 5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
t\colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \alpha \mapsto 3 \\
& \beta \mapsto 1 \\
& \gamma \mapsto 4 \\
& \delta \mapsto 4
\end{array}
$$

2. Considérese el siguiente carcaj Q

$$
\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, shift right, "\gamma"'] & 3 \arrow[l, shift right, "\beta"']
\end{tikzcd}
$$

Es decir, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
$Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$
\begin{array}{rl}
s\colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \alpha \mapsto 2 \\
& \beta \mapsto 3 \\
& \gamma \mapsto 2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
t\colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \alpha \mapsto 1 \\
& \beta \mapsto 2 \\
& \gamma \mapsto 3
\end{array}
$$

3. Considérese el siguiente carcaj Q

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \arrow[loop right, "\gamma"]
\end{tikzcd}
$$

Es decir, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
$Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$
\begin{array}{rl}
s\colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \alpha \mapsto 1 \\
& \beta \mapsto 1 \\
& \gamma \mapsto 2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
t\colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \alpha \mapsto 2 \\
& \beta \mapsto 2 \\
& \gamma \mapsto 2
\end{array}
$$

4. Considérese el siguiente carcaj Q

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[d, "\beta"] & & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \\
4 \arrow[u, "\delta"] & 3 \arrow[l, "\gamma"] & & & 7 \arrow[u, "\zeta"']
\end{tikzcd}
$$

Es decir, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
$Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$

$$
\begin{array}{rrl}
s\colon & Q_1 & \to Q_0 \\
 & \alpha & \mapsto 1 \\
 & \beta & \mapsto 2 \\
 & \gamma & \mapsto 3 \\
 & \delta & \mapsto 4 \\
 & \epsilon & \mapsto 5 \\
 & \zeta & \mapsto 7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrl}
t\colon & Q_1 & \to Q_0 \\
 & \alpha & \mapsto 2 \\
 & \beta & \mapsto 3 \\
 & \gamma & \mapsto 4 \\
 & \delta & \mapsto 1 \\
 & \epsilon & \mapsto 6 \\
 & \zeta & \mapsto 6
\end{array}
$$

5. Considérese el siguiente carcaj Q

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[ll, bend right, "\gamma"'] & & 4 \arrow[r, "\delta"] & 5
\end{tikzcd}
$$

Es decir, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
$Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$$
\begin{array}{rrl}
s\colon & Q_1 & \to Q_0 \\
 & \alpha & \mapsto 1 \\
 & \beta & \mapsto 2 \\
 & \gamma & \mapsto 3 \\
 & \delta & \mapsto 4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrl}
t\colon & Q_1 & \to Q_0 \\
 & \alpha & \mapsto 2 \\
 & \beta & \mapsto 3 \\
 & \gamma & \mapsto 1 \\
 & \delta & \mapsto 5
\end{array}
$$

En la práctica se denota a un carcaj escribiendo sólo la gráfica orientada y se omite denotar a los conjuntos Q_0, Q_1 y a las funciones s y t (cuando no es necesario).

En este trabajo se considerarán principalmente carcajes finitos, los cuales se definen a continuación.

Definición 2.3. Se dice que un carcaj Q es **finito** si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.

Ejemplo 2.4.

1. El siguiente carcaj Q es un carcaj finito.

$$
\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r] \arrow[dr] & \circ \arrow[dl] \\
\circ \arrow[u] & \circ \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Ya que los conjuntos Q_0 y Q_1 son finitos, Q_0 consta de cuatro vértices y Q_1 de seis flechas.

2. Considérese el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 & & & 3 \\
0 \arrow[loop left, "\alpha_0"] \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[dr, "\alpha_{2n}"] & 4 & & 1 \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\alpha_3"] \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[dr, "\alpha_{2n+1}"] & 5 \\
 & \vdots & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

   Con $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
   $Q_0 = \mathbb{N}$, $Q_1 = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{array}{rrl} s\colon & Q_1 & \to Q_0 \\ & \alpha_{2n} & \mapsto 0 \\ & \alpha_{2n+1} & \mapsto 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} t\colon & Q_1 & \to Q_0 \\ & \alpha_{2n} & \mapsto 2n \\ & \alpha_{2n+1} & \mapsto 2n+1 \end{array}$$

   No es finito, pues se tiene un vértice y una flecha por cada número natural.

3. Considérese el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop above, "\cdots"] \arrow[loop left, "\alpha_0"] \arrow[loop below, "\alpha_1"] \arrow[loop right, "\alpha_2"]
\end{tikzcd}$$

   Con $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
   $Q_0 = \{1\}$, $Q_1 = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{array}{rrl} s\colon & Q_1 & \to Q_0 \\ & \alpha_n & \mapsto 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} t\colon & Q_1 & \to Q_0 \\ & \alpha_n & \mapsto 1 \end{array}$$

   No es finito, pues se tiene una flecha por cada número natural.

4. Considérese el carcaj Q:

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \cdots \qquad n \qquad \cdots$$

   Con $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que $Q_0 = \mathbb{N}$, $Q_1 = \varnothing$.
   No es finito, pues se tiene un vértice por cada número natural.

Definición 2.5. Un **subcarcaj** de un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es un carcaj $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ y las restricciones $s\big|_{Q'_1}$, $t\big|_{Q'_1}$ coinciden con s' y t' respectivamente. Es decir, si $\alpha\colon a \to b$ es una flecha en Q_1 tal que $\alpha \in Q'_1$, entonces $a, b \in Q'_0$ y se dan las siguientes igualdades: $s'(\alpha) = a$ y $t'(\alpha) = b$.

Ejemplo 2.6.

1. Considérese el siguiente carcaj Q'

$$\begin{tikzcd}
1 & \\
& 3 \arrow[ul, "\beta"'] \\
2 \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

   Es decir, $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que
   $Q'_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q'_1 = \{\alpha, \beta\}$

$$\begin{array}{rlcrl}
s' \colon & Q'_1 \to Q'_0 & \qquad & t' \colon & Q'_1 \to Q'_0 \\
& \alpha \mapsto 2 & & & \alpha \mapsto 3 \\
& \beta \mapsto 3 & & & \beta \mapsto 1
\end{array}$$

   éste es subcarcaj del carcaj del inciso 1 en el ejemplo 2.2.

2. Considérese el carcaj Q como sigue

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[lll, bend left, "\epsilon"] \arrow[r, "\delta"] & 5
\end{tikzcd}$$

   Es decir, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ tal que
   $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$

$$\begin{array}{rlcrl}
s \colon & Q_1 \to Q_0 & \qquad & t \colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \alpha \mapsto 1 & & & \alpha \mapsto 2 \\
& \beta \mapsto 2 & & & \beta \mapsto 3 \\
& \gamma \mapsto 4 & & & \gamma \mapsto 3 \\
& \delta \mapsto 4 & & & \delta \mapsto 5 \\
& \epsilon \mapsto 4 & & & \epsilon \mapsto 1
\end{array}$$

3. El siguiente carcaj Q' es un subcarcaj del carcaj anterior Q.

$$\begin{tikzcd}
1 & & 3 & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[lll, bend left, "\epsilon"] \arrow[r, "\delta"] & 5
\end{tikzcd}$$

   Con $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que
   $Q'_0 = \{1, 3, 4, 5\}$, $Q_1 = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$

$$\begin{array}{rlcrl}
s \colon & Q_1 \to Q_0 & \qquad & t \colon & Q_1 \to Q_0 \\
& \gamma \mapsto 4 & & & \gamma \mapsto 3 \\
& \delta \mapsto 4 & & & \delta \mapsto 5 \\
& \epsilon \mapsto 4 & & & \epsilon \mapsto 1
\end{array}$$

4. El siguiente carcaj Q'' no lo es, pues $Q_1'' \not\subseteq Q_1$ ya que la flecha $\zeta \notin Q_1$.

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, bend right, "\zeta"'] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \end{tikzcd}$$

Donde $Q'' = (Q_0'', Q_1'', s'', t'')$ tal que
$Q_0'' = \{2, 3, 4, 5\}$, $Q_1'' = \{\beta, \gamma, \delta, \zeta\}$

$$\begin{array}{rl} s'': & Q_1'' \to Q_0'' \\ & \beta \mapsto 2 \\ & \gamma \mapsto 4 \\ & \delta \mapsto 4 \\ & \zeta \mapsto 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} t'': & Q_1'' \to Q_0'' \\ & \beta \mapsto 3 \\ & \gamma \mapsto 3 \\ & \delta \mapsto 5 \\ & \zeta \mapsto 4 \end{array}$$

A partir de este momento se dejará de describir explícitamente los conjuntos y las funciones de los carcajes y se usará únicamente su representación gráfica, a menos que sea necesario hacerlo de la otra forma. También se hará referencia a un carcaj únicamente por la letra Q.

Definición 2.7. Un subcarcaj Q' de un carcaj Q es **pleno** si Q_1' es igual al conjunto de todas las flechas en Q_1 cuyo vértice inicial y vértice final pertenecen a Q_0'. Es decir, $Q_1' = \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) \in Q_0' \text{ y } t(\alpha) \in Q_0'\}$.
En particular, un subcarcaj pleno está determinado únicamente por su conjunto de vértices.

Ejemplo 2.8.

1. El inciso 3 del ejemplo 2.6 muestra un subcarcaj pleno del carcaj Q definido en el inciso 2.

2. Considérese el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & \circ \arrow[r, "\beta"] \arrow[rrr, bend left] & \circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \end{tikzcd}$$

El subcarcaj Q' del carcaj Q es pleno.
Q':

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r, bend left] & \circ \arrow[r] & \circ \end{tikzcd}$$

Pues, se tienen todas las flechas en Q que tienen inicio y fin en los vértices de Q_0'. Sin embargo, el carcaj Q'' no lo es ya que las flechas α y β de Q que tienen inicio y fin en los vértices de Q_0'' no están en Q_1''.
Q'' :

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & \circ \arrow[rrr, bend left] & \circ & \circ \arrow[l] & \circ \end{tikzcd}$$

Definición 2.9. Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj y a, $b \in Q_0$.

1. Un **camino** de **longitud** $\ell \geq 1$ con vértice inicial a y vértice final b (de a a b) es una sucesión
$$\big(b\big|\alpha_\ell \cdots \alpha_2\alpha_1\big|a\big)$$
donde para toda $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $\alpha_i \in Q_1$ y se tiene que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ y $t(\alpha_\ell) = b$.

   Este camino se denota por $\alpha_\ell \cdots \alpha_2\alpha_1$ y puede ser visualizado de la siguiente manera:
$$a \xrightarrow{\quad\alpha_1\quad} a_1 \xrightarrow{\quad\alpha_2\quad} \cdots \xrightarrow{\quad\alpha_{\ell-1}\quad} a_{\ell-1} \xrightarrow{\quad\alpha_\ell\quad} b$$

2. Se denota por Q_ℓ al conjunto de todos los caminos en Q de longitud ℓ.

3. A cada punto $a \in Q_0$ se le asocia un camino de longitud 0, llamado el **camino trivial de** a y se denota por $\varepsilon_a = \big(a\big|\big|a\big)$.

Nótese que los caminos de longitudes 0 y 1 tienen una correspondencia biyectiva con los elementos de Q_0 y Q_1 respectivamente.

Ejemplo 2.10. Considérese el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha_1"] & 2 \arrow["\alpha_2", loop above] \arrow[d, "\alpha_5"'] & 3 \arrow[d, "\alpha_6"'] & 4 \arrow["\alpha_3", loop above] \\
5 \arrow[u, "\alpha_4"] & 6 \arrow[l, "\alpha_8"] \arrow[r, "\alpha_9"'] & 7 \arrow[r, "\alpha_{10}"'] & 8 \arrow[u, "\alpha_7"]
\end{tikzcd}$$

Considérense los siguientes caminos:

1. $\alpha_{10}\alpha_9\alpha_5\alpha_2\alpha_1$ que también puede representarse como:
$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \xrightarrow{\alpha_5} 6 \xrightarrow{\alpha_9} 7 \xrightarrow{\alpha_{10}} 8$

2. $\alpha_5\alpha_1\alpha_4\alpha_8$ que también puede representarse como:
$6 \xrightarrow{\alpha_8} 5 \xrightarrow{\alpha_4} 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_5} 6$

3. $\alpha_{10}\alpha_6$ que también puede representarse como:
$3 \xrightarrow{\alpha_6} 7 \xrightarrow{\alpha_{10}} 8$

4. $\alpha_5\alpha_2\alpha_2$ que también puede representarse como:

   $2 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \xrightarrow{\alpha_5} 6$

5. $\alpha_3\alpha_7$ que también puede representarse como:

   $8 \xrightarrow{\alpha_7} 4 \xrightarrow{\alpha_3} 4$

Es importante poder considerar sucesiones de flechas independientemente de su orientación. Para ello, se necesita la siguiente definición.

Definición 2.11.

1. A cada flecha $\alpha\colon a \to b$ en un carcaj Q, se le asocia su **flecha inversa**, denotada por $\alpha^{-1}\colon b \to a$, donde $s(\alpha^{-1}) = b$ y $t(\alpha^{-1}) = a$. Si α es un lazo, $\alpha^{-1} = \alpha$.

2. Una **trayectoria** de longitud $\ell \geq 1$ de a a b en Q es una sucesión $\alpha_\ell^{\rho_\ell} \cdots \alpha_2^{\rho_2}\alpha_1^{\rho_1}$, donde para toda $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $\rho_j \in \{-1, 1\}$, con $s(\alpha_1^{\rho_1}) = a$, $t(\alpha_\ell^{\rho_\ell}) = b$ y $t(\alpha_j^{\rho_j}) = s(\alpha_{j+1}^{\rho_{j+1}})$.

Ejemplo 2.12. Considérese el ejemplo anterior (2.10). Al agregar la flecha inversa de cada una de las flechas del carcaj Q se obtiene lo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[d, shift left, "\alpha_4^{-1}"] & 2 \arrow[l, shift left, "\alpha_1^{-1}"] \arrow[loop above, "\alpha_2"] \arrow[d, shift right, "\alpha_5"'] & 3 \arrow[d, shift right, "\alpha_6"'] & 4 \arrow[loop above, "\alpha_3"] \arrow[d, shift left, "\alpha_7^{-1}"] \\
5 \arrow[u, shift left, "\alpha_4"] \arrow[r, shift left, "\alpha_8^{-1}"] & 6 \arrow[l, shift left, "\alpha_8"] \arrow[u, shift right, "\alpha_5^{-1}"'] \arrow[r, shift right, "\alpha_9"'] & 7 \arrow[l, shift right, "\alpha_9^{-1}"'] \arrow[u, shift right, "\alpha_6^{-1}"'] \arrow[r, shift right, "\alpha_{10}"'] & 8 \arrow[l, shift right, "\alpha_{10}^{-1}"'] \arrow[u, shift left, "\alpha_7"]
\end{tikzcd}$$

De donde se pueden obtener las siguientes trayectorias:

1. $\alpha_6^{-1}\alpha_9\alpha_5$ que también puede representarse como:

   $2 \xrightarrow{\alpha_5} 6 \xrightarrow{\alpha_9} 7 \xrightarrow{\alpha_6^{-1}} 3$

2. $\alpha_8\alpha_9^{-1}\alpha_{10}^{-1}\alpha_7^{-1}$ que también puede representarse como:

   $4 \xrightarrow{\alpha_7^{-1}} 8 \xrightarrow{\alpha_{10}^{-1}} 7 \xrightarrow{\alpha_9^{-1}} 6 \xrightarrow{\alpha_8} 5$

3. $\alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_5^{-1}\alpha_8^{-1}\alpha_4^{-1}$ que también puede representarse como:

   $1 \xrightarrow{\alpha_4^{-1}} 5 \xrightarrow{\alpha_8^{-1}} 6 \xrightarrow{\alpha_5^{-1}} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} 1$

4. $\alpha_5^{-1}\alpha_9^{-1}\alpha_6$ que también puede representarse como:

   $3 \xrightarrow{\alpha_6} 7 \xrightarrow{\alpha_9^{-1}} 6 \xrightarrow{\alpha_5^{-1}} 2$

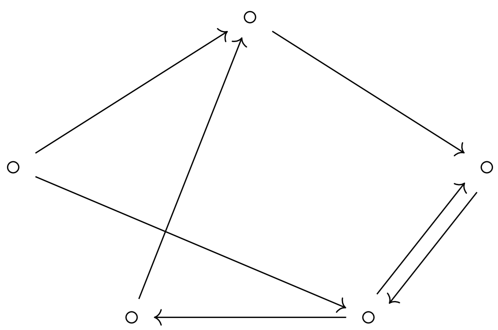
5. $\alpha_{10}^{-1}\alpha_7^{-1}\alpha_3$ que también puede representarse como:

   $4 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_7^{-1}} 8 \xrightarrow{\alpha_{10}^{-1}} 7$

Definición 2.13. Se dice que un carcaj Q es **conexo** si su gráfica subyacente (la gráfica que se obtiene de "quitar" la dirección de las flechas) $\overline{Q}$ es una gráfica conexa. Es decir, si existe una trayectoria entre cualquier par de vértices en $\overline{Q}$.

Ejemplo 2.14.

1. El siguiente es un carcaj conexo.



   Pues la gráfica que queda de eliminar la dirección de las flechas es tal que se puede "llegar" de cualquier vértice a cualquier otro.

2. El siguiente no lo es.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \\
3 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \arrow[u] \\
\\
5 \arrow[r] & 6
\end{tikzcd}$$

   Ya que no existe una trayectoria que vaya desde 5 o 6 hasta 1, 2, 3 o 4.

Definición 2.15. Se dice que un camino de longitud $\ell \geq 1$ es un **ciclo** si su vértice inicial y final coinciden. Un ciclo de longitud 1 se llama **lazo**. Un carcaj es **acíclico** si no contiene ciclos.

Ejemplo 2.16. Retomando el ejemplo 2.10 se puede observar que el camino dado en el inciso 2 es un ciclo de longitud 4. Además las flechas α_2 y α_3 son ciclos de longitud 1, es decir, son lazos.

Definición 2.17. Si existe un camino en el carcaj Q de a a b, se dice que a es **predecesor** de b y que b es **sucesor** de a. En particular, si existe una flecha de a a b, se dice que a es **predecesor inmediato** de b y que b es **sucesor inmediato** de a.

Ejemplo 2.18. Considérese el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dl, shift left] \\
2 & 3 \arrow[l] \arrow[ur, shift left] & \\
 & 1 \arrow[u] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

1. Los sucesores inmediatos de 1 son 2 y 3. Y 1 no tiene predecesores inmediatos.

2. El vértice 2 no tiene sucesores inmediatos y sus predecesores inmediatos son 1 y 3.

3. El vértice 3 tiene por sucesores inmediatos a 2 y 4. Sus predecesores inmediatos son 1 y 4.

4. 3 es sucesor y predecesor inmediato de 4.

5. 4 es predecesor de 2.

6. 4 es sucesor de 1.

Definición 2.19. Para cada $a \in Q_0$, se denota por a^- y a^+ a los conjuntos de todos los predecesores inmediatos y de todos los sucesores inmediatos. Los elementos de $a^- \cup a^+$ se llaman **vecinos** de a.

Ejemplo 2.20. Considérese nuevamente el ejemplo 2.10 y al vértice 7 del carcaj de dicho ejemplo. Entonces, se tiene que

1. 1 es predecesor de 7, con $\alpha_9\alpha_5\alpha_1$.
   El camino $\alpha_9\alpha_5\alpha_1$ gráficamente es: $1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_5} 6 \xrightarrow{\alpha_9} 7$

2. 4 es sucesor de 7, con $\alpha_7\alpha_{10}$
   El camino $\alpha_7\alpha_{10}$ gráficamente es: $7 \xrightarrow{\alpha_{10}} 8 \xrightarrow{\alpha_7} 4$

3. $7^- = \{6, 3\}$ y $7^+ = \{8\}$.

4. Los vecinos de 7 son 3, 6 y 8.

Nótese que mediante la composición de caminos puede definirse una operación en el conjunto de todos los caminos en un carcaj. Ésta se usará para definir un álgebra.

Definición 2.21. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** KQ de Q es la K-álgebra cuyo K-espacio vectorial subyacente tiene como base al conjunto de todos los caminos $\left(b\middle|\alpha_\ell \cdots \alpha_2\alpha_1\middle|a\right)$ de longitud $\ell \geq 0$ en Q ($\forall a, b \in Q_0$) y tal que el producto de dos vectores base $\left(b\middle|\alpha_\ell \cdots \alpha_1\middle|a\right)$ y $\left(d\middle|\beta_k \cdots \beta_1\middle|c\right)$ de KQ está definido por

$$\left(d\middle|\beta_k \cdots \beta_1\middle|c\right)\left(b\middle|\alpha_\ell \cdots \alpha_1\middle|a\right) = \delta_{cb}\left(d\middle|\beta_k \cdots \beta_1\alpha_\ell \cdots \alpha_1\middle|a\right)$$

donde δ_{cb} denota la *Delta de Kronecker*. En otras palabras, el producto de los caminos $\alpha_\ell \cdots \alpha_1$ y $\beta_k \cdots \beta_1$ es igual a 0 si $t(\alpha_\ell) \neq s(\beta_1)$ y es igual al camino $\beta_k \cdots \beta_1\alpha_\ell \cdots \alpha_1$ si $t(\alpha_\ell) = s(\beta_1)$.

El producto de elementos en la base se extiende a elementos arbitrarios de KQ por bilinealidad.

Es importante notar que la K-álgebra KQ se descompone (como K-espacio vectorial) en una suma directa de la siguiente forma:

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

donde para cada $\ell \geq 0$, KQ_ℓ es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_ℓ formado por todos los caminos de longitud ℓ.

Nótese que para cualquier n, $m \geq 0$, $(KQ_n) \cdot (KQ_m) \subseteq KQ_{n+m}$, pues el producto en KQ de un camino de longitud n por uno de longitud m es cero o un camino de longitud $n + m$. Esto se expresa diciendo que la descomposición define una **graduación** en KQ o que KQ es una **K-álgebra graduada**.

El siguiente teorema ayudará a ver con mayor facilidad que un álgebra de caminos como la que se definió puede parecerse a algún álgebra que ya se conoce. En particular, este resultado generaliza la *Propiedad Universal del Anillo de Polinomios*.

Teorema 2.22. Sean Q un carcaj conexo finito y A una K-álgebra asociativa. Para cualquier par de funciones $\varphi_0 \colon Q_0 \to A$ y $\varphi_1 \colon Q_1 \to A$ que satisfagan las siguientes condiciones:

1. $1 = \sum_{a \in Q_0} \varphi_0(a)$, $(\varphi_0(a))^2 = \varphi_0(a)$, y para toda $a \neq b$, $\varphi_0(a) \cdot \varphi_0(b) = 0$

2. Si $\alpha \colon a \to b$ entonces $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(b)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(a)$

existe un único homomorfismo de K-álgebras $\varphi \colon KQ \to A$ tal que para cualesquiera $a \in Q_0$, $\varphi(\varepsilon_a) = \varphi_0(a)$ y para cualesquiera $\alpha \in Q_1$, $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$.

Demostración. Supóngase que existe un homomorfismo $\varphi \colon KQ \to A$ de K-álgebras que extiende a φ_0 y φ_1, y sea $\alpha_\ell \cdots \alpha_2\alpha_1$ un camino en Q. Dado que φ es un homomorfismo de K-álgebras, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_\ell \cdots \alpha_2\alpha_1) &= \varphi(\alpha_\ell) \cdots \varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_1) \\ &= \varphi_1(\alpha_\ell) \cdots \varphi_1(\alpha_2)\varphi_1(\alpha_1) \end{aligned}$$

Lo cual muestra la unicidad de φ.

Por otro lado, la igualdad anterior define un mapeo K-lineal de KQ a A que es compatible con la composición de caminos (por lo que preserva el producto) y es tal que

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \varphi\left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a\right) \\ &= \sum_{a \in Q_0} \varphi(\varepsilon_a) \\ &= \sum_{a \in Q_0} \varphi_0(a) \\ &= 1 \end{aligned}$$

es decir, preserva la identidad. Por lo tanto, es un homomorfismo de K-álgebras. ■

Ejemplo 2.23.

1. Considérese el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

La base del álgebra de caminos KQ es $\{\varepsilon_1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^\ell, \dots\}$ y los elementos de ésta se multiplican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\alpha^\ell = \alpha^\ell\varepsilon_1 = \alpha^\ell &\text{ para toda } \ell \geq 0 \text{ y} \\ \alpha^k\alpha^\ell = \alpha^{\ell+k} &\text{ para toda } \ell, k \geq 0, \text{ donde } \alpha^0 = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Se tiene que KQ es isomorfo al álgebra polinomial $K[t]$ con el homomorfismo $f\colon KQ \to K[t]$ tal que $f(\varepsilon_1) = 1$ y $f(\alpha) = t$. Se extiende el homomorfismo f por bilinealidad.

Demostración. Es fácil ver que f es un homomorfismo. Se probará que que es un isomorfismo. Para ello, se demostrará que f es invertible. Sea $f^{-1}\colon K[t] \to KQ$ tal que $f^{-1}(1) = \varepsilon_1$ y $f^{-1}(t) = \alpha$. Entonces, se tienen lo siguiente:

$$f^{-1} \circ f(\varepsilon_1) = f^{-1}(f(\varepsilon_1)) = f^{-1}(1) = \varepsilon_1$$

$$f^{-1} \circ f(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha)) = f^{-1}(t) = \alpha$$

De donde se puede concluir que $f^{-1} \circ f = Id_{KQ}$.
Por otro lado, se tienen las siguientes igualdades:

$$f \circ f^{-1}(1) = f(f^{-1}(1)) = f(\varepsilon_1) = 1$$

$$f \circ f^{-1}(t) = f(f^{-1}(t)) = f(\alpha) = t$$

De donde $f \circ f^{-1} = Id_{K[t]}$. Así, f es un isomorfismo entre KQ y $K[t]$. ■

2. Considérese el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Una K-base del álgebra de caminos KQ es el conjunto de todas las palabras que se pueden formar con los elementos α, β, ε_1.

Además, ε_1 es el uno (o identidad multiplicativa) en KQ.
La multiplicación de sus elementos se reduce a la multiplicación en el monoide libre sobre $\{\alpha, \beta\}$. De donde KQ es isomorfo al álgebra libre y asociativa con dos variables que no conmutan.
El isomorfismo está dado por la función $f\colon KQ \to K\langle t_1, t_2\rangle$ tal que $f(\varepsilon_1) = 1$, $f(\alpha) = t_1$ y $f(\beta) = t_2$. Se extiende la función f a KQ por bilinealidad.

Demostración. Se deja como ejercicio verificar que f es un homomorfismo. Ahora se verá que es un isomorfismo. Sea $f^{-1}\colon K\langle t_1, t_2\rangle \to KQ$ tal que $f^{-1}(1) = \varepsilon_1$, $f^{-1}(t_1) = \alpha$ y $f^{-1}(t_2) = \beta$. Entonces, se tiene lo siguiente:

$$f^{-1} \circ f(\varepsilon_1) = f^{-1}(f(\varepsilon_1)) = f^{-1}(1) = \varepsilon_1$$
$$f^{-1} \circ f(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha)) = f^{-1}(t_1) = \alpha$$
$$f^{-1} \circ f(\beta) = f^{-1}(f(\beta)) = f^{-1}(t_2) = \beta$$

De donde se puede concluir que $f^{-1} \circ f = Id_{KQ}$.
Por otro lado, se tienen las siguientes igualdades:

$$f \circ f^{-1}(1) = f(f^{-1}(1)) = f(\varepsilon_1) = 1$$
$$f \circ f^{-1}(t_1) = f(f^{-1}(t_1)) = f(\alpha) = t_1$$
$$f \circ f^{-1}(t_2) = f(f^{-1}(t_2)) = f(\beta) = t_2$$

De donde $f \circ f^{-1} = Id_{K\langle t_1, t_2\rangle}$. Así, f es un isomorfismo entre KQ y $K\langle t_1, t_2\rangle$. ■

3. Considérese el siguiente carcaj Q:

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2$$

El álgebra de caminos KQ tiene como base al conjunto $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha\}$ con la siguiente tabla de multiplicación:

	ε_1	ε_2	α
ε_1	ε_1	0	α
ε_2	0	ε_2	0
α	0	α	0

Se tiene que KQ es isomorfa al álgebra de matrices triangulares 2×2,

$$\mathbb{T}_2(K) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in K \right\}$$

donde el isomorfismo está dado por la función $f\colon KQ \to \mathbb{T}_2(K)$ tal que $\varepsilon_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\varepsilon_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ y $\alpha \mapsto \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, se extiende f a KQ por bilinealidad. A continuación se muestra que, en efecto, f es un isomorfismo.

Demostración. Sea $f^{-1}\colon \mathbb{T}_2(K) \to KQ$ tal que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) \mapsto \varepsilon_1$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \mapsto \varepsilon_2$ y $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) \mapsto \alpha$. Entonces, se tiene lo siguiente:

$$f^{-1} \circ f(\varepsilon_1) = f^{-1}(f(\varepsilon_1)) = f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \varepsilon_1$$

$$f^{-1} \circ f(\varepsilon_2) = f^{-1}(f(\varepsilon_2)) = f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \varepsilon_2$$

$$f^{-1} \circ f(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha)) = f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \alpha$$

De donde se puede concluir que $f^{-1} \circ f = Id_{KQ}$.
Por otro lado, se tienen las siguientes igualdades:

$$f \circ f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = f\left(f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) = f(\varepsilon_1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$$

$$f \circ f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = f\left(f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right) = f(\varepsilon_2) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$$

$$f \circ f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = f\left(f^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right) = f(\alpha) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$$

De donde $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{T}_2(K)}$. Así, f es un isomorfismo entre KQ y $\mathbb{T}_2(K)$. ■

4. Considérese el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] \\
1 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \\
 & 4 \arrow[ul, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

El álgebra de caminos tiene como base al conjunto $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \alpha, \beta, \gamma\}$. Con la siguiente tabla de multiplicación:

Se tiene que KQ es isomorfo a la siguiente álgebra:

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & 0 & 0 & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g \in K \right\}$$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	α	β	γ
ε_1	ε_1	0	0	0	α	β	γ
ε_2	0	ε_2	0	0	0	0	0
ε_3	0	0	ε_3	0	0	0	0
ε_4	0	0	0	ε_4	0	0	0
α	0	α	0	0	0	0	0
β	0	0	β	0	0	0	0
γ	0	0	0	γ	0	0	0

Con el isomorfismo $f\colon KQ \to A$ tal que $\varepsilon_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $\beta \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $\gamma \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$.

Ahora que nos hemos familiarizado con el álgebra de caminos KQ, desarrollaremos más teoría. Empezando con el siguiente resultado.

Proposición 2.24. Sea Q un carcaj finito. El elemento $1 = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ es el uno (identidad) del álgebra de caminos KQ y el conjunto $\{\varepsilon_a : a \in Q_0\}$ de todos los caminos triviales $\varepsilon_a = (a||a)$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos de KQ.

Demostración. Sea Q un carcaj finito con $Q_0 = \{a : a \in \{1, \ldots, n\}\}$, $Q_1 = \{\alpha_k : k \in \{1, \ldots, m\}\}$ y α una flecha de Q cuyos vértices inicial y final son i y j respectivamente con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. (Nótese que i y j pueden ser iguales). Se tiene que:

$$\begin{aligned} 1\alpha &= \left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a \right) \alpha \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + \cdots + \varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_n)\, \alpha \\ &= \varepsilon_1\alpha + \varepsilon_2\alpha + \cdots + \varepsilon_i\alpha + \cdots + \varepsilon_j\alpha + \cdots + \varepsilon_n\alpha \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots + \alpha + \cdots + 0 \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha 1 &= \alpha \left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a \right) \\
&= \alpha \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + \cdots + \varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_n \right) \\
&= \alpha\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2 + \cdots + \alpha\varepsilon_i + \cdots + \alpha\varepsilon_j + \cdots + \alpha\varepsilon_n \\
&= 0 + 0 + \cdots + \alpha + \cdots + 0 + \cdots + 0 \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Por lo que $1 = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ es el uno (identidad) de KQ.

Se sigue de la definición de multiplicación que los elementos ε_a son idempotentes ortogonales de KQ.

Ahora se probará que los elementos ε_a son primitivos, o lo que es lo mismo, que los únicos idempotentes del álgebra $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_a$ son 0 y ε_a (1.28). En efecto, cualquier elemento ε de $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_a$ puede escribirse de la forma $\varepsilon = \lambda\varepsilon_a + w$, donde $\lambda \in K$ y w es una combinación lineal de ciclos que pasan por a de longitud ≥ 1. En particular, si dicho elemento ε es un idempotente, se tiene que la siguiente igualdad

$$0 = \varepsilon^2 - \varepsilon = (\lambda\varepsilon_a + w)^2 - (\lambda\varepsilon_a + w) = (\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2$$

da $w = 0$ y $\lambda^2 = \lambda$, así $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$. En el primer caso, $\varepsilon = 0$ y en el segundo caso $\varepsilon = \varepsilon_a$. ■

Lema 2.25. Sea Q un carcaj y KQ su álgebra de caminos. Entonces

1. KQ es un álgebra asociativa
2. KQ tiene uno (identidad) si y sólo si Q_0 es finito.
3. KQ tiene dimensión finita si y sólo si Q es finito y acíclico.

Demostración.

1. Se sigue directamente de la definición de multiplicación, ya que el producto de vectores de la base es la composición de caminos, la cual es asociativa.
2. Supóngase que Q_0 es finito. Dado que cada camino $\varepsilon_a = \big(a\big|\big|a\big)$ es idempotente en KQ, se tiene que $\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ es una identidad multiplicativa en KQ.

   Supóngase ahora, para llegar a una contradicción, que Q_0 es infinito y que $1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ es un elemento identidad de KQ con λ_i escalares distintos de cero y w_i caminos en Q. El conjunto Q_0' de los vértices finales de los w_i tiene a lo más m elementos, en particular es finito. Luego, sea $a \in Q_0 \backslash Q_0'$, entonces $\varepsilon_a \cdot 1 = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, Q_0 es finito.

3. Supóngase que el álgebra de caminos KQ tiene dimensión finita. Si el carcaj Q fuera infinito entonces Q_0 es infinito o Q_1 es infinito. En cualquier caso se tendría que una base de KQ sería infinita, lo cual no es posible. Por lo tanto Q es finito.

   De la misma forma si Q tuviera un ciclo α, se tendría que α^n para $n \in \mathbb{N}$ sería parte de la base de KQ y por tanto KQ sería de dimensión infinita, lo cual no es posible. Por lo tanto, Q es acíclico.

■

El conjunto $\{\varepsilon_a : a \in Q_0\}$ no es el único conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de KQ. En el inciso 3 del ejemplo 2.23, además del conjunto $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, el conjunto $\{\varepsilon_1 + \alpha, \varepsilon_2 - \alpha\}$ también es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de KQ.

El siguiente lema reduce la conexidad de un álgebra a una partición de un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de esta álgebra. Esto permitirá caracterizar a las álgebras de caminos conexas y más adelante, a los cocientes de álgebras de caminos conexas.

Lema 2.26. Sea A un álgebra asociativa y supóngase que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto completo (finito) de idempotentes ortogonales primitivos. Entonces, A es un álgebra conexa si y sólo si no existe una partición no trivial $I \dot{\bigcup} J$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $i \in I$ y $j \in J$ implica que $e_i A e_j = 0 = e_j A e_i$.

Demostración. Supóngase, para llegar a una contradicción, que existe dicha partición y sea $c = \sum_{j \in J} e_j$. Como la partición es no trivial, $c \neq 0$ y $c \neq 1$. Dado que los e_j son idempotentes ortogonales, c es idempotente. Más aún, para cada $i \in I$ se tiene que $ce_i = 0 = e_i c$ y para cada $j \in J$ se tiene que $ce_j = e_j = e_j c$. Ahora, sea $a \in A$ arbitrario. Por hipótesis si $i \in I$ y $j \in J$ $e_i a e_j = 0 = e_j a e_i$.

De donde,

$$
\begin{aligned}
ca &= \left(\sum_{j\in J} e_j\right) a \\
&= \left(\sum_{j\in J} e_j a\right)\cdot 1 \\
&= \left(\sum_{j\in J} e_j a\right)\left(\sum_{i\in I} e_i + \sum_{k\in J} e_k\right) \\
&= \left(\sum_{\substack{j\in J\\ i\in I}} e_j a e_i\right) + \left(\sum_{j,k\in J} e_j a e_k\right) \\
&= 0 + \left(\sum_{j,k\in J} e_j a e_k\right) \\
&= \left(\sum_{j,k\in J} e_j a e_k\right) \\
&= \left(\sum_{j,k\in J} e_j a e_k\right) + \left(\sum_{\substack{i\in I\\ k\in J}} e_i a e_k\right) \\
&= \left(\sum_{j\in J} e_j + \sum_{i\in I} e_i\right) a \left(\sum_{k\in J} e_k\right) \\
&= 1\left(a\left(\sum_{k\in J} e_k\right)\right) \\
&= ac
\end{aligned}
$$

Por lo que c es un idempotente central y $A = cA \oplus (1-c)A$ es una descomposición no trivial de A, es decir, A no es conexa.

Ahora supóngase que A no es conexa. Entonces contiene un idempotente central c distinto a 1 y a 0 (1.23). Se tiene que:

$$\begin{aligned} c &= 1 \cdot c \cdot 1 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) c \left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} e_i c e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i c e_i \end{aligned}$$

Sea $c_i = e_i c e_i \in e_i A e_i$. Entonces $c_i^2 = (e_i c e_i)(e_i c e_i) = e_i c^2 e_i = c_i$. Así, c_i es un idempotente de $e_i A e_i$. Dado que e_i es primitivo, $c_i = 0$ o $c_i = e_i$. Sean $I = \{i : c_i = 0\}$ y $J = \{j : c_j = e_j\}$. Como $c \neq 0$ y $c \neq 1$, ésta es en efecto una partición no trivial de $\{1, \ldots, n\}$. Más aún, si $i \in I$ se tiene que que $e_i c = c e_i = 0$ y si $j \in J$ se tiene que $e_j c = c e_j = e_j$. Por lo tanto, si $i \in J$ y $j \in J$, se tiene que $e_i A e_j = e_i A c e_j = e_i c A e_j = 0$ y análogamente $e_j A e_i = 0$. ■

Lema 2.27. Sea Q un carcaj finito. El álgebra de caminos KQ es conexa si y sólo si Q es un carcaj conexo.

Demostración. Supóngase que Q no es conexo. Sean Q' una componente conexa de Q y Q'' un subcarcaj pleno de Q tal que $Q''_0 = Q_0 \backslash Q'_0$. Por hipótesis, ni Q' ni Q'' son vacíos. Sean $a \in Q'_0$ y $b \in Q''_0$. Dado que Q no es conexo, un camino arbitrario w en Q está completamente contenido en Q' o en (una componente conexa de) Q''. En el primer caso, se tiene que $\varepsilon_b w = 0$ y así $\varepsilon_b w \varepsilon_a = 0$. En el segundo caso, se tiene que $w \varepsilon_a = 0$ y así nuevamente $\varepsilon_b w \varepsilon_a = 0$. Esto muestra que $\varepsilon_b (KQ) \varepsilon_a = 0$. Análogamente se obtiene que $\varepsilon_a (KQ) \varepsilon_b = 0$. Y por el lema 2.26, KQ es inconexa.

Supóngase ahora que Q es un carcaj conexo y que KQ no lo es. Por el lema anterior (2.26) existe una partición $Q_0 = Q'_0 \dot{\bigcup} Q''_0$ tal que si $x \in Q'_0$ y $y \in Q''_0$ entonces $\varepsilon_x (KQ) \varepsilon_y = 0 = \varepsilon_y (KQ) \varepsilon_x$. Ya que Q es conexa, existen $a \in Q'_0$ y $b \in Q''_0$ vecinos. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que existe $\alpha \colon a \to b$. De donde, $\alpha = \varepsilon_b \alpha \varepsilon_a \in \varepsilon_b (KQ) \varepsilon_a = 0$, lo cual es una contradicción. ■

En resumen, se ha mostrado que si Q es un carcaj conexo finito, el álgebra KQ de Q es una K-álgebra asociativa conexa, que admite a $\{\varepsilon_a = (a||a) : a \in Q_0\}$ como un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos.

A continuación se calculará el radical del álgebra de caminos de un carcaj finito, conexo y acíclico. Para eso se necesita la siguiente definición.

Definición 2.28. Sea Q un carcaj finito y conexo. El ideal (bilateral) del álgebra de caminos KQ generado (como ideal) por las flechas de Q se llama el **ideal flecha** de KQ y se denota por R_Q. Siempre que no haya ambigüedad se usará la notación R en lugar de R_Q.

Nótese que hay una descomposición en suma directa:

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

del K-espacio vectorial R_Q, donde KQ_ℓ es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_ℓ de todos los caminos de longitud ℓ. Para cada $\ell \geq 1$, sea $R_Q^\ell := \bigoplus_{m\geq\ell} KQ_m$, se tiene que R_Q^ℓ es el ideal de KQ generado, como espacio vectorial, por el conjunto de todos los caminos de longitud mayor o igual que ℓ. En consecuencia el K-espacio vectorial $R_Q^\ell/R_Q^{\ell+1}$ está generado por las clases residuales de todos los caminos en Q de longitud (exactamente) ℓ y hay un isomorfismo de K-espacios vectoriales $R_Q^\ell/R_Q^{\ell+1} \cong KQ_\ell$.

Proposición 2.29. Sea Q un carcaj conexo finito, R el ideal flecha de KQ y $\varepsilon_a = \big(a\big|\big|a\big)$ para $a \in Q_0$. Entonces

1. El conjunto $\{\overline{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R : a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de la K-álgebra cociente KQ/R.

2. La K-álgebra KQ/R es isomorfa a un producto de $|Q_0|$ copias de K.

3. Si Q es acíclico, entonces $\mathrm{rad}(KQ) = R$ y KQ es un álgebra básica de dimensión finita.

Demostración.

1. Como K-espacio vectorial, KQ/R tiene una descomposición en suma directa:
$$KQ/R = \bigoplus_{a,b\in Q_0} \overline{\varepsilon}_a(KQ/R)\overline{\varepsilon}_b$$
Dado que R contiene todos los caminos de longitud mayor o igual que 1, la igualdad anterior se puede escribir como
$$KQ/R = \bigoplus_{a\in Q_0} \overline{\varepsilon}_a(KQ/R)\overline{\varepsilon}_a.$$
Entonces KQ/R está generado, como K-espacio vectorial, por las clases residuales de los caminos de longitud 0. Esto es, por el conjunto

$\{\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R \colon a \in Q_0\}$. Se puede ver fácilmente que dicho conjunto es un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos del álgebra cociente KQ/R.

2. Más aún, para cada $a \in Q_0$, el álgebra $\bar{\varepsilon}_a(KQ/R)\bar{\varepsilon}_a$ está generada, como K-espacio vectorial, por $\bar{\varepsilon}_a$ y en consecuencia es isomorfo, como K-álgebra, al campo K. Esto muestra que el álgebra cociente KQ/R es isomorfa a un producto de $|Q_0|$ copias de K.

3. Supóngase ahora que Q es acíclico. Entonces por el lema 2.25 KQ es un álgebra de dimensión finita. Sea $\ell \geq 1$ la longitud del camino más largo de KQ. (Puede haber más caminos). Lo anterior implica que el producto de $\ell + 1$ flechas es cero, esto es, $R^{\ell+1} = 0$. Por lo que el ideal flecha R es nilpotente y así, por el corolario 1.11, $R \subseteq \operatorname{rad}(KQ)$. Como KQ/R es isomorfo a un producto de copias de K, se sigue del corolario 1.11 y la proposición 1.34 que $\operatorname{rad}(KQ) = R$ y el álgebra KQ es básica.

■

Obsérvese que si Q no es acíclico, generalmente no es cierto que $\operatorname{rad}(KQ) = R_Q$. Por ejemplo, sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Como se ha visto anteriormente en el ejemplo 2.23, $KQ \cong K[t]$. Así $\operatorname{rad}(KQ) = 0$, porque el campo K es algebraicamente cerrado (y de ahí, infinito); entonces el conjunto $\{t - \lambda : \lambda \in K\}$ es un conjunto infinito de polinomios irreducibles, lo cual genera un conjunto infinito de ideales maximales cuya intersección es 0. Por otro lado, $R_Q = \bigoplus_{\ell > 0} K\alpha^\ell$ como K- espacio vectorial y por lo tanto no cero.

En el siguiente corolario se hace un resumen de lo observado.

Corolario 2.30. Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico. El álgebra de caminos KQ es un álgebra asociativa, básica, conexa y de dimensión finita. Teniendo el ideal flecha como radical, y al conjunto $\{\varepsilon_a = \big(a\big|\big|a\big) : a \in Q_0\}$ como un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos.

Demostración. La afirmación reúne los resultados del lema 2.25, del corolario 2.24, del lema 2.27 y de la proposición 2.29. ■

Capítulo 3

Ideales admisibles y cocientes del álgebra de caminos

En el capítulo anterior (véase el lema 2.25) se vio que el álgebra de caminos KQ de un carcaj finito Q es un álgebra asociativa y es de dimensión finita si y sólo si Q es acíclico.

El objetivo de este capítulo es estudiar los cocientes de álgebras de caminos y que sean de dimensión finita. Veremos que éstos corresponden a cierto tipo de ideales que serán llamados admisibles.

Definición 3.1. Sean Q un carcaj finito y R_Q el ideal flecha del álgebra de caminos KQ. Se dice que un ideal bilateral $\mathcal{I}$ de KQ es **admisible** si existe un número natural $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$.

Definición 3.2. Si $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ, al par $(Q, \mathcal{I})$ se le llama **carcaj acotado**.
El álgebra cociente $KQ/\mathcal{I}$ se llama el álgebra del carcaj acotado $(Q, \mathcal{I})$ o el **álgebra de carcaj acotada**.

Es claro que un ideal $\mathcal{I}$ del álgebra de carcaj KQ, contenido en R_Q^2, es admisible si y sólo si contiene a todos los caminos cuya longitud es lo suficientemente larga. Esto último sucede si y sólo si para cada ciclo σ en Q, existe $s \geq 1$ tal que $\sigma^s \in \mathcal{I}$. Si Q es acíclico, cualquier ideal contenido en R_Q^2 es admisible.

Ejemplo 3.3.

1. Para cualquier carcaj finito Q y cualquier $m \geq 2$, el ideal R_Q^m es un ideal admisible.

2. El ideal cero es admisible en el álgebra de camino KQ si y sólo si el carcaj Q es acíclico. Esto es porque el ideal cero es admisible si y sólo si

existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m = 0$, es decir, cualquier producto de m flechas en KQ es cero. Esto sucede si y sólo si Q es acíclico.

3. Sea Q el carcaj:

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\lambda" description] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

El ideal flecha R_Q se descompone como suma directa de espacios vectoriales de la siguiente manera: $KQ_1 \oplus KQ_2$ donde KQ_1 y KQ_2 tienen como K-base a los caminos de longitud 1 y 2 respectivamente.
El ideal $\mathcal{I}_1 = \langle \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ es admisible dado que $\beta\alpha$, $\delta\gamma \in R_Q^2$ por ser caminos de longitud 2 y así, $\mathcal{I}_1 \subseteq R_Q^2$. También se tiene que $R_Q^3 \subseteq \mathcal{I}_1$, ya que $R_Q^3 = 0$.
Sin embargo, el ideal $\mathcal{I}_2 = \langle \beta\alpha - \lambda \rangle$ no es admisible, ya que λ es un camino de longitud 1 y por eso $\lambda \notin R_Q^2$. De donde $\mathcal{I}_2 \not\subseteq R_Q^2$.

4. Sea Q el carcaj:

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 \arrow[loop left, "\lambda"] & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

El ideal $\mathcal{I}_1 = \langle \beta\alpha - \delta\gamma, \lambda\beta, \lambda^3 \rangle$ es admisible.
Dado que todos los elementos que generan a $\mathcal{I}_1$ son combinación lineal de caminos de longitud mayor o igual que 2, se tiene que $\mathcal{I}_1 \subseteq R_Q^2$.
Luego, nótese que cualquier camino de longitud mayor o igual que 4 cuyo origen es 1, 2 o 3 contiene a λ^3 por lo que está en $\mathcal{I}_1$.
Por otro lado, los caminos de longitud mayor o igual que 4 que empiecen en 4 contienen un camino de la forma $\lambda^2\beta\alpha$ o $\lambda^2\delta\gamma$. En el primer caso, como $\lambda\beta \in \mathcal{I}_1$ se tiene que $\lambda^2\beta\alpha \in \mathcal{I}_1$. En el segundo, se tiene que $\lambda^2\delta\gamma = \lambda^2(\delta\gamma - \beta\alpha) + \lambda^2\beta\alpha \in \mathcal{I}_1$. Así, se tiene que $R_Q^4 \subseteq \mathcal{I}_1$.
Por lo que puede concluirse que $\mathcal{I}_1$ es admisible.

Otro ideal admisible es $\mathcal{I}_2 = \langle \lambda^5 \rangle$.

Sin embargo, el ideal $\mathcal{I}_3 = \langle \lambda\beta, \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ no es admisible.
Es claro que $\mathcal{I}_3 \subseteq R_Q^2$ ya que $\mathcal{I}_3$ está generado por caminos de longitud

2. Ahora, nótese que para cualquier $m \geq 2$, el camino $\lambda^m\delta \in R_Q^m$ pero $\lambda^m\delta \notin \mathcal{I}_3$. Por lo que no existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}_3$.

5. Sea Q el carcaj:

$$1 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\leftleftarrows}} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$$

Los ideales $\mathcal{I}_1 = \langle \beta\alpha \rangle$ y $\mathcal{I}_2 = \langle \beta\alpha - \gamma\alpha \rangle$ son admisibles. Dado que Q es un carcaj acíclico, basta ver que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ están contenidos en R_Q^2 lo cual ocurre debido a que los elementos $\beta\alpha$ y $\gamma\alpha \in R_Q^2$ por ser caminos de longitud 2.

Los ejemplos anteriores muestran que es más conveniente definir un ideal admisible en términos de sus generadores. Éstas son llamadas relaciones. Recordemos que K denota un campo.

Definición 3.4. Sea Q un carcaj. Una **relación** en Q con coeficientes en K es una combinación K-lineal de caminos de longitud al menos dos que tienen el mismo vértice inicial y el mismo vértice final. Así, una relación ρ es un elemento del álgebra de camino KQ tal que

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$$

donde $\lambda_i \in K$ son escalares (no todos cero) y w_i son caminos en Q de longitud al menos dos tales que si $i \neq j$, entonces el vértice inicial (o el vértice final) de w_i coincide con el de w_j.

1. Si $m = 1$, la relación anterior se llama **relación cero** o **relación monomial**.

2. Si es de la forma $w_1 - w_2$, se le llama **relación de conmutatividad**.

3. Si $\{\rho_j\}_{j\in J}$ es un conjunto de relaciones de un carcaj Q tal que el ideal que generan $\langle \rho_j : j \in J \rangle$ es admisible, el carcaj Q está **acotado por las relaciones** $\{\rho_j\}_{j\in J}$ o por las relaciones $\rho_j = 0$ para toda $j \in J$.

Ejemplo 3.5. En el ejemplo 3.3.4, el ideal $\mathcal{I}$ se genera por una relación de conmutatividad $\rho_1 = \beta\alpha - \delta\gamma$ y dos relaciones cero $\rho_2 = \lambda\beta$ y $\rho_3 = \lambda^3$; así el carcaj Q está acotado por las relaciones $\beta\alpha = \delta\gamma$, $\lambda\beta = 0$ y $\lambda^3 = 0$.

Lema 3.6. Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible del álgebra de caminos KQ. El conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} : a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos del álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$.

Demostración. Dado que e_a es la imagen de ε_a bajo la proyección canónica $\pi\colon KQ \to KQ/\mathcal{I}$, se sigue del corolario 2.24 que el conjunto dado es un conjunto de idempotentes ortogonales.
Queda por demostrar que cada e_a es primitivo, esto es, que los únicos idempotentes de $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ son 0 y e_a (1.28).
Cualquier elemento e de $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ puede escribirse como $e = \lambda\varepsilon_a + w + \mathcal{I}$, donde $\lambda \in K$ y w es una combinación lineal de ciclos que pasan por a de longitud ≥ 1. En particular, si dicho elemento e es un idempotente, la igualdad $e^2 = e$ implica que $0 = e^2 - e = (\lambda\varepsilon_a + w)^2 - (\lambda\varepsilon_a + w) = (\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2$. Y así, $(\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2 \in \mathcal{I}$.
Sea R_Q el ideal flecha de KQ. Dado que $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$ se tiene que $\lambda^2 - \lambda = 0$, por lo que $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.
Supóngase que $\lambda = 0$, entonces $e = w + \mathcal{I}$, donde w es un idempotente módulo $\mathcal{I}$. Luego, dado que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$ para algún $m \geq 2$ se tiene que $w^m \in \mathcal{I}$. Es decir, w además es nilpotente módulo $\mathcal{I}$. Por lo que $w \in \mathcal{I}$ y e es cero.
Por otro lado, si $\lambda = 1$ entonces $e_a - e = -w + \mathcal{I}$ también es un idempotente en $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ de modo que w es de nuevo un idempotente módulo $\mathcal{I}$. Dado que, como antes, w es también nilpotente módulo $\mathcal{I}$ debe pertenecer a $\mathcal{I}$. Por lo que $e_a = e$.
Así se tiene que los únicos idempotentes de $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ son 0 y e_a. ■

Lema 3.7. Sean Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible del álgebra de caminos KQ. El álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$ es conexa si y sólo si Q es un carcaj conexo.

Demostración. Supóngase que Q es un carcaj no conexo, entonces por el lema 2.27 se tiene que el álgebra de camino KQ es no conexa. En consecuencia, KQ contiene un idempotente central γ distinto de 0 o 1 que puede (por la prueba del lema 2.26) ser elegido como una suma de caminos de longitud cero, es decir, de puntos. Pero, entonces $\gamma + \mathcal{I}$ no es igual a $\mathcal{I}$. Por otro lado, $\gamma + \mathcal{I} = 1 + \mathcal{I}$ implica que $1 - \gamma \in \mathcal{I}$, lo cual también es imposible dado que $I \subseteq R_Q^2$. Por tanto $\gamma + \mathcal{I}$ es un idempotente central del álgebra de carcaj $KQ/\mathcal{I}$ distinto de I y de $1 + I$, se deduce que ésta última es no conexa.

Supóngase ahora que Q es un carcaj conexo pero que el álgebra de carcaj $KQ/\mathcal{I}$ es no conexa. Por los lemas 2.26 y 3.6, existe una partición no trivial $Q_0 = Q_0' \dot{\cup} Q_0''$ tal que $x \in Q_0'$ y $y \in Q_0''$ implica que $e_x(KQ/\mathcal{I})e_y = 0 = e_y(KQ/\mathcal{I})e_x$. Dado que Q es conexo, existen $a \in Q_0'$ y $b \in Q_0''$ vecinos. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que existe una flecha $\alpha\colon a \to b$. Pero entonces $\alpha = \varepsilon_b\alpha\varepsilon_a$ implica que $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ satisface que $\overline{\alpha} = e_b\overline{\alpha}e_a \in e_b(KQ/\mathcal{I})e_a = 0$. Como $\overline{\alpha} \neq \mathcal{I}$, ya que $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$, se ha llegado a una contradicción. ■

Proposición 3.8. Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible del álgebra de caminos KQ. El álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$ es de dimensión finita.

Demostración. Dado que $\mathcal{I}$ es un ideal admisible, existe $m \geq 2$ tal que $R^m \subseteq I$, con R el ideal flecha de KQ. Entonces existe un homomorfismo suprayectivo de álgebras $KQ/R^m \to KQ/\mathcal{I}$ dado por $a + R^m \mapsto a + \mathcal{I}$ $\forall a \in KQ$. Se tiene que las clases residuales de los caminos de longitud menor a m forman una K-base para KQ/R^m como K-espacio vectorial. Dado que hay una cantidad finita de dichos caminos, puede concluirse que KQ/R^m es de dimensión finita. ■

Si $\mathcal{I}$ no es admisible, el álgebra $KQ/\mathcal{I}$ en general no es de dimensión finita o ni siquiera noetheriana, es decir, puede contener un ideal izquierdo que no es finitamente generado.

Ejemplo 3.9. Sean Q el carcaj:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y el ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta, \beta^2 \rangle$. Nótese que $\mathcal{I}$ no es admisible ya que $\alpha^m \in R_Q^m$ pero $\alpha^m \notin \mathcal{I}$ para cualquier $m \geq 1$. Sea $A = KQ/\mathcal{I}$ y considérese como un K-espacio vectorial y J un subespacio de A generado por los elementos de la forma $\overline{\beta}\overline{\alpha}^n$ para toda $n \geq 1$, con $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ y $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$. Se probará que J es un ideal izquierdo de A. Para esto basta probar que $\overline{\alpha}J \subseteq J$ y $\overline{\beta}J \subseteq J$.
Primero, multiplíquese al elemento $\overline{\alpha}$ de A por el elemento $\overline{\beta}\overline{\alpha}^n$ de J. Esto da $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\alpha}^n$. Nótese que $\alpha\beta \in \mathcal{I}$. Por lo que $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\alpha}^n = 0 \in J$.
De forma análoga si se multiplica $\overline{\beta}\overline{\beta}\overline{\alpha}^n = \overline{\beta}^2\overline{\alpha}^n$, como $\beta^2 \in I$, se tiene que $\overline{\beta}^2\overline{\alpha}^n = 0$ y así éste elemento pertenece a J. Con lo cual queda demostrado que J es un ideal izquierdo de A.
En particular, ${}_AJ$ es un submódulo del módulo cíclico ${}_AA$ pero no es finitamente generado. Pues, considérese un subconjunto del conjunto de generadores de J: $\{\overline{\beta}\overline{\alpha}^p, \overline{\beta}\overline{\alpha}^q, \cdots, \overline{\beta}\overline{\alpha}^m\}$ con $p, q, m \in \mathbb{N}$ tal que m es el exponente más grande de $\overline{\alpha}$ en dicho conjunto, entonces $\overline{\beta}\overline{\alpha}^{m+1} \in J$ no puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{J}$.

El siguiente resultado muestra que todo ideal admisible del álgebra de caminos KQ es finitamente generado.

Lema 3.10. Sea Q un carcaj finito. Entonces cualquier ideal admisible $\mathcal{I}$ del álgebra de camino KQ es finitamente generado.

Demostración. Sea R el ideal flecha del álgebra de caminos KQ y $m \geq 2$ un entero tal que $R^m \subseteq \mathcal{I}$. Se tiene a la sucesión exacta corta (véase 1.31) $0 \to R^m \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}/R^m \to 0$ de KQ-módulos. Por lo que basta demostrar que R^m e $\mathcal{I}/R^m$ son finitamente generados como KQ-módulos. Dado que R^m es el KQ-módulo generado por los caminos de longitud m. Como hay una cantidad finita de dichos caminos, R^m es finitamente generado. Por otro lado, $\mathcal{I}/R^m$ es un ideal del álgebra de dimensión finita KQ/R^m (véase 3.8). Por lo tanto, $\mathcal{I}/R^m$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita y así, un KQ-módulo finitamente generado. ■

Corolario 3.11. Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible del álgebra de caminos KQ. Entonces existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, \ldots, p_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \ldots, p_m \rangle$.

Demostración. Por el lema 3.10, un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ siempre tiene un conjunto generador finito $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\}$ cuyos elementos σ_i no tienen necesariamente los mismos vértices iniciales (o finales). Sin embargo, el término $\varepsilon_b \sigma_i \varepsilon_a$ es cero o una relación para cualquier $i \in \{1, \ldots, t\}$ y a, $b \in Q_0$.

Dado que $\sigma_i = \displaystyle\sum_{a,b \in Q_0} \varepsilon_b \sigma_i \varepsilon_a$ para $i \in \{1, \ldots, t\}$, los elementos distintos de cero en el conjunto $\{\varepsilon_b \sigma_i \varepsilon_a : i \in \{1, \ldots, t\}, a, b \in Q_0\}$ forman un conjunto finito de relaciones que generan al ideal $\mathcal{I}$. ■

Lema 3.12. Sean Q un carcaj finito, R el ideal flecha del álgebra de caminos KQ e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. Entonces $\operatorname{rad}(KQ/\mathcal{I}) = R/\mathcal{I}$. Más aún, el álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$ es básica.

Demostración. Dado que $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ, existe $m \geq 2$ tal que $R^m \subseteq \mathcal{I}$. En consecuencia, $(R/\mathcal{I})^m = 0$ y $R/\mathcal{I}$ es un ideal nilpotente de $KQ/\mathcal{I}$. Por otro lado, el álgebra $(KQ/\mathcal{I})/(R/I) \cong KQ/R$ es isomorfa a un producto directo de copias de K, por la proposición 2.29. Esto implica las dos afirmaciones, por el corolario 1.11. ■

Corolario 3.13. Para cada $n \geq 1$, se tiene que $rad^n(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})^n$. ■

Se sigue del lema 3.12 y del corolario 3.13 que el K-espacio vectorial

$$rad(KQ/\mathcal{I})/rad^2(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})/(R_Q/\mathcal{I})^2 \cong R_Q/R_Q^2$$

tiene como base al conjunto $\overline{\alpha} + rad^2(KQ/\mathcal{I})$, donde $\overline{\alpha} = \alpha + KQ/\mathcal{I}$ y $\alpha \in Q_1$.

En el siguiente corolario se hace un resumen de todo lo observado anteriormente.

Corolario 3.14. Sean Q un carcaj finito y conexo, R el ideal flecha del álgebra de caminos KQ e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El álgebra $KQ/\mathcal{I}$ es un álgebra básica, conexa y de dimensión finita, con $R/\mathcal{I}$ como radical y $\{e_a : a \in Q_0\}$ como un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos.

Demostración. La afirmación reúne los resultados del lema 3.6, el lema 3.7, la proposición 3.8 y el lema 3.12. ■

Ejemplo 3.15. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift left, "\alpha_3"] & 4 \arrow[l, shift left, "\beta_3"] \end{tikzcd}$$

Y sea el ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha_2\alpha_1, \alpha_3\alpha_2, \beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2, \alpha_2\beta_2 - \beta_3\alpha_3, \alpha_3\beta_3 \rangle$.

Por el lema 2.25 se tiene que el álgebra de caminos KQ no es de dimensión finita ya que Q es un carcaj finito pero no acíclico.
El ideal $\mathcal{I}$ es admisible, ya que todos los elementos que generan a $\mathcal{I}$ son combinación lineal de caminos de longitud ≥ 2, se tiene que $\mathcal{I} \subseteq R^2$, con R el ideal flecha de KQ. Y también dada $m = 3$ se tiene que $R^m \subseteq \mathcal{I}$. Como ejemplo se muestra que el camino $\alpha_1\beta_1\alpha_1$ pertenece al ideal $\mathcal{I}$. Pues, si se considera $\alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2 := i$, multiplicando por α_1 se obtiene que $(\alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2)\alpha_1 = i\alpha_1$. De donde $\alpha_1\beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2\alpha_1 = i\alpha_1$, lo cual implica la igualdad $\alpha_1\beta_1\alpha_1 = i\alpha_1 + \beta_2\alpha_2\alpha_1$. Dado que $\alpha_2\alpha_1, i \in \mathcal{I}$, se tiene que $\beta_2\alpha_2\alpha_1, i\alpha_1 \in \mathcal{I}$. Y así, $\alpha_1\beta_1\alpha_1 \in \mathcal{I}$.

Ahora, por la proposición 3.8 se tiene que el álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$ es de dimensión finita. Además, su K-base es $\{\overline{e_1}, \overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1\alpha_1}, \overline{e_2}, \overline{\alpha_2}, \overline{\beta_2\alpha_2}, \overline{\beta_1}, \overline{e_3}, \overline{\alpha_3}, \overline{\beta_2}, \overline{\beta_3\alpha_3}, \overline{e_4}, \overline{\beta_3}\}$. Luego, por el lema 3.12 se tiene que $rad(KQ/\mathcal{I}) = R/\mathcal{I}$ y su base es el siguiente conjunto $\{\overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\beta_1\alpha_1}, \overline{\beta_1}, \overline{\alpha_3}, \overline{\beta_2}, \overline{\beta_3\alpha_3}, \overline{\beta_3}\}$.

Además, se tiene que $KQ/\mathcal{I}$ es un álgebra básica y conexa, esto último debido a que Q es un carcaj conexo. Ahora, obsérvese que $Ae_1 \ncong Ae_2$ dado que $\dim_K(Ae_1) = 3 \neq 4 = \dim_K(Ae_2)$. Análogamente $Ae_1 \ncong Ae_3$ y $Ae_1 \ncong Ae_4$. Falta ver que $Ae_2 \ncong Ae_3$, debido a que ambas son de dimensión 4. Supóngase que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & Ae_2 & \to & Ae_3 \\ & \overline{\varepsilon_2} & \mapsto & \overline{\beta_2} \\ & \overline{\alpha_2} & \mapsto & \overline{\alpha_2}\overline{\beta_2} \\ & \overline{\beta_2}\overline{\alpha_2} & \mapsto & \overline{\beta_2}\overline{\alpha_2}\overline{\beta_2} = \overline{\alpha_1}\overline{\beta_1\beta_2} = 0 \end{array}$$

Por lo que $\overline{\beta_2\alpha_2} \in \ker(f)$, es decir no es inyectiva. Por lo tanto se tiene una contradicción.

Ejemplo 3.16. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Se vio en el ejemplo 2.23.2 que $KQ \cong K\langle t_1, t_2\rangle$. Obsérvese que el ideal $\mathcal{I}$ generado por $\beta\alpha - \alpha\beta$, β^2, α^2 es admisible. Dado que todos los elementos que generan a $\mathcal{I}$ son combinación lineal de caminos de longitud ≥ 2, se tiene que $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$. Y cualquier camino de longitud ≥ 3 contiene alguno de los siguientes términos: α^2, β^2, $\alpha\beta\alpha$ o $\beta\alpha\beta$. En los primeros dos casos, es claro que el camino pertenecerá a $\mathcal{I}$. Luego, como $\alpha\beta\alpha = \alpha(\beta\alpha - \alpha\beta) + \alpha^2\beta \in \mathcal{I}$ y $\beta\alpha\beta = (\beta\alpha - \alpha\beta)\beta + \alpha\beta^2 \in \mathcal{I}$ queda probado que $R_Q^3 \subseteq \mathcal{I}$. El álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$ tiene por base al conjunto $\{e_1, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\beta\alpha}\}$. De hecho, $KQ/\mathcal{I} \cong K[t_1, t_2]/\langle t_1^2, t_2^2\rangle$ bajo el siguiente isomorfismo:

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & KQ/\mathcal{I} & \to & K[t_1,t_2]/\langle t_1^2, t_2^2\rangle \\ & e_1 & \mapsto & 1 + \langle t_1^2, t_2^2\rangle \\ & \overline{\alpha} & \mapsto & t_1 + \langle t_1^2, t_2^2\rangle \\ & \overline{\beta} & \mapsto & t_2 + \langle t_1^2, t_2^2\rangle \\ & \overline{\beta\alpha} & \mapsto & t_1t_2 + \langle t_1^2, t_2^2\rangle \end{array}$$

Capítulo 4

El carcaj de un álgebra de dimensión finita

En este capítulo partiremos de una K-álgebra básica A, conexa, de dimensión finita con K un campo algebraicamente cerrado y se demostrará que A es isomorfa a un álgebra de carcaj acotada $KQ/\mathcal{I}$, donde Q es un carcaj finito y conexo e $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ. Empezaremos asociando un carcaj finito a cada álgebra conexa de dimensión finita A.

Definición 4.1. Sean A una K-álgebra básica, conexa, de dimensión finita y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos de A. El **carcaj (ordinario)** de A, denotado por Q_A, se define de la siguiente manera:

1. Los vértices de Q_A son los números $1, 2, \ldots, n$ los cuales tienen una correspondencia biyectiva con los idempotentes $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

2. Dados dos vértices a, $b \in (Q_A)_0$, las flechas $\alpha\colon a \to b$ tienen una correspondencia biyectiva con los vectores de una base del K-espacio vectorial $e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a$.

Observación. La dimensión del K-espacio vectorial $e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a$ siempre es finita.

Demostración. Dado que $\operatorname{rad} A$ es un ideal de A, en particular es un subespacio vectorial de A de donde también es de dimensión finita. Además, $\operatorname{rad}^2 A$ es un ideal de $\operatorname{rad} A$. De donde el cociente $\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A$ es de dimensión finita. Finalmente, se tiene $e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a$ es de dimensión finita, pues es un subespacio vectorial de $\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A$. ■

En consecuencia de la observación anterior, Q_A es finito.

El carcaj Q_A se construye a partir de un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos, por lo que debe probarse que no depende del conjunto elegido. Esto es lo primero que afirma la siguiente proposición.

Proposición 4.2. Sea A un álgebra básica, conexa y de dimensión finita.

1. El carcaj Q_A de A no depende de la elección del conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos en A.

2. Para cualquier par e_a, e_b de idempotentes ortogonales primitivos de A la K-transformación lineal

$$\psi\colon e_b(\operatorname{rad} A)e_a/e_b(\operatorname{rad}^2 A)e_a \to e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a$$

tal que $e_bxe_a + e_b(\operatorname{rad}^2 A)e_a \mapsto e_b(x + \operatorname{rad}^2 A)e_a$ es un isomorfismo.

Demostración.

1. El número de vértices en Q_A es único, pues es igual al número de sumandos directos inescindibles de ${}_AA$, y éste último es único por el teorema de descomposición única (1.29). Por otro lado, el mismo teorema dice que los factores de esta descomposición son únicos salvo isomorfismo, es decir, si

$${}_AA = \bigoplus_{a=1}^{n} Ae_a = \bigoplus_{b=1}^{n} Ae'_b$$

son dos descomposiciones en inescindibles del módulo regular ${}_AA$, entonces pueden renumerarse los factores de modo que $Ae_a \cong Ae'_a$, para cada $a \in \{1, \ldots, n\}$. Debe probarse que esto implica que para cada par a, b se tiene que $\dim_K e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a = \dim_K e'_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e'_a$. Cálculos rutinarios muestran que el A-morfismos de módulos $\varphi\colon (\operatorname{rad} A)e_a \to (\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a$ dado por $xe_a \mapsto (x + \operatorname{rad}^2 A)e_a$ tiene a $(\operatorname{rad}^2 A)e_a$ como kernel. En consecuencia,

$$(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a \cong (\operatorname{rad} A)e_a/(\operatorname{rad}^2 A)e_a \cong \operatorname{rad}(Ae_a)/\operatorname{rad}^2(Ae_a).$$

Por lo que se tiene la siguiente secuencia de isomorfismos entre K-espacios vectoriales

$$\begin{aligned} e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a &\cong e_b[\operatorname{rad}(Ae_a)/\operatorname{rad}^2(A)e_a] \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(Ae_b, \operatorname{rad}(Ae_a)/\operatorname{rad}^2(Ae_a)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(Ae'_b, \operatorname{rad}(Ae'_a)/\operatorname{rad}^2(Ae'_a)) \\ &\cong e'_b[\operatorname{rad}(Ae'_a)/\operatorname{rad}^2(A)e'_a] \\ &\cong e'_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e'_a \end{aligned}$$

2. Es claro que la K-transformación lineal $e_b(\operatorname{rad} A)e_a \to e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a$ dada por $e_b x e_a \mapsto e_b(x + \operatorname{rad}^2 A)e_a$ tiene como kernel a $e_b(\operatorname{rad}^2 A)e_a$. Así puede concluirse que la transformación ψ es un isomorfismo.

$\blacksquare$

La siguiente proposición establece que cada elemento del $\operatorname{rad} A$ puede ser escrito como una combinación lineal de un producto de ciertos elementos especiales y la usaremos más adelante para probar el Teorema de Gabriel.

Proposición 4.3. Para cada flecha $\alpha\colon i \to j$ en $(Q_A)_1$, sea $x_\alpha \in e_j(\operatorname{rad} A)e_i$ tal que el conjunto $\{x_\alpha + \operatorname{rad}^2 A : \alpha\colon i \to j\}$ es una base de $e_j(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_i$. Entonces

1. para cualesquiera dos vértices $a, b \in (Q_A)_0$, todo elemento $x \in e_b(\operatorname{rad} A)e_a$ puede escribirse de la forma: $x = \sum \lambda_{\alpha_\ell \ldots \alpha_2\alpha_1} x_{\alpha_\ell} \ldots x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}$, donde $\lambda_{\alpha_\ell \ldots \alpha_2\alpha_1} \in K$ y la suma se toma sobre todos los caminos $\alpha_\ell \ldots \alpha_2\alpha_1$ en Q_A que van de a a b; y

2. para cada flecha $\alpha\colon i \to j$, el elemento x_α determina un no-isomorfismo distinto de cero $\tilde{x}_\alpha \in \operatorname{Hom}_A(Ae_j, Ae_i)$ tal que $\tilde{x}_\alpha(e_j) = x_\alpha$, $\operatorname{im} \tilde{x}_\alpha \subseteq (\operatorname{rad} A)e_i$ e $\operatorname{im} \tilde{x}_\alpha \nsubseteq (\operatorname{rad}^2 A)e_i$.

Demostración.

1. Dado que, como un K-espacio vectorial, $\operatorname{rad} A \cong (\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A) \oplus \operatorname{rad}^2 A$, se tiene que $e_b(\operatorname{rad} A)e_a \cong e_b(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_a \oplus e_b(\operatorname{rad}^2 A)e_a$. Por lo que x puede ser escrita de la forma

$$x = \sum_{\alpha\colon a \to b} \lambda_\alpha x_\alpha \text{ módulo } e_b(\operatorname{rad}^2 A)e_a$$

donde $\lambda_\alpha \in K$ para cualquier flecha α de a a b o,

$$x' = x - \sum_{\alpha\colon a \to b} \lambda_\alpha x_\alpha \in e_b(\operatorname{rad}^2 A)e_a.$$

La descomposición $\operatorname{rad} A = \bigoplus_{i,j} e_j(\operatorname{rad} A)e_i$ implica que

$$e_b(\operatorname{rad}^2 A)e_a = \sum_{c \in (Q_A)_0} [e_b(\operatorname{rad} A)e_c][e_c(\operatorname{rad} A)e_a]$$

de manera que $x' = \sum_{c \in (Q_A)_0} x'_c y'_c$ donde $x'_c \in e_b(\operatorname{rad} A)e_c$ y $y'_c \in e_c(\operatorname{rad} A)e_a$.

Por lo anterior, se tienen expresiones de la forma $x'_c = \sum_{\beta\colon a \to c} x_\beta \lambda_\beta$ y

$y'_c = \sum_{\gamma\colon c\to b} x_\gamma\lambda_\gamma$ módulo $\operatorname{rad}^2 A$, donde $\lambda_\beta, \lambda_\gamma \in K$. Así,

$$x = \sum_{\alpha\colon a\to b} x_\alpha\lambda_\alpha + \sum_{\beta\colon a\to c}\sum_{\gamma\colon c\to b} x_\beta x_\gamma\lambda_\beta\lambda_\gamma \text{ módulo } e_b(\operatorname{rad}^3 A)e_a.$$

La prueba queda completa por inducción usando el hecho de que $\operatorname{rad} A$ es nilpotente.

2. Por hipótesis, el elemento $x_\alpha \in e_j(\operatorname{rad} A)e_i$ es no cero y es enviado a un elemento distinto de cero $\tilde{x}_\alpha$ por el K-isomorfismo lineal $e_j(\operatorname{rad} A)e_i \cong \operatorname{Hom}_A(Ae_j, (\operatorname{rad} A)e_i)$ (1.24).
Se sigue que $\tilde{x}_\alpha(e_j) = x_\alpha$, $\operatorname{im}(\tilde{x}_\alpha) \subseteq (\operatorname{rad} A)e_i$, e $\operatorname{im}(\tilde{x}_\alpha) \nsubseteq (\operatorname{rad}^2 A)e_i$. Lo cual concluye la prueba.

■

Proposición 4.4. Si A es un álgebra básica, conexa y de dimensión finita, entonces el carcaj Q_A es conexo.

Demostración. Supongamos que el carcaj Q_A no es conexo. Entonces, el conjunto $(Q_A)_0$ de vértices de Q_A puede ser escrito como la unión disjunta de dos conjuntos no vacíos Q'_0 y Q''_0 tales que los vértices de Q'_0 no están conectados a los de Q''_0. Si $i \in Q'_0$ y $j \in Q''_0$, se tiene que $e_iAe_j = 0$ y $e_jAe_i = 0$. Esto ya que si $i \neq j$, el lema 1.24 implica

$$e_jAe_i \cong \operatorname{Hom}_A(Ae_j, Ae_i) \cong \operatorname{Hom}_A(Ae_j, \operatorname{rad} Ae_i) \cong e_j(\operatorname{rad} Ae_i) \cong e_j(\operatorname{rad} A)e_i.$$

Y dado que $e_j(rad(A))e_i = 0$ pues i y j no están conectados, se tiene que A no es conexa. ■

Ejemplo 4.5.

1. Si $A = K[t]/\langle t^m\rangle$, donde $m \geq 1$, entonces Q_A tiene sólo un vértice, pues que el único idempotente distinto de cero de A es su identidad. Se tiene que $\operatorname{rad}(A) = \langle\bar{t}\rangle$, donde $\bar{t} = t + \langle t^m\rangle$; en efecto, $\langle\bar{t}\rangle^m = 0$ y $A/\langle\bar{t}\rangle \cong K$. En consecuencia, $\operatorname{rad}^2(A) = \langle\bar{t}^2\rangle$ y $\dim_K(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A)) = 1$. Una base de $A/\operatorname{rad}^2(A)$ está dada por la clase de $\bar{t}$ en el cociente $\langle\bar{t}\rangle/\langle\bar{t}^2\rangle$. Así, Q_A es el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

2. Sea A el álgebra de las matrices triangulares de $n \times n$ de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K & K & 0 & \cdots & 0 \\ K & 0 & K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ K & 0 & 0 & \cdots & K \end{bmatrix}$$

es decir, un elemento de A puede tener un coeficiente no cero sólo en la primera columna o en la diagonal principal y tiene ceros en todo lo demás. Un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de A es:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\mathrm{rad}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ K & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathrm{rad}^2(A) = 0$.

Dado que $\dim_K(\mathrm{rad}(A)) = n-1$, cálculos rutinarios muestran que los espacios vectoriales $e_1(\mathrm{rad}(A))e_i$ con $i \in \{2, \ldots, n\}$ tienen dimensión uno y los espacios restantes son cero. Entonces Q_A es el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 & & & \\
2 \arrow[urrr, "\alpha_2"] & 3 \arrow[urr, "\alpha_3"] & 4 \arrow[ur, "\alpha_4"] & \cdots & n-2 \arrow[ul, "\alpha_{n-2}"'] & n-1 \arrow[ull, "\alpha_{n-1}"'] & n \arrow[ulll, "\alpha_n"']
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.6. Sean Q un carcaj conexo y finito, $\mathcal{I}$ un ideal admisible del álgebra de caminos KQ, y $A = KQ/\mathcal{I}$. Entonces $Q_A = Q$

Demostración. Por el lema 3.6, el conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} : a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos de $A = KQ/\mathcal{I}$. Así, los vértices de Q_A tienen una correspondencia biyectiva con los vértices de Q. Por otro lado, por el corolario 3.13, las flechas de a a b en Q tienen una correspondencia biyectiva con los vectores en la base del K-espacio vectorial $e_b(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_a$, de donde también la tiene con las flechas de a a b en Q_A. ■

Finalmente se tiene todo lo necesario para demostrar el Teorema de Gabriel.

Teorema 4.7 (Gabriel)**.** Sean A una K-álgebra básica, conexa y de dimensión finita. Entonces existe un carcaj Q y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I}$.

Demostración. Primero se construirá un homomorfismo de álgebras $\varphi \colon KQ_A \to A$ para luego probar que φ es suprayectivo y que su kernel es un ideal admisible de KQ_A.
Para cada flecha $\alpha \colon i \to j$ en $(Q_A)_1$, sea $x_\alpha \in \operatorname{rad}(A)$ elegido de tal manera que $\{x_\alpha + \operatorname{rad}^2(A) : \alpha \colon i \to j\}$ forme una base del K-espacio vectorial $e_j(\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A))e_i$.
Considérense las siguientes transformaciones lineales:

$$\begin{aligned} \varphi_0 \colon \quad (Q_A)_0 &\to A \\ a &\mapsto e_a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \varphi_1 \colon \quad (Q_A)_1 &\to A \\ \alpha &\mapsto x_\alpha \end{aligned}$$

Los elementos de la forma $\varphi_0(a)$ constituyen un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos en A, y si $\alpha \colon a \to b$, se tiene lo siguiente:

$$\varphi_0(b)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(a) = e_b x_\alpha e_a = x_\alpha = \varphi_1(\alpha)$$

Por la propiedad universal de las álgebras de caminos (2.22) existe un único homomorfismo de K-álgebras $\varphi \colon KQ_A \to A$ que extiende a φ_0 y φ_1.

Ahora se verá que φ es suprayectiva. Dado que su imagen es generada por los elementos e_a con $a \in (Q_A)_0$ y x_α con $\alpha \in (Q_A)_1$, basta probar que estos mismos elementos generan a A. Como K es algebraicamente cerrado, se sigue del teorema de *Wedderburn - Malcev* (1.13) que el homomorfismo canónico suprayectivo de álgebras $\pi \colon A \to A/\operatorname{rad}(A)$ se escinde. Por lo que la siguiente sucesión, donde i es la inclusión, se escinde:

$$0 \to \operatorname{rad} A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/\operatorname{rad} A \to 0$$

Por lo tanto, $A \cong \operatorname{rad} A \oplus A/\operatorname{rad} A$. Por un lado $A/\operatorname{rad} A$ es generado por los elementos e_a, pues según la proposición 1.34, el conjunto $\{e_a + \operatorname{rad} A : a \in (Q_A)_0\}$ lo genera como K-espacio vectorial. Por otro lado, $\operatorname{rad}(A)$ puede ser escrito como una combinación lineal de un producto de elementos en los x_α y esto se sigue del lema 4.3.

Aún falta probar que $\mathcal{I} = \ker(\varphi)$ es admisible. Sea R el ideal flecha de KQ_A. Primero se probará que $\mathcal{I} \subseteq R^2$. Si $x \in \mathcal{I}$, entonces puede escribirse

$$x = \sum_{a \in (Q_A)_0} \lambda_a \varepsilon_a + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha \alpha + y$$

donde λ_a, $\mu_\alpha \in K$ y $y \in R^2$. Como $\varphi(x) = 0$, se tiene que

$$0 = \sum_{a \in (Q_A)_0} \lambda_a e_a + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha + \varphi(y).$$

Por lo que $\sum_{a \in (Q_A)_0} \lambda_a e_a = -\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha - \varphi(y) \in \operatorname{rad}(A)$. Dado que $\operatorname{rad}(A)$ es nilpotente y los elementos e_a son idempotentes ortogonales, se deduce que para cualquier $a \in (Q_A)_0$, $\lambda_a = 0$. De donde $\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha x_\alpha = -\varphi(y) \in \operatorname{rad}^2(A)$ y se tiene la igualdad $\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \mu_\alpha (x_\alpha + \operatorname{rad}^2(A)) = 0$ en $\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A)$. Pero el conjunto $\{x_\alpha + \operatorname{rad}^2(A) : \alpha \in (Q_A)_1\}$ es, por construcción, una base de $\operatorname{rad}(A)/\operatorname{rad}^2(A)$. En particular un conjunto linealmente independiente y por tanto para cada $\alpha \in (Q_A)_1$ $\mu_\alpha = 0$ y así $x = y \in R^2$.

Ahora se probará que $R^m \subseteq \mathcal{I}$. Por definición de φ, se tiene que $\varphi(R) \subseteq \operatorname{rad}(A)$ y por lo tanto para cada $n \geq 1$ $\varphi(R^n) \subseteq \operatorname{rad}^n(A)$. Dado que el $\operatorname{rad}(A)$ es nilpotente, existe $m \geq 1$ tal que $\operatorname{rad}^m(A) = 0$ y en consecuencia $R^m \subseteq \ker(\varphi) = \mathcal{I}$. ■

Definición 4.8. Sea A una K-álgebra básica, conexa y de dimensión finita. Un isomorfismo $A \cong KQ_A/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ_A (igual al construido en el teorema 4.7) se llama **presentación** del álgebra A como un álgebra de carcaj acotada.

Ejemplo 4.9.

1. En el ejemplo 4.5.1, el homomorfismo de K-álgebras $\varphi\colon KQ_A \to A$ está definido por $\varphi(\varepsilon_1) = 1$, $\varphi(\alpha) = \bar{t}$. Claramente φ es suprayectivo y $\ker(\varphi) = \langle \alpha^m \rangle$.

2. En el ejemplo 4.5.2, el homomorfismo de K-álgebras $\varphi\colon KQ_A \to A$ está definido por

$$\varphi(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \varphi(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$\varphi(\varepsilon_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \varphi(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$\varphi(\alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varphi(\alpha_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$ la K-subálgebra de $\mathbb{M}_3(K)$ y sea B la subálgebra de A que consiste de todas las matrices $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \in A$ tales que $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33}$.

   Obsérvese que B es conmutativa, pues dadas $\lambda_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ e & f & d \end{pmatrix} \in B$. Se tiene que:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & ad & 0 \\ bd + ae & cd + af & ad \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \lambda_1.$$

   Además, es un álgebra local.
   Sea $e \in B$ un idempotente.

Entonces $e = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
Es decir, $\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2ab & 2ac & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
Lo cual sólo puede pasar si se tienen las siguientes igualdades: $a^2 = a$, $b = 2ab$, $c = 2ac$. De donde, se tienen dos casos. Uno donde $a = 0$ por lo que $b = 0$ y $c = 0$. Y otro donde $a = 1$ por lo que $b = 2b$ y $c = 2c$, lo cual sólo puede pasar si $b = 0$ y $c = 0$. De estos casos podemos concluir que los únicos idempotentes de B son los idempotentes triviales y por lo tanto, B es un álgebra local según el lema 1.26.
Ahora, obsérvese que para una matriz $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} \in B$ se tiene que su matriz inversa será $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{a^2} & \frac{-c}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ si y sólo si $a \neq 0$.
Es decir, el conjunto $\left\{ \lambda \in B : \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \text{ con } b, c \in K \right\}$ es el conjunto de los elementos no invertibles y por lo tanto, es el radical de B por el corolario 1.27. Además, $\operatorname{rad}^2 B = 0$.
Ahora, es claro que B es un álgebra básica, conexa, de dimensión finita. Además, sólo tiene un idempotente ortogonal y primitivo: $Id_{3\times 3}$. Esto último indica, según la definición 4.1 que su carcaj ordinario tiene sólo un vértice.
Siguiendo la definición, dado que $\dim_K(e_1(\operatorname{rad} B/\operatorname{rad}^2 B)e_1) = \dim_K(\operatorname{rad} B) = 2$, existen dos flechas cuyo inicio y fin está en el vértice 1. Así, su carcaj asociado es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Ahora, el homomorfismo de K-álgebras $\varphi\colon KQ_B \to B$ está definido por

$$\varphi(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo visto en los ejemplos 2.23.2 y 3.16, se tiene también que $B \cong K[t_1, t_2]/\langle t_1^2, t_2^2 \rangle$.

Bibliografía

[1] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller, *Rings and categories of modules*, 2 ed., vol. 13, Springer-Verlag New York, 1992.

[2] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski, and Daniel Simson, *Elements of the representation theory of associative algebras: Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 1, Cambridge University Press, 2006.

[3] Paul E. Bland, *Rings and their modules*, De Gruyter, 2011.

[4] L. Salmerón C. Cibilis, F. Larrión, *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, Monografías del Instituto de Matemáticas 11, 1982.

[5] Isaac Barrón Jiménez, *Introducción a álgebras de dimensión finita*, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2022.

[6] Yurij A. Drozd Vladimir V. Kirichenko, *Finite dimensional algebras*, Springer Berlin, Heidelberg, 1994.

[7] Emmy Noether, *Hyperkomplexe größen und darstellungstheorie*, Mathematische Zeitschrift (1929).

[8] Richard S. Pierce, *Associative algebras*, Springer New York, NY, 1982.

[9] Joseph J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, 2 ed., Springer, 2009.