



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

**MODELAMIENTO REOLÓGICO DEL FLUJO  
PULSÁTIL DE SANGRE DE RATAS WISTAR CON EL  
MODELO DE JEFFREY MULTIMODAL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO QUÍMICO**

**P R E S E N T A :**

**DAVID RICARDO CHIRINO BONILLA**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**CO-ASESORES:**

**DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA**

**M. C. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES**

**CIUDAD DE MÉXICO 2023**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi familia, especialmente a mis amados padres Victor y Margarita,

Les dedico este trabajo con el que termino una etapa de mi vida ya que sin un ustedes nada de esto habría sido posible. Le agradezco a la vida por haberme dado a los mejores padres del mundo y les agradezco a ustedes por su apoyo, su amor y su paciencia. Los amo.

A mis amigos a Anita, Ignacio, Jair y Malcolm por brindarme su amistad durante todos estos años, motivarme en los días difíciles y estar siempre presentes cuando los necesité, gracias.

Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de tesis.

Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.

A la carrera de Ingeniería Química impartida en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.

A los profesores que me formaron durante mi estancia en la facultad por compartir sus conocimientos y experiencias.

A mi asesor, el Dr. Edtson Emilio por su apoyo, motivación y paciencia.

## NOMENCLATURA

De	Número de Deborah
G	Módulo elástico
$J_V$	Función de Bessel de primera especie de orden $v$
K	Permeabilidad
R	Radio del tubo capilar
L	Longitud del capilar
p	Presión
Q	Flujo volumétrico
t	Tiempo
$t_c$	Tiempo de relajación
$t_p$	Tiempo de proceso
V	Vector Velocidad
$Y_V$	Función de Bessel de segunda especie de orden $v$

## LETRAS GRIEGAS

$\alpha$	Parámetro alfa
$\beta$	Parámetro adimensional beta
$\eta$	Viscosidad
$\Gamma$	Función gamma
$\gamma$	Tensor de deformación infinitesimal

$\dot{\gamma}$	Tensor Velocidad de deformación
$\lambda_0$	Tiempo de relajación
$\lambda_J$	Tiempo de retardo
$\sigma$	Tensor de esfuerzos cortantes
$\rho$	Densidad
$\omega$	Frecuencia
$\varphi_c$	Fluidez característica
$\pi$	Número pi

## OPERADORES

$O_\eta$	Operador viscosidad
$O_\phi$	Operador fluidez
$\dot{O}_\phi$	Operador fluidez adimensional
$\dot{O}_{\phi J}$	Operador fluidez dimensional de Jeffrey
$\nabla$	Operador Nabla

## FUNCIONES

T	Función de transferencia
$\dot{T}$	Función de transferencia adimensional
cos	Función coseno
sin	Función seno

## CONTENIDO

<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>i</b>
<b>Resumen.....</b>	<b>vii</b>
<b>CAPITULO I.....</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción .....</b>	<b>2</b>
<b>2. Antecedentes.....</b>	<b>3</b>
<b>3. Planteamiento Del Problema .....</b>	<b>5</b>
3.1. Hipótesis .....	5
3.2. Objetivos.....	5
<b>CAPITULO II .....</b>	<b>7</b>
<b>4. Marco teórico .....</b>	<b>8</b>
4.1. Reología .....	8
4.1.1. Número de Deborah.....	8
4.1.2. Viscoelasticidad.....	9
4.2. Reología de la sangre .....	13
4.2.1. Colesterol.....	14
4.3. Ratas Wistar .....	16
4.4. Permeabilidad intrínseca.....	17
4.5. Función de Transferencia.....	18
<b>CAPITULO III.....</b>	<b>20</b>
<b>5. Modelado Matemático .....</b>	<b>21</b>
5.1. Modelo Newtoniano.....	21
5.1.1. Flujo A Través De Un Capilar En Estado Estacionario.....	24
5.1.2. Flujo A Través De Una Corona Circular En Estado Estacionario.....	26
5.2. Funciones de Transferencia .....	28
5.2.1. Función De Transferencia De Un Fluido Viscoelástico Lineal En Un Capilar En Estado No Estacionario.....	31

5.2.2. Función De Transferencia De Un Fluido Viscoelástico Lineal A Través De Una Corona Circular En Estado No Estacionario .....	33
5.3. Ecuaciones y Variables Adimensionales .....	36
5.3.1. Análisis del parámetro $\beta$ .....	36
5.3.2. Funciones de Transferencia Adimensionales .....	37
<b>CAPÍTULO IV .....</b>	<b>39</b>
<b>6. Simulaciones y análisis de resultados.....</b>	<b>40</b>
6.1. Flujo en un capilar con diferentes valores de De y $\lambda J = 0.1$ .....	40
6.2. Flujo en un capilar con diferentes valores de $\lambda J$ y De =1 .....	43
6.3. Flujo en una corona circular con diferentes valores de R, De=1 y $\lambda J = 0.1$ .....	145
6.4. Flujo en una corona circular con diferentes valores de $\lambda J$ , De=1 y $R = 0.1$ .....	148
6.5. Aplicación Biológica a Sangre de Ratas Tipo Wistar .....	50
<b>CAPITULO V.....</b>	<b>53</b>
<b>7. Conclusiones .....</b>	<b>54</b>
<b>8. Trabajo futuro.....</b>	<b>55</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>56</b>
<b>Apéndice A. Ecuaciones Generales.....</b>	<b>60</b>
<b>Apéndice B. Funciones de Bessel .....</b>	<b>61</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1-1. Representación mecánica del modelo de Maxwell .....	10
Figura 4.1-2 Representación mecánica del modelo de Jeffrey con un arreglo en paralelo. .....	11
Figura 4.1-3. Representación mecánica para un modelo multimodal de Maxwell de n elementos.....	12
Figura 4.1-4. Modelo de Jeffrey multimodal .....	13
Figura 4.2-1. Fórmula química del colesterol. Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-SA .....	15
Figura 4.3-1 Fotografía de una rata Wistar. Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND .....	17
Figura 4.5-1 Diagrama de bloques de una función de transferencia.....	19
Figura 5.1-1. Esquema de un capilar de radio $r=R_2$ y longitud $z=L$ .....	24
Figura 5.1-2 Esquema de una corona circular de radios $r=R_1$ ; y $r=R_2$ y longitud $z=L$ ....	26
Figura 6.1-1 Parte real de la función de transferencia $T1\omega$ con diferentes valores de Deborah y $\lambda J = 0.1$ .....	41
Figura 6.1-2 Parte imaginaria de la función de transferencia $T1\omega$ con diferentes valores de Deborah y $\lambda J = 0.1$ .....	42
Figura 6.1-3 Norma de la función de transferencia $T1\omega$ con diferentes valores de Deborah y $\lambda J = 0.1$ .....	42
Figura 6.2-1 Parte real de la función de transferencia $T1\omega$ con diferentes valores de $\lambda J$ y $De = 1$ .....	44
Figura 6.2-2 Parte imaginaria de la función de transferencia $T1\omega$ con diferentes valores de $\lambda J$ y $De = 1$ .....	44
Figura 6.2-3 Norma de la función de transferencia $T1\omega$ con diferentes valores de $\lambda J$ y $De = 1$ .....	45

Figura 6.3-1 Parte real de la función de transferencia $T2\omega$ con diferentes valores de $R$ ; $\lambda J = 0.1$ y $De = 1$ .	46
Figura 6.3-2 Parte imaginaria de la función de transferencia $T2\omega$ con diferentes valores de $R$ ; $\lambda J = 0.1$ y $De = 1$ .	47
Figura 6.3-3 Norma de la función de transferencia $T2\omega$ con diferentes valores de $R$ ; $\lambda J = 0.1$ y $De = 1$ .	47
Figura 6.4-1 Parte real de la función de transferencia $T2\omega$ con diferentes valores de $\lambda J$ ; $R = 0.1$ y $De = 1$ .	48
Figura 6.4-2 Parte imaginaria de la función de transferencia $T2\omega$ con diferentes valores de $\lambda J$ ; $R = 0.1$ y $De = 1$ .	49
Figura 6.4-3 Norma de la función de transferencia $T2\omega$ con diferentes valores de $\lambda J$ ; $R = 0.1$ y $De = 1$ .	49
Figura 6.5-1. Función de transferencia $T1\omega$ aplicada a sangre de ratas tipo Wistar con diferentes niveles de colesterol utilizando un modelo de Maxwell de cinco elementos...	51
Figura 6.5-2. Función de transferencia $T2\omega$ aplicada a sangre de ratas tipo Wistar con diferentes niveles de colesterol utilizando un modelo de Maxwell de cinco elementos...	52
Figura B- 1. Gráfica de las funciones de Bessel de primera especie de orden 0,1 y 2.	64
Figura B- 2. Gráfica de las funciones de Neumann o de Bessel de segunda especie de orden 0,1 y 2.	64

### LISTA DE TABLAS

Tabla 5-1. Función viscosidad para los principales modelos reológicos y su equivalente en el dominio de la frecuencia.	29
Tabla B- 1. Valores numéricos reales de las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden 0,1 y 2.	63



## Resumen

En este trabajo se analizó el flujo de un líquido viscoelástico mediante un gradiente de presión pulsátil en geometrías cilíndricas. El fluido fue caracterizado con el modelo constitutivo de Jeffrey el cual contiene tres parámetros materiales asociados a la viscosidad total del sistema, la viscoelasticidad del polímero y el tiempo de retardo del material, definido como el producto entre el tiempo de relajación del fluido no newtoniano y una razón de viscosidades. Suponiendo estado no estacionario, fluido incompresible, y mecanismos gravitacionales despreciables se obtiene el perfil de velocidades, que al integrar con respecto a la sección de área transversal de la geometría se obtiene una expresión analítica para el flujo volumétrico en el espacio de Fourier. Esta expresión contiene tres elementos importantes los cuales son mencionados a continuación: (i) Una expresión para el flujo volumétrico newtoniano, (ii) Una función de transferencia de variable compleja, la cual, es el producto entre el operador Fluidez de Jeffrey y una función de dispersión que depende del parámetro Beta el cual se puede considerar como el inverso de una longitud característica asociada a las longitudes de onda.

Palabras clave: Reología, Fluido viscoelástico, Fluido de Jeffrey, Función de transferencia, Funciones de Bessel.

# **CAPITULO I**

## 1. Introducción

El modelado del flujo en sistemas que presentan oclusiones centrales y periféricas representa uno de los problemas más comunes en ingeniería ya que la pérdida de flujo debido a las obstrucciones presentes en las tuberías puede conducir a una falla en el proceso [1].

Las oclusiones periféricas son obstrucciones creadas por los minerales presentes en los fluidos, que se depositan continuamente en pequeñas cantidades en las paredes del medio que los transporta reduciendo el área de flujo. Por otra parte, las obstrucciones centrales son causadas por el crecimiento de estos depósitos hacia el centro del sistema o su desprendimiento. Este tipo de problemas pueden ser aproximados suponiendo geometrías cilíndricas, en el caso de oclusiones periféricas se aproxima como un flujo en un capilar, y en el caso de oclusiones centrales asumiendo que el objeto se encuentra estático, mediante un sistema de cilindros concéntricos en el que el fluido fluye por la región anular. Un ejemplo biológico de una oclusión periférica se presenta en el estudio de hipercolesterolemia en vasos sanguíneos; el calcio se adhiere a las paredes generando puntos que permiten que el colesterol migre a las paredes, produciendo un engrosamiento de estas.

En este trabajo de licenciatura se desarrolla el modelado del flujo de un fluido viscoelástico lineal fluyendo en geometrías cilíndricas inextensibles con el objetivo de estudiar la respuesta dinámica del flujo volumétrico ante el gradiente de presión en sistemas que presentan oclusiones centrales y periféricas. Con este fin, el contenido de este trabajo de licenciatura se distribuye de la siguiente manera: en el Capítulo I se realiza una revisión de los antecedentes del modelado de fluidos viscoelásticos en sistemas dinámicos, se plantea el problema de estudio y se definen las hipótesis y los objetivos del trabajo; en el Capítulo II se definen conceptos relevantes para el trabajo, se recopila información sobre un fluido de interés biológico así como su comportamiento reológico y se describe el modelo viscoelástico lineal propuesto para el modelado matemático; en el capítulo III se realiza el modelado matemático para obtener las funciones de transferencia de los sistemas de estudio con las cuales, en el capítulo IV, se realizan simulaciones computacionales utilizando el lenguaje de Wolfram Mathematica (Licencia UNAM) y se analizan los resultados obtenidos y, finalmente en el capítulo V se presentan las conclusiones y trabajo futuro de esta investigación.

## 2. Antecedentes

El estudio del flujo de fluidos newtonianos y no-newtonianos sometidos a un gradiente de presión dependiente de la frecuencia en sistemas biológicos ha recibido especial atención debido a su importancia, sin embargo, es un tema que aún no es comprendido en su totalidad.

Corvera y Del Río [2], analizaron el efecto de la frecuencia en el desplazamiento de un dedo de fluido viscoelástico fluyendo en una celda de Hele-Shaw que consiste de dos placas paralelas ligeramente separadas entre las que se encuentra un fluido viscoso que es desplazado por otro fluido de una viscosidad relativamente baja, cuyos resultados indican que se obtienen grandes variaciones en el ancho de los dedos cuando una señal de baja amplitud de frecuencia que maximiza la permeabilidad se sobrepone a una caída de presión constante.

Del Río y Castrejón [3], presentaron una expresión analítica en el dominio de la frecuencia para la respuesta de la permeabilidad dinámica en fluidos viscoelásticos maxwellianos, y encontraron que la frecuencia cardíaca humana corresponde con un máximo de permeabilidad viscoelástica mediante el modelado del sistema circulatorio humano como un tubo recto y la sangre como un fluido maxwelliano al determinar las resonancias del sistema.

Colleparado-Guevara y Corvera [1], estudiaron el flujo de un fluido viscoelástico en un tubo con oclusiones centrales y periféricas, demostrando que es posible recuperar parcialmente la magnitud del flujo sin retirar las obstrucciones al impulsar el fluido mediante un gradiente de presión dinámico en la frecuencia que maximiza la permeabilidad dinámica del sistema obstruido, y obteniendo una mayor recuperación del flujo en el caso de obstrucciones centrales.

Castro y otros [4], calcularon la permeabilidad dinámica para un fluido newtoniano fluyendo en microcanales utilizando la hipótesis de Navier, encontraron analíticamente una relación escalar para el deslizamiento en las paredes del sistema, la cual no es válida en el caso de que exista deslizamiento, por lo que presentaron también una propuesta para determinar experimentalmente si existe o no deslizamiento en el sistema.

Flores y otros [5], estudiaron la frecuencia óptima para un fluido viscoelástico a través de una red de tubos circulando de forma pulsátil para tratar de dar una explicación plausible al ritmo cardíaco en mamíferos, llegando a la conclusión de que el ritmo cardíaco no está optimizado para transportar la sangre en todo el sistema, sino que el ritmo cardíaco en reposo se produce a

frecuencias que optimizan el flujo únicamente en los vasos cuyo radio corresponde con el de las principales arterias que transportan la sangre del corazón hacia la cabeza y las extremidades de los mamíferos, encontrando una relación alométrica entre la frecuencia de flujo óptimo y el radio del vaso, y que coincide con lo obtenido al graficar el ritmo cardiaco vs el radio de las arterias femorales y carótidas en mamíferos de distintos tamaños, desde ratones hasta caballos.

Flores y otros [6], propusieron una nueva teoría dinámica lineal unidimensional basada en un modelo de Darcy Generalizado para el flujo en vasos sanguíneos flexibles la cual tiene una solución analítica completa en el dominio de la frecuencia que reproduce las principales características de las formas de onda del pulso en las redes de grandes arterias, en condiciones fisiológicas normales, reduciendo el tiempo de cálculo y permitiendo identificar directamente el papel que desempeñan las propiedades físicas del sistema cardiovascular en las ondas de presión.

Torres y otros [7], estudiaron el comportamiento dinámico de fluidos newtonianos sujetos a gradientes de presión pulsátil en tubos elásticos encontrando efectos resonantes inducidos por la interacción entre el tamaño característico del medio confinante, la elasticidad de la pared y la viscosidad del fluido, los cuales desaparecen a partir de determinado radio del tubo, un determinado módulo de Young y debajo de una determinada viscosidad del fluido por lo que son relevantes para geometrías pequeñas y bajos módulos de Young.

Todos estos estudios abordan una propiedad del medio que cuantifica la resistencia a fluir en este, denominada permeabilidad dinámica que nos indica la respuesta de un fluido a un gradiente de presión dinámico en función de la frecuencia. Por otro lado, también se han aplicado este tipo de estudios en el modelado de fluidos biológicos donde se consideran no solamente las propiedades del medio, sino, las propiedades del mismo fluido como se presentan a continuación:

Moreno y otros [8], estudiaron el efecto de los niveles de colesterol y triglicéridos en el comportamiento reológico de la sangre humana, modelando datos reométricos utilizando las ecuaciones constitutivas Bautista-Manero-Puig (BPM) y el modelo multimodal de Maxwell para predecir el comportamiento del flujo de sangre humana y encontraron una relación entre el nivel de colesterol presente en la sangre y la viscosidad, ya que la sangre tiende incrementar su viscosidad y exhibe un comportamiento pseudoplástico conforme el nivel de colesterol aumenta.

En [9] se estudió el comportamiento reológico de la sangre humana en pacientes con cirrosis hepática en distintas etapas de este padecimiento: pacientes compensados y

descompensados, considerando esta última como la fase final de este padecimiento y que conduce a la muerte. En esta investigación se encontró una importante correlación entre la composición bioquímica de la sangre con la respuesta reológica ya que el cambio en la síntesis de proteínas en el hígado provoca una disminución en las propiedades elásticas y en la viscosidad de la sangre conforme el padecimiento avanza, causado principalmente por la disminución en el nivel de hematocrito.

Finalmente, en [10], estudiaron el comportamiento reológico de la sangre de ratas Wistar con diferentes niveles de colesterol modelando datos reométricos con distintos modelos: Ley de Potencia, Bautista-Manero-Puig (BMP), Maxwell multimodal y el modelo de Horner-Armstrong-Wagner Beris (mHAWB) y encontraron que el comportamiento reológico global depende del nivel de colesterol total y la concentración de células sanguíneas.

### **3. Planteamiento Del Problema**

El estudio de la función de transferencia en sistemas de flujo pulsátil debe de hacerse con modelos más sofisticados, en este caso, se estudia el modelo de Jeffrey el cual acopla la contribución del solvente y la del polímero. Para hacer eso se plantea la siguiente hipótesis.

#### **3.1. Hipótesis**

Si el gradiente de presión pulsátil afecta al flujo volumétrico, este podrá ser cuantificado a través de la función de transferencia compleja en el espacio de Fourier y dependerá de las propiedades materiales a través de los grupos adimensionales.

#### **3.2. Objetivos**

Para debatir esta hipótesis, se propondrán los siguientes objetivos:

##### ***General***

Determinar la respuesta dinámica del flujo volumétrico ante el gradiente de presión mediante la función de transferencia del sistema para dos sistemas de estudio: (i) oclusiones periféricas y (ii) centrales.

### *Particulares*

- i. Obtener la función de transferencia compleja para el gradiente de presión pulsátil y para el flujo volumétrico aplicando el formalismo de Fourier.
- ii. Obtener grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.
- iii. Realizar simulaciones en el lenguaje de Wolfram Mathematica de la función de transferencia en función de la frecuencia en el espacio de Fourier.
- iv. Analizar la función de transferencia en el espacio de Fourier en función de la frecuencia y las propiedades del sistema.
- v. Aplicar la función de transferencia en un sistema de interés biológico: Ratas Wistar.

## **CAPITULO II**



## 4. Marco teórico

### 4.1. Reología

La reología, del griego « $\rho\acute{\epsilon}\tilde{\iota}$ », es una rama de la ciencia que estudia la deformación y el flujo de materiales y abarca el comportamiento de líquidos viscosos (Fluidos Newtonianos) y sólidos elásticos (Sólido de Hooke) [11].

Los sólidos de Hooke son aquellos sólidos que presentan una relación lineal entre el esfuerzo aplicado y la deformación.

Los fluidos newtonianos son aquellos fluidos que obedecen la Ley de Viscosidad de Newton, es decir, que la rapidez de deformación es proporcional al esfuerzo cortante.

Los fluidos que no se comportan de esta manera se denominan fluidos no newtonianos. Este tipo de fluidos se pueden clasificar en función de sus propiedades materiales más importantes en tres categorías principales [12] [13]:

- Independientes del tiempo: la deformación es independiente del tiempo en que el esfuerzo sea aplicado.
- Dependientes del tiempo: el historial de deformación del fluido influye en el comportamiento de este ante un esfuerzo aplicado.
- Viscoelásticos: presentan propiedades elásticas y viscosas.

Algunos ejemplos de fluidos no newtonianos comunes son las soluciones poliméricas, termo plásticos, concreto fresco y fluidos biológicos como la sangre humana [13].

#### 4.1.1. Número de Deborah

Con el fin de caracterizar la fluidez intrínseca de un material, es decir, qué tan fluido es, se introduce el número de Deborah, un número adimensional definido como el cociente entre el tiempo de relajación  $\lambda$  y tiempo de observación  $t_p$  en un flujo (un experimento, o una simulación computacional) de la siguiente forma:

$$De = \frac{\lambda}{t_p} \quad (4-1)$$

Este número hace referencia al efecto de la escala de tiempo de proceso en el comportamiento deformativo de un material. Fue introducido por el profesor Markus Reiner, en alusión al Canto de Deborah (Jueces 5:5) donde aparece la siguiente línea «Las montañas fluirán delante del Señor», ya que, de acuerdo con la interpretación de Reiner, incluso las montañas «fluyen» si se observan en una escala de tiempo suficientemente grande [11] [13] [14]. De modo que, la diferencia entre un sólido y un fluido está definida por la magnitud del número de Deborah, si el tiempo de relajación es mucho menor que el tiempo de observación,  $\lambda \ll t_p$  el material fluye, y en caso contrario donde  $\lambda \gg t_p$ , se trata de un sólido. En ingeniería el tiempo de observación representa el tiempo de proceso, por lo que se tiene que si  $De \ll 1$  el comportamiento se describe como viscoso; si  $De \gg 1$  el comportamiento será elástico y si  $De \approx 1$  se describe como viscoelástico [14].

#### ***4.1.2. Viscoelasticidad***

Dentro de la clasificación de los fluidos no newtonianos se encuentran los fluidos viscoelásticos, este tipo de materiales presentan mecanismos viscosos y elásticos al mismo tiempo los cuales suelen ser representados mecánicamente mediante un conjunto de émbolos y resortes que representan las contribuciones viscosas (newtonianas) y elásticas (hookeanas) respectivamente, los cuales pueden tener un arreglo en serie o en paralelo de tal manera que el arreglo del sistema se comporte de manera análoga a un material real.

##### ***Modelo de Maxwell***

El modelo más simple para describir un fluido que es tanto viscoso como elástico es el modelo de Maxwell, este modelo se basa en el hecho de que, al aplicar un esfuerzo en el sistema, el esfuerzo es el mismo en la componente viscosa y elástica, y la deformación es la suma de las deformaciones de cada componente [11].

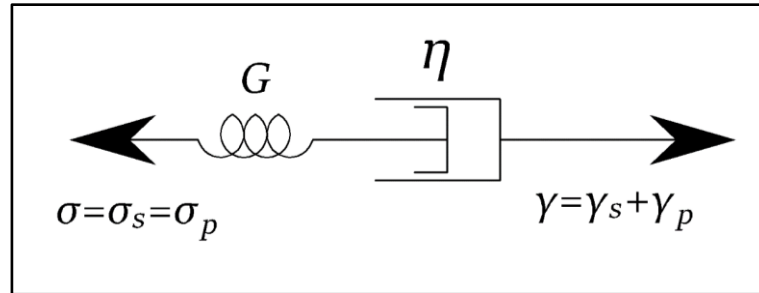


Figura 4.1-1. Representación mecánica del modelo de Maxwell

Partiendo de las definiciones de un sólido elástico lineal:

$$\sigma = G\gamma \quad (4-2)$$

Donde  $G$  es el módulo elástico y  $\gamma$  el tensor de deformación infinitesimal.

Y la definición de un fluido newtoniano:

$$\sigma = \eta\dot{\gamma} \quad (4-3)$$

Donde  $\eta$  es la viscosidad del sistema y  $\dot{\gamma}$  es el tensor (de segundo orden) rapidez de deformación, el cual es la derivada del tensor de deformación infinitesimal, i.e.  $\dot{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t}\gamma$ . Para fluidos no-newtonianos se introduce una función viscosidad  $\eta_0$ , también llamada viscosidad aparente.

La ecuación constitutiva del modelo de Maxwell es la siguiente:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\sigma = 2\eta_0 D \quad (4-4)$$

Donde  $\lambda_0$  es el tiempo de relajación de Maxwell definido como el cociente entre la viscosidad y el módulo elástico del sistema.

$$\lambda_0 = \frac{\eta_0}{G} \quad (4-5)$$

Este modelo indica que, si la deformación es constante, el esfuerzo decaerá con el tiempo (relajación) de manera exponencial, sin embargo, está limitado a bajas deformaciones, por lo que, para deformaciones grandes, es necesario utilizar otros modelos [15].

### Modelo de Jeffrey

Un modelo más robusto para describir fluidos viscoelásticos es el modelo de Jeffrey, que consta de tres elementos y puede ser representado como un elemento de Maxwell con un componente viscoso adicional.

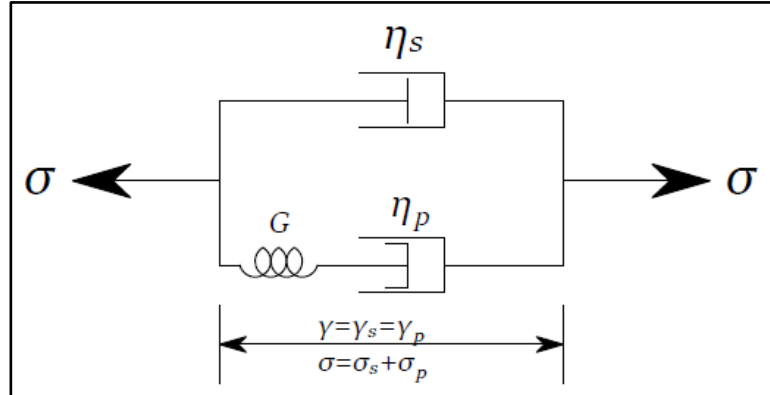


Figura 4.1-2 Representación mecánica del modelo de Jeffrey con un arreglo en paralelo.

Este modelo se puede interpretar como la suma de la contribución de un solvente newtoniano (s) y un polímero (p) [16]. La ecuación constitutiva del modelo de Jeffrey es la siguiente:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 D \left( 1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (4-6)$$

Esta ecuación contiene tres parámetros materiales: la viscosidad del polímero, la viscosidad del solvente y el tiempo de retardo del material  $\lambda_j$  definido como el producto entre el tiempo de relajación del fluido no newtoniano y una razón de viscosidades:

$$\lambda_j = \lambda_0 \left( \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \right) \quad (4-7)$$

de tal forma que  $0 < \lambda_j < \lambda_0$ .

Esta caracterización permite describir fluidos mucho más reales y de amplia aplicación en la industria, como son polímeros, sistemas micelares, fluidos biológicos, dispersiones de cristales líquidos, etc.

### Modelo de Maxwell Generalizado

El modelo de Maxwell generalizado que se ilustra en la Figura 4.1-3 es un modelo generalizado que consta de un número arbitrario de elementos de Maxwell conectados en paralelo, esto permite simular de manera más precisa el comportamiento mecánico observado experimentalmente.

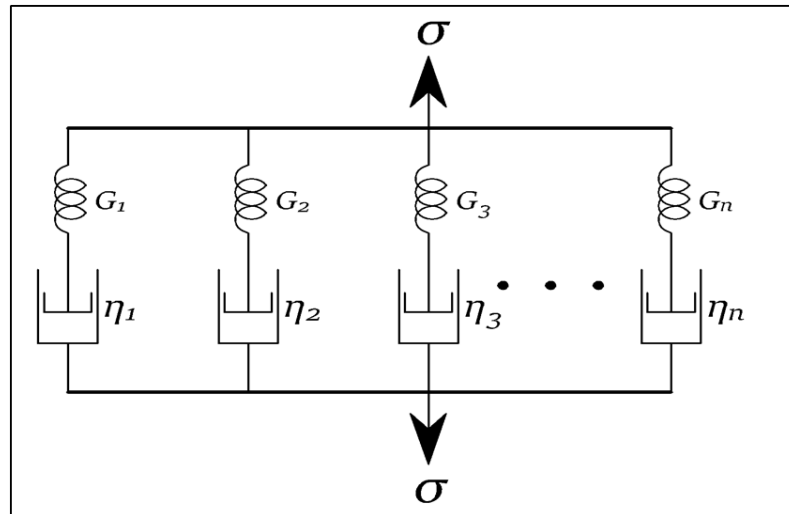


Figura 4.1-3. Representación mecánica para un modelo multimodal de Maxwell de n elementos

El balance de movimiento en el iésimo elemento de Maxwell se expresa de la siguiente manera

$$\sigma = \sigma_{i1} = \sigma_{i2} \quad (4.1-8)$$

Y el balance de movimiento general para un modelo de n elementos se expresa como

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (4.1-9)$$

La deformación para el iésimo elemento de Maxwell

$$\gamma = \gamma_{i1} + \gamma_{i2} \quad (4.1-10)$$

Y para el modelo completo

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 \quad (4.1-11)$$

De forma similar podemos formar un modelo multimodal de Jeffrey al combinar un conjunto de elementos de Maxwell en paralelo con un componente viscoso adicional, cuya representación mecánica se ilustra en la siguiente figura.

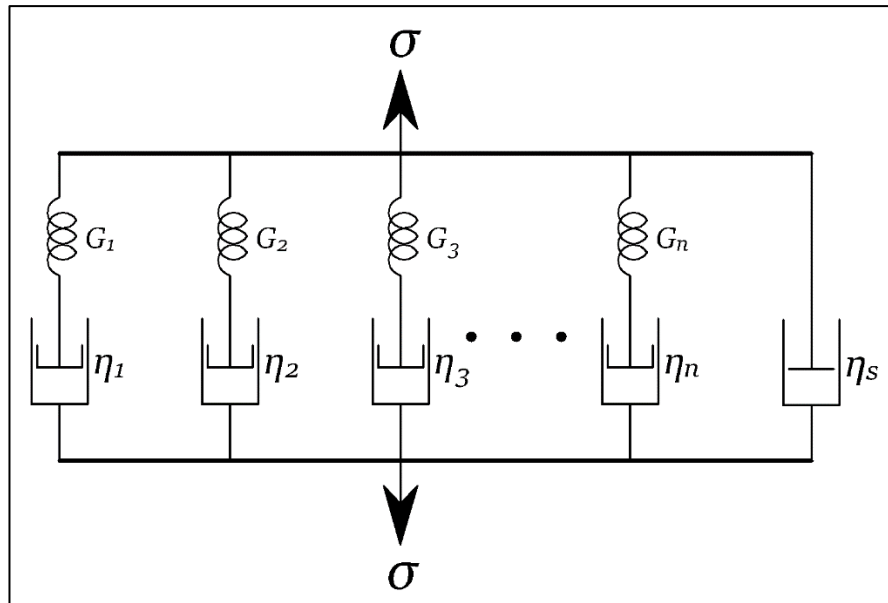


Figura 4.1-4. Modelo de Jeffrey multimodal

## 4.2. Reología de la sangre

En los humanos, la sangre representa alrededor del 8% de la masa corporal y se encarga del transporte de oxígeno y nutrientes a todas las regiones del cuerpo, así como de la remoción de desechos a través del sistema cardiovascular, y también juega un papel importante en la protección del cuerpo contra agentes externos mediante los anticuerpos. Sin embargo, la circulación sanguínea no solo depende de la fuerza motriz del corazón y la arquitectura del sistema, sino también sobre las propiedades mecánicas de la sangre misma. Cuando se aplica la reología al estudio de la sangre y sus componentes se denomina *Hemorreología* [17] [18].

La sangre humana es una suspensión formada por elementos celulares (eritrocitos, leucocitos, trombocitos) y plasma, que presenta características reológicas inusuales debido a su particular naturaleza ya que la viscosidad de este fluido está en función de la cantidad de células y del contenido de proteínas y metabolitos presentes en el plasma.

Los eritrocitos, también llamados glóbulos rojos, representan normalmente entre 40-45% del volumen sanguíneo, a este porcentaje se le conoce como *hematocrito*. Son células con forma de disco, en los mamíferos son células sin núcleo y están llenas de una solución de hemoglobina, proteína que le da su color rojo característico a la célula, elementos inorgánicos (K, Na, Mg y Ca) y agua envuelta en una membrana altamente flexible, por lo que tienen la capacidad de modificar su geometría almacenando y liberando energía en función del esfuerzo aplicado: a bajas velocidades de corte forman una estructura compleja 3D ramificada denominada *rouleaux*. Mientras que, a altas velocidades de corte, los eritrocitos pierden su forma cóncava y se tornan en elipsoides cuyo eje mayor es paralelo a la dirección del flujo [17].

Los leucocitos o glóbulos blancos son células más bien esféricas de mayor tamaño que los eritrocitos y tienen poca influencia en la reología de la sangre, excepto en patologías como lo reportado en [9], y se encargan principalmente de la respuesta inmunológica para proteger al organismo de agentes externos. Por otra parte, los trombocitos o plaquetas son pequeños fragmentos de células discoides no nucleadas, mucho más pequeños que los eritrocitos y los leucocitos, cuya función principal es la coagulación sanguínea, proceso que consiste en la formación de trombos o coágulos para evitar hemorragias (hemostasia) seguido de su disolución (fibrinólisis) y la reparación del tejido dañado. Ambos componentes representan alrededor del 1% del volumen sanguíneo [17].

El plasma representa ~55% del volumen sanguíneo y está conformado por ~92% de agua y el resto por otras partículas como electrolitos y proteínas como albumina, globulina, fibrinógeno y desechos. La viscosidad de este componente suele ser menor que la de la sangre y generalmente se comporta como un fluido newtoniano, aunque su viscosidad puede aumentar con el aumento de la concentración de proteínas [19].

#### **4.2.1. Colesterol**

El colesterol es un compuesto químico perteneciente al grupo de los esteroides y es indispensable para el buen funcionamiento del organismo humano ya que se encuentra presente en la membrana de muchas células animales y está relacionado con otros compuestos químicos importantes para el organismo como vitaminas, sales biliares y hormonas [20].

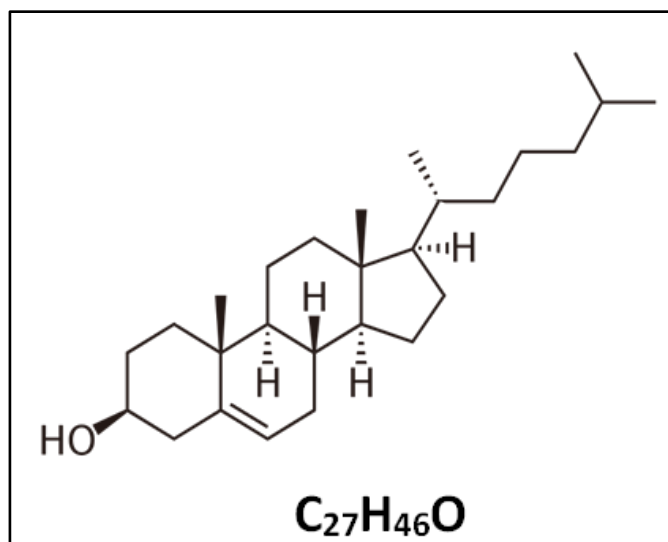


Figura 4.2-1. Fórmula química del colesterol. [Esta foto](#) de Autor desconocido está bajo licencia [CC BY-SA](#)

El colesterol se produce principalmente en el hígado y se denomina colesterol endógeno, sin embargo, también se considera un nutrimento, es decir, está presente de manera constante en nuestra dieta, a este tipo de colesterol se le denomina exógeno. Este compuesto circula permanentemente entre el hígado y los demás tejidos, sin embargo, al tratarse de un esteroide sólo puede ser disuelto en disolventes orgánicos por lo que no se pueden disolver en agua ni en soluciones acuosas como la sangre y requiere integrarse a otras sustancias solubles para ser transportado: las lipoproteínas; partículas esféricas constituidas por un núcleo interno que contiene ésteres de colesterol y triglicéridos, y una capa externa formada por fosfolípidos, colesterol libre y apoproteínas [20].

Las lipoproteínas se encargan de transportar los lípidos absorbidos por la mucosa intestinal, y aunque se pueden clasificar en diferentes clases, las que reciben mayor atención son:

1. Las de baja densidad o LDL (del inglés *low density lipoprotein*), también llamadas lipoproteínas beta.
2. Las de alta densidad o HDL (del inglés *high density lipoprotein*), también llamadas lipoproteínas alfa.

Las lipoproteínas de baja densidad se encargan de transportar aproximadamente tres cuartas partes del colesterol en la sangre y su función es llevar colesterol a los tejidos periféricos, ya que sólo contienen ésteres de colesterol y un solo tipo de apoproteína, mientras que las de alta



densidad concentran el colesterol libre circulante, producto de la rotura de las células y lo transportan desde los tejidos periféricos hacia el hígado para su excreción [20].

Las LDL son las más nocivas de las lipoproteínas, ya que se relacionan directamente con problemas cardiovasculares como el infarto de miocardio. Debido a esto se le conoce comúnmente como *colesterol malo*. Por otro lado, los altos niveles de HDL se relacionan con la disminución de la incidencia de infarto cardiaco y las que son producidas por el hígado se reconocen como factor protector contra la aterosclerosis y por ello, son conocidas popularmente como *colesterol bueno* [20].

La presencia de esos compuestos en concentraciones elevadas afecta en gran medida la reología de la sangre, ya que la sangre con alto contenido de colesterol tiende a formar estructuras transitorias más complejas y difíciles de desagregar y se ha encontrado que la diferencia de viscosidad es del orden de 10 veces con respecto a la sangre con concentraciones normales de colesterol [21].

Debido a esto resulta de gran importancia tomar en cuenta la contribución del plasma (solvente) en la reología del sistema.

### **4.3. Ratas Wistar**

La rata de laboratorio *Rattus norvegicus*, es un roedor descendiente de la rata gris o noruega originaria de Asia y que, debido a su asociación con el humano, se ha extendido por todo el mundo [22]. La rata fue el primer mamífero en ser domesticado con fines científicos y han contribuido en gran medida a las investigaciones en neurociencias, cáncer, toxicología entre muchos otros campos de las ciencias biomédicas [23], esto se debe principalmente a su tamaño pequeño, fácil manejo.

Dentro de las variedades de cepas de rata se encuentra la cepa Wistar, animales producidos por El Instituto Wistar de Filadelfia, que ocupa un lugar especial en los anales de la medicina ya que este instituto sentó las bases sobre las cuales se estableció la rata como un importante animal de laboratorio [23].



Figura 4.3-1 Fotografía de una rata Wistar. [Esta foto](#) de Autor desconocido está bajo licencia [CC BY-NC-ND](#)

Su cabeza es ancha y la longitud de su cola es menor a la de su cuerpo, es una variedad moderadamente prolífica y resistente a infecciones [22] y son altamente consideradas en estudios toxicológicos y en investigaciones biomédicas como organismo modelo para simular algunas funciones humanas, ya que poseen una estructura de ADN y metabolismo similar al de los humanos [10].

#### **4.4. Permeabilidad intrínseca**

En ingeniería, es común encontrarse con problemas relacionados al flujo de fluidos a través de medios porosos ya que forman parte fundamental de algunos procesos como lo son la explotación de petróleo, reactores químicos y en flujo de fluidos en sistemas biológicos, entre otros. Un medio poroso (MP) es un sólido que cuenta con una serie de orificios u oquedades de distintos tamaños y formas que se denominan poros. Una forma de caracterizar el MP mediante una propiedad geométrica es la porosidad  $\varepsilon$ , definida como como la fracción espacio vacío del cuerpo con respecto al volumen total [3].

La permeabilidad, también llamada conductividad hidráulica, es una propiedad intrínseca del fluido y del medio en que se encuentra confinado que indica la facilidad con la que fluye el fluido a través de este, por lo que entre mayor sea el valor de la permeabilidad el fluido fluye con mayor facilidad [24].

El ingeniero Henry Darcy, obtuvo una expresión para describir la velocidad media de un flujo en un medio poroso:

$$V = -\frac{K}{\eta}(\nabla_z p) \quad (4-12)$$

Donde  $K$  es la permeabilidad, una medida de la resistencia del medio al paso de un fluido;  $\eta$  es la viscosidad, la resistencia de un fluido a ser deformado y  $\nabla_z p$  es el gradiente de presión, la fuerza motriz que deforma el fluido.

Esta ecuación fue obtenida modelando el sistema como un manojito de capilares y se basa en la suposición de un poro promedio, es decir supone que todos los poros tienen el mismo diámetro [25].

En un sistema en estado estacionario, es decir, donde la velocidad y el gradiente de presión no dependen del tiempo, la permeabilidad depende únicamente de las propiedades del medio: geometría y porosidad que, al ser dividida por la viscosidad del fluido  $K/\eta$ , se obtiene una constante de proporcionalidad que relaciona la velocidad promedio del sistema con el gradiente de presión. Por otro lado, cuando el sistema se encuentra en estado dinámico donde el gradiente de presión es función del tiempo, la permeabilidad es dinámica por lo que ya no depende únicamente de la geometría del medio, sino de las características propias del fluido y de la frecuencia [24].

#### **4.5. Función de Transferencia**

De acuerdo con [26] un modelo es una representación o imagen de la realidad, enfocado en aplicaciones predeterminadas. En ingeniería, el modelo de un sistema o proceso es una representación matemática de los aspectos esenciales del sistema con el propósito de resolver dudas o problemas que puedan surgir en el funcionamiento de este.

Un sistema dinámico es aquel donde existe una acumulación de materia o energía, y su comportamiento se define como la respuesta o salida del sistema a una variable de entrada tomando en cuenta las condiciones iniciales del sistema. Este tipo de sistemas generalmente se representan mediante ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo, lo cual puede resultar muy complejo por lo que resulta conveniente abordarlos mediante la transformada de Laplace o de Fourier, de este modo las ecuaciones diferenciales que describen el sistema en el dominio del tiempo se tornan en ecuaciones algebraicas en el dominio complejo.

Una función de transferencia se define como el cociente entre la variable de salida y de entrada del sistema en el dominio complejo.

$$\text{Función de transferencia} = T(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} \quad (4-13)$$

Las variables de salida son aquellas que describen o caracterizan el comportamiento del sistema, mientras que las variables de entrada son variables independientes del sistema que pueden ser manipuladas según los requerimientos del sistema o proceso, o perturbadas, es decir que responden a estímulos externos, por ejemplo, condiciones ambientales [27] [28] .

La función de transferencia de un sistema describe completamente el comportamiento dinámico del sistema, y suele ser representada mediante bloques, como se ilustra en la Figura 4.5-1.

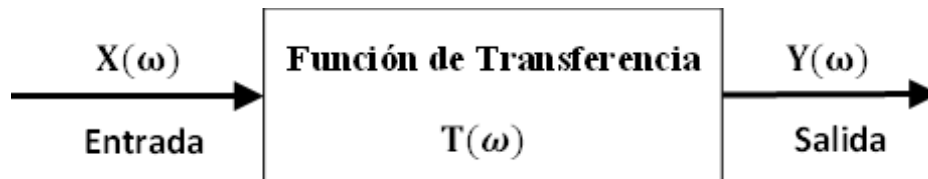


Figura 4.5-1 Diagrama de bloques de una función de transferencia.

Finalmente, analizar los sistemas en el dominio complejo también permite el análisis de sistemas más complejos compuestos de subsistemas mediante la obtención de una función de transferencia global.

## **CAPITULO III**

## 5. Modelado Matemático

### 5.1. Modelo Newtoniano

En esta sección se realiza el modelado matemático para un fluido newtoniano asociado a un capilar de radio  $r = R_2$ , longitud característica axial  $z = L$ , en una corona circular o tubos concéntricos de radios interior y exterior  $r = R_1$  y  $r = R_2$ , respectivamente, y longitud característica axial  $z = L$ .

Para realizar estos cálculos se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- i. Fluido newtoniano.
- ii. Proceso isotérmico
- iii. Fluido incompresible.
- iv. Estado estacionario.
- v. El fluido es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante en la dirección axial  $z$ .
- vi. Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión ya que el capilar y la corona circular ( $r \ll L$ ) se encuentran en posición horizontal.
- vii. Existe simetría angular  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

A partir de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho V) \quad (5-1)$$

Donde  $V$  es la velocidad del sistema.

Desarrollando la divergencia del producto del campo escalar y vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot V + \rho(\nabla \cdot V) = 0 \quad (5-2)$$

En términos de la derivada material, donde:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot V \quad (5-3)$$

Entonces:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (5-4)$$

Imponiendo la condición de que el fluido es incompresible, es decir, la densidad no depende de la posición ni del tiempo, la derivada material es cero.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \rho = \rho(r, t) \quad (5-5)$$

La ecuación de continuidad se simplifica de la siguiente manera:

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (5-6)$$

Como la densidad es diferente de cero, la divergencia del campo vectorial debe ser cero, lo que implica que: i) las líneas de corriente que entran y salen del elemento de control son las mismas, ii) matemáticamente es un campo solenoidal y iii) el volumen del líquido es constante.

Desarrollando la divergencia del campo vectorial en coordenadas cilíndricas tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (5-7)$$

Asumiendo que el vector velocidad en el sistema está dado por:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z, t)) \quad (5-8)$$

Combinando las ecuaciones (5-7) y (5-8) se llega a la siguiente expresión

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (5-9)$$

Esto indica que el campo de velocidades no depende de la coordenada axial  $z$ , y sólo puede depender de las coordenadas angulares  $r$  y  $\theta$  y del tiempo.

Imponiendo la condición de estado estacionario, es decir, que los perfiles de velocidad se encuentran desarrollados y no dependen del tiempo, y considerando simetría cilíndrica entre las coordenadas angulares, es decir, que el campo de velocidades no depende del ángulo polar  $\theta$ , tenemos que:

$$V_z = V_z(r) \quad (5-10)$$

Por lo tanto, en flujo laminar, isotérmico, estacionario y en coordenadas cilíndricas el campo de velocidades solo depende de la coordenada radial  $r$ .

A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 V + \rho g \quad (5-11)$$

Tomando únicamente la componente en  $z$ :

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (5-12)$$

Con base en el análisis del proceso realizado, la ecuación se reduce a lo siguiente

$$\nabla_z p = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (5-13)$$

Resolviendo la Ec. (5-13) llegamos a la siguiente expresión:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (5-14)$$

La Ec. (5-14) es el perfil de velocidad general para un fluido newtoniano deformado por un gradiente de presión constante, la cual contiene dos constantes de integración que deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera impuestas de acuerdo con las especificaciones de cada problema particular.



### 5.1.1. Flujo A Través De Un Capilar En Estado Estacionario

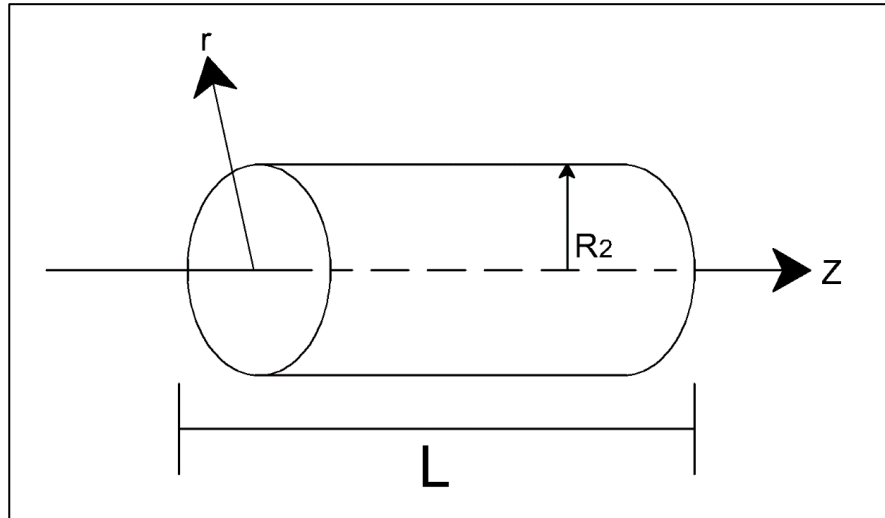


Figura 5.1-1. Esquema de un capilar de radio  $r=R_2$  y longitud  $z=L$

Para un fluido newtoniano incompresible y fluyendo a través de un capilar de radio  $r = R_2$  y longitud característica axial  $z = L$  por un gradiente de presión constante tenemos las siguientes condiciones de frontera:

C.F.1 La velocidad axial en el centro del capilar es finita, i.e.,  $|V_z(r = 0)| \leq M$

C.F.2 La velocidad axial en la frontera del capilar es cero, i.e.,  $V_z(r = R_2) = 0$

Aplicando las condiciones de frontera a la Ec. (5-14) se tiene lo siguiente:

$$V_z(r = 0) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p(0)^2 + C_1 \ln(0) + C_2 = V_{\text{máx}} \quad (5-15)$$

La Ec. (5-15) implica que la velocidad en el centro del capilar sería infinita, lo cual carece de sentido físico y por lo tanto  $C_1$  debe ser cero.

Para la segunda condición tenemos la siguiente expresión:

$$V_z(r = R_2) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p R_2^2 + C_2 = 0 \quad (5-16)$$

Finalmente sustituyendo la Ec. (5-16) en (5-14) tenemos el perfil de velocidad para este caso:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p R_2^2 \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^2 - 1 \right] \quad (5-17)$$

El flujo volumétrico se calcula como la doble integral de superficie del perfil de velocidades por el radio de la forma:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R V_z r d\theta dr \quad (5-18)$$

Sustituyendo el perfil de velocidades a partir de la Ec. (5-16) tenemos lo siguiente:

$$Q_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ \frac{1}{4\eta} \nabla_z p R_2^2 + C_2 \right] r d\theta dr \quad (5-19)$$

Resolviendo la Ec. (5-19) y simplificando se obtiene la siguiente expresión:

$$Q_0 = \frac{\pi R_2^4}{8\eta} (-\nabla_z p) \quad (5-20)$$

La Ec. (5-20) describe la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión para el modelo newtoniano en un capilar y es conocida como la Ecuación de Hagen-Poiseuille.

Con este modelo podemos definir la permeabilidad intrínseca para un fluido en estado estacionario en esta geometría (capilar) desacoplando la componente geométrica de la Ec. (5-20):

$$K = \frac{\pi R^4}{8} \quad (5-21)$$

En este caso se considera una porosidad con valor de 1, por lo que no aparece en la ecuación. Por lo tanto, podemos expresar el flujo volumétrico como:

$$q = \frac{K}{\eta} (-\nabla_z p) \quad (5-22)$$

De este modo generamos una expresión para el flujo volumétrico que indica que el flujo es proporcional al gradiente de presión aplicado y la constante de proporcionalidad es la permeabilidad [3].

### 5.1.2. Flujo A Través De Una Corona Circular En Estado Estacionario

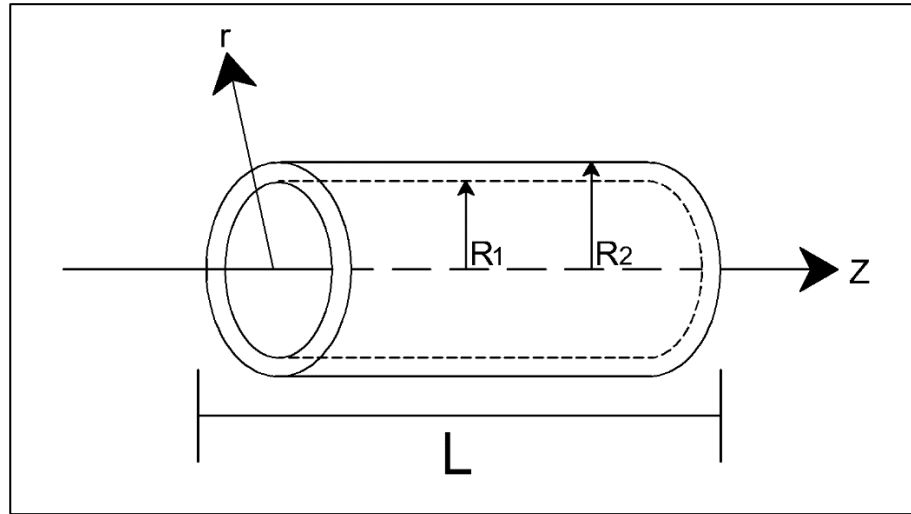


Figura 5.1-2 Esquema de una corona circular de radios  $r=R_1$ ; y  $r=R_2$  y longitud  $z=L$

Para el caso de una corona circular, se cumplen las mismas condiciones de proceso que para un capilar, por lo tanto, el perfil de velocidades para esta geometría está dado por:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (5-23)$$

Para calcular el valor de las dos constantes de integración se plantean las siguientes condiciones de frontera:

C.F.1 La velocidad axial en la frontera del tubo interior es cero, i.e.,  $V_z(r = R_1) = 0$

C.F.2 La velocidad axial en la frontera del tubo exterior es cero, i.e.,  $V_z(r = R_2) = 0$

Aplicando las condiciones de frontera en la Ec. (5-23) se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_r(r = R_1) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p R_1^2 + C_1 \ln R_1 + C_2 = 0 \quad (5-24)$$

$$V_r(r = R_2) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p R_2^2 + C_1 \ln R_2 + C_2 = 0 \quad (5-25)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el valor de las constantes de integración:

$$C_1 = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln R_1/R_2} \quad (5-26)$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\eta} \nabla_z p R_2^2 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln R_1/R_2} \ln R_2 \quad (5-27)$$

Sustituyendo las constantes  $C_1$  y  $C_2$  en la Ec. (5-23) y reordenando obtenemos el perfil de velocidad para esta geometría:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\eta} \nabla_z p R_2^2 \left[ \left( \frac{r}{R_2} \right)^2 - 1 \right] + \frac{1}{4\eta} \nabla_z p \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln R_1/R_2} \ln \frac{r}{R_2} \quad (5-28)$$

Podemos calcular el flujo volumétrico a partir de la Ec. (5-23) sustituyendo el perfil de velocidades en la Ec. (5-18)

$$Q_0 = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \left[ \frac{1}{4\eta} \nabla_z p r^2 + C_1 \ln r + C_2 \right] r d\theta dr \quad (5-29)$$

Resolviendo la Ec. (5-29) y sustituyendo el valor de las constantes obtenemos la expresión para el flujo volumétrico en esta geometría.

$$Q_0 = (-\nabla_z p) \frac{\pi (R_2^2 - R_1^2)}{8\eta \ln R_1/R_2} \left[ (R_2^2 + R_1^2 - 2) \ln \frac{R_1}{R_2} + 2R_1^2 \ln R_1 - 2R_2^2 \ln R_2 + R_2^2 - R_1^2 \right] \quad (5-30)$$

De manera similar que, en el caso del capilar, definimos la permeabilidad dinámica como:

$$K = \frac{\pi (R_2^2 - R_1^2)}{8 \ln R_1/R_2} \left[ (R_2^2 + R_1^2 - 2) \ln \frac{R_1}{R_2} + 2R_1^2 \ln R_1 - 2R_2^2 \ln R_2 + R_2^2 - R_1^2 \right] \quad (5-31)$$

Y obtenemos el flujo volumétrico en términos de la permeabilidad intrínseca

$$q = \frac{K}{\eta} (-\nabla_z p) \quad (5-32)$$

En esta sección se obtuvieron las ecuaciones de flujo en términos de la permeabilidad intrínseca en las geometrías de estudio: capilar y corona circular, para un fluido newtoniano, incompresible y en estado estacionario. En el siguiente apartado se estudiará el caso para un fluido viscoelástico lineal en estado no estacionario en los mismos sistemas de estudio.

## 5.2. Funciones de Transferencia

En esta sección se realiza el modelado matemático para un fluido viscoelástico lineal asociado a un capilar de radio  $r = R_2$ ; y en una corona circular o tubos concéntricos de radios interior y exterior  $r = R_1$  y  $r = R_2$ , respectivamente, y longitud característica axial  $z = L$  para obtener una función de transferencia que describa el comportamiento dinámico del sistema.

Para realizar este cálculo, se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema

- i. Fluido no-newtoniano viscoelástico lineal.
- ii. Proceso isotérmico
- iii. Fluido incompresible.
- iv. Estado no estacionario
- v. El fluido es deformado continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial  $z$ .
- vi. Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar y la corona circular ( $r \ll L$ ) se encuentran en posición horizontal.
- vii. Existe simetría angular  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Tomando la componente en  $z$  de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, tenemos

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} \right) = -\nabla_z p + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (5-33)$$

El término de la izquierda es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema. El esfuerzo cortante  $\sigma_{rz}$  es el producto de la función viscosidad por la rapidez de deformación:

$$\sigma_{rz} = O_\eta(D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (5-34)$$

Donde  $O_\eta(D_t)$  es un operador viscosidad que se generaliza para cualquier fluido, sea newtoniano o viscoelástico lineal. En la Tabla 5-1 se presentan algunos de los modelos reológicos más comunes en el dominio temporal y en el dominio de la frecuencia ( $i\omega$ ).

Tabla 5-1. Función viscosidad para los principales modelos reológicos y su equivalente en el dominio de la frecuencia.

Operador Modelo	En el dominio del tiempo $O_\eta(D_t)$	En el dominio de la frecuencia $O_\eta(i\omega)$
Newton	$\eta_0$	$\eta_0$
Maxwell	$\frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 D_t}$	$\frac{\eta_0}{1 + \lambda_0(i\omega)}$
Jeffrey	$\eta_0 \frac{1 + \lambda_J D_t}{1 + \lambda_0 D_t}$	$\eta_0 \frac{1 + \lambda_J(i\omega)}{1 + \lambda_0(i\omega)}$

Sustituyendo la Ec. (5-34) en (5-33), dividiendo la expresión por el operador viscosidad y factorizando la velocidad en z tenemos:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\rho}{O_\eta(D_t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] V_z = \frac{\nabla_z p}{O_\eta(D_t)} \quad (5-35)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal que describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo, i.e,  $V_z = V_z(r, t)$ ;  $p = p(t) \therefore Q = Q(t)$ . Aplicando el formalismo de Fourier en las derivadas temporales de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rightarrow (i\omega)^k \quad (5-36)$$

la ecuación (5-35) toma la forma:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\rho}{O_\eta(i\omega)} (i\omega) \right] V_z(r, \omega) = \frac{\nabla_z p(\omega)}{O_\eta(i\omega)} \quad (5-37)$$

Podemos definir la fluidez compleja  $O_\phi$  como el inverso del operador viscosidad, y el parámetro  $\alpha^2$  como el producto de la densidad por la fluidez compleja, siendo así:

$$O_\phi(i\omega) = \frac{1}{O_\eta(i\omega)} \quad (5-38)$$

$$\alpha^2(\omega) = \frac{\rho}{O_\eta(i\omega)} i^3 \omega = \rho O_\phi(i\omega) \quad (5-39)$$

La ecuación (5-37) se expresa finalmente como:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2(\omega) \right] V_z(r, \omega) = O_\phi(i\omega) \nabla_z p(\omega) \quad (5-40)$$

La Ec. (5-40) es el punto de partida para calcular la velocidad y el flujo volumétrico.

Para resolver la Ec. (5-40) se propone se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular. De este modo, para obtener la solución homogénea se reescribe la Ec. (5-40) y se iguala con cero:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2(\omega) \right] V_z(r, \omega) = 0 \quad (5-41)$$

Desarrollando la derivada parcial, multiplicamos toda la expresión por  $r^2$  y proponemos un cambio de variable donde  $z = \alpha r$ :

$$\left[ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right] V_z(r, \omega) = 0 \quad (5-42)$$

Esta es una ecuación diferencial de Bessel, por lo que la solución está dada por la expresión:

$$V_{zH}(r, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \quad (5-43)$$

Donde  $J_0$  y  $Y_0$  son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente.

La solución particular para la Ec. (5-40) se puede expresar como:

$$V_{zP} = A ; A \in \mathbb{R} \quad (5-44)$$

Sustituyendo la Ec. (5-44) en (5-40)

$$\alpha^2(\omega) A = O_\phi(i\omega) \nabla_z p(\omega) \quad (5-45)$$

Por lo tanto, despejando A y sustituyendo en la solución general obtenemos la expresión:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-46)$$

Esta expresión es el perfil de velocidad general para un fluido no newtoniano deformado por un gradiente de presión pulsátil, la cual contiene dos constantes de integración que deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera impuestas de acuerdo con las especificaciones de cada problema particular.

### **5.2.1. Función De Transferencia De Un Fluido Viscoelástico Lineal En Un Capilar En Estado No Estacionario**

Para calcular el valor de las constantes de la Ec. (5-46) proponemos las siguientes condiciones de frontera:

C.F.1. La velocidad en el centro del capilar debe ser finita, i.e,  $|V_z(0, \omega)| \leq M$

C.F.2. La velocidad en la frontera del capilar es cero, i.e,  $V_z(R_2, \omega) = 0$

Sustituyendo la C.F.1 se tiene lo siguiente:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-47)$$

De acuerdo con el Apéndice B:

$$J_0(0) = 1 \quad (5.2-48)$$

$$Y_0(0) = -\infty \quad (5.2-49)$$

Por lo tanto, el valor de la constante  $C_2$  debe ser cero, siendo así

$$C_2 = 0 \quad (5-50)$$

De este modo el perfil de velocidades se expresa como:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-51)$$

Aplicando la C.F.2 obtenemos el valor de  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{1}{J_0(\alpha R_2)} \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} (-\nabla_z p(\omega)) \quad (5-52)$$



Finalmente, la velocidad axial tiene la forma:

$$V_z(r, \omega) = \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \left[ 1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R_2)} \right] \quad (5-53)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del fluido y la fuerza motriz que lo deforma continua e irreversiblemente asociada al gradiente de presión en la dirección axial, por lo que si no existe un gradiente de presión no existe un perfil de velocidades y por lo tanto no existe flujo en el sistema.

Para obtener el flujo volumétrico partimos de la Ec. (4.1-11) sustituyendo el perfil de velocidades en la Ec. (5-18), siendo así:

$$Q(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} \left[ C_1 J_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \right] r dr d\theta \quad (5-54)$$

Desarrollando la integral en  $\theta$ , se realiza un cambio de variable donde  $\alpha r = z$

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{\alpha^2(\omega)} \int_0^{\alpha R_2} \left[ C_1 J_0(z) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \right] z dz \quad (5-55)$$

Aplicamos la propiedad de linealidad de la integral y definimos la cantidad adimensional  $\beta$  como el producto del parámetro alfa y una longitud característica, i.e,  $\beta = \alpha R_2$

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{\beta^2} \int_0^\beta C_1 J_0(z) z dz + \frac{2\pi O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \int_0^\beta z dz \quad (5-56)$$

Para integrar la función de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad (Apéndice B):

$$\frac{d}{dz} [z J_1(z)] = z J_0(z) \quad (5-57)$$

Resolviendo la Ec. (4.1-11) y simplificando, obtenemos la expresión para el flujo volumétrico:

$$Q(\omega) = \nabla_z p(\omega) \pi R_2^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left[ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right] \quad (5-58)$$

En la ecuación (5-58) se encuentran separadas la componente geométrica y la de presión, esto nos permite definir una función de transferencia  $T_1(\omega)$  para este sistema:

$$T_1(\omega) = \frac{8i^2 O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left[ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right] \quad (5-59)$$

Nótese que la función de transferencia queda en términos de un cociente de funciones de Bessel, las cuales son funciones oscilatorias y que podrían inducir efectos resonantes en el sistema. La resonancia en este trabajo es la máxima energía que presenta un sistema debido a las oscilaciones, y se obtiene debido a que la frecuencia del sistema se empata o se acopla con las frecuencias de las propiedades materiales.

Por lo tanto, el flujo volumétrico se puede expresar como:

$$Q(\omega) = (-\nabla_z p(\omega)) \frac{\pi R^4}{8} T_1(\omega) \quad (5-60)$$

### ***5.2.2. Función De Transferencia De Un Fluido Viscoelástico Lineal A Través De Una Corona Circular En Estado No Estacionario***

Para el caso del flujo en una corona circular, se cumplen las mismas condiciones de proceso que en un capilar, y ya que este problema se desarrolla en geometrías cilíndricas, la Ec. (5-46) también es válida para este caso, de este modo y para fines prácticos se reescribe en este apartado:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_1 Y_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-61)$$

Para obtener el valor de las constantes de integración se plantean las siguientes condiciones de frontera:

C.F.1 La velocidad en la frontera del tubo exterior es cero, i.e,  $V_z(R_2, \omega) = 0$

C.F.2 La velocidad en la frontera del tubo interior es cero, i.e,  $V_z(R_1, \omega) = 0$

Aplicando las condiciones de frontera en la Ec. (5-61) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha R_2) + C_1 Y_0(\alpha R_2) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-62)$$

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha R_1) + C_1 Y_0(\alpha R_1) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-63)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene el valor de las constantes, para  $C_1$ :

$$C_1 = C_3 \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-64)$$

Donde

$$C_3 = \left[ \frac{Y_0(\alpha R_2) - Y_0(\alpha R_1)}{J_0(\alpha R_2)Y_0(\alpha R_1) - Y_0(\alpha R_2)J_0(\alpha R_1)} \right] \quad (5-65)$$

Y para  $C_2$ :

$$C_2 = C_4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-66)$$

Donde

$$C_4 = \left[ \frac{J_0(\alpha R_1) - J_0(\alpha R_2)}{J_0(\alpha R_2)Y_0(\alpha R_1) - Y_0(\alpha R_2)J_0(\alpha R_1)} \right] \quad (5-67)$$

Nótese que ningún termino de estas constantes dependen de la variable  $r$ , por lo que para fines prácticos escribimos el perfil de velocidad de la siguiente manera:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_1 Y_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (5-68)$$

Sustituyendo la Ec. (5-68) en (5-18) planteamos la expresión para el flujo volumétrico

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \left[ C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \right] r d\theta dr \quad (5-69)$$

De manera similar que en caso de un capilar se desarrolla la integral respecto a  $\theta$ , y se realiza un cambio de variable donde  $z = \alpha r$ :

$$Q = 2\pi \int_{\alpha R_1}^{\alpha R_2} \left[ C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \nabla_z p(\omega) \right] z dz \quad (5-70)$$

A diferencia del caso del flujo en un capilar, definimos el número  $R$  como el cociente entre los radios interior y exterior de la corona circular:

$$R = \frac{R_1}{R_2} \quad (5-71)$$

De manera que si  $R=1$ , quiere decir que el sistema esta ocluido completamente, mientras que si  $R \cong 0$  es un sistema en el cual se puede aproximar por un capilar de radio  $R_2$ . De este modo definimos el parámetro Beta como el producto entre el parámetro alfa y el radio exterior, i.e.  $\beta = \alpha R_2$ .

Aplicando linealidad de la integral en el perfil de velocidad tenemos

$$Q = \frac{2\pi C_1}{\alpha^2(\omega)} \int_{R\beta}^{\beta} z J_0(z) dz + \frac{2\pi C_2}{\alpha^2(\omega)} \int_{R\beta}^{\beta} z Y_0(z) dz + \frac{2\pi O_\phi(i\omega)}{\alpha^4(\omega)} \nabla_z p(\omega) \int_{R\beta}^{\beta} z dz \quad (5-72)$$

Para integrar las funciones de Bessel utilizamos las siguientes propiedades (Apéndice B):

$$\frac{d}{dz} [z J_1(z)] = z J_0(z) \quad (5.2-73)$$

$$\frac{d}{dz} [z Y_1(z)] = z Y_0(z) \quad (5.2-74)$$

Resolviendo la Ec. (4.1-11) y simplificando, obtenemos la expresión para el flujo volumétrico en esta geometría en términos de la función de transferencia  $T_2(\omega)$ :

$$Q = (-\nabla_z p(\omega)) \frac{\pi R_2^4}{4} T_2(\omega) \quad (5-75)$$

Donde:

$$T_2(\omega) = O_\phi(i\omega) \frac{8i^2}{\beta^3} \left\{ C_3 [J_1(\beta) - R J_1(\beta R)] + C_4 [Y_1(\beta) - R Y_1(\beta R)] + \frac{\beta}{2} [1 - R^2] \right\} \quad (5-76)$$

En la geometría de la corona circular se incorporan las funciones Bessel de segunda especie, también conocidas como funciones de Neumann, que como se mencionó anteriormente, son funciones oscilatorias y que podrían inducir efectos resonantes en el sistema.

### 5.3. Ecuaciones y Variables Adimensionales

Con el fin de simplificar las expresiones obtenidas, realizaremos un análisis y escalamiento de las variables del sistema.

#### 5.3.1. Análisis del parámetro $\beta$

Definimos el parámetro  $\beta$  como el producto del parámetro alfa y una longitud característica. Este parámetro depende de la reología, de la inercia, y es punto de partida en la velocidad de fase de las ondas y la velocidad de grupo del sistema.

En su forma no potenciada se expresa como:

$$\beta = \alpha R = i^{3/2} \sqrt{\rho R^2 O_\phi(i\omega)} \quad (5-77)$$

En este caso podemos escalar la función fluidez dividiendo por una fluidez característica  $\varphi_c$  y multiplicando la frecuencia por un tiempo característico  $t_c$  de la siguiente forma:

$$\dot{O}_{\phi_I}(i\hat{\omega}) = \frac{O_\phi(i\omega)}{\varphi_c} \quad (5-78)$$

$$\hat{\omega} = \omega t_c \quad (5-79)$$

Para un fluido viscoelástico lineal  $\varphi_c$  está definida como el inverso de la viscosidad y el tiempo característico es el tiempo unimodal de Maxwell [15].

$$\varphi_c = \frac{1}{\eta_0} \quad (5-80)$$

$$t_c = \lambda_0 \quad (5-81)$$

En este trabajo el fluido es caracterizado con el modelo de Jeffrey el cual fue abordado en el apartado 4.1.2.

Podemos definir el operador fluidez de Jeffrey como el inverso del operador viscosidad en el dominio de la frecuencia reportado en la Tabla 5-1, y al ser escalado mediante la fluidez característica se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{O}_{\phi_j}(i\omega) = \frac{O_{\phi_j}(i\omega)t_c}{\varphi_c} = \frac{1 + (i\omega)}{1 + \lambda_j(i\omega)} \quad (5-82)$$

Donde  $\lambda_j$  es el tiempo de retardo adimensional y que está asociado a la contribución del solvente en el fluido, por lo que el máximo valor que puede tomar es de 0.5, lo que implicaría que la viscosidad del solvente y la viscosidad del polímero sean las mismas.

Por lo que el parámetro  $\beta$  adquiere la forma:

$$\beta = i^{3/2} \sqrt{De^2 i\omega \dot{O}_{\phi_j}(i\omega)} \quad (5-83)$$

Donde  $De$  es el número adimensional de Deborah, en el cual el tiempo de proceso está dado como el cociente entre la raíz del producto de la densidad del fluido por la longitud característica del sistema al cuadrado y el módulo de elasticidad del polímero:

$$De = \frac{\sqrt{(\rho R^2/G)}}{\lambda_0} \quad (5-84)$$

Esta forma es el inverso de la definición dada en el apartado 4.1.1 de modo que para utilizar esta forma debemos invertir los límites definidos en ese apartado, teniendo entonces que si  $De \ll 1$  el comportamiento se interpreta como elástico y si  $De \gg 1$  como viscosos.

### 5.3.2. Funciones de Transferencia Adimensionales

Para escalar las funciones de transferencia  $T_1(\omega)$  y  $T_2(\omega)$  dadas por las ecuaciones (5-59) y (5-76) respectivamente, escalamos la fluidez adimensional de Jeffrey de forma análoga a lo realizado con el parámetro Beta en la Ec. (5-82), por lo tanto, la función de transferencia en su forma adimensional para un capilar se expresa como:

$$\dot{T}_1(\omega) = \frac{T_1(\omega)t_c}{\varphi_c} = \dot{O}_{\phi_j}(i\omega) \frac{8i^2}{\beta^2} \left[ 1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right] \quad (5-85)$$

Y para una corona circular:

$$\dot{T}_2(\omega) = \dot{O}_{\phi_j}(i\omega) \frac{8i^2}{\beta^3} \left\{ C_3 [J_1(\beta) - R J_1(\beta R)] + C_4 [Y_1(\beta) - R Y_1(\beta R)] + \frac{\beta}{2} [1 - R^2] \right\} \quad (5-86)$$

De acuerdo con nuestro escalamiento existen dos grupos adimensionales que caracterizan los mecanismos inerciales y viscoelásticos (Deborah) y los mecanismos viscoelásticos del solvente y del polímero ( $\dot{\lambda}_j$ ). La única variación considerable en el caso de una corona circular es lo relacionado con el número  $R$ , ya que, al ser un cociente entre los radios la geometría desempeña un papel muy importante. En el caso en que  $R=0$ , la función de transferencia  $\dot{T}_2(\dot{\omega})$  perdería validez, ya que el sistema se puede aproximar por un capilar de radio  $R_2$  mediante la función  $\dot{T}_1(\dot{\omega})$ . Otro caso interesante es cuando  $R$  está cercano a la unidad y que este sistema se puede aproximar al del flujo en una rendija de espesor  $2B$ , longitud  $L$  y anchura  $W$  [16].

Estas funciones de transferencia adimensionales que definimos serán utilizadas en el siguiente capítulo para realizar simulaciones computacionales, variando los grupos adimensionales que las componen.

## **CAPÍTULO IV**



## 6. Simulaciones y análisis de resultados

En esta sección se realizan las simulaciones computacionales en el software Mathematica (13.1) con licencia UNAM, de las ecuaciones (5-85) y (5-86), obtenidas en el capítulo anterior y que corresponden a las funciones de transferencia  $\hat{T}_1(\hat{\omega})$  y  $\hat{T}_2(\hat{\omega})$  para flujo de un fluido de Jeffrey en un capilar y en una corona circular respectivamente.

Se presentan los siguientes casos:

- Flujo en un capilar con diferentes valores de Deborah y  $\hat{\lambda}_J = 0.1$
- Flujo en un capilar con diferentes valores de  $\hat{\lambda}_J$  y Deborah = 1
- Flujo en una corona circular con diferentes valores de R, Deborah = 1 y  $\hat{\lambda}_J = 0.1$
- Flujo en una corona circular con diferentes valores de  $\hat{\lambda}_J$ , Deborah = 1 y R = 0.1

En todos casos se presentan las gráficas correspondientes a las partes real, imaginaria y la norma viscoelástica asociada a cada configuración de la función de transferencia correspondiente.

Finalmente se presenta la simulación de la norma para las funciones de transferencia aplicada a sangre de ratas tipo Wistar con diferentes niveles de colesterol utilizando un modelo multimodal de Maxwell de cinco elementos, el cual es considerado un modelo de Jeffrey cuando el valor de  $\hat{\lambda}_J = 0$ .

### 6.1. Flujo en un capilar con diferentes valores de De y $\hat{\lambda}_J = 0.1$

En las figuras Figura 6.1-1, Figura 6.1-2 y Figura 6.1-3 se ilustran la parte real, imaginaria y la norma de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\hat{\omega})$  con distintos valores de De y a  $\hat{\lambda}_J = 0.1$ .

En la parte real, la gráfica comienza con un valor inicial de 1 y a bajos valores de frecuencia se observa un comportamiento constante hasta llegar a un valor de frecuencia crítica, donde comienza un comportamiento monótono creciente hasta una segunda frecuencia crítica donde alcanza un valor máximo para la función de transferencia, finalmente a frecuencias mayores a esta segunda frecuencia crítica se observa nuevamente un comportamiento decreciente que tiende a cero.

Por otra parte, la parte imaginaria de la función de transferencia inicia con un valor igual a cero, y se observa un comportamiento no monótono decreciente, hasta alcanzar un valor de

frecuencia crítica donde alcanza un valor mínimo, a partir de este punto comienza un comportamiento creciente hasta un segundo valor de frecuencia crítica, donde se obtiene un valor máximo para la función de transferencia, después de este punto se tiene un comportamiento decreciente que tiende a cero.

Este comportamiento es similar en todos los casos tanto de la parte real como de la imaginaria, con la diferencia de que conforme el valor de Deborah aumenta, la curva se desplaza hacia la izquierda y el valor máximo alcanzado disminuye, así mismo, el intervalo de frecuencias en el que se obtiene una mayor respuesta del sistema decrece.

Las curvas tipo campana Gaussiana son las curvas resonantes del sistema y la frecuencia a la que alcanza su máximo punto se le denomina frecuencia de resonancia. En la parte imaginaria de la función se observan resonancias negativas o antirresonancias.

A simple vista, la norma viscoelástica de la Figura 6.1-3 se comporta de forma análoga a la parte real de la función de transferencia, la diferencia está en que el intervalo de frecuencias en el que se obtiene una mayor respuesta del sistema es más grande.

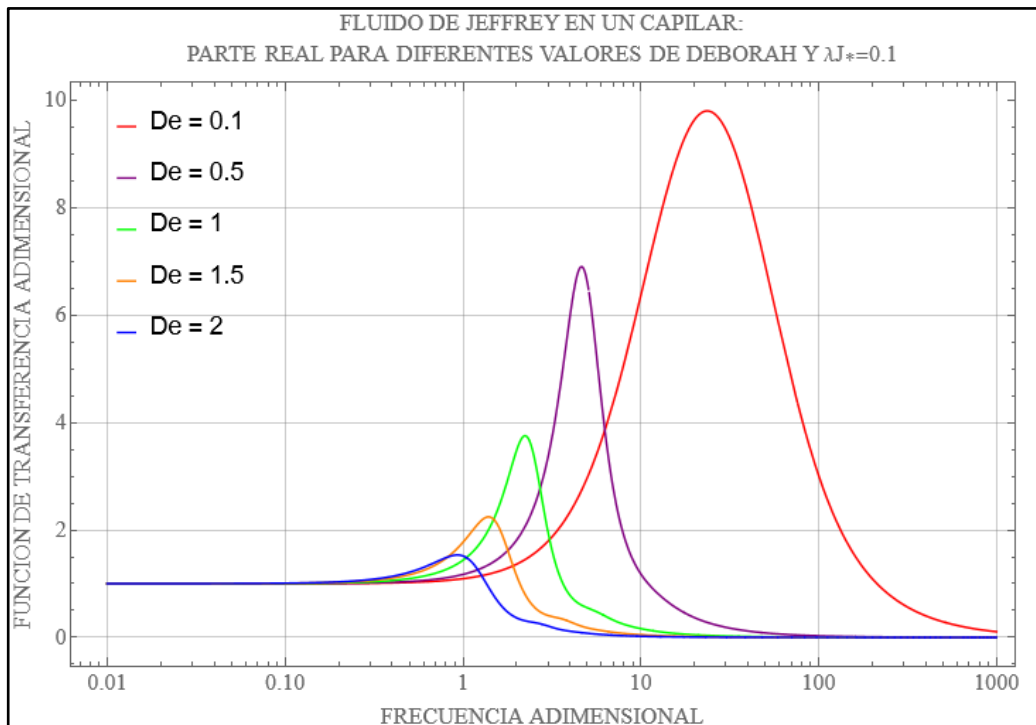


Figura 6.1-1 Parte real de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\omega)$  con diferentes valores de Deborah y  $\lambda_J = 0.1$ .

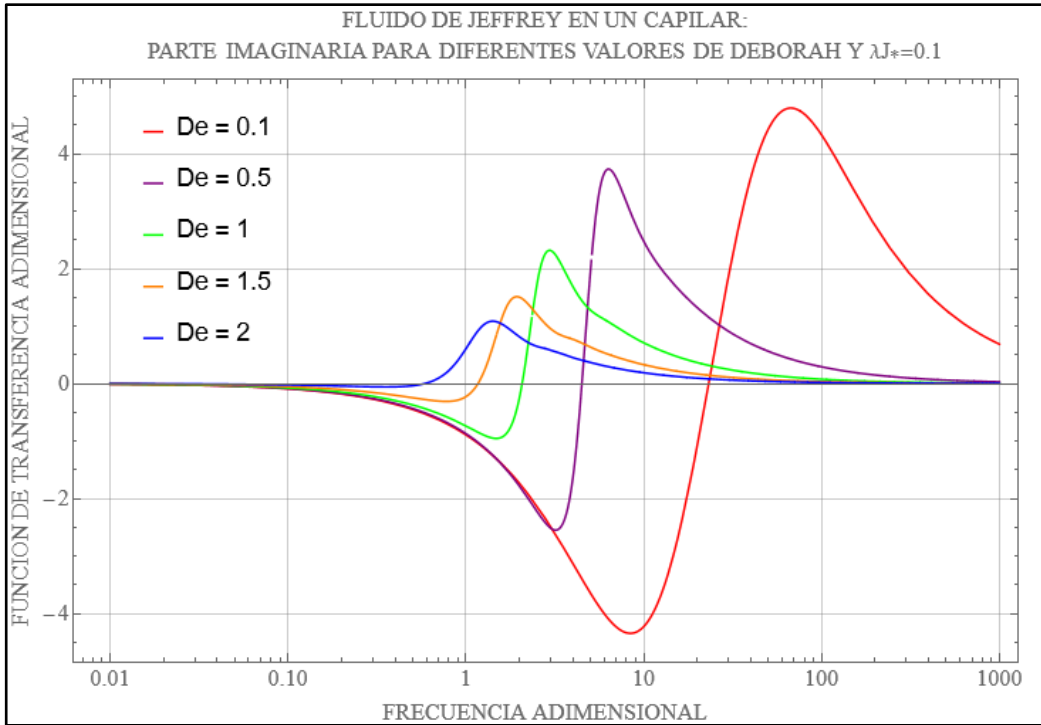


Figura 6.1-2 Parte imaginaria de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\omega)$  con diferentes valores de Deborah y  $\lambda_J = 0.1$ .

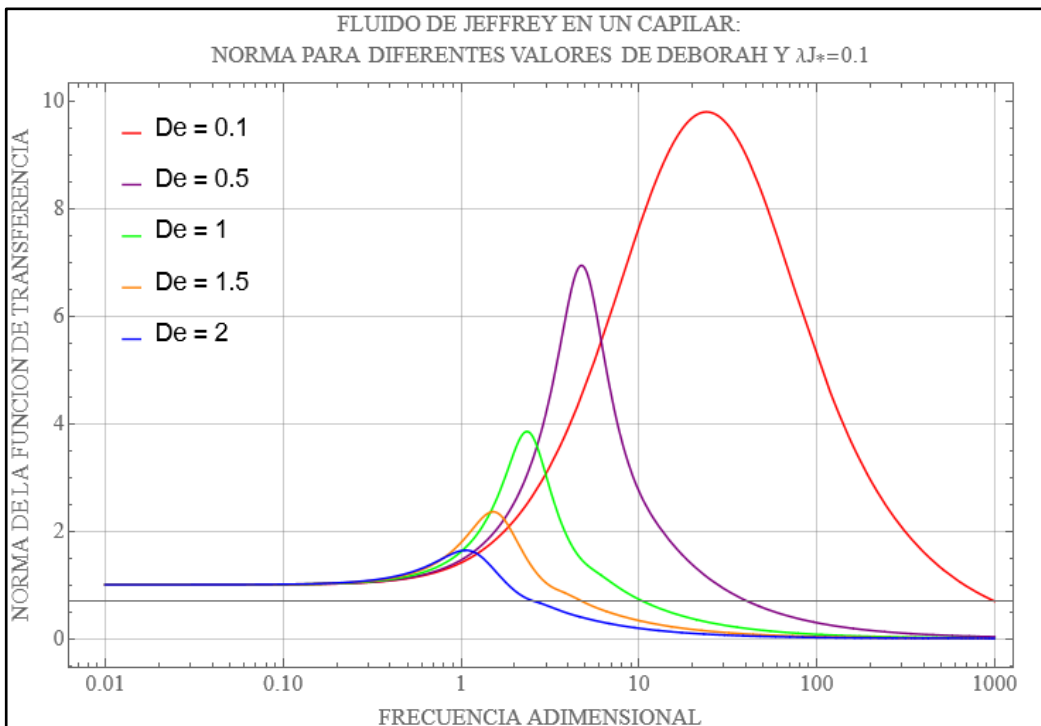


Figura 6.1-3 Norma de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\omega)$  con diferentes valores de Deborah y  $\lambda_J = 0.1$ .

## 6.2. Flujo en un capilar con diferentes valores de $\lambda_j$ y $De = 1$

Para esta configuración la parte real, imaginaria y la norma de la función de transferencia se ilustran en las figuras Figura 6.2-1 Parte real de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\omega)$  con diferentes valores de  $\lambda_j$  y  $De = 1$ , Figura 6.2-2 y Figura 6.2-3 respectivamente. En la parte real y en la norma, a bajas frecuencias se observa un comportamiento constante e igual a 1, hasta una frecuencia crítica donde comienza un comportamiento monótono creciente hasta alcanzar el máximo valor de la función de transferencia, el cual es diferente para cada caso, no obstante, el valor de frecuencia en el que se obtiene este máximo, así como el intervalo de frecuencias en el que se obtiene la mayor respuesta del sistema es el mismo en todos los casos. A frecuencias mayores a este punto comienza un comportamiento monótono decreciente que tiende a cero.

La parte imaginaria de la función de transferencia inicia con un valor de cero y se observa un comportamiento no monótono decreciente hasta un valor de frecuencia crítica donde comienza un comportamiento creciente hasta una segunda frecuencia crítica donde la función de transferencia alcanza un máximo. A mayores frecuencias se tiene un comportamiento decreciente que tiende a cero. En esta parte de la función de transferencia el intervalo de frecuencia donde se obtiene la mayor respuesta del sistema es el mismo, y aunque las frecuencias críticas no son las mismas en todos los casos, se encuentran muy próximas entre sí.

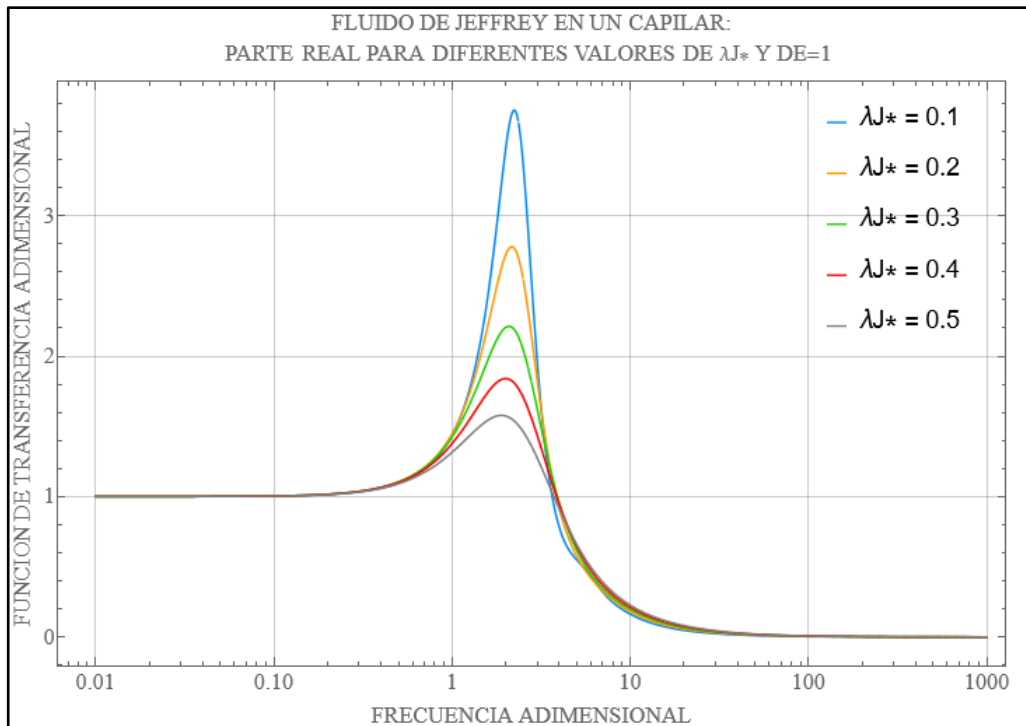


Figura 6.2-1 Parte real de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\omega)$  con diferentes valores de  $\lambda_J$  y  $De = 1$ .

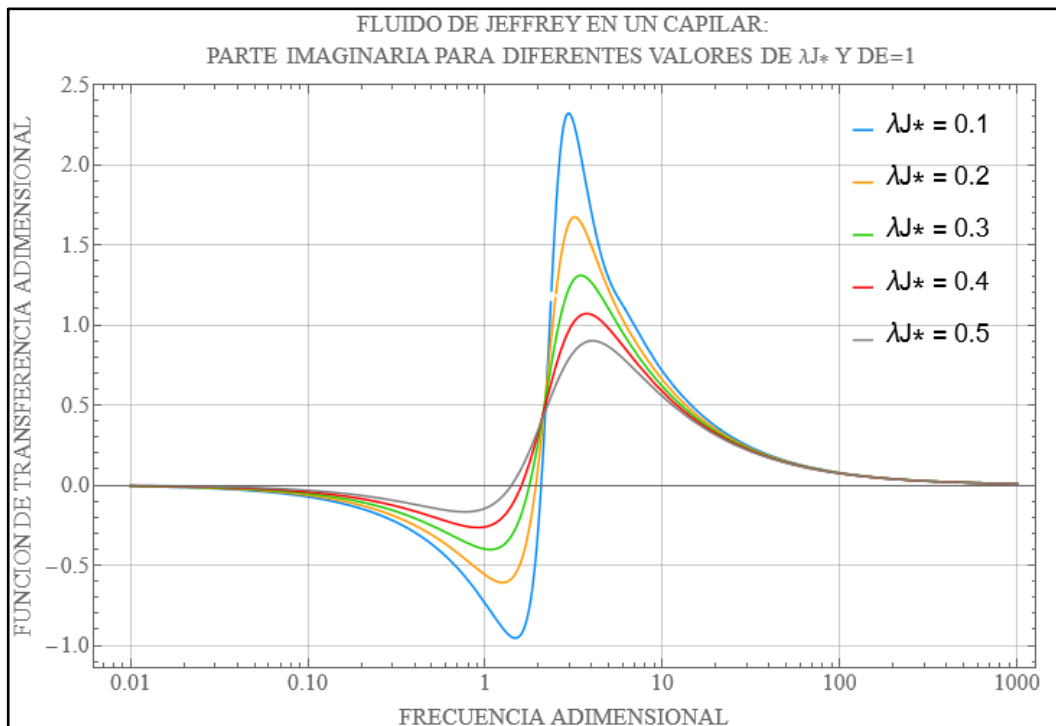


Figura 6.2-2 Parte imaginaria de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\omega)$  con diferentes valores de  $\lambda_J$  y  $De = 1$ .

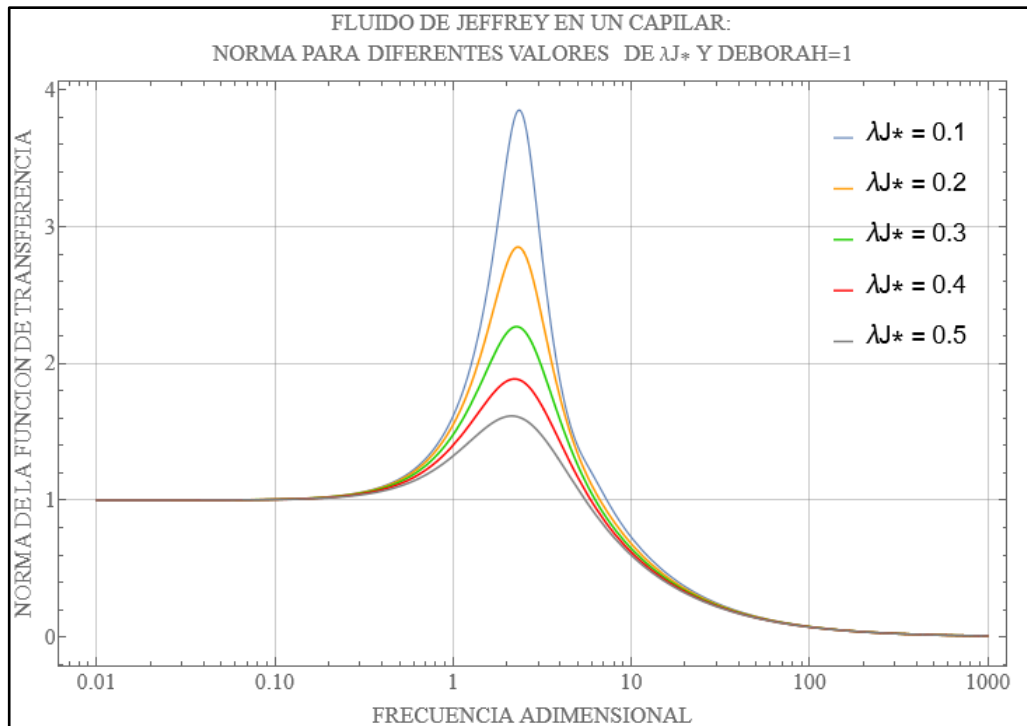


Figura 6.2-3 Norma de la función de transferencia  $\hat{T}_1(\dot{\omega})$  con diferentes valores de  $\lambda_j$  y  $De = 1$

### 6.3. Flujo en una corona circular con diferentes valores de $R$ , $De=1$ y $\lambda_j = 0.1$

En esta primera configuración para la geometría de corona circular, observamos el efecto de la geometría modificando el número  $R$ .

En la parte real y la norma de la función de transferencia con valores distintos en cada caso, siendo el mayor para el valor de  $R$  más pequeño, sin embargo, en todos los casos se observa un comportamiento constante hasta un valor de frecuencia crítica, donde comienza un comportamiento creciente que alcanza un máximo valor para la función de transferencia, después de este punto la función tiene un comportamiento monótono decreciente que tiene a cero. Podemos observar que al aumentar el valor de  $R$  el máximo valor de la función de transferencia disminuye, así mismo la frecuencia a la que se alcanza este máximo incrementa por lo que la función se desplaza hacia la derecha, y en el caso de un valor de  $R=0.8$  el valor de la función de transferencia es prácticamente cero.

En la parte imaginaria en todos los casos se inicia con un valor de cero, y se observa un comportamiento no monótono decreciente hasta un valor de frecuencia crítica, donde la función de transferencia alcanza un valor mínimo, después de este punto se observa un comportamiento

creciente hasta un segundo valor de frecuencia crítica donde se obtiene el máximo valor para la función de transferencia. A frecuencias mayores a este punto la función decrece y se observan pequeñas perturbaciones después de las cuales la función se disipa y tiende a cero. De forma análoga a la parte real, la curva se desplaza hacia la derecha conforme el valor de R aumenta por lo que los valores de frecuencia críticos se incrementan.

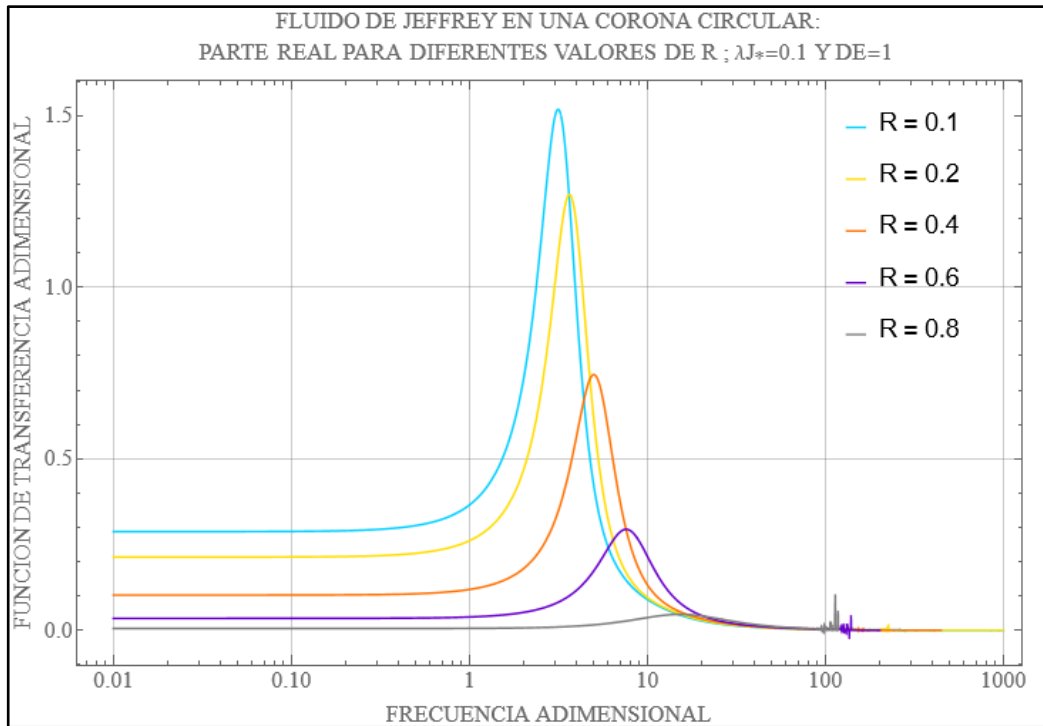


Figura 6.3-1 Parte real de la función de transferencia  $\hat{T}_2(\omega)$  con diferentes valores de R;  $\lambda_j = 0.1$  y  $De = 1$ .

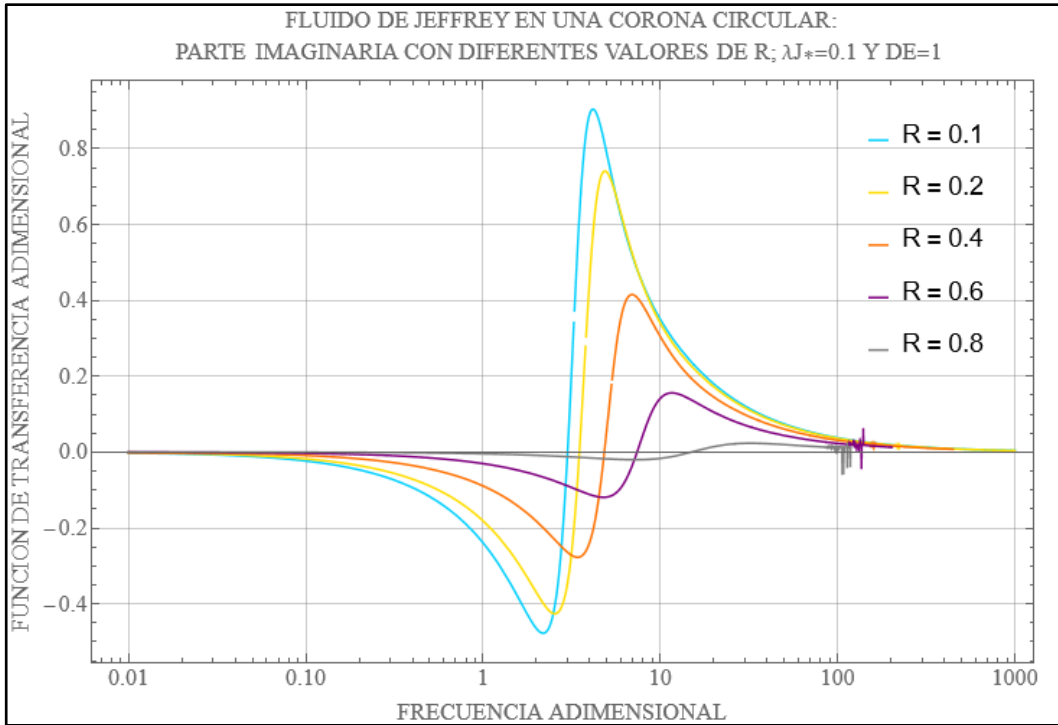


Figura 6.3-2 Parte imaginaria de la función de transferencia  $\hat{T}_2(\omega)$  con diferentes valores de R;  $\lambda_J = 0.1$  y  $De = 1$ .

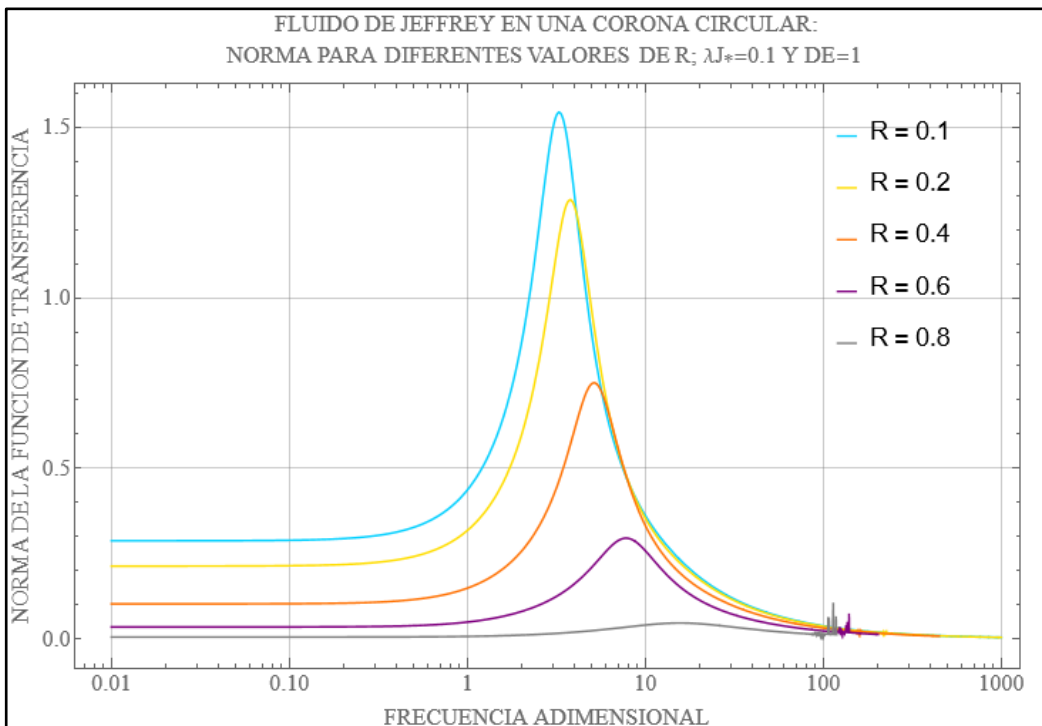


Figura 6.3-3 Norma de la función de transferencia  $\hat{T}_2(\omega)$  con diferentes valores de R;  $\lambda_J = 0.1$  y  $De = 1$ .



#### 6.4. Flujo en una corona circular con diferentes valores de $\lambda_j$ , $De=1$ y $R = 0.1$

En esta configuración se toma un valor de  $R=0.1$  y representa la mínima obstrucción en el sistema. En la parte real así como en la norma de la función de transferencia el comportamiento es el mismo para todos los casos, a bajas frecuencias se observa un comportamiento constante con un valor distinto de cero, hasta un valor de frecuencia crítica donde comienza un comportamiento monótono creciente hasta un segundo valor de frecuencia crítica donde la función alcanza un máximo, esta segunda frecuencia crítica es la misma para todos los casos con la diferencia de que el máximo valor para la función de transferencia disminuye conforme el valor de  $\lambda_j$  aumenta.

La parte imaginaria de la función de transferencia inicia con un valor de cero y se observa un comportamiento no monótono decreciente hasta un valor de frecuencia crítica donde comienza un comportamiento creciente hasta una segunda frecuencia crítica donde la función de transferencia alcanza un máximo. A mayores frecuencias se tiene un comportamiento decreciente que tiende a cero. En esta parte de la función de transferencia el intervalo de frecuencia donde se obtiene la mayor respuesta del sistema es el mismo, y aunque las frecuencias críticas no son las mismas en todos los casos, se encuentran muy próximas entre sí.

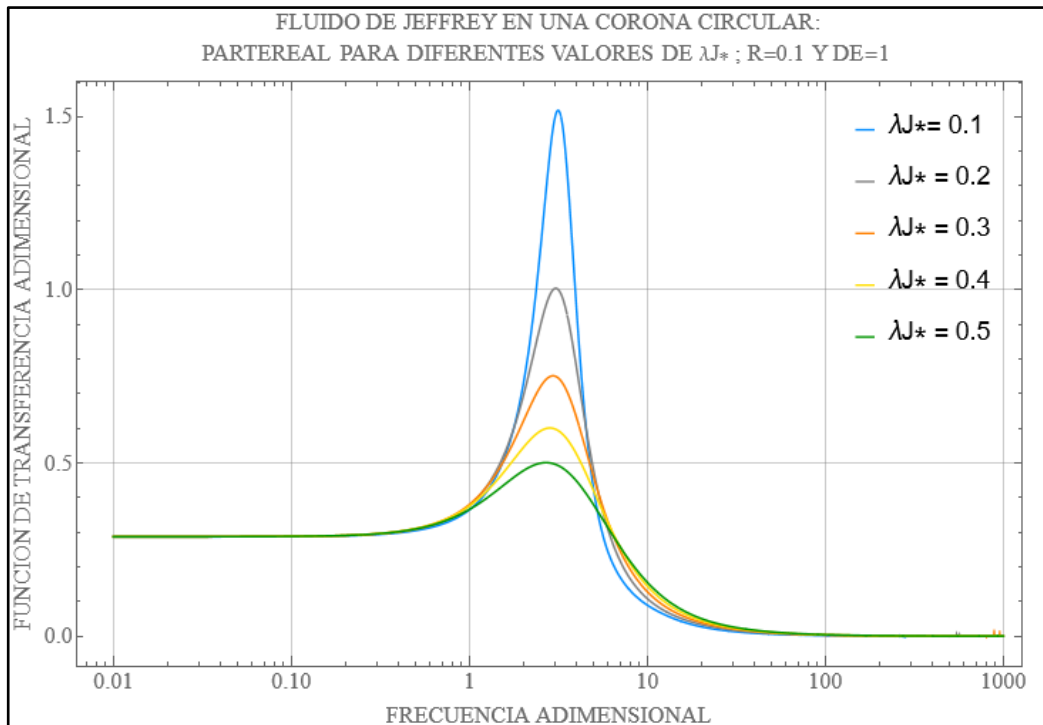


Figura 6.4-1 Parte real de la función de transferencia  $\hat{T}_2(\omega)$  con diferentes valores de  $\lambda_j$ ;  $R = 0.1$  y  $De = 1$

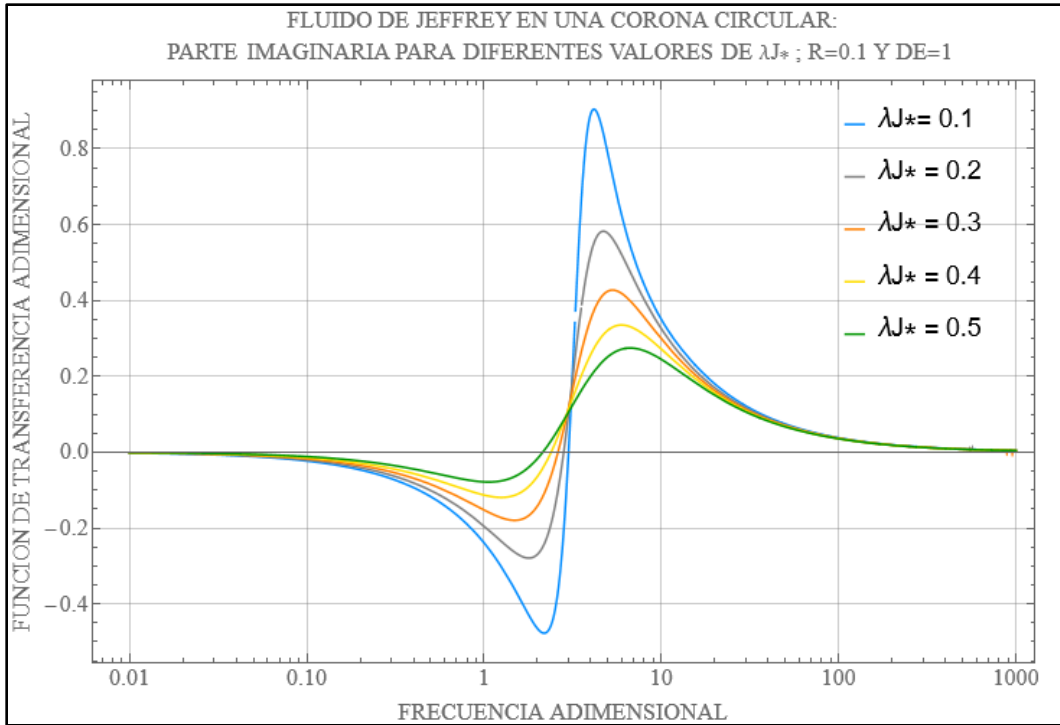


Figura 6.4-2 Parte imaginaria de la función de transferencia  $\hat{T}_2(\hat{\omega})$  con diferentes valores de  $\hat{\lambda}_j$ ;  $R = 0.1$  y  $De = 1$

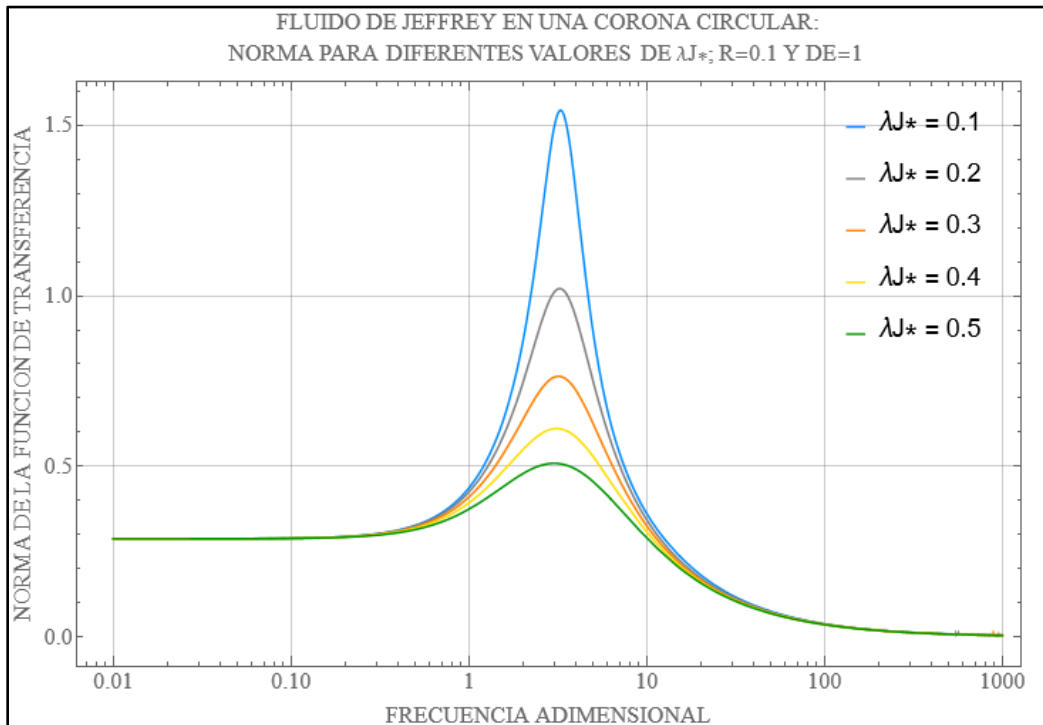


Figura 6.4-3 Norma de la función de transferencia  $\hat{T}_2(\hat{\omega})$  con diferentes valores de  $\hat{\lambda}_j$ ;  $R = 0.1$  y  $De = 1$

## 6.5. Aplicación Biológica a Sangre de Ratas Tipo Wistar

En este apartado se muestran los resultados obtenidos al modelar los datos de sangre de ratas tipo Wistar con diferentes niveles de colesterol tomados de [10] aplicando las funciones de transferencia  $\dot{T}_1(\dot{\omega})$  y  $\dot{T}_2(\dot{\omega})$  con un modelo de Maxwell de cinco elementos, el cual puede ser considerado como un caso particular del modelo de Jeffrey en el que el valor de  $\lambda_j$  es cero.

La Figura 6.5-1 ilustra la norma viscoelástica para el caso de un capilar cuando el número de Deborah es 1, en este caso se observa que el valor inicial para todos los casos es distinto, siendo mayor para el caso de niveles de colesterol alto, el cual a bajas frecuencias se mantiene constante hasta un valor de frecuencia crítica donde comienza un comportamiento monótono creciente, por otro lado, para los dos casos restantes se observa un comportamiento no monótono creciente, y en todos los casos se alcanza el máximo valor para la norma de la función de transferencia a frecuencias resonantes muy próximas, teniendo una mayor respuesta para el caso con niveles de colesterol medio, así mismo se observa un comportamiento de amortiguamiento similar en todos los casos, donde se observan claramente cinco valores de frecuencia resonante, correspondientes a distintos tiempos de relajación, después de los cuales las funciones continúan amortiguándose con tendencia a cero.

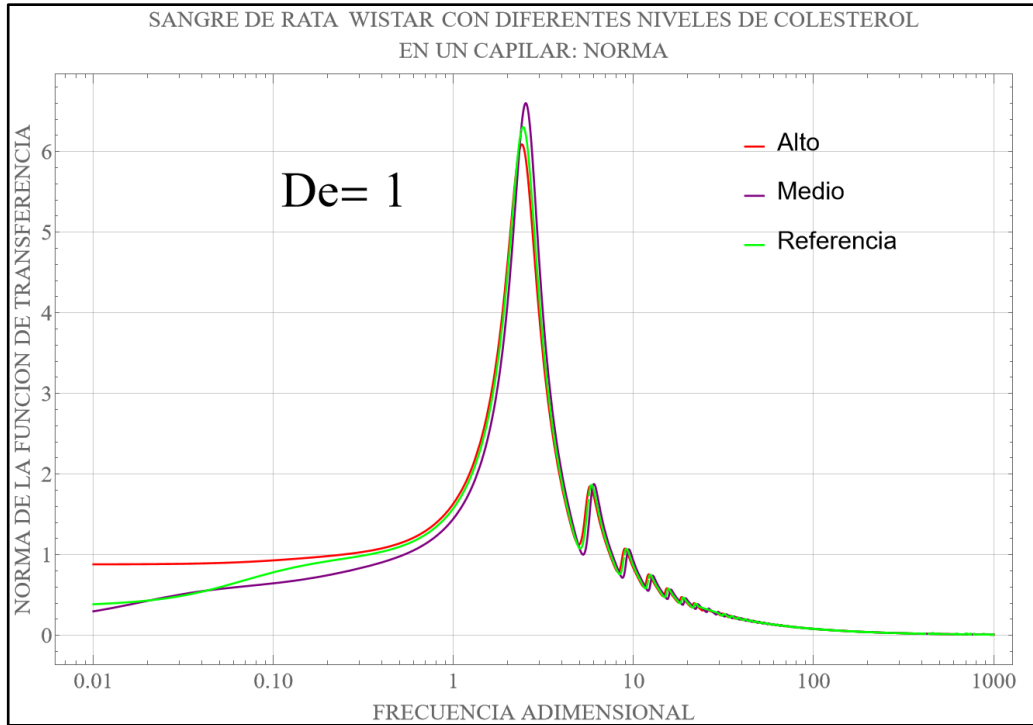


Figura 6.5-1. Función de transferencia  $T_1(\omega)$  aplicada a sangre de ratas tipo Wistar con diferentes niveles de colesterol utilizando un modelo de Maxwell de cinco elementos.

En la Figura 6.5-2 se muestran los resultados obtenidos para la geometría de corona circular cuando el valor de  $De = 1$  y  $R=0.1$ . En todos los casos se observa un comportamiento no monótono creciente hasta alcanzar un valor máximo para norma siendo el más alto el asociado a un nivel de colesterol medio y que ocurre en un mismo valor de frecuencia crítica en todos los casos, de forma análoga a lo que sucede en un capilar se observa que la función se amortigua al incrementar el valor de la frecuencia teniendo las cinco resonancias correspondientes a los distintos tiempos de relajación de este modelo después de los cuales la función continua amortiguándose con tendencia a cero.

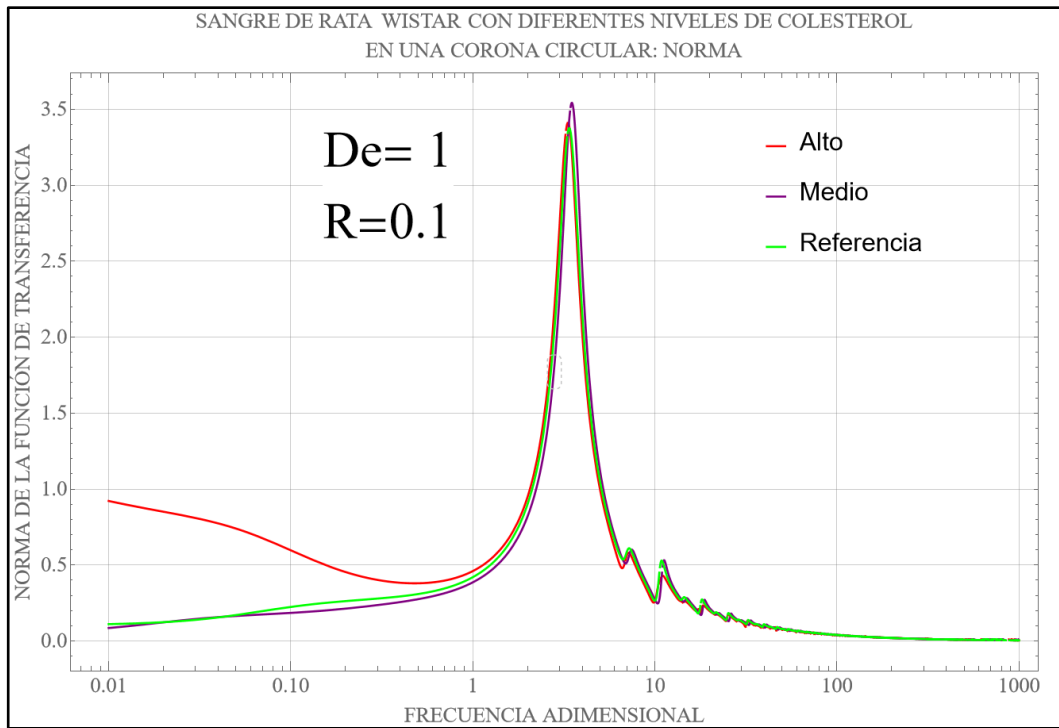


Figura 6.5-2. Función de transferencia  $\hat{T}_2(\omega)$  aplicada a sangre de ratas tipo Wistar con diferentes niveles de colesterol utilizando un modelo de Maxwell de cinco elementos.

## **CAPITULO V**

## 7. Conclusiones

En las simulaciones analizadas en el capítulo anterior se observan los efectos resonantes inducidos por las funciones de Bessel utilizadas en los resultados de las funciones de transferencia. En este trabajo la resonancia es la máxima energía que presenta un sistema debido a las oscilaciones, y describe un acoplamiento entre las propiedades: (i) Inerciales, (ii) Elásticas de bulto, (iii) Geométricas, (iv) Viscoelásticas o de relajación del material, (v) Del solvente y (vi) Dispersivas. Las curvas antirresonantes que se ilustran en las simulaciones de la parte compleja corresponden a un cambio de signo en el gradiente de presión pulsátil, es importante entender que esta antirresonancia representa la mínima energía oscilatoria o vibrátil del sistema de estudio.

Los resultados más importantes de esta investigación son descritos a continuación:

- a) La metodología empleada en este trabajo es completamente general y se puede aplicar a cualquier fluido viscoelástico lineal. La forma de modificar este trabajo es cambiar el fluido a través del operador fluidez (Véase la Tabla 5-1)
- b) El efecto del Deborah es el de modificar el máximo en las curvas resonantes. Un número de Deborah bajo implica que la viscoelasticidad domina la dinámica del sistema mientras que un número de Deborah alto induce que las fuerzas inerciales describan la física del sistema.
- c) El número Jeffrey ( $\lambda_j$ ) induce que la resonancia decrezca en el sistema debido a la incorporación del solvente, es decir, la contribución viscoelástica del polímero se diluye, por lo que la resonancia a través del máximo disminuye.
- d) La geometría de la corona circular presenta los mismos resultados físicos que el capilar, sin embargo, el efecto del número R desfasa las curvas resonantes hacia valores de frecuencia más grandes, inducidas por las oclusiones centrales o periféricas.
- e) En ambos casos de aplicación biológica no se observa una diferencia significativa entre el comportamiento de la sangre de ratas con alto y medio colesterol y el grupo de referencia, esto puede ser causado por el metabolismo de las ratas, ya que de acuerdo con [10], las ratas utilizan un mecanismo de defensa evolutivo que les permite asimilar el mayor contenido de lípidos (contenido de colesterol total) posible, y el contenido restante promueve el crecimiento de tejido adiposo en el cuerpo de las ratas que previene la difusión del exceso de colesterol en la sangre.

## 8. Trabajo futuro

Como continuación de este trabajo, se puede extender al régimen no lineal con diferentes ecuaciones constitutivas y diferentes mecanismos. Estos mecanismos incluyen viscoelasticidad no lineal, transferencia de masa, energía y otros mecanismos como los descritos en materia blanda asociados a la orientación y la alineación de los elementos materiales.

Otra ruta que se puede seguir en este trabajo es la de proponer un conjunto de experimentos que permitan replicar lo descrito en esta teoría. En este contexto, se puede abordar diferentes trabajos de fluidos biológicos con diferentes patologías asociadas al colesterol, cirrosis hepática, cáncer, diabetes, etc.

Finalmente, este trabajo y las investigaciones realizadas en esta tesis de licenciatura representan un avance en la búsqueda constante de herramientas de trabajo que permitan caracterizar estos sistemas de materia blanda y física de la ciencia de la Ingeniería Química y que utilicen como punto de partida los fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos como herramientas de carácter organizacional. Por otra parte, este trabajo puede ser extendido y abordado en estudios de posgrado maestría y doctorado.



## Referencias

- [1] R. Collepardo-Guevara y E. Corvera Poiré, «Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusion,» *Physical Review*, 2007.
- [2] P. E. Corvera y J. A. Del Río, «Possible Gigantic Variations on the Width of Viscoelastic Fingers,» *Europhysics Letters*, 2002.
- [3] J. A. Del Río y J. R. Castrejón Pita, «Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos,» *Revista Mexicana de Física*, pp. 74-85, 2003.
- [4] M. Castro Ponce, M. Bravo-Gutiérrez, A. Hernández-Machado y E. Corvera Poiré, «Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannels,» *Physical Review Letters*, 2008.
- [5] J. Flores Geronimo, E. Corvera Poiré, J. A. Del Río y M. Lopez Haro, «A plausible explanation for heart rates in mammals,» *Journal of Theoretical Biology*, 2010.
- [6] J. Flores Geronimo, J. Alastruey y E. Corvera Poiré, «A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network,» *Annals of Biomedical Engineering*, 2016.
- [7] A. M. Torres Rojas, I. Pagonabarraga y E. Corvera Poiré, «Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes,» *Physics of Fluids*, 2017.
- [8] L. Moreno, F. Calderas, L. Medina-Torres, G. Sanchez-Olivares, A. Sánchez Solís y O. Manero, «Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood,» *Korea-Australia Rheology Journal*, 2015.
- [9] C. A. Sarabia Aldana, L. Medina-Torres, F. Calderas, L. A. Ramírez-Torres, D.-M. Núñez-Ramírez, E. E. Herrera-Valencia, M. J. Bernard-Bernard y O.

- Manero, «Hemorheological and biochemical study in patients with liver cirrhosis,» *Physics of Fluids*, vol. 34, n° 041907, 2022.
- [10] L. Medina-Torres, F. Calderas, L. A. Ramírez-Torres, D.-M. Núñez-Ramírez, A. Navarrete Castro, M. J. Bernard-Bernard y O. Manero, «Rheological Behavior of Blood in Wistar Rats With Different Total Cholesterol Levels,» *Korea-Australia Rheology Journal*, 2022.
- [11] T. Osswald y N. Rudolph, *Polymer Rheology Fundamentals and Applications*, Múnich: HANSER, 2015.
- [12] O. Levenspiel, *Engineering Flow and Heat Exchange*, Nueva York: Springer, 2014.
- [13] F. Irgens, *Rheology and Non-Newtonian Fluids*, Suiza: Springer, 2014.
- [14] A. Ortiz Prado, J. A. Ortiz Valera y O. Ruiz Cervantes, *Introducción a la Mecánica del Medio Continuo*, Ciudad de México: UNAM, 2013.
- [15] E. E. Herrera Valencia, M. L. Sanchez Villavicencio, F. Calderas García, L. A. Ramírez Torres, D. Ortiz Bautista, C. Soriano Correa, D. M. Nuñez Ramirez, L. A. Medina Torres y V. J. Hernández Abad, *Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos:Flujo pulsátil de sangre humana*, Ciudad de México: UNAM, 2022.
- [16] R. B. Bird, W. E. Stewart y E. N. Lightfoot, *Fenómenos de Transporte*, México: REPLA S.A., 1987.
- [17] A. Sequeira, «Hemorheology: Non-Newtonian Constitutive Models for Blood Flow Simulations,» de *Non-Newtonian Fluid Mechanics and Complex Flows*, Levico Terme, Springer en colaboración con Fondazione CIME, 2016, pp. 1-45.

- [18] G. P. Galdi, R. Rannacher, A. M. Robertson y S. Turek, «Hemorheology,» de *Hemodynamical Flows. Modeling, Analysis and Simulation*, Berlin, Birkhäuser Basel, 2008, pp. 63-99.
- [19] R. J. Roselli y K. R. Diller, *Biotransport: Principles and Applications*, Nueva York: Springer, 2011.
- [20] V. Tudela, *El colesterol: lo bueno y lo malo*, Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica, 1996.
- [21] L. Moreno, F. Calderas, G. Sánchez-Olivares, L. Medina-Torres, A. Sánchez-Solís y O. Manero, «La sangre humana desde el punto de vista de la reología,» *Materiales Avanzados*, n° 20, pp. 33-37, 2013.
- [22] B. Vargas Miranda, D. Ambriz García, M. d. C. Navarro Maldonado, A. Trejo Córdova, G. Rodríguez Esquivel y M. d. R. Gonzáles Vieira, *Manejo de animales del Bioterio de la UAM-I*, Ciudad de México: Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, 2018.
- [23] M. A. Suckow, F. C. Hankenson, R. P. Wilson y P. L. Foley, *The laboratory rat*, Elsevier, 2019.
- [24] J. Flores Gerónimo, «Permeabilidad Dinámica en Redes de Vasos Sanguíneos,» [Tesis de Licenciatura] Facultad de Química UNAM, 2009.
- [25] I. Lopez Carreño, «Permeabilidad en Medios Porosos: Modelo de Ellis en un Sistema Fractal,» [Tesis de licenciatura] FES Zaragoza UNAM, 2016.
- [26] B. Roffel y B. Betlem, *Process Dynamics and Control: modeling for control and prediction*, WILEY, 2006.

- [27] J. Hernández Rodríguez, «Análisis del Flujo de un Fluido Viscoelástico en Geometrías Cilíndricas: Función de Transferencia Compleja,» [Tesis de Licenciatura] FES Zaragoza, UNAM, 200.
- [28] E. Nava Rivera, «Membranas Flexo-Eléctricas Fluctuantes en Medios Viscoelásticos: Generación de Flujo y Transferencia de Fuerza,» [Tesis de Licenciatura] FES Zaragoza UNAM, 2022.
- [29] D. G. Zill y M. R. Cullen, Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales, Ciudad de México: McGraw-Hill, 2006.
- [30] H. J. Weber y G. B. Arfken, Essential Mathematical Methods For Physicists, Nueva Jersey: Academic Press, 2003.
- [31] H. A. Barnes, J. F. Hutton y K. Walters, An Introduction to Rheology, Amsterdam: Elsevier, 1989.
- [32] D. R. Coughanowr y S. E. LeBlanc, Process Systems Analysis and Control, Nueva York: McGraw-Hill, 2009.

## Apéndice A. Ecuaciones Generales

### Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (\text{A-1})$$

### Ecuación de Continuidad En Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad (\text{A-2})$$

Cuando el fluido se considera como incompresible tiene una masa constante, la ecuación se simplifica a  $\nabla \cdot V = 0$ .

### Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas

Componente en r:

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_z) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g r \quad (\text{A-3})$$

Componente en  $\theta$ :

$$\rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g \theta \quad (\text{A-4})$$

Componente en z:

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_z) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g z \quad (\text{A-5})$$

## Apéndice B. Funciones de Bessel

Se denomina ecuación de Bessel del orden  $v$  a la ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (\text{B-1})$$

Si se resuelve la ecuación entorno a  $x=0$  se sabe que existe al menos una solución de la forma  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ , que al ser sustituida se tiene que la ecuación indicial es  $r^2 - v^2 = 0$ , de manera que las raíces indiciales son  $r_1 = v$  y  $r_2 = -v$  [29].

### Funciones de Bessel de primera especie

La solución en serie  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+v}$  para  $r_1 = v$  generalmente se representa como  $J_v(x)$ :

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 + v + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \quad (\text{B-2})$$

Si  $v \geq 0$ , la serie converge al menos en el intervalo  $[0, \infty)$ , teniendo para el segundo exponente  $r_2 = -v$  exactamente la misma forma:

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - v + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v} \quad (\text{B-3})$$

Las funciones  $J_v(x)$  y  $J_{-v}(x)$  se denominan funciones de Bessel de primera especie de orden  $v$  y  $-v$  respectivamente, la Ec. (B-3) puede ser convergente en  $(0, \infty)$  ya que puede contener potencias negativas de  $x$ .

Para obtener la solución general de la Ec. (B-1) debemos considerar los siguientes casos:

Cuando  $v = 0$ , las Ec. (B-2) y (B-3) son iguales.

Si  $v > 0$  y  $r^2 - v^2 = v - (-v) = 2v \neq +\mathbb{Z}$ ; las funciones  $J_v(x)$  y  $J_{-v}(x)$  son linealmente independientes en  $(0, \infty)$  y la solución general en el intervalo es  $y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x)$

También se sabe que cuando  $r^2 - v^2 = v - (-v) = 2v = +\mathbb{Z}$ ; puede existir una segunda solución en forma de serie de la Ec. (B-1), en la cual se distinguen dos casos

Cuando  $v = +\mathbb{Z}$ ;  $J_v(x)$  y  $J_{-v}(x)$  no son linealmente independientes, sino que  $J_{-v}(x)$  es un múltiplo constante de  $J_v(x)$

$J_v(x)$  y  $J_{-v}(x)$  son linealmente independientes cuando  $v$  es la mitad de un número positivo impar.

Por lo tanto, la solución general de la Ec. (B-1) en el intervalo  $(0, \infty)$  es:

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x), v \neq \mathbb{Z} \quad (\text{B-4})$$

### **Funciones de Neumann o Funciones de Bessel de segunda especie**

Podemos tomar como una aproximación alternativa la combinación lineal de  $J_{-v}(x)$  y  $J_v(x)$  de la siguiente forma:

$$Y_v(x) = \frac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)} \quad (\text{B-5})$$

Esta es la función de Neumann, la cual es una solución a la Ecuación de Bessel cuando  $v$  no es un entero por lo que se le conoce también como Función de Bessel de Segunda Especie [30].

Si  $v \rightarrow m$  donde  $m$  es un entero, la Ec. (B-5) se indetermina, sin embargo, mediante la regla de L'Hopital se puede demostrar el límite cuando  $v$  tiende a  $m$  existe:

$$Y_m(x) = \lim_{v \rightarrow m} Y_v(x) \quad (\text{B-6})$$

Donde la función  $Y_m(x)$  y  $J_v(x)$  son soluciones linealmente independientes de  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ . Por lo tanto, para cualquier valor de  $v$ , la solución general de la Ec. (B-1) en el intervalo  $(0, \infty)$  se puede escribir como:

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x) \quad (\text{B-7})$$

### **Propiedades de las Funciones de Bessel**

Algunas de las propiedades de las funciones de Bessel de orden  $m, m=0,1,2,\dots$ :

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (\text{B-8})$$

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x) \quad (\text{B-9})$$

$$J_m(0) = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \quad (\text{B-10})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_m(x) = -\infty \quad (\text{B-11})$$

### Relaciones de recurrencia

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x) \quad (\text{B-12})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} J_v(x)] = -x^{-v} J_{v+1}(x) \quad (\text{B-13})$$

Estas relaciones de recurrencia diferenciales también son válidas para la función de Bessel de segunda especie  $Y_v(x)$ .

### Gráficas y tablas

Tabla B- 1. Valores numéricos reales de las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden 0,1 y 2.

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$Y_2(x)$
0	1	0	0	$-\infty$	-	-
1	0.7652	0.4401	0.1149	0.0883	-0.7812	-1.6507
2	0.2239	0.5767	0.3528	0.5104	-0.1070	-0.6174
3	-0.2601	0.3391	0.4861	0.3769	0.3247	-0.1604
4	-0.3972	-0.0660	0.3641	-0.0169	0.3979	0.2159
5	-0.1776	-0.3276	0.0466	-0.3085	0.1479	0.3677
6	0.1506	-0.2767	-0.2429	-0.2882	-0.1750	0.2299
7	0.3001	-0.0047	-0.3014	-0.0259	-0.3027	-0.0605
8	0.1717	0.2346	-0.1130	0.2235	-0.1581	-0.2630
9	-0.0903	0.2453	0.1448	0.2499	0.1043	-0.2268
10	-0.2459	0.0435	0.2546	0.0557	0.2490	-0.0059



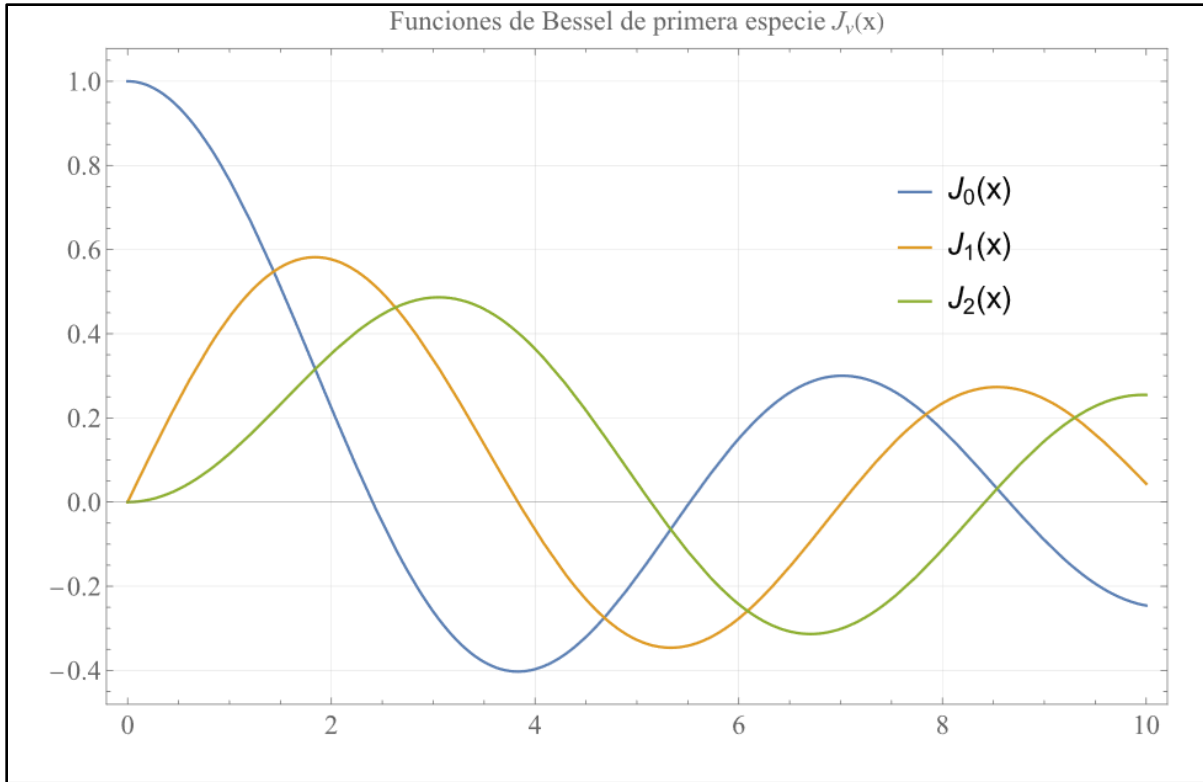


Figura B- 1. Gráfica de las funciones de Bessel de primera especie de orden 0,1 y 2.

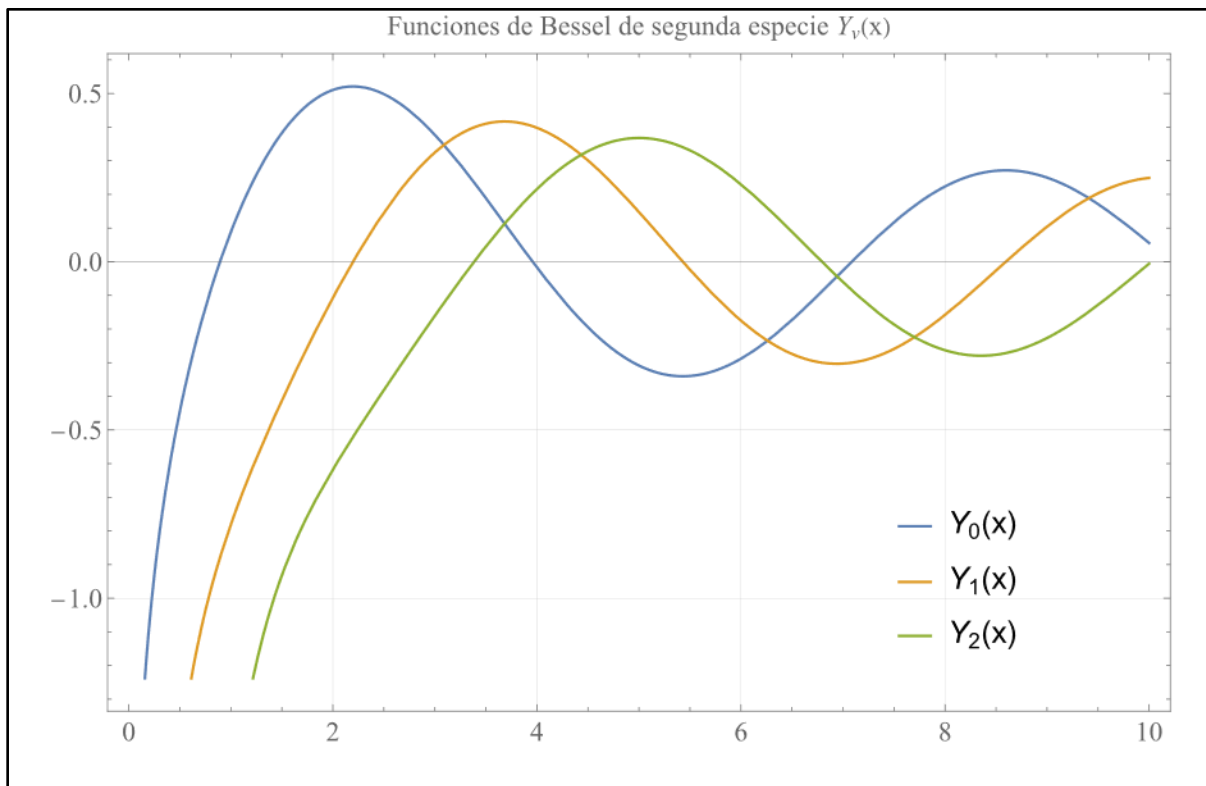


Figura B- 2. Gráfica de las funciones de Neumann o de Bessel de segunda especie de orden 0,1 y 2