



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

VIOLACIÓN DE SABOR Y NO-UNITARIEDAD EN
MODELOS DE SEESAW DE BAJA ESCALA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JUAN CAMILO GARNICA AGUIRRE

TUTOR PRINCIPAL
EDUARDO PEINADO RODRÍGUEZ
INSTITUTO DE FÍSICA UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
ERIC VÁZQUEZ JÁUREGUI
INSTITUTO DE FÍSICA UNAM
SEBASTIEN MICKAEL MARC FROMENTEAU
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mis padres, Germán y Marilú, y a mis amigos de Colombia, por demostrarme su confianza y apoyo irrestrictos y recordarme siempre su cercanía a pesar de la distancia.

Quiero agradecerle especialmente a los doctores Alberto Martín, Luis Urrutia, Alexis Aguilar y Wolfgang Bietenholz, su gran calidad humana, su rigurosidad y su vocación para enseñar.

A los doctores Marcos García, Pablo Roig, Avelino Vicente, Jens Erler, Myriam Mondragón y Catalina Espinoza, por la retroalimentación brindada durante el desarrollo de esta tesis.

A mi equipo de trabajo, los doctores Eduardo Peinado y Gerardo Hernández, por la apertura hacia la discusión que se dio durante el desarrollo de esta investigación y del artículo asociado.

A los creadores de software libre como Package-X y TeXLive.

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca de posgrado que recibí durante mi segundo año de maestría, así como los apoyos que percibí a través de los proyectos CONAHCYT Ciencia Básica CB-2017-2018/A1-S-13051 y PAPIIT IN107621 de DGAPA-UNAM.

Contenido

1. Introducción	1
2. Fundamentos Teóricos	3
2.1. Revisión de conceptos clave	3
2.1.1. Simetrías y contenido de materia del modelo estándar	3
2.1.2. Espinores de Weyl, Dirac y Majorana	5
2.1.3. Término de masa más general para neutrinos	10
2.1.4. Operador de dimensión 5 de Weinberg $\mathcal{L}_{\text{dim}=5}$	11
2.1.5. El mecanismo de seesaw tipo I	14
2.2. El inverse seesaw	16
2.2.1. Posibles parametrizaciones	18
2.2.2. Hipótesis de violación mínima de sabor	18
2.3. Violación de unitariedad y sabor leptónico	19
2.4. Expresiones analíticas para $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$	23
3. Modelos de interés	25
3.1. Parametrización de Casas-Ibarra y MLFV	25
3.1.1. Clasificación de soluciones	27
3.1.2. Dependencia de los branching ratios con η_{ij}	28
3.1.3. Dependencia de los branching ratios con m_D y μ	29
3.2. Supresión de $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ en el inverse seesaw	31
3.2.1. Parametrización de Marcano y μ -MLFV	33
3.3. Realizaciones ultravioleta de la hipótesis μ -MLFV	34
4. Conclusiones	38
A. Diagonalización aproximada	41
B. Masas y paridad de carga	43
C. Detalles del cálculo de $\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$	44
Referencias	46

1. Introducción

El Modelo Estándar de partículas elementales (ME) es una de las teorías científicas más completas y precisas disponibles a la época. Sus predicciones sobre las interacciones nucleares débiles, nucleares fuertes y electromagnéticas, así como sus hipótesis sobre las simetrías y el contenido de materia del universo, han sido puestas a prueba en innumerables ocasiones y, década tras década, el modelo ha resultado invicto en la mayoría de los casos.

Más interesante aún es notar que la totalidad de las partículas predichas por el ME ya han sido experimentalmente descubiertas de forma directa o indirecta. La última de estas partículas fue el bosón de Higgs en 2012, reportado en colisiones de protón-protón a 8 TeV por las colaboraciones ATLAS y CMS del LHC [1,2]. Desde entonces, no hemos encontrado nuevas partículas elementales en experimentos de altas energías (hasta 13.6 TeV en el LHC).

Lo anterior demuestra un gran éxito del ME pero contrasta con la evidencia obtenida en experimentos de oscilación de neutrinos, los cuales señalan que al menos dos estados de neutrino deben ser masivos y, por ende, que el ME debe generalizarse para incluir sus términos de masa. Esto motiva la pregunta natural de cómo deben ser estos términos y, con ello, el cuestionamiento de si los neutrinos son fermiones *de Dirac* o *de Majorana*.

Otras incógnitas que el ME no responde por el momento son, entre aspectos teóricos y observacionales: (i) la asimetría bariónica del universo, (ii) la jerarquía de masas entre las familias del ME (*flavor puzzle*), (iii) la no-naturalidad de la masa del Higgs ante correcciones radiativas, (iv) las diferencias entre los patrones de mezcla entre quarks y leptones, y (v) la naturaleza de la materia oscura, bien sea como defectos topológicos o partículas, entre otros.

Enfocándonos en el problema de las masas de los neutrinos, una forma conveniente de abordar estos aspectos consiste en interpretar al ME como una teoría efectiva válida solo hasta escalas de energía del LHC, que a su vez estaría embebida en una teoría más fundamental con un contenido de materia y simetrías generalizado a escalas de energía más altas. De este modo, los términos que pueden dar masa a los neutrinos a bajas energías pueden intuirse construyendo operadores no-renormalizables a base de dobletes leptónicos y de Higgs, e identificando sus posibles realizaciones ultravioleta a partir de interacciones renormalizables con más campos de materia a más altas energías.

Esta perspectiva da origen a los denominados *mecanismos de seesaw*, a través de los cuales se pueden generar masas de neutrino a nivel árbol y/o de forma radiativa. En particular, en este trabajo nos enfocaremos en los modelos de seesaw *de baja escala*, y más precisamente en el *inverse seesaw*. Este tipo de modelos incorporan nuevos campos de materia a escalas de energía no mucho más altas que las del LHC, favoreciendo así la obtención de predicciones compatibles con las resoluciones experimentales actuales y futuras.

Otro argumento, más práctico, en favor de los mecanismos *de baja escala* (low-scale seesaw) consiste en notar que la siguiente generación de aceleradores entraría en operación después de 2040 con la llegada del Future Circular Collider (FCC). De aprobarse su construcción antes de 2028, este acelerador alcanzaría energías del orden de 100 TeV en el centro de masa, y hasta entonces, es claro que la búsqueda de nueva física con mediciones de alta precisión a bajas energías, será mucho más productiva. Es así que hemos pasado de la *época de los aceleradores* a la *época de la física de alta precisión*, y como tal, es ideal plantear modelos que no incorporen campos muy pesados puesto que sus efectos (a través del *running*) en observables a bajas energías irán suprimidos por potencias de la escala de nueva física, que es dada por sus masas.

Adicionalmente, es importante recalcar que todo modelo que involucre extensiones al sector fermiónico del ME, conllevará genéricamente violaciones de sabor y desviación de la unitariedad en las matrices de mezcla PMNS y CKM. En particular, para el sector de leptones, estas violaciones reciben las constricciones más fuertes por las cotas experimentales a $\mu \rightarrow e\gamma$ provenientes de experimentos como MEG (y su futura actualización a MEGII). Estas cotas son dadas a la escala electrodébil y para incorporarlas debidamente se debe apelar al grupo de renormalización; no obstante, esto añade complicaciones adicionales que no abordaremos en detalle en este trabajo (pero las iremos comentando a lo largo del texto).

Finalmente, nuestro trabajo se estructurará de la siguiente forma: en la Sección 2.1 veremos cómo a partir de las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz podemos construir los términos de masa adecuados para fermiones *de Dirac* y *de Majorana*, discutiremos el operador de dimensión 5 de Weinberg (en sus distintas presentaciones), y veremos cómo desde el enfoque bottom-up, es posible deducir las distintas realizaciones de dicho operador, destacándose dentro de ellas, el mecanismo de seesaw de tipo I. Luego de discutir algunos de sus problemas, introduciremos el inverse seesaw en la Sección 2.2, las violaciones de sabor leptónico, no-unitariedad y la hipótesis MLFV en la Sección 2.3, y presentaremos algunas fórmulas relevantes para el proceso con cambio de sabor $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$ en la Sección 2.4.

En las Secciones 3.1 y 3.2 estudiaremos un modelo con branching ratios accesibles por los experimentos y analizaremos las condiciones necesarias para generar modelos con branching ratios fuertemente suprimidos. En la Sección 3.3, propondremos tres posibles realizaciones ultravioleta para este último escenario, y daremos nuestras conclusiones en el Capítulo 4.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Revisión de conceptos clave

2.1.1. Simetrías y contenido de materia del modelo estándar

A grandes rasgos, podríamos decir que el Modelo Estándar de partículas elementales (ME) se construye a partir de los siguientes tres principios: se supone un cierto contenido de materia en el universo, se impone invariancia de Lorentz y se exige el grupo de simetrías local $G_{ME} \equiv SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Sin pérdida de generalidad, el Lagrangiano del ME sin acoplos de $SU(3)_c$, puede escribirse de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ME} \sim & \overline{L_{\alpha L}} (i\not{D}) L_{\alpha L} + \overline{Q_{\alpha L}} (i\not{D}) Q_{\alpha L} + \sum_{f=\ell, q^U, q^D} \overline{f_{\alpha R}} (i\not{D}) f_{\alpha R} - \frac{1}{4} W^{\mu\nu a} W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & - \overline{L_{\alpha L}} (Y_\ell)_{\alpha\beta} \Phi \ell_{\beta R} - \overline{Q_{\alpha L}} (Y_u)_{\alpha\beta} \tilde{\Phi} q_{\beta R}^U - \overline{Q_{\alpha L}} (Y_d)_{\alpha\beta} \tilde{\Phi} q_{\beta R}^D + \text{h.c.} \\ & + (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nótese que hemos impuesto la convención de suma de Einstein sobre índices repetidos, L y R denotan quiralidades izquierdas y derechas, α es un índice de sabor y a un índice de gauge. $L_{\alpha L}$ ($Q_{\alpha L}$) denotan dobletes izquierdos de leptones (quarks), y $f_{\alpha R}$ son singletes derechos de fermión. Además, hemos separado los quarks y leptones cargados en tres grupos: $q^U \equiv u, c, t$, $q^D \equiv d, s, b$, y $\ell \equiv e, \mu, \tau$. Los tensores de esfuerzos de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ son $W_{\mu\nu}^a$ y $B_{\mu\nu}$ y nuestra convención para la derivada covariante y campos de norma será la siguiente:¹

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig \vec{W}_\mu \cdot \vec{I} + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \supset \partial_\mu + ie Q A_\mu, \quad (2.2)$$

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad Q \equiv I_3 + \frac{Y}{2}, \quad \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}, \quad g s_W = g' c_W = e.$$

Aquí, g y g' denotan las constantes de acople a los bosones \vec{W}_μ y B_μ , e es el módulo de la carga eléctrica del electrón, \vec{I} , Y y Q son los operadores de isospín (débil), hipercarga y carga eléctrica, y hemos indicado el seno y el coseno del ángulo de Weinberg como s_W y c_W .

1. Estas expresiones definen unívocamente nuestras convenciones (cf. [3], refs. 7-17 de su tabla 2).

Tal y como está construido el Lagrangiano del ME, nótese que los términos de Higgs-Yukawa para generar masas de Dirac en el sector de neutrinos están ausentes (pues no hay neutrinos derechos). Si quisiéramos construir un término de masa solo con los campos izquierdos, nos enfrentamos al problema de que estos términos requieren de la introducción de un triplete de Higgs para poder contraerse de forma invariante ante $SU(2)_L$, y esto violaría la renormalizabilidad de la teoría (se requeriría de un operador de dimensión 5).²

Introduciendo el símbolo de Levi-Civita ϵ y el doblete de Higgs conjugado de carga $\tilde{\Phi}$

$$\epsilon \equiv i\sigma^2, \quad \tilde{\Phi} \equiv \epsilon \Phi^*, \quad \phi^{+*} = \phi^-, \quad (2.3)$$

tenemos la siguiente asignación de cargas en el ME.

Campos	$SU(2)_L$	I_3	Q	Y	B	L
$Q_{\alpha L} = \begin{pmatrix} q_{\alpha L}^U \\ q_{\alpha L}^D \end{pmatrix}$	2	+1/2 -1/2	+2/3 -1/3	1/3	1/3	0
$L_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha L} \\ \ell_{\alpha L} \end{pmatrix}$	2	+1/2 -1/2	0 -1	-1	0	1
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	2	+1/2 -1/2	+1 0	+1	0	0
$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}$	2	+1/2 -1/2	0 -1	-1	0	0
$q_{\alpha R}^U$	1	0	2/3	4/3	1/3	0
$q_{\alpha R}^D$	1	0	-1/3	-2/3	1/3	0
$\ell_{\alpha R}$	1	0	-1	-2	0	1

Tabla 2.1: Asignación de cargas en el ME, a partir de las cuales se encuentra que el ME (i) está libre de anomalías, (ii) tiene simetrías accidentales $U(1)_L$ de número leptónico y $U(1)_B$ de número bariónico [4], y (iii) puede garantizarse un grupo $U(1)_{B-L}$ libre de anomalías si se añaden, por ejemplo, tres neutrinos derechos con $L = 1$.

2. No obstante, eventualmente relajaremos la condición de renormalizabilidad a nuestras escalas de energía, pues podemos pensar que el ME, tal y como lo conocemos, en realidad podría ser una versión efectiva de una teoría más general, renormalizable a altas energías, y con contenido de materia extra.

2.1.2. Espinores de Weyl, Dirac y Majorana

En teoría cuántica de campos, las piezas fundamentales para construir campos de espín arbitrario³ son las representaciones irreducibles del grupo $SL(2, \mathbb{C})$, *i.e.* formalmente, la cubierta doble del *grupo restringido de Lorentz* $SO_+(3, 1) \approx SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

Para entender mejor cómo transforman los campos en las diversas representaciones de $SL(2, \mathbb{C})$, recordemos que el *grupo restringido de Lorentz* $SO_+(3, 1)$ (grupo *ortocrono propio*⁴) tiene generadores J_l y K_l [7, 8] cuya álgebra se separa en 2 álgebras de $SU(2)$ al introducir

$$A_l = \frac{1}{2}(J_l + iK_l) \quad , \quad B_l = \frac{1}{2}(J_l - iK_l) \quad , \quad l = 1, 2, 3 .$$

$$[A_l, A_m] = i \epsilon_{lmn} A_n \quad , \quad [B_l, B_m] = i \epsilon_{lmn} B_n \quad , \quad [A_l, B_m] = 0 , \quad (2.4)$$

$$J_l = A_l + B_l \quad , \quad K_l = -i(A_l - B_l) . \quad (2.5)$$

El álgebra (2.4) puede realizarse representando a A_l y B_l de diversas formas.

$$(A_l, B_l) = (0, 0) \quad \rightarrow \quad \text{rep trivial (escalares)} .$$

$$(A_l, B_l) = \left(\frac{1}{2}\sigma_l, 0\right) \quad \rightarrow \quad \text{rep } \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ (espinores de Weyl izquierdos)} .$$

$$(A_l, B_l) = \left(0, \frac{1}{2}\sigma_l\right) \quad \rightarrow \quad \text{rep } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ (espinores de Weyl derechos)} .$$

$$(A_l, B_l) = (J_l^{(j_1)}, J_l^{(j_2)}) \quad \rightarrow \quad \text{rep } (j_1, j_2) \text{ (con dimensión } (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)) .$$

en donde $(J_l^{(j_1)})_{m'_1 m_1}$ y $(J_l^{(j_2)})_{m'_2 m_2}$ serían los generadores de rotaciones sobre el eje \vec{e}_l , en su representación de espín j_1 (j_2), definidas sobre espacios independientes⁵ con componentes $m'_1, m_1 \in [-j_1, j_1]$ y $m'_2, m_2 \in [-j_2, j_2]$ [5]. Lo anterior permite etiquetar las representaciones de $SL(2, \mathbb{C})$ mediante parejas (j_1, j_2) . Así, si ψ vive en la representación (j_1, j_2) , se da que

$$\psi \xrightarrow{\Lambda} M_{(j_1, j_2)} \psi = \left(e^{-i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\alpha} \cdot \vec{K})} \right)_{(j_1, j_2)} \psi , \quad (2.6)$$

en donde $\vec{\theta}$ y $\vec{\alpha}$ son parámetros de una transformación de Lorentz Λ arbitraria. A partir de la ec. (2.5) también podemos deducir que no existen representaciones unitarias de $SL(2, \mathbb{C})$ con matrices de dimensión finita (pues $J_l^\dagger = J_l$ y $K_l^\dagger = -K_l$ conllevan $M^\dagger \neq M^{-1}$), por ende, no podemos construir términos de masa invariantes de Lorentz en la forma $\chi^\dagger \chi$ (para espinores de Weyl), y en cambio, estos deben ser de la forma $\chi^T \epsilon \chi$, como ya veremos [7–10].

3. Weinberg [5] (Sección 5.6) y Bargmann-Wigner [6] nos dicen cómo construir estas representaciones.

4. Las transformaciones de Lorentz ortocronas tienen $\Lambda^0_0 \geq 1$, y las propias tienen $\text{Det}(\lambda) = +1$.

5. Abusando de la notación, la suma de estas matrices sería $J_l^{(j_1)} + J_l^{(j_2)} \equiv J_l^{(j_1)} \otimes \mathbb{1}^{(j_2)} + \mathbb{1}^{(j_1)} \otimes J_l^{(j_2)}$.

■ Espinores de Weyl

Teniendo en cuenta la discusión anterior, esta clase de objetos se puede representar mediante espinores de dos componentes en la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ o $(0, \frac{1}{2})$. En el primer caso, decimos que el espinor es izquierdo (o quiral), y en el segundo, que es derecho (o antiquiral). La invariancia de Lorentz restringe entonces la forma de los términos de masa, dando origen a contracciones entre espinores de Weyl y tensores de Levi-Civita $\epsilon = i\sigma^2$ de la siguiente forma.

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\text{Majorana}} = -\frac{1}{2} m_M (\xi^\dagger \epsilon \xi^* + \text{h.c.}) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{\text{masa}}^{\text{Dirac}} = m_D (\xi^T \epsilon \chi + \text{h.c.}), \quad (2.7)$$

De aquí podemos destacar (i) que es posible construir términos de masa de *Majorana* con un espinor de Weyl, y términos de masa de *Dirac* con dos, (ii) que si ξ y χ tienen cargas no-triviales bajo $U(1)$, los términos de Majorana violan dicha simetría, y (iii) que en ambos casos, los términos de masa pueden escribirse netamente con espinores izquierdos⁶ (así, la invariancia bajo Lorentz surge de la identidad $M^T \epsilon M = \text{Det}(M) \epsilon = \epsilon$) [8].

Notación de van der Waerden [10–12] : Solo por completez, queremos aclarar que existe una notación alternativa al trabajar con espinores de Weyl izquierdos y derechos. En esta, la covariancia (contravariancia) bajo $SL(2, \mathbb{C})$ se hace explícita usando índices sin puntear (punteados) para las componentes χ_α ($\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$) de los espinores de Weyl izquierdos (derechos), los tensores de Levi-Civita $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}$ funcionan como métricas, y los índices toman valores $\alpha = 1, 2$ ($\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$). Así mismo, es común incluir una barra sobre los espinores derechos [13].

En este trabajo procuraremos no apelar mucho a esta notación⁷, pero nos gustaría resaltar el siguiente resultado (que luce más simple en dicha notación): dado que $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ son representaciones conjugadas, podemos ligar índices punteados y no punteados mediante la elegante relación $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \equiv (\chi^\alpha)^*$, la cual nos permite escribir todo espinor de Weyl derecho $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ en términos de un espinor de Weyl izquierdo como

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\chi_\beta)^* = (\epsilon \chi^*)^{\dot{\alpha}}, \quad (2.8)$$

en donde es fácil verificar que $\epsilon \chi^*$ es un espinor derecho gracias a que $\sigma^2 \vec{\sigma}^* = -\vec{\sigma} \sigma^2$ implica

$$\bar{\chi} = \epsilon \chi^* \xrightarrow{\Lambda} \epsilon \left(e^{i(\vec{\theta} + i\vec{\alpha}) \cdot \vec{\sigma}^*/2} \right) \chi^* = e^{-i(\vec{\theta} + i\vec{\alpha}) \cdot \vec{\sigma}/2} (\epsilon \chi^*) = M_{(0, \frac{1}{2})} \epsilon \chi^*. \quad (2.9)$$

Este resultado nos será útil, en breve, para construir los espinores de Dirac y Majorana.

6. Formalmente, la ec. (2.8) muestra que todo espinor derecho puede escribirse en términos de uno izquierdo.

7. La desventaja de esta notación es que las barras e índices α para espinores de dos componentes pueden confundirse con conjugados de Dirac e índices de sabor para espinores de cuatro componentes.

■ Espinores de Dirac

Dada la estructura de los términos de masa en (2.7) y recordando que $\epsilon^\dagger = -\epsilon$, podemos definir espinores *de Dirac* de cuatro componentes, en la base de Weyl, como sigue [8, 10]

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \epsilon \xi^* \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\bar{\xi}^\dagger, \xi^\dagger) = (-\xi^T \epsilon, \chi^\dagger), \quad (2.10)$$

con lo cual, podemos recobrar el término de masa (2.7), reescribiéndolo como⁸

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\text{Dirac}} = -m_D \bar{\psi} \psi = -m_D (\bar{\xi}^\dagger \chi + \text{h.c.}) = -m_D (-\xi^T \epsilon \chi + \text{h.c.}), \quad (2.11)$$

que es, precisamente, la única contracción posible entre espinores de cuatro componentes (bilineales de Dirac) que da lugar a un escalar de Lorentz⁹. De este modo, vemos que ambas formas de expresar el término de masa de Dirac son equivalentes; bien sea, en función de dos espinores de Weyl de dos componentes, o con un espinor de Dirac de cuatro componentes.

En términos más generales, todo espinor de Dirac puede definirse independiente de su base como $\psi = \psi_L + \psi_R$, en donde ψ_L y ψ_R aportan en total cuatro grados de libertad y hemos definido los espinores $\psi_{L/R}$ en términos de proyectores de quiralidad $P_{L/R}$ tales que

$$\begin{aligned} \psi_{L/R} &\equiv P_{L/R} \psi, & \overline{\psi_{L/R}} &= \bar{\psi} P_{R/L}, & P_{L/R} &= \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5), & P_{L/R}^2 &= P_{L/R}, & P_L P_R &= 0, \\ \gamma^5 &= i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, & (\gamma^5)^2 &= 1, & (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5, & \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0. \end{aligned}$$

Usando esta descomposición, el término de masa de Dirac se puede reescribir en un lenguaje más cercano al ME (*i.e.* en términos de espinores de cuatro componentes) como

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\text{Dirac}} = -m_D \bar{\psi} \psi = -m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L), \quad (2.12)$$

y podemos verificar que, en la base de Weyl, $\psi_{L/R}$ están dados por las siguientes expresiones, que justifican el uso de índices L/R y muestran que ψ vive en la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$,

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}$$

8. Algunos autores prefieren escribir $\xi_\alpha \chi^\alpha = \xi \chi$ en vez de $\xi^T \epsilon \chi$, entendiendo que ϵ es una métrica.

9. Aquí, ψ vive en la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ y transforma según $\psi \xrightarrow{\Lambda} S(\Lambda) \psi$, $\bar{\psi} \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda)$ con $S(\Lambda) = \exp(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu})$, $S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ en términos de las matrices γ^μ de Dirac [14].

■ Espinores de Majorana

Recordando que las masas de Majorana en (2.7) solo requerían de un espinor de Weyl (ξ), podemos definir al espinor *de Majorana*, en la base de Weyl, como sigue [8, 15]

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \epsilon \xi^* \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 = (\eta^* \bar{\xi}^\dagger, \xi^\dagger) = (-\eta^* \xi^T \epsilon, \xi^\dagger), \quad (2.13)$$

con lo cual observamos que su respectivo término de masa puede reescribirse como¹⁰

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\text{Majorana}} = -\frac{1}{2} m_M \bar{\Psi} \Psi = -\frac{1}{2} m_M (\eta \xi^\dagger \bar{\xi} + \text{h.c.}) = -\frac{1}{2} m_M (\eta \xi^\dagger \epsilon \xi^* + \text{h.c.}), \quad (2.14)$$

Esta expresión, no obstante, no exhibe con claridad algunas implicaciones físicas que nos gustaría resaltar, las cuales están asociadas a que el espinor sea de Majorana. Para evitar esto, conviene introducir el espinor *conjugado de carga* Ψ^c (y su adjunto de Dirac) como

$$\Psi^c \equiv C \bar{\Psi}^T = -\gamma^0 C \Psi^*, \quad \bar{\Psi}^c = -\Psi^T C^{-1}, \quad (2.15)$$

en donde C es una matriz 4×4 sujeta a las siguientes condiciones [14]:

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T, \quad C^{-1} \gamma^5 C = (\gamma^5)^T, \quad C^\dagger = C^{-1}, \quad C^T = -C, \quad |\eta|^2 = 1. \quad (2.16)$$

Una posible representación¹¹, ya implícita en la ec. (2.13), consiste en tomar $C = i\gamma^0\gamma^2$. En esta, es fácil verificar que al imponer la *condición de Majorana* $\Psi^c \stackrel{!}{=} \eta^* \Psi$ sobre un espinor genérico de cuatro componentes (en donde η^* se conoce como *paridad intrínseca de carga*)¹², se deduce que Ψ solo requiere un espinor de Weyl, como ya habíamos mencionado. Es decir,

$$\text{Si } \Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \epsilon \chi^* \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi^c = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^* \\ \eta^* \epsilon \chi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \eta^* \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \epsilon \chi^* \end{pmatrix} = \eta^* \Psi \Leftrightarrow \chi = \xi.$$

Más importante aún, nótese que esta expresión también nos muestra que el espinor de Majorana Ψ (2.13) puede expresarse en términos de espinores de cuatro componentes como $\Psi = \psi_L + \psi_R$ con $\psi_R = \eta \psi_L^\xi$, razón por la cual se dice que Ψ solo posee dos grados de libertad independientes (correspondientes a los grados de libertad del espinor de Weyl ξ).

10. Nótese que también puede absorberse $\sqrt{\eta^*}$ en cada campo ξ , método que detallamos en el Apéndice B.

11. En la base de Weyl, algunos autores toman $C \rightarrow -C$ y $\eta \rightarrow -\eta$ en (2.13). Esto también garantiza $\Psi^c = \eta^* \Psi$.

12. La paridad de carga η debe ser una fase compleja para que el espinor de Majorana satisfaga $(\Psi^c)^c = |\eta|^2 \Psi \equiv \Psi$.

Para verificar que $\psi_R = \eta\psi_L^c$ es de quiralidad derecha, podemos usar la ec. (2.15) y notar que

$$\psi_L^c \equiv (\psi_L)^c = C \overline{\psi_L}^T = C (\overline{\psi} P_R)^T = C P_R^T \overline{\psi}^T = P_R (C \overline{\psi}^T) = (\psi^c)_R. \quad (2.17)$$

Usando estas definiciones, podemos ver que $\eta \equiv \text{Sign}(m_M)$ permite reescribir el término de masa de Majorana con masas positivas $|m_M|$ y espinores de cuatro componentes en la forma

$$-\frac{1}{2} m_M \overline{\Psi} \Psi = -\frac{1}{2} m_M \overline{\Psi}_R \Psi_L + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} m_M \eta^* \overline{\psi}_L^c \psi_L + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} |m_M| \overline{\psi}_L^c \psi_L + \text{h.c.}$$

Aquí hemos usado un solo campo Ψ , pero este argumento se generaliza a múltiples campos en el Apéndice B apelando a la convención más habitual de absorber factores de $\sqrt{\eta_i}$ en la definición de los campos físicos $\hat{\Psi}_{iL}$, lo cual es equivalente a post-multiplicar la matriz de mezcla por una matriz de fases diagonal (de Majorana). Así mismo, es útil ver que podemos establecer la siguiente relación para matrices arbitrarias¹³ X

$$\overline{\psi}_A^c X \psi_B^c = -(\psi_A^T C^{-1}) X (C \overline{\psi}_B^T) = \overline{\psi}_B (C^{-1} X C)^T \psi_A. \quad (2.18)$$

Con base en esto, al generalizar los términos de masa de Majorana a $-\frac{1}{2} \overline{\Psi}_{iL}^c M_{ij} \Psi_{jL} + \text{h.c.}$, se puede mostrar que (i) las matrices de masa de Majorana son simétricas, (ii) la CP-paridad de los campos Ψ_{iL} se puede tomar como $\eta_{\text{CP}}(\Psi_{iL}) = i$, (iii) la realidad de M equivale a invariancia de CP (en el sector de campos Ψ_{iL})¹⁴, (iv) la CP-paridad de los campos $\Psi_i \equiv \Psi_{iL} + \eta_i \Psi_{iL}^c$ sería $\eta_{\text{CP}}(\Psi_i) = i\eta_i$, y finalmente, que (v) todo espinor de Dirac puede descomponerse en dos espinores de Majorana con CP-paridades opuestas y masas degeneradas:

$$-m \overline{\psi} \psi = -\frac{1}{2} m (\overline{\psi} \psi + \overline{\psi}^c \psi^c) = -\frac{1}{2} m \overline{\Psi}_+ \Psi_+ - \frac{1}{2} m \overline{\Psi}_- \Psi_-,$$

en donde hemos definido los espinores de Majorana $\Psi_{\pm} = (\psi \pm \eta\psi^c)/\sqrt{2}$ con paridades de carga $\pm\eta^*$ (ergo, CP-paridades opuestas) y masas iguales $m \equiv m_{M+} = m_{M-}$. Una configuración similar a esta se suele lograr en mecanismos de seesaw de baja escala; sin embargo, en ellos, usualmente existe una cuasidegeneración en vez de una degeneración exacta, y en ese caso se dice que los neutrinos Ψ_i forman *pares de pseudo-Dirac*, en vez de espinores de Dirac.

Para finalizar, nótese que hemos convenido escribir los términos de Majorana en la forma $\overline{\Psi}_L^c M \Psi_L + \text{h.c.}$ (factorizando los campos derechos a la izquierda) y los términos de Dirac en la forma $\overline{\psi}_L M \psi_R + \text{h.c.}$ (factorizando los campos derechos a la derecha). Esta será nuestra notación para el resto del documento, según la convención de la ref. [16].

13. En el último paso hemos usado $-\psi_A^T X \overline{\psi}_B^T = (\overline{\psi}_B X^T \psi_A)^T = \overline{\psi}_B X^T \psi_A$ para variables de Grassmann.
 14. $\overline{\Psi}_{iL}^c M_{ij} \Psi_{jL} + \text{h.c.}$ es invariante bajo $\Psi_{iL} \xrightarrow{\text{CP}} \eta_{\text{CP},i} \gamma^0 \Psi_{iL}^c$ y $\overline{\Psi}_{iL}^c \xrightarrow{\text{CP}} -\overline{\Psi}_{iL} \gamma^0 \eta_{\text{CP},i}$ si $(\eta_{\text{CP},i})^2 M_{ij} = -M_{ij}^*$ [14,16].

2.1.3. Término de masa más general para neutrinos

Considerando n_G neutrinos izquierdos ν_L y n_E neutrinos derechos N_R , el término de masa más general para fermiones de espín 1/2 debería tener: términos de masa de Dirac $\overline{N}_R M_D^T \nu_L$ y de Majorana ($\overline{\nu}_L^c M_L \nu_L$ con campos izquierdos, y/o $\overline{N}_R M_R N_R^c$ con campos derechos), *i.e.*¹⁵

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{M_\nu} &= -\frac{1}{2} (M_L)_{\alpha\beta} \overline{\nu}_{\alpha L}^c \nu_{\beta L} - (M_D^T)_{\alpha'\beta} \overline{N}_{\alpha' R} \nu_{\beta L} - \frac{1}{2} (M_R)_{\alpha'\beta'} \overline{N}_{\alpha' R} N_{\beta' R}^c + \text{h.c.} \\
&= -\frac{1}{2} \overline{\nu}_L^c M_L \nu_L - \overline{N}_R M_D^T \nu_L - \frac{1}{2} \overline{N}_R M_R N_R^c + \text{h.c.} \\
&= -\frac{1}{2} (\overline{\nu}_L^c, \overline{N}_R) \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \\
&\equiv -\frac{1}{2} \overline{n}_L^c M_\nu n_L + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

en donde hemos definido $n_L \equiv (\nu_L, N_R^c)^T$ y usamos la identidad (2.18) para reescribir el término de masa de Dirac como $\overline{N}_R M_D^T \nu_L = \frac{1}{2} (\overline{N}_R M_D^T \nu_L + \overline{\nu}_L^c M_D N_R^c)$. Notemos entonces que, para que la ec. (2.19) sea singlete de isospín ($I_3 = 0$), las matrices M_L y M_D deben provenir de valores de expectación en el vacío de tripletes y dobletes de Higgs, respectivamente; y por lo mismo, M_R es libre de aparecer explícitamente o de generarse dinámicamente mediante escalares, singletes bajo el grupo del modelo estándar G_{ME} .

Este Lagrangiano también nos muestra que en el límite de $M_L = M_R = 0$ los neutrinos serían de Dirac, aunque esto conllevaría acoplamientos de Yukawa extremadamente pequeños. Para ver esto, recordemos que el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil le da un valor de expectación en el vacío a la componente neutra del Higgs tal que $\langle \phi^0 \rangle \approx 174$ GeV, y esto deviene en una matriz de masas $M_D^T = Y_{(\nu N)}^\dagger \langle \phi^0 \rangle$ con $m_i \sim 1$ meV (acordes con los experimentos) solo si los acoples de Yukawa son de orden 10^{-12} .

Adicional a ello, la exclusión *ad hoc* de M_L y M_R es problemática por otras razones: (i) habría ajuste fino dado que ninguna simetría prohibiría la aparición de M_R si recordamos que $U(1)_L$ es meramente accidental¹⁶, (ii) se agravaría el problema de las jerarquías entre familias del ME, ahora con acoples de Yukawa en proporciones de $y_{\nu_\alpha} : y_e : y_t \approx 10^{-12} : 10^{-6} : 1$, (iii) los neutrinos tendrían un inexplicable nivel de *fine-tuning*, por el que no habrían argumentos *naturales* para explicar las masas pequeñas de los neutrinos. No obstante, es interesante ver que todo esto puede solucionarse simplemente no excluyendo a la matriz M_R y adoptando el enfoque de las teorías efectivas, como ya veremos en las Secciones 2.1.4 a 2.2.

15. Aquí, $\alpha = 1, \dots, n_G$ corre sobre el número de neutrinos izquierdos, y $\alpha' = 1, \dots, n_E$ sobre los derechos.

16. Adoptando el *principio totalitario*, todo lo que no esté prohibido por una simetría, debe ser considerado.

2.1.4. Operador de dimensión 5 de Weinberg $\mathcal{L}_{\text{dim}=5}$

Habiendo discutido el término de masa más general para fermiones de espín 1/2, ahora veremos cómo generalizar el ME. Para ello, tenemos a nuestra disposición dos posibles enfoques:

- En el enfoque *top-down* se proponen teorías que contengan al ME a bajas energías y que, a altas energías, permitan dar solución a diversos problemas del ME, incorporando un nuevo contenido de materia y/o simetrías. Estas teorías, generalmente están motivadas en principios de naturalidad, gran unificación y dimensiones extra, y se pueden estudiar a bajas energías gracias a sus implicaciones en efectos radiativos.
- En el enfoque *bottom-up* se trabaja mediante teorías de campo efectivas extendiendo el Lagrangiano de la teoría con términos no-renormalizables construidos a partir del contenido de materia y simetrías disponible a bajas energías. Cada término va suprimido por potencias de la escala de nueva física Λ , y la idea es acotar los coeficientes (*de Wilson*) de estos operadores mediante experimentos.

La lógica del enfoque bottom-up se basa en el teorema de desacople de Appelquist-Carazzone [17], el cual establece que a bajas energías, los *campos pesados* pueden considerarse estáticos e integrarse fuera de la teoría (a nivel árbol), siendo sus únicas contribuciones pequeñas correcciones a nivel radiativo¹⁷. En este sentido, cualquier desviación del ME a nivel experimental, puede interpretarse como un indicio de nueva física a más altas energías.

Bajo este enfoque, siempre se pueden añadir operadores con dimensiones de masa cada vez mayores; no obstante, el número de términos crece rápidamente según se aumenta la dimensión. En 1986, Buchmüller y Wyler [22] listaron (con varias redundancias) todos los posibles operadores de dimensión 6 compatibles con las simetrías del ME. En 2010, Grzadkowski et al [23] mostraron que estos se resumían en 59 operadores con conservación de número bariónico y 4 con violación¹⁸. Cada operador contribuye a distintos observables y cada observable puede depender de varios operadores. El estudio de estos operadores constituye el objetivo primario de las teorías efectivas de campos del Modelo Estándar (SMEFT).

Resultados relevantes en este contexto (hasta dimensión 6) se presentan en las refs. [24, 25]. Sin embargo, para nuestros fines, nos limitaremos solo a discutir la búsqueda de nueva física a través del *operador de dimensión 5 de Weinberg*, el cual introduciremos a continuación.

17. En realidad, el teorema de Appelquist-Carazzone se formula para teorías sin ruptura espontánea de la simetría. Para ver una discusión más general, referimos al lector a las ref. [18–21].

18. Valga la pena aclarar que en el artículo original [23] se identificaron 5 operadores fermiónicos con violación de número bariónico, pero eventualmente, en 2017, los autores mostraron que uno de ellos era redundante.

Con el contenido de materia y simetrías del ME, el término no-renormalizable de dimensión más baja que le da masas (de Majorana) a los neutrinos del ME sería el *operador de dimensión 5 de Weinberg* [26]. Si bien este operador es único, se puede escribir de varias formas:

$$\mathcal{L}_{\text{dim}=5} = -\frac{c_{\alpha\beta}}{2\Lambda} \left(\overline{L_{\alpha L}^c} \tilde{\Phi}^* \right) \left(\tilde{\Phi}^\dagger L_{\beta L} \right) + \text{h.c.} \quad (2.20)$$

$$= +\frac{c_{\alpha\beta}}{2\Lambda} \left(\overline{L_{\alpha L}^c} \epsilon \Phi \right) \left(\Phi^T \epsilon L_{\beta L} \right) + \text{h.c.} \quad (2.21)$$

$$= +\frac{c_{\alpha\beta}}{\Lambda} \left(\overline{L_{\alpha L}^c} \vec{\sigma} \epsilon L_{\beta L} \right) \cdot \left(\Phi^T \vec{\sigma} \epsilon \Phi \right) + \text{h.c.} \quad (2.22)$$

$$= -\frac{c_{\alpha\beta}}{2\Lambda} \left(\overline{L_{\alpha L}^c} \vec{\sigma} \epsilon \Phi \right) \cdot \left(\Phi^T \vec{\sigma} \epsilon L_{\beta L} \right) + \text{h.c.} \quad (2.23)$$

Para probar que estas expresiones son equivalentes, se pueden usar las siguientes identidades (en las que no nos hemos preocupado por usar la notación de van der Waerden) [27]:

$$(\sigma^i)_{ab}(\sigma^i)_{de} = 2\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ab}\delta_{de} \quad \Rightarrow \quad (\sigma^i)_{ab}(\sigma^i)_{de}\epsilon_{bc}\epsilon_{ef} = 2\epsilon_{dc}\epsilon_{af} - \epsilon_{ac}\epsilon_{df}$$

$$[\text{eq. (2.23)}] \sim (\sigma^i)_{ab}(\sigma^i)_{de}\epsilon_{bc}\epsilon_{ef}\Phi_c\Phi_d = -\epsilon_{ac}\epsilon_{df}\Phi_c\Phi_d \sim -[\text{eq. (2.21)}].$$

$$[\text{eq. (2.22)}] \sim (\sigma^i)_{ab}(\sigma^i)_{de}\epsilon_{bc}\epsilon_{ef}\Phi_d\Phi_f = 2\epsilon_{dc}\epsilon_{af}\Phi_d\Phi_f \sim 2[\text{eq. (2.21)}].$$

Otra forma de escribir el operador de dimensión 5 de Weinberg consiste en dejar explícita la acción de las matrices $C^{-1} = C^\dagger$ y σ^2 . Para ello podemos usar (2.15) en (2.21),

$$\mathcal{L}_{\text{dim}=5} \sim \frac{c_{\alpha\beta}}{2\Lambda} \left(L_{\alpha L}^T \sigma^2 \Phi \right) C^\dagger \left(\Phi^T \sigma^2 L_{\beta L} \right) + \text{h.c.} \quad (2.24)$$

En cualquiera de sus presentaciones (2.20)-(2.24), el operador de dimensión 5 de Weinberg se caracteriza porque: (i) conserva las simetrías de norma del ME ($SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$), (ii) viola la simetría accidental $U(1)_L$ de número leptónico en dos unidades, lo cual es inherente a campos de Majorana, por el *teorema de la caja negra* [28], y (iii) se construye solo con los dobletes de leptón y Higgs del ME.

Al romper espontáneamente la simetría electrodébil, se obtienen masas de Majorana tal que

$$\mathcal{L}_{\text{dim}=5} \xrightarrow{EWSB} -\frac{1}{2} \left(\frac{c_{\alpha\beta} v^2}{2\Lambda} \right) \overline{\nu_{\alpha L}^c} \nu_{\beta L} + \text{h.c.} \quad \Rightarrow \quad (m_\nu)_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \frac{v^2}{2\Lambda}. \quad (2.25)$$

Así pues, vemos que es posible obtener masas *pequeñas* para los neutrinos del ME siempre y cuando la escala de nueva física Λ sea *grande* y/o los acoples de Yukawa (aquí $c_{\alpha\beta}$) sean *pequeños*. En las próximas secciones detallaremos a qué nos referimos con *pequeños* y *grandes*.

Teniendo en cuenta las cargas de los dobletes de leptón y del Higgs, a nivel árbol solo tenemos tres posibilidades para generar el operador de dimensión 5 de Weinberg a altas energías. Para entender esto, notemos que un término general de dimensión 5 que genere masas de Majorana, debe tener la estructura [26]

$$\mathcal{L}_{\text{dim}=5} = \frac{1}{\Lambda} g^{abcd} \left(\overline{L}_L^c \otimes \Phi \otimes \Phi \otimes L_L \right)_{abcd}. \quad (2.26)$$

Aquí, a, b, c, d son índices de $SU(2)$ y g^{abcd} es algún operador genérico que especifica las posibles contracciones de los espinores en cuestión. Dado que dos dobletes pueden combinarse para formar un singlete o un triplete, tenemos las siguientes posibilidades [29]¹⁹

- Si $(\overline{L}_L^c \otimes \Phi)$ y $(\Phi \otimes L_L)$ se contraen para formar singletes, podemos añadir partículas mensajeras que sean singletes fermiónicos derechos con $Y = 0$ (seesaw tipo I).
- Si $(\overline{L}_L^c \otimes L_L)$ y $(\Phi \otimes \Phi)$ se contraen para formar tripletes, podemos añadir partículas mensajeras que sean tripletes escalares con $Y = 2$ (seesaw tipo II).
- Si $(\overline{L}_L^c \otimes \Phi)$ y $(L_L \otimes \Phi)$ se contraen para formar tripletes, podemos añadir partículas mensajeras que sean tripletes fermiónicos derechos con $Y = 0$ (seesaw tipo III).

Todas estas realizaciones del operador de dimensión 5 generan una matriz de masas de neutrinos como la de la ec. (2.25). Es así que, si suponemos un cierto orden de magnitud para los acoples de Yukawa, entre más grande sea la escala de nueva física Λ asociada a la escala de los campos pesados, podemos garantizar masas (de Majorana) más pequeñas para los neutrinos activos del ME. Debido a este juego de jerarquías, estas realizaciones del operador (2.26) se conocen como “*mecanismos de seesaw*”.

Por simplicidad, a continuación solo discutiremos el mecanismo de seesaw tipo I y una de sus variantes con mayor poder predictivo a las escalas de energía de los experimentos actuales o próximos a construirse. Para revisar algunos ejemplos de aplicación del teorema de Appelquist-Carazzone en el contexto del mecanismo de seesaw tipo I, referimos al lector interesado a las refs. [14] (ec. 6.318) y [8] (ec. 43), entre otras.

19. Si $(\overline{L}_L^c \otimes L_L)$ y $(\Phi \otimes \Phi)$ se contraen para formar singletes, no obtenemos acoples entre pares de neutrinos sino entre un neutrino y su respectivo leptón cargado; por ende no genera masas de neutrinos.

2.1.5. El mecanismo de seesaw tipo I

En este tipo de mecanismos, el sector escalar se supone idéntico al del ME, y el sector de neutrinos está formado por n_G campos izquierdos (ν_L) y n_E singletes derechos (N_R) [30]. A la luz de la ec. (2.41), esto permite que existan términos de Dirac y Majorana mediados por M_D y M_R , al mismo tiempo que prohíbe los términos mediados por M_L . Así mismo, se exige $\|M_D\| \ll \|M_R\|$ imponiendo $\mathcal{O}(M_D) \lesssim 175$ GeV y $\mathcal{O}(M_R) \gtrsim 1$ TeV. Por ende, el Lagrangiano de masa, tras la ruptura espontánea de la simetría electrodébil, es de la forma

$$\mathcal{L}_{M_\nu}^{\text{tipo I}} = -\frac{1}{2} \overline{n_L^c} M_\nu n_L + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} (\overline{\nu_L^c}, \overline{N_R}) \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.27)$$

en donde $n_L = (\nu_{1L}, \dots, \nu_{n_{GL}}, N_{1R}^c, \dots, N_{n_{ER}}^c)^T$ se compone de campos izquierdos y derechos, y podemos verificar (Apéndice A) que gracias a la jerarquía entre M_D y M_R , la matriz M_ν genera las siguientes expresiones para las matrices de masas de los autoestados físicos \hat{n}_L .

$$\begin{aligned} m_\nu &\approx -M_D M_R^{-1} M_D^T, & \hat{m}_\nu &= V_1^T m_\nu V_1, \\ m_N &\approx M_R, & \hat{m}_N &= V_2^T m_N V_2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nótese que las matrices m_ν y m_N se asocian a n_G autoestados *ligeros* con masas por debajo de la escala electrodébil ($\mathcal{O}(m_\nu) \sim \varepsilon M_D$ con $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$) y n_E autoestados *pesados* con masas al orden de la escala de nueva física M_R . Sin pérdida de generalidad, es posible trabajar en la base donde M_R y la matriz de masa de leptones cargados M_ℓ ya son diagonales²⁰ ($M_R \stackrel{\dagger}{=} \hat{M}_R$ y $M_\ell \stackrel{\dagger}{=} \hat{M}_\ell$), y así mismo conviene reemplazar $V_1 \approx U_{\text{PMNS}}$ imponiendo $n_G = 3$ (de acuerdo con la evidencia experimental actual). De esta forma, vemos que la ec. (2.28) implica

$$\begin{aligned} -\left(V_1^T M_D \sqrt{M_R^{-1}}\right) \left(V_1^T M_D \sqrt{M_R^{-1}}\right)^T &\approx \hat{m}_\nu \\ \Rightarrow M_D &\approx i V_1^* \sqrt{\hat{m}_\nu} R^T \sqrt{\hat{M}_R}, \quad R^T R = 1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Esta expresión (que define la denominada parametrización de Casas-Ibarra [31]) es útil para imponer, al orden dominante en $\varepsilon = M_D M_R^{-1}$, datos de oscilación de neutrinos provenientes de la matriz U_{PMNS} y cotas experimentales conocidas para las masas \hat{m}_ν . Nótese que, los parámetros libres contenidos en \hat{M}_R y R (en general, de $n_E \times n_G$, compleja y con $R^T R = 1$)²¹ pueden generarse mediante escaneos numéricos debidamente filtrados para garantizar que $M_D < 175$ GeV sea consistente con acoples de Yukawa perturbativos $|Y_{\nu N}| < 1$.²²

20. De no ser así, un cambio de base basta para traducir nuestros resultados, como se discute en la ref. [31].

21. En particular, nótese que R debe ser real si el sector leptónico conserva CP explícitamente.

22. Cotas menos restrictivas como $|Y_{ij}| < \sqrt{4\pi} \sim 3.5$ (por unitariedad perturbativa) no serán consideradas [32].

Finalmente, la Figura 2.1 muestran las masas de neutrinos livianos de la ec. (2.28) (las flechas indican el flujo de quiralidad²³). Los campos relevantes se listan en la Tabla 2.2

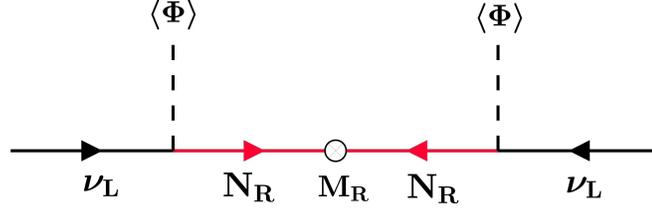


Figura 2.1: Generación de masas m_ν en el mecanismo de seesaw tipo I. El cambio de quiralidad en el acople M_R (entre \overline{N}_R y N_R^c) es debido a conjugación de carga y constituye una propiedad intrínseca de los términos de masa de Majorana. Nótese que en el diagrama no hemos especificado el origen de dicho acople (puede ser un origen dinámico, o explícito).

Campo	#	$SU(2)_L$	I_3	Q	Y	L
ϕ^0	1	2	-1/2	0	+1	0
ν_L	n_G	2	+1/2	0	-1	+1
N_R	n_E	1	0	0	0	+1

Tabla 2.2: Campos relevantes para el mecanismo de seesaw tipo I.

■ Alternativas al mecanismo de seesaw tipo I

El operador de dimensión 5 de Weinberg también puede realizarse a nivel árbol mediante los mecanismos de seesaw tipo II y III, sin embargo, dichos escenarios no los discutiremos en este trabajo. Más bien, nos enfocaremos en el caso del inverse seesaw, un modelo que se deriva del seesaw tipo I y cuenta con varias propiedades que lo hacen interesante desde el punto de vista teórico, como por ejemplo: (i) predice resultados comprobables a nuestras escalas de energía, (ii) contrario al seesaw tipo II, no produce desviaciones en el *parámetro* ρ a nivel árbol [14]²⁴, y (iii) es fácil establecer varias analogías con el seesaw de tipo III²⁵.

23. El flujo va de índices izquierdos a derechos, y los términos de Majorana invierten la quiralidad [10].

24. Este parámetro se define como el cociente $\rho \equiv M_W^2 / (M_Z^2 c_W^2)$ y recibe modificaciones a nivel árbol por cada multiplete de $SU(2)$ ($I \neq 0$) que se añada al ME, según la ec. (3.122) de la ref. [14].

25. Los seesaws de tipo I y III presentan varias similitudes debido a que en ambos se extiende el sector leptónico, generando violación de unitariedad, sabor y número leptónico.

2.2. El inverse seesaw

Este mecanismo se deriva del seesaw de tipo I y se caracteriza por generar masas ligeras $m_\nu \lesssim 0.4$ eV del orden de $\mathcal{O}(\mu m_D^2/M^2)$, en donde μ es una escala naturalmente pequeña²⁶ en el sentido de 't Hooft, m_D está en la escala electrodébil, y M es mayor o igual a 1 TeV.

En este mecanismo, la matriz M_ν puede verse como un caso particular de la ec. (2.27), en el que ahora M_R media acoples entre dos sectores de campos pesados: uno con n_{N_R} singletes derechos (N_R) acoplados por una submatriz M , y otro con n_{S_L} singletes izquierdos²⁷ (S_L) acoplados por una submatriz μ . La asignación de números leptónicos es $L=1$ para $n_L = (\nu_L, N_R^c, S_L)^T$, y esto garantiza que los términos μ y m violan $U(1)_L$ en dos unidades; por ende, son naturalmente pequeños. Esto define el Lagrangiano del inverse seesaw como

$$\mathcal{L}_{M_\nu}^{\text{ISS}} = -\frac{1}{2} \overline{n_L^c} M_\nu n_L + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} (\overline{\nu_L^c}, \overline{N_R}, \overline{S_L^c}) \begin{pmatrix} 0 & m_D & 0 \\ m_D^T & m & M \\ 0 & M^T & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \\ S_L \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.30)$$

en donde podemos identificar las siguientes submatrices e imponer una jerarquía conveniente para aprovechar las fórmulas del mecanismo de seesaw tipo I con²⁸

$$M_\nu = \begin{bmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_R \end{bmatrix}, \quad M_D = [m_D, 0], \quad M_R = \begin{bmatrix} m & M \\ M^T & \mu \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \|m\|, \|\mu\|, \|m_D\| \ll \|M\|.$$

Es de especial interés es el caso con $n_{N_R} \equiv n_{S_L}$ y $\text{Det}(M_R) \neq 0$. En tal escenario, M_R^{-1} puede darse de forma exacta a través de la fórmula de Woodbury [35], y aplicando (2.28), se obtiene

$$m_\nu \approx -M_D M_R^{-1} M_D^T = -(m_D, 0) \begin{pmatrix} -M^{T-1} \mu X & X^T \\ X & -X m M^{T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_D^T \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m_N \approx M_R, \quad (2.31)$$

con $X \equiv (M - m M^{T-1} \mu)^{-1} \approx M^{-1}$. O bien, simplificando un poco,

$$m_\nu \approx m_D M^{T-1} \mu M^{-1} m_D^T \quad \text{y} \quad m_N \approx M_R. \quad (2.32)$$

-
26. Se dice que un parámetro es natural en el sentido de 't Hooft si se obtiene una simetría mayor del Lagrangiano al tenderlo a cero. Como consecuencia, se espera que las correcciones radiativas a dicho parámetro sean del mismo orden que su valor a nivel árbol, evadiendo un *problema de jerarquía* (como el del Higgs). *e.g.* las masas de fermiones y bosones de norma son naturales, pues en su ausencia hay simetría quiral y de norma [33].
27. El subíndice L para los singletes S es convencional y se discute con más detalle al final de esta sección.
28. En este caso, $\|M_D\| \ll \|M_R\|$ se traduce en $\|m_D\|^2 \ll 2\|M\|^2 + \|\mu\|^2 + \|m\|^2$, lo cual se garantiza al pedir $\|m\|, \|\mu\|, \|m_D\| \ll \|M\|$, y se tiene $\|\mu\| \ll \|m_D\|$ en el régimen de naturalidad de la teoría ($\mu \rightarrow 0$) [34].

De la ecuación anterior, también podemos observar que el inverse seesaw con $n_{N_R} = n_{S_L}$ es capaz de producir n_G autoestados ligeros y $2n_{N_R}$ autoestados pesados que se agrupan para formar pares de pseudo-Dirac²⁹. Por lo demás, las masas de los neutrinos ligeros se esquematizan en la Figura 2.2, y las cargas relevantes se resumen en la Tabla 2.3.

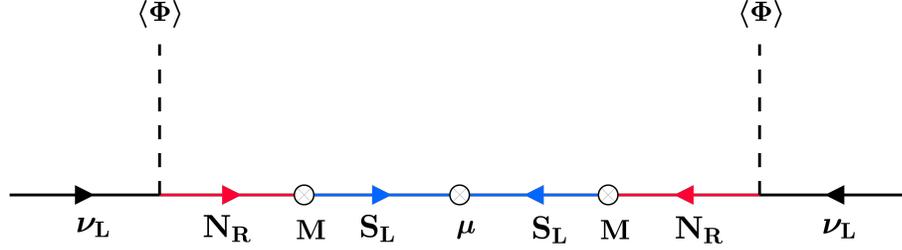


Figura 2.2: Generación de masas m_ν en los mecanismos de tipo inverse seesaw. El término M es de Dirac y acopla singletes N_R con S_L , el término μ es de Majorana y acopla singletes S_L con S_L^c . En este caso, la matriz de masas ligeras al orden dominante en $\varepsilon = M_D M_R^{-1}$ es dada por $m_\nu \approx m_D M^{T-1} \mu M^{-1} m_D^T$.

Campo	#	$SU(2)_L$	I_3	Q	Y	L
ϕ^0	1	2	-1/2	0	+1	0
ν_L	n_G	2	+1/2	0	-1	+1
N_R	$n_E/2$	1	0	0	0	+1
S_L	$n_E/2$	1	0	0	0	+1

Tabla 2.3: Campos relevantes del mecanismo de inverse seesaw con $n_{N_R} \equiv n_{S_L}$ y $\text{Det}(M_R) \neq 0$.

■ Sobre nuestra notación para los singletes S_L

Es posible que debido a nuestra experiencia previa con el ME, estemos inclinados a pensar que todo lo que lleve un subíndice L no puede transformar de forma trivial bajo $SU(2)_L$, sin embargo, la decisión de añadir un subíndice L a los singletes es convencional y se debe entender como un acuerdo implícito para agrupar los campos S con los campos izquierdos ν_L y N_R^c (en el vector n_L) al escribir el término de masa para los neutrinos.³⁰

29. Recordemos que los pares de pseudo-Dirac se forman con dos campos de Majorana, cuasi-degenerados en masa y con CP-paridades opuestas. En el inverse seesaw, los autovalores de la matriz $m_N \approx M_R$ satisfacen $\text{Det}[(m'_i)^2 \mathbb{1} - m'_i(m + \mu) - MM^T] \approx 0 + \frac{\text{m}^{\text{m}^{\text{ax}}}}{A=m, \mu} \mathcal{O}([A, M])$ y ya que m y μ son pequeños, esto implica $m'_i \approx \pm \text{Autovalores}\{(MM^T)^{1/2}\}$, lo cual se tienen masas cuasi-degeneradas en módulo, asociadas a campos de Majorana $\hat{\nu}_\pm = \hat{n}_L \pm \hat{n}_L^c$ con CP-paridades opuestas (ver Apéndice B).
30. Compartimos la notación de Ilakovac y Pilaftsis [36] para los campos S_L . Otros autores usan S ó X^C [32,37].

2.2.1. Posibles parametrizaciones

Parametrización de Casas-Ibarra

La parametrización de la ec. (2.29) para el mecanismo de seesaw tipo I puede generalizarse al inverse seesaw por medio de la ec. (2.32) (con $n_{N_R} = n_{S_L} \equiv n_E/2$). En este caso, es conveniente trabajar en la base en la que μ y la matriz de masas de leptones cargados M_ℓ ya son diagonales ($\mu = \hat{\mu}$ y $M_\ell = \hat{M}_\ell$), de este modo se obtiene

$$\begin{aligned} \left(V_1^T m_D M^{T-1} \sqrt{\hat{\mu}} \right) \left(V_1^T m_D M^{T-1} \sqrt{\hat{\mu}} \right)^T &\approx \hat{m}_\nu \\ \Rightarrow m_D &\approx V_1^* \sqrt{\hat{m}_\nu} R^T \sqrt{\hat{\mu}^{-1}} M^T, \quad R^T R = 1, \end{aligned} \quad (2.33)$$

en donde m_D tiene dimensiones $n_G \times (n_E/2)$, M tiene dimensiones $(n_E/2) \times (n_E/2)$, R es una matriz compleja (real si se conserva CP) de dimensiones $n_G \times (n_E/2)$ y $R^T R = 1$.

Parametrización de Marcano

Alternativamente, si se cumple que $\text{Det}(m_D) \neq 0$ (además de $\text{Det}(M) \neq 0$), es posible aprovechar la dependencia lineal de μ (en m_ν) para despejarla (en términos de $V_1 \approx U_{\text{PMNS}}$) sin necesidad de apelar a nuevos parámetros libres³¹ [32, 38]. Así,

$$\mu \approx M^T m_D^{-1} m_\nu m_D^{T-1} M \quad \text{con} \quad m_\nu \approx V_1^* \hat{m}_\nu V_1^T. \quad (2.34)$$

2.2.2. Hipótesis de violación mínima de sabor

La hipótesis de *violación mínima de sabor* (o MFV, por sus siglas en inglés) asume que las únicas fuentes de violación de sabor y simetría CP se hallan en los acoplamientos de Yukawa del ME, es decir, en las matrices Y_u, Y_d y Y_ℓ (para quarks y leptones cargados) [39].

Al generalizar la hipótesis MFV al sector leptónico, es común definir la hipótesis MLFV como aquella en la que todas las posibles violaciones de sabor leptónico se asumen contenidas en la matriz M_D . Más aún, se suele incorporar a la definición, la suposición de que todos los sectores más allá del ME sean invariantes bajo CP. Con lo anterior, la hipótesis MLFV en el inverse seesaw se traduciría en que m , M y μ deben ser diagonales y reales [40, 41].

31. En el caso de Casas e Ibarra, nótese que la matriz R surge precisamente porque m_ν es cuadrática en m_D .

2.3. Violación de unitariedad y sabor leptónico

Al trabajar en extensiones del ME con neutrinos derechos, algunos procesos relevantes con violación de sabor leptónico y unitariedad son $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta V$, $V \rightarrow \ell_\alpha \bar{\ell}_\beta$ (con $V = \gamma, Z$), $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \ell_\gamma \bar{\ell}_\delta$ y $\ell_\alpha + N \rightarrow \ell_\beta + N$ (en presencia de un núcleo N). Estos procesos también tienen sus contrapartes con neutrinos ligeros y pesados en vez de leptones cargados, pero estos no serán de interés para nuestro trabajo. A continuación, enunciaremos algunos conceptos clave sobre violación de unitariedad y sabor leptónico.

■ Notación

Ocasionalmente será útil descomponer el producto de matrices $(n_G + n_E) \times (n_G + n_E)$ como $AB = A \cdot B + A \diamond B$, con $(AB)_{ij} = A_{ik} B_{kj}$, $(A \cdot B)_{ij} = A_{i\alpha} B_{\alpha j}$ y $(A \diamond B)_{ij} = A_{i\alpha'} B_{\alpha' j}$, en donde α corre sobre índices activos, α' sobre estériles, y i, j, k sobre ambos. Además, definimos³²

$$\mathbf{B} \equiv U_L^{\ell\dagger} \cdot U^\nu, \quad \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger = 1, \quad \mathbf{C} \equiv \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} = U^{\nu\dagger} \cdot U^\nu, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}^2, \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C}^*, \quad (2.35)$$

en donde U_L^ℓ y U^ν son matrices unitarias que diagonalizan a los términos de masa de leptones cargados y neutrinos³³, \mathbf{B} y \mathbf{C} tienen índices $[\mathbf{B}_{\alpha i}]$ y $[\mathbf{C}_{ij}]$, y \mathbf{B} actúa como una generalización (semi-unitaria, con $\mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger = 1$ y $\mathbf{C} = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} \neq 1$) de la matriz de mezcla PMNS.

■ No-Unitariedad en el sector activo

Dado que experimentalmente tenemos acceso directo al sector activo de neutrinos, conviene parametrizar la no-unitariedad a través de la matriz $\eta_{\alpha\beta}$ o el escalar $\tilde{\eta}$, definidos así [42]:

$$2\eta_{\alpha\beta} \equiv (1 - \mathbf{C})_{\alpha\beta} = (1 - \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B})_{\alpha\beta}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{\eta} \equiv 1 - |\text{Det}(\mathbf{B}_{\alpha\beta})|. \quad (2.37)$$

Nótese que si los leptones cargados tienen matriz de masas diagonal, entonces $U_L^\ell \stackrel{\dagger}{=} 1$ y

$$2\eta_{\alpha\beta} = (1 - \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B})_{\alpha\beta} \stackrel{\dagger}{=} (1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^\dagger)_{\alpha\beta} = (\mathbf{B} \diamond \mathbf{B}^\dagger)_{\alpha\beta}. \quad (2.38)$$

O bien, si descomponemos $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_H)$ en un bloque “ligero” y otro “pesado”, esto sería

$$2[\eta_{\alpha\beta}] = 1 - \mathbf{B}_L^\dagger \mathbf{B}_L \stackrel{\dagger}{=} 1 - \mathbf{B}_L \mathbf{B}_L^\dagger, \quad \tilde{\eta} = 1 - |\text{Det}(\mathbf{B}_L)|. \quad (2.39)$$

32. $\mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger = (U_L^{\ell\dagger} \cdot U^\nu)(U^{\nu\dagger} \cdot U_L^\ell) = 1$ y $\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{B} = (U^{\nu\dagger} \cdot U_L^\ell) \cdot (U_L^{\ell\dagger} \cdot U^\nu) = U^{\nu\dagger} \cdot U^\nu$ se pueden verificar trivialmente.

33. En nuestra convención, estos son $-\bar{\nu}_L M_\ell \ell_R$ (con $U_L^{\ell\dagger} M_\ell U_R^\ell = \hat{M}_\ell$) y $-\frac{1}{2} \bar{n}_L^c M_\nu n_L$ (con $U^{\nu T} M_\nu U^\nu = \hat{M}_\nu$).

■ Violación de sabor leptónico con neutrinos derechos

Si el ME se extiende con singletes derechos y el conjunto de ecs. (2.2) se cumple, las interacciones débiles entre neutrinos y bosones de norma toman la forma [36, 43–47].

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{W^\mp}^{\ell\nu} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^- \left[2 \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} \right] + \text{h.c.}, & \mathcal{L}_{Z^0}^\nu &= -\frac{g}{2c_W} Z_\mu \left[\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} \right], \\ &\equiv -\frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^- \left[2 \bar{\hat{\ell}}_L \gamma^\mu \mathbf{B} \hat{n}_L \right] + \text{h.c.} & &= -\frac{g}{2c_W} Z_\mu \left[\bar{\hat{n}}_L \gamma^\mu \mathbf{C} \hat{n}_L \right].\end{aligned}$$

Aquí, los términos entre paréntesis son contribuciones de neutrino a las corrientes J_W^μ y J_Z^μ cuyos vértices ($W^\pm \ell \nu$ y $Z \nu \nu$) inducen violación de sabor leptónico a un loop siempre que las componentes fuera de la diagonal de \mathbf{B} o \mathbf{C} no sean cero. Finalmente, podemos incorporar algunas definiciones para facilitar el uso de reglas de Feynman de la ref. [48],

$$\hat{\nu} \equiv \hat{n}_L + \hat{n}_L^c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} = U^\nu \hat{n}_L = U^\nu P_L \hat{\nu} \Rightarrow \nu_{\alpha L} = U_{\alpha j}^\nu P_L \hat{\nu}_j \\ n_L^c = \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix} = U^{\nu*} \hat{n}_L^c = U^{\nu*} P_R \hat{\nu} \Rightarrow N_{\alpha' R} = U_{\alpha' j}^{\nu*} P_R \hat{\nu}_j \end{array} \right\}.$$

Con base en estas, $\mathcal{L}_{W^\mp}^{\ell\nu}$ y $\mathcal{L}_{Z^0}^\nu$ pueden expresarse como sigue³⁴

$$\mathcal{L}_{W^\mp}^{\ell\nu} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{\hat{\ell}} \gamma^\mu \mathbf{B} P_L \hat{\nu} + \text{h.c.}, \quad \mathcal{L}_{Z^0}^\nu = -\frac{g}{4c_W} Z_\mu \bar{\hat{\nu}} \gamma^\mu (\mathbf{C} P_L - \mathbf{C}^* P_R) \hat{\nu}. \quad (2.40)$$

Así también, existen interacciones con neutrinos capaces de inducir violación de sabor leptónico mediante vértices con bosones de Goldstone no-físicos ($G^\pm \ell \nu$, $H \nu \nu$ y $G^0 \nu \nu$) en la norma de Feynman-'t Hooft, la cual es útil ya que reduce singularidades, simplifica propagadores y permite el uso del teorema de equivalencia de Goldstone [51]. Estos términos de interacción se pueden obtener reemplazando la siguiente expresión para el doblete de Higgs posterior a la ruptura espontánea de la simetría electrodébil (EWSB) en el Lagrangiano de Higgs-Yukawa,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EWSB}} \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + iG^0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} \equiv \epsilon \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EWSB}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - iG^0) \\ -G^- \end{pmatrix},$$

$$G^\pm \in \mathbb{C}, \quad G^- \equiv (G^+)^\dagger, \quad H, G^0 \in \mathbb{R}.$$

34. De las ecs. (2.16) y (2.18), se obtiene $\bar{\hat{n}}_L \gamma^\mu \mathbf{C} \hat{n}_L = \frac{1}{2} (\bar{\hat{n}}_L \gamma^\mu \mathbf{C} \hat{n}_L - \bar{\hat{n}}_L^c \gamma^\mu \mathbf{C}^T \hat{n}_L^c) = \frac{1}{2} \bar{\hat{\nu}} \gamma^\mu (\mathbf{C} P_L - \mathbf{C}^* P_R) \hat{\nu}$. En el límite $\mathbf{C}^* \rightarrow 0$, $\mathbf{C} \rightarrow 1$, $\mathbf{B} \rightarrow 1 \cdot U^\nu$, esta expresión sirve para estudiar modelos con $n_G \geq 3$ generaciones de leptones de Dirac con matriz de masas de leptones cargados M_ℓ diagonal [46, 49, 50]).

En esta ecuación, los campos G^0 y G^\pm son bosones de Goldstone y H es el campo físico de Higgs con $\langle G^\pm \rangle = \langle G^0 \rangle = \langle H \rangle = 0$. En particular, G^\pm y G^0 se pueden absorber en los grados de libertad longitudinales de W_μ^\pm y Z_μ^0 al trabajar en la norma unitaria, pero no así en la de Feynman-'t Hooft [52], en cuyo caso se deben considerar las siguientes interacciones,

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\ell\nu} = -\overline{L_{\alpha L}} (Y_\ell)_{\alpha\beta} \Phi \ell_{\beta R} - \overline{N_{\alpha' R}} (Y_{\nu N}^\dagger)_{\alpha'\beta} \tilde{\Phi}^\dagger L_{\beta L} + (\dots) + \text{h.c.} \quad (2.41)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[(\overline{\nu_L} M_\ell \ell_R - \overline{N_R} M_D^T \ell_L) \phi^+ + (\overline{\ell_L} M_\ell \ell_R + \overline{N_R} M_D^T \nu_L) \phi^0 \right] + (\dots) + \text{h.c.} \quad (2.42)$$

$$= \mathcal{L}_{G^\mp}^{\ell\nu} + \mathcal{L}_{M_\ell, H, G^0}^\ell + \mathcal{L}_{M_\nu, H, G^0}^\nu \quad (2.43)$$

en donde hemos usado las siguientes relaciones para garantizar el cumplimiento de (2.19) [34]

$$\begin{aligned} \overline{L_{\alpha L}} (Y_\ell)_{\alpha\beta} \Phi \ell_{\beta R} &\xrightarrow{\text{EWSB}} \overline{\ell_L} M_\ell \ell_R + (\dots) \subset \mathcal{L}_{\text{ME}} \Leftrightarrow M_\ell \equiv Y_\ell \langle \phi^0 \rangle, \\ \overline{N_{\alpha' R}} (Y_{\nu N}^\dagger)_{\alpha'\beta} \tilde{\Phi}^\dagger L_{\beta L} &\xrightarrow{\text{EWSB}} \overline{N_R} M_D^T \nu_L + (\dots) \subset \mathcal{L}_{\text{masa}}^\nu \Leftrightarrow M_D^T \equiv Y_{\nu N}^\dagger \langle \phi^0 \rangle. \end{aligned}$$

El primer término en (2.41) le da masas M_ℓ a los leptones cargados del ME, el segundo genera la matriz M_D , y los demás (que hemos omitido) generan a M_L y M_R , las cuales no contribuyen a los vértices $G^\pm \ell \nu$, $H \nu \nu$ y $G^0 \nu \nu$. Los términos en (2.43) se detallan a continuación³⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{G^\mp}^{\ell\nu} &= -\frac{\sqrt{2}}{v} (\overline{\nu_L} M_\ell \ell_R - \overline{N_R} M_D^T \ell_L) G^\pm + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{M_\ell, H, G^0}^\ell &= -\frac{\sqrt{2}}{v} \overline{\ell_L} M_\ell \ell_R \phi^0 + \text{h.c.} = -\frac{\sqrt{2}}{v} \overline{\hat{\ell}} \hat{M}_\ell (\phi^0 P_R + \phi^{0*} P_L) \hat{\ell} = -\overline{\hat{\ell}} \hat{M}_\ell \left[1 + \frac{H}{v} + i\gamma^5 \frac{G^0}{v} \right] \hat{\ell}, \\ \mathcal{L}_{M_\nu, H, G^0}^\nu &= -\frac{\sqrt{2}}{v} \overline{N_R} M_D^T \nu_L \phi^0 + (\dots) + \text{h.c.} = \mathcal{L}_{M_\nu} - \overline{N_R} M_D^T \left[\frac{H}{v} - i\gamma^5 \frac{G^0}{v} \right] \nu_L + \text{h.c.}. \end{aligned}$$

Nótese que si W_μ^+ y W_μ^- reciben toda su masa del campo de Higgs Φ y no se tienen campos vectoriales cargados adicionales, es posible escribir $\sqrt{2}/v = g/(\sqrt{2}M_W)$ ya que

$$M_W = \frac{1}{2} g v. \quad (2.44)$$

Por lo demás, en ausencia de tripletes de Higgs, tenemos $M_L = 0$ ($U^{\nu T} \cdot M_\nu \cdot U^\nu = 0$), y así

$$U^{\nu T} \diamond M_\nu \cdot U^\nu = U^{\nu T} M_\nu \cdot U^\nu = U^{\nu T} M_\nu (U^\nu U^{\nu\dagger}) \cdot U^\nu = \hat{M}_\nu \mathbf{C}. \quad (2.45)$$

35. Nótese que estos solo modifican los vértices que involucran neutrinos, con respecto del ME (cf. [52], ec. 8.91). Además, se debe notar que algunos autores asumen convenciones distintas para $\mathcal{L}_{H, G^\mp, Z, W^\mp}^\nu$ [36, 44–46, 53]

Con lo anterior, se obtienen las siguientes expresiones para los vértices $G^\pm \ell \nu$, $G^0 \nu \nu$ y $H \nu \nu$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{G^\mp}^{\ell \nu} &= -\frac{\sqrt{2}}{v} G^\mp \left[\bar{\nu}_L M_\ell \ell_R - \bar{N}_R M_D^T \ell_L \right] + \text{h.c.} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{v} G^\mp \left[\bar{\hat{\nu}} \left(\mathbf{B}^\dagger \hat{M}_\ell P_R - \hat{M}_\nu \mathbf{B}^\dagger P_L \right) \hat{\ell} \right] + \text{h.c.} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{v} G^\mp \left[\bar{\hat{\ell}} \left(\hat{M}_\ell \mathbf{B} P_L - \mathbf{B} \hat{M}_\nu P_R \right) \hat{\nu} \right] + \text{h.c.}, \tag{2.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H^\nu + \mathcal{L}_{G^0}^\nu &= -\bar{N}_R M_D^T \left[\frac{H}{v} - i\gamma^5 \frac{G^0}{v} \right] \nu_L + \text{h.c.} \\
&= -\bar{\hat{\nu}} \left(\hat{M}_\nu \mathbf{C} P_L + \mathbf{C} \hat{M}_\nu P_R \right) \left[\frac{H}{v} - i\gamma^5 \frac{G^0}{v} \right] \hat{\nu}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

De modo que las expresiones (2.40), (2.46) y (2.47) se resumen en los siguientes diagramas

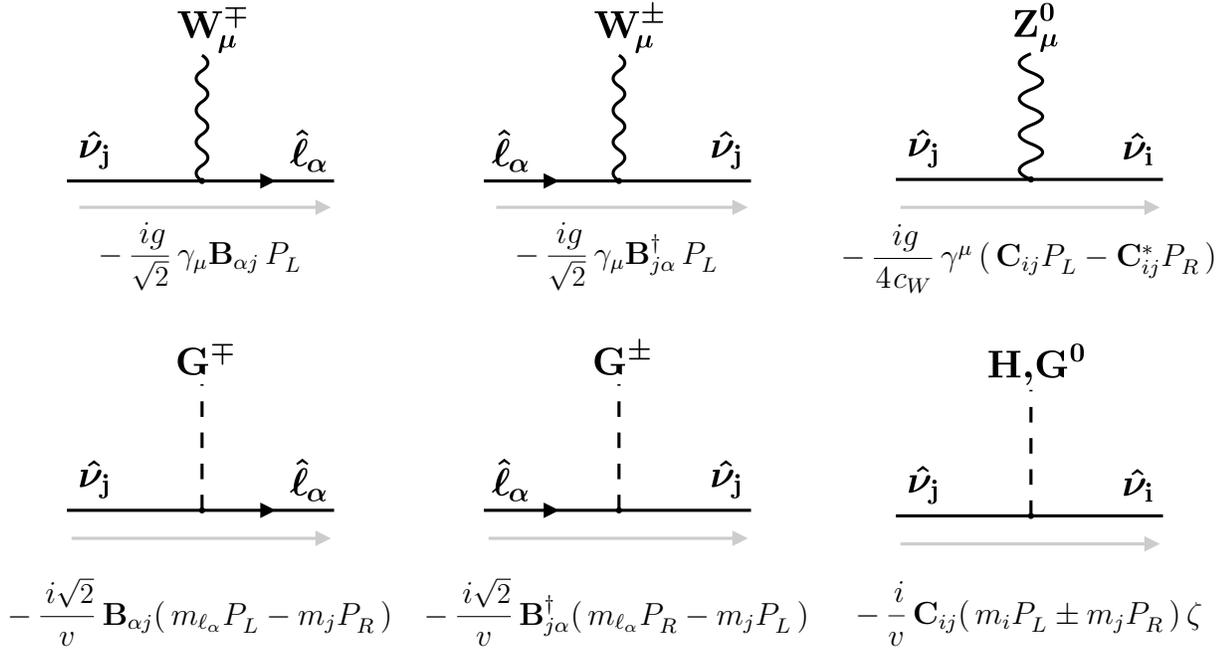


Figura 2.3: Reglas de Feynman para vértices con violación de sabor en modelos con sector de neutrinos extendido. Todos los momentos se asumen hacia la derecha. Las flechas negras indican la dirección de flujo de *número fermiónico*; las grises, la dirección de *flujo fermiónico* definido en la ref. [48], y ζ en el último vértice es igual a 1 si se trabaja con H , ó i con G^0 .

2.4. Expresiones analíticas para $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$

Al considerar partículas *on-shell* y $\alpha \neq \beta$ (para exigir casos con violación de sabor leptónico), los diagramas de Feynman relevantes en la norma de Feynman-'t Hooft, a un loop, son

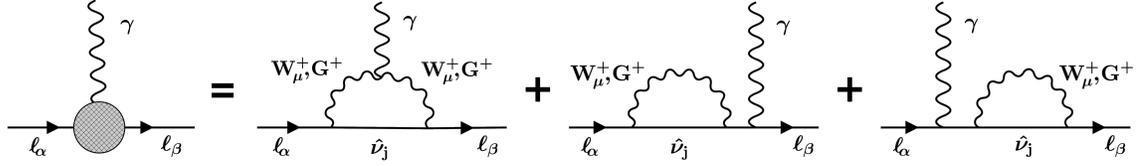


Figura 2.4: Diagramas de Feynman para $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$. De estos, solo el primer tipo contribuye, y lo hace de cuatro formas distintas (posibles combinaciones de W^+ y G^+ en el loop). Las dos últimas topologías se cancelan por invariancia de norma (identidades de Ward-Takahashi).

Teniendo en cuenta estos diagramas, el requisito de invariancia de norma y las ecuaciones de movimiento, la amplitud de transición se parametriza de la siguiente forma, [54–57]³⁶

$$i\mathcal{M}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) = \bar{u}(p') i\sigma^{\mu\nu} q_\nu (A + B\gamma^5) u(p) \epsilon_\mu^*, \quad (2.48)$$

$$= \bar{u}(p') i\sigma^{\mu\nu} q_\nu (B_L P_L + B_R P_R) u(p) \epsilon_\mu^*, \quad (2.49)$$

en donde p (p') y $q = p - p'$ son los cuadrimomentos del leptón inicial (final) y del fotón, A y B son factores de forma (eléctrico y dipolar)³⁷, $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ y $B_{L/R} \equiv A \mp B$. Así mismo, se encuentra que la tasa de decaimiento a un loop está dada por [56, 57]³⁸

$$\begin{aligned} \Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m_{\ell_\alpha}^2 - m_{\ell_\beta}^2}{m_{\ell_\alpha}} \right)^3 (|A|^2 + |B|^2) = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{m_{\ell_\alpha}^2 - m_{\ell_\beta}^2}{m_{\ell_\alpha}} \right)^3 (|B_L|^2 + |B_R|^2) \\ &\approx \frac{m_{\ell_\alpha}^3}{8\pi} (|A|^2 + |B|^2) = \frac{m_{\ell_\alpha}^3}{16\pi} (|B_L|^2 + |B_R|^2), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\approx \frac{\alpha_W^3 s_W^2}{256\pi^2} \frac{m_{\ell_\alpha}^5}{M_W^4} |B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G_\gamma(x_j)|^2. \quad (2.51)$$

-
36. Etiquetamos los factores de forma relevantes como $B_{L/R}$ para facilitar comparaciones con *Package-X* [58].
 37. En general, los factores de forma son funciones de q^2 pero, dado que en decaimientos q^2 se encuentra *on-shell*, conviene escribir $F = A, B, B_L$ y B_R en vez de $F \equiv F(q^2 \rightarrow 0)$.
 38. Nótese que los resultados sobre violación de sabor leptónico de la ref. [56] son válidos en modelos más generales (e.g., con neutrinos pesados, leptoquarks, campos de Higgs adicionales, y demás).

en donde hemos usado $g^2 = e^2/s_W^2$, $\alpha_W \equiv \alpha/s_W^2 = g^2/4\pi$, $x_j \equiv m_j^2/M_W^2$, $e^2 \equiv 4\pi\alpha$ y hemos definido la función de lazo $G_\gamma(x_j)$ según la siguiente expresión (ver Apéndice C) [37]

$$G_\gamma(x) = \frac{1}{12(1-x)^4} [10 - 43x + 78x^2 - 49x^3 + 18x^3 \ln x + 4x^4]. \quad (2.52)$$

Finalmente, si normalizamos a la tasa de decaimiento neta, el *branching ratio* sería

$$\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) \equiv \frac{1}{\Gamma_{\ell_\alpha}} \Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) = \frac{\alpha_W^3 s_W^2}{256 \pi^2 M_W^4} \frac{m_{\ell_\alpha}^5}{\Gamma_{\ell_\alpha}} |B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G_\gamma(x_j)|^2. \quad (2.53)$$

En este punto es útil notar que (i) las fases de Majorana η no contribuyen³⁹ y que (ii) la ec. (2.53) sigue siendo válida (a un loop) incluso si $U(1)_{B-L}$ (local) se promueve a una simetría exacta y/o se permite que M_R sea generada dinámicamente mediante singletes del ME⁴⁰.

■ Comportamiento asintótico de $G_\gamma(x_j)$

Es interesante notar que, en ausencia de campos pesados, podemos aproximar

$$G_\gamma(x_j) \approx \frac{5}{6} - \frac{1}{4}x_j + \frac{1}{2}x_j^2 \quad \text{con} \quad x_j \ll 1 \quad (2.54)$$

y por ende, $\mathbf{BB}^\dagger = 1$ fuerza cancelaciones a nivel de $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) \propto |B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G_\gamma(x_j)|^2$. Este resultado refleja la ausencia de corrientes neutras con cambio de sabor en el ME ($x_j = 0$) y predice una fuerte supresión para el caso de neutrinos de Dirac con $m_j \lesssim 0.4$ eV dinámicamente generadas (por el mecanismo de Higgs), siendo $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) \sim 10^{-54}$ [54].

Por otra parte, vemos que también hay cancelaciones a altas energías ($G_\gamma(\infty) \approx \frac{1}{3}$), esto en cumplimiento del teorema de Appelquist-Carazzone. Lo anterior implica que solo en una región intermedia (por debajo de las cotas de unitariedad perturbativa⁴¹) se puede subvertir el mecanismo de supresión tipo GIM en el sector leptónico si consideramos campos pesados con valores de $x_j \gg 1$ apropiados para generar Branching ratios medibles a las resoluciones y escalas de energía disponibles en experimentos actuales.

Ambos límites se observan mejor en la Figura C.3 del Apéndice C.

39. Estas se cancelan en $B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger$ debido a que $B_{\beta j} = (U_L^{\ell\dagger})_{\beta\sigma} (U^\nu)_{\sigma j}$, $U^\nu = U^\nu D$, $D_{ij} = \sqrt{\eta_j} \delta_{ij}$ y $|\eta_j|^2 = 1$.

40. Ninguno de estos cambios altera los vértices con el fotón A_μ [59] o genera vértices de la forma $G_i^+ \ell \nu$.

41. En nuestro caso, $M_D < 175$ GeV es una condición suficiente para estar en dicha región (ver Sección 2.27).

3. Modelos de interés

Usando las fórmulas para $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ expuestas en el capítulo anterior, y habiendo discutido distintos conceptos fundamentales sobre espinores de Weyl, Dirac y Majorana, teorías de campo efectivas, masas de neutrinos, mecanismos de seesaw (en particular, tipo I e inverse), violación de sabor leptónico y desviación de la unitariedad, en este capítulo aplicaremos tales elementos al estudio de dos realizaciones particulares del inverse seesaw. Para ello, consideraremos dos modelos en particular: uno con predicciones medibles a las escalas de energía de los experimentos actuales, y otro en el que este tipo de corrientes neutras con cambio de sabor están fuertemente suprimidas. En ambos casos, analizaremos los parámetros de desviación de la unitariedad $|\eta_{ij}|$ y *Branching ratios* para $\mu \rightarrow e\gamma$, $\tau \rightarrow \mu\gamma$, $\tau \rightarrow e\gamma$.

3.1. Parametrización de Casas-Ibarra y MLFV

Para este primer modelo, incorporaremos los efectos de violación de CP al modelo expuesto en la ref. [37]. Para ello, implementaremos un esquema de inverse seesaw con $n_{\nu_L}, n_{N_R}, n_{S_L} = 3$, $\text{Det}(M) \neq 0$, $m = 0$ e hipótesis MLFV ($M = \hat{M}$, $\mu = \hat{\mu} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$), asumiremos que M y μ son positivas, y trabajaremos en la base en la que $M_\ell = \hat{M}_\ell$. Por lo demás, parametrizaremos a las matrices M , μ y R de la siguiente forma,

$$\hat{M}_i \equiv \hat{M}_{ii} = v_M (1 + \epsilon_{Mii}) > 0, \quad \hat{\mu}_i \equiv \hat{\mu}_{ii} = v_\mu (1 + \epsilon_{\mu ii}) > 0, \quad (3.1)$$

$$R = \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \begin{pmatrix} \hat{c}_3 & -\hat{s}_3 & 0 \\ \hat{s}_3 & \hat{c}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_2 & 0 & -\hat{s}_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hat{s}_2 & 0 & \hat{c}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c}_1 & -\hat{s}_1 \\ 0 & \hat{s}_1 & \hat{c}_1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$R = \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \begin{pmatrix} \hat{c}_2 \hat{c}_3 & -\hat{c}_1 \hat{s}_3 - \hat{s}_1 \hat{s}_2 \hat{c}_3 & \hat{s}_1 \hat{s}_3 - \hat{c}_1 \hat{s}_2 \hat{c}_3 \\ \hat{c}_2 \hat{s}_3 & \hat{c}_1 \hat{c}_3 - \hat{s}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 & -\hat{s}_1 \hat{c}_3 - \hat{c}_1 \hat{s}_2 \hat{s}_3 \\ \hat{s}_2 & \hat{s}_1 \hat{c}_2 & \hat{c}_1 \hat{c}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

en donde $v_M \sim 1$ TeV y $v_\mu \in [10^{-1}, 10^4]$ eV son escalas de energía características del inverse seesaw, $|\epsilon_\mu|, |\epsilon_M| < 0.5$ incorporan variaciones entre componentes no mayores al 50%, ϵ_j son tres signos independientes, y \hat{s}_j y \hat{c}_j son senos y cosenos de argumento complejo $\hat{\theta}_j \equiv \theta_j e^{i\alpha_j}$. En particular, para $\alpha_j \neq 0$, es importante notar que los módulos $\theta_j \in [0, \infty)$ deben acotarse¹ para evitar que m_D viole la condición de unitariedad perturbativa $|m_{Dij}| \lesssim 175$ GeV.

1. Este problema es propio del caso complejo, siendo que $\|R\|^2$ toma su valor mínimo (igual a 3) para $\alpha_j = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, las matrices U^ν , V_1 y V_2 de este modelo, son dadas por

$$U^\nu \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^* \varepsilon^T & \varepsilon^* \\ -\varepsilon^T & 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}, \quad V_1 \approx U_{\text{PMNS}}, \quad V_2 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

con $\varepsilon \equiv M_D M_R^{-1} \approx (0, m_D \hat{M}^{-1})$, $U_{\text{PMNS}} \approx \mathbf{B}_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}^\nu \approx V_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{1} \cdot U^\nu$ y

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este punto, vale la pena destacar que si bien las fases de Majorana ϕ_1 y ϕ_2 se cancelan en $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$, sería incorrecto fijarlas a un valor conveniente por simplicidad, pues esto favorecería o prohibiría ciertas cancelaciones entre componentes de m_D y nos privaría de acceder a ciertas regiones del espacio de parámetros dado que m_D depende de U_{PMNS} según

$$m_D \approx U_{\text{PMNS}}^* \sqrt{\hat{m}_\nu} R^T \sqrt{\hat{\mu}^{-1}} \hat{M}. \quad (3.5)$$

Por lo anterior, asumiremos $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$ para las fases de Majorana. Finalmente, tomamos los rangos observacionales reportados a 3σ en la ref. [60] (resumidos a continuación) para muestrear los parámetros de las matrices \hat{m}_ν y U_{PMNS} .

Parámetro	Orden normal (3σ)	Orden invertido (3σ)
$\sin^2 \theta_{12}$	0.271 – 0.369	0.271 – 0.369
$\sin^2 \theta_{23}$	0.434 – 0.610	0.433 – 0.608
$\sin^2 \theta_{13}$	0.02000 – 0.02405	0.02018 – 0.02424
$\delta_{CP} / ^\circ$	128 – 359	200 – 353
$\Delta m_{21}^2 / 10^{-5} \text{ eV}^2$	6.94 – 8.14	6.94 – 8.14
$ \Delta m_{31}^2 / 10^{-3} \text{ eV}^2$	2.47 – 2.63	2.37 – 2.53
$\text{mín}\{m_1, m_3\} / \text{eV}$	0 – 0.12/3	0 – 0.15/3

Tabla 3.1: Cotas observacionales para las masas ligeras y parámetros de oscilación a 3σ . En ambos casos, la cota máxima para la masa más ligera (m_1 o m_3 , según el ordenamiento) es igual a un tercio de la cota reportada por PLANCK 2018 para $\sum_i m_i$ ($i = 1, 2, 3$) [60, 61].

3.1.1. Clasificación de soluciones

Para realizar escaneos numéricos, (i) asumiremos masas ligeras en el ordenamiento normal², (ii) tomaremos valores para (m_1/eV) distribuidos uniformemente³ en el intervalo de $[0, 0.4]$, (iii) generaremos las cifras significativas y órdenes de magnitud para parámetros con variaciones en más de dos órdenes de forma independiente (con distribuciones uniformes), y (iv) clasificaremos nuestros resultados de acuerdo a las siguientes categorías.⁴

1. Conservación de CP:

En esta categoría hemos considerado todos los puntos con $\delta_{CP} = \pi$, $\phi_j, \alpha_j \in \{0, \pi\}$ y $\theta_j < 2\pi$. Estas condiciones implican $\|R\| = \sqrt{3}$ y son suficientes para garantizar que m_D sea real (en la parametrización de Casas-Ibarra). Esto se traduce en zonas con conservación aproximada de CP en el sector leptónico⁵, y posiblemente, algunas subregiones donde la conservación de CP incluso sea exacta.

2. Violación de CP con $\theta_j < 1$:

Para esta categoría hemos considerado todos los casos con R compleja, $\theta_j \in [0, 1]$ y fases δ_{CP}, ϕ_j y α_j dentro de los rangos de la Tabla 3.1. Esta región es interesante debido a que, según las refs. [63, 64], se espera que estos puntos no presenten ajuste fino y cuenten con correcciones radiativas no muy drásticas (especialmente cuando se asuma una sola escala para los neutrinos pesados [65] - cf. Figuras 1 y 3). En este caso, podemos estimar numéricamente $\sqrt{3} \leq \|R\| \lesssim 2\sqrt{3}$ con 95.8 % de probabilidad.

3. Violación de CP con $\theta_j < 2\pi$:

En esta categoría hemos permitido $\theta_j \in [0, 2\pi]$. Esta es útil para investigar cómo surgen las matrices m_D con normas más grandes en el esquema de Casas-Ibarra, y cómo estas se traducen en valores más grandes para los Branching ratios y mayor independencia con respecto al parámetro v_μ . Esta región se ha usado en la ref. [42] para plantear por primera vez la búsqueda de neutrinos estériles mediante decaimientos del bosón Z con violación de sabor en el FCC-ee. Sin embargo, las refs. [63, 64] sugieren que estos puntos tendrían ajuste fino y fuertes correcciones radiativas (y por eso es útil aislarla). Por lo demás, podemos estimar que $\sqrt{3} < \|R\| \lesssim 10^4 \sqrt{3}$ con 95.4 % de probabilidad.

2. El orden normal es favorecido por las observaciones y produce resultados similares a los del orden invertido. Además, su estudio es más rico en la medida que permite tanto violación como conservación de CP.
3. Esto implica $10^{-2} \lesssim (m_1/eV) \lesssim 0.4$, con probabilidad del 75 % en el intervalo $[0.1, 0.4]$ y 22.5 % en $[10^{-2}, 10^{-1}]$.
4. Otra categoría interesante, pero que no abordaremos aquí, es $\text{Re}\{\hat{\theta}_j\} \in [0, 2\pi]$ y $\text{Im}\{\hat{\theta}_j\} \in \mathbb{R}$ [62].
5. $\delta_{CP} = \pi$ y $\phi_j, \alpha_j \in \{0, \pi\}$ cumplen trivialmente la condición $\text{Im}(m_{Dij}) \sim \text{Im}(\sum_k (\text{UPMNS})_{ik}^* R_{jk} \sqrt{\frac{m_k}{\mu_k}} \hat{M}_k) = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, hemos resumido nuestros resultados a continuación.

3.1.2. Dependencia de los branching ratios con η_{ij}

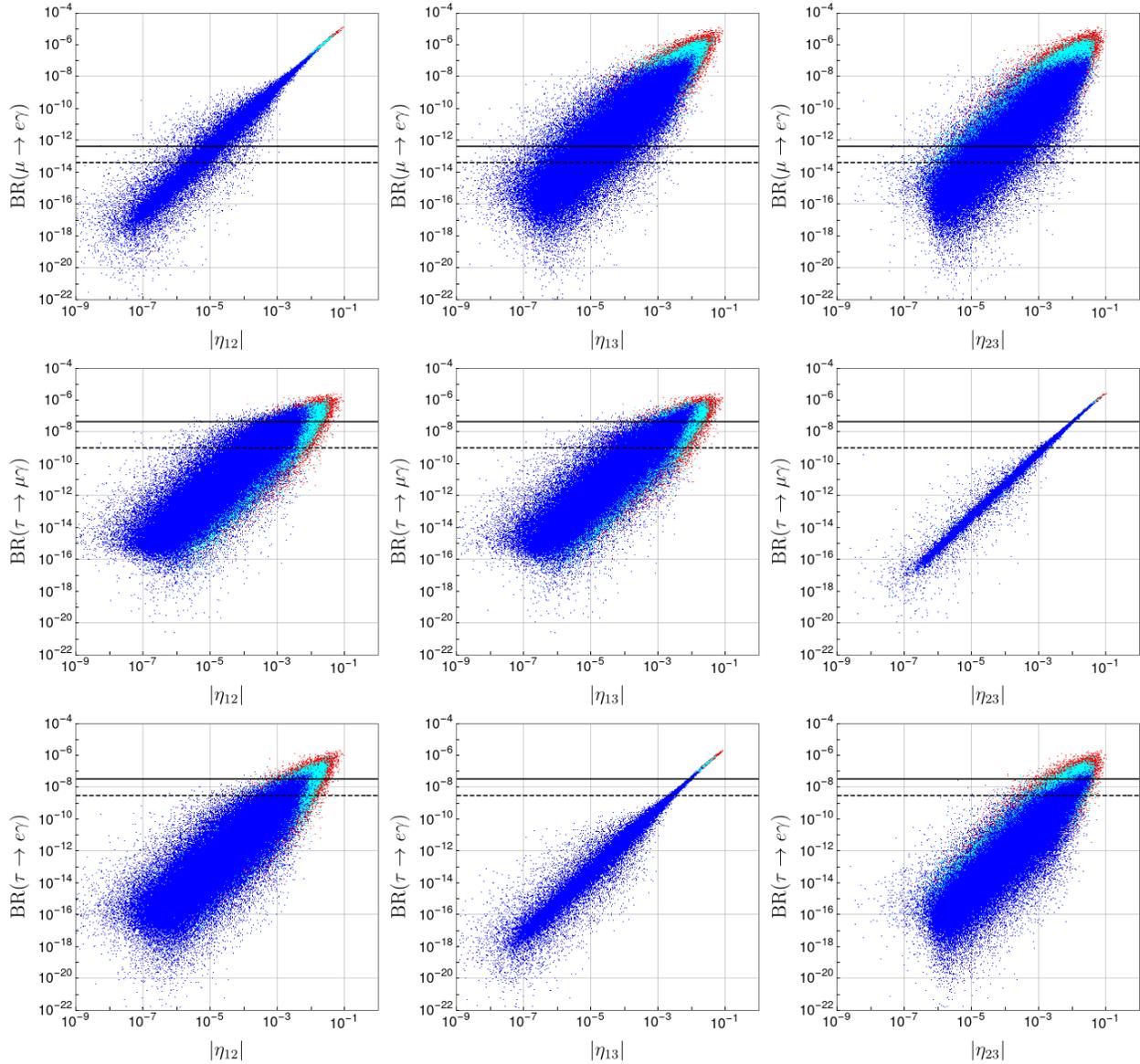


Figura 3.1: $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ versus $|\eta_{ij}|$ para $v_M = 1$ TeV, $10^{-2} \lesssim (m_1/\text{eV}) \lesssim 0.4$. Los puntos en azul indican conservación aproximada de CP, en cian, violación con $\theta_j < 1$, y en rojo, violación con $\theta_j < 2\pi$. Todos los resultados se obtuvieron mediante las fórmulas aproximadas del inverse seesaw y se corroboraron con la diagonalización numérica completa de la matriz M_ν . En las gráficas se muestran 200.000 puntos que cumplen con la condición de $|m_{Dij}| \lesssim 175$ GeV y las cotas experimentales actuales (futuras) se señalan con líneas sólidas (punteadas).

Nótese que la Figura 3.1 exhibe una fuerte correlación entre $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ y $|\eta_{\alpha\beta}|^2$. Esto se entiende gracias a que la identidad $\mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger = 1$, $M_\ell = \hat{M}_\ell$ y la ec. (2.38) nos permiten reescribir $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) \propto |B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G_\gamma(x_j)|^2 \approx |\sum_{j>3} B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger (G_\gamma(\infty) - G_\gamma(0))|^2 \approx |\eta_{\alpha\beta}|^2$ (ver Figura C.3).

Ahora bien, si incorporamos las siguientes cotas para $|\eta_{ij}|$ a 90% C.L. [66] y despreciamos el flujo de renormalización, en el futuro próximo, el canal más viable para corroborar este modelo sería $\mu \rightarrow e \gamma$ dado que, en los otros canales, las regiones pobladas entre la línea sólida y la punteada (región accesible en el futuro próximo) están mayormente excluidas.

$$|\eta_{\text{EXP-90\%C.L.}}| < \begin{pmatrix} 4.0 \times 10^{-3} & 1.2 \times 10^{-4} & 3.2 \times 10^{-3} \\ 1.2 \times 10^{-4} & 1.6 \times 10^{-3} & 2.1 \times 10^{-3} \\ 3.2 \times 10^{-3} & 2.1 \times 10^{-3} & 5.3 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Así que, de darse un caso hipotético en el que MEGII [67,68] halle evidencia directa de $\mu \rightarrow e \gamma$ y el flujo de renormalización sea despreciable, los eventos reportados por la colaboración tendrían que estar dentro de los siguientes rangos para validar parcialmente este modelo.

$$10^{-6} \lesssim |\eta_{12}| \lesssim 10^{-4}, \quad 10^{-7} \lesssim |\eta_{13}| \lesssim 10^{-3}, \quad 10^{-7} \lesssim |\eta_{23}| \lesssim 10^{-3}. \quad (3.7)$$

3.1.3. Dependencia de los branching ratios con m_D y μ

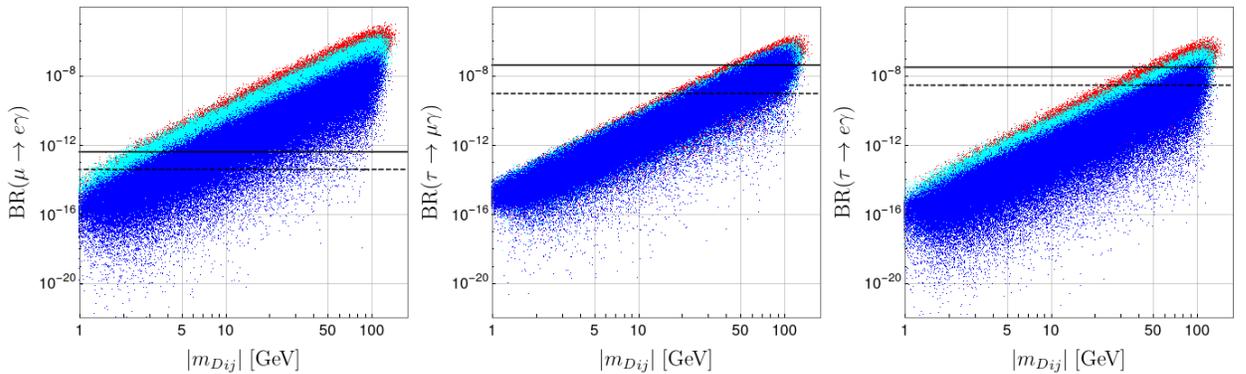


Figura 3.2: Branching ratios versus $|(m_D)_{ij}|$ para $v_M = 1$ TeV, $10^{-2} \lesssim (m_1/eV) \lesssim 0.4$. Los valores del eje horizontal se estimaron tomando $\|m_D\|^2 \sim 9 |(m_D)_{ij}|^2$. Esto se cumple bajo la norma de Frobenius debido a que todas las componentes de m_D son del mismo orden de magnitud (verificado numéricamente). Ninguno de los puntos expuestos viola la condición de unitariedad perturbativa. El código de colores es el mismo de la Figura 3.1. Las cotas experimentales actuales (futuras) se han indicado con líneas sólidas (punteadas).

La Figura 3.2 parece sugerir que $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ crece como $|(m_D)_{ij}|^4$. Esto es parcialmente cierto y puede derivarse de nuestro análisis de la Figura 3.1. Para ello, veamos que las expresiones para M_R^{-1} en la ec. (2.31), $\varepsilon = M_D M_R^{-1}$ y $\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^* \varepsilon^T$ implican

$$\varepsilon = \left(-m_D M^{T-1} \mu M^{-1}, m_D M^{T-1} \right) \approx \left(0, m_D M^{T-1} \right), \quad (3.8)$$

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \varepsilon^* \varepsilon^T \approx \frac{1}{2} (m_D M^{T-1})^* (m_D M^{T-1})^T, \quad (3.9)$$

así que, siendo precisos, tenemos $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) \propto |B_{\alpha j} B_{j\beta}^\dagger G(x_j)|^2 \propto |\eta_{\alpha\beta}|^2 \lesssim \frac{1}{4} |(m_D)_{\alpha\beta}/M|^4$ tomando $\hat{M} \sim M \mathbb{1}$ degenerada. Más aún, aproximando $\hat{m}_\nu \sim m_1 \mathbb{1}$ y $\hat{\mu} \sim \mu \mathbb{1}$, podemos estimar

$$\|m_D M^{T-1}\| \sim \frac{\|m_D\|}{M} \sim \sqrt{\frac{3m_1}{\mu}} \|R\|. \quad (3.10)$$

Esto implica que al fijar m_1 , m_D y M para maximizar $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) \propto |\eta_{\alpha\beta}|^2 \lesssim \frac{1}{4} |(m_D)_{\alpha\beta}/M|^4$, existe un valor umbral μ_{th} por debajo del cual, los branching ratios máximos pierden su dependencia funcional de v_μ y pasan a ser acotados por la condición de unitariedad perturbativa. Esto usualmente no se discute en la literatura, no obstante, es interesante ver que usando la ec. (3.10) y los rangos para $\|R\|$ de la Sección 3.1.1, podemos estimar las siguientes regiones de independencia de v_μ para los valores máximos de $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ (cf. Figura 3.3)

$$(v_\mu)_{\text{th}} \sim \frac{3}{2} \mu_{\text{th}} \sim \frac{1}{6} \|R\|_{\text{max}}^2 \text{ eV} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_\mu \lesssim 0.5 \text{ eV} \quad (\text{región azul}) \\ v_\mu \lesssim 2 \text{ eV} \quad (\text{región cian}) \\ v_\mu \lesssim 5 \text{ GeV} \quad (\text{región roja}) \end{array} \right\}. \quad (3.11)$$

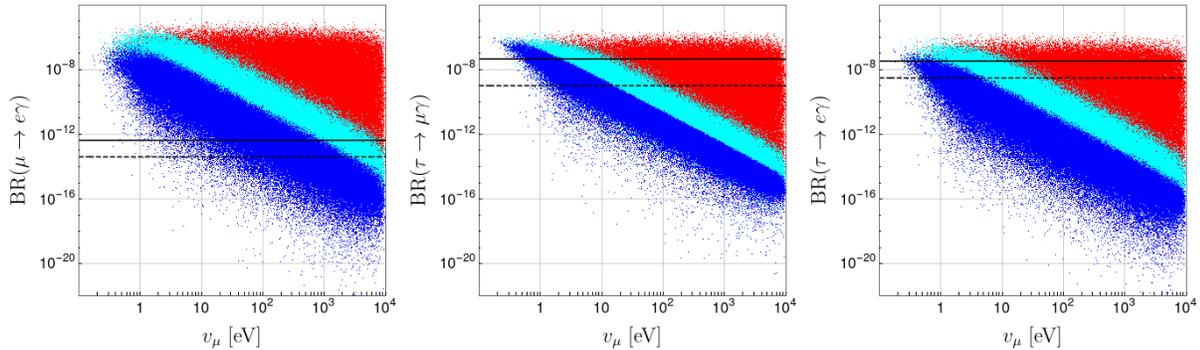


Figura 3.3: $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ versus v_μ para $v_M = 1$ TeV, $10^{-2} \lesssim (m_1/\text{eV}) \lesssim 0.4$. Ninguno de los puntos expuestos viola la condición de unitariedad perturbativa. El código de colores es el mismo de la Figura 3.1. En general, vemos que las regiones con mayor incidencia de fases complejas, exhiben subregiones con independencia de v_μ más extensas.

3.2. Supresión de $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ en el inverse seesaw

Habiendo estudiado un modelo de inverse seesaw con branching ratios accesibles por los experimentos, en esta sección tomaremos un desvío para investigar cómo generar modelos con $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ suprimidos, pero compatibles con las cotas de la Tabla 3.1. Para ello, generalizaremos las expresiones del modelo anterior a los casos en los que M, μ y m no sean necesariamente reales, diagonales (excepto M) o cero. Así, la matriz V_2 que garantiza $\hat{m}_N \approx V_2^T M_R V_2$ diagonal y positiva, despreciando términos de orden $\mathcal{O}(m/M)$ y $\mathcal{O}(\mu/M)$, es⁶

$$M_R = \begin{pmatrix} m & \hat{M} \\ \hat{M} & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\hat{S} & \hat{S} \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\hat{A}} & 0 \\ 0 & e^{i\hat{A}} \end{pmatrix} \text{ con } e^{i\hat{A}} = \sqrt{\hat{S}^* \text{Sign}(\hat{M}^*)}, \quad (3.12)$$

en donde hemos definido la matriz de fases diagonal $\hat{S} \equiv \text{Sign}(\hat{M}^* \mu + m^* \hat{M})_{\text{diag}}$ y denotamos

$$\text{Sign}(Z)_{\text{diag}} \equiv \begin{pmatrix} \text{Sign}(z_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Sign}(z_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & \text{Sign}(z_{33}) \end{pmatrix} \text{ con } \text{Sign}(z_{ii}) = z_{ii}/|z_{ii}|. \quad (3.13)$$

Un caso particularmente interesante es $m = 0$, el cual será útil en la Sección 3.2.1 y se puede verificar que se reduce satisfactoriamente a la ec. (3.4) al tomar $\hat{M}_i, \hat{\mu}_i > 0$. Por otra parte, notemos que si \mathbf{B} tiene bloques diagonales, estos no contribuyen a $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$, *i.e.*

$$\text{si } \exists j : B_{\beta j} \propto \delta_{\beta j} \Rightarrow B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G(x_j) \propto \delta_{\beta\alpha} = 0, \text{ con } \alpha \neq \beta. \quad (3.14)$$

De aquí vemos que para lograr un escenario de supresión de branching ratios general, podemos imponer que las contribuciones dominantes a \mathbf{B} sean diagonales. Trabajando a orden $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sin despreciar los términos subdominantes en las ecs. (3.8) y (3.9), se obtiene que $\varepsilon_2 = \Lambda$ debe darse para cualquier matriz Λ diagonal y compleja. Esto debido a que

$$\varepsilon = M_D M_R^{-1} \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(-m_D \hat{M}^{-1} \mu \hat{M}^{-1}, \underbrace{m_D \hat{M}^{-1}}_{\text{Dominante}} \right), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B} \approx \left(\left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^* \varepsilon^T \right) V_1, \varepsilon^* V_2 \right) \approx \left(\dots, \frac{i}{\sqrt{2}} (\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^* \hat{S}) e^{i\hat{A}}, \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_2^* + \varepsilon_1^* \hat{S}) e^{i\hat{A}} \right), \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 \stackrel{!}{=} \Lambda \leftrightarrow m_D \hat{M}^{-1} \stackrel{!}{=} \Lambda \leftrightarrow m_D = \Lambda \hat{M}. \quad (3.17)$$

6. Hemos deducido esta expresión usando teoría de perturbaciones (de Rayleigh-Schrödinger) en la base en la que M es diagonal con $\hat{M}_1 \neq \hat{M}_2 \neq \hat{M}_3$. Los pasos son análogos a los de los apéndices de la ref. [34].

Para complementar la discusión, nos gustaría saber cómo luce esta condición en cualquier otra base. Para ello, podemos traducir nuestras matrices a una base $\{m'_D, m', M', \mu'\}$ general a partir de $\{m_D, m, \hat{M}, \mu\}$ con $\hat{M} = \mathcal{V}_L^\dagger M' \mathcal{V}_R$, esto mediante la siguiente transformación⁷

$$\begin{pmatrix} 0 & m_D & 0 \\ m_D^T & m & \hat{M} \\ 0 & \hat{M}^T & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_L^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{V}_R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m'_D & 0 \\ m_D'^T & m' & M' \\ 0 & M'^T & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_L^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{V}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m'_D \mathcal{V}_L^* & 0 \\ \mathcal{V}_L^\dagger m_D'^T & \mathcal{V}_L^\dagger m' \mathcal{V}_L^* & \mathcal{V}_L^\dagger M' \mathcal{V}_R \\ 0 & \mathcal{V}_R^T M'^T \mathcal{V}_L^* & \mathcal{V}_R^T \mu' \mathcal{V}_R \end{pmatrix}.$$

Dicha transformación puede reescribirse como⁸

$$\begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M'_D \\ M_D'^T & M'_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M'_D \mathcal{V} \\ \mathcal{V}^T M_D'^T & \mathcal{V}^T M'_R \mathcal{V} \end{pmatrix} \text{ con } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_L^* & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_R \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, podemos definir una matriz $U^{\nu'}$ en la base general $\{m'_D, m', M', \mu'\}$ según

$$\hat{M}_\nu = U^{\nu T} M_\nu U^\nu = U^{\nu T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^T \end{pmatrix} M'_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{V} \end{pmatrix} U^\nu = U^{\nu' T} M'_\nu U^{\nu'} \Leftrightarrow U^{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{V} \end{pmatrix} U^\nu.$$

Recordando que las primeras filas de U^ν definen a \mathbf{B} en la base en la que $M_\ell = \hat{M}_\ell$, podemos usar esto para probar que $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ se garantiza al diagonalizar cualquier submatriz de M_R . De hecho, no es muy difícil ver que esto siempre sucederá ya que, al transformar M_ℓ , debe darse que los campos ν_L y ℓ_L transformen del mismo modo para que la estructura del doblete $L_{\alpha L}$ se mantenga⁹ (y esto implica $\mathbf{B} = U_L^{\ell \dagger} \cdot U^\nu = \mathbf{B}'$). Así mismo, podemos ver que

$$\varepsilon' = M'_D M_R'^{-1} = (M_D \mathcal{V}^\dagger) (\mathcal{V} M_R^{-1} \mathcal{V}^T) = \varepsilon \mathcal{V}^T, \quad V'_1 = V_1 \approx U_{\text{PMNS}}, \quad V'_2 = \mathcal{V} V_2.$$

Es así que la condición de supresión de branching ratios (en una base general) sería¹⁰

$$\varepsilon_2 \stackrel{!}{=} \Lambda \Leftrightarrow \varepsilon'_2 \mathcal{V}_R^* = m'_D M'^{T-1} \mathcal{V}_R^* = \Lambda \Leftrightarrow m'_D = \Lambda (M' \mathcal{V}_R)^T, \quad (3.18)$$

en donde vale la pena destacar que (i) tomando $\mathcal{V}_R = 1$ y $M' = \hat{M}$, recobramos el límite de la ec. (3.17), y (ii) si bien la condición de supresión requiere que m_D y M sean simultáneamente diagonalizables, lo anterior no implica que $[m'_D, M'] = 0$ se cumpla fuera de la base con M diagonal (debido a las reglas de transformación de la matriz M_ν).

7. Análogamente, $\hat{M} \mapsto M$, $\mathcal{V}_L \mapsto 1$, $\mathcal{V}_R \mapsto \mathcal{V}_\mu$, $\mu \mapsto \hat{\mu} = \mathcal{V}_\mu^T \mu' \mathcal{V}_\mu$ relacionan a $\{m'_D, m', M', \mu'\}$ y $\{m_D, m, M, \hat{\mu}\}$.
8. Compárense $M_D'^T = \mathcal{V}^* M_D^T$ y $\mathcal{V}^\dagger M'_R \mathcal{V} = M_R$ con $Y'_\nu = U_M^* Y_\nu$ y $U_M^T \mathcal{M} U_M = D_{\mathcal{M}}$ discutidas en la ref. [31].
9. Toda transformación sobre m_D , redefine los campos ν_L y ℓ_L e induce un cambio de base sobre M_ℓ .
10. Este resultado es consistente con $m'_D = m_D \mathcal{V}_L^T$ porque $m'_D = \Lambda (M' \mathcal{V}_R)^T = \Lambda (\mathcal{V}_L \hat{M})^T = \Lambda \hat{M} \mathcal{V}_L^T$.

3.2.1. Parametrización de Marcano y μ -MLFV

En este segundo modelo, ilustraremos un escenario simple en el que se garantiza la ec. (3.18). Para ello, tomaremos m_D y M diagonales y no-singulares (*i.e.* $\mathcal{V}_R = 1$, $m_D = \hat{m}_D$, $M = \hat{M}$ y $\text{Det}(m_D), \text{Det}(M) \neq 0$), impondremos $m = 0$, y usaremos la parametrización de Marcano para expresar a la matriz μ . Finalmente, dado que las fuentes de violación de sabor leptónico y CP provendrán entonces de la matriz μ , a estas suposiciones las llamaremos *hipótesis μ -MLFV*. Algo importante de aclarar es lo siguiente: dado que m_D es invertible, tenemos

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(-m_D M^{T-1} \mu M^{-1}, m_D M^{T-1} \right) \approx \left(-m_\nu m_D^{T-1}, m_D M^{T-1} \right), \quad (3.19)$$

y si bien esta expresión no depende explícitamente de μ , la parametrización de Marcano es bastante útil para filtrar numéricamente los puntos generados al azar con componentes μ_{ij} fuera de la jerarquía de escalas requerida en el inverse seesaw. Teniendo en cuenta esto, pedimos que $|\mu_{ij}| < 10^4$ eV se satisfaga, muestrearemos las matrices \hat{m}_ν y U_{PMNS} conforme a los rangos de la Tabla 3.1, y tomamos las siguientes parametrizaciones para m_D y \hat{M} ,

$$(m_D)_{ii} = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ii} = \frac{v}{\sqrt{2}} |y_i| e^{i\phi_i}, \quad \hat{M}_i \equiv \hat{M}_{ii} = v_M (1 + \epsilon_{Mii}) > 0, \quad (3.20)$$

en donde $v/\sqrt{2} \approx 174$ GeV, $|y_i| \in [10^{-2}, 1]$, $\phi_i \in [0, 2\pi]$, $v_M \in [1, 10^2]$ TeV y $|\epsilon_{Mii}| \leq 0.5$. Así, una vez hecho un escaneo con 100.000 puntos en orden normal, se obtienen las Figuras 3.4 y 3.5.

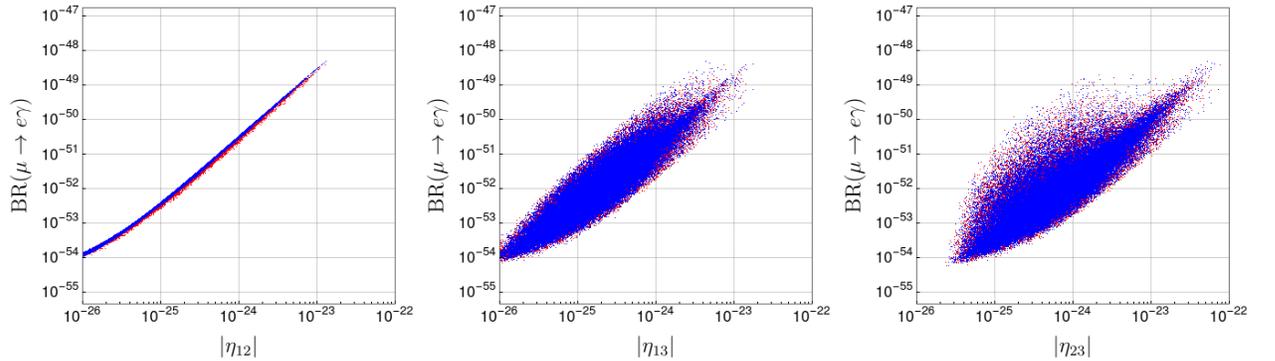


Figura 3.4: $\text{Br}(\mu \rightarrow e \gamma)$ versus $|\eta_{ij}|$, tomando $(v_M/\text{TeV}) \in [1, 10^2]$ y $10^{-2} \lesssim (m_1/\text{eV}) \lesssim 0.4$. Los puntos en azul (rojo) se obtuvieron mediante las formulas aproximadas del inverse seesaw (y la diagonalización numérica de la matriz M_ν , sin aproximaciones). Resultados similares se obtienen para los demás canales de decaimiento y escenarios con conservación de CP debido a que las contribuciones de m_D (incluidas sus fases) se suprimen en la hipótesis μ -MLFV.

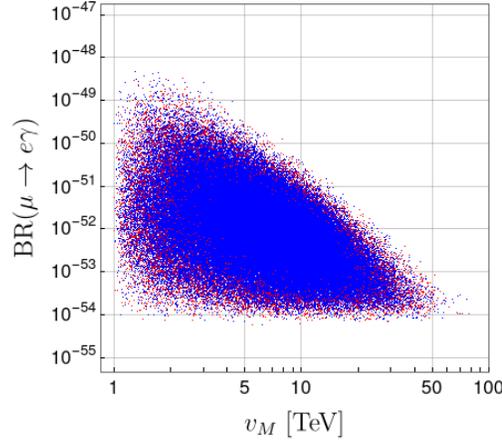


Figura 3.5: $\text{Br}(\mu \rightarrow e \gamma)$ versus v_M . Los aportes de los neutrinos pesados se suprimen tanto que las predicciones apenas superan en unos órdenes al caso de neutrinos ligeros de Dirac ($\text{Br} \sim 10^{-54}$). Las contribuciones dominantes vienen de $\varepsilon_1 \approx -m_\nu \hat{m}_D^{-1}$, que no es diagonal.

3.3. Realizaciones ultravioleta de la hipótesis μ -MLFV

Introduciendo simetrías de sabor, es posible construir modelos de juguete que permitan realizar el escenario de supresión de branching ratios a través de la hipótesis μ -MLFV. Como ilustración, considérese el siguiente Lagrangiano¹¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\ell\nu} = & - \overline{L_{\alpha L}} (Y_\ell)_{\alpha\beta} \Phi \ell_{\beta R} - \overline{N_{\alpha R}} (Y_{\nu N}^\dagger)_{\alpha\beta} \tilde{\Phi}^\dagger L_{\beta L} - \overline{N_{\alpha R}} (Y_{NS}^\dagger)_{\alpha\beta} (\varphi_{NS})_{\alpha\beta}^* S_{\beta L} \\ & - \frac{1}{2} \overline{N_{\alpha R}} (Y_N^\dagger)_{\alpha\beta} (\varphi_N)_{\alpha\beta}^* N_{\beta R}^c - \frac{1}{2} \overline{S_{\alpha L}} (Y_S^\dagger)_{\alpha\beta} (\varphi_S)_{\alpha\beta}^* S_{\beta L} + (\dots) + \text{h.c.} \end{aligned}$$

en donde Φ representa el doblete de Higgs del ME, Y_N y Y_S son matrices simétricas complejas, $Y_\ell, Y_{\nu N}$ y Y_{NS} son matrices genéricas complejas, los campos escalares $\varphi_{NS}, \varphi_N, \varphi_S$ poseen valores de expectación arbitrarios, y hemos usado puntos suspensivos para denotar a todos los posibles términos de masa explícitos que sean compatibles con las simetrías del modelo.

Procurando reducir el número de parámetros libres, nos permitiremos añadir una simetría discreta Z_N (útil para generar las texturas de la hipótesis μ -MLFV), asignaremos números leptónicos $L(S_L) = 0, L(\nu_L) = L(N_R) = 1$, promoveremos $U(1)_{B-L}$ a una simetría exacta sin anomalías, y prohibiremos la generación dinámica de m asumiendo que no existen campos φ_N con $Y_{B-L} = 2$. Lo anterior fija las cargas del sector escalar bajo $U(1)_{B-L}$ y prohíbe todos los términos de masa explícitos, excepto aquellos que puedan contribuir a μ .

11. No incluimos los efectos del flujo de renormalización o la fenomenología del potencial escalar $V(\Phi, \varphi_{NS}, \varphi_S)$.

Ahora bien, con respecto a la simetría Z_N , nos limitaremos a modelos con $N < 7$ por simplicidad. Denotando por $f_\alpha \in \{L_{\alpha L}, N_{\alpha R}, S_{\alpha L}\}$ a los leptones del modelo, e introduciendo la raíz N -ésima de la unidad $\omega \equiv e^{2\pi i/N}$, discutiremos tres asignaciones de carga minimales en las que M_ℓ, m_D y M resultan diagonales y μ y M se generan mediante campos φ adicionales.

▪ **Z_5 con $f_\alpha \mapsto \omega^\alpha f_\alpha$**

Imponiendo una *textura de dos-ceros tipo A1* sobre la matriz m_ν [69], la matriz μ puede generarse mediante un campo escalar complejo $\varphi_S \equiv (\varphi_S)_{13}^* = (\varphi_S)_{22}^* = (\varphi_S)_{31}^* = (\varphi_S)_{33}$ y un término de masa explícito μ_{23} . Las componentes (1, 1), (1, 2) y (2, 1) de las matrices m_ν y μ serían despreciables, y el decaimiento doble beta sin neutrinos sería inobservable [70, 71]. En su defecto, si queremos permitir que estas componentes no sean cero, bastaría con añadir un segundo campo complejo $\varphi'_S \equiv (\varphi_S)_{12}^* = (\varphi_S)_{21}^* = (\varphi_S)_{11}$. De este modo, las cargas serían dadas por la Tabla 3.2 y la matriz μ tendría la forma

$$\mu = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \langle \varphi'_S \rangle^* & \lambda'_2 \langle \varphi'_S \rangle & \lambda_1 \langle \varphi_S \rangle \\ \lambda'_2 \langle \varphi'_S \rangle & \lambda_2 \langle \varphi_S \rangle & \mu_{23} \\ \lambda_1 \langle \varphi_S \rangle & \mu_{23} & \lambda_3 \langle \varphi_S \rangle^* \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

en donde hemos renombrado los acoples de Yukawa para simplificar la notación.

▪ **Z_3 con $f_\alpha \mapsto \omega^\alpha f_\alpha$**

Análogo al caso anterior, podemos tomar la asignación de cargas de la Tabla 3.2 pero ahora con un grupo de simetrías Z_3 . De esta forma, μ puede ser generada por un campo escalar complejo $\varphi_S \equiv (\varphi_S)_{11}^* = (\varphi_S)_{23}^* = (\varphi_S)_{32}^* = (\varphi_S)_{13} = (\varphi_S)_{22} = (\varphi_S)_{31}$ y dos términos de masa explícitos, μ_{12} y μ_{33} . Así, la matriz μ tendría la forma

$$\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1 \langle \varphi_S \rangle & \mu_{12} & \lambda_2 \langle \varphi_S \rangle^* \\ \mu_{12} & \lambda_3 \langle \varphi_S \rangle^* & \lambda_4 \langle \varphi_S \rangle \\ \lambda_2 \langle \varphi_S \rangle^* & \lambda_4 \langle \varphi_S \rangle & \mu_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

	$L_{\alpha L}$	$N_{\alpha R}$	$S_{\alpha L}$	Φ	φ_{NS}	φ_S	φ_S'
Y_{B-L}	-1	-1	0	0	1	0	0
Z_3 ó Z_5	ω^α	ω^α	ω^α	1	1	ω	ω^2

Tabla 3.2: Cargas relevantes para los modelos con simetría $G_{ME} \times U(1)_{B-L} \times Z_N$ ($N = 3, 5$). Los campos φ_{NS} , φ_S y φ'_S son complejos y, según el modelo, podríamos prescindir de φ'_S .

■ Z_6 con $f_\alpha \mapsto \omega^{2\alpha-1} f_\alpha$

Finalmente, encontramos un escenario igual de económico que el anterior, pero ahora con un grupo de simetrías Z_6 y la asignación de cargas de la Tabla 3.3. Así, μ puede generarse con un campo complejo $\varphi'_S \equiv (\varphi_S)_{12}^* = (\varphi_S)_{21}^* = (\varphi_S)_{33}^* = (\varphi_S)_{11} = (\varphi_S)_{23} = (\varphi_S)_{32}$ y dos términos de masa explícitos, μ_{13} y μ_{22} , con la siguiente estructura,

$$\mu = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \langle \varphi'_S \rangle^* & \lambda'_2 \langle \varphi'_S \rangle & \mu_{13} \\ \lambda'_2 \langle \varphi'_S \rangle & \mu_{22} & \lambda'_3 \langle \varphi'_S \rangle^* \\ \mu_{13} & \lambda'_3 \langle \varphi'_S \rangle^* & \lambda'_4 \langle \varphi'_S \rangle \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

	$L_{\alpha L}$	$N_{\alpha R}$	$S_{\alpha L}$	Φ	φ_{NS}	$\varphi_{S'}$
Y_{B-L}	-1	-1	0	0	1	0
Z_6	$\omega^{2\alpha-1}$	$\omega^{2\alpha-1}$	$\omega^{2\alpha-1}$	1	1	ω^2

Tabla 3.3: Cargas relevantes para el modelo con simetría $G_{ME} \times U(1)_{B-L} \times Z_6$.

■ **Discusión:**

Para que las matrices M_ℓ, m_D, m, M y μ satisfagan la hipótesis μ -MLFV a la escala del inverse seesaw, es necesario que $U(1)_{B-L} \times Z_N$ se rompa por encima de la escala del autovalor más grande de M_R y que dicha simetría sea exacta a escalas superiores¹². Especificar los detalles de dicha ruptura determinaría las condiciones de frontera (*matching*) necesarias para resolver las ecuaciones del grupo de renormalización a escalas superiores a las del inverse seesaw.

Además de las condiciones de matching por la ruptura de $U(1)_{B-L} \times Z_N$, se deben añadir condiciones de matching por cada grado de libertad pesado que se integre fuera de la teoría al disminuir la escala de energía en las ecuaciones del grupo de renormalización [65, 75, 76], lo cual implicará una cadena de teorías efectivas como la de la Figura 3.6.

También es importante incorporar las correcciones radiativas de las matrices M_ℓ y M_ν [77–81] ya que estas pueden dominar y cambiar los ceros de textura impuestos a nivel árbol [82].

12. Si $U(1)_{B-L}$ se asume local (o global), habría un *fotón oscuro* \hat{X} [72] (o bien, un *Majoron* sin masa J [73]). El caso local ofrece aplicaciones directas en materia oscura y presenta campos vectoriales (\hat{X}, B_μ, W_μ^3) que se mezclan de modo que las componentes de A_μ contenidas en B_μ y W_μ^3 se mantienen igual que en el ME al imponer *kinetic mixing* [59], con lo cual podríamos seguir aplicando nuestras fórmulas a un loop para $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$. Por otra parte, en el caso global, podríamos tener *Majoron dark matter* si se conjetura que el Majoron adquiere masa por interacciones con el gravitón [74].

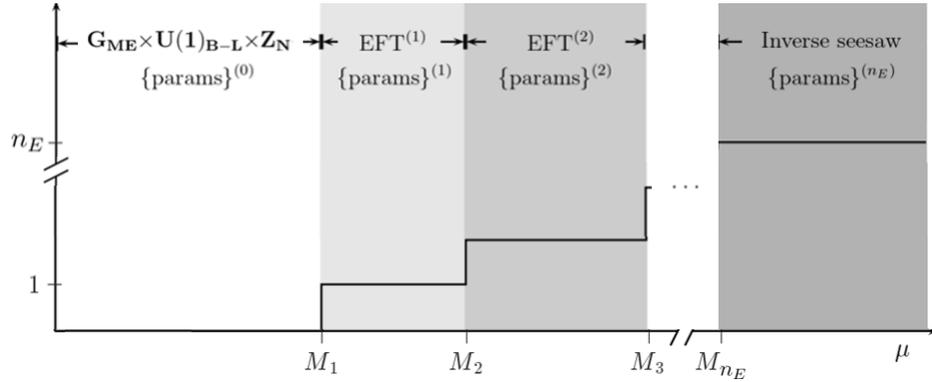


Figura 3.6: Esquema de teorías efectivas obtenidas al integrar fuera los n_E singletes pesados del inverse seesaw (y posibles campos φ con masas en este rango de energías) al disminuir la escala μ de las ecuaciones del grupo de renormalización. Imagen modificada a partir de [75].

Por otro lado, es interesante ver que los campos $n_{\alpha L}$ pueden asumirse en representaciones reales o complejas de $U(1)_{B-L} \times Z_N$ sin dejar de garantizar que los campos $\hat{\nu}_i \equiv \hat{n}_{iL} + \hat{n}_{iL}^c = \hat{\nu}_i^c$ sean autoconjugados (en parte, gracias a que $\hat{\nu}_i \rightarrow \hat{\nu}'_i \neq U_{(Z_N)} \hat{\nu}_i$ no transforma linealmente). Este tipo de modelos se ha discutido en las refs. [83, 84] y da origen a candidatos de materia oscura estable si se añade, por ejemplo, un singlete escalar complejo con $Y_{B-L} = 1/2$ para garantizar una simetría residual Z_2 (bajo la cual este nuevo campo estaría cargado de forma negativa y las demás partículas serían positivas, para asegurar su estabilidad).

Un posible defecto de nuestra asignación de cargas (para tener $U(1)_{B-L}$ libre de anomalías) es la pérdida de naturalidad¹³ ya que ahora $M \rightarrow 0$ es natural, y el inverse seesaw nos pide $\mathcal{O}(M) \sim 1$ TeV. Algo similar ocurre en el seesaw tipo I tradicional, en donde M_R viola $U(1)_L$ y aún así, le asignamos una escala grande. Sin embargo, es útil recordar que el inverse seesaw es ventajoso porque nos permite evadir la necesidad de acoples extremadamente pequeños o escalas de energía mucho más grandes para explicar las masas ligeras \hat{m}_ν .¹⁴

Finalmente, vale la pena destacar que estos modelos no son únicos en su tipo. Existen abundantes propuestas similares en la literatura, y estas abordan temas tan variados como: (i) materia oscura con campos escalares, fotones oscuros, fermiones o cuerdas cósmicas, dentro y fuera del equilibrio térmico [85, 88–90], (ii) violación de CP y su relación con la asimetría bariónica del universo [91], (iii) la anomalía del momento magnético del muon reportada por Brookhaven (2006) y Fermilab (2021) [92–94], entre otros.

13. Alternativamente, si se modifica el contenido de materia y se considera una simetría $U(1)_{B-L} \times Z_4$, el inverse seesaw puede generarse preservando la naturalidad y con dos candidatos de materia oscura según la ref. [85].

14. Según la ref. [86], en el seesaw tipo I usual, las masas de los neutrinos pesados deben ser mayores a 10^5 TeV (tres órdenes por encima de la escala del FCC [87]) para poder explicar la asimetría bariónica del universo.

4. Conclusiones

Al extender el contenido de materia del ME con singletes fermiónicos bajo G_{ME} , hemos visto que es posible implementar el mecanismo de seesaw tipo I para dar masa a los neutrinos; sin embargo, en su planteamiento más básico esto conlleva varios problemas que pueden ser evitados si asumimos un esquema de inverse seesaw (Secciones 2.1.5 y 2.2). En particular, en este trabajo hemos investigado las condiciones bajo las cuales el inverse seesaw tiene branching ratios medibles (Sección 3.1) o suprimidos (Sección 3.2), y hemos ilustrado cómo construir algunas realizaciones ultravioleta simples de la hipótesis μ -MLFV (Sección 3.3). En este orden de ideas, nuestros resultados más destacables se detallan a continuación.

En la Sección 3.1

Actualizamos las predicciones del modelo propuesto por Forero *et.al.* [37] incorporando las cotas experimentales vigentes a 3σ para los parámetros de oscilación en el ordenamiento normal. Consideramos todas las posibles fuentes de violación de CP en el sector de neutrinos, variamos los parámetros de la matriz R de un modo sistemático y clasificamos las soluciones en tres categorías: conservación de CP, violación con $\theta_j < 1$, y violación con $\theta_j < 2\pi$. Sobre esta última región destacamos que, según las ref. [63,64], tales soluciones presentan un mayor ajuste fino y pueden sufrir correcciones radiativas importantes. Por lo demás, concluimos que

(i) La hipótesis MLFV genera branching ratios accesibles por los experimentos gracias a que favorece una estructura no-diagonal para la matriz $\varepsilon_2 = m_D \hat{M}^{-1}$.

(ii) Bajo esta hipótesis, corroboramos numéricamente que los branching ratios presentan una correlación dominante con $|\eta_{\alpha\beta}|^2$ y ofrecimos una explicación analítica para ello, siendo que en la base en la que M_ℓ es diagonal podemos escribir

$$\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) \propto \left| B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G_\gamma(x_j) \right|^2 \approx \left| \sum_{j>3} B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger (G_\gamma(\infty) - G_\gamma(0)) \right|^2 \approx |\eta_{\alpha\beta}|^2.$$

(iii) Mostramos que en la parametrización de Casas-Ibarra, la no-unitariedad está dada por

$$[2\eta_{\alpha\beta}] = \varepsilon^* \varepsilon^T \approx (m_D M^{T-1})^* (m_D M^{T-1})^T \approx U_{\text{PMNS}} \sqrt{\hat{m}_\nu} R^\dagger \hat{\mu}^{-1} R \sqrt{\hat{m}_\nu} U_{\text{PMNS}}^\dagger,$$

y esto implica la existencia de zonas (filtradas por las cotas de unitariedad perturbativa) en las que los branching ratios máximos son independientes de v_μ . Estimamos dichas zonas en la ec. (3.11), y argumentamos que el tamaño de dichas zonas es mayor cuando se tienen violación de CP y cotas menos restrictivas para θ_j , ya que $|\eta_{\alpha\beta}|$ crece con $\|R\|_{\text{max}}^2$.

(v) Despreciando el flujo de renormalización, observamos que $\mu \rightarrow e\gamma$ es el canal de tipo $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta\gamma$ más favorable para muestrear la hipótesis MLFV en el futuro próximo, y concluimos que si el experimento MEGII encontrara evidencia directa de este proceso, los eventos reportados deberían estar dentro de los siguientes rangos para validar nuestro modelo de inverse seesaw con $\hat{m}_\nu \sim 10^{-1}\text{eV}$, $\hat{m}_N \sim 1\text{TeV}$ e hipótesis MLFV .

$$10^{-6} \lesssim |\eta_{12}| \lesssim 10^{-4}, \quad 10^{-7} \lesssim |\eta_{13}|, |\eta_{23}| \lesssim 10^{-3}.$$

En la Sección 3.2

Investigamos las condiciones con las cuales el inverse seesaw conlleva branching ratios suprimidos, discutimos cómo transformar las matrices M_ℓ, m_D, m, M, μ bajo cambios de base y ejemplificamos nuestras afirmaciones con algunos análisis numéricos. Por lo demás,

(i) Obtuvimos una fórmula general para la matriz V_2 que diagonaliza a m_N con masas reales y positivas. Esta se dedujo en la base en la que M es diagonal, pero luego de un cambio de base puede aplicarse para cualquier clase de texturas que se impongan sobre m, M y μ .

$$V_2 \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\hat{S} & \hat{S} \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\hat{A}} & 0 \\ 0 & e^{i\hat{A}} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad e^{i\hat{A}} = \sqrt{\hat{S}^* \text{Sign}(\hat{M}^*)}, \quad \hat{S} \equiv \text{Sign}(\hat{M}^* \mu + m^* \hat{M})_{\text{diag}}.$$

(ii) Vimos que para ir de una base general (primada) a una con M diagonal (sin primar), basta con tomar las matrices \mathcal{V}_L y \mathcal{V}_R de autovectores de M' y usar las siguientes relaciones. Estas se pueden generalizar a otros cambios de base como discutimos en el texto.

$$m_D = m'_D \mathcal{V}_L^*, \quad m = \mathcal{V}_L^\dagger m' \mathcal{V}_L^*, \quad \hat{M} = \mathcal{V}_L^\dagger M' \mathcal{V}_R, \quad \mu = \mathcal{V}_R^T \mu' \mathcal{V}_R M_D = M'_D \mathcal{V}.$$

(iii) Expresamos la condición de branching ratios suprimidos como se muestra a continuación, y observamos que esta se satisfacía trivialmente bajo la hipótesis μ -MLFV . Nuestros resultados numéricos confirman este análisis con branching ratios que resultan comparables al caso tradicional para neutrinos de Dirac, en donde $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta\gamma) \sim 10^{-54}$.

$$\varepsilon_2 \stackrel{!}{=} \Lambda \leftrightarrow m'_D = \Lambda (M' \mathcal{V}_R)^T.$$

(iv) Comentamos sobre la importancia de la parametrización de Marcano para filtrar los resultados numéricos, aún en casos como este donde las formulas analíticas para $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta\gamma)$ pueden escribirse sin dependencia explícita de μ .

En la Sección 3.2.1

Ilustramos distintas formas de realizar dinámicamente la hipótesis μ -MLFV, enfatizamos cómo lograr una libertad de anomalías para $U(1)_{B-L}$ a costa de la pérdida de naturalidad (aunque no realizamos una búsqueda exhaustiva de soluciones capaces de cancelar anomalías) y comentamos algunos detalles sobre la escala de ruptura de las nuevas simetrías. También discutimos cómo las representaciones de los campos n_L bien podrían ser reales o complejas, y cómo esto generaliza en alguna medida, los escenarios considerados en la ref. [83].

Códigos computacionales:

En el transcurso de esta investigación se desarrollaron cuatro códigos en *Mathematica* que pueden ser compartidos bajo petición del interesado. El primer código, paralelizado, está dedicado a la generación de datos compatibles con las cotas de unitariedad perturbativa, bajo la hipótesis MLFV o μ -MLFV. El segundo, está dedicado a la elaboración de gráficas. El tercero, extrae y regulariza dimensionalmente los factores de forma que participan en $\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$. El cuarto, automatiza el cálculo de productos de fases ω^k asociadas a Z_N con el fin de facilitar la identificación de términos de masa invariantes modulo N , variando el valor de N y escaneando distintas asignaciones de carga para los campos ℓ_L y n_L .

Material publicado:

Un *preprint* con nuestros resultados preliminares se encuentra en el repositorio *ArXiv* [95]. Esta investigación se desarrolló en colaboración con el investigador postdoctoral Gerardo Hernández-Tomé y el doctor Eduardo Peinado Rodríguez.

Perspectivas a Futuro:

Para complementar esta investigación, se sugieren análisis a futuro en lo relativo a (i) el flujo de renormalización y desacople de campos pesados en la teoría, (ii) la fenomenología del sector escalar de estos modelos, (iii) la realización de análisis de χ^2 , (iv) aplicaciones en materia oscura y leptogénesis, y (v) el estudio de otros procesos con violación de sabor leptónico (en especial el caso de la conversión en núcleos $\mu + N \rightarrow e + N$, cuyas cotas serán las más restrictivas en el futuro próximo [96]). De antemano prevemos que herramientas como SARAH [97, 98] (*Mathematica*), FlavorKit [99] (*Mathematica* y *Fortran*) y MicrOMEGAS [100] (*Fortran* ó *C*) pueden ser de gran utilidad para ello.

A. Diagonalización aproximada

Con el fin de diagonalizar la matriz simétrica general M_ν con entradas sobre el campo de números complejos $M_\nu = M_\nu^T \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$, se necesita una matriz unitaria U^ν tal que $U^{\nu T} M_\nu U^\nu = \hat{M}_\nu$ sea diagonal y no-negativa [43]. Dicha U^ν puede parametrizarse como

$$U^\nu = e^{iH} V, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & S \\ S^\dagger & 0 \end{bmatrix} = H^\dagger, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

en donde V_1 y V_2 son matrices unitarias, y por ende e^{iH} , V y U^ν también (de hecho, U^ν también diagonalizaría a la matriz Hermítica $M_\nu^\dagger M_\nu$, lo cual corrobora que U^ν es unitaria).

$$U^{\nu T} M_\nu U^\nu = \hat{M}_\nu \Rightarrow \hat{M}_\nu^\dagger \hat{M}_\nu = (U^{\nu T} M_\nu U^\nu)^\dagger (U^{\nu T} M_\nu U^\nu) = U^{\nu \dagger} M_\nu^\dagger M_\nu U^\nu, \quad (\text{A.2})$$

Como alternativa, podemos considerar la siguiente matriz en lugar de e^{iH} [101]. Ambas parametrizaciones son equivalentes, como demostraremos ahora.

$$W = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - BB^\dagger} & B \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B} \end{bmatrix}, \quad W^\dagger = W^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Introduciendo las matrices $\alpha \equiv \sqrt{S^\dagger S}$ y $\beta \equiv \sqrt{S S^\dagger}$ (con $\alpha^{2k} S^\dagger = S^\dagger \beta^{2k}$ y $\beta^{2k} S = S \alpha^{2k}$), podemos garantizar $e^{iH} = W$ identificando $B \equiv iS \operatorname{sinc}(\alpha) = i \operatorname{sinc}(\beta) S$ de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} H^{2k} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & S \\ S^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S \\ S^\dagger & 0 \end{bmatrix} \right\}^k = \begin{bmatrix} (SS^\dagger)^k & 0 \\ 0 & (S^\dagger S)^k \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \beta^{2k} & 0 \\ 0 & \alpha^{2k} \end{bmatrix}, \\ H^{2k+1} &= \begin{bmatrix} \beta^{2k} & 0 \\ 0 & \alpha^{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S \\ S^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta^{2k} S \\ \alpha^{2k} S^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S \alpha^{2k} \\ S^\dagger \beta^{2k} & 0 \end{bmatrix}, \\ e^{iH} &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & iS \operatorname{sinc}(\alpha) \\ iS^\dagger \operatorname{sinc}(\beta) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - BB^\dagger} & B \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B} \end{bmatrix} = W, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

en donde hemos usado las siguientes identidades y $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$,

$$\begin{aligned} B^\dagger B &= (S \operatorname{sinc}(\alpha))^\dagger (S \operatorname{sinc}(\alpha)) = \operatorname{sinc}(\alpha) S^\dagger S \operatorname{sinc}(\alpha) = \sin^2(\alpha), \\ BB^\dagger &= (\operatorname{sinc}(\beta) S) (\operatorname{sinc}(\beta) S)^\dagger = \operatorname{sinc}(\beta) S S^\dagger \operatorname{sinc}(\beta) = \sin^2(\beta). \end{aligned}$$

Expandiendo U en series de Taylor respecto a S , tenemos

$$W = e^{iH} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}SS^\dagger & iS \\ iS^\dagger & 1 - \frac{1}{2}S^\dagger S \end{bmatrix} + \mathcal{O}(S^3). \quad (\text{A.5})$$

En particular, esta expresión es útil para diagonalizar (de forma aproximada) cualquier matriz simétrica con la siguiente estructura¹ (nótese que M_L y M_R son matrices simétricas):

$$M_\nu = \begin{bmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \|M_L\|, \|M_D\| \ll \|M_R\|. \quad (\text{A.6})$$

En este punto, notemos que M_ν es diagonalizada por bloques por W si y solo si

$$W \equiv \begin{bmatrix} W_A & W_B \\ W_C & W_D \end{bmatrix} \Rightarrow W^T M_\nu W = \begin{bmatrix} m_\nu & R \\ R^T & m_N \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_N \end{bmatrix} \quad \text{con}$$

$$\begin{aligned} R &= W_A^T (M_L W_B + M_D W_D) + W_C^T (M_D^T W_B + M_R W_D) \stackrel{!}{=} 0, \\ m_\nu &= W_A^T (M_L W_A + M_D W_C) + W_C^T (M_D^T W_A + M_R W_C), \\ m_N &= W_B^T (M_L W_B + M_D W_D) + W_D^T (M_D^T W_B + M_R W_D), \end{aligned}$$

lo cual podemos lograr a orden dominante² en $\varepsilon \equiv M_D M_R^{-1}$ tomando $iS \approx \varepsilon^*$ [37]. Así,

$$W \approx \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^* \\ -\varepsilon^T & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R \approx M_L \varepsilon^* + M_D - \varepsilon M_R \approx 0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ m_\nu \approx M_L - M_D \varepsilon^T - \varepsilon M_D^T + \varepsilon M_R \varepsilon^T \approx M_L - M_D M_R^{-1} M_D^T + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ m_N \approx \varepsilon^\dagger M_D + M_D^T \varepsilon^* + M_R \approx M_R + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

en donde hemos mantenido arbitraria la magnitud de M_L con respecto a $M_D M_R^{-1} M_D^T$ y hemos evitado despreciar términos de orden $\mathcal{O}(\varepsilon M_R)$ puesto que estos son de orden $\mathcal{O}(M_D)$. Para finalizar, debemos recordar que $U^\nu \equiv W V$; entonces, tomando $V_1, V_2 \sim \mathcal{O}(1)$ de tal forma que m_ν y m_N se diagonalicen con masas reales y positivas, se deduce que

$$\begin{aligned} m_\nu &\approx M_L - M_D M_R^{-1} M_D^T & \hat{m}_\nu &= V_1^T m_\nu V_1 \\ m_N &\approx M_R & \hat{m}_N &= V_2^T m_N V_2 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

-
1. Las jerarquías entre M_L y M_D , a priori, no necesitan ser especificadas.
 2. Las ecs. (15)-(18) de la ref. [101] (cambiando M_D por M_D^T) muestran cómo generalizar estos resultados a órdenes superiores, el uso de estas ecuaciones solo se justifica cuando nuestra predicción matemática para algún observable (i) sea competitiva con la resolución actual de los experimentos, o (ii) esta sea exactamente igual a cero a un orden dado en ε . En cualquier otro caso, será suficiente trabajar con la ec. (A.5).

B. Masas y paridad de carga

Un aspecto importante de la matriz U^ν (que diagonaliza a M_ν con masas positivas) es que esta siempre se puede expresar como $U^\nu = \mathbb{U}^\nu D$, en donde D es una matriz de fases diagonal con $D_{ij} = \sqrt{\eta_i} \delta_{ij}$, y \mathbb{U}^ν es cualquier matriz que diagonalice a M_ν con masas genéricas $m'_i \in \mathbb{C}$. Una condición necesaria y suficiente para permitir esta descomposición es $\eta_i \equiv \text{Sgn}(m'_i)$, pues¹

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{M_\nu} &= -\frac{1}{2} (\overline{n_L^c} U^{\nu T \dagger}) (U^{\nu T} M_\nu U^\nu) (U^{\nu \dagger} n_L) + \text{h.c.} \\
 &= -\frac{1}{2} \overline{\hat{n}_L^c} D^\dagger \hat{M}_\nu D^\dagger \hat{n}_L + \text{h.c.} \\
 &= -\frac{1}{2} m'_i \eta_i^* \overline{\hat{n}_{iL}^c} \hat{n}_{iL} + \text{h.c.} \\
 &\equiv -\frac{1}{2} m_i \overline{\hat{n}_{iL}^c} \hat{n}_{iL} + \text{h.c.}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

nos garantiza términos de masa reales y positivos, en donde identificamos las masas como $m_i \equiv |m'_i| = m'_i \eta_i^*$, se tiene $(\hat{M}_\nu)_{ij} = m'_i \delta_{ij}$, y hemos definido los campos físicos \hat{n}_L como

$$\hat{n}_L \equiv U^{\nu \dagger} n_L \quad \text{con masas } m_i \geq 0. \tag{B.2}$$

En este momento, conviene definir espinores de Majorana $\hat{\nu}_i$ (con $\hat{\nu}_i^c = \eta_i^* \hat{\nu}_i$ y masas m_i) tal y como se muestra a continuación. A partir de estos, se verifica que existe una relación entre sus paridades de carga η_i^* y las fases $\sqrt{\eta_i}$ de la matriz D [14, 15, 102].

$$\hat{\nu}_i \equiv \hat{n}_{iL} + \eta_i \hat{n}_{iL}^c. \tag{B.3}$$

$$\Rightarrow \hat{\nu}_i^c = \hat{n}_{iL}^c + (\eta_i \hat{n}_{iL}^c)^c = \hat{n}_{iL}^c + \eta_i^* \hat{n}_{iL} = \eta_i^* (\hat{n}_{iL} + \eta_i \hat{n}_{iL}^c) = \eta_i^* \hat{\nu}_i. \tag{B.4}$$

Notamos entonces que (B.1) puede reformularse en términos de estos nuevos campos

$$-\frac{1}{2} m_i \overline{\hat{\nu}_i} \hat{\nu}_i = -\frac{1}{2} m_i \overline{\hat{\nu}_{iR}} \hat{\nu}_{iL} + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} m_i \overline{(\eta_i \hat{n}_{iL}^c)} \hat{n}_{iL} + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} m'_i \eta_i^* \overline{\hat{n}_{iL}^c} \hat{n}_{iL} + \text{h.c.},$$

y por ende, concluimos que las fases η_i en la matriz D son los conjugados de las paridades de carga de nuestros campos de Majorana ν_i , que a su vez, se traducirán en fases de Majorana (de violación de CP [14]) al interior de la matriz de mezcla $\mathbf{B} \equiv U_L^{\ell \dagger} \cdot U^\nu$ de la Sección 2.3.

1. Aquí expondremos, de forma general, cómo diagonalizar matrices complejas simétricas arbitrarias. La función signo complejo es dada por $\text{Sign}(z) \equiv z/|z| = e^{i \arg(z)}$, de tal forma que $|\text{Sign}(z)|^2 = 1$.

C. Detalles del cálculo de $\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$

Por completez en nuestra discusión, a continuación presentamos una lista completa con las reglas de Feynman que provienen del ME¹, complementan la información de la Figura (2.3), y son necesarias para calcular $\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$ a un loop, así como sus diagramas y amplitudes [54].

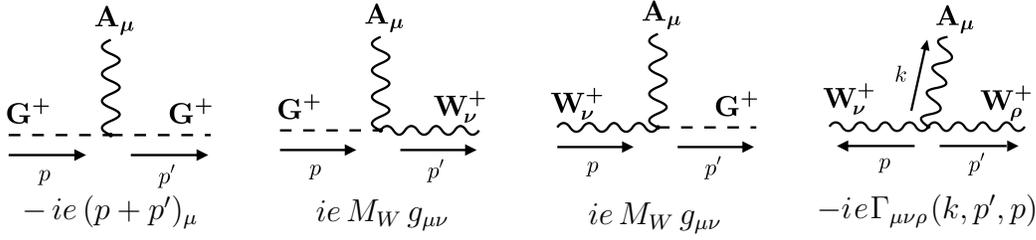


Figura C.1: Vértices del ME relevantes para $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$ a un loop. En nuestra convención, $\Gamma_{\mu\nu\rho}(k, p', p) \equiv g_{\mu\nu}(p' - k)_\rho + g_{\nu\rho}(p - p')_\mu + g_{\rho\mu}(k - p)_\nu$ lleva sus momentos *hacia afuera*.

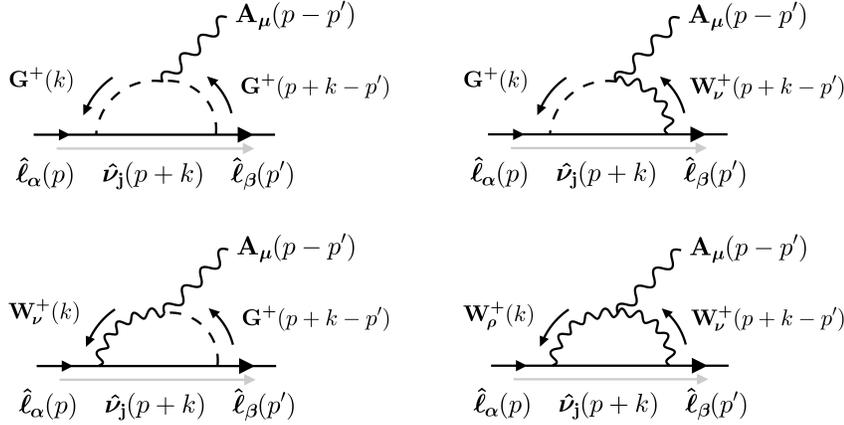


Figura C.2: Diagramas relevantes para $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$ a un loop (mediado por neutrinos masivos). G^\pm denotan bosones de Goldstone cargados y no-físicos en la norma de Feynman-'t Hooft.

Sumando todas estas contribuciones, obtenemos la amplitud de transición

$$i\mathcal{M} = \left(\frac{-i^6 g^2 e}{2} \right) \mathbf{B}_{\beta j} \mathbf{B}_{j\alpha}^\dagger \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N_1^\mu + N_2^\mu + N_3^\mu + N_4^\mu}{D} \epsilon_\mu^*(p - p')$$

1. Estas usan las ecs. (2.2) y (2.44), vienen de $|D_\mu \Phi|^2 \supset (\partial_\mu + ie A^\mu) G^+|^2 \supset -ie A^\mu [(\partial_\mu G^-) G^+ - G^- (\partial_\mu G^+)]$, $|D_\mu \Phi|^2 \supset |ie A_\mu \phi^+ + \frac{ig'}{\sqrt{2}} W_\mu^- \phi^0|^2 \supset e M_W (G^+ W_\mu^- + G^- W_\mu^+) A^\mu$, $-\frac{1}{4} W^{\mu\nu a} W_{\mu\nu}^a$ (cf. [52] ecs. (8.89) y (8.42)), y concuerdan con las referencias [3, 52] para $\eta_e = 1$ y $\mathcal{C}_{\mu\nu\sigma}(p, q, r) = \Gamma_{\nu\mu\sigma}(-p', -p, -r) = -\Gamma_{\nu\mu\sigma}(p', p, r)$.

en donde

$$\begin{aligned}
N_1^\mu &= \frac{1}{M_W^2} \bar{u}(p') (m_{\ell_\beta} P_L - m_j P_R) (\not{p} + \not{k} + m_j) (m_{\ell_\alpha} P_R - m_j P_L) u(p) (2k + p - p')^\mu, \\
N_2^\mu &= \bar{u}(p') (\gamma^\mu P_L) (\not{p} + \not{k} + m_j) (m_{\ell_\alpha} P_R - m_j P_L) u(p), \\
N_3^\mu &= \bar{u}(p') (m_{\ell_\beta} P_L - m_j P_R) (\not{p} + \not{k} + m_j) (\gamma^\mu P_L) u(p), \\
N_4^\mu &= -\bar{u}(p') (\gamma_\nu P_L) (\not{p} + \not{k} + m_j) (\gamma_\rho P_L) u(p) \Gamma^{\mu\nu\rho}(p - p', p' - p - k, k), \\
D &= [k^2 - M_W^2][(p + k)^2 - m_j^2][(p + k - p')^2 - M_W^2].
\end{aligned}$$

Para resolver la integral, extraer los factores de forma requeridos y tomar el límite $m_{\ell_\beta} \ll m_{\ell_\alpha}$, podemos usar las funciones *LoopIntegrate*, *Projector*² y *LoopRefineSeries* de *Package-X*. El resultado para $\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)$, una vez reemplazados los factores en la ec. (2.50), es dado por

$$\Gamma \approx \frac{m_{\ell_\alpha}^3}{16\pi} \left| \frac{i}{16\pi^2} \right|^2 \left| \frac{-i^6 g^2 e}{2} \right|^2 \left| \frac{m_{\ell_\alpha}}{M_W^2} B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G_\gamma(x_j) \right|^2 = \frac{\alpha_W^3 s_W^2}{256\pi^2} \frac{m_{\ell_\alpha}^5}{M_W^4} \left| B_{\beta j} B_{j\alpha}^\dagger G_\gamma(x_j) \right|^2.$$

con $x_j \equiv m_j^2/M_W^2$ y en donde hemos definido la *función del loop* como

$$G_\gamma(x) = \frac{1}{12(1-x)^4} [10 - 43x + 78x^2 - 49x^3 + 18x^3 \ln x + 4x^4].$$

Para finalizar, mostramos el comportamiento de esta función en la Figura C.3.

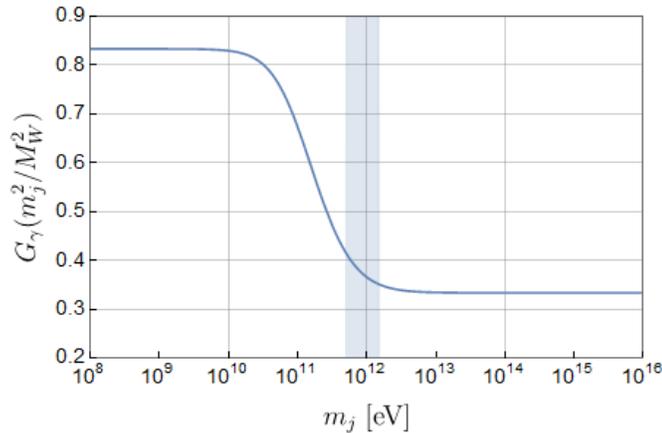


Figura C.3: $G_\gamma(x_j)$ versus m_j . Esta función tiende a ser constante ($5/6 \approx 0.83$ ó $1/3 \approx 0.33$) para un amplio rango de valores, y en particular, vemos que $G_\gamma(x_j) \approx G_\gamma(v_M^2/M_W^2) + \mathcal{O}(10^{-2})$ se cumple para la región sombreada (0.5 – 1.5 TeV), argumento que usamos en la Sección 3.1.

2. El resultado de estas funciones debe multiplicarse por factores de normalización ($i/16\pi^2$) y $1/(m_{\ell_\alpha} + m_{\ell_\beta})$. Así se obtienen $B_{L/R} \sim (m_{\ell_{\beta/\alpha}}/M_W^2) G_\gamma$, $A = (B_R + B_L)/2$ y $B = (B_R - B_L)/2$.

Referencias

- [1] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. Abdel Khalek, A. A. Abdelalim et al., *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, *Phys. Lett. B* **716** (2012) 1 [[1207.7214](#)].
- [2] S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A. M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam, E. Aguilo et al., *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, *Phys. Lett. B* **716** (2012) 30 [[1207.7235](#)].
- [3] J. C. Romão and J. P. Silva, *A resource for signs and Feynman diagrams of the Standard Model*, *Int J Mod Phys A* **27** (2012) [[1209.6213](#)].
- [4] G. 't Hooft, *Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies*, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8.
- [5] S. Weinberg, *The quantum theory of fields: Volume I, Foundations (Chapter 5.6)*. Cambridge University Press, 1995.
- [6] E. A. Jeffery, *Component minimization of the Bargmann-Wigner wavefunction*, *Aust. J. Phys.* **31** (1978) 137.
- [7] J. Maciejko, *Representations of Lorentz and Poincaré groups*. Lectures notes from Physik-Department T30F, Technische Universität München, March 2013.
- [8] S. Willenbrock, *Symmetries of the Standard Model*, arXiv e-prints (2004) [[hep-ph/0410370](#)].
- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [10] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, *Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry*, *Phys. Rep.* **494** (2010) 1 [[0812.1594](#)].
- [11] B. L. v. d. Waerden, *Spinoranalyse*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse **1929** (1928) 100.
- [12] B. L. van der Waerden in Groningen and G. Pasa, *Spinor analysis*, arXiv e-prints (2017) arXiv:1703.09761 [[1703.09761](#)].
- [13] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1992.

- [14] C. Giunti and K. C. Wook, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford Univ. Press, 2007.
- [15] J. I. Illana, *Teoría cuántica de campos*, Universidad de Granada (2021) 152.
- [16] J. I. Illana, *El Modelo Estándar y su fenomenología - Parte I: La teoría electrodébil y herramientas de cálculo*, Universidad de Granada (2011) .
- [17] T. Appelquist and J. Carazzone, *Infrared singularities and massive fields*, [Phys. Rev. D **11** \(1975\) 2856](#).
- [18] A. Ilakovac and A. Pilaftsis, *Flavour-violating charged lepton decays in seesaw-type models*, [Nucl. Phys. B. **437** \(1995\) 491 \[hep-ph/9403398\]](#).
- [19] F. Feruglio, *The Physics of the Chiral Fermions*, [arXiv e-prints \(1994\) hep \[hep-ph/9405260\]](#).
- [20] B. Grzadkowski, P. Krawczyk and S. Pokorski, *Natural relations and appelquist-carazzone decoupling theorem*, [Phys. Rev. D **29** \(1984\) 1476](#).
- [21] A. Pich, *The Standard Model of Electroweak Interactions*, [arXiv e-prints \(2012\) \[1201.0537\]](#).
- [22] W. Buchmüller and D. Wyler, *Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation*, [Nucl. Phys. B **268** \(1986\) 621](#).
- [23] B. Grzadkowski, M. Iskrzyński, M. Misiak and J. Rosiek, *Dimension-six terms in the Standard Model Lagrangian*, [JHEP **2010** \(2010\) 85 \[1008.4884\]](#).
- [24] J. de Blas, J. C. Criado, M. Pérez-Victoria and J. Santiago, *Effective description of general extensions of the Standard Model: the complete tree-level dictionary*, [JHEP **2018** \(2018\) 109 \[1711.10391\]](#).
- [25] D. Zhang and S. Zhou, *Complete one-loop matching of the type-I seesaw model onto the Standard Model effective field theory*, [JHEP **2021** \(2021\) 163 \[2107.12133\]](#).
- [26] S. Weinberg, *Baryon and lepton-nonconserving processes*, [Phys. Rev. Lett. **43** \(1979\) 1566](#).
- [27] N. Nath, *Lecture series on neutrino phenomenology*, Universidad Nacional Autónoma de México (2021) .
- [28] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Neutrinoless double- β decay in $SU(2) \times U(1)$ theories*, [Phys. Rev. D **25** \(1982\) 2951](#).

- [29] S. Centelles Chuliá, R. Srivastava and J. W. F. Valle, *Seesaw roadmap to neutrino mass and dark matter*, *Phys. Lett. B* **781** (2018) 122 [[1802.05722](#)].
- [30] P. Minkowski, $\mu \rightarrow e\gamma$ at a rate of one out of 10^9 muon decays?, *Physics Letters B* **67** (1977) 421.
- [31] J. A. Casas and A. Ibarra, *Oscillating neutrinos and $\mu \rightarrow e\gamma$* , *Nucl. Phys. B.* **618** (2001) 171 [[hep-ph/0103065](#)].
- [32] X. Marcano, *Lepton flavor violation from low scale seesaw neutrinos with masses reachable at the LHC*, Tesis de doctorado. Universidad Autónoma de Madrid (2017) .
- [33] G. 't Hooft, *Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking*, *NATO Sci. Ser. B* **59** (1980) 135.
- [34] A. Abada and M. Lucente, *Looking for the minimal inverse seesaw realisation*, *Nucl. Phys. B.* **885** (2014) 651 [[1401.1507](#)].
- [35] A. W. Max, *Inverting modified matrices*, in *Memorandum Rept. 42, Statistical Research Group*, p. 4. Princeton Univ., 1950.
- [36] A. Ilakovac and A. Pilaftsis, *Flavour-violating charged lepton decays in seesaw-type models*, *Nucl. Phys. B.* **437** (1995) 491 [[hep-ph/9403398](#)].
- [37] D. V. Forero, S. Morisi, M. Tórtola and J. W. F. Valle, *Lepton flavor violation and non-unitary lepton mixing in low-scale type-I seesaw*, *JHEP* **2011** (2011) 142 [[1107.6009](#)].
- [38] E. Arganda, M. J. Herrero, X. Marcano and C. Weiland, *Imprints of massive inverse seesaw model neutrinos in lepton flavor violating Higgs boson decays*, *Phys. Rev. D.* **91** (2015) 015001 [[1405.4300](#)].
- [39] G. D'Ambrosio, G. F. Giudice, G. Isidori and A. Strumia, *Minimal flavour violation: an effective field theory approach*, *Nucl. Phys. B.* **645** (2002) 155 [[hep-ph/0207036](#)].
- [40] G. C. Branco, R. González Felipe and F. R. Joaquim, *Leptonic CP violation*, *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 515 [[1111.5332](#)].
- [41] V. Cirigliano, B. Grinstein, G. Isidori and M. B. Wise, *Minimal flavor violation in the lepton sector*, *Nucl. Phys. B.* **728** (2005) 121 [[hep-ph/0507001](#)].
- [42] A. Abada, V. De Romeri and A. M. Teixeira, *Impact of sterile neutrinos on nuclear-assisted cLFV processes*, *JHEP* **2016** (2016) 83 [[1510.06657](#)].
- [43] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Neutrino masses in $SU(2) \times U(1)$ theories*, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 2227.

- [44] A. Pilaftsis, *Radiatively Induced Neutrino Masses and Large Higgs-Neutrino Couplings in the Standard Model with Majorana Fields*, *Z. Phys. C* **55** (1992) 275 [[hep-ph/9901206](#)].
- [45] A. Abada, V. De Romeri, J. Orloff and A. M. Teixeira, *In-flight $cLFV$ conversion: $e\text{-}\mu$, $e\text{-}\tau$ and $\mu\text{-}\tau$ in minimal extensions of the standard model with sterile fermions*, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 304 [[1612.05548](#)].
- [46] G. Hernández-Tomé, J. I. Illana, M. Masip, G. López Castro and P. Roig, *Effects of heavy Majorana neutrinos on lepton flavor violating processes*, *Phys. Rev. D* **101** (2020) [[1912.13327](#)].
- [47] R. Alonso, M. Dhen, M. B. Gavela and T. Hambye, *Muon conversion to electron in nuclei in type-I seesaw models*, *JHEP* **2013** (2013) 118 [[1209.2679](#)].
- [48] A. Denner, H. Eck, O. Hahn and J. Küblbeck, *Feynman rules for fermion-number-violating interactions*, *Nucl. Phys. B* **387** (1992) 467.
- [49] J. I. Illana and T. Riemann, *Predictions for Lepton Flavour Violation in Z decays*, *Nucl. Phys. B. Proceedings Supplements* **89** (2000) 64 [[hep-ph/0006055](#)].
- [50] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Comment on the lepton mixing matrix*, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 309.
- [51] M. S. Chanowitz and M. K. Gaillard, *The TeV physics of strongly interacting W's and Z's*, *Nucl. Phys. B* **261** (1985) 379.
- [52] P. Langacker, *The standard model and beyond; 1st ed.*, Series in high energy physics, cosmology, and gravitation. Taylor and Francis, Boca Raton, FL, 2010.
- [53] A. Abada, J. Kriewald and A. M. Teixeira, *On the role of leptonic CPV phases in $cLFV$ observables*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 1016 [[2107.06313](#)].
- [54] L. L. F. Cheng T P, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics Problems and Solutions*. Oxford University Press, 2000.
- [55] B. de Wit, *Introduction to gauge theories and the Standard Model*, Lecture series for postgraduate students. CERN libraries, Geneva, 1995.
- [56] W. J. Marciano and A. I. Sanda, *Exotic Decays of the Muon and Heavy Leptons in Gauge Theories*, *Phys. Lett. B* **67** (1977) 303.
- [57] M. Ardu and G. Pezzullo, *Introduction to Charged Lepton Flavor Violation*, *Universe* **8** (2022) 299 [[2204.08220](#)].

- [58] H. H. Patel, *Package-X 2.0: A Mathematica package for the analytic calculation of one-loop integrals*, *Comput Phys Commun* **218** (2017) 66 [[1612.00009](#)].
- [59] S. Sassi, *Dark matter via kinetic mixing*, Tesis de maestría. University of Helsinki (2019) .
- [60] P. F. de Salas, D. V. Forero, S. Gariazzo, P. Martínez-Miravé, O. Mena, C. A. Ternes et al., *2020 global reassessment of the neutrino oscillation picture*, *JHEP* **2021** (2021) 71 [[2006.11237](#)].
- [61] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi et al., *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A6 [[1807.06209](#)].
- [62] D. Mahanta and D. Borah, *Fermion dark matter with N_2 leptogenesis in minimal scotogenic model*, *JCAP* **2019** (2019) 021 [[1906.03577](#)].
- [63] G. Anamiati, M. Hirsch and E. Nardi, *Quasi-Dirac neutrinos at the LHC*, *JHEP* **2016** (2016) 10 [[1607.05641](#)].
- [64] P. Di Bari, M. Re Fiorentin and R. Samanta, *Representing seesaw neutrino models and their motion in lepton flavour space*, *JHEP* **2019** (2019) 11 [[1812.07720](#)].
- [65] J. Bergström, M. Malinský, T. Ohlsson and H. Zhang, *Renormalization group running of neutrino parameters in the inverse seesaw model*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 116006.
- [66] A. Ibarra, E. Molinaro and S. T. Petcov, *TeV scale see-saw mechanisms of neutrino mass generation, the Majorana nature of the heavy singlet neutrinos and $(\beta\beta)_{0\nu}$ -decay*, *JHEP* **2010** (2010) 108 [[1007.2378](#)].
- [67] MEG II collaboration, A. M. Baldini et al., *The design of the MEG II experiment*, *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) 380 [[1801.04688](#)].
- [68] MEG II collaboration, A. M. Baldini, V. Baranov, M. Biasotti, G. Boca, P. W. Cattaneo et al., *The Search for $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ with 10^{-14} Sensitivity: the Upgrade of the MEG Experiment*, *arXiv e-prints* (2021) [[2107.10767](#)].
- [69] P. H. Frampton, S. L. Glashow and D. Marfatia, *Zeroes of the neutrino mass matrix*, *Phys. Lett. B* **536** (2002) 79 [[hep-ph/0201008](#)].
- [70] N. Gautam and M. K. Das, *Impact of texture zeros on dark matter and neutrinoless double beta decay in inverse seesaw*, *Nucl. Phys. B.* **971** (2021) 115519.
- [71] A. Abada, Á. Hernández-Cabezudo and X. Marcano, *Beta and neutrinoless double beta decays with KeV sterile fermions*, *JHEP* **2019** (2019) 41 [[1807.01331](#)].

- [72] M. Fabbrichesi, E. Gabrielli and G. Lanfranchi, *The Dark Photon*, arXiv e-prints (2020) [[2005.01515](#)].
- [73] T. Xing, C. Wu, H. Miao, H. Li, W. Li, Y. Yuan et al., *Search for Majoron at the COMET experiment*, *Chinese Phys. C* **47** (2023) 013108 [[2209.12802](#)].
- [74] M. Lattanzi, S.Ørensen@, M. Tórtola and J. W. F. Valle, *Updated CMB and x - and γ -ray constraints on Majoron dark matter*, *Phys. Rev. D.* **88** (2013) 063528 [[1303.4685](#)].
- [75] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner and M. Ratz, *Neutrino mass matrix running for non-degenerate see-saw scales*, *Phys. Lett. B* **538** (2002) 87 [[hep-ph/0203233](#)].
- [76] A. Ibarra, P. Stöbl and T. Toma, *Two-loop renormalization group equations for right-handed neutrino masses and phenomenological implications*, *Phys. Rev. D.* **102** (2020) 055011 [[2006.13584](#)].
- [77] B. A. Kniehl and A. Pilaftsis, *Mixing renormalization in Majorana neutrino theories*, *Nucl. Phys. B.* **474** (1996) 286.
- [78] D. Aristizabal Sierra and C. E. Yaguna, *On the importance of the 1-loop finite corrections to seesaw neutrino masses*, *JHEP* **2011** (2011) 13 [[1106.3587](#)].
- [79] W. Grimus and L. Lavoura, *Soft lepton-flavor violation in a multi-Higgs-doublet seesaw model*, *Phys. Rev. D.* **66** (2002) 014016 [[hep-ph/0204070](#)].
- [80] W. Grimus and L. Lavoura, *One-loop corrections to the seesaw mechanism in the multi-Higgs-doublet standard model*, *Phys. Lett. B* **546** (2002) 86 [[hep-ph/0207229](#)].
- [81] I. Schienbein, F. Staub, T. Steudtner and K. Svirina, *Revisiting RGEs for general gauge theories*, *Nucl. Phys. B.* **939** (2019) 1 [[1809.06797](#)].
- [82] C. Hagedorn, J. Kersten and M. Lindner, *Stability of texture zeros under radiative corrections in see-saw models*, *Phys. Lett. B* **597** (2004) 63 [[hep-ph/0406103](#)].
- [83] M. Hirsch, R. Srivastava and J. W. Valle, *Can one ever prove that neutrinos are Dirac particles?*, *Phys. Lett. B* **781** (2018) 302.
- [84] C. Bonilla, S. Centelles-Chuliá, R. Cepedello, E. Peinado and R. Srivastava, *Dark matter stability and Dirac neutrinos using only standard model symmetries*, *Phys. Rev. D.* **101** (2020) 033011 [[1812.01599](#)].
- [85] A. Abada, N. Bernal, A. E. C. Hernández, X. Marcano and G. Piazza, *Gauged inverse seesaw from dark matter*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 758 [[2107.02803](#)].

- [86] S. Davidson and A. Ibarra, *A lower bound on the right-handed neutrino mass from leptogenesis*, *Phys. Lett. B* **535** (2002) 25 [[hep-ph/0202239](#)].
- [87] R. Gonzalez Suarez, *The Future Circular Collider (FCC) at CERN*, in *7th Symposium on Prospects in the Physics of Discrete Sources*, p. 9, Oct., 2022, [2204.10029](#), DOI.
- [88] L. M. G. de la Vega, E. Peinado and J. Wudka, *Neutrino masses and self-interacting dark matter with mass mixing $Z - Z'$ gauge portal*, *arXiv e-prints* (2022) [[2210.14863](#)].
- [89] Y. Cui and D. E. Morrissey, *Nonthermal dark matter from cosmic strings*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 083532 [[0805.1060](#)].
- [90] A. Abada, N. Bernal, A. E. C. Hernández, X. Marcano and G. Piazza, *Gauged inverse seesaw from dark matter*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 758 [[2107.02803](#)].
- [91] Z. H. Zhao, *Renormalization group evolution induced leptogenesis in the minimal seesaw model with the trimaximal mixing and mu-tau reflection symmetry*, *JHEP* **2021** (2021) 170 [[2003.00654](#)].
- [92] D. Hooper, J. Iguaz Juan and P. D. Serpico, *Signals of a New Gauge Boson from IceCube and Muon $g - 2$* , *arXiv e-prints* (2023) [[2302.03571](#)].
- [93] G. W. Bennett, B. Bousquet, H. N. Brown, G. Bunce, R. M. Carey, P. Cushman et al., *Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 072003 [[hep-ex/0602035](#)].
- [94] Muon $g - 2$ collaboration, B. Abi, T. Albahri, S. Al-Kilani, D. Allspach, L. P. Alonzi et al., *Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm*, *Phys. Rev. Lett.* **126** (2021) 141801.
- [95] J. C. Garnica, G. Hernández-Tomé and E. Peinado, *$cLFV$ processes and suppression of non-unitary mixing effects in low scale seesaw models*, *arXiv e-prints* (2023) [[2302.07379](#)].
- [96] S. Davidson, Y. Kuno and M. Yamanaka, *Selecting $\mu \rightarrow e$ conversion targets to distinguish lepton flavour-changing operators*, *Phys. Lett. B* **790** (2019) 380.
- [97] F. Staub, *SARAH 4: A tool for (not only SUSY) model builders*, *Comput Phys Commun* **185** (2014) 1773.
- [98] F. Staub, *Exploring new models in all detail with SARAH*, *Adv. High Energy Phys.* **2015** (2015) 840780 [[1503.04200](#)].
- [99] W. Porod, F. Staub and A. Vicente, *A flavor kit for BSM models*, *Eur. Phys. J. C* **74** (2014) 2992 [[1405.1434](#)].

-
- [100] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov and A. Semenov, *micrOMEGAs 4.1: Two dark matter candidates*, [Comput Phys Commun](#) **192** (2015) 322 [[1407.6129](#)].
- [101] W. Grimus and L. Lavoura, *The seesaw mechanism at arbitrary order: disentangling the small scale from the large scale*, [JHEP](#) **2000** (2000) 042 [[hep-ph/0008179](#)].
- [102] K. Zuber, *Neutrino Physics*, Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation. Taylor and Francis, 1 ed., 2003.