



Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería
Mecánica - Termofluidos

Análisis numérico de los efectos de implementar medios porosos
y nanofluidos en colectores solares de placa plana

TESIS

que para optar por el grado de

Maestro en Ingeniería

presenta

Moisés Guillermo Quintanilla Durán

tutor principal

Dr. Ian Guillermo Monsivais Montoliu, Facultad de Ingeniería

Ciudad Universitaria, CD. MX. Junio de 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

II

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Federico Méndez Lavielle

Secretario: Dr. Rafael Chávez Martínez

1er. Vocal: Dr. Ian Guillermo Monsivais Montoliu

2do. Vocal: Dr. Edgar Ali Ramos Gómez

3er. Vocal: Dr. José Joaquín Lizardi del Ángel

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, CDMX.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Ian Guillermo Monsivais Montoliu



FIRMA

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por darme la oportunidad de realizar mis estudios de Maestría y aceptarme dentro de sus instalaciones.

A mi familia, por ser mi apoyo emocional en este período lejos de casa.

Al Dr. Ian Monsivais, por haber sido un excelente asesor, y haberme apoyado en cada parte del proceso de formación.

A cada uno de los profesores que formaron parte de mi formación profesional, quienes me brindaron su confianza, apoyo y conocimientos; lo que me sirvió para cumplir esta meta.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado durante mis estudios de maestría.

Abstract

The objective of this research is to evaluate the velocity and temperature fields inside the channel of a flat plate solar collector (FPSC), by applying the following passive techniques for enhancing heat transfer: porous media and nanofluids. The work is justified since flat-type collectors work in the temperature range of various industrial processes, as well as residential applications; and it would not posed a problem to implement the studied techniques, if implemented.

The main difficulty encountered was the execution of the research in parallel with the master's degree courses, for this reason, the work is limited to a theoretical-numerical study. The mathematical models were solved by the finite element method, incorporated in the FreeFEM++ programming language.

From the development of the mathematical models, several parameters were obtained which have an influence over the behavior of the speed and the temperatures; out of the obtained parameters, the six most relevant were selected. Different cases were solved numerically to measure the effect of the chosen parameters on the study variables.

From the results obtained, it was concluded that, in the case evaluated from the most real or practical conditions, there is an increase of around 20 % in the average temperature of the nanofluid (with a 5 % concentration) at the outlet of the porous channel, compared to the case of free flow without nanoparticles. All temperature increase was produced by the effect of the porous medium, and, surprisingly, there is a slight reduction in temperature with the particles concentration. The latter is reversed when the heat generated by the viscous dissipation effect is enhanced.

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo el evaluar los campos de velocidad y temperatura dentro del canal de un colector térmico solar de placa plana, al aplicar las técnicas pasivas de mejora de transferencia de calor siguientes: medios porosos y nanofluidos. El trabajo se justifica a razón de que los colectores tipo planos trabajan en el rango de temperaturas de varios procesos industriales, además de aplicaciones residenciales; y en caso de implementar las técnicas estudiadas, no supondría un reto exagerado aplicarlas a los colectores planos.

La principal dificultad enfrentada fue la ejecución de la investigación en paralelo con los cursos de la maestría, por eso, el trabajo se limita a un estudio teórico-numérico. Los modelos matemáticos desarrollados fueron resueltos por el método de elementos finitos, incorporado en el lenguaje de programación FreeFEM++.

Del desarrollo de los modelos matemáticos se obtuvieron varios parámetros que influyen sobre el comportamiento de la velocidad y temperaturas; de estos, se seleccionaron las seis más relevantes. Diferentes casos fueron resueltos numéricamente para medir el efecto de los parámetros seleccionados sobre las variables de estudio.

De los resultados obtenidos se concluyó que, en el caso evaluado a partir de las condiciones más reales o prácticas, se produce un incremento de alrededor del 20% de la temperatura promedio del nanofluido (con concentración del 5%) a la salida del canal poroso, en comparación con el caso de flujo libre sin nanopartículas. Todo el aumento de la temperatura se produjo por efecto del medio poroso, y, sorpresivamente, existe una leve reducción de la misma con la concentración de partículas. Esto último se revierte cuando se potencia el calor generado por efecto de la disipación viscosa.

Índice general

Abstract	IV
Resumen	V
Índice de figuras	XII
Índice de cuadros	XIII
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.2. Preguntas de la investigación	3
1.3. Justificación	4
1.4. Limitantes del estudio	4
2. Marco teórico	7
2.1. Colectores solares de placa plana	7
2.1.1. Estimación del calor absorbido por la placa, S	9
2.1.2. Determinación de las pérdidas térmicas	10
2.2. Caracterización de los nanofluidos	12
2.2.1. Densidad	13
2.2.2. Calor específico	14
2.2.3. Viscosidad	15
2.2.4. Conductividad térmica	16
2.3. Mecánica de medios porosos	16
2.3.1. Volumen elemental representativo	16
2.3.2. Ley de Darcy	18
2.3.3. Efectos inerciales	18
2.3.4. Ecuación de Forchheimer	19
2.3.5. Ecuación de Brinkman	21

2.3.6.	Ecuación de conservación de momento	22
2.3.7.	Ecuación de conservación de energía térmica	22
3.	Modelo Teórico	25
3.1.	Alcance e hipótesis de investigación	25
3.2.	Descripción del modelo	25
3.2.1.	Delimitación del dominio	27
3.3.	Ecuaciones de conservación	27
3.3.1.	Ecuación de continuidad	27
3.3.2.	Conservación de momento	28
3.3.3.	Conservación de energía en el medio poroso	28
3.3.4.	Conservación de energía en la placa colectora	29
3.4.	Condiciones de frontera	31
3.4.1.	Restricciones en el flujo	31
3.4.2.	Condiciones a la entrada	31
3.4.3.	Condiciones/Restricciones de la temperatura	32
3.4.4.	Condición en la superficie externa de la placa colectora	33
3.5.	Orden de Magnitud	33
3.6.	Normalización de ecuaciones	35
3.6.1.	Definición de variables adimensionales	35
3.6.2.	Reducción de la ecuación de momento	35
3.6.3.	Reducción de la ecuación de energía en flujo	37
3.6.4.	Reducción de la ecuación de energía en pared colectora	40
3.6.5.	Reducción de las condiciones de frontera	40
4.	Solución Numérica	43
4.1.	Determinación del problema variacional	44
4.1.1.	Teorema de la Divergencia en el plano	44
4.1.2.	Formulación débil	44
4.1.3.	Definición de los dominios de trabajo	45
4.1.4.	Forma débil de la ecuación de momento	45
4.1.5.	Forma débil de la ecuación de energía en flujo	49
4.1.6.	Forma débil de la ecuación de energía en pared colectora	55
4.2.	Implementación en FreeFEM++	57
4.2.1.	Definición de los problemas matemáticos	57
4.2.2.	Algoritmo computacional	59

5. Resultados	61
5.1. Evaluación del caso base	61
5.2. Variación de los campos de velocidad y temperatura	67
5.2.1. Concentración de nanopartículas	67
5.2.2. Número adimensional F	68
5.2.3. Número de Darcy	69
5.2.4. Número de Péclet	70
5.2.5. Número de Brinkman y parámetro conjugado	71
5.2.6. Intercambio de efectos de radiación y disipación viscosa .	74
5.2.7. Efectos de las nanopartículas	78
6. Conclusiones	81
Bibliografía	88

Índice de figuras

2.1. Sección transversal de un colector plano convencional [Duffie y Beckman, 2013]	8
2.2. Transición entre los flujos de Darcy y Forchheimer para un flujo unidireccional en un medio poroso isotérmico [Ward, 1964]	20
3.1. Esquema del modelo a analizar	26
3.2. Elementos diferenciales dentro de la placa y en el borde con el exterior	29
4.1. Dominios normalizado del medio poroso inundado con nanofluido (izquierda) y de la placa plana (derecha).	45
5.1. Campo de velocidad adimensional para el caso base.	64
5.2. Variación de θ_f a lo largo del canal, para distintos valores de Y	65
5.3. Variación de θ_w a lo largo del canal, para distintos valores de Y_w	66
5.4. Variación de la velocidad \tilde{u} con la concentración de partículas ψ	67
5.5. Variación de θ_{nf} con la concentración en el canal poroso.	67
5.6. Variación de la velocidad \tilde{u} con el número F_{bf}	68
5.7. Variación de θ_{nf} con el número F_{bf} en el canal poroso.	69
5.8. Variación de la velocidad \tilde{u} con el número F_{bf}	69
5.9. Variación de θ_{nf} con el número de Darcy en el canal poroso.	70
5.10. Variación de θ_{nf} con el número de Péclet en el canal poroso.	70
5.11. Variación de θ_{nf} con el parámetro conjugado para $Br=0.0$ en el canal poroso.	71
5.12. Variación de θ_{nf} con el parámetro conjugado para $Br=1.0$ en el canal poroso.	72
5.13. Variación de θ_{nf} con el número Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2=100.0$ en el canal poroso.	73

5.14. Evaluación de θ_{nf} con F_{bf} y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 0.5$ en el canal poroso.	74
5.15. Evaluación de θ_{nf} con Da y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 0.5$ en el canal poroso.	75
5.16. Evaluación de θ_{nf} con F_{bf} y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 129.9$ en el canal poroso.	76
5.17. Evaluación de θ_{nf} con Da y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 129.9$ en el canal poroso.	77
5.18. Evaluación del cambio de θ_{nf} con F_{bf} para Da y Br elevados.	78
5.19. Comparación de perfiles de temperatura θ_{nf} a la salida del canal poroso respecto a la concentración ψ para Br=0.00015.	79
5.20. Comparación de perfiles de temperatura θ_{nf} a la salida del canal poroso respecto a la concentración ψ para Br=0.1.	80

Índice de cuadros

1.1. Sectores y procesos industriales con el mayor potencial para usos termo-solares [ESTIF, 2006].	5
---	---

Capítulo 1

Introducción

Aunque en todo momento la irradiación del Sol incide sobre la Tierra, su intensidad no es siempre la misma, pues depende de factores como la ubicación geográfica o el momento del año, siendo particularmente intensa cerca de la línea del Ecuador y en verano. Aquí se entiende por irradiación (o exposición radiante) a la energía que incide en una superficie por unidad de área de la misma; no hay que confundirlo con la irradiancia, que es la tasa de irradiación. Es decir, la irradiación mide energía, mientras que la irradiancia se refiere a la tasa de energía (potencia). En un contexto general, cuando una distinción no sea necesaria, se hablará simplemente de radiación, sobre todo cuando se estén tratando fenómenos de termofluidos.

En ocasiones la luz solar da la sensación de que es tan intensa que quema en la piel, no obstante, la realidad es que sólo una pequeña fracción de la radiación solar llega al planeta y atraviesa la capa de ozono. Por tal motivo, los científicos e ingenieros han desarrollado, a través de los años, métodos y técnicas para aprovechar el recurso solar al máximo. Las tecnologías más conocidas son: los paneles fotovoltaicos y los colectores térmicos; existiendo además sistemas que combinan ambos (híbridos).

Es fácil llegar a confundir ambas tecnologías, por lo que es importante hacer una distinción entre las dos. Los paneles fotovoltaicos son dispositivos compuestos por células solares que convierten la luz solar en electricidad. Estas células están generalmente hechas de silicio, y cuando la luz incide sobre ellas, generan un flujo de electrones que produce una corriente eléctrica. Pueden instalarse en techos de viviendas, edificios comerciales o a gran escala en granjas o parques solares. En general, los paneles fotovoltaicos son capaces de transformar en energía eléctrica entre un 15 % a 20 % de la irradiación, aunque esto varía según cómo se fabriquen y las condiciones de la instalación.

Por otra parte, los colectores térmicos convierten el calor por radiación solar en calor sensible de un fluido de trabajo, si la energía es abundante o está concentrada y el fluido es un líquido, puede producirse un cambio de fase. Están compuestos de tubos o placas absorbentes que transfieren el calor al fluido, que generalmente es base agua, aunque existen colectores que trabajan con aceite o gases. Su eficiencia ronda entre el 50 % y 80 %, variando según los materiales y formas de construcción, el clima, la orientación, el momento del día, entre otros factores.

Además de los principios bajo los que operan, los colectores térmicos se distinguen de los paneles fotovoltaicos por su mayor eficiencia, aunque la energía eléctrica producida es más sencilla de transformar a otros tipos de energía, y es menos susceptible a pérdidas en el almacenaje. Ambas tienen sus ventajas e inconvenientes, pero este trabajo se centra en los fenómenos termofluidicos de los colectores térmicos. Para evitar confusión se evitará utilizar el término *paneles*, aunque en caso de ser mencionado, tener en cuenta que hace referencia a los colectores solares térmicos.

Los colectores térmicos se pueden clasificar por su capacidad de seguir al Sol (rastreadores o estacionarios), el tipo de fluido de trabajo (base agua, base aceite o gases), la existencia de superficies reflectoras adicionales (concentradores o no-concentradores) y el rango de temperatura de trabajo. Esta investigación trabaja con el colector térmico más sencillo: de placa plana; es un colector estacionario no-concentrador, que trabaja con agua en el rango de baja temperatura ($<150^{\circ}\text{C}$), y consta de una plancha colectora, de preferencia con poca emisividad y gran absorptancia, en la que incide la radiación del Sol por una cara, mientras que en la superficie opuesta se hace pasar el fluido a calentar. De intentar aumentar la eficiencia de los colectores planos, el enfoque estaría en aumentar la transferencia de calor entre la placa colectora y el fluido de trabajo.

Se distinguen dos tipos de métodos para mejorar la transferencia de calor: activos y pasivos. Los primeros involucran la aplicación de energía externa al sistema, ejemplo de esto pueden ser piezas accionadas por mecanismos giratorios [Kumar y Subudhi, 2021]. Los tipos pasivos no involucran fuentes externas, sino que se centran en alterar propiedades del sistema. Muestra de esto son los medios porosos, materiales compuestos de una matriz sólida repleta de huecos o poros ocupados por algún tipo de fluido, que tienen el propósito de modificar el área de transferencia; otro ejemplo son los nanofluidos, mezcla de partículas insolubles de tamaño nanométrico dispersas en solución, y cuyo objetivo es alterar las propiedades termodinámicas del fluido base.

1.1. Objetivos

Con lo mencionado en los párrafos anteriores, se establece como meta general de este estudio el analizar el comportamiento de los campos de velocidad y temperatura al aplicar los medios porosos y nanofluidos como técnicas pasivas de incremento de transferencia de calor en colectores solares de placa plana.

Para cumplir con este propósito se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Determinar los modelos matemáticos que describen el comportamiento de la velocidad y temperatura de un fluido que atraviesa un medio poroso.
- Obtener las expresiones matemáticas que determinan las propiedades termodinámicas de nanofluidos en base a la concentración de nanopartículas.
- Definir un modelo teórico que representa, de manera básica, un colector solar de placas planas.
- Aplicar los modelos matemáticos al caso teórico de colector solar, simplificando las expresiones en la medida de lo posible.
- Definir los parámetros relevantes dentro de las expresiones simplificadas que fungirán como variables independientes.
- Describir la variación de los parámetros anteriores respecto a la velocidad y temperatura (variables dependientes) del sistema.

1.2. Preguntas de la investigación

Los objetivos, y por tanto la investigación, están encaminados a responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles variables condicionan el comportamiento de la velocidad y temperatura en medios porosos?
- ¿De qué dependen las propiedades termodinámicas de los nanofluidos?
- ¿Qué sucede con los modelos matemáticas cuando se aplican a un caso teórico de colector solar de placas planas?
- ¿Cuáles son los parámetros que definen el problema?
- ¿Cómo es el comportamiento de la velocidad y la temperatura del flujo en relación a las variables independientes?

1.3. Justificación

La ingeniería está enfocada en la aplicación de conocimientos científicos para crear, diseñar, mejorar y manejar procedimientos industriales y de otros campos de aplicación. Para mejorar un proceso primero se debe entenderlo, en esto se enfoca la investigación. Como se menciono antes, existen dos formas para extraer energía del Sol: paneles fotovoltaicos y colectores térmicos. Considerando la aplicación en países en vías de desarrollo, los paneles requieren un mayor gasto económico inicial, por lo que se decantó por estudiar los colectores térmicos, siendo más específicos, los colectores solares de placa plana. En caso de intentar aplicar las técnicas estudiadas a un modelo físico experimental, adaptar las modificaciones no sería complicado ni dispendioso, al menos para el caso de los colectores planos, razón por la cual se seleccionaron como modelo de estudio.

Aplicaciones de agua caliente a nivel residencial incluyen higiene personal, limpieza de superficies, enjuagado de trastes y utensilios de cocina, lavandería, por mencionar algunas. A nivel industrial, bastará con observar la Tabla 1.1 cortesía del ESTIF [2006], donde se muestran algunos procedimientos comunes en varias industrias y los rangos de temperatura de agua utilizados. Note que todas las aplicaciones mencionadas en este párrafo son para temperaturas típicas en colectores solares planos, esto con el fin de demostrar su gran relevancia, y el impacto que conllevaría tratar dichos colectores, lo que es razón suficiente para ser tratados en esta investigación.

1.4. Limitantes del estudio

Desde un inicio se advierte la posibilidad del uso de algún método numérico a ser determinado más adelante. Siendo este el caso, un desafío adicional para realizar la tesis es el aprender un lenguaje de programación que permita hacer cálculo numérico eficiente de los modelos a elegir, además de conseguir acceso a un equipo de cómputo que permita leer, interpretar y ejecutar el programa que ejecuta la simulación, además que dicha computadora cuente con un software para la lectura de datos y capacidad de graficar los resultados obtenidos, y así facilitar el análisis de estos. Ya que el tiempo para realizar es estudio es limitado, la investigación incluirá sólo modelos teóricos, no experimentales.

Aunque existe mucha literatura de los efectos por separado de medios porosos y nanofluidos en un vasto número de casos, y que los beneficios de ambos fenómenos sean muy reconocidos; el problema combinado parece estar carente

Cuadro 1.1: Sectores y procesos industriales con el mayor potencial para usos termo-solares [ESTIF, 2006].

Sector industrial	Proceso	Nivel de temperatura [°C]
Comidas y bebidas	secado	30 - 90
	lavado	40 - 80
	pasteurizado	80 - 110
	hervido	95 - 105
	esterilizado	140 - 150
	tratamiento	40 - 60
Industria textil	lavado	40 - 80
	blanqueado	60 - 100
	teñido	100 - 160
Industria química	hervido	95 - 105
	destilado	110 - 300
	otros procesos	120 - 180
Todos los sectores	pre-calentado de caldera	30 - 100
	calefacción de pasillos	30 - 80

de investigación, por lo que otro objetivo de esta tesis es aliviar esta carencia de conocimiento.

Capítulo 2

Marco teórico

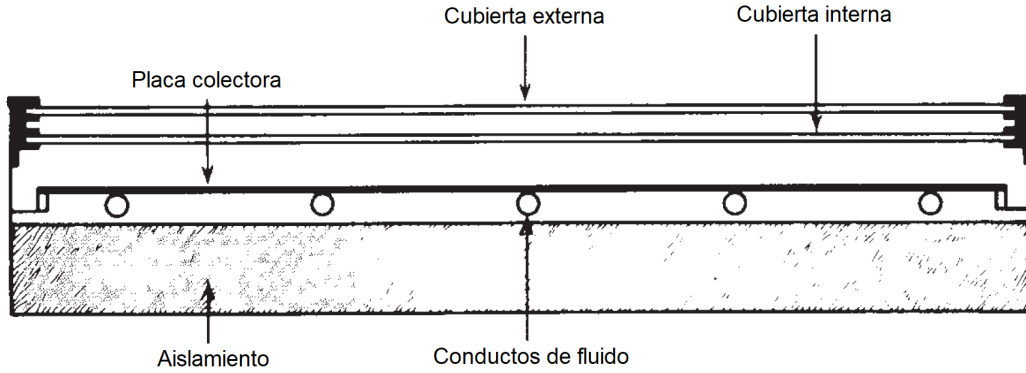
2.1. Colectores solares de placa plana

Los intercambiadores de calor convencionales mueven la energía de un fluido a otro, aunque también existen los tipos especiales, como los colectores solares que transfieren el calor de un cuerpo (el Sol) a un fluido de trabajo, aumentando su calor sensible, lo que se experimenta como un incremento de temperatura, y en algunos casos, un cambio de fase. Los colectores tipo placas planas tiene aplicación en un rango de temperaturas moderado, por ejemplo, en el calentamiento de agua, aire o aceite para sistemas de aire acondicionado o procesos industriales, como los mencionados en la tabla 1.1; además, este tipo de colectores requieren poco mantenimiento, por tales motivos merecen y son estudiados extensamente.

Un colector solar de placa plana convencional está compuesto de una superficie colectora que absorbe el calor por radiación solar, y que es generalmente de tono oscuro para garantizar una menor reflectancia. Sobre la placa colectora se encuentran una o más cubiertas transparentes, cuyo propósito es proteger a la placa plana, ya que se encuentra a la intemperie; además de reducir las pérdidas por convección y radiación. Los ductos por donde circula el fluido a calentar tienen encima a la placa absorbente, y por debajo se aíslan térmicamente para reducir aún más las pérdidas. Las partes mencionadas se han representado gráficamente en la figura 2.1. Note que este tipo de colectores solares se encuentran casi siempre fijos, y orientados a modo de optimizar la irradiación que depende de la ubicación geográfica y la época del año; entiéndase por irradiación a la cantidad de calor radiante por unidad de área que incide en una superficie.

Duffie y Beckman [2013] comparten la expresión (2.1) derivada del balance

Figura 2.1: Sección transversal de un colector plano convencional [Duffie y Beckman, 2013]



de energía aplicada a la placa colectora.

$$\dot{Q}_u = A_p [S - U_L (\bar{T}_p - T_\infty)] \quad (2.1)$$

Donde:

\dot{Q}_u : Tasa de calor utilizado para calentar el fluido [W].

A_p : Área de incidencia de la superficie absorbente [m²].

S : Flujo de calor absorbido por la placa colectora [W/m²].

U_L : Coeficiente total de pérdidas globales [W/(m²-K)].

\bar{T}_p : Temperatura promedio de la superficie de la placa colectora [K].

T_∞ : Temperatura ambiente de los alrededores [K].

Casi todas estas variables son difíciles de estimar, ya sea porque dependen de parámetros de diseño del colector o de condiciones ambientales.

La misma energía estimada en la ecuación (2.1), asumiendo que no existen pérdidas adicionales, es utilizada para elevar la energía del fluido. Considerando temperaturas promedio a la salida y entrada del canal, un balance de energía del flujo daría:

$$\dot{Q}_u = \dot{m} c_p (\bar{T}_{f,s} - \bar{T}_{f,e}) \quad (2.2)$$

Para:

\dot{m} : Flujo másico de fluido [kg/s].

c_p : Calor específico del fluido [J/(kg K)].

$(\bar{T}_{f,s} - \bar{T}_{f,e})$ es la diferencia de las temperaturas promedio del fluido a la salida y entrada del canal, respectivamente [K].

2.1.1. Estimación del calor absorbido por la placa, S

La energía solar que incide sobre una superficie inclinada está compuesta de tres tipos de radiación: directa, difusa y reflejada. La primera considera toda aquella luz que no sufre cambio en su trayectoria del Sol hacia la placa colectora, mientras que la radiación tipo difusa hace referencia a los haces de luz solar que han cambiado de dirección al haberse dispersado en la atmósfera, y que aun así llegan hasta el colector. Por otra parte, la reflejada es la que incide en el suelo o zonas cercanas a la placa absorbente y que redirigen parcialmente la radiación hacia ella. Cabe mencionar que las nubes tienen un efecto sobre los colectores, pues llegan a bloquear al Sol, e incluso emiten radiación, aun así, se considera la condición de cielo despejado en el desarrollo de la mayoría de los modelos de radiación solar.

Datos de cielos despejados sugieren que la radiación difusa puede provenir de tres fuentes. Considere al cielo como un domo hemisférico gigante con el colector solar en su centro, existe radiación dispersa en ese domo que incide uniformemente (isotrópico) sobre la placa colectora. Otra parte de la radiación en la atmósfera está concentrada cerca del Sol (circunsolar) y es, en general, más intensa que la isotrópica. La energía solar también suele concentrarse en el horizonte, en especial cuando el cielo está libre de nubes, por lo que se considera como otra fuente difusa. Si a los modelos difusos se les suma la radiación directa y reflejada, se obtiene una expresión que mide la relación entre la irradiación sobre una superficie inclinada en comparación de una horizontal [Duffie y Beckman, 2013].

Como se mencionó antes, existen modelos isotrópicos para estimar la radiación difusa, un ejemplo es el propuesto por Liu y Jordan [1963]. En este tipo de modelos se desprecia la parte circunsolar y de horizonte, y sirven como una buena primera aproximación, subestimando a los modelos anisótropos. Ejemplos de estos últimos son los modelos Hay-Davies [Hay y Davies, 1980] y el HDKR [Reindl *et al.*, 1990], ambos consideran ciertos índices y coeficientes que relacionan la parte circunsolar y de horizonte con la irradiación directa y difusa total. Cuando se tiene un estimado para los tres tipos de irradiación

(directa, difusa y reflejada), para saber qué parte absorbe la superficie colectora, se multiplica cada término por el producto transmitancia-absortancia ($\tau\alpha$) correspondiente. Puede decirse que para estimar el calor absorbida por la placa colectora se debe conocer:

- La transmitancia y espesor de las cubiertas.
- La absortancia de la placa en la superficie.
- La latitud en donde esté ubicado el colector.
- La hora del día, y día del año.
- La inclinación del colector respecto a la horizontal.
- La reflectividad del suelo.
- La nubosidad presente.
- Entre otros.

Estimar matemáticamente la irradiación que incide sobre una superficie puede ser engorroso, de aquí la importancia del desarrollo de equipos de medición que sean capaces de determinar el flujo real de calor proveniente del Sol. En algunos casos se han llegado a registrar tasas de radiación de hasta $1,110 \text{ W/m}^2$ [Duffie y Beckman, 2013]. El Servicio Solarimétrico Mexicano [s.f.] reporta datos de radiación directa, difusa total y global en planos horizontales e inclinados para la Ciudad de México entre los años 2016 a 2018, registrándose valores para la irradiación global de alrededor de 500 W/m^2 en ese último año. Al tener disponible estos datos, faltará incluir los productos $\tau\alpha$, para determinar el calor absorbido (S) por la placa colectora.

2.1.2. Determinación de las pérdidas térmicas

De la ecuación 2.1, se puede distinguir la parte que corresponde a las pérdidas, la cual se expresa a continuación como un flujo por unidad de área, q_L :

$$q_L = U_L (\bar{T}_p - T_\infty) \quad (2.3)$$

El coeficiente de pérdida por transferencia de calor, que está dado por [Duffie y Beckman, 2013]:

$$U_L = \frac{1}{R_0 + R_1 + \cdots + R_i + \cdots + R_n} \quad (2.4)$$

Donde:

R_0 : resistencia térmica entre la placa absorbente (colectora) y la primera cubierta [$\text{m}^2 \text{ K/W}$].

R_1 : resistencia entre la primera y segunda cubiertas [$\text{m}^2 \text{ K/W}$].

R_i : resistencia entre la placa i y la $i + 1$ [$\text{m}^2 \text{ K/W}$].

R_n : entre la cubierta n (última) y el ambiente [$\text{m}^2 \text{ K/W}$].

Dado que las superficies están separadas por un fluido (e.g. aire), los únicos mecanismos de transferencia de calor son la convección y radiación. Siendo así, las resistencias quedan definidas como el recíproco de las sumatorias de los coeficientes de transferencia de los dos mecanismos:

$$R_i = \frac{1}{h_{c,i} + h_{r,i}} \quad (2.5)$$

Para:

$h_{c,i}$: Coeficiente de transferencia de calor por convección entre las cubiertas i y la superficie siguiente [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$].

$h_{r,i}$: Coeficiente de transferencia de calor por radiación entre las cubiertas i y la superficie siguiente [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$].

Por lo que se puede expresar al factor de pérdidas global como:

$$U_L = \left(\frac{1}{h_{c,0} + h_{r,0}} + \frac{1}{h_{c,1} + h_{r,1}} + \cdots + \frac{1}{h_{c,n} + h_{r,n}} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

De donde es preciso definir:

$h_{c,n}$: Coeficiente de transferencia de calor por convección entre la cubierta más externa y el ambiente o viento [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$].

$h_{r,i}$: Coeficiente de transferencia de calor por radiación entre la cubierta más externa y el ambiente o cielo [$\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$].

El coeficiente de pérdidas se ve afectado de manera general por la cantidad de cubiertas, aunque aspectos como los materiales y acabados de las superficies influyen sobre las resistencias por radiación; mientras que factores como el fluido entre los espacios de las cubiertas y la distancia entre las mismas, afectan a

la parte convectiva. Los datos experimentales demuestran que el coeficiente convectivo con el ambiente o coeficiente de viento $h_{c,n}$ es, en casi todos los casos, el mayor de todos los factores h_c o h_r (convectivos o radiantes). Dado que el factor de pérdida total calcula un promedio de los coeficientes, a menos que no existan cubiertas o que otro factor sea mayor, U_L será, a lo mucho, igual que $h_{c,n}$.

El coeficiente de pérdida convectivo debido al viento $h_{c,n}$ se puede estimar a partir de varios modelos, por ejemplo, Sparrow *et al.* [1979] desarrollaron uno para superficies planas en túneles de viento, y en donde proponen una relación entre los números de Nusselt, Reynolds y Prandtl. Otro caso como el de Mitchell [1976], quien estima al factor de pérdida en función de variables conocidas como la velocidad y una longitud característica. Estos y otros modelos entregan resultados alrededor de los 5 W/(m²-K) para bajas velocidades donde la convección natural es predominante, mientras que, en flujos forzados, algunos modelos entregan valores de hasta 25 W/(m²-K). Si existe una sola cubierta traslúcida, el coeficiente de pérdidas global U_L puede llegar a ser menos de la mitad de $h_{c,n}$, aun para valores elevados de este último [Duffie y Beckman, 2013].

2.2. Caracterización de los nanofluidos

Aunque el término *nanofluido* se mencionó anteriormente, aún no ha sido descrito correctamente, para ello es preciso saber que una solución o suspensión coloidal es una mezcla de partículas insolubles sobre un medio continuo; con lo anterior en mente, una definición más completa de nanofluido sería: solución coloidal de partículas sólidas de tamaño nanométrico y alta conductividad térmica, dispersas en un fluido básico convencional. Es una técnica pasiva de incremento de transferencia de calor, pues no involucra la inyección de energía externa al sistema analizado. Otras ventajas que ofrecen las nanopartículas son [Kumar y Subudhi, 2021]:

- Incremento significativo de la conductividad térmica efectiva.
- Aumento de la estabilidad del fluido.
- Una mayor relación entre la superficie y volumen de las nanopartículas que favorece a la transferencia de calor.
- La acumulación de gránulos y la obstrucción del flujo se ven reducidas cuando las partículas son de tamaño nanométrico.

- Mejora la transferencia de energía debido al aumento del movimiento en las nanopartículas.
- Es posible aplicar esta técnica a sistemas existentes sin necesidad de realizar grandes modificaciones.
- Las propiedades termo-físicas se pueden ajustar según la necesidad del proyecto.

Los nanofluidos se pueden categorizar en función del fluido base: agua, glicol etileno, aceite de motor o aceite de transformadores; en base al material de las nanopartículas: metales, cerámicas, aleaciones o base de carbono; y en categorías especiales como: nanopartículas ferromagnéticas y nanofluidos híbridos (dos o más tipos diferentes de nanopartículas). Además de las bases de clasificación (tipo de fluido y materiales), las propiedades de los nanofluidos dependen de factores como forma y tamaño de las nanopartículas, la concentración, la temperatura de la mezcla, la forma de preparar la solución, la estabilidad de la suspensión, la variación de pH, por mencionar la mayoría. Las propiedades más relevantes en este estudio son la densidad, calor específico, viscosidad y conductividad térmica; pues son utilizadas para describir la dinámica y transferencia de calor en fluidos.

Como sugieren Alawi *et al.* [2018], este estudio considera concentraciones volumétricas de nanopartículas de hasta un 5%, pues más allá de este valor empiezan a generarse sedimentación, y una mezcla heterogénea que conllevaría a considerar el fenómeno de transferencia de masa debido a gradientes de concentración.

2.2.1. Densidad

Pak y Cho [1998] proponen la siguiente expresión matemática para calcular la densidad efectiva:

$$\rho_{nf} = (1 - \psi)\rho_{bf} + \psi\rho_{np} \quad (2.7)$$

Con:

ψ : Concentración volumétrica de nanopartículas.

ρ_{nf} , ρ_{bf} , ρ_{np} : Densidades del nanofluido, fluido base y nanopartícula; respectivamente [kg/m³].

La expresión es un promedio ponderado de las densidades del fluido base y las partículas nanométricas. Pak y Cho [1998] validaron la expresión para

óxido de aluminio Al_2O_3 y dióxido de titanio TiO_2 , con diámetros promedio de nanopartículas entre 13 y 27 nm, y concentraciones volumétricas entre 1 % y 4.5 %. Sus resultados experimentales demuestran una desviación máxima del 0.6 % con el modelo matemático (ec. 2.7), que ocurre para óxido de aluminio a 298 K y una concentración del 3.16 %.

Otros autores reportan resultados experimentales, por ejemplo, Vajjha y Das [2009] realizaron medidas de densidad para varios tipos de nanopartículas (incluido el óxido de aluminio) en glicol y agua, para concentraciones de hasta el 10 %, reportando resultados congruentes con la expresión 2.7. Aunque otros estudios como los de Vajjha y Das [2009] y Saeedinia *et al.* [2012], además de verificar la expresión de Pak y Cho [1998], demuestran una relación de la densidad efectiva con la temperatura, siendo más pronunciado este efecto a bajas temperaturas. A pesar de eso, la ecuación 2.7 es muy acertada al momento de predecir la densidad de la mezcla.

Para $\rho^* = \rho_{np}/\rho_{bf}$, la ecuación 2.7 puede reescribirse como:

$$\rho_{nf} = \rho_{bf} [(1 - \psi) + \psi \rho^*] \quad (2.8)$$

2.2.2. Calor específico

Esta propiedad de los nanofluidos tiene poca investigación teórica y experimental al respecto [Kumar y Subudhi, 2021]. Zhou y Ni [2008] realizaron estudios de nanopartículas de Al_2O_3 en agua como fluido base, para concentraciones entre 0 % y 21.7 %, comparando sus experimentos con los modelos propuestos por Pak y Cho [1998] (ec. 2.9) y Xuan y Roetzel [2000] (ec. 2.10). Otro estudio realizado por parte de Zhou *et al.* [2010] compara los mismos modelos, para nanopartículas de óxido de cobre CuO con tamaño de 25 y 50 nm, y a bajas concentraciones (≤ 0.6 %).

$$c_{p,nf} = (1 - \psi) c_{p,bf} + \psi c_{p,np} \quad (2.9)$$

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \psi)(\rho c_p)_{bf} + \psi(\rho c_p)_{np} \quad (2.10)$$

Para:

$c_{p,nf}$, $c_{p,bf}$, $c_{p,np}$: Calores específicos del nanofluido, fluido base y nanopartícula; respectivamente $[\text{J}/(\text{kg K})]$.

$(\rho c_p)_{nf}$, $(\rho c_p)_{bf}$, $(\rho c_p)_{np}$: Calores específicos por unidad de volumen del nanofluido, fluido base y nanopartícula; respectivamente $[\text{J}/(\text{m}^3 \text{ K})]$.

Aunque ambos modelos predicen correctamente una reducción del calor específico al aumentar la concentración. A temperaturas relativamente elevadas, la expresión (2.9) sobrestima el comportamiento del calor específico, según Vajjha y Das [2009], mientras que la ecuación (2.10) está más acorde con los resultados experimentales. De manera similar que con la densidad, dividimos la expresión más adecuada, entre los valores del fluido base para obtener:

$$(\rho c_p)_{nf} = (\rho c_p)_{bf} \left[(1 - \psi) + \psi \rho^* c_p^* \right] \quad (2.11)$$

Para ρ^* como se definió anteriormente, y $c_p^* = c_{p,np}/c_{p,bf}$.

2.2.3. Viscosidad

La viscosidad de un nanofluido es mayor que la de su fluido base, aunque si las partículas son del orden de micras, la viscosidad es comparativamente aún mayor. Esto sugiere que las nanopartículas ejercen poca influencia en los fenómenos de flujos como en la convección forzada, aunque en los casos de movimiento lento o nulo, como puede ser en la convección natural, la viscosidad obtiene mayor relevancia y su comportamiento merece ser estudiado, por lo que existen muchos estudios teóricos y experimentales al respecto. Los modelos matemáticos se basan principalmente en el movimiento Browniano, interacciones hidrodinámicas y efectos electroviscosos [Kumar y Subudhi, 2021].

El término Browniano proviene del biólogo escocés Robert Brown, quien observó el movimiento en zigzag de los granos de polen en el agua. Este tipo de movimiento empezó a ser investigado por Einstein quien formuló correlaciones para la viscosidad de soluciones con partículas esféricas. Aunque Kunitz [1926] no estaba de acuerdo con las ecuaciones de Einstein, y formuló sus propias expresiones para describir el mismo fenómeno. El movimiento Browniano describe interacciones entre partículas, mas la interacción hidrodinámica entre el medio disperso y de dispersión se estudia por separado. Por ejemplo, Brinkman [1952] derivó una expresión (ec. 2.12) que evalúa a la mezcla como un medio continuo, concluyendo que existe un incremento de la viscosidad con la concentración. El efecto de la electroviscosidad surge de la aparición de cargas debido a la ionización que sufren partículas sólidas sumergidas en líquidos, este fenómeno produce dos capas de iones que afectan al fluido que esta en contacto con la superficie externa de las partículas.

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = \frac{1}{(1 - \psi)^{2.5}} \quad (2.12)$$

Con:

μ_{nf} , μ_{bf} : Viscosidades dinámicas del nanofluido y del fluido base, respectivamente [Pa-s o kg/(m s)].

2.2.4. Conductividad térmica

De forma similar que con la viscosidad, existen varios estudios teóricos y experimentales de la conductividad térmica en nanofluidos. Alawi *et al.* [2018] hacen una buena labor resumiendo parte de esos estudios. Un fenómeno que ocurre con elementos sólidos sumergidos, y que está corroborado por Yu *et al.* [2000], es la aparición de una nanocapa de fluido que se adhiere a la superficie de la nanopartícula, esta capa tiene propiedades diferentes al sólido y el fluido base, aunque se encuentra dentro del rango delimitado por las mismas. Timofeeva *et al.* [2008] compararon resultados experimentales de Al_2O_3 en agua y etilenglicol con lo predicho por la teoría de medio efectivo (ec. 2.13), dicha teoría sobrestima la conductividad, y puede servir como límite superior de esta propiedad.

$$\frac{k_{nf}}{k_{bf}} = 1 + 3\psi \quad (2.13)$$

Para:

k_{nf} , k_{bf} : Conductividades térmicas del nanofluido y del fluido base, respectivamente [W/(m K)].

Este modelo es certero para óxido de aluminio Al_2O_3 de tamaño de nanopartícula entre 11 a 40 nm, siendo más preciso para bajas concentraciones (cercanas al 2 %), en especial para el glicol etileno.

2.3. Mecánica de medios porosos

2.3.1. Volumen elemental representativo

Las ecuaciones de conservación para este tipo de material están derivadas bajo la idea que, desde una perspectiva espacial, se puede calcular una variable macroscópica (llámese momento, energía, etc.) como un promedio apropiado a través de un *volumen elemental representativo* lo suficientemente grande [Nield y Bejan, 2017].

La velocidad promedio que se hace respecto de **todo el volumen que ocupa el elemento poroso representativo**, se conoce como velocidad de filtración, superficial, de densidad de flujo volumétrico, o de Darcy. Por otro

lado, si el promedio se hace respecto a sólo el volumen de fluido, tenemos la velocidad promedio intrínseca del mismo.

Podemos relacionar ambas velocidades con la expresión de Dupuit Forchheimer:

$$\mathbf{v} = \phi \mathbf{V} \quad (2.14)$$

Donde:

ϕ → Porosidad del medio poroso.

\mathbf{v} → Vector de velocidad de filtración o de Darcy [m/s].

\mathbf{V} → Vector de velocidad intrínseca o real del fluido [m/s].

Definiendo a la porosidad como la relación entre el volumen vacío y el volumen total ocupado por el medio poroso. Note que dentro del volumen elemental se debe seguir cumpliendo la ecuación de continuidad descrita para un medio poroso como [Nield y Bejan, 2017]:

$$\phi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) = 0 \quad (2.15)$$

Con:

ρ_f → Densidad del fluido de trabajo [kg/m³].

Considerando que el fluido en el medio poroso es incompresible, la ecuación se puede expresar nada más como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.16)$$

En el caso de un sistema tridimensional en coordenadas cartesianas, la expresión anterior puede expandirse como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.17)$$

Para:

u, v, w → Velocidades de filtración en las direcciones x, y, z ; respectivamente [m/s].

2.3.2. Ley de Darcy

En 1856, Henry Darcy realizó experimentos de hidrología en materiales porosos. Sus estudios a través de flujo unidireccional y en estado estacionario en un medio uniforme se resumen de mejor manera con la expresión siguiente:

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.18)$$

Con:

$K \rightarrow$ Permeabilidad del medio poroso [m^2].

$P \rightarrow$ Presión intrínseca del fluido dentro del medio [Pa o $\text{kg}/(\text{m s}^2)$].

Por lo que $\partial P/\partial x$ representa el gradiente de la presión en la dirección x .

La permeabilidad no es una propiedad del fluido, sino del medio, por lo que a veces suele llamarse *permeabilidad específica o intrínseca*. Para un caso más general, donde la permeabilidad varía con la dirección analizada, la ley de Darcy se puede extender a tres dimensiones:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\mu} \mathbf{K} \cdot \nabla P \quad (2.19)$$

Para \mathbf{K} un tensor de segundo grado que describe la permeabilidad en varias direcciones. En el caso de tener permeabilidad isotrópica, esta toma valor constante, y considerando fuerzas de cuerpo proporcionales al vector de aceleración de la gravedad \mathbf{g} , la expresión de Darcy se puede escribir como:

$$-\nabla P + \rho_f \mathbf{g} = \frac{\mu}{K} \mathbf{v} \quad (2.20)$$

2.3.3. Efectos inerciales

Al considerar efectos inerciales en la ecuación de momento, la expresión de Darcy se puede representar como [Wooding, 1957]:

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P - \frac{\mu}{K} \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{g} \quad (2.21)$$

Si aplicamos la relación de Dupuit-Forchheimer (ec. 2.14), y consideramos además que el fluido es incompresible y de porosidad invariable en cualquier dirección, entonces:

$$\rho_f \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P - \frac{\mu}{K} \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{g} \quad (2.22)$$

La expresión anterior es parecida a la ley de conservación de momento lineal que se presenta en las ecuaciones de Navier-Stokes, del lado izquierdo tenemos el cambio instantáneo de momentum, y del lado derecho las fuerza que actúan en el sistema, donde el elemento de Darcy vendría a actuar como una fuerza viscosa o de superficie.

2.3.4. Ecuación de Forchheimer

Considere un número de Reynolds Re_p cuya longitud característica es el diámetro promedio de las partículas (cuando el medio poroso se construye como una piscina de pelotas diminutas) o el diámetro promedio de los poros; entonces la ley de Darcy es válida para valores de Re_p menores a la unidad. Aunque a manera que aumenta Re_p se produce una transición en el flujo, este cambio se produce lentamente, contrario al cambio violento entre los flujos laminar y turbulento.

Ward [1964] hace más evidente el cambio entre los regímenes darciano y no-darciano, al comparar en un flujo unidireccional isotérmico dentro de un medio poroso inundado, el factor de arrastre f_K , que utiliza como escala de longitud a $K^{1/2}$, y el número de Reynolds Re_K , que también utiliza la misma escala longitudinal. Es evidente de la figura 2.2, que cuando el número Re_K se acerca a la unidad, el factor f_K se desvía del comportamiento lineal que presenta previamente, y para valores mayores a 10, el arrastre del flujo no varía significativamente con el número de Reynolds.

Nield y Bejan [2017] atribuyen esta transición a que el arrastre de forma, debido a la diferencia de presión por obstáculos sólidos, es de la misma magnitud que el arrastre debido a la fricción con las superficies. De acuerdo a Joseph *et al.* [1982], la expresión de Darcy se debe modificar como:

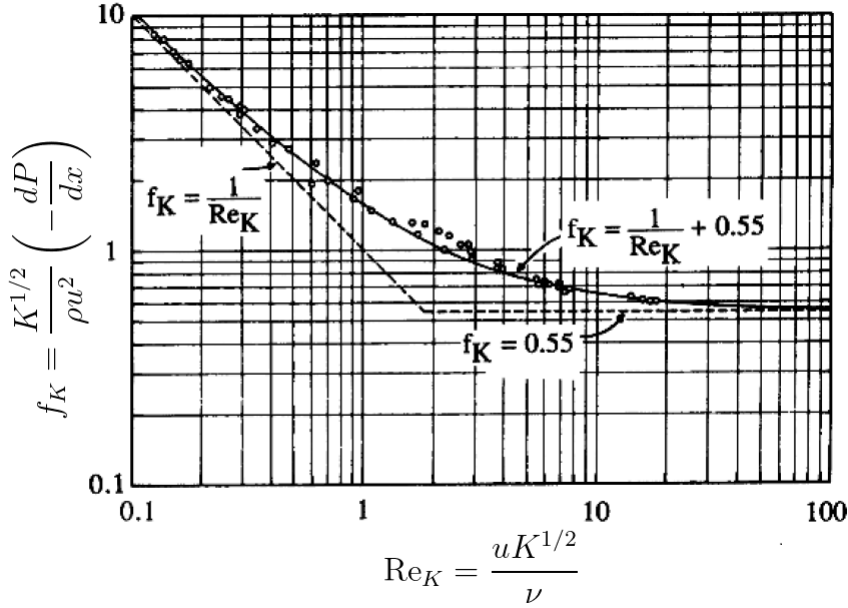
$$-\nabla P + \rho_f \mathbf{g} = \frac{\mu}{K} \mathbf{v} + \frac{\rho_f c_F}{\sqrt{K}} |\mathbf{v}| \mathbf{v} \quad (2.23)$$

Donde c_F es un número adimensional relacionado con el arrastre, conocido como coeficiente de Forchheimer. Ward [1964] consideraba que este número era una constante universal e igual a 0.55, aunque desde antes Forchheimer [1901] había previsto su dependencia con las características del medio, proponiendo la siguiente relación:

$$c_F = \frac{1.75}{\sqrt{150} \phi^3} \quad (2.24)$$

Por otra parte, Beavers *et al.* [1973] demostraron que las paredes circundantes que encierran a una piscina o cama de esferas diminutas, que actúa como

Figura 2.2: Transición entre los flujos de Darcy y Forchheimer para un flujo unidireccional en un medio poroso isotérmico [Ward, 1964]



medio poroso, tienen un efecto sobre el valor del parámetro c_F , y lo cuantificaron de la siguiente manera:

$$c_F = 0.55 \left(1 - 5.5 \frac{d}{D_e} \right) \quad (2.25)$$

Para d el diámetro de las esferas, y D_e como el diámetro equivalente de la cama, que se determina con las dimensiones del mismo. Para w el ancho y h la altura:

$$D_e = \frac{2wh}{w + h} \quad (2.26)$$

Para valores de Re_K cercanos a la unidad o mayor, la incorporación del término de Forchheimer es necesaria para compensar el arrastre producido en el medio poroso. Una explicación al fenómeno de la transición de un flujo de Darcy a uno de Darcy-Forchheimer es que, a manera que la velocidad aumenta, el arrastre debido a la obstrucción debido a la parte sólida del medio poroso es tan grande que comienzan a aparecer los primeros remolinos en el fluido, similar a los que se forman cuando un flujo baja súbitamente un escalón, aunque estos remolinos nunca se desarrollan por completo debido a que no hay espacio suficiente dentro del medio.

2.3.5. Ecuación de Brinkman

Existe una expresión alternativa a la ley de Darcy, conocida como ecuación de Brinkman que, ignorando los efectos inerciales, tiene la forma de [Nield y Bejan, 2017]:

$$-\nabla P + \rho_f \vec{g} = \frac{\mu}{K} \mathbf{v} - \tilde{\mu} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.27)$$

Donde $\tilde{\mu}$ es la viscosidad efectiva del fluido. Esta expresión incluye un término Laplaciano equivalente al encontrado en las ecuaciones de Navier-Stokes, y se utiliza bajo alguna de las siguientes circunstancias:

- Cuando se busca comparar un fluido incompresible que fluye en un medio poroso y en un medio sin obstrucciones, en este último, el comportamiento del movimiento está descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes.
- En sistemas conjugados de medio poroso y flujo viscoso, es decir, cuando ambos medios existen y se encuentran de forma adyacente uno de otro.
- En medios de alta porosidad, donde el fluido ocupa una gran parte del espacio del dominio del flujo. No existe un consenso para este criterio, pues de acuerdo con Lundgren [1972], una porosidad mayor de 0.6 es considerada suficientemente grande; por otro lado, Rubinstein [1986] concluye que la incorporación del término de Brinkman es válida para valores de ϕ mayores que 0.8, mientras que Durlofsky y Brady [1987] consideran $\phi > 0.95$ como criterio de validez.
- Para evaluar condiciones de no deslizamiento cerca de superficies.
- Cuando la capa límite que delimita la región donde actúan efectos de pared y que es igual a: $(\tilde{\mu}K/\mu)^{1/2}$, es de valor significativo, en comparación con la escala de longitud macroscópica característica, que en el caso de ductos suele ser el diámetro del mismo.

Brinkman [1949] en un inicio planteó que ambas viscosidades μ y $\tilde{\mu}$ (real y efectiva) eran iguales, pero en general esto no es cierto. Ochoa-Tapia y Whitaker [1995] realizaron un análisis matemático de promedio volumétrico y determinó que:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\phi} \quad (2.28)$$

Dado que la porosidad adquiere valores entre 0 y 1, la expresión anterior es congruente con el criterio de la relación de viscosidades, que siempre debe ser mayor que la unidad [Martys *et al.*, 1994].

2.3.6. Ecuación de conservación de momento

Al juntar las ecuaciones anteriores, es posible construir un modelo inercial Darcy-Forchheimer-Brinkmann para propiedades constantes [Hsu y Cheng, 1990]:

$$\rho_f \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P - \frac{\mu}{K} \mathbf{v} - \frac{\rho_f c_F}{\sqrt{K}} |\mathbf{v}| \mathbf{v} + \frac{\mu}{\phi} \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{g} \quad (2.29)$$

2.3.7. Ecuación de conservación de energía térmica

Asumiendo que tanto el fluido que inunda el medio poroso como la matriz sólida del mismo se encuentran a la misma temperatura local, es decir, se cumple con la condición de equilibrio térmico local (LTE, por sus siglas en inglés), entonces la ecuación conservación de la energía térmica queda como [Nield y Bejan, 2017; Vafai, 2005]:

$$(\rho c_p)_{eff} \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_p)_f (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_f = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T_f) + \Phi \quad (2.30)$$

Para:

T_f → Campo de temperatura local tanto del fluido como de la matriz sólida [K].

k_{eff} → Conductividad térmica efectiva del medio poroso [W/(m K)].

Φ → Potencia generada por unidad de volumen debido al efecto de la disipación viscosa [W/m³].

En el caso de colectores solares es común considerar velocidades de flujo del orden de 10⁻² m/s, lo cual es relativamente bajo, por lo cual se asume que las fases sólida y fluido del medio poroso entran en contacto el tiempo suficiente como para que la condición LTE sea válida.

Cabe mencionar que el término de disipación viscosa Φ está definido en

coordenadas cartesianas xyz como [Al-Hadhrami *et al.*, 2003; Vafai, 2005]:

$$\begin{aligned} \Phi = & \left(\frac{\mu}{K} + \frac{\rho_f c_F}{\sqrt{K}} |\mathbf{v}| \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\mu}{\phi} (\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) = \\ & \left[\frac{\mu}{K} + \frac{\rho_f c_F}{\sqrt{K}} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right] (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\mu}{\phi} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.31) \end{aligned}$$

Nield [2000] realizó un análisis de escala y determinó que para un parámetro $N \ll 1$ la disipación viscosa era despreciable, siendo dicho parámetro inversamente proporcional al número de Darcy K/L_c^2 , con L_c como una longitud característica. Es decir que para valores pequeños de Darcy, que son la mayoría de casos, la disipación viscosa es relevante.

Conductividad efectiva con nanofluido

La conductividad efectiva del nanofluido $(k_{eff})_{nf}$ en el medio poroso se determina por el aporte de la parte sólida (matriz) k_s y el nanofluido que llena el medio poros k_{nf} :

$$(k_{eff})_{nf} = (1 - \phi) k_s + \phi k_{nf} \quad (2.32)$$

Sustituyendo el modelo de Timofeeva *et al.* [2008]:

$$(k_{eff})_{nf} = (1 - \phi) k_s + \phi k_{bf}(1 + 3\psi) \quad (2.33)$$

Con la conductividad del fluido base como factor común:

$$(k_{eff})_{nf} = k_{bf}[(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\psi)] \quad (2.34)$$

Para $k^* = k_s/k_{bf}$. Por otra parte, para poder comparar con otros autores es preciso definir la conductividad del medio poroso sin nanofluido, es decir, sólo fluido base $(k_{eff})_{bf}$:

$$(k_{eff})_{bf} = (1 - \phi) k_s + \phi k_{bf} \quad (2.35)$$

$$(k_{eff})_{bf} = k_{bf}[(1 - \phi) k^* + \phi] \quad (2.36)$$

Capítulo 3

Modelo Teórico

3.1. Alcance e hipótesis de investigación

El presente estudio es de tipo teórico, es decir, no contempla la elaboración de modelos experimentales, principalmente por la limitación en los tiempos de entrega. Esto impide la completa corroboración de los modelos teóricos, pues literatura de índole experimental es escasa para el concreto caso de estudio.

Los casos se evaluarán en estado estacionario, sin embargo, es posible que para la solución numérica sea necesario desarrollar modelos pseudo-estacionarios.

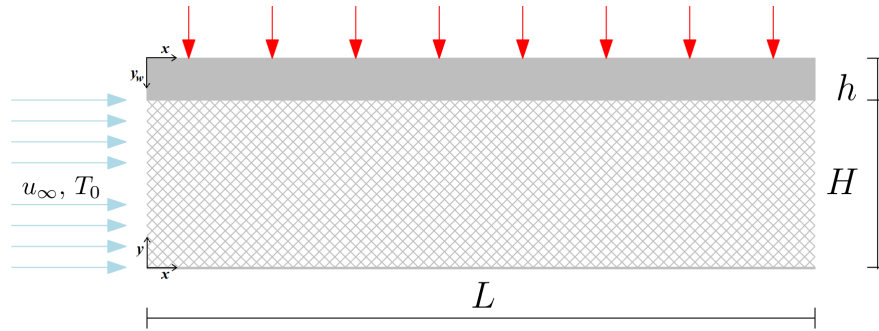
La hipótesis que se espera corroborar o refutar es que existe un aumento en la temperatura promedio del fluido a la salida del colector, tras incorporar las dos técnicas pasivas de incremento de la transferencia de calor entre el sol y el fluido de trabajo, siendo estas la suspensión de nanopartículas en el fluido base y la obstrucción del canal plano con un medio poroso; en comparación del caso de canal vacío y fluido sin partículas dispersas.

A continuación se detalla el problema físico en sí, y la metodología tras su desarrollo.

3.2. Descripción del modelo

En la figura 3.1 se presenta de manera esquemática el modelo teórico a analizar, este consiste de un canal poroso bidimensional (área cuadrículada), de longitud L y altura H . El flujo de nanofluido entra por la parte izquierda del canal (flechas celestes) a una temperatura y velocidad uniforme. Por otra parte, la placa colectora de la misma longitud L y de espesor h está representada por el

Figura 3.1: Esquema del modelo a analizar



rectángulo sólido gris, y recibe calor por radiación en su parte superior (flechas rojas).

A continuación de resumen todas las consideraciones y suposiciones realizadas:

- Modelo Darcy-Forchheimer-Brinkmann en dos dimensiones.
- Flujo incompresible en estado estacionario completamente desarrollado.
- Propiedades constantes del fluido base, matriz porosa y nanopartículas.
- Efectos de entrada despreciables.
- Distancia H (ver fig. 3.1) lo suficientemente grande ($> 100\mu\text{m}$), para no considerar efectos de deslizamiento en las paredes.
- Concentración homogénea, uniforme e invariable de nanopartículas en el fluido.
- Sistema orientado horizontalmente, por lo que no hay fuerzas de gravedad en la dirección longitudinal.
- Temperatura y velocidad uniformes en la entrada.
- Aislado adiabáticamente en la parte inferior del sistema.
- Sin saltos de temperatura entre la parte sólida y el fluido en el medio poroso, es decir, se tiene condición de equilibrio térmico local.
- Superficies difusas para las cubiertas y la cara externa de la placa colectora. Y además, opaca para el caso de la cubierta.

3.2.1. Delimitación del dominio

El problema está dividido en dos dominios:

- Flujo de nanofluido a través del canal poroso.
- Placa plana sólida que absorbe la radiación solar.

Cada uno con su propio marco de referencia. Para el caso del flujo, las condiciones de frontera para la temperatura no son simétricas, como se verá más adelante, por lo que es más conveniente colocar el origen a la entrada del canal en su parte inferior, con el eje x en la dirección longitudinal, y el eje y , transversal. Mientras que en la placa, el origen está en la parte superior izquierda, con la misma configuración en el eje x , y con el eje transversal y_w apuntado en dirección opuesta al eje y del flujo (ver Fig. 3.1). Con los dominios delimitados como:

$$x \in (0, L) \tag{3.1}$$

$$y \in (0, H) \tag{3.2}$$

$$y_w \in (0, h) \tag{3.3}$$

3.3. Ecuaciones de conservación

3.3.1. Ecuación de continuidad

Para un sistema bidimensional y las suposiciones mencionadas, la ecuación (2.16) se expresa como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Si se considera cualquier volumen elemental representativo, la velocidad transversal promedio será igual a cero, pues no existen fuerzas que promuevan al flujo en esa dirección, además, el canal está delimitado por su parte superior e inferior por superficies impermeables, de manera que el flujo no puede moverse en la dirección y . Por lo tanto:

$$v = 0, \text{ para todo } x, y \tag{3.4}$$

Entonces, la ecuación de continuidad se puede reducir a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.5}$$

3.3.2. Conservación de momento

La velocidad u no tiene variación longitudinal, sólo transversal, es decir, la velocidad en x es sólo función de y :

$$u = u(y) \quad (3.6)$$

La ecuación 2D de momento- x (ec. 2.29) queda como:

$$\begin{aligned} \rho_{nf} \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu_{nf}}{K} u - \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} u^2 + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho_{nf} g_x \end{aligned}$$

Con la expresión simplificada de la continuidad (ec. 3.5), más las consideraciones enlistadas en la sección 3.2, la ecuación anterior se puede simplificar a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\mu_{nf}}{K} u - \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} u^2 + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) \quad (3.7)$$

Todos los términos corresponden a fuerzas de superficie. Del lado izquierdo se encuentra al impulsor del flujo: el gradiente de la presión, y por la derecha los términos de Darcy, Forchheimer y Brinkman, que están relacionados con la disipación del movimiento en un canal obstruido.

3.3.3. Conservación de energía en el medio poroso

A partir de la ecuación (2.30), para T_{nf} como la temperatura local de nanofluido, en estado estacionario y en dos dimensiones xy , con propiedades constantes, se obtiene:

$$(\rho c_p)_{nf} \left(u \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} + v \frac{\partial T_{nf}}{\partial y} \right) = (k_{eff})_{nf} \left(\frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial y^2} \right) + \Phi$$

Simplificando para velocidad $v = 0$:

$$(\rho c_p)_{nf} u \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} = (k_{eff})_{nf} \left(\frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (3.8)$$

Y para la disipación viscosa en dos dimensiones:

$$\Phi = \left(\frac{\mu_{nf}}{K} + \frac{\rho_{nf} C_F}{\sqrt{K}} \sqrt{u^2 + v^2} \right) (u^2 + v^2) + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

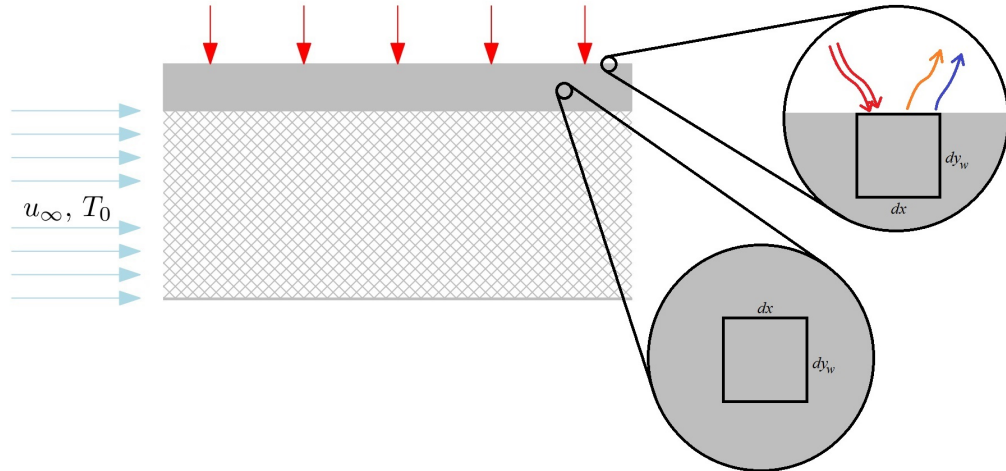
Por continuidad y $v = 0$, la expresión se reduce a:

$$\Phi = \frac{\mu_{nf}}{K} u^2 + \frac{\rho_{nf} C_F}{\sqrt{K}} u^3 + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3.9)$$

Las ecuaciones desarrolladas en estas tres últimas sub-secciones aplican únicamente al dominio del flujo, es decir para $x \in [0, L]$ y $y \in [0, H]$. La siguiente sub-sección describe el comportamiento de la temperatura en un sólido inmóvil, que es el caso de la placa colectora plana.

3.3.4. Conservación de energía en la placa colectora

Figura 3.2: Elementos diferenciales dentro de la placa y en el borde con el exterior



Para gases y sólidos semitransparentes, la radiación es un fenómeno volumétrico, esto quiere decir que el calor emitido por radiación por un volumen

delimitado es producto del efecto combinado de las diversas emisiones que ocurren de manera local dentro del mismo. Por otra parte, la radiación emitida por las moléculas de la mayoría de sólidos y líquidos, es fuertemente absorbida por las moléculas adyacentes, a excepción de aquellas que se encuentran en la interfaz con otro medio, en estos casos, la radiación se considera como un fenómeno superficial, lo anterior cobra sentido si consideramos que, de acuerdo a Incropera *et al.* [2007], la radiación en sólidos y líquidos tiene efecto sobre una distancia de $1\mu\text{m}$ de la superficie expuesta. Por tales motivos, ya que la placa colectora es un sólido opaco, el mecanismo de transferencia de calor por radiación no está involucrado en el comportamiento de la energía en el interior de la placa, sino más bien, se considera un fenómeno de superficie, y es evaluado como una condición de frontera.

Si consideramos un elemento diferencial dentro del sólido inmóvil (ver Fig. 3.2) evaluado en **estado estacionario**, toda la energía que entra al elemento debe ser la misma que sale. Bajo el supuesto anterior, Jiji [2009] concluye que el comportamiento de la temperatura se debe rigir por la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot (k_w \nabla T_w) = 0$$

Donde:

k_w : Conductividad térmica de la pared [W/(m K)].

T_w : Campo de temperatura de la placa colectora sólida [K].

Para el caso en dos dimensiones xy , y con propiedades constantes, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.10)$$

Que se reduce a:

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.11)$$

Salvo que resulta importante para la definición de las condiciones de frontera, realizar un cambio de variables. Considere la nueva variable y_w :

$$y_w = H + h - y \quad (3.12)$$

De forma que cuando $y = H + h$, entonces $y_w = 0$. Y que para $y = H$, $y_w = h$. La variación en y_w queda como:

$$dy_w = -dy \quad (3.13)$$

Evaluado en el segundo término de la expresión (3.11):

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_w}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{-\partial y_w} \left(\frac{\partial T_w}{-\partial y_w} \right) = \frac{\partial^2 T_w}{\partial y_w^2} \quad (3.14)$$

Y la expresión de la ecuación de energía para el cambio de variable de la coordenada vertical se expresa como:

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y_w^2} = 0 \quad (3.15)$$

Es importante recalcar que esta expresión es sólo válida para el dominio de la placa, es decir que la temperatura es solo función de las variables $T_w(x, y_w)$.

3.4. Condiciones de frontera

El conjunto de ecuaciones (3.5)-(3.15) están sujetas a ciertas condiciones de fronteras que se describen a continuación.

3.4.1. Restricciones en el flujo

Por condición de no-deslizamiento entre el nanofluido en el medio poroso y las paredes en los extremos superior e inferior, la velocidad de filtración $u(y)$ en esos puntos será:

$$u(0) = u(H) = 0 \quad (3.16)$$

3.4.2. Condiciones a la entrada

En la entrada ($x = 0$) la velocidad del flujo es igual a u_∞ , y al evaluarla en la expresión (3.7) se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\mu_{nf}}{K} u_\infty - \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} u_\infty^2 + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{d^2 u_\infty}{dy^2} \right) \quad (3.17)$$

Con u_∞ como uniforme y constante, la variación en y desaparece, quedando:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\mu_{nf}}{K} u_\infty - \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} u_\infty^2 \equiv \text{constante} \quad (3.18)$$

Al introducir la expresión anterior en la ecuación de momento (3.7), se obtiene:

$$-\frac{\mu_{nf}}{K}u_{\infty} - \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}}u_{\infty}^2 = -\frac{\mu_{nf}}{K}u - \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}}u^2 + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right) \quad (3.19)$$

Despejando el término viscoso (Brinkman):

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right) = \frac{\mu_{nf}}{K} (u - u_{\infty}) + \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} (u^2 - u_{\infty}^2) \quad (3.20)$$

3.4.3. Condiciones/Restricciones de la temperatura

La temperatura del nanofluido en la entrada, similar a la velocidad de flujo, también es uniforme y constante. Por simplicidad, se puede suponer que el fluido entra a la misma temperatura que el ambiente, T_{∞} :

$$T_{nf}(0, y) = T_{\infty} \quad (3.21)$$

Para valores grandes de longitud de placa, se espera que a la salida la temperatura se haya desarrollado por completo y que no varíe. En términos matemáticos esto se describe como:

$$\left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.22)$$

Un caso similar a la condición de equilibrio térmico se puede suponer entre la placa colectora y el canal poroso, es decir, no existen saltos de temperatura entre los dos medios, por lo que su valor será el mismo en la interfaz:

$$T_{nf}(x, H) = T_w(x, h) \quad (3.23)$$

Y dado que en una superficie, al tener volumen cero, no puede almacenar energía, el flujo de calor que sale de la placa sólida es el mismo que entra al medio poroso:

$$(k_{eff})_{nf} \left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial y} \right|_{y=H} = -k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y_w} \right|_{y_w=h} \quad (3.24)$$

Note que en la expresión anterior, dado que los ejes y y y_w tienen direcciones opuestas, se ha colocado un signo negativo en el término de la derecha.

Por simplicidad del modelo, se asume que del lado derecho e izquierdo de la pared colectora se encuentra aislado adiabáticamente:

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T_w}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.25)$$

Mientras que los colectores solares planos suelen estar aislados por su parte de abajo, por lo que en nuestro modelo se asume condición adiabática en la cara inferior del medio poroso. Por tanto:

$$\left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.26)$$

3.4.4. Condición en la superficie externa de la placa colectora

Por ley de Fourier, el flujo de calor que entra q_e'' por la cara exterior, cuando $y_w = h$, es igual a:

$$q_e'' = -k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y_w} \right|_{y_w=h} \quad (3.27)$$

Basado en la ecuación (2.1), en el punto $y_w = h$, ya que el fenómeno de radiación es superficial, al igual que la pérdida poel calor que entra se puede estimar de la siguiente forma:

$$-k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y_w} \right|_{y_w=0} = S - U_L [T_w(x, 0) - T_\infty] \quad (3.28)$$

Donde los términos S y U_L fueron discutidos en las secciones 2.1.1 y 2.1.2, respectivamente.

3.5. Orden de Magnitud

Para proceder con la forma adimensional de las ecuaciones de conservación y las condiciones de frontera, es preciso escalar correctamente las variables involucradas, las más sencillas son las relacionadas con las dimensiones del sistema:

$$x \sim L \quad (3.29)$$

$$y \sim H \quad (3.30)$$

$$y_w \sim h \quad (3.31)$$

La variable de velocidad de flujo es del orden de magnitud de la velocidad a la entrada:

$$u \sim u_{\infty} \quad (3.32)$$

En cuanto a las temperaturas, es más conveniente definir las como una diferencia respecto a una temperatura de referencia, que en este caso sería:

$$\Delta T_{nf} = T_{nf} - T_{\infty} \quad (3.33)$$

$$\Delta T_w = T_w - T_{\infty} \quad (3.34)$$

Ahora es importante escalar estas diferencias de temperatura con una de referencia o característica ΔT_c .

$$\Delta T_{nf} \sim \Delta T_c \quad (3.35)$$

$$\Delta T_w \sim \Delta T_c \quad (3.36)$$

Siendo que la transferencia de calor en la placa es más relevante, por ley de Fourier se tiene:

$$q_c \sim k_w \frac{\Delta T_c}{h} \quad (3.37)$$

Para:

q_c : Flujo de calor característico [W/m²].

Considerando a S como el flujo de calor de referencia, se tiene:

$$\Delta T_c \sim \frac{S h}{k_w} \quad (3.38)$$

3.6. Normalización de ecuaciones

3.6.1. Definición de variables adimensionales

Establecemos las siguientes variables adimensionales en base a las escalas definidas en la sub-sección anterior:

$$X = \frac{x}{L} \quad (3.39)$$

$$Y = \frac{y}{H} \quad (3.40)$$

$$Y_w = \frac{y_w}{h} \quad (3.41)$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_\infty} \quad (3.42)$$

$$\theta_{nf} = \frac{T_{nf} - T_\infty}{\Delta T_c} \quad (3.43)$$

$$\theta_w = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T_c} \quad (3.44)$$

Por tanto, variaciones en los variables independientes respecto a sus contrapartes normalizadas quedan como:

$$\delta x = L \delta X \quad (3.45)$$

$$\delta y = H \delta Y \quad (3.46)$$

$$\delta y_w = h \delta Y_w \quad (3.47)$$

$$\delta u = u_\infty \delta \tilde{u} \quad (3.48)$$

$$\delta T_{nf} = \Delta T_c \delta \theta_{nf} \quad (3.49)$$

$$\delta T_w = \Delta T_c \delta \theta_w \quad (3.50)$$

3.6.2. Reducción de la ecuación de momento

Traemos a nueva cuenta la ecuación (3.20):

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) = \frac{\mu_{nf}}{K} (u - u_\infty) + \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} (u^2 - u_\infty^2)$$

Y sustituimos las variables dependientes e independientes, en función de un valor característico por su equivalente sin dimensiones:

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{u_\infty}{H^2} \right) \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} \right) = \frac{\mu_{nf}}{K} (u_\infty \tilde{u} - u_\infty) + \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} (u_\infty^2 \tilde{u}^2 - u_\infty^2)$$

Por factor común en el lado derecho de la ecuación:

$$\frac{\mu_{nf} u_\infty}{\phi H^2} \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} \right) = \frac{\mu_{nf} u_\infty}{K} (\tilde{u} - 1) + \frac{\rho_{nf} c_F u_\infty^2}{\sqrt{K}} (\tilde{u}^2 - 1)$$

Multiplicando toda la expresión por $\phi H^2 / (\mu_{nf} u_\infty)$:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} = \frac{\phi H^2}{K} (\tilde{u} - 1) + \frac{\rho_{nf} \phi c_F u_\infty H^2}{\mu_{nf} \sqrt{K}} (\tilde{u}^2 - 1)$$

Y sustituyendo el modelo de viscosidad (eq. 2.12) y de densidad (eq. 2.8):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} &= \frac{\phi H^2}{K} (\tilde{u} - 1) + \\ &\quad (1 - \psi)^{2.5} [(1 - \psi) + \psi \rho^*] \frac{\rho_{bf} \phi c_F u_\infty H}{\mu_{bf}} \frac{H}{\sqrt{K}} (\tilde{u}^2 - 1) \end{aligned}$$

Definimos las siguientes cantidades adimensionales:

$$\text{Da} = \frac{K}{H^2} \quad (3.51)$$

$$\text{F}_{nf} = (1 - \psi)^{2.5} [(1 - \psi) + \psi \rho^*] \text{F}_{bf} \quad (3.52)$$

Para:

$$\text{F}_{bf} = \frac{\rho_{bf} \phi c_F u_\infty H}{\mu_{bf}} \quad (3.53)$$

Por lo que, la ecuación de momento se puede expresar como:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} = \phi \text{Da}^{-1} (\tilde{u} - 1) + (1 - \psi)^{2.5} [(1 - \psi) + \psi \rho^*] \text{F}_{bf} \text{Da}^{-1/2} (\tilde{u}^2 - 1) \quad (3.54)$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} = \phi \text{Da}^{-1} (\tilde{u} - 1) + \text{F}_{nf} \text{Da}^{-1/2} (\tilde{u}^2 - 1) \quad (3.55)$$

Es decir que la velocidad adimensional U es función de Y , para Y entre 0 y 1:

$$\tilde{u} = \tilde{u}(Y) \text{ para } Y \in (0, 1) \quad (3.56)$$

3.6.3. Reducción de la ecuación de energía en flujo

Sustituyendo la expresión de disipación viscosa (eq. 3.9) en la ecuación de temperatura para el nanofluido en el medio poroso (eq. 3.8):

$$\begin{aligned} \rho_{nf} c_{p,nf} u \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} = (k_{eff})_{nf} \left(\frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\mu_{nf}}{K} u^2 + \frac{\rho_{nf} c_F}{\sqrt{K}} u^3 + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Reemplazando las variables dependientes e independientes con su forma adimensional:

$$\begin{aligned} \rho_{nf} c_{p,nf} u_\infty \frac{\Delta T_c}{L} \tilde{u} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} = (k_{eff})_{nf} \left(\frac{\Delta T_c}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} + \frac{\Delta T_c}{H^2} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} \right) + \\ + \frac{\mu_{nf} u_\infty^2}{K} \tilde{u}^2 + \frac{\rho_{nf} c_F u_\infty^3}{\sqrt{K}} \tilde{u}^3 + \frac{\mu_{nf} u_\infty^2}{\phi H^2} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Multiplicando el resultado por $H^2/(\Delta T_c (k_{eff})_{nf})$. Se considera cada término comenzando por el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{nf} c_{p,nf} u_\infty \Delta T_c}{L} \left(\frac{H^2}{\Delta T_c (k_{eff})_{nf}} \right) \\ = \frac{(1 - \psi) + \psi \rho^* c_p^*}{[(1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)]} \frac{\rho_{bf} c_{p,bf} u_\infty H^2}{L k_{bf}} \frac{(k_{eff})_{bf}}{(k_{eff})_{bf}} \end{aligned}$$

Note que se ha multiplicado y dividido la ecuación anterior por la conductividad sin nanopartículas $(k_{eff})_{bf}$, esto para distinguir efectos que se verán más adelante. Aquí se muestra el desarrollo de la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \psi) + \psi \rho^* c_p^*}{[(1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)]} \frac{\rho_{bf} c_{p,bf} u_\infty H^2}{L k_{bf}} \frac{k_{bf} [(1 - \phi)k^* + \phi]}{(k_{eff})_{bf}} \\ = \frac{[(1 - \psi) + \psi \rho^* c_p^*] [(1 - \phi)k^* + \phi]}{[(1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)]} \frac{\rho_{bf} c_{p,bf} u_\infty H}{(k_{eff})_{bf}} \frac{H}{L} \\ = \frac{[(1 - \psi) + \psi \rho^* c_p^*] [(1 - \phi)k^* + \phi]}{[(1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon \end{aligned}$$

Para:

$$\text{Pe} = \frac{\rho_{bf} c_{p,bf} u_{\infty} H}{(k_{eff})_{bf}} \quad (3.59)$$

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \quad (3.60)$$

$$\varepsilon_h = \frac{h}{L} \quad (3.61)$$

Para los términos del lado derecho de la ecuación (3.58), el elemento de flujo de energía longitudinal:

$$(k_{eff})_{nf} \frac{\Delta T_c}{L^2} \left(\frac{H^2}{\Delta T_c (k_{eff})_{nf}} \right) = \frac{H^2}{L^2} = \varepsilon^2 \quad (3.62)$$

Y para el flujo transversal:

$$(k_{eff})_{nf} \frac{\Delta T_c}{H^2} \left(\frac{H^2}{\Delta T_c (k_{eff})_{nf}} \right) = 1 \quad (3.63)$$

Los últimos tres términos del lado derecho de la ecuación de la energía corresponden a la disipación viscosa. Para el término de Darcy, sustituimos los modelos de viscosidad y conductividad efectiva del nanofluido, y además, la definición de la diferencia de temperatura característica:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{nf} u_{\infty}^2}{K} \left(\frac{H^2}{\Delta T_c (k_{eff})_{nf}} \right) &= \frac{1}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)](1-\psi)^{2.5}} \frac{\mu_{bf} u_{\infty}^2 H^2 k_w}{K S h k_{bf}} \\ &= \frac{1}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)](1-\psi)^{2.5}} \frac{\mu_{bf} u_{\infty}^2 H}{K S} \frac{k_w H}{k_{bf} h} \frac{(k_{eff})_{bf}/L}{(k_{eff})_{bf}/L} \\ &= \frac{[(1-\phi)k^* + \phi] k_{bf}}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)](1-\psi)^{2.5}} \frac{\mu_{bf} u_{\infty}^2 H}{K S} \frac{k_w \varepsilon}{k_{bf} (k_{eff})_{bf} \varepsilon_h} \\ &= \frac{[(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)](1-\psi)^{2.5}} \frac{\text{Br} \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para:

$$\text{Br} = \frac{\mu_{bf} u_{\infty}^2 H}{K S} \quad (3.65)$$

$$\alpha_c = \frac{k_w}{(k_{eff})_{bf}} \varepsilon \varepsilon_h \quad (3.66)$$

Entonces:

$$\frac{k_w H/L}{(k_{eff})_{bf} h/L} = \frac{k_w \varepsilon}{(k_{eff})_{bf} \varepsilon_h} = \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \quad (3.67)$$

El término de Forchheimer:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{nf} c_F u_\infty^3}{\sqrt{K}} \left(\frac{H^2}{\Delta T_c (k_{eff})_{nf}} \right) = \\ & \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^*]}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \frac{\rho_{bf} c_F u_\infty^3 H^2 k_w}{\sqrt{K} S h k_{bf}} \frac{\phi \mu_{bf} \sqrt{K} H (k_{eff})_{bf}}{\phi \mu_{bf} \sqrt{K} H (k_{eff})_{bf}} = \\ & \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^*][(1-\phi)k^* + \phi] k_{bf}}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)] k_{bf}} \frac{\rho_{bf} \phi c_F u_\infty H}{\mu_{bf}} \frac{\mu_{bf} u_\infty^2 H}{K S} \frac{\sqrt{K}}{\phi H} \frac{k_w H/L}{(k_{eff})_{bf} h/L} \\ & = \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \frac{F_{nf} Br Da^{1/2} \alpha_c}{\phi \varepsilon_h^2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Y por último, el término relacionado con Brinkman:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{nf} u_\infty^2}{\phi H^2} \left(\frac{H^2}{\Delta T_c (k_{eff})_{nf}} \right) = \\ & = \frac{1}{[\phi(1+3\psi) + (1-\phi)k^*](1-\psi)^{2.5}} \frac{\mu_{bf} u_\infty^2 H^2 k_w}{\phi H^2 S h k_{bf}} \frac{K}{K} \frac{(k_{eff})_{bf}/L}{(k_{eff})_{bf}/L} = \\ & = \frac{[(1-\phi)k^* + \phi] k_{bf}}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)](1-\psi)^{2.5} k_{bf}} \frac{1}{\phi} \frac{\mu_{bf} u_\infty^2 H}{K S} \frac{K}{H^2} \frac{k_w H/L}{(k_{eff})_{bf} h/L} \\ & = \frac{[(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)](1-\psi)^{2.5}} \frac{Br Da \alpha_c}{\phi \varepsilon_h^2} \end{aligned} \quad (3.69)$$

La expresión adimensional de la energía queda como:

$$\begin{aligned} & \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} Pe \varepsilon \tilde{u} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} + \\ & + \frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{Br \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left[\frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \tilde{u}^2 + \right. \\ & \left. + [(1-\psi) + \psi \rho^*] \frac{F_{nf} Da^{1/2}}{\phi} \tilde{u}^3 + \frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \frac{Da}{\phi} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Para $\theta_{nf}(X, Y)$ en el dominio de $X \in (0, 1)$ y $Y \in (0, 1)$.

3.6.4. Reducción de la ecuación de energía en pared colectora

Considerando las relaciones adimensionales para los cambios de temperatura en la pared y las dimensiones cartesianas:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_c}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} + \frac{\Delta T_c}{h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Y_w^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} + \frac{1}{(h/L)^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Y_w^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Y_w^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Considerando que $\theta_w(X, Y_w)$ en $X \in (0, 1)$ y $Y_w \in (0, 1)$.

3.6.5. Reducción de las condiciones de frontera

Restricciones en la velocidad del flujo

La condición de no deslizamiento en forma normalizada se traduce de forma adimensional como:

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0 \quad (3.72)$$

Restricciones en la temperatura y flujo de calor en el flujo

Por condición de temperatura uniforme a la entrada (ec. 3.21), y considerando la definición de la temperatura adimensional de nanofluido $\theta_{nf}(X, Y)$:

$$\begin{aligned} \theta_{nf}(0, Y) &= \frac{T_{nf}(0, y) - T_\infty}{\Delta T_c} = \frac{T_\infty - T_\infty}{\Delta T_c} \\ \therefore \theta_{nf}(0, Y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Para lo descrito en la ec. (3.22):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} \right|_{x=L} &= \frac{\Delta T_c}{L} \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \right|_{X=1} = 0 \\ \therefore \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \right|_{X=1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Y por el aislamiento en la parte inferior del colector solar:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial Y} \right|_{y=0} &= \frac{\Delta T_c}{H} \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \\ \therefore \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Restricciones en la interfaz pared-medio poroso

Considerando que no existen saltos de temperatura en el borde entre la pared colectora y el medio poroso inundado en nanofluido (ec. 3.23):

$$\theta_{nf} = \frac{T_{nf}(x, H) - T_a}{\Delta T_c} = \frac{T_w(x, h) - T_a}{\Delta T_c} = \theta_w$$

En términos adimensionales, para $\theta_{nf}(X, Y)$ y $\theta_w(X, Y_w)$, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\theta_{nf}(X, 1) = \theta_w(X, 1) \quad (3.76)$$

Y para un flujo de calor continuo entre ambas regiones:

$$\begin{aligned} (k_{eff})_{nf} \left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial y} \right|_{y=H} &= -k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y_w} \right|_{y_w=h} \\ (k_{eff})_{nf} \frac{\Delta T_c}{H} \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=1} &= -k_w \frac{\Delta T_c}{h} \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \right|_{Y_w=1} \end{aligned}$$

Sustituyendo para la definición de $(k_{eff})_{nf}$, y dividiendo ambos lados por $(k_{eff})_{bf}$:

$$\begin{aligned} \frac{[(1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)] k_{bf}}{[(1 - \phi)k^* + \phi] k_{bf}} \frac{\Delta T_c}{H} \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=1} &= \frac{-k_w}{(k_{eff})_{bf}} \frac{\Delta T_c}{h} \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \right|_{Y_w=1} \\ \frac{[(1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)]}{[(1 - \phi)k^* + \phi]} \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=1} &= \frac{-k_w H}{(k_{eff})_{bf} h} \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \right|_{Y_w=1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{(1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)}{(1 - \phi)k^* + \phi} \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=1} = \frac{-\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \right|_{Y_w=1} \quad (3.77)$$

Restricciones en el resto de la placa colectora

Para evitar pérdidas de calor, es común aislar los extremos izquierdo y derecho de la placa colectora, lo cual está expresado en la eq. (3.25), considerando los parámetros adimensionales para la temperatura de pared y dimensión espacial x , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_c}{L} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \Big|_{X=0} &= \frac{\Delta T_c}{L} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \Big|_{X=1} = 0 \\ \therefore \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \Big|_{X=0} &= \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \Big|_{X=1} = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Por último, en la parte superior, tenemos flujo de calor (S) que entra a la placa y que proviene del Sol, y un flujo saliente de calor representado por un coeficiente de pérdida total (U_L) y la diferencia entre la temperatura local y la del medio circundante, como lo mostrado en la eq. (3.28):

$$\begin{aligned} -k_w \frac{\partial \theta_w}{\partial y_w} \Big|_{y_w=0} &= S - U_L [T_w(x, 0) - T_\infty] \\ -k_w \frac{\Delta T_c}{h} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=0} &= S - U_L \Delta T_c \theta_w(X, 0) \\ -k_w \frac{S h}{h k_w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=0} &= S - U_L \frac{S h}{k_w} \theta_w(X, 0) \\ -S \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=0} &= S - S \frac{U_L h}{k_w} \theta_w(X, 0) \\ -\frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=0} &= 1 - \frac{U_L h}{k_w} \theta_w(X, 0) \\ \therefore \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=0} - \text{Bi} \theta_w(X, 0) &= -1 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Para:

$$\text{Bi} = \frac{U_L h}{k_w} \quad (3.80)$$

Capítulo 4

Solución Numérica

El método de elementos finitos es una técnica numérica ampliamente utilizada en ingeniería y ciencias aplicadas para resolver problemas de análisis estructural, transferencia de calor, mecánica de fluidos, electromagnetismo, entre otros temas. Consiste en dividir un dominio continuo en elementos finitos más pequeños, que se aproximan a formas y tamaños simples, como triángulos o cuadriláteros en 2D, y tetraedros o hexaedros en 3D. Cada elemento tiene propiedades y comportamientos específicos, y se conectan entre sí mediante nodos o puntos. El método se basa en el principio de discretización, en el que las ecuaciones diferenciales que describen el problema se transforman en un sistema de ecuaciones algebraicas, las cuales se resuelven numéricamente para obtener soluciones aproximadas.

Se ha descrito de manera somera qué es el método de elementos finitos porque es la técnica que se empleará para encontrar una solución aproximada al modelo obtenido en el capítulo anterior. Para obtener dicha solución se hará uso de un lenguaje de programación especial: FreeFEM++, que está basado en C++ y que es capaz de resolver sistema de ecuaciones diferenciales parciales para fenómenos físicos no lineales en una, dos y tres dimensiones a través del método mencionado [Hecht, 2012]. Para poder transcribir nuestro problema a FreeFEM++ es preciso obtener el problema variacional o forma débil de las ecuaciones.

4.1. Determinación del problema variacional

4.1.1. Teorema de la Divergencia en el plano

Suponga que Ω representa un dominio en \mathbb{R}^2 , que está delimitado por la curva suave S (también indicado como $\partial\Omega = S$), que puede estar dividido o no en partes. Si \mathbf{F} representa un campo vectorial continuo y diferenciable dentro de Ω , entonces:

$$\iint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, d\Omega = \oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (4.1)$$

Este teorema puede ser aplicado en su forma de componentes. En el caso cartesiano con ejes X y Y , y vectores de coordenadas $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ para cada eje respectivo. El vector unitario \mathbf{n} normal al contorno S se define como:

$$\mathbf{n} = n_X \hat{\mathbf{i}} + n_Y \hat{\mathbf{j}} \quad (4.2)$$

Además, para el campo vectorial \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = F_X \hat{\mathbf{i}} + F_Y \hat{\mathbf{j}} \quad (4.3)$$

La forma compuesta del teorema de divergencia queda como:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} (F_X) \, dX \, dY = \oint_S F_X n_X \, dS \quad (4.4)$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial Y} (F_Y) \, dX \, dY = \oint_S F_Y n_Y \, dS \quad (4.5)$$

4.1.2. Formulación débil

Para $z(x, y)$ y la ecuación diferencial parcial siguiente [Reddy, 2006]:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial z}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial z}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + a_{00} u - f = 0 \quad (4.6)$$

Para obtener la forma débil se debe multiplicar la ecuación diferencial por una función de peso w , e integrar a lo largo del dominio de un elemento Ω_e . Y obtener una expresión de la forma:

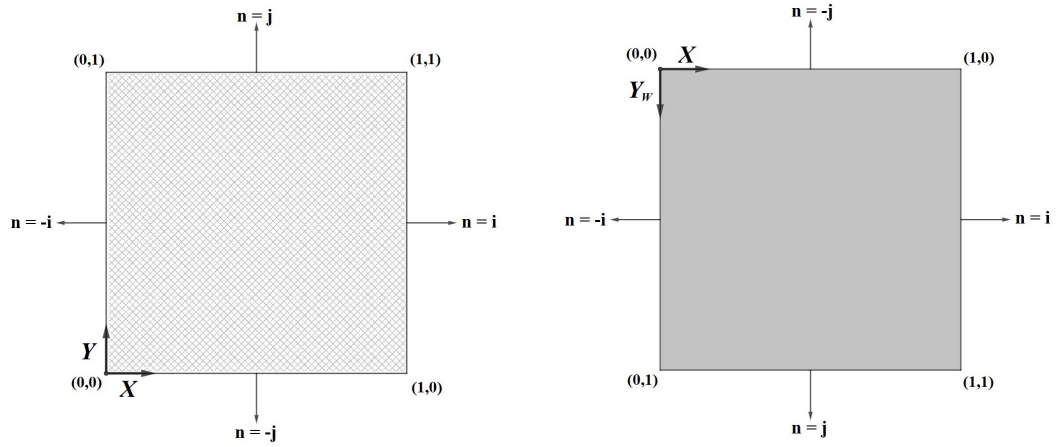
$$B^e(w, z) - l^e(w) = 0 \quad (4.7)$$

Para B^e un funcional bilineal, y l^e un funcional lineal, ambos aplicados a un elemento cualquiera del dominio. Para que el lenguaje FreeFEM++ entienda el problema, se debe obtener una formulación parecida, salvo que se debe integrar en **todo el dominio** Ω , no solo a un elemento Ω_e .

4.1.3. Definición de los dominios de trabajo

Los dominios del medio poroso y placa plana normalizados se muestran en la figura 4.1.

Figura 4.1: Dominios normalizado del medio poroso inundado con nanofluido (izquierda) y de la placa plana (derecha).



Note que el eje vertical de los medios son opuestos, por tanto, el vector normal a su contorno \mathbf{n} tienen ejes también opuestos. Aunque, al realizar la integral de trayectoria cerrada, en el dominio del flujo la integral de trayectoria se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que en la placa colectora, la integral de línea se calcula en el sentido de las agujas del reloj. Esto será importante al determinar la forma débil de las ecuaciones diferenciales.

4.1.4. Forma débil de la ecuación de momento

A continuación se muestra el desarrollo para la ecuación adimensional de conservación de momento (ec. 3.55) para obtener una expresión de su forma débil:

$$-\frac{d^2\tilde{u}}{dY^2} + \phi Da^{-1} (\tilde{u} - 1) + F_{nf} Da^{-1/2} (\tilde{u}^2 - 1) = 0$$

Primero se multiplica por una función de peso u_h , y se integra a través del dominio Ω , que corresponde al medio poroso:

$$\iint_{\Omega} u_h \left[-\frac{d^2\tilde{u}}{dY^2} + \phi Da^{-1} (\tilde{u} - 1) + F_{nf} Da^{-1/2} (\tilde{u}^2 - 1) \right] dX dY = 0$$

$$\iint_{\Omega} \left[-u_h \frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} + \phi \text{Da}^{-1} u_h (\tilde{u} - 1) \right. \\ \left. + F_{nf} \text{Da}^{-1/2} u_h (\tilde{u}^2 - 1) \right] dX dY = 0 \quad (4.8)$$

En el lenguaje de programación, el problema se define a lo largo de un espacio o dominio caracterizado por las variables X y Y , por tal motivo, aunque sería posible solo considerar la integración a lo largo de Y en la ecuación anterior, se seguirán escribiendo ambas variables adimensionales. Por otra parte, al considerar la regla de la cadena de la derivación:

$$\frac{d}{dY} \left(u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \right) = \frac{du_h}{dY} \frac{d\tilde{u}}{dY} + u_h \frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2}$$

Despejando para el segundo término de la derecha, y multiplicando por (-1):

$$\therefore -u_h \frac{d^2 \tilde{u}}{dY^2} = \frac{du_h}{dY} \frac{d\tilde{u}}{dY} - \frac{d}{dY} \left(u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \right) \quad (4.9)$$

Al introducirlo en la ecuación (4.8):

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{du_h}{dY} \frac{d\tilde{u}}{dY} - \frac{d}{dY} \left(u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \right) + \phi \text{Da}^{-1} u_h (\tilde{u} - 1) \right. \\ \left. + F_{nf} \text{Da}^{-1/2} u_h (\tilde{u}^2 - 1) \right] dX dY = 0 \quad (4.10)$$

Evaluando el segundo término dentro de la integral doble, por teorema de la divergencia (ec. 4.5):

$$\iint_{\Omega} \frac{d}{dY} \left(u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \right) dX dY = \oint_{\partial\Omega} u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} n_y dS$$

Para dS un tramo de la frontera $\partial\Omega$, que encierra al dominio Ω ; y n_y la componente en la dirección- y de un vector unitario normal a la frontera. La integral de línea se puede expandir a:

$$\oint_{\partial\Omega} u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} n_y dS = \int_0^1 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=0} n_y dX + \int_0^1 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{X=1} n_y dY \\ + \int_1^0 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=1} n_y dX + \int_1^0 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{X=0} n_y dY$$

La componente n_y es igual a cero cuando se evalúan las integrales a lo largo del eje- Y , mientras que $n_y = -1$ en $Y = 0$, y $n_y = 1$ en $Y = 1$, lo anterior se observa mejor en la figura 4.1. Entonces:

$$\oint_{\partial\Omega} u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} n_y dS = - \int_0^1 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=0} dX + \int_1^0 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=1} dX \quad (4.11)$$

Debido a la simetría en las condiciones de frontera de la velocidad del flujo (ec. 3.72), el gradiente de velocidad dU/dY serán iguales en las paredes y con signos contrarios, es decir:

$$\frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=0} = - \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=1} \quad (4.12)$$

Y al evaluar la integral de línea cerrada (ec. 4.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} n_y dS &= - \int_0^1 u_h \left(- \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=1} \right) dX + \int_1^0 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=1} dX \\ \oint_{\partial\Omega} u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} n_y dS &= \int_0^1 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=1} dX + \int_1^0 u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \Big|_{Y=1} dX \end{aligned}$$

Note que las integrales son iguales, pero con límites de integración opuestos. Por lo tanto:

$$\iint_{\Omega} \frac{d}{dY} \left(u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} \right) dX dY = \oint_{\partial\Omega} u_h \frac{d\tilde{u}}{dY} n_y dS = 0 \quad (4.13)$$

Y la expresión (4.10) queda como:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{du_h}{dY} \frac{d\tilde{u}}{dY} + \phi \text{Da}^{-1} u_h (\tilde{u} - 1) + F_{nf} \text{Da}^{-1/2} u_h (\tilde{u}^2 - 1) \right] dX dY = 0 \quad (4.14)$$

Debido a la no-linealidad introducida en el efecto de Forchheimer, concretamente, el término: \tilde{u}^2 , no es posible obtener el problema variacional [Reddy, 2006]:

$$B(u_h, \tilde{u}) - L(u_h) = 0 \quad (4.15)$$

Donde $B(u_h, \tilde{u})$ es un funcional bilineal en u_h y \tilde{u} ; mientras que $L(u_h)$ es otro funcional lineal en u_h .

Dado que FreeFEM++ entiende problemas en su forma débil, algunas modificaciones deben ser realizadas a la ecuación. Una alternativa sugerida por

Hecht [2012] es tratar al problema como pseudo-estacionario, introduciendo un término relacionado con el cambio de la velocidad en el tiempo:

$$\iint_{\Omega} \left[u_h \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial u_h}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \phi \text{Da}^{-1} u_h (\tilde{u} - 1) + \text{F}_{nf} \text{Da}^{-1/2} u_h (\tilde{u}^2 - 1) \right] dX dY = 0 \quad (4.16)$$

Para τ una variable relacionada a un tiempo adimensional. De manera que al discretizar para \tilde{u}_i como el campo de velocidad adimensionales en el tiempo i , se obtiene:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \approx \frac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i}{\Delta \tau} \quad (4.17)$$

Y el término no lineal como:

$$\tilde{u}^2 \approx \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i \quad (4.18)$$

Se introduce esta discretización en la ec. (4.16):

$$\iint_{\Omega} \left(u_h \frac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i}{\Delta \tau} + \frac{du_h}{dY} \frac{d\tilde{u}_{i+1}}{dY} + \phi \text{Da}^{-1} u_h \tilde{u}_{i+1} - \phi \text{Da}^{-1} u_h + \text{F}_{nf} \text{Da}^{-1/2} u_h \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i - \text{F}_{nf} \text{Da}^{-1/2} u_h \right) dX dY = 0$$

La idea tras esta formulación es proponer un campo inicial \tilde{u}_0 , que bien podría ser igual a cero, para luego estimar el campo \tilde{u}_1 , con este nuevo campo estimar \tilde{u}_2 , y así sucesivamente. Entre cada iteración se calcula la diferencia promedio entre dos campos consecutivos de velocidad, si este valor es muy pequeño, entonces se habrá alcanzado el estado estacionario.

Con un poco de álgebra, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{u_h \tilde{u}_{i+1}}{\Delta \tau} + \frac{du_h}{dY} \frac{d\tilde{u}_{i+1}}{dY} + \left(\phi \text{Da}^{-1} \right) u_h \tilde{u}_{i+1} + \left(\text{F}_{nf} \tilde{u}_i \text{Da}^{-1/2} \right) u_h \tilde{u}_{i+1} \right] dX dY - \iint_{\Omega} u_h \left(\frac{\tilde{u}_i}{\Delta \tau} + \phi \text{Da}^{-1} + \text{F}_{nf} \text{Da}^{-1/2} \right) dX dY = 0 \quad (4.19)$$

En cualquier iteración, el valor de \tilde{u}_i es conocido, eso quiere decir que la primera integral es bilineal en u_h y \tilde{u}_{i+1} , y la segunda es lineal en u_h , y puede ser resuelto por el método de elementos finitos.

Se ha obtenido una ecuación de la forma:

$$B(u_h, \tilde{u}_{i+1}) - L(u_h) = 0 \quad (4.20)$$

Donde:

$$B(u_h, U_{i+1}) = \iint_{\Omega} \left[\frac{u_h \tilde{u}_{i+1}}{\Delta\tau} + \frac{du_h}{dY} \frac{d\tilde{u}_{i+1}}{dY} + (\phi \text{Da}^{-1}) u_h \tilde{u}_{i+1} \right. \\ \left. + (\text{F}_{nf} \tilde{u}_i \text{Da}^{-1/2}) u_h \tilde{u}_{i+1} \right] dX dY \quad (4.21)$$

Y es bilineal pues al intercambiar u_h con \tilde{u}_{i+1} se obtiene la misma expresión. Además:

$$L(u_h) = \iint_{\Omega} u_h \left(\frac{\tilde{u}_i}{\Delta\tau} + \phi \text{Da}^{-1} + \text{F}_{nf} \text{Da}^{-1/2} \right) dX dY \quad (4.22)$$

Note que lo que acompaña a u_h es completamente conocido en cada iteración.

4.1.5. Forma débil de la ecuación de energía en flujo

Similar al caso anterior, buscamos la forma débil de la ecuación (3.70). Antes de resolver esta ecuación se resuelve para el campo de velocidades, pues ambos son problemas independientes, por lo que los términos relacionados con la velocidad ya son conocidos. El problema con esta expresión es debido a la parte convectiva, es decir el término asociado con el producto de la velocidad y las diferencia de temperatura adimensional. Integrando ambos lados del igual, a lo largo de todo el dominio del canal poroso inundado con nanofluido, y multiplicando por la función de peso $\theta_{h,nf}$:

$$\iint_{\Omega} \theta_{h,nf} \left\{ \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon \tilde{u} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} - \frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\text{Br} \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left[\frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \tilde{u}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + [(1-\psi) + \psi \rho^*] \frac{\text{F}_{nf} \text{Da}^{1/2}}{\phi} \tilde{u}^3 + \frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \frac{\text{Da}}{\phi} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \right] \right\} dX dY = 0$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \left\{ \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon \tilde{u} \theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} - \varepsilon^2 \theta_{h,nf} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} \right. \\
& \quad - \theta_{h,nf} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} - \frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\theta_{h,nf} \text{Br} \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left[\frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \tilde{u}^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + [(1-\psi) + \psi \rho^*] \frac{\text{F}_{nf} \text{Da}^{1/2}}{\phi} \tilde{u}^3 + \frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \frac{\text{Da}}{\phi} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \right] \right\} dX dY = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Aplicando la derivada a un producto:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \right) = \frac{\partial \theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} + \theta_{h,nf} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2}$$

Por tanto:

$$-\theta_{h,nf} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \right) \tag{4.24}$$

Entonces la integral del término siguiente queda como:

$$\iint_{\Omega} \left(-\theta_{h,nf} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} \right) dX dY = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \right) \right] dX dY$$

Por teorema de la divergencia en el segundo término de la integral del lado derecho:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \right) \right] dX dY = \oint_{\partial \Omega} \theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} n_x dS$$

Se evalúa la integral de línea donde el valor de $n_x \neq 0$, que es a la entrada y salida del canal poroso:

$$\oint_{\partial \Omega} \theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} n_x dS = \int_0^1 \theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \Big|_{X=1} dY - \int_1^0 \theta_{h,nf} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \Big|_{X=0} dY \tag{4.25}$$

A la entrada del canal, el nanofluido ingresa con temperatura uniforme, por lo que no existe gradiente de temperatura a la entrada:

$$\frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \Big|_{X=0} = 0 \tag{4.26}$$

Considerando además la condición de frontera descrita en la expresión (3.74), entonces la integral de línea cerrada es igual a:

$$\oint_{\partial\Omega} \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial X} n_x dS = 0 \quad (4.27)$$

Entonces el segundo término de la integral en (4.23):

$$\iint_{\Omega} \left(-\varepsilon^2 \theta_{h,nf} \frac{\partial^2\theta_{nf}}{\partial X^2} \right) dX dY = \iint_{\Omega} \varepsilon^2 \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial X} dX dY \quad (4.28)$$

Desarrollando un procedimiento similar para la derivada parcial en Y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \right) &= \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} + \theta_{h,nf} \frac{\partial^2\theta_{nf}}{\partial Y^2} \\ \therefore -\theta_{h,nf} \frac{\partial^2\theta_{nf}}{\partial Y^2} &= \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\iint_{\Omega} \left(-\theta_{h,nf} \frac{\partial^2\theta_{nf}}{\partial Y^2} \right) dX dY = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \right) \right] dX dY \quad (4.30)$$

Evaluando al segundo término de la integral de la derecha, utilizando el teorema de la divergencia:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \right) dX dY = \oint_{\partial\Omega} \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} n_y dS \quad (4.31)$$

De nuevo, se evalúan las frontera donde $n_y \neq 0$, que corresponden a la cara inferior y superior del canal obstruido:

$$\oint_{\partial\Omega} \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} n_y dS = - \int_0^1 \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \Big|_{Y=0} dX + \int_1^0 \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \Big|_{Y=1} dX \quad (4.32)$$

Por la parte inferior existe una condición adiabática (ec. 3.75), mientras que en la cara opuesta, lo que persiste es una continuidad en el flujo de calor (ec. 3.77). Por tanto:

$$\oint_{\partial\Omega} \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} n_y dS = \int_1^0 \theta_{h,nf} \left(\frac{-(1-\phi)k^* + \phi}{(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=1} \right) dX \quad (4.33)$$

Intercambiando los límites de integración:

$$\oint_{\partial\Omega} \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} n_y dS = \int_0^1 \theta_{h,nf} \left(\frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=1} \right) dX \quad (4.34)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.30):

$$\iint_{\Omega} \left(-\theta_{h,nf} \frac{\partial^2\theta_{nf}}{\partial Y^2} \right) dX dY = \iint_{\Omega} \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} dX dY - \int_0^1 \theta_{h,nf} \left(\frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=1} \right) dX \quad (4.35)$$

Sustituyendo la expresión anterior y (4.28) en (4.23):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon \tilde{u} \theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial X} \right. \\ \left. + \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} - \frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\theta_{h,nf} \text{Br} \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left[\frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \tilde{u}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + [(1-\psi) + \psi \rho^*] \frac{\text{F}_{nf} \text{Da}^{1/2}}{\phi} \tilde{u}^3 + \frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \frac{\text{Da}}{\phi} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \right] \right\} dX dY \\ - \int_0^1 \theta_{h,nf} \left(\frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=1} \right) dX = 0 \quad (4.36) \end{aligned}$$

El único inconveniente con la formulación anterior es el primer término de la integral doble, en concreto el producto:

$$\theta_{h,nf} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial X} \quad (4.37)$$

Pues no es una formulación bilineal en $\theta_{h,nf}$ y θ_{nf} . Para solucionar este impase se debe aplicar el método de curvas características de Galerkin. Para ello es preciso considerar el caso pseudo-estacionario, aislando:

$$\frac{\partial\theta_{nf}}{\partial \tau} + \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon \tilde{u} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial X} \quad (4.38)$$

Que puede discretizarse como:

$$\frac{\theta_{nf,i+1} - \theta_{nf,i}}{\Delta\tau} + \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon \tilde{u} \frac{\partial \theta_{nf,i}}{\partial X} = 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta_{nf,i+1}}{\Delta\tau} - \frac{1}{\Delta\tau} \left[\theta_{nf,i} \right. \\ &\quad \left. - \Delta\tau \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon U \frac{\partial \theta_{nf,i}}{\partial X} \right] = 0 \quad (4.40) \end{aligned}$$

$$= \frac{\theta_{nf,i+1}}{\Delta\tau} - \frac{1}{\Delta\tau} (\theta_{nf,i} \circ \chi_i) \quad (4.41)$$

Donde χ_i representa el punto de partida de una partícula en el momento i que llegará al punto o elemento analizado en el tiempo $i + 1$:

$$\theta_{nf,i} \circ \chi_i = \theta_{nf,i} - \Delta\tau \frac{[(1-\psi) + \psi \rho^* c_p^*][(1-\phi)k^* + \phi]}{[(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)]} \text{Pe} \varepsilon \tilde{u} \frac{\partial \theta_{nf,i}}{\partial X} \quad (4.42)$$

FreeFEM++ es capaz de estimar $(\theta_{nf,i} \circ \chi_i)$ a través de la operación **connect**. Al multiplicar por la función de peso $\theta_{h,nf}$ e integrar en el dominio normalizado del flujo:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\theta_{h,nf} \theta_{nf,i+1}}{\Delta\tau} - \frac{\theta_{h,nf}}{\Delta\tau} (\theta_{nf,i} \circ \chi_i) \right) dX dY \quad (4.43)$$

De forma que al sustituir en la ecuación (4.36):

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\theta_{h,nf} \theta_{nf,i+1}}{\Delta\tau} - \frac{\theta_{h,nf}}{\Delta\tau} (\theta_{nf,i} \circ \chi_i) + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial \theta_{nf,i+1}}{\partial X} \right. \\ &\quad + \frac{\partial \theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial \theta_{nf,i+1}}{\partial Y} - \frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\theta_{h,nf} \text{Br} \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left[\frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \tilde{u}^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + [(1-\psi) + \psi \rho^*] \frac{\text{F}_{nf} \text{Da}^{1/2}}{\phi} \tilde{u}^3 + \frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \frac{\text{Da}}{\phi} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \right] \right\} dX dY \\ &\quad - \int_0^1 \theta_{h,nf} \left(\frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y} \Big|_{Y_w=1} \right) dX = 0 \end{aligned}$$

Con ayuda de álgebra, se puede obtener la expresión:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \left(\frac{\theta_{h,nf} \theta_{nf,i+1}}{\Delta\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial\theta_{nf,i+1}}{\partial X} + \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial\theta_{nf,i+1}}{\partial Y} \right) dX dY \\
& - \iint_{\Omega} \theta_{h,nf} \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} (\theta_{nf,i} \circ \chi_i) + \frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\text{Br} \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left[\frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \tilde{u}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [(1-\psi) + \psi \rho^*] \frac{\text{F}_{nf} \text{Da}^{1/2}}{\phi} \tilde{u}^3 + \frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \frac{\text{Da}}{\phi} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \right] \right\} dX dY \\
& - \int_0^1 \theta_{h,nf} \left(\frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=1} \right) dX = 0 \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Que tiene la forma:

$$B(\theta_{h,nf}, \theta_{nf,i+1}) - L(\theta_{h,nf}) = 0 \quad (4.45)$$

Para:

$$\begin{aligned}
& B(\theta_{h,nf}, \theta_{nf,i+1}) = \\
& \iint_{\Omega} \left(\frac{\theta_{h,nf} \theta_{nf,i+1}}{\Delta\tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial X} \frac{\partial\theta_{nf,i+1}}{\partial X} + \frac{\partial\theta_{h,nf}}{\partial Y} \frac{\partial\theta_{nf,i+1}}{\partial Y} \right) dX dY \quad (4.46)
\end{aligned}$$

$$L(\theta_{h,nf}) =$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \theta_{h,nf} \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} (\theta_{nf,i} \circ \chi_i) + \frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1-\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\text{Br} \alpha_c}{\varepsilon_h^2} \left[\frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \tilde{u}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [(1-\psi) + \psi \rho^*] \frac{\text{F}_{nf} \text{Da}^{1/2}}{\phi} \tilde{u}^3 + \frac{1}{(1-\psi)^{2.5}} \frac{\text{Da}}{\phi} \left(\frac{d\tilde{u}}{dY} \right)^2 \right] \right\} dX dY \\
& + \int_0^1 \theta_{h,nf} \left(\frac{(1-\phi)k^* + \phi}{(1+\phi)k^* + \phi(1+3\psi)} \frac{\alpha_c}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=1} \right) dX \quad (4.47)
\end{aligned}$$

De manera que para calcular el campo $\theta_{nf,1}$, se propone un campo inicial $\theta_{nf,0}$, con el nuevo campo se estima el siguiente, y así sucesivamente hasta que la diferencia entre dos valores consecutivos de θ_{nf} sea mínima.

4.1.6. Forma débil de la ecuación de energía en pared colectora

Se evalúa la ecuación ec. (3.71), que es más fácil de evaluar al multiplicar la función de peso $\theta_{h,w}$ y un signo negativo:

$$-\theta_{h,w} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} - \frac{\theta_{h,w}}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Y_w^2} = 0 \quad (4.48)$$

Considerando el primer término:

$$-\theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta_{h,w}}{\partial X} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \right) \quad (4.49)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en primer término de la derecha:

$$\iint_{\Omega_w} \frac{\partial}{\partial X} \left(\theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \right) dX dY_w = \oint_{\partial \Omega_w} \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} n_x dS \quad (4.50)$$

Dado que n_x se desvanece en $Y_w = 0$ y $Y_w = 1$, las condiciones que importan están a los extremos derecho e izquierdo del dominio de la placa colectora:

$$\oint_{\partial \Omega_w} \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} n_x dS = \int_0^1 \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \Big|_{X=1} dY_w - \int_1^0 \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \Big|_{X=0} dY_w \quad (4.51)$$

Ambas caras laterales se consideran adiabáticos (ec. 3.78). Por tanto:

$$\iint_{\Omega_w} \frac{\partial}{\partial X} \left(\theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \right) dX dY_w = \oint_{\partial \Omega_w} \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} n_x dS = 0 \quad (4.52)$$

Aplicando lo mismo para el segundo término de la derecha de la ec. (4.48):

$$-\frac{\theta_{h,w}}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Y_w^2} = \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial \theta_{h,w}}{\partial Y_w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} - \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial Y_w} \left(\theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \right) \quad (4.53)$$

Con:

$$\iint_{\Omega_w} \frac{\partial}{\partial Y_w} \left(\theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \right) dX dY_w = \oint_{\partial \Omega_w} \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} n_y dS \quad (4.54)$$

En el caso de la ecuación anterior, el término n_y es igual a cero cuando $X = 0$ y $X = 1$. Quedando:

$$\oint_{\partial \Omega_w} \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} n_y dS = - \int_0^1 \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=0} dY_w + \int_1^0 \theta_{h,w} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y_w} \Big|_{Y_w=1} dY_w \quad (4.55)$$

Intercambiando los límites de integración de la segunda integral de la derecha, y además, considerando las condiciones de las ecuaciones (3.77) y (3.79):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_w} \theta_{h,w} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} n_y dS &= - \int_0^1 \theta_{h,w} (\text{Bi } \theta_w(X, 0) - 1) dY_w \\ &\quad - \int_0^1 \left(\frac{-\varepsilon_h^2 (1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)}{\alpha_c (1 - \phi)k^* + \phi} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \right) dY_w \end{aligned} \quad (4.56)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_w} \frac{\partial}{\partial Y_w} \left(\theta_{h,w} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \right) dX dY_w &= \oint_{\partial\Omega_w} \theta_{h,w} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} n_y dS = \\ &\quad \int_0^1 \theta_{h,w} (1 - \text{Bi } \theta_w(X, 0)) dY_w \\ &\quad + \int_0^1 \theta_{h,w} \left(\frac{\varepsilon_h^2 (1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)}{\alpha_c (1 - \phi)k^* + \phi} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \right) dY_w \end{aligned} \quad (4.57)$$

Al sustituir en las ecuaciones anteriores, la forma débil de la ecuación de energía en la pared queda como:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_w} \left(\frac{\partial\theta_{h,w}}{\partial X} \frac{\partial\theta_w}{\partial X} + \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial\theta_{h,w}}{\partial Y_w} \frac{\partial\theta_w}{\partial Y_w} \right) dX dY_w &- \int_0^1 \frac{\theta_{h,w}}{\varepsilon_h^2} (1 - \text{Bi } \theta_w(X, 0)) dY_w \\ &- \int_0^1 \frac{\theta_{h,w}}{\varepsilon_h^2} \left(\frac{\varepsilon_h^2 (1 + \phi)k^* + \phi(1 + 3\psi)}{\alpha_c (1 - \phi)k^* + \phi} \frac{\partial\theta_{nf}}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \right) dY_w = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Que tiene la forma:

$$B(\theta_{h,w}, \theta_w) - L(\theta_{h,w}) = 0 \quad (4.59)$$

Note que la condición de flujo en la interfaz aparece dos veces, una en cada ecuación de energía del nanofluido y de la placa, además, que la condición de temperaturas iguales en la frontera (ec. 3.76) no ha aparecido en las ecuaciones. La forma de tratar estos problemas se explica en la implementación del modelo matemático al lenguaje de programación.

4.2. Implementación en FreeFEM++

4.2.1. Definición de los problemas matemáticos

En el lenguaje FreeFEM++, las ecuaciones diferenciales en su forma débil se definen en forma de problemas. La velocidad del flujo (ec. 4.19) se traduce como:

```

problem velocity(u,uh)
= int2d(Th) (
    uh*u/dtau
    + dy(uh)*dy(u)
    + phi*pow(Da,-1.0)*uh*u
    + Fnf*uold*pow(Da,-0.5)*uh*u
)
- int2d(Th) (
    uh*(
        uold/dtau
        + phi*pow(Da,-1.0)
        + Fnf*pow(Da,-0.5)
    )
)
+ on(1,3,u=0.0)
;

```

Donde:

Th es el dominio del problema en $X \in (0, 1)$ y $Y \in (0, 1)$, es decir, el dominio del medio poroso.

u es \tilde{u}_{i+1} , **uold** es \tilde{u}_i ; siendo ambas las variables del problema.

pow(x,y) es la función de potenciación x^y .

on(1,3,u=0.0) representa la condición de frontera en las superficies designadas como 1 y 3.

Note que la forma de escribir la expresión matemática (ec. 4.19) en FreeFEM++ es directa, de aquí una de las razones por la elección de este lenguaje.

Para evitar problemas en FreeFEM++, se recomienda **definir una sola condición de en cada frontera del dominio**, y dado que en la interfaz

entre el medio poroso y la placa plana existen dos condiciones de frontera, lo que se hace es definir dos problemas diferentes, uno para el flujo y otro para la pared, y a cada uno se le asigna una condición diferente.

En los problemas definidos a continuación, en el flujo se ha definido la condición de temperaturas iguales (ec. 3.76), mientras que en la pared se ha escrito la condición de flujo continuo de calor (ec. 3.77):

```

rhonf = 1-psi+psi*rhoa;
rhocpnf = 1-psi+psi*rhoa*cpa;
kbf = (1-phi)*ka+phi;
knf = (1-phi)*ka+phi*(1+3*psi);
alphaepsh2=alphac/pow(epsilonh,2.0);
problem energyflow(thetaf,thetafh)
= int2d(Th)(
    thetafh*thetaf/dtau
    + pow(epsilon,2.0)*dx(thetaf)*dx(thetafh)
    + dy(thetaf)*dy(thetafh)
)
- int2d(Th)(
thetafh*(
    convect([(rhocpnf*kbf/knf)*Pe*epsilon*uold,0.0],
    -dtau,thetafold)/dtau
    + (kbf/knf)*Br*alphaepsh2*(
        (1/pow(1-psi,2.5))*pow(u,2.0)
        + (rhonf*Fnf/phi)*pow(u,3.0)
        + (1/pow(1-psi,2.5))*pow(dy(u),2.0)
    )
)
)
+ on(3,thetaf=thetaw)
+ on(4,thetaf=0.0)
;
problem energywall(thetaw,thetawh)
= int2d(Thw)(
    dx(thetaw)*dx(thetawh)
    + pow(epsilonh,-2.0)*dy(thetaw)*dy(thetawh)
)
- int1d(Thw,3)(
    (thetawh/(pow(epsilonh,2.0)*alphaepsh2))*dy(thetaf)

```

```

)
- int1d(Thw,1)(
    (thetawh/pow(epsilonh,2.0))*(1-Bi*thetaw)
)
;

```

Para:

Th es el dominio de la pared en $X \in (0, 1)$ y $Y_w \in (0, 1)$.

thetaf como $\theta_{nf,i+1}$, y **thetafold** como $\theta_{nf,i}$.

thetaw como θ_w .

thetafh y **thetawh** como las funciones de peso $\theta_{h,nf}$ y $\theta_{h,w}$.

rhoa, **cpa** y **ka** como ρ^* , c_p^* y k^* ; respectivamente.

alphaesph2 es el parámetro conjugado α_c/ε_h^2 .

epsilon y **epsilonh** como las relaciones adimensionales ε y ε_h .

4.2.2. Algoritmo computacional

El procedimiento o algoritmo básico programado en FreeFEM++ se describe más adelante.

Hecht [2012] propone calcular los errores de las siguientes formas:

$$\text{error}_V = \sqrt{\iint_{\Omega} \frac{(\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i)^2}{\Delta\tau} dX dY} \quad (4.60)$$

$$\text{error}_F = \sqrt{\iint_{\Omega} \frac{(\theta_{nf,i+1} - \theta_{nf,i})^2}{\Delta\tau} dX dY} \quad (4.61)$$

Dichas expresiones se traducen en el lenguaje de programación como:

```

errorV = int2d(Th)(
    sqrt( int2d(Th)(square(u - uold)/dtau) )
);
errorF = int2d(Th)(
    sqrt( int2d(Th)(square(thetaf - thetafold)/dtau) )
);

```

Algorithm 1 Algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales

```

1: Definir y dar valores a variables
2: Cálculo de geometrías de los dominios
3: Definir los dominios para cada medio (fluido y placa plana)
4: Definir los problemas velocity, energyflow y energywall
5: Configurar contador a cero:  $i = 0$ 
6: Declarar un campo de velocidad inicial cero  $\tilde{u}_i = 0$ 
7: while (errorV >error) & (i<iteración máxima) do
8:   Resolver el problema velocity
9:   Calcular errorV
10:  Sustituir valor del nuevo campo:  $\tilde{u}_i = \tilde{u}_{i+1}$ 
11:  Aumentar el contado en 1:  $i = i + 1$ .
12: end while
13: Reiniciar el contador:  $i = 0$ .
14: Declarar un campo de temperatura de nanofluido inicial:  $\theta_{nf,i} = 0$ .
15: Declarar un campo de temperatura de pared inicial:  $\theta_{w,i} = 0$ .
16: while (errorF >error) & (i<iteración máxima) do
17:   Resolver el problema energyflow
18:   Resolver el problema energywall
19:   Calcular errorF
20:   Sustituir valores del nuevo campo:  $\theta_{nf,i} = \theta_{nf,i+1}$ 
21:   Sustituir valores del nuevo campo:  $\theta_{w,i} = \theta_{w,i+1}$ 
22:   Aumentar el contado en 1:  $i = i + 1$ .
23: end while

```

Se definen dos condiciones de paro para las iteraciones. La primera es cuando el error es menor a un valor predeterminado, el cual puede llegar a ser del orden de 1×10^{-6} o menor; la segunda condición es cuando se haya superado el máximo de iteraciones sin converger, en cuyo caso los valores de las variables deberán ser revisados.

Capítulo 5

Resultados

Previamente se obtuvieron las ecuaciones que describen al modelo analizado (ver Fig. 3.1), así como las condiciones de frontera que lo limitan. Dichas expresiones fueron normalizadas y luego transcritas al lenguaje de programación FreeFEM++, que resuelve las formulaciones matemáticas, a través de un algoritmo también presentado, mediante el método de elementos finitos.

Los resultados se muestran a continuación, primero a un caso evaluado para condiciones prácticas, eso quiere decir, para parámetros físicos lo más cercanos a una situación real documentada, por ejemplo, Saedodin *et al.* [2017] realizaron pruebas de colectores solares planos en canales porosos, salvo que no considero nanofluidos en sus experimentos.

Luego se varían los parámetros adimensionales más relevantes, para medir su influencia sobre el comportamiento de los campos de velocidad y temperaturas. Estas variables son en concreto: F_{bf} , ψ , Da , Br , Pe , α_c/ε_h^2 .

5.1. Evaluación del caso base

Saedodin *et al.* [2017] utilizaron un canal de 7 cm de ancho, 1.3 cm de altura y 80 cm de largo; un caudal de agua de 1.5 L/min, y un medio poroso de 20 poros por pulgada. Se sabe que la velocidad promedio es igual al caudal entre el área transversal, de ahí los valores para las siguientes variables:

$$H = 0.013 \text{ m}$$

$$L = 0.800 \text{ m}$$

$$u_\infty = 0.0275 \text{ m/s}$$

Poros por pulgada (PPI) = 20

Dentro del propio trabajo de Saedodin *et al.* [2017] se encuentra la investigación de Calmidi y Mahajan [2000] donde se encuentran datos para medios porosos de 20 PPI, concretamente son los siguientes:

$$\phi = 0.9546$$

$$K = 1.30e^{-7} \text{ m}^2$$

$$c_F = 0.093$$

$$(k_{eff})_{bf} = 3.735 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$$

Las propiedades del fluido base (agua) se obtienen de Çengel y Cimbala [2018], para condiciones normales de temperatura y presión (20°C y 1 atm):

$$\rho_{bf} = 998 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c_{p,bf} = 4182 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$\mu_{bf} = 1.002e^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$$

$$k_{bf} = 0.598 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$$

Con apoyo de la expresión (2.35), y a partir de la porosidad, la conductividad térmica del fluido base y la conductividad efectiva, es posible aproximar la conductividad térmica de la parte sólida del canal poroso k_s , siendo esta igual a 69.695 W/(m·°C).

Alawi *et al.* [2018] presentan propiedades físicas del óxido de aluminio Al_2O_3 actuando como nanopartículas en agua, siendo estas la densidad ($\rho_{np}=3970 \text{ kg}/\text{m}^3$) y el calor específico ($c_{p,np}=765 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$).

Para la placa colectora se asume que está hecha de aluminio de 1/4" (0.00635 m) de espesor. A condiciones normales, el aluminio tiene una conductividad térmica k_w de 237 W/(m·°C).

Como se discutió en la sección 2.1.1, un valor promedio para el calor absorbido S , al menos para Ciudad de México, ronda los 500 W/m². Para un valor conservador de coeficiente de pérdida global de 10 W/(m²·°C).

En base a los datos anteriores, las variables adimensionales tienen los valores de:

$$\varepsilon = 0.016250$$

$$\varepsilon_h = 0.0079375$$

$$Da = 0.00076923$$

$$F_{nf} = 31.611$$

$$Pe = 399.48$$

$$Br = 0.00015155$$

$$\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 129.91$$

$$Bi = 0.00026793$$

$$\rho^* = 3.9780$$

$$c_p^* = 0.18293$$

$$k^* = 116.55$$

Además, una diferencia de temperatura característica $\Delta T_c = 0.01340$ °C. Para el caso donde existe una concentración volumétrica de nanopartículas del 5 %, las propiedades respecto a las del fluido base están relacionadas de la siguiente forma:

$$\frac{\rho_{nf}}{\rho_{bf}} = (1 - \psi) + \psi \rho^* = 1.1489 \quad (5.1)$$

$$\frac{(\rho c_p)_{nf}}{(\rho c_p)_{bf}} = (1 - \psi) + \psi \rho^* c_p^* = 0.98638 \quad (5.2)$$

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = \frac{1}{(1 - \psi)^{2.5}} = 1.1368 \quad (5.3)$$

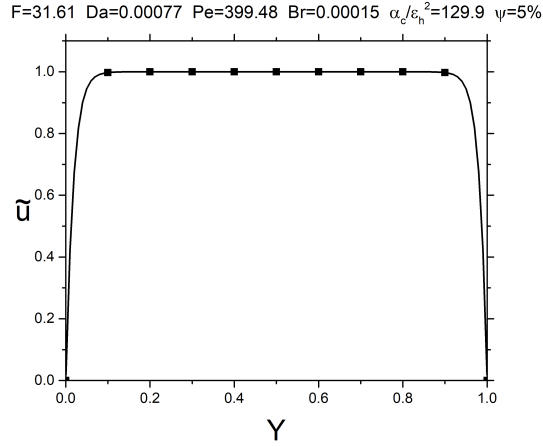
$$\frac{(k_{eff})_{nf}}{k_{bf}} = (1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\psi) = 6.3890 \quad (5.4)$$

Con estos datos se obtienen las gráficas de las siguientes páginas. Retomando la ecuación (3.20), un análisis de escalas, en la capa límite de espesor δ , revela que:

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{u_\infty}{\delta^2} \sim \frac{\mu_{nf}}{K} u_\infty, \frac{\rho_{nf} C_F}{\sqrt{K}} u_\infty^2 \quad (5.5)$$

Los términos corresponden, de izquierda a derecha, a los fenómenos de Brinkman, Darcy y Forchheimer. La expresión se puede reducir considerando

Figura 5.1: Campo de velocidad adimensional para el caso base.



que la densidad y viscosidad del nanofluido son del orden que las propiedades del fluido base; además, al multiplicar por H^2 para normalizar el espesor respecto a la altura del canal, se tiene:

$$\frac{H^2}{\delta^2} \sim \frac{\phi H^2}{K}, \frac{\rho_{bf} \phi c_F u_\infty H^2}{\mu_{bf} \sqrt{K}} \quad (5.6)$$

Al sustituir los valores para el caso base, y considerando sólo el término de Darcy, se obtiene:

$$\frac{\delta}{H} \sim 0.0284 \quad (5.7)$$

Y para sólo término de Forchheimer:

$$\frac{\delta^2}{H^2} \sim 0.0296 \quad (5.8)$$

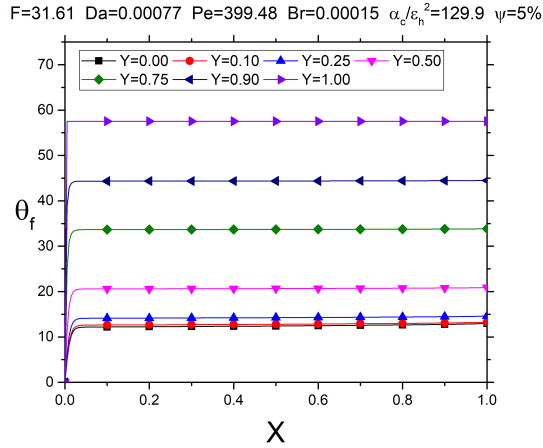
Esto revela que el efecto de Forchheimer en el flujo es levemente mayor que el de Darcy, aunque siguen siendo del mismo orden. Y en este caso concreto se tiene que:

$$\frac{\rho_{bf} \phi c_F u_\infty H^2}{\mu_{bf} \sqrt{K}} \sim \frac{\phi H^2}{K} \quad (5.9)$$

$$\therefore \frac{\rho_{bf} u_\infty \sqrt{K} c_F}{\mu_{bf}} \sim 1 \quad (5.10)$$

Este resultado concuerda con lo presentado en la figura 5.1, donde el espesor adimensional de la capa donde los efectos viscosos de las paredes ralentizan al flujo es alrededor de 0.1.

Figura 5.2: Variación de θ_f a lo largo del canal, para distintos valores de Y .



Por otra parte, la temperatura del nanofluido varía poco cercano a la pared inferior en $Y = 0.0$, donde existe la condición adiabática, y a manera que se desplaza hacia arriba, θ_{nf} aumenta con mayor rapidez, siendo máximo en la interfaz con la placa plana para $Y = 1.0$ (ver Fig. 5.2), esto puede deberse a que dentro del medio poroso inundado, el calor se disipa rápidamente en el fluido.

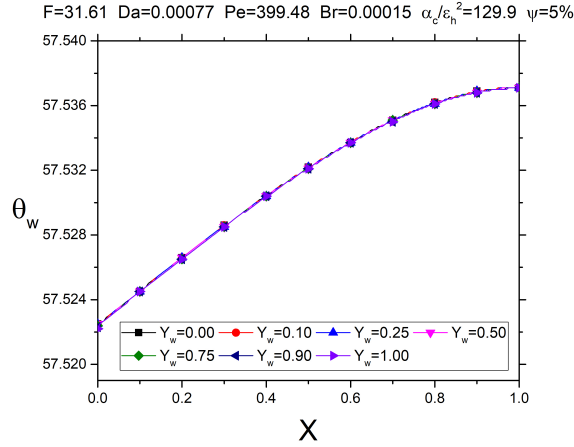
En la placa plana, no existe variación significativa de la temperatura respecto a la coordenada Y_w (ver Fig. 5.3), esto concuerda con la aproximación de aleta descrita por Jiji [2009], donde la variación de la temperatura en la dirección transversal es despreciable, y sólo se consideran cambios longitudinales. El criterio para esta condición es que el número de Biot (Bi) sea mucho menor que la unidad, algo que concuerda con el caso aquí evaluado.

Un aspecto aún más relevante es que tanto se ha mejorado la transferencia de calor respecto al caso de flujo libre, para ello se trae a nueva cuenta la ecuación (2.2), para el flujo másico igual al producto de la densidad por la velocidad promedio que atraviesa una sección $A_t = WH$:

$$\dot{Q}_u = \rho_{bf} c_{p,bf} u_\infty WH (\bar{T}_{f,s} - \bar{T}_{f,e}) \quad (5.11)$$

Que deberá ser igual al calor absorbido por la placa colectora (ec. 2.1):

$$\dot{Q}_u = WL [S - U_L (\bar{T}_p - T_\infty)] \quad (5.12)$$

Figura 5.3: Variación de θ_w a lo largo del canal, para distintos valores de Y_w .

Note que $\bar{T}_{f,e} = T_\infty$. Al despejar para la diferencia de temperatura del fluido:

$$\bar{T}_{f,s} - T_\infty = \frac{L [S - U_L (\bar{T}_p - T_\infty)]}{\rho_{bf} c_{p,bf} u_\infty H} \quad (5.13)$$

Para la diferencia de temperaturas ($\bar{T}_p - T_\infty$) como:

$$\bar{T}_p - T_\infty = \Delta T_c \int_0^1 \theta_w(X, 0) dX \quad (5.14)$$

De los datos obtenido de la simulación se obtiene que $(\bar{T}_p - T_\infty) = 0.7707^\circ\text{C}$, por tanto, la diferencia de temperaturas entre la salida y entrada del flujo libre es:

$$\bar{T}_{f,s} - T_\infty = 0.2640^\circ\text{C} \quad (5.15)$$

Para comparar con el medio porosos inundado con nanofluido, no se puede utilizar directamente la temperatura promedio a la salida pues no todo el flujo se mueve a la misma velocidad, una mejor aproximación sería:

$$\overline{u(Y) (T_{nf}(L, Y) - T_\infty)} = u_\infty \Delta T_c \int_0^1 \tilde{u}(Y) \theta_{nf}(1, Y) dY \quad (5.16)$$

Si se divide el lado derecho entre la velocidad de referencia u_∞ , se puede obtener un valor promedio de $(\bar{T}_{nf}(L, Y) - T_\infty) = 0.3253^\circ\text{C}$, que representa un aumento del 23% respecto del caso de flujo libre.

A continuación se evalúa la variación en el comportamiento de los campos de velocidad y temperatura con la concentración de nanopartículas, y los números de Darcy, Forchheimer, Brinkman y Péclet, y el parámetro conjugado.

5.2. Variación de los campos de velocidad y temperatura

5.2.1. Concentración de nanopartículas

Figura 5.4: Variación de la velocidad \tilde{u} con la concentración de partículas ψ .

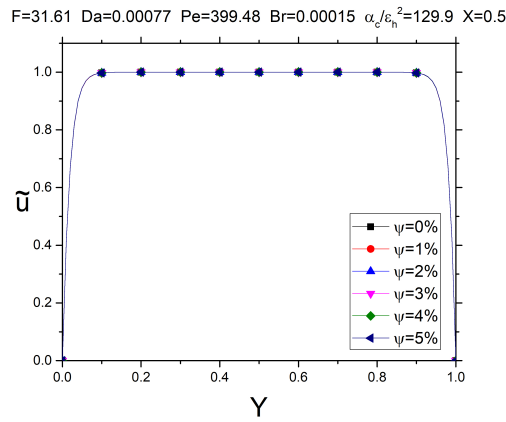
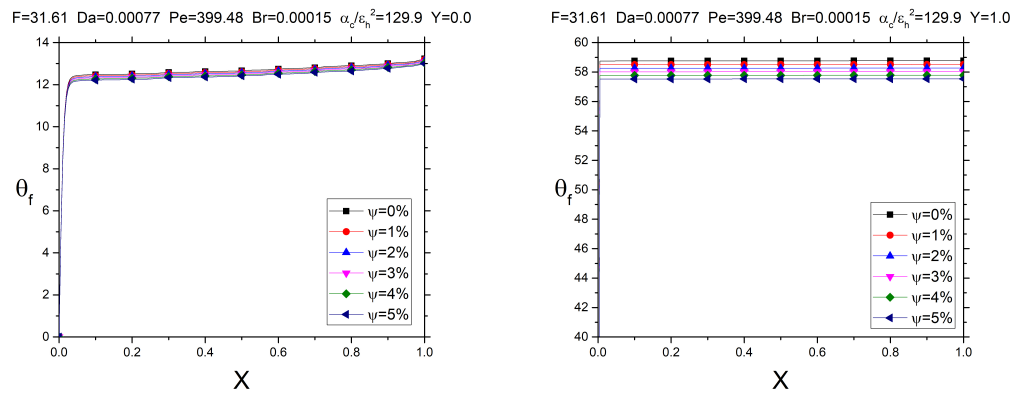


Figura 5.5: Variación de θ_{nf} con la concentración en el canal poroso.



(a) Para $Y = 0.0$

(b) Para $Y = 1.0$

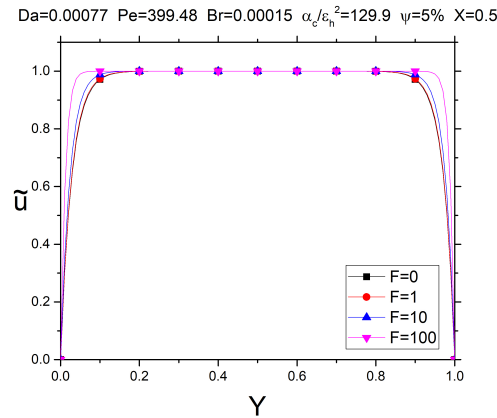
Al evaluar el producto $(1 - \psi)^{2.5}[(1 - \psi) + \psi\rho^*]$ para una concentración del 5 %, se obtiene 1.011. Este leve incremento afecta sólo al término de Forchheimer en la ecuación de momento (ec. 3.54), y dado que este elemento es del

mismo orden que el término de Darcy, la concentración, a bajos valores, tiene efecto nulo sobre la velocidad, este se observa en la figura 5.4, donde los diferentes campos de velocidad se sobreponen.

Otro escenario diferente sucede al evaluar el campo de temperatura en el nanofluido, pues como se observa en la figura 5.5, existe una leve disminución de θ_{nf} al aumentar la concentración, entre el caso sin nanopartículas y con concentración del 5% existe una reducción general del 2% de la temperatura adimensional. Tras observar la expresión de energía adimensional (ec. 3.70), una explicación tras la leve reducción de la temperatura sería que existe una alteración en el término convectivo o en la disipación viscosa, incluso en ambos de manera simultánea, pues la concentración de nanopartículas afecta directamente a estos dos fenómenos.

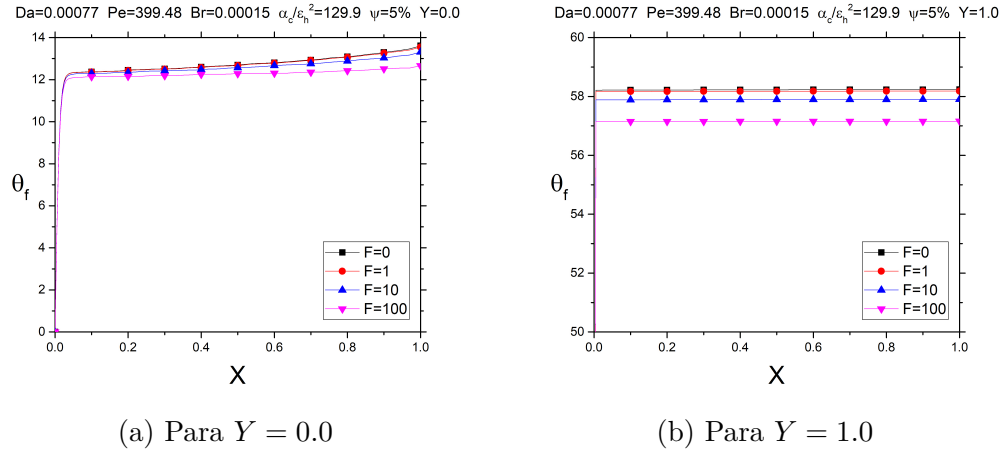
5.2.2. Número adimensional F

Figura 5.6: Variación de la velocidad \tilde{u} con el número F_{bf} .

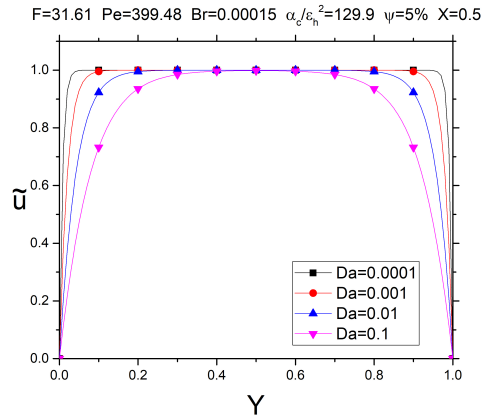


El número F_{bf} relaciona los efectos inerciales, de porosidad y de arrastre con las fuerzas viscosas. Un número elevado de este número significa que la condición de no deslizamiento con las paredes actúa sobre una capa límite más pequeña (ver Fig. 5.6), lo que se traduce en una mayor velocidad promedio del fluido en el canal.

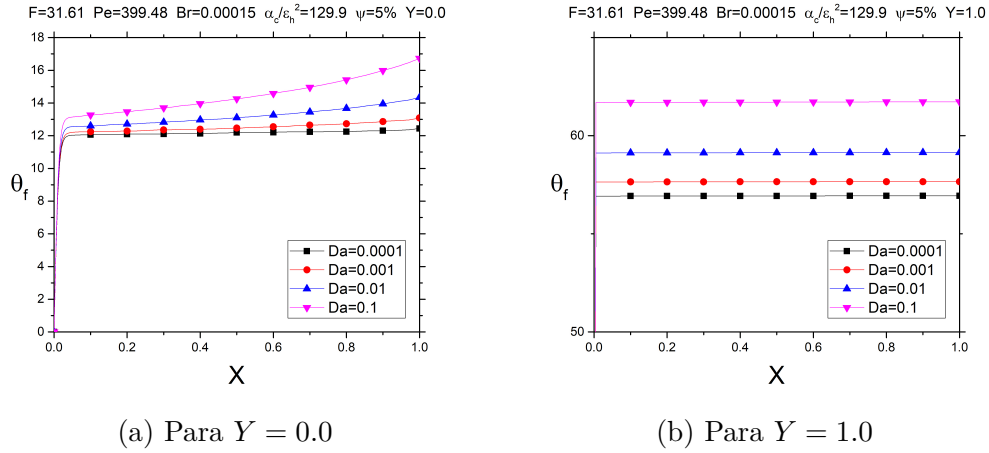
Dado que en promedio, el fluido se mueve más rápido, los fenómenos convectivos aumentan y el calor se disipa más rápido. Esto se ve reflejado en una disminución de la temperatura del nanofluido, como se puede observar en la figura 5.7.

Figura 5.7: Variación de θ_{nf} con el número F_{bf} en el canal poroso.

5.2.3. Número de Darcy

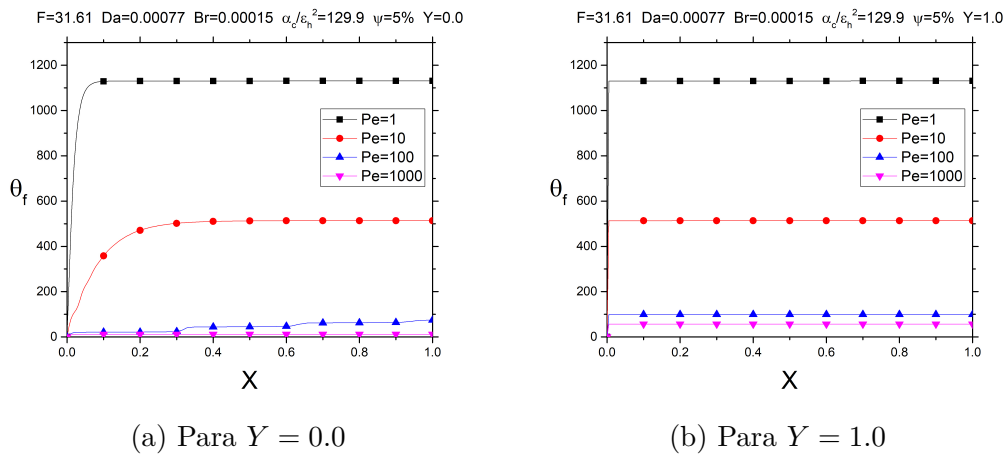
Figura 5.8: Variación de la velocidad \tilde{u} con el número F_{bf} .

El número Da mide la permeabilidad del medio en una dirección específica, en este caso, la transversal, y afecta a dos términos de la ecuación de momento (ec. 3.55), pero atañe más al término de Darcy. Los efectos de la pared se extienden hacia el centro del canal cuando la permeabilidad es mayor o el canal es más angosto, lo que se traduce en un mayor número Da . Esto se observa en la figura 5.8, a mayor Da el perfil de velocidad adquiere una forma tipo parabólica, algo que sucede en los flujos laminares en ductos.

Figura 5.9: Variación de θ_{nf} con el número de Darcy en el canal poroso.

Similar que con el caso del número F_{bf} , cuando la velocidad promedio del flujo disminuye, así lo hace también los efectos convectivos, y la temperatura aumenta (ver Fig. 5.9).

5.2.4. Número de Péclet

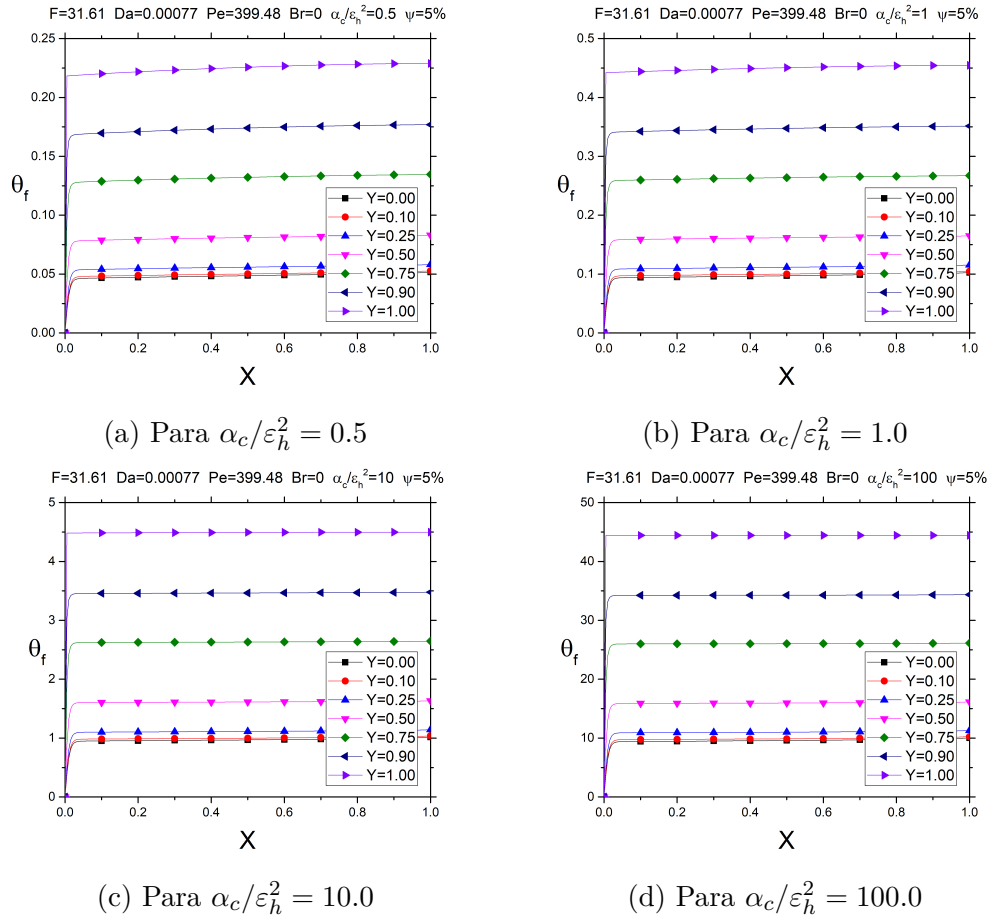
Figura 5.10: Variación de θ_{nf} con el número de Péclet en el canal poroso.

Dado que este número no aparece en las ecuaciones de momento, no se

contemplan variaciones en el campo de la velocidad. Aunque, como se comentó en los casos anteriores, existe una relación inversa entre los efectos convectivos del flujo y la temperatura del medio, y esto se observa claramente en la figura 5.10, pues el número Pe interviene directamente en el término convectivo de la ecuación de la energía del nanofluido.

5.2.5. Número de Brinkman y parámetro conjugado

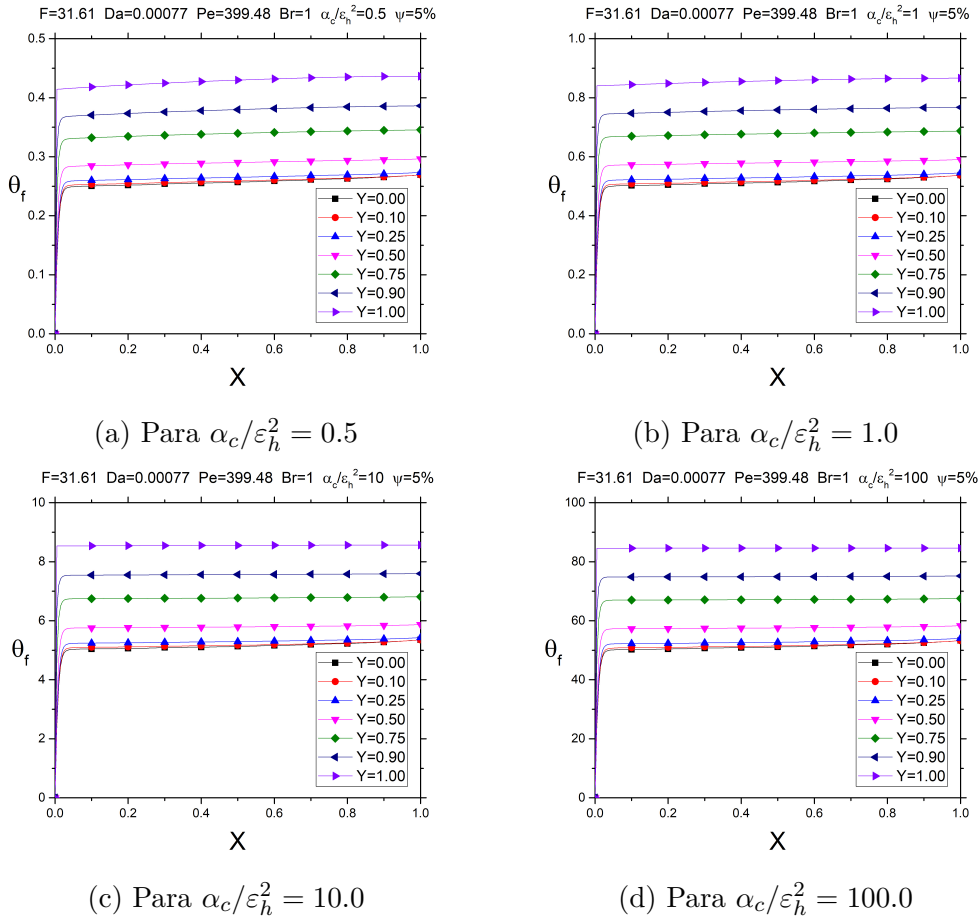
Figura 5.11: Variación de θ_{nf} con el parámetro conjugado para $Br=0.0$ en el canal poroso.



Una cosa a notar es el producto $Br \alpha_c/\varepsilon_h^2$ que afecta al término de disipación viscosa de la ecuación de la energía del flujo. Aunque el parámetro conjuga-

do α_c/ε_h^2 ejerce influencia sobre la condición de flujo de calor entre la placa colectora y el medio poroso.

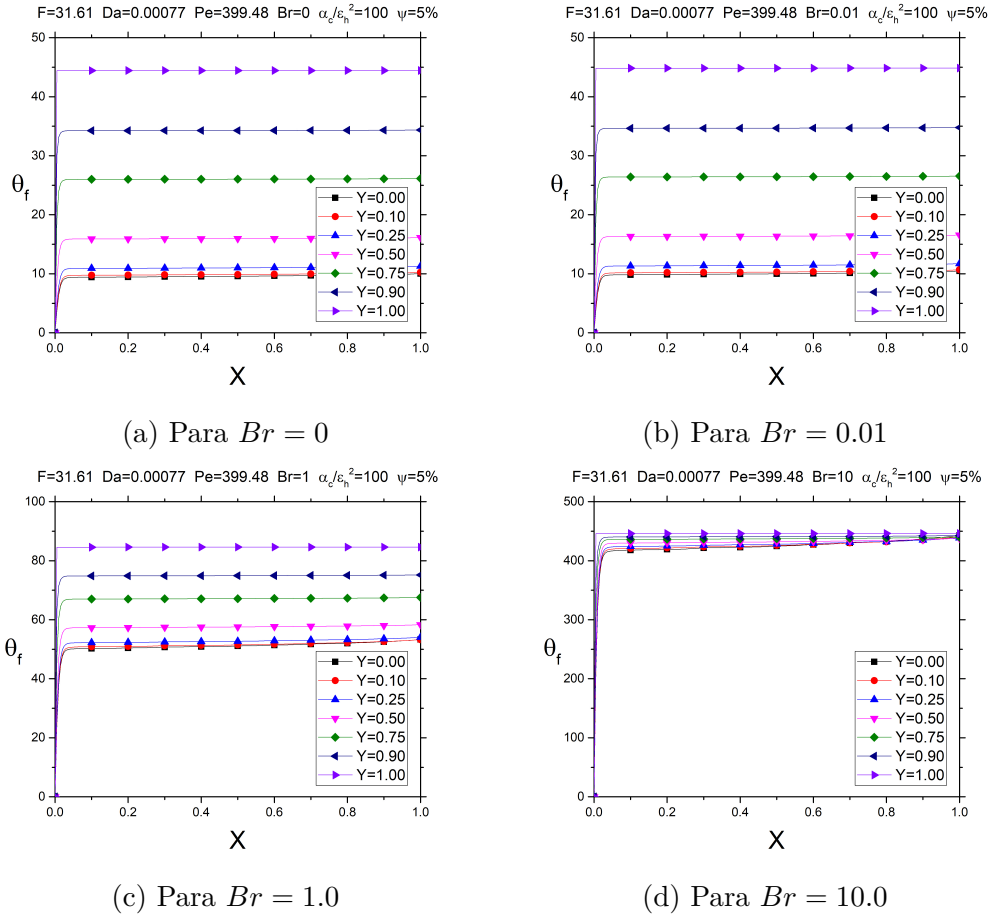
Figura 5.12: Variación de θ_{nf} con el parámetro conjugado para $Br=1.0$ en el canal poroso.



De las figuras anteriores se observa que la temperatura del nanofluido varía directamente proporcional con el parámetro conjugado, pues cuando este se duplica o se decuplica, también lo hace θ_{nf} en una proporción similar. Para saber si es por efecto de disipación viscosa o una mejor transferencia de calor con la placa colectora, es preciso analizar al número Br por aparte.

De la figura 5.13 se observa que para valores de $Br < 1$, no hay variación aparente de θ_{nf} . Aunque, a manera incremental Br , también lo hace la temperatura adimensional y las curvas de nivel se juntan hasta el punto de empezar

Figura 5.13: Variación de θ_{nf} con el número Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2=100.0$ en el canal poroso.



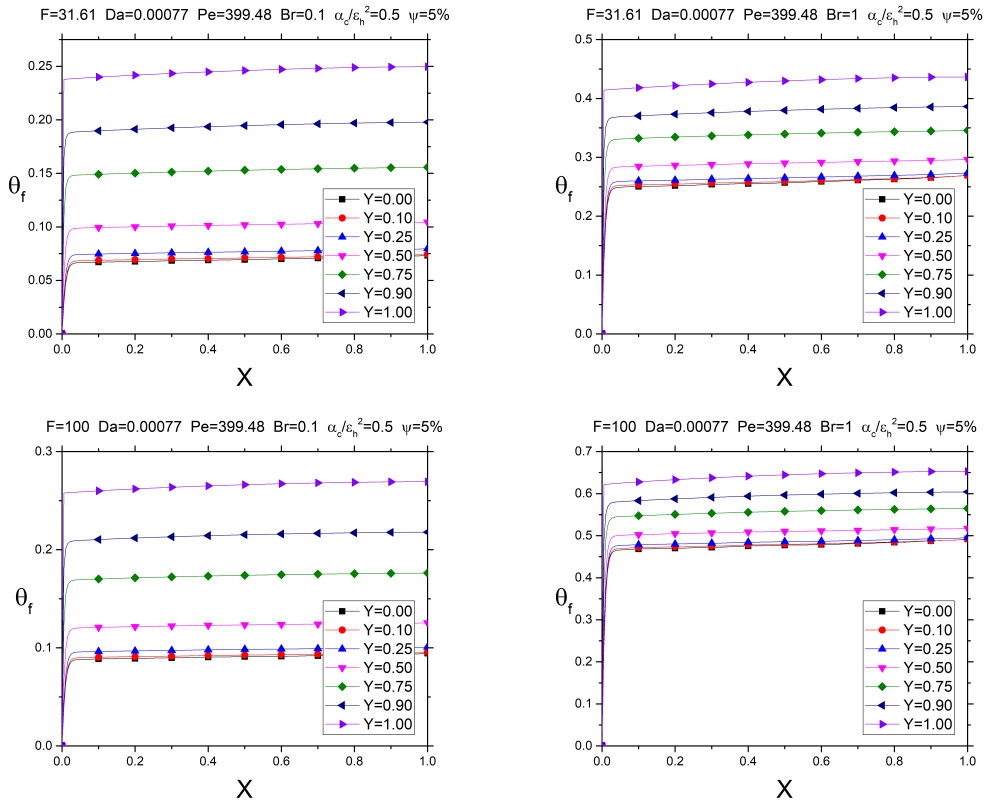
a cruzarse unas con otras.

Dado que con cambio del parámetro conjugado no existe modificación relevante en la forma de las líneas de nivel, pero sí para la variación con Br; esto da a entender que el número de Brinkman tiene mayor efecto sobre la disipación viscosa, lo que lleva a cuestionar sobre en qué punto los efectos viscosos superan al flujo de calor por radiación.

5.2.6. Intercambio de efectos de radiación y disipación viscosa

Dado que el número de Péclet no tiene efecto sobre la disipación viscosa o el flujo de calor desde la placa plana, no será tomado en cuenta en este análisis. Aclarado eso, se busca encontrar una correlación entre los parámetros involucrados con Φ , que corresponden a los números F_{bf} , Da , Br y α_c/ε_h^2 .

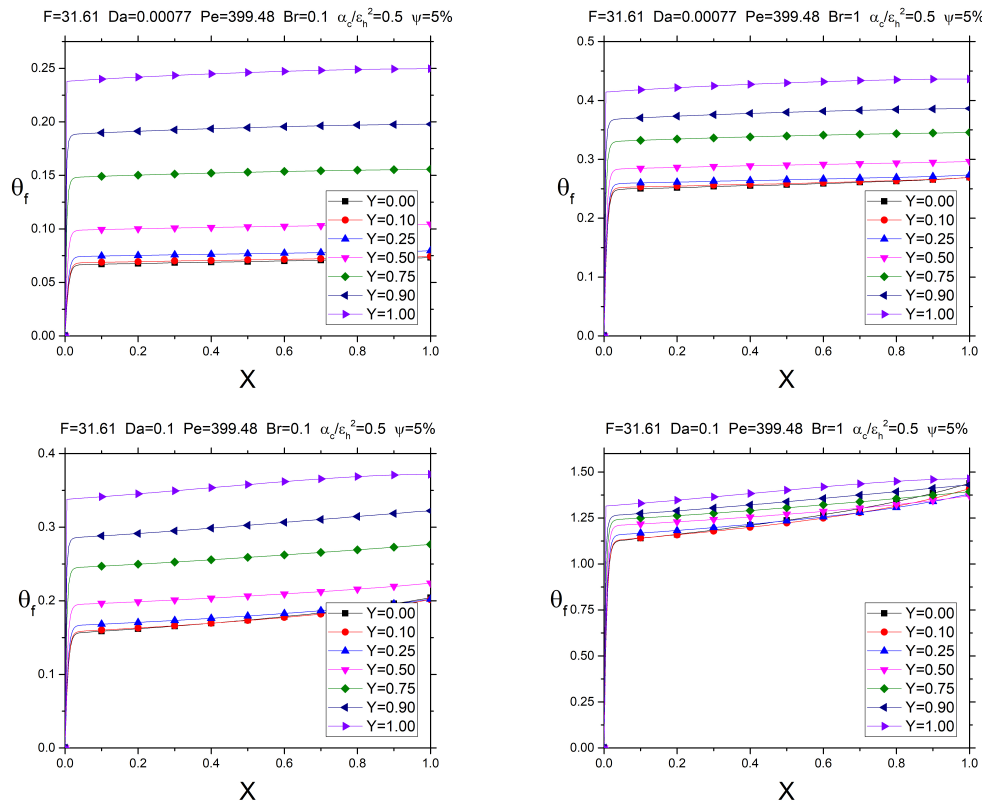
Figura 5.14: Evaluación de θ_{nf} con F_{bf} y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 0.5$ en el canal poroso.



Al observar la figura 5.14, contrario a lo observado en la sub-sección 5.2.2, existe un leve incremento de la temperatura adimensional con el aumento del valor de F_{bf} , esto se debe a que el número de Brinkman es lo suficientemente grande para que la disipación viscosa sea relevante (figuras del lado izquierdo), además, el número de Darcy es muy pequeño, por lo que el arrastre debido a

las paredes del canal actúa sobre una capa límite más pequeña. Si Br aumenta (figuras de la derecha), el efecto de F_{bf} se ve potenciado, pues las isolíneas se elevan y se disponen más cerca una de otras. Aún así, la máxima temperatura se da en la interfaz con la placa colectora, por lo que el flujo de calor que proviene de la misma sigue influenciando más al flujo que el calor generado en la disipación viscosa Φ .

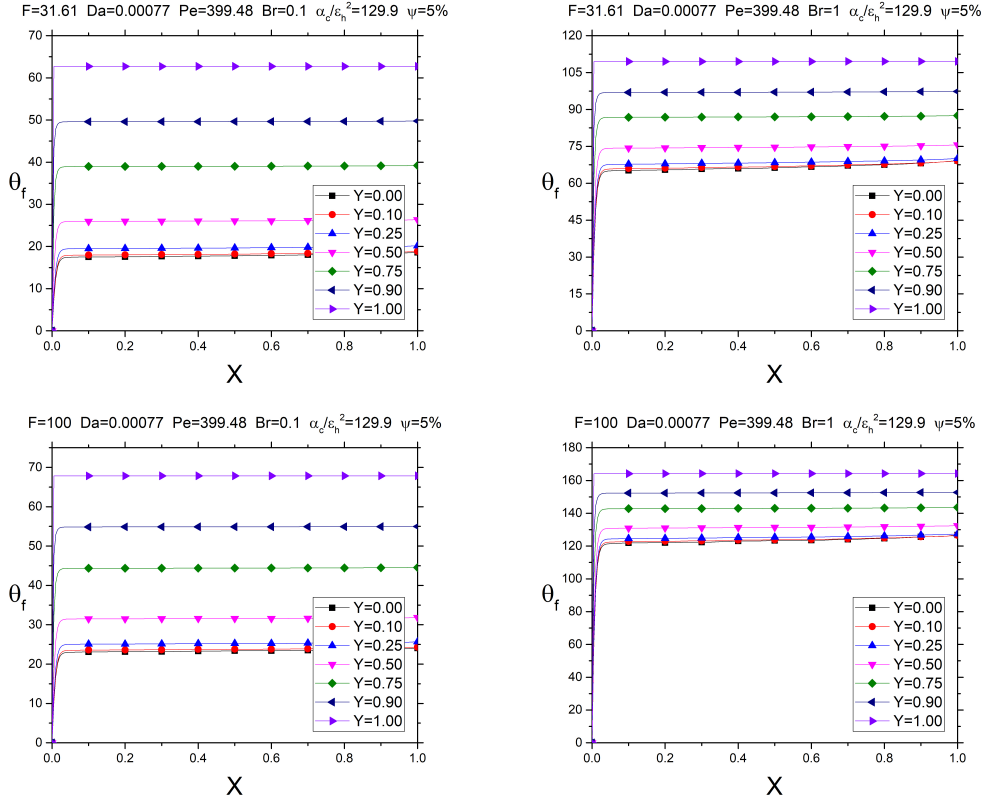
Figura 5.15: Evaluación de θ_{nf} con Da y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 0.5$ en el canal poroso.



Repetiendo el mismo procedimiento ahora con número de Darcy, se observa siempre el aumento de θ_{nf} , además, cuando los efecto de Φ están potenciados ($Br=1.0$), la diferencia de temperatura adimensional en la parte inferior del canal ($Y=0.0$) es mayor que en otros puntos dentro del ducto, aunque nunca mayor que la temperatura en la interfaz. Se repite el mismo análisis, pero ahora para un parámetro conjugado mayor.

Al comparar las figuras 5.14 y 5.16, que miden el efecto del número adimen-

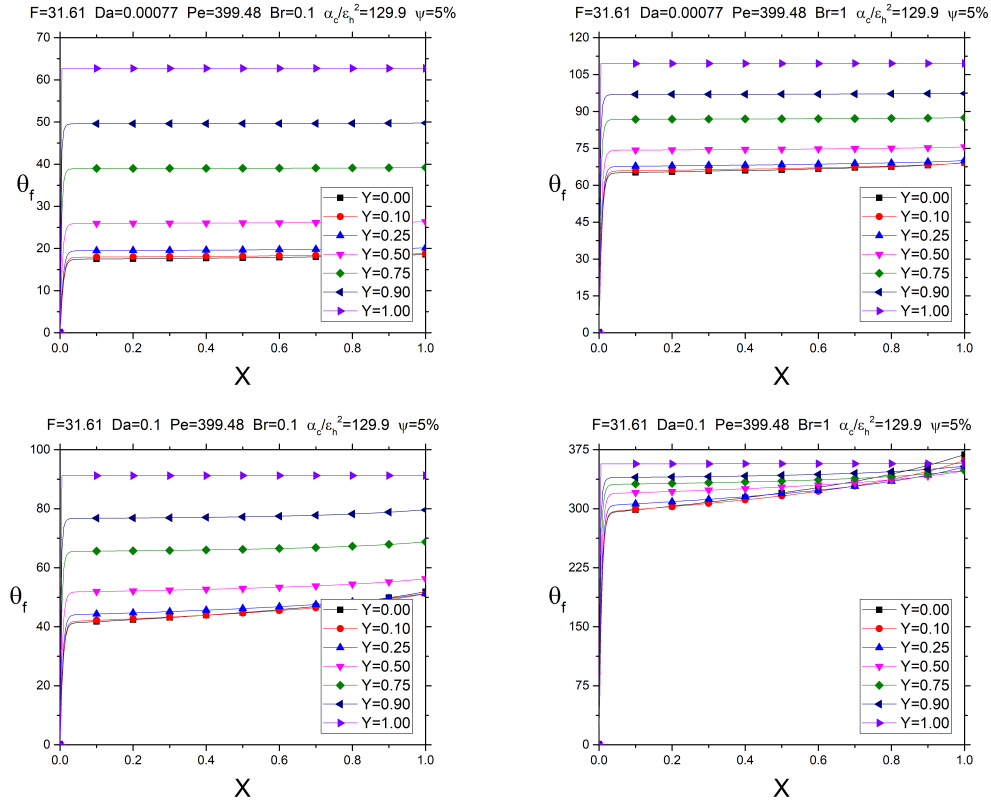
Figura 5.16: Evaluación de θ_{nf} con F_{bf} y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 129.9$ en el canal poroso.



sional F_{bf} para un límite de pared térmicamente grueso ($\alpha_c/\varepsilon_h^2 < 1$) y el límite delgado ($\alpha_c/\varepsilon_h^2 > 1$), respectivamente; se observa un aumento de temperatura con el incremento del parámetro conjugado, algo que se se había notado previamente, a pesar del incremento, las líneas de nivel guardan la misma forma distribuidas sobre un rango de temperaturas mayor.

Para cambios en el número de Darcy, cuando el sistema conjugado (placa plana y nanofluido) posee un parámetro α_c/ε_h^2 elevado, y además, el número de Brinkman es relativamente grande, se está hablando de $Br \geq 1$ para el caso en concreto, sucede que la disipación viscosa se sobrepone al flujo de calor que proviene de la placa colectora, y que es producto de la radiación solar. Es decir, para números de Darcy y Brinkman elevados y un sistema en el límite térmicamente delgado (parámetro conjugado mayor que la unidad), el factor Φ

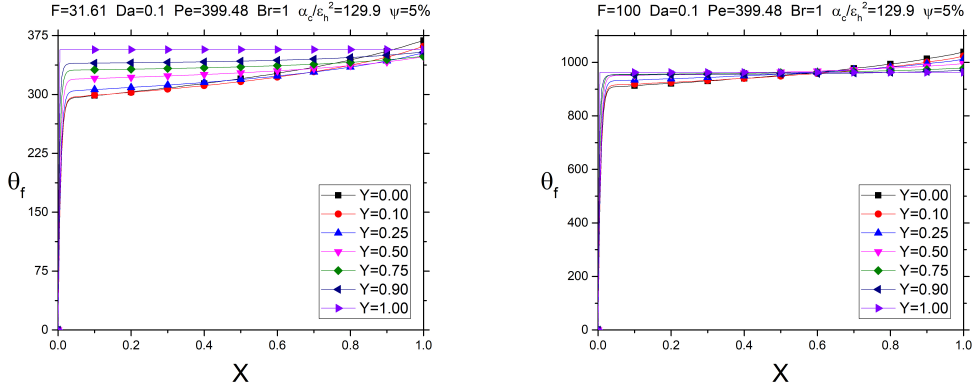
Figura 5.17: Evaluación de θ_{nf} con Da y Br para $\alpha_c/\varepsilon_h^2 = 129.9$ en el canal poroso.



puede sobreponerse a los efectos convectivos y conductivos de la ecuación de energía.

Cuando el número de Darcy es elevado, el parámetro F_{bf} ejerce mayor influencia sobre el flujo, esto se observa en la figura 5.18, donde un aumento de F_{bf} , para Darcy de 0.1, se traduce en un incremento proporcional en la temperatura adimensional θ_{nf} , además, el punto de cruce entre las líneas de nivel $Y=0.0$ y $Y=1.0$ se desplaza hacia la izquierda. Este cruce es un indicador de la relación entre la disipación viscosa y el flujo de calor por radiación, y dado que se ve desplazado hacia la entrada del canal, quiere decir que el calor generado por Φ es dominante en la mayor parte del ducto poroso.

Figura 5.18: Evaluación del cambio de θ_{nf} con F_{bf} para Da y Br elevados.



5.2.7. Efectos de las nanopartículas

Como se observó en sub-sección 5.2.1, si se quisiera aumentar la temperatura del nanofluido, utilizar bajas concentraciones de nanopartículas no sería opción, pues tienden a reducir los valores de θ_{nf} . Ahora, con una mayor información sobre los efectos de otras variables sobre el flujo, se analiza si existen casos donde utilizar nanopartículas sea favorable.

Los campos de velocidades de un flujo sin nanopartículas ($\psi = 0\%$) y con concentración al 5% son prácticamente idénticos (ver Fig. 5.4), no existe influencia de las partículas sobre la velocidad del flujo. Por tanto, el hecho que exista una variación del campo de temperatura se debe a que se ven afectados los fenómenos convectivos o la disipación viscosa.

De los casos presentados en la figura 5.19, en ninguno se aprecia que la temperatura para ψ del 5% sea mayor que el caso sin nanopartículas. Los casos presentados son para un número de Brinkman de 0.00015, que es el calculado para los valores prácticos.

Para un número de Brinkman relativamente mayor (ver Fig. 5.20), aunque sin ser mayor a la unidad, pues es donde la disipación viscosa puede superar al calor por radiación, incrementos de F_{bf} y de Da producen que las nanopartículas tenga un efecto favorable sobre el incremento de la temperatura θ_{nf} , en especial para aumentos del número de Darcy.

Figura 5.19: Comparación de perfiles de temperatura θ_{nf} a la salida del canal poroso respecto a la concentración ψ para $Br=0.00015$.

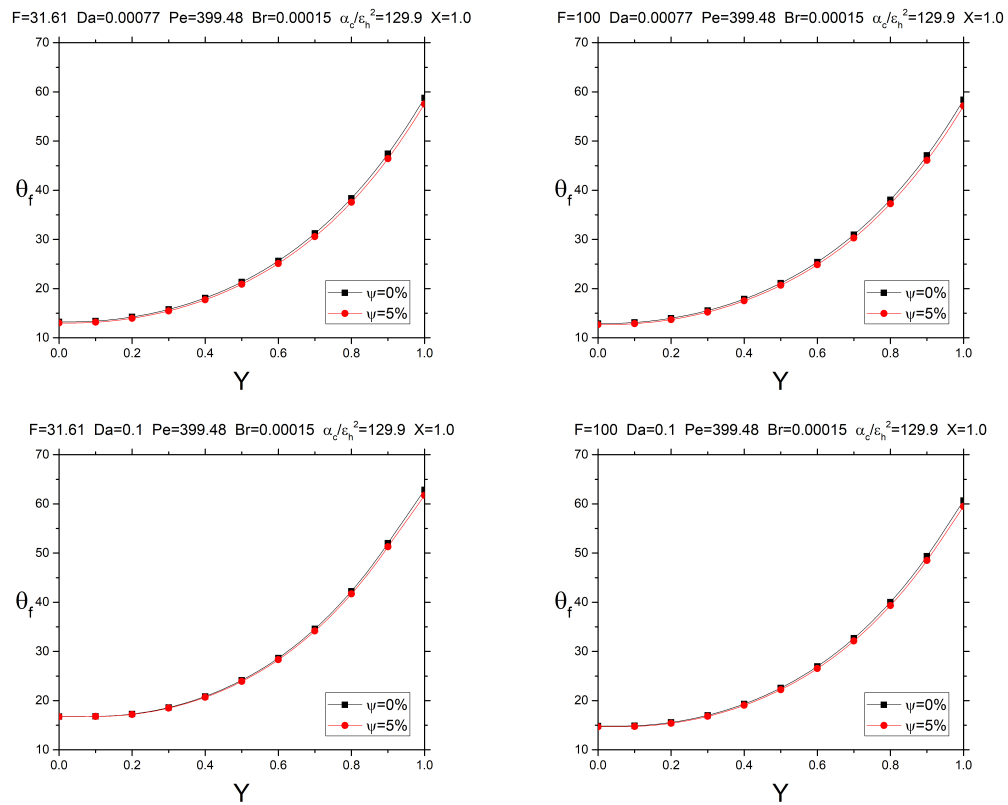
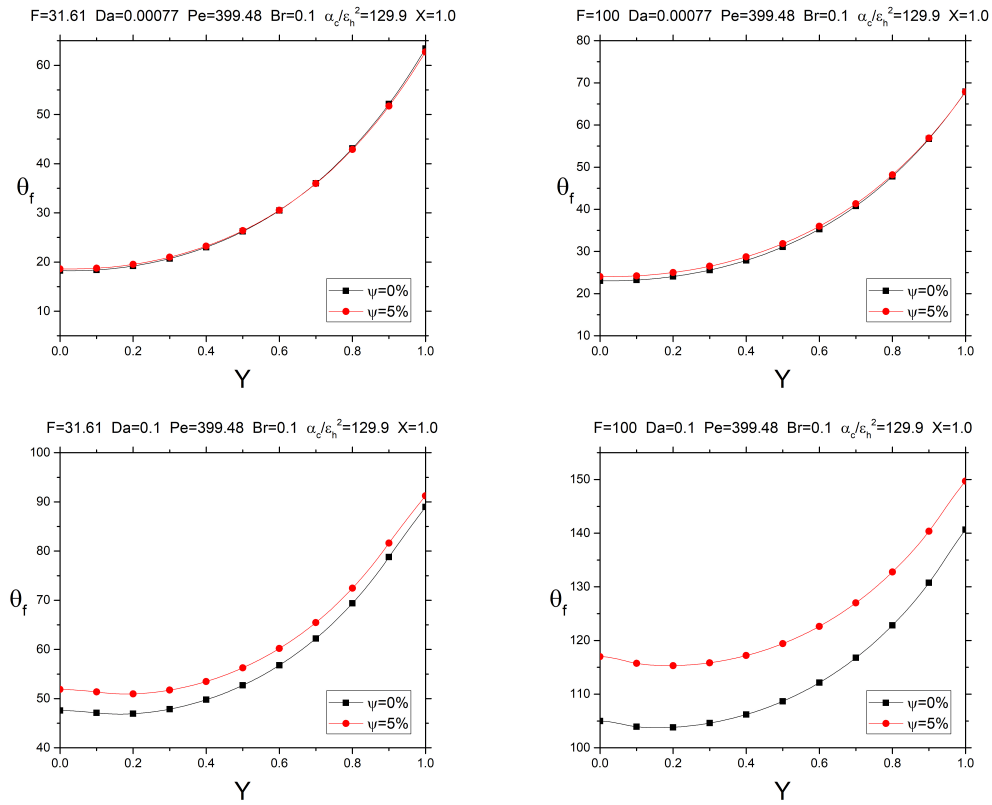


Figura 5.20: Comparación de perfiles de temperatura θ_{nf} a la salida del canal poroso respecto a la concentración ψ para $Br=0.1$.



Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de investigación se aplicó un análisis de órdenes de magnitud para determinar las variables adimensionales a utilizar en las ecuaciones que describen la velocidad del flujo y las temperaturas del medio poroso y placa plana; de las cuales sobresalen la variable F_{bf} (relacionado con el término Forchheimer), los números de Darcy, Brinkman y Péclet; y además, un parámetro conjugado α_c/ε_h^2 , que relaciona las resistencias térmicas de la placa colectora y el nanofluido.

Las expresiones matemáticas obtenidas, al ser no lineales, no se pueden resolver fácilmente por métodos analíticos, por lo que se recurre a las técnicas numéricas, en concreto, al método de elementos finitos que para ser implementado requiere conocer la forma débil de las ecuaciones diferenciales a resolver. Dicho sea de paso que para obtener el problema variacional, en algunos casos, las formulaciones tuvieron que ser modificadas, convirtiéndose del tipo pseudo-transitorias.

A través de la investigación bibliográfica se determinaron valores comunes para la permeabilidad, la porosidad, el coeficiente de Forchheimer c_F , el tamaño de los canales, el espesor de la placa colectora, así como propiedades termodinámicas como la densidad, el calor específico, la viscosidad y la conductividad térmica de los diferentes elementos que componen el sistema integrado; con estos valores se realizaron las primeras simulaciones que demostraron, para una concentración de nanopartículas del 5 %, un incremento de la temperatura θ_{nf} de más del 20 %, respecto a un flujo bajo las mismas condiciones, excepto que sin la obstrucción del medio poroso ni nanopartículas.

Para estas primeras simulaciones, el número de Darcy es particularmente pequeño, de forma que, a pesar que el factor F_{bf} también es bajo, el efecto del arrastre cuadrático de Forchheimer es relevante en el movimiento del flujo.

El número de Péclet es moderadamente elevado, algo esperado de un fluido en movimiento donde los efectos convectivos tiene más peso en la transferencia de calor que la conducción. El número de Brinkman es muy pequeño, lo cual se traduce como una baja o nula influencia de la disipación viscosa sobre la temperatura del medio. Por otra parte, el parámetro conjugado α_c/ε_h^2 demuestra que el sistema se encuentra en el límite térmicamente delgado (valores mayores a 1) y existe un excelente intercambio de calor entre la placa colectora y el medio poroso. Por último, el comportamiento de la placa sólida concuerda con el de una aleta con un bajo número de Biot, que también es el resultado aquí obtenido. En resumen, el incremento de temperatura mencionado en el párrafo anterior aplica para: valores de Br y Bi muy pequeños, Da bajos, F_{nf} y Pe moderados, y en el límite térmicamente delgado.

En el caso de la velocidad del flujo, los parámetros que dictan la forma del perfil son F_{bf} y Da. Por otra parte, la concentración de nanopartículas tiene efecto nulo, pues aumenta la densidad del fluido y disminuye su viscosidad, y dado que ambas propiedades afectan al término de Forchheimer, se cancelan entre sí. El número F_{bf} , similar al número de Reynolds, relaciona las fuerzas inerciales de la parte fluida del medio poroso y que son proporcionales al arrastre de Forchheimer, respecto a los efectos viscosos del fluido base. Un incremento en este número significa que la viscosidad tiene menor influencia sobre el flujo, lo que reduce el arrastre con las paredes del canal, haciendo que el fluido se mueva a una velocidad adimensional promedio más cercana a la unidad. En cuanto al número de Darcy, que mide la permeabilidad del medio en la dirección transversal, tiene un comportamiento contrario al número F_{bf} , pues un incremento de Da refuerza los efectos de flujo en el eje Y, y la capa límite hidrodinámica respecto a las paredes del ducto se amplía, reduciendo la velocidad promedio del flujo.

El comportamiento de la temperatura adimensional θ_{bf} con los factores F_{bf} y Da, varía dependiendo del valor del número de Brinkman, dado que este último relaciona el calor generado por disipación viscosa en referencia al calor conducido [Brodkey y Hershey, 2003], en este caso, desde la placa plana al medio poroso. Si $Br \ll 1$, entonces los efectos de Φ son despreciables, y por tanto, F_{bf} y Da tienen influencia sólo sobre el fenómeno convectivo en el flujo. Y ya que el número F_{bf} promueve la velocidad y, por ende, la convección, la temperatura se ve reducida pues se disipa mejor en el flujo. En otro orden de cosas, aumentos del número de Darcy, como se explicó, reflejan un frenado en el flujo, los efectos convectivos se reducen frente a los conductivos, y la variable θ_{nf} se ve potenciada. Mientras que para un valor de Brinkman significativo ($Br > 0.1$), la disipación viscosa se ve potenciada, y cualquier incremento, ya sea

de F_{bf} o de Da , siempre producirá un aumento de la temperatura del fluido de trabajo.

El efecto del número de Péclet sobre la temperatura del flujo es más directo, pues este representa la relación del calor transportado por convección sobre el transferido por conducción dentro del flujo [Brodkey y Hershey, 2003]. Un aumento de Pe representa que los fenómenos de transporte convectivo están intensificados y el calor se disipa mejor, lo que se ve reflejado en una disminución de la temperatura θ_{nf} . Lo inverso sucede con una reducción del número de Péclet.

El parámetro conjugado α_c/ε_h^2 representa la relación entre la resistencia térmica del fluido base sobre la de la pared colectora. Independientemente del valor del número de Brinkman, un aumento de α_c/ε_h^2 siempre produce un intensificación de la temperatura θ_{nf} . Esto se debe a dos razones, primero porque está relacionado positivamente con la disipación viscosa, es decir, si el parámetro sube en valor, también lo hace el término Φ . Y segundo, este parámetro representa la relación entre las resistencias térmicas del fluido base y la pared, si α_c/ε_h^2 disminuye, el medio poroso inundado actúa como un aislante térmico atrapando, por así decirlo, al calor en la placa plana.

Como se observa en la figura 5.17, en el límite térmicamente delgado ($\alpha_c/\varepsilon_h^2 > 1$), incrementos del número de Darcy no son suficientes para que la disipación viscosa sobrepase al calor proveniente de la placa plana, salvo para un Brinkman igual a la unidad. Quiere decir que, cuando la disipación viscosa es elevada, incrementos en la permeabilidad o en los efectos inerciales en el flujo producirán el calor suficiente para superar la radiación transferida en la placa colectora.

Bajas concentraciones de nanopartículas afectan a los fenómenos convectivos y de disipación viscosa. Cuando este último ejerce un efecto mínimo sobre la energía del flujo ($Br \ll 1$), las nanopartículas influyen levemente sobre el transporte de energía por convección, reduciendo la temperatura del flujo. Al intentar fomentar la disipación viscosa, las bajas concentraciones de nanopartículas no aumentan ni disminuyen la temperatura del flujo, salvo al incrementar los fenómenos inerciales (incrementos de F_{bf}) o la permeabilidad del medio (aumento de Da), en cuyo caso se reportan temperaturas adimensionales θ_{nf} hasta un 7% mayores.

El trabajo aquí presentado se desarrolló bajo la suposición que existe un equilibrio térmico entre la parte sólida del medio poroso y el fluido que lo inunda; aunque recientes estudios, como el de Pati *et al.* [2022], han determinado los criterios para seleccionar el modelo adecuado entre el equilibrio y el no-equilibrio térmico. Pues resulta que bajo las condiciones aquí desarrolladas: fluidos a bajas velocidades circulando por una matriz sólida de alta conducti-

vidad térmica, el comportamiento de la temperatura se explica mejor bajo el supuesto del no-equilibrio térmico local. Este estudio puede considerarse como una primera aproximación al problema, que sirve para verificar o rechazar la existencia de un incremento en la eficiencia del colector solar al incorporar un medio poroso; y ya que los resultados así lo demuestran, vale la pena seguir estudiando el fenómeno, para lo cual, el siguiente paso sería desarrollar el problema utilizando un modelo más certero.

Bibliografía

- AL-HADHRAMI, A., ELLIOTT, L., Y INGHAM, D. A New Model for Viscous Dissipation in Porous Media Across a Range of Permeability Values. *Transport in Porous Media* **53**:117–122 (2003)
- ALAWI, O.A., SIDIK, N.A.C., XIAN, H.W., KEAN, T.H., Y KAZI, S. Thermal conductivity and viscosity models of metallic oxides nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **116**:1314–1325 (2018)
- BEAVERS, G.S., SPARROW, E.M., Y RODENZ, D.E. Influence of Bed Size on the Flow Characteristics and Porosity of Randomly Packed Beds of Spheres. *Journal of Applied Mechanics* **40**(3):655–660 (1973)
- BRINKMAN, H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Applied Science Research* **1**:27–34 (1949)
- BRINKMAN, H.C. The Viscosity of Concentrated Suspensions and Solutions. *The Journal of Chemical Physics* **20**(4):571–571 (1952)
- BRODKEY, R. Y HERSHEY, H. *Transport Phenomena: A Unified Approach*. Chemical engineering series. Brodkey Pub. (2003)
- CALMIDI, V.V. Y MAHAJAN, R.L. Forced Convection in High Porosity Metal Foams . *Journal of Heat Transfer* **122**(3):557–565 (2000)
- ÇENGEL, Y. Y CIMBALA, J. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. McGraw-Hill Education (2018)
- DUFFIE, J. Y BECKMAN, W. *Solar Engineering of Thermal Processes*. 4^a edición. Wiley (2013)
- DURLOFSKY, L. Y BRADY, J.F. Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media. *The Physics of Fluids* **30**(11):3329–3341 (1987)

- ESTIF. Solar Industrial Process Heat - State of the Art -. *Key Issues for Renewable Heat in Europe (K4RES-H)* (2006)
- FORCHHEIMER, P. Wasserbewegung durch Boden. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* **45**:1736–1741, 1781–1788 (1901)
- HAY, J.E. Y DAVIES, J.A. Calculations of the Solar Radiation Incident. En *Proceedings of First Canadian Solar Radiation Data Workshop*. Minister of Supply and Services Canada (1980)
- HECHT, F. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.* **20**(3-4):251–265 (2012)
- HSU, C. Y CHENG, P. Thermal dispersion in a porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **33**(8):1587–1597 (1990)
- INCROPERA, F.P., DEWITT, D.P., BERGMAN, T.L., Y LAVINE, A.S. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 6^a edición. John Wiley & Sons (2007)
- JIJI, L.M. *Heat Conduction*. 3^a edición. Springer (2009)
- JOSEPH, D.D., NIELD, D.A., Y PAPANICOLAOU, G. Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium. *Water Resources Research* **18**(4):1049–1052 (1982)
- KUMAR, A. Y SUBUDHI, S. *Thermal Characteristics and Convection in Nanofluids*. Springer Singapore (2021)
- KUNITZ, M. An Empirical Formula for the relation between Viscosity of Solution and Volume of Solute. *Journal of General Physiology* **9**(6):715–725 (1926)
- LIU, B.Y. Y JORDAN, R.C. The long-term average performance of flat-plate solar-energy collectors: With design data for the U.S., its outlying possessions and Canada. *Solar Energy* **7**(2):53–74 (1963)
- LUNDGREN, T.S. Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. *Journal of Fluid Mechanics* **51**(2):273–299 (1972)
- MARTYS, N., BENTZ, D.P., Y GARBOCZI, E.J. Computer simulation study of the effective viscosity in Brinkman's equation. *Physics of Fluids* **6**(4):1434–1439 (1994)

- MITCHELL, J. Heat transfer from spheres and other animal forms. *Biophysical Journal* **16**(6):561–569 (1976)
- NIELD, D. Y BEJAN, A. *Convection in Porous Media*. 5^a edición. Springer Cham (2017)
- NIELD, D. Resolution of a Paradox Involving Viscous Dissipation and Non-linear Drag in a Porous Medium. *Transport in Porous Media* **41**:349–357 (2000)
- OCHOA-TAPIA, J. Y WHITAKER, S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I. Theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **38**(14):2635–2646 (1995)
- PAK, B.C. Y CHO, Y.I. Hydrodynamic and Heat Transfer Study of Dispersed Fluids with Submicron Metallic Oxide Particles. *Experimental Heat Transfer* **11**(2):151–170 (1998)
- PATI, S., BORAH, A., BORUAH, M.P., Y RANDIVE, P.R. Critical review on local thermal equilibrium and local thermal non-equilibrium approaches for the analysis of forced convective flow through porous media. *International Communications in Heat and Mass Transfer* **132**:105889 (2022)
- REDDY, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3^a edición. McGraw-Hill, Inc (2006)
- REINDL, D., BECKMAN, W., Y DUFFIE, J. Evaluation of hourly tilted surface radiation models. *Solar Energy* **45**(1):9–17 (1990)
- RUBINSTEIN, J. Effective equations for flow in random porous media with a large number of scales. *Journal of Fluid Mechanics* **170**:379–383 (1986)
- SAEDODIN, S., ZAMZAMIAN, S., NIMVARI, M.E., WONGWISES, S., Y JOUYBARI, H.J. Performance evaluation of a flat-plate solar collector filled with porous metal foam: Experimental and numerical analysis. *Energy Conversion and Management* **153**:278–287 (2017)
- SAEEDINIA, M., AKHAVAN-BEHABADI, M., Y NASR, M. Experimental study on heat transfer and pressure drop of nanofluid flow in a horizontal coiled wire inserted tube under constant heat flux. *Experimental Thermal and Fluid Science* **36**:158–168 (2012)

- Servicio Solarimétrico Mexicano. *Datos* (s.f.). Accedido el 30 de Enero de 2023 a través de <https://rayenari.geofisica.unam.mx/mexico/datsolar.html>.
- SPARROW, E.M., RAMSEY, J.W., Y MASS, E.A. Effect of Finite Width on Heat Transfer and Fluid Flow about an Inclined Rectangular Plate. *Journal of Heat Transfer* **101**(2):199–204 (1979)
- TIMOFEEVA, E., GAVRILOV, A., MCCLOSKEY, J., TOLMACHEV, Y., SPRUNT, S., LOPATINA, L., Y SELINGER, J. Thermal conductivity and particle agglomeration in alumina nanofluids: Experiment and theory. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* **76**:061203 (2008)
- VAFAI, K. *Handbook of Porous Media*. 2ª edición. Taylor & Francis (2005)
- VAJJHA, R.S. Y DAS, D.K. Specific Heat Measurement of Three Nanofluids and Development of New Correlations. *Journal of Heat Transfer* **131**(7) (2009)
- WARD, J.C. Turbulent Flow in Porous Media. *Journal of the Hydraulics Division* **90**(5):1–12 (1964)
- WOODING, R.A. Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium. *Journal of Fluid Mechanics* **2**(3):273–285 (1957)
- XUAN, Y. Y ROETZEL, W. Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **43**(19):3701–3707 (2000)
- YU, C.J., RICHTER, A., DATTA, A., DURBIN, M., Y DUTTA, P. Molecular layering in a liquid on a solid substrate: an X-ray reflectivity study. *Physica B: Condensed Matter* **283**(1):27–31 (2000)
- ZHOU, L.P., WANG, B.X., PENG, X.F., DU, X.Z., Y YANG, Y.P. On the Specific Heat Capacity of CuO Nanofluid. *Advances in Mechanical Engineering* **2**:172085 (2010)
- ZHOU, S.Q. Y NI, R. Measurement of the specific heat capacity of water-based Al₂O₃ nanofluid. *Applied Physics Letters* **92**(9):093123 (2008)