Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

BREVE INTRODUCCIÓN A LOS D-ESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

JUAN RAMÓN RODRÍGUEZ CÓRDOVA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO DARÍO ROJAS SÁNCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO,
2023

1. Datos del alumno
Rodríguez
Córdova
Juan Ramón
5632853311
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
418004489

2. Datos del tutor
Dr.
Alejandro Darío
Rojas
Sánchez

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Javier
Páez
Cárdenas

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Alejandro
Ríos
Herrejón

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Elmer Enrique
Tovar
Acosta

7. Datos del trabajo escrito
Breve introducción a los D-espacios
87 p
2023

Para Rafael, mi padre,
que su recuerdo y todo su amor
queden inmortalizados junto a
los teoremas de esta tesis.

Índice general

Introducción

Los D-espacios fueron introducidos por primera vez por Eric K. van Douwen en el año de 1979 en [12]. A partir de ese momento y hasta la actualidad, los D-espacios han sido objeto de gran interés, resultando en una amplia variedad de trabajos sobre sus propiedades y las relaciones que existen con otras propiedades de cubiertas.

El objetivo de esta tesis es crear un material introductorio a los D-espacios, recopilando y desarrollando de la manera más detallada posible las propiedades básicas de estos, así como los ejemplos más importantes. Todo esto con la intención de que el presente material sirva como uno de estudio a toda aquella persona interesada en el tema. He intentado mantener los requisitos para entender este trabajo lo más accesibles posibles, sin embargo, es necesario aclarar que se espera que el lector cuente con los conocimientos equivalentes a un curso de Teoría de Conjuntos II (sobre todo de ordinales, recursión e inducción transfinita) y de un curso de Topología General I.

El trabajo estará dividido en tres capítulos:

En el primer capítulo se motivará e introducirá la noción de D-espacio. Veremos una propiedad que cumple con dos funciones cardinales: el grado de Lindelöf y la extensión, la cual nos permitirá saber cuándo algunos espacios no son D-espacios. Tendremos un primer acercamiento a ejemplos de D-espacios, como lo son los espacios métricos y la recta de Sorgenfrey, entre otros. Finalizaremos con dos equivalencias para los D-espacios, ligadas a un concepto conocido como "conjuntos pegajosos".

En el segundo capítulo procederemos a estudiar las propiedades topológicas básicas con las que cuentan los D-espacios. Comenzaremos con la heredabilidad a subespacios cerrados y, de manera más general, a subespacios F_σ. Para ello también será necesario probar que la propiedad de ser D-espacio se preserva bajo uniones numerables de subespacios cerrados. Después veremos que la suma topológica se comporta bien con los D-espacios, pero tendremos problemas cuando se trate del producto, donde únicamente podremos probar que en algunos casos muy particulares el producto de D-espacios es nuevamente un D-espacio. También probaremos que las imágenes continuas y cerradas y las preimágenes perfectas y continuas de D-espacios son D-espacios.

Finalmente, en el tercer capítulo estudiaremos varias clases de espacios topológicos que resultarán ser D-espacios, algunas de las cuales nos aportarán generalizaciones a resultados previos de este texto. Veremos que todos los espacios σ-compactos, semiestratificables y los que tienen bases punto-numerable o bases débiles punto-numerable son D-espacios. Por último, probaremos que dentro de los espacios ordenados generalizados ser D-espacio es equivalente a ser paracompacto.

Capítulo 1

Introducción a los D-espacios

Todos los espacios topológicos considerados a lo largo del texto cumplirán el axioma de separación T_2 además de contar con al menos dos puntos.

1.1. D-espacios

Consideremos un espacio topológico (X, τ) y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Si quisiéramos dar un subconjunto de $\mathcal{U}$ que siga cubriendo a todo el espacio X lo único de lo que deberíamos preocuparnos es de estar tomando para cada punto $x \in X$ al menos una vecindad de éste que esté en $\mathcal{U}$. Si además nos interesa tomar la menor cantidad posible de elementos de $\mathcal{U}$ con los cuales podamos seguir cubriendo a todo X podemos simplemente respaldarnos del Axioma de Elección y para cada $x \in X$ elegir una única vecindad U_x de x que esté en $\mathcal{U}$. Por construcción, el conjunto $\mathcal{V} := \{U_x : x \in X\}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$ con $|\mathcal{V}| \leq |X|$. El argumento anterior no sólo nos dice que toda cubierta abierta tiene una subcubierta a lo más tan grande como el espacio mismo, sino que también nos permite ver que podemos traducir la noción de cubierta abierta en términos de funciones donde a cada punto le asignamos una vecindad suya. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.1. Dados (X, τ) un espacio topológico y $\varphi : X \to \tau$ una función, decimos que φ es una *asignación de vecindades abiertas* si y sólo si para todo $x \in X$ se satisface que $x \in \varphi(x)$.

Para nuestra conveniencia, para su uso futuro en este texto abreviaremos el término “asignación de vecindades abiertas” como **“a. v. a.”**.

Naturalmente, podemos encontrar la forma de traducir ciertas propiedades de cubierta en términos de las asignaciones de vecindades abiertas. El caso más claro es con los espacios compactos:

Sea X un espacio topológico. Si suponemos que X es compacto y tomamos φ una a. v. a. cualquiera, resulta que $\varphi[X]$ es una cubierta abierta de X por lo que debe de existir una subcubierta finita de $\varphi[X]$, lo cual significa que existe un conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $\varphi[F]$ cubre al espacio. Al revés seguirá siendo cierto, si suponemos que para toda asignación de vecindades abiertas de X existe un subconjunto finito de X tal que su imagen bajo la función sigue cubriendo a todo el espacio y tomamos a $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de éste, ya sabemos que podemos dar una a. v. a., φ, de X tal que $\varphi[X]$ es subcubierta de $\mathcal{U}$, y por hipótesis debe de existir $F \subseteq X$ finito tal que $\bigcup \varphi[F] = X$, por lo que $\varphi[F]$ es la subcubierta finita de $\mathcal{U}$ buscada. De aquí tenemos la siguiente equivalencia:

Proposición 1.1.2. *Sea X un espacio topológico. X es compacto si y sólo si para toda φ asignación de vecindades abiertas de X existe $F \subseteq X$ finito tal que $\bigcup \varphi[F] = X$.*

La proposición anterior nos brinda una equivalencia en donde la compacidad de un espacio X está en términos de subconjuntos finitos de X, abriendo así la puerta para preguntarnos por las propiedades topológicas de dichos subconjuntos. Lo primero que podemos notar es que para un espacio cualquiera X y D un subconjunto finito de éste, por el axioma T_2 podemos concluir que D es un conjunto cerrado y discreto. Luego, si además pedimos que X sea compacto podemos concluir que para toda a. v. a., φ, de X existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $\bigcup \varphi[D] = X$. Ahora bien, podrá parecer que las propiedades de ser cerrado y discreto son completamente arbitrarias en un principio, pero estudiando a los subconjuntos cerrados y discretos de los espacios compactos podremos obtener que ésta es una caracterización para los subconjuntos finitos en este tipo de espacio.

Lo anterior lo podemos observar de la siguiente manera: para un espacio compacto X, si $D \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y discreto podemos tomar $\mathcal{V} := \{U_x : x \in D\}$ conjunto de abiertos tal que para toda $x \in D$ ocurre que $U_x \cap D = \{x\}$. Así, el conjunto $\mathcal{U} = \{X \setminus D\} \cup \mathcal{V}$ será una cubierta abierta de X tal que cualquiera de sus subcubiertas debe de contener a $\mathcal{V}$, y como X es compacto esto implica que $\mathcal{V}$ es finito, o lo que es lo mismo, D es finito. Es decir, dentro de un espacio compacto ser un subconjunto finito es equivalente a ser un subconjunto cerrado y discreto.

Sin embargo, la hipótesis de que para cualquier asignación de vecindades abiertas φ de un espacio X existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $\bigcup \varphi[D] = X$ no implica que X sea compacto. Basta tomarse a ω con la topología discreta el cual no es un espacio compacto pero $D := \omega$ es el subconjunto cerrado y discreto que funcionará para cualquier a. v. a..

En vista de que no estamos en presencia de una equivalencia para los espacios compactos procedemos a dar la definición principal de este trabajo:

Definición 1.1.3. Dado X un espacio topológico. X es un *D-espacio* si y sólo si para toda φ asignación de vecindades abiertas existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que

$$\bigcup \varphi[D] = X.$$

Un *núcleo* para φ será cualquier subespacio D que sea cerrado, discreto y cumpla que $\bigcup \varphi[D] = X$.

La discusión previa nos da nuestro primer resultado que relaciona a los espacios compactos y los D-espacios:

Proposición 1.1.4. *Si X es un espacio compacto entonces X es un D-espacio.*

No debería resultar extraño que los subespacios cerrados y discretos jueguen un papel importante al tratarse de propiedades de cubierta. Una técnica a la que se recurre con frecuencia es dados un espacio X y D un subespacio cerrado y discreto, construir una cubierta abierta $\mathcal{U}$ tal que toda subcubierta tiene un tamaño mayor o igual a $|D|$. Esto nos indica que el menor tamaño posible para una subcubierta de una cubierta abierta estará limitado por qué tan grandes son los subespacios cerrados y discretos del espacio en cuestión. Afortunadamente, existen dos funciones cardinales que nos ayudarán a expresar esta idea de una manera formal y más completa:

Definición 1.1.5. Dado X un espacio topológico, la *extensión* de X, $e(X)$, se define como el supremo de las cardinalidades de los subespacios de X que son cerrados y discretos, es decir:

$$e(X) := \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ es cerrado y discreto}\}.$$

Definición 1.1.6. Dado X un espacio topológico, el *grado de Lindelöf* de X, $L(X)$, se define como el menor cardinal κ que satisface que para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta de cardinalidad menor o igual a κ.

Podemos notar que, como para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ subcubierta tal que $|\mathcal{V}| \leq |X|$, entonces $L(X) \leq |X|$.

Ahora sí, con estas dos definiciones podemos expresar de qué manera se relacionan los subespacios cerrados y discretos con el tamaño de las subcubiertas de un espacio X:

Proposición 1.1.7. *Para todo espacio topológico X se cumple que $e(X) \leq L(X)$.*

Demostración. Procedamos por contradicción y supongamos que existe un espacio topológico X tal que $L(X) < e(X)$. Esto implica que debe de existir $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $L(X) < |D|$.

Como D es discreto, para cada $x \in D$ existe V_x vecindad abierta de x tal que $V_x \cap D = \{x\}$. Además, $X \setminus D$ es un abierto de X. De esta manera podemos asegurar que $\mathcal{U} := \{V_x : x \in D\} \cup \{X \setminus D\}$ es una cubierta abierta de X, la cual satisface que para cada $x \in D$ el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene a x como elemento es V_x. Por este motivo, cualquier subcubierta de $\mathcal{U}$ debe contener a $\{V_x : x \in D\}$ y, por ende, cualquier subcubierta de $\mathcal{U}$ tiene cardinalidad mayor o igual a $|D|$.

Por otro lado, existe $\mathcal{V}$ una subcubierta abierta de $\mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{V}| \leq L(X)$, pero esto no es posible pues $|\mathcal{V}| \leq L(X) < |D|$ y acabamos de demostrar que $|D| \leq |\mathcal{V}|$.

Por la contradicción anterior podemos afirmar que para todo espacio topológico X se cumple que $e(X) \leq L(X)$. $\square$

A modo de ejemplo, para un espacio infinito X que sea compacto se dará la igualdad. Ya probamos que para X compacto es equivalente ser un subconjunto finito y ser un subconjunto cerrado y discreto, por lo que $e(X) = \sup\{|D| : D \text{ es cerrado y discreto}\} = \sup\{|F| : F \subseteq X \text{ es finito }\} = \aleph_0$ (ya que X es infinito) y, por otro lado, gracias también a que X es compacto e infinito ocurre que $L(X) = \aleph_0$. Así, $e(X) = \aleph_0 = L(X)$. Sin embargo, la igualdad no ocurre para cualquier espacio. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.8. Consideremos a $X = [0, \omega_1)$ con su topología de orden. Primero probaremos que $e(X) \leq \aleph_0$. En caso contrario debería existir $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $|D| > \aleph_0$. Con esto podemos asegurar dos cosas: primero, que existe $D' \subseteq D$ con $|D'| = \aleph_0$; y, segundo, que para cada $x \in D$ existe un abierto V_x tal que $V_x \cap D = \{x\}$. De lo anterior, podemos construir a

$$\mathcal{U} := \{V_x : x \in D'\} \cup \left\{ \bigcup_{x \in D \setminus D'} V_x \right\} \cup \{X \setminus D\},$$

una cubierta abierta numerable de X, la cual satisface que cualquier subcubierta de ésta contiene a

$$\{V_x : x \in D'\} \cup \left\{ \bigcup_{x \in D \setminus D'} V_x \right\}.$$

Esto implica que toda subcubierta es numerable lo cual es una contradicción pues X es numerablemente compacto y encontramos una cubierta numerable que no tiene subcubiertas finitas. Por lo tanto, $e(X) \leq \aleph_0$. Más aún, la igualdad se cumple. Para cada $n \in \omega$ se tiene que $\{n\}$ es una vecindad abierta de n, además de que $[0, n]$ es un cerrado en ω_1. Por lo tanto, $\omega \subseteq \{D \subseteq X : D \text{ es cerrado y discreto}\}$ y así $\aleph_0 \leq e(X)$. Luego, $e(X) = \aleph_0$.

Ahora demostraremos que $L(X) > \aleph_0$. Para ello consideremos $\mathcal{V} := \{[0, \alpha) : \alpha < \omega_1 \text{ y } \alpha \text{ es límite}\}$ la cual es una cubierta abierta de X. Notemos que cada elemento de $\mathcal{V}$ es numerable, pues para cada ordinal límite α se satisface que $[0, \alpha) = \alpha < \omega_1$. Si $\mathcal{V}$ tuviera alguna subcubierta a lo más numerable, entonces X sería igual a una unión numerable de conjuntos numerables, lo cual no es posible. De esta manera podemos concluir que $L(X) > \aleph_0$.

En conclusión, $e(X) = \aleph_0 < L(X)$.

Observemos que al demostrar que $e([0, \omega_1)) \leq \aleph_0$ no ocupamos ninguna propiedad de $[0, \omega_1)$ más que el hecho de que es numerablemente compacto, así que replicando esta misma demostración tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.1.9. *Cualquier espacio topológico X numerablemente compacto satisface que $e(X) \leq \aleph_0$. Si X es infinito entonces $e(X) = \aleph_0$.*

Por otro lado, si pensamos en X un D-espacio podemos notar lo siguiente: sabemos que para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe φ una asignación de vecindades abiertas tal que $\varphi[X] \subseteq \mathcal{U}$ y, gracias a que X es un D-espacio, sabemos que existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $\varphi[D]$ es subcubierta de $\mathcal{U}$ con $|\varphi[D]| \leq |D| \leq e(X)$. De esta manera, $e(X)$ es un cardinal que satisface que para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta de cardinalidad menor a $e(X)$, por lo que $L(X) \leq e(X)$. Esto nos da el siguiente resultado:

Teorema 1.1.10. *Si X es un D-espacio, entonces $e(X) = L(X)$.*

A pesar de que en este momento no contamos con muchos ejemplos de espacios topológicos que sean D-espacios, el Teorema 1.1.10 nos proporciona una herramienta muy útil para poder decir cuándo un espacio topológico no es un D-espacio. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.11. Retomemos al espacio $X = [0, \omega_1)$ con su topología de orden. En el Ejemplo 1.1.8 demostramos que $e(X) < L(X)$. Esto junto al Teorema 1.1.10 nos dice que X no es un D-espacio. Pero eso no es todo, $[0, \omega_1)$ con su topología de orden sí tiene una propiedad de cubierta: es un espacio numerablemente compacto. Con esto podemos concluir que ser un espacio numerablemente compacto no implica ser D-espacio.

Hasta el momento sabemos que ser un espacio compacto implica ser un D-espacio y que ser un espacio numerablemente compacto no implica ser D-espacio. En este punto es normal preguntarnos si existe relación alguna entre ser un D-espacio y alguna otra propiedad de cubierta, preguntas que hasta el momento de escribir este trabajo se mantienen abiertas. Eso sí, vale la pena hacer una mención especial. Aunque ser D-espacio no implica ser Lindelöf (bastaría pensar en un conjunto no numerable con la topología discreta) la pregunta de si todo espacio Lindelöf es un D-espacio sigue abierta, incluso llegando a ser listada como uno de los veinte mayores problemas abiertos de la topología conjuntista por Michael Hrušák y Justin Moore en [7]. A lo largo del texto veremos unas cuantas coincidencias entre los D-espacios y los espacios Lindelöf, las cuales no hacen más que acrecentar toda creencia de que la implicación es verdadera. Para causar interés en este problema abierto, hacemos del conocimiento del lector el siguiente primer resultado:

Proposición. *Si X es un espacio de Lindelöf, entonces $e(X) = L(X)$.*

Pero el alcance del Teorema 1.1.10 no se queda únicamente en darnos ejemplos de espacios que no son D-espacios:

Proposición 1.1.12. *Si X es un D-espacio numerablemente compacto, entonces X es compacto.*

Demostración. Por un lado, como X es numerablemente compacto nosotros ya sabemos por el Lema 1.1.9 que $e(X) \leq \aleph_0$. Por otro lado, ya que X es un D-espacio podemos afirmar que $L(X) = e(X) \leq \aleph_0$.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como $L(X) \leq \aleph_0$, existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ subcubierta tal que $|\mathcal{U}'| \leq \aleph_0$, lo cual nos dice que X es Lindelöf. Finalmente, por el hecho de que X es Lindelöf y numerablemente compacto podemos concluir que X es compacto. $\square$

Sin embargo, el hecho de que la extensión y el grado de Lindelöf de un espacio topológico sean iguales no será suficiente para caracterizar a un D-espacio. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.13. Consideremos el espacio $X = \omega_1 \times [0, \omega_1)$ tomando a ω_1 con la topología discreta y a $[0, \omega_1)$ con su topología de orden.

Primero demostraremos que $e(X) = L(X) = \aleph_1$. Como

$$A := \{(\alpha, 0) : \alpha < \omega_1\}$$

es un subconjunto cerrado y discreto, entonces $\aleph_1 = |\omega_1| \leq e(X)$. También ya probamos que $L(X) \leq |X|$, por lo que

$$L(X) \leq |X| = |\omega_1 \times [0, \omega_1)| = \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1.$$

Por consiguiente, $e(X) = L(X)$.

Ahora probaremos que X no es un D-espacio. En primer lugar, como $[0, \omega_1)$ no es un D-espacio, sabemos que existe φ una a. v. a. de $[0, \omega_1)$ tal que para todo $D \subseteq [0, \omega_1)$ cerrado y discreto ocurre que $\bigcup \varphi[D] \neq [0, \omega_1)$. Definamos la siguiente a. v. a. de X:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \begin{cases} (0, \omega_1) \times [0, \omega_1), & \text{si} \quad \alpha > 0, \\ \{0\} \times \varphi(\beta), & \text{si} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Si fuera cierto que X es un D-espacio, entonces existiría $D' \subseteq X$ cerrado y discreto en X tal que $\bigcup \Psi[D'] = X$. Sea $D := \{\beta \in [0, \omega_1) : (0, \beta) \in D'\}$ y nombremos $Y := \{0\} \times [0, \omega_1)$. Como Y es un subespacio cerrado de X entonces $D' \cap Y = \{(0, \beta) : \beta \in D\}$ es cerrado y discreto en X. Considerando el homeomorfismo $f : Y \to [0, \omega_1)$ dado por $f(0, \beta) = \beta$, podemos asegurar que $f[D' \cap Y] = D$ es cerrado y discreto en $[0, \omega_1)$.

Probaremos que el subespacio D es un núcleo para la función φ, llegando así a una contradicción. Si $\gamma \in [0, \omega_1)$, entonces $(0, \gamma) \in \Psi(\alpha, \beta)$ para algún $(\alpha, \beta) \in D'$. Por la construcción de Ψ debe suceder que $\alpha = 0$ por lo que $(0, \gamma) \in \{0\} \times \varphi(\beta)$ y, en particular, $\gamma \in \varphi(\beta)$ donde $b \in D$ (por la construcción de D). Así, $\gamma \in \bigcup \varphi[D]$ y, por lo tanto, $\bigcup \varphi[D] = [0, \omega_1)$, una contradicción. Luego, X no es un D-espacio.

En resumen, X satisface que $e(X) = L(X)$ pero no es un D-espacio.

Ahora que ya hemos introducido a los D-espacios, la ausencia de ejemplos comienza a hacerse más evidente, pero antes de dar paso a ello probaremos dos lemas adicionales que, aunque bastante técnicos, nos facilitarán la prueba de que algunos espacios son D-espacios.

Lema 1.1.14. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para la topología de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es un D-espacio.

(2) Para cada función $\psi : X \to \mathcal{B}$ tal que para toda $x \in X$ se cumple que $x \in \psi(x)$, existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $X = \bigcup \psi[D]$.

Demostración. Es cierto que (1) implica (2) pues si X es un D-espacio y $\psi : X \to \mathcal{B}$ cumple que $x \in \psi(x)$ para toda $x \in X$, donde $\mathcal{B}$ es una base para su topología, en particular ψ es una a. v. a. y, por lo tanto, existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $\bigcup \psi[D] = X$.

Ahora probaremos que (2) implica (1). Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X y supongamos que X satisface (2). Sea φ una a. v. a. de X. Ya que para todo $x \in X$ ocurre que $x \in \varphi(x)$ y $\mathcal{B}$ es base, existe $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_X \subseteq \varphi(x)$. Considerando $\psi : X \to \mathcal{B}$ dada por $\psi(x) := V_x$, por hipótesis debe existir $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $\bigcup \psi[D] = X$. Así,

$$X = \bigcup \psi[D] = \bigcup_{x \in D} V_x \subseteq \bigcup_{x \in D} \varphi(x) \subseteq X,$$

es decir, $\bigcup \varphi[D] = X$. Luego, X es un D-espacio. □

Lema 1.1.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico y para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}_x$ una base local para x. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es un D-espacio.

(2) Para cada función $\psi : X \to \tau$ tal que para cada $x \in X$ se cumple que $\psi(x) \in \mathcal{B}_x$, existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $X = \bigcup \psi[D]$.

Demostración. Del mismo modo que en el Lema 1.1.14, es cierto que (1) implica (2) pues si $\psi : X \to \tau$ es una función tal que para cada $x \in X$ se cumple que $\psi(x) \in \mathcal{B}_x$, entonces para cada $x \in X$ se cumple que $x \in \psi(x)$, lo cual quiere decir que ψ es una a. v. a., y como X es D-espacio entonces existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $X = \bigcup \psi[D]$.

Procedamos a demostrar que (2) implica (1). Consideremos $\mathcal{B}_x$ una base local para cada $x \in X$. Sea φ una a. v. a. de X. Para cada $x \in X$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_x \subseteq \varphi(x)$. Así, la función dada por $\psi(x) := V_x$ es una función que a cada elemento de x le asigna un elemento de su base local. Por hipótesis, existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que

$$X = \bigcup \psi[D] = \bigcup_{d \in D} V_d \subseteq \bigcup_{d \in D} \varphi(d) = \bigcup \varphi[D] \subseteq X.$$

Por lo tanto, $X = \bigcup \varphi[D]$, es decir, X es un D-espacio. $\square$

1.2. Primeros ejemplos

Hasta este momento nuestra lista de ejemplos de D-espacios está muy limitada. En esta sección conoceremos algunos de los principales ejemplos de D-espacios, algunos de los cuales seguirán jugando un papel importante a lo largo del presente trabajo.

Teorema 1.2.1. *Todo espacio discreto es un D-espacio.*

Demostración. Sea X un D-espacio con la topología discreta. En este caso, X es un subconjunto cerrado y discreto que para cualquier a. v. a. φ satisface que $\varphi[X] = X$. Luego, X es un D-espacio. $\square$

El Teorema 1.2.1 ya nos proporciona una gran lista de ejemplos de D-espacios, aunque estos no son de nuestro mayor interés. Afortunadamente, este resultado se puede generalizar a espacios métricos, teniendo una lista más amplia e interesante de ejemplos. Para la demostración del Teorema 1.2.2 nombraremos $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Teorema 1.2.2. *Todo espacio métrico es un D-espacio*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ consideremos a la base local $\mathcal{B}_x := \{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}^*\}$. Sea φ una a. v. a. de X tal que para cada $x \in X$ se cumple que $\varphi(x) \in \mathcal{B}_x$.

Para toda $x \in X$ fijemos $n_x \in \mathbb{N}^*$ tal que $\varphi(x) = B_{\frac{1}{n_x}}(x)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ definamos $X_n := \{x \in X : n_x = n\}$. Notemos que $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} X_n$ y que si $n \neq m$ entonces $X_n \cap X_m = \emptyset$.

Para toda $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\leq_n$ una relación de orden tal que $(X_n, \leq_n)$ es un buen orden. Con esto podemos definir una relación de orden $\leq$ en X donde para cualquier $x, y \in X$, con $x \in X_n$ y $y \in X_m$, la relación $x \leq y$ ocurre si y sólo si $(n < m) \vee (n = m \wedge x \leq_n y)$. Esta relación es un orden parcial para X. Demostraremos que $(X, \leq)$ es un buen orden. Sea $A \subseteq X$ un conjunto no vacío. Sea $N := \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : A \cap X_m \neq \emptyset\}$. Como $X_N \cap A \subset X_N$ es no vacío, existe $x_A \in A \cap X_N$ elemento $\leq_N$-mínimo. Veamos que x_A es el elemento $\leq$-mínimo de A. Sean $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \in X_n$. Por definición, $N \leq n$. Si $N < n$ entonces $x_A \leq x$. Si $N = n$, entonces $x \in A \cap X_N$ por lo que $x_A \leq_N x$ y, por ende, $x_A \leq x$. En conclusión, x_A es $\leq$-mínimo en A. Por lo tanto, $(X, \leq)$ es un buen orden.

Sea γ el ordinal tal que $(x, \leq)$ y $(\gamma, \in)$ son orden-isomorfos. Consideremos $X = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ donde $x_\alpha < x_\beta$ si y sólo si $\alpha < \beta$. Construiremos un núcleo para φ por medio de recursión transfinita:

- $y_0 := \text{mín}\, X$.
- Para $\alpha < \gamma$, con $\alpha \neq 0$ definimos

$$y_\alpha := \begin{cases} \text{mín}\left(X \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta)\right), & \text{si} \quad \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) \neq X, \\ y_0, & \text{si} \quad \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) = X. \end{cases}$$

- $y_\gamma := y_0$.

Tomemos $\delta := \text{mín}\{\alpha \in \gamma+1 : 0 < \alpha \text{ y } y_\alpha = y_0\}$ y sea $D := \{y_\alpha : \alpha < \delta\}$. D es nuestro candidato a ser un núcleo para φ. Primero probemos que $\bigcup \varphi[D] = X$. Pensemos en dos casos:

Caso 1. $\delta < \gamma$.

Por construcción se cumplirá que $\bigcup\limits_{\beta<\delta} \varphi(y_\beta) = X$, es decir, $\bigcup\limits_{x\in D} \varphi(x) = X$.

Caso 2. $\delta = \gamma$.

Para cada $\alpha < \gamma$ ocurre que $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) \neq X$. Afirmamos que para toda $\alpha < \gamma$ se cumple que $x_\alpha \in \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta \leq \alpha\}$. Para $\alpha = 0$ tenemos que $x_0 = y_0 \in \varphi(y_0)$. Supongamos que para toda $\beta < \alpha$ es cierto que $x_\beta \in \bigcup\{\varphi(y_\eta) : \eta \leq \beta\}$. Entonces, $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta < \alpha\}$. Si $x_\alpha \in \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta < \alpha\}$ habremos terminado. En el otro caso, $x_\alpha \in X \setminus \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta < \alpha\}$, esto aunado al hecho de que $x_\beta \notin X \setminus \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta < \alpha\}$ para toda $\beta < \alpha$ nos permite concluir que $x_\alpha = \text{mín}\,(X \setminus \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta < \alpha\})$ y, por lo tanto, $x_\alpha = y_\alpha \in \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta \leq \alpha\}$. Concluimos que para toda $\alpha < \gamma$ se satisface que $x_\alpha \in \bigcup\{\varphi(y_\beta) : \beta \leq \alpha\}$. Luego, $X = \bigcup \varphi[D]$.

Con los dos casos anteriores queda demostrado que $X = \bigcup \varphi[D]$. Ahora resta demostrar que D es cerrado y discreto.

Primero veamos que D es discreto. Sea $y_\alpha \in D$ con $\alpha < \delta$. Por construcción, para toda $\beta > \alpha$ ocurre que $y_\beta \notin \bigcup\limits_{\eta<\beta} \varphi(y_\eta)$ y, como $\varphi(y_\alpha)$ es un subconjunto de $\bigcup\limits_{\eta<\beta} \varphi(y_\eta)$, podemos concluir que $y_\beta \notin \varphi(y_\alpha)$. Por otro lado, para toda $\beta < \alpha$ ocurre, de modo similar, que $y_\alpha \notin \varphi(y_\beta) = B_{1/n_{y_\beta}}(y_\beta)$ y por la construcción del orden $\leq$ tenemos que $n_{y_\beta} \leq n_{y_\alpha}$, de modo que $\frac{1}{n_{y_\alpha}} \leq \frac{1}{n_{y_\beta}}$. Esto junto al hecho de que $y_\alpha \notin B_{1/n_{y_\beta}}(y_\beta)$ nos dice que $y_\beta \notin B_{1/n_{y_\alpha}}(y_\alpha)$. Por lo tanto, para toda $\beta < \delta$ con $\beta \neq \alpha$ se cumple que $y_\beta \notin \varphi(y_\alpha)$. Concluimos que D es un conjunto discreto.

Para terminar probemos que D es cerrado. Sea $x \in X \setminus D$. Sabemos que existe $\alpha < \delta$ tal que $x \in \varphi(y_\alpha)$. Tomemos además

$$r := \text{mín}\left\{d(x, y_\alpha), \frac{1}{n_{y_\alpha}} - d(x, y_\alpha)\right\} > 0.$$

Debido a que $r \leq \frac{1}{n_{y_\alpha}} - d(x, y_\alpha)$ y $x \in B_{\frac{1}{n_{y_\alpha}}}(x)$ se cumple que $B_r(x) \subseteq B_{\frac{1}{n_{y_\alpha}}}(y_\alpha)$, adicionalmente $y_\beta \notin \varphi(y_\alpha)$ para toda $\beta \in \delta \setminus \{\alpha\}$, por lo que $y_\beta \notin B_r(x)$ para toda $\beta \in \delta \setminus \{\alpha\}$. Únicamente falta ver que $y_\alpha \notin B_r(x)$, pero esto es consecuencia directa de que $r \leq d(x, y_\alpha)$. Así $B_r(x) \subseteq X \setminus D$. El punto x fue un elemento cualquiera de $X \setminus D$, con lo cual podemos concluir que D es cerrado.

En resumen, D es un núcleo para φ, una a. v. a. cualquiera. Luego, X es un D-espacio. $\square$

Teorema 1.2.3. *La recta de Sorgenfrey, $\mathcal{S}$, es un D-espacio.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}_n := [n, n+1)$ visto como subespacio de $\mathcal{S}$. Demostraremos que para cada $n \in \mathbb{Z}$ el espacio $\mathcal{S}_n$ es un D-espacio. Sea $\mathcal{B}_n := \{[a,b) : n \leq a < b < n+1\}$, la cual es una base para la topología de $\mathcal{S}_n$. Sea $\varphi : \mathcal{S}_n \to \mathcal{B}_n$ una a. v. a.. Construiremos por recursión transfinita un núcleo para φ:

- $y_0 := n$.
- para $\alpha > 0$,

$$y_\alpha := \begin{cases} \operatorname{ínf}\left(\mathcal{S}_n \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta)\right), & \text{si } \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) \neq \mathcal{S}_n, \\ y_0, & \text{si } \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) = \mathcal{S}_n. \end{cases}$$

Por construcción, si $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) \neq X$ para algún ordinal α entonces se cumple que $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) = [n, y_\alpha)$.

Afirmamos que existe un ordinal α tal que $\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(y_\gamma) = \mathcal{S}_n$. Supongamos que se cumple lo contrario y tomemos a α y β ordinales con $\alpha < \beta$. Como $\bigcup\limits_{\eta\leq\alpha} \varphi(y_\eta) \neq X$ entonces $y_\alpha \in \bigcup\limits_{\eta\leq\alpha} \varphi(y_\eta) = [n, y_{\alpha+1})$, por lo cual $y_\alpha < y_{\alpha+1}$. También, ya que $y_\beta = \operatorname{ínf}\left(\mathcal{S}_n \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \varphi(y_\gamma)\right) \in [n, n+1)$ y $[n, y_{\alpha+1}) = \bigcup\limits_{\gamma\leq\alpha} \varphi(y_\gamma) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \varphi(y_\gamma)$, entonces $y_\beta \in [y_{\alpha+1}, n+1)$ y, por lo tanto, $y_{\alpha+1} \leq y_\beta$. De este modo tenemos que $y_\alpha < y_\beta$. Sin embargo, lo anterior implicaría que existe una correspondencia uno a uno de la clase de los ordinales sobre el intervalo $[n, n+1)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, existe un ordinal α tal que $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \varphi(y_\beta) = X$.

Sea α_0 el primer ordinal tal que $\bigcup\limits_{\gamma<\alpha_0} \varphi(y_\gamma) = \mathcal{S}_n$. Consideremos a $D_n := \{y_\gamma : \gamma < \alpha_0\}$. D_n es nuestro candidato a ser un núcleo para φ. Por construcción sabemos que $\bigcup \varphi[D_n] = \mathcal{S}_n$, nos falta probar que D_n es cerrado y discreto.

Primero demostremos que D_n es discreto. Sea $\alpha < \alpha_0$. Consideremos $U := \varphi(y_\alpha) \cap [y_\alpha, n+1)$. Para toda $\beta < \alpha$ se cumple que $y_\beta < y_\alpha$, implicando que $y_\beta \notin U$; por otro lado, para toda $\alpha < \beta < \alpha_0$ sabemos que $y_\beta \notin \varphi(y_\alpha)$, por construcción, por lo que $y_\beta \notin U$. De esta manera, $U \cap D_n = \{y_\alpha\}$. Así, D es discreto.

Ahora veamos que D_n es cerrado. Sea $x \in \mathcal{S}_n \setminus D_n$. Sea α el mínimo ordinal que satisface que $x \in \varphi(y_\alpha)$, con lo cual $x \notin \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(y_\gamma)$. Luego $x \in \mathcal{S}_n \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(y_\gamma) = [y_\alpha, n+1)$, por lo que $y_\alpha < x$. Sea $U := [x, n+1) \cap \varphi(y_\alpha)$. Por un lado, ya que para toda $\gamma \leq \alpha$ se cumple que $y_\gamma \leq y_\alpha < x$ entonces $y_\gamma \notin U$; en el otro caso, para toda $\delta > \alpha$ con $\delta < \alpha_0$ se tiene que $y_\delta \notin \varphi(y_\alpha)$ de donde concluimos que $y_\delta \notin U$. Entonces, $x \in U \subseteq \mathcal{S}_n \setminus D_n$. Así, D es cerrado.

Lo anterior nos diría que D_n es un núcleo para φ, a. v. a. cualquiera, lo cual implica que $\mathcal{S}_n$ es un D-espacio.

Ahora, consideremos a la base $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_n$ para $\mathcal{S}$ y $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ una a. v. a.. Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$ la restricción $\psi_n := \psi|_{\mathcal{S}_n}$ cumple que $\psi_n[\mathcal{S}_n] \subseteq \mathcal{B}_n$, por lo que existe $D_n \subseteq \mathcal{S}_n$ cerrado y discreto en $\mathcal{S}_n$ tal que $\mathcal{S}_n = \bigcup \psi_n[D_n] = \bigcup \psi[D_n]$. Tomemos $D := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Podemos notar que

$$\begin{aligned} \bigcup \psi[D] = \bigcup \psi\left[\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_n\right] &= \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \psi[D_n]\right) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\bigcup \psi[D_n]\right) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Para cualquier punto $x \in \mathcal{S}$ existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \mathcal{S}_n$, donde existe una vecindad U de x en $\mathcal{S}_n$ tal que $U \cap D_n$ es finito. U sigue siendo vecindad de x en $\mathcal{S}$, además de que $U \cap D_m = \emptyset$ si $m \neq n$. Lo anterior nos dice que la familia $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita, lo cual implica que D es cerrado y discreto.

En resumen, existe $D \subseteq \mathcal{S}$ cerrado y discreto tal que $\bigcup \psi[D] = \mathcal{S}$. Luego, $\mathcal{S}$ es un D-espacio. $\square$

Al momento de probar que $\mathcal{S}_n$ es un D-espacio hubo dos propiedades que fueron de vital importancia: poder afirmar que $\mathcal{S}_n$ menos cualquier básico tenía un ínfimo (el cual resultaba ser el mínimo de dicho conjunto) y saber que para cualquier $x, y \in \mathcal{S}_n$ los conjuntos de la forma $[x, n+1)$ y $[x, y)$ son abiertos en $\mathcal{S}_n$. De manera más general, pensar en un espacio topológico con cierto orden (o relación) que cumpla ambas propiedades debería permitirnos realizar una prueba similar, cosa que se va a cumplir. Existe un tipo de espacio con las características que nos interesan conocido como "espacio separado por la izquierda generalizado", del cual podremos probar que es un D-espacio:

Definición 1.2.4. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un *espacio separado por la izquierda generalizado* si y sólo si existe una relación binaria reflexiva, R, tal que:

(1) si $F \subseteq X$ es un cerrado no vacío entonces F tiene un elemento R-minimal; y

(2) para todo $x \in X$ se cumple que $\{y \in X : xRy\}$ es un conjunto abierto para la topología de X.

A modo de abreviatura, a los espacios separados por la izquierda generalizados los nombraremos únicamente como *espacios-SIG*.

van Douwen y Pfeffer enuncian el siguiente teorema en [12], además de ofrecer un esbozo de la prueba. Sin más que agregar, procedamos con el siguiente resultado.

Teorema 1.2.5. *Todo espacio-SIG es un D-espacio.*

Demostración. Sea (X, R) un espacio-SIG y φ una a. v. a. para X. Definamos a *psi* una a. v. a. auxliar dada por:

$$\psi(x) := \varphi(x) \cap \{y \in X : xRy\} = \{y \in \varphi(x) : xRy\}.$$

Por recursión transfinita construiremos un núcleo para *psi*:

- x_0 es un elemento R-minimal de X.
- Para toda $\alpha > 0$: si $\bigcup_{\beta<\alpha} \psi(x_\beta) \neq X$ entonces tomamos x_α un elemento R-minimal de $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \psi(x_\beta)$; si $\bigcup_{\beta<\alpha} \psi(x_\beta) = X$ entonces tomamos $x_\alpha = x_0$.

De la misma manera que en la demostración del Teorema 1.2.4 podemos afirmar que existe un ordinal α tal que $X = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \psi(x_\beta)$. Consideremos a α_0 el menor ordinal que cumpla esto. Sea $D := \{x_\alpha : \alpha < \alpha_0\}$. D es nuestro candidato a ser un núcleo para ψ. Por construcción, es cierto que $X = \bigcup\limits_{\alpha<\alpha_0} \psi(x_\alpha) = \bigcup \psi[D]$. Falta demostrar que D es cerrado y discreto.

Primero probaremos que D es discreto. Sea $\alpha < \alpha_0$. La vecindad $\psi(x_\alpha)$ es la que buscamos. Sea $\beta < \alpha_0$ tal que $x_\beta \in \psi(x_\alpha)$. Por la forma en que está definida la función ψ podemos asegurar que $x_\alpha R x_\beta$. En caso de que β sea igual a 0, la única forma en la que puede ocurrir que x_0 sea un elemento de $\psi(x_\alpha)$ es si $\alpha = 0$, por lo que $x_\beta = x_\alpha$. En caso contrario, por construcción sabemos que $x_\beta \in X \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \psi(x_\gamma)$ pero además, como $x_\beta \in \psi(x_\alpha)$, para toda $\delta > \alpha$ ocurre que $x_\beta \notin X \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\delta} \psi(x_\gamma)$, por ende, $\beta \leq \alpha$. Así, $X \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \psi(x_\gamma) \subseteq X \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \psi(x_\gamma)$ por lo que $x_\alpha \in X \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \psi(x_\gamma)$. Recordemos que $x_\alpha R x_\beta$. Por la R-minimalidad de x_β en $X \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \psi(x_\gamma)$ podemos concluir que $x_\beta = x_\alpha$. Por lo tanto, $\psi(x_\alpha) \cap D = \{x_\alpha\}$. Luego, D es un conjunto discreto.

El argumento anterior también nos permitirá probar que D es cerrado. Si $x \in X \setminus D$ existe $\alpha < \alpha_0$ tal que $x \in \psi(x_\alpha)$. Probamos que $\psi(x_\alpha) \cap D = \{x_\alpha\}$, por lo que $U := \psi(x_\alpha) \setminus \{x_\alpha\}$ es una vecindad de x la cual satisface que $U \subseteq X \setminus D$. Así, D es cerrado.

En conclusión, D es un núcleo para ψ. Ahora, por la forma en que fue construida *psi* nosotros sabemos que para cada $x \in X$ se cumple la contención $\psi(x) = \varphi(x) \cap \{y \in X : xRy\} \subseteq \varphi(x)$, por lo que $\bigcup \psi[D] \subseteq \bigcup \varphi[D]$. Así, $X = \bigcup \varphi[D]$. Por lo tanto, D también es un núcleo para φ. De esta manera, X es un D-espacio. □

A raíz del Teorema 1.2.5 obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.2.6. *Todo espacio topológico numerable es un D-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio topológico numerable. Probaremos que X es un espacio-SIG. Consideremos $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definamos una relación $\leq_X$ sobre X dada por:

$$x_n \leq_X x_m \text{ si y sólo si } n \leq m.$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n \leq n$ por lo que $x_n \leq_X x_n$, lo cual implica que $\leq_X$ es una relación reflexiva.

Primero probaremos que todo conjunto cerrado no vacío tiene un elemento $\leq_X$-mínimal. Sea $F \subseteq X$ cerrado no vacío. Podemos definir al conjunto $N_F := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in F\}$. N_F es no vacío pues F no es vacío. Como N_F es un conjunto no vacío de naturales, entonces N_F tiene elemento mínimo, llamémoslo n_0. Así, para toda $n \in N_F$ se cumple que $n_0 \leq n$ lo cual implica que $x_{n_0} \leq_X x_n$, es decir, x_{n_0} es elemento $\leq_X$-mínimo de F, y en particular x_{n_0} es $\leq_X$-minimal de F.

Finalmente probaremos que para todo $x \in X$ el conjunto $\{y \in X : x \leq_X y\}$ es un abierto en X. Si $n \in \mathbb{N}$ y $A_n := \{y \in X : x_n \leq_X y\}$, entonces

$$\begin{aligned}\{y \in X : x_n \leq_X y\} &= \{x_m \in X : x_n \leq_X x_m\} \\ &= \{x_m : n \leq m\} = X \setminus \{x_m : m < n\}.\end{aligned}$$

Así, $A_n = X \setminus \{x_m : m < n\}$. Luego, como X es un espacio T_2 y A_n es igual a todo el espacio X salvo por una cantidad finita de elementos, A_n es un conjunto abierto.

Con los tres puntos anteriores podemos afirmar que X es un espacio-SIG. Por el Teorema 1.2.5 concluimos que X es un D-espacio. □

El próximo ejemplo será sobre los espacios topológicos conocidos como espacios de Mrówka-Isbell, pero antes de pasar a ello veremos cómo es que se definen estos espacios.

Definición 1.2.7. Sea $\mathcal{A}$ una familia infinita de subconjuntos de ω. Decimos que $\mathcal{A}$ es una *familia casi ajena* si y sólo si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \neq B$ se cumple que $|A \cap B| < \aleph_0$. Además, decimos que $\mathcal{A}$ es una *familia casi ajena maximal* si y sólo si para todo $B \subseteq \omega$ con $|B| = \aleph_0$ y $B \notin \mathcal{A}$, se cumple que para cualquier $A \in \mathcal{A}$ la intersección de A con B es infinita.

Definición 1.2.8. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena y consideremos al conjunto $\Psi(\mathcal{A}) := \omega \cup \mathcal{A}$. A $\Psi(\mathcal{A})$ podemos asociarle una topología τ dada por las siguientes bases de vecindades: para toda $n \in \omega$ el conjunto $\mathcal{V}(n) := \{\{n\}\}$ es una base de vecindades para n, y para todo $A \in \mathcal{A}$ el conjunto $\mathcal{V}(A) := \{\{A\} \cup (A \setminus F) : F \subseteq \omega \text{ y } |F| < \aleph_0\}$ es una base de vecindades de A.

Al espacio $(\Psi(\mathcal{A}), \tau)$ se le conoce como el *espacio de Mrówka-Isbell asociado a $\mathcal{A}$*.

Una de las primeras observaciones que se pueden hacer sobre los espacios de Mrówka-Isbell es que cumplen algunos axiomas de separación. Podemos observar que para cualesquiera $n, m \in \omega$ y $A, B \in \mathcal{A}$ con $n \neq m$ y $A \neq B$ tenemos que: los conjuntos $\{n\}$ y $\{m\}$ son vecindades ajenas para n y m, respectivamente; para A y B, como $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena entonces $|A \cap B| < \aleph_0$, por lo cual $\{A\} \cup (A \setminus A \cap B)$ y $\{B\} \cup (B \setminus A \cap B)$ son vecindades ajenas de estos, correspondientemente; por último, los conjuntos $\{n\}$ y $\{A\} \cup (A \setminus \{n\})$ son vecindades ajenas de n y A, respectivamente. Con lo anterior podemos enunciar el siguiente lema:

Lema 1.2.9. *Todo espacio de Mrówka-Isbell es Hausdorff.*

Otra observación curiosa y útil sobre los espacios de Mrówla-Isbell es que no sólo ω es un subespacio discreto de $\Psi(\mathcal{A})$, sino que también el propio $\mathcal{A}$ resultará ser un subespacio discreto. Para demostrarlo es suficiente ver que para cada $A \in \mathcal{A}$ es cierto que $\{A\} \cup A$ es una vecindad de A tal que $\mathcal{A} \cap (\{A\} \cup \mathcal{A}) = \{A\}$, esto pues los elementos de A son naturales (o subconjuntos finitos de ω) mientras que los elementos $\mathcal{A}$ son subconjuntos infinitos de ω. Además, como todos los puntos de ω son aislados, entonces $\omega = \bigcup\{\{n\} : n \in \omega\}$ es un abierto de $\Psi(\mathcal{A})$, por lo cual $\mathcal{A}$ es un cerrado de $\Psi(\mathcal{A})$. Con estos dos puntos conseguimos el siguiente lema.

Lema 1.2.10. *Si $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, entonces $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado y discreto de $\Psi(\mathcal{A})$.*

Con los dos lemas anteriores ya contamos con la herramienta suficiente para probar que todo espacio de Mrówka-Isbell es un D-espacio.

Teorema 1.2.11. *Todo espacio de Mrówka-Isbell es un D-espacio.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ una familia casi ajena y φ una a. v. a. para $\Psi(\mathcal{A})$. Denotemos por F al conjunto $\Psi(\mathcal{A}) \setminus \bigcup \varphi[\mathcal{A}] \subseteq \omega$ y consideremos a $D := \mathcal{A} \cup F$, el cual es nuestro candidato a ser un núcleo para φ. Por construcción se cumple que $\bigcup \varphi[D] = \Psi(\mathcal{A})$. Nos falta probar que D es un conjunto cerrado y discreto.

Comencemos por demostrar que D es cerrado. Ya sabemos que $\mathcal{A}$ es cerrado por el Lema 1.2.10. También, por construcción, F es un conjunto cerrado ya que $\bigcup \varphi[\mathcal{A}]$ es abierto. Como D es la unión de dos cerrados resulta ser un conjunto cerrado.

Ahora probemos que D es discreto. Sea $d \in D$: si $d \in F$ entonces $V := \{d\}$ es una vecindad de d tal que $V \cap D = \{d\}$; si $d \in \mathcal{A}$ entonces tomamos $F_d \subseteq \omega$ un conjunto finito tal que $\{d\} \cup (d \setminus F_d) \subseteq \varphi(d)$, el único elemento de $\mathcal{A}$ que está en la vecindad $V := \{d\} \cup (d \setminus F_d)$ es d mismo, y $V \cap F \subseteq \varphi(d) \cap (\Psi(\mathcal{A}) \setminus \bigcup \varphi[\mathcal{A}]) = \emptyset$, por lo que $V \cap D = \{d\}$. Por ambos casos podemos concluir que D es discreto.

De esta manera, D es un núcleo para φ. Luego, $\Psi(\mathcal{A})$ es un D-espacio. $\square$

Todavía no terminamos con los espacios de Mrówka-Isbell. Recordemos que la Proposición 1.1.12 nos decía que ser D-espacio y numerablemente compacto implica ser compacto. Además, ser numerablemente compacto implica ser pseudocompacto, donde un espacio es *pseudocompacto* si y sólo si toda función continua del espacio en los reales está acotada. Una pregunta natural es si podemos debilitar las hipótesis de la Proposición 1.1.12 y pedir que el espacio sea pseudocompacto en lugar de numerablemente compacto. Lamentablemente esto no resultará así y son los espacios de Mrówka-Isbell los que nos proporcionarán el contraejemplo a ello. Sin embargo, para que un espacio de Mrówka-Isbell resulte ser pseudocompacto necesitamos pedirle una condición más a nuestra familia casi ajena. Veamos el lema.

Lema 1.2.12. *Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que existe una función continua $f : \Psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ no acotada. Lo primero que vamos a demostrar es que $f[\omega]$ no está acotado. En caso contrario existiría una $M > 0$ tal que para toda $n \in \omega$ ocurre que $|f(n)| < M$. Como f no está acotada, debe de existir $A \in \mathcal{A}$ tal que $|f(A)| > M$, por lo cual debe de existir una vecindad V de A tal que para toda $x \in V$ se cumple que $|f(x)| > M$, lo cual es una contradicción pues $V \cap \omega \neq \emptyset$, ya que V es una vecindad de un elemento de la familia casi ajena. Por lo tanto, $f[\omega]$ no está acotado.

Como f no está acotada en ω podemos tomar una sucesión $B := \{n_k : k \in \omega\} \subseteq \omega$ tal f no está acotada en B y para toda $k \in \omega$ se cumple que $|f(n_k)| < |f(n_{k+1})|$.

Afirmamos que $B \notin \mathcal{A}$. Si sucediera lo contrario tendríamos que f es continua en B por lo que existe V una vecindad de B tal que para toda $x \in V$ sucede que $|f(x) - f(B)| < 1$, es decir, f está acotada en V. Por otro lado, como V es vecindad de B entonces existe $F \subseteq \omega$ conjunto finito tal que $B \setminus F \subseteq V$. Como f no está acotada en B y F es finito, entonces f no está acotada en $B \setminus F$, lo cual implica que f tampoco está acotada en V, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $B \notin \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ con $|A \cap B| = \aleph_0$.

Como f es continua, existe V una vecindad de A tal que $|f(x) - f(A)| < 1$ para toda $x \in V$. Así, existe $F \subseteq \omega$ conjunto finito tal que $A \setminus F \subseteq V$. Como $A \cap B$ es infinito y F es finito, entonces $C := (A \cap B) \setminus F = \{n_{k_l} : l \in \omega\}$ es una subsucesión de B. Ya que f no está acotada en $B = \{n_k : k \in \omega\}$ y $\{|f(n_k)| : k \in \omega\}$ es creciente, entonces f no está acotada en C; no obstante, la condición $C \subseteq V$ implica que f no está acotada en V, una contradicción.

La contradicción vino de suponer que existía una función de $\Psi(\mathcal{A})$ en $\mathbb{R}$ continua y no acotada. Por lo tanto, toda función continua de $\Psi(\mathcal{A})$ en $\mathbb{R}$ es acotada, es decir, $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio pseudocompacto.

$\square$

Con ello tenemos que, cuando $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal, $\Psi(\mathcal{A})$ es un D-espacio pseudocompacto. Sin embargo, $\Psi(\mathcal{A})$ no es compacto pues $\mathcal{A}$ es un subespacio cerrado, discreto e infinito de $\Psi(\mathcal{A})$. Es decir, ser un D-espacio pseudocompacto no implica ser compacto, por lo cual la Proposición 1.1.12 no se puede generalizar a espacios pseudocompactos.

1.3. Una equivalencia pegajosa

La mayoría de esta sección, salvo por el Ejemplo 1.3.5 y el Teorema 1.3.6, está basada en [4]. Comencemos con la siguiente definición:

Definición 1.3.1. Dados X un espacio topológico, φ una a. v. a. y $D \subseteq X$. Decimos que D es *φ-pegajoso* si y sólo si D es cerrado, discreto y satisface lo siguiente:

$$\forall x \in X \left(\varphi(x) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bigcup \varphi[D]\right).$$

Dada φ una a. v. a., denotaremos por $\mathcal{D}(\varphi)$ a la familia de conjuntos φ-pegajosos, es decir:

$$\mathcal{D}(\varphi) := \{D \subseteq X : D \text{ es } \varphi\text{-pegajoso}\}.$$

Para cualquier a. v. a. φ el conjunto vacío es φ-pegajoso por vacuidad, así que el conjunto $\mathcal{D}(\varphi)$ siempre tiene al menos un elemento. Además, si X es un

D-espacio y φ una a. v. a. cualquiera, se cumple que cualquier núcleo D de φ es un conjunto φ-pegajoso.

Ahora veremos que podemos darle una estructura de orden a $\mathcal{D}(\varphi)$ la cual no sólo resultará ser un orden parcial, sino que satisfará las hipótesis del Lema de Zorn y, por lo tanto, $\mathcal{D}(\varphi)$ tendrá un elemento maximal.

Definición 1.3.2. Sea φ una a. v. a. de X, definimos una relación sobre $\mathcal{D}(\varphi)$, que llamaremos $\leq_\varphi$, de la siguiente manera: dados $D, D' \in \mathcal{D}(\varphi)$, decimos que $D \leq_\varphi D'$ si y sólo si $D \subseteq D'$ y $(D' \setminus D) \cap (\bigcup \varphi[D]) = \emptyset$.

Ahora probemos que efectivamente se trata de un orden parcial.

Lema 1.3.3. *Dado φ a. v. a., $(\mathcal{D}(\varphi), \leq_\varphi)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Demostración. Sean $D, E, F \in \mathcal{D}(\varphi)$.

Primero, para D se cumple tanto que $D \subseteq D$, como que $(D \setminus D) \cap (\bigcup \varphi[D]) = \emptyset \cap (\bigcup \varphi[D]) = \emptyset$, por lo que $D \leq_\varphi D$. Entonces, la relación es reflexiva.

Luego, supongamos que $D \leq_\varphi E$ y $E \leq_\varphi D$. En particular sucede que $D \subseteq E$ y $E \subseteq D$, por lo tanto, $D = E$. Así, la relación es antisimétrica.

Finalmente, supongamos que $D \leq_\varphi E$ y $E \leq_\varphi F$. Por una parte tenemos que $D \subseteq E \subseteq F$, así que $D \subseteq F$. Además:

$$\begin{aligned}(F \setminus D) \cap \bigcup \varphi[D] &= ((F \setminus E) \cup (E \setminus D)) \cap \bigcup \varphi[D] \\ &= \Big((F \setminus E) \cap \bigcup \varphi[D]\Big) \cup \Big((E \setminus D) \cap \bigcup \varphi[D]\Big) \\ &= (F \setminus E) \cap \bigcup \varphi[D] \\ &\subseteq (F \setminus E) \cap \bigcup \varphi[E] = \emptyset;\end{aligned}$$

con lo cual podemos afirmar que $D \leq_\varphi F$ y, por ende, que la relación también satisface la transitividad.

Esto muestra que $\leq_\varphi$ es un orden parcial sobre $\mathcal{D}(\varphi)$. □

Prosigamos por demostrar la afirmación que hicimos con anterioridad:

Lema 1.3.4. *Dada φ una a. v. a. de X, $(\mathcal{D}(\varphi), \leq_\varphi)$ tiene un elemento $\leq_\varphi$-maximal.*

Demostración. Como se había adelantado, ya que $(\mathcal{D}(\varphi), \leq_\varphi)$ es un orden parcial ocuparemos el Lema de Zorn para demostrar el presente lema. Basta verificar que toda cadena no vacía de $(\mathcal{D}(\varphi), \leq_\varphi)$ está acotada superiormente. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}(\varphi)$ una cadena no vacía y consideremos a $C := \bigcup \mathcal{C}$. C es nuestro candidato para ser la cota superior de $\mathcal{C}$, primero demostremos que C es un conjunto φ-pegajoso.

Para comenzar probaremos que C es cerrado. Sea $x \in X \setminus C$, tenemos dos casos:

Caso 1. $\varphi(x) \cap C = \emptyset$.

En este caso, $x \in \varphi(x) \subseteq X \setminus C$ donde $\varphi(x)$ es abierto.

Caso 2. $\varphi(x) \cap C \neq \emptyset$

Aquí existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $\varphi(x) \cap D \neq \emptyset$. Ya que D es φ-pegajoso podemos afirmar que $x \in \bigcup \varphi[D]$ y, como $\bigcup \varphi[D]$ es abierto, existe V_1 vecindad abierta de x tal que $V_1 \subseteq \bigcup \varphi[D]$. Sea $V := V_1 \setminus D$, el cual es un abierto pues D es cerrado. Además, x es elemento de V ya que $x \notin C$ y $D \subseteq C$. De esta manera, $V \subseteq \bigcup \varphi[D]$ y $V \cap D = \emptyset$. Veamos que ningún elemento de $\mathcal{C}$ intersecta a V. Sea $D' \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena únicamente pueden ocurrir dos casos:

Caso 2.1. $D' \leq_\varphi D$.

En particular ocurre que $D' \subseteq D$, por lo que $D' \cap V = \emptyset$.

Caso 2.2. $D \leq_\varphi D'$.

Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} D' \cap V &= ((D' \setminus D) \cap V) \cup (D \cap V) \\ &= (D' \setminus D) \cap V \subseteq (D' \setminus D) \cap \bigcup \varphi[D] = \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $D' \in \mathcal{C}$ se cumple que $D' \cap V = \emptyset$, es decir, $V \cap C = \emptyset$. Luego, $x \in V \subseteq X \setminus C$ con V abierto. Por los dos casos anteriores podemos concluir que C es cerrado.

De manera similar demostraremos que C es discreto. Sea $x \in C$. Consideremos $D \in \mathcal{C}$ tal que $x \in D$. Tomemos V_1 una vecindad abierta de x tal que $V_1 \subseteq \bigcup \varphi[D]$. También, como D es discreto existe V_2 vecindad abierta de x tal que $V_2 \cap D = \{x\}$. Observemos que $V := V_1 \cap V_2$ es una vecindad de x y satisface dos cosas: $V \cap D = \{x\}$ y $V \subseteq \bigcup \varphi[D]$. Demostremos que para toda $D' \in \mathcal{C}$ ocurre que $V \cap D' \subseteq \{x\}$. Sea $D' \in \mathcal{C}$. Nuevamente tenemos dos casos:

Caso 1. $D' \leq_\varphi D$.

En particular pasa que $D' \subseteq D$ y, por lo tanto, $D' \cap V \subseteq D \cap V = \{x\}$.

Caso 2. $D \leq_\varphi D'$.

Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} D' \cap V &= ((D' \setminus D) \cap V) \cup (D \cap V) \\ &= ((D' \setminus D) \cap V) \cup \{x\} \\ &\subseteq \left((D' \setminus D) \cap \bigcup \varphi[D]\right) \cup \{x\} = \{x\}. \end{aligned}$$

Entonces para toda $D' \in \mathcal{C}$ es cierto que $D' \cap V \subseteq \{x\}$. Como además sabemos que $D \cap V = \{x\}$, concluimos que $V \cap C = \{x\}$. Luego, C es discreto.

Finalmente, resta ver que cualquier elemento cercano a C se pega a la imagen de C. Sea $x \in X$ tal que $\varphi(x) \cap C \neq \emptyset$, entonces existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $\varphi(x) \cap D \neq \emptyset$. Como D es φ-pegajoso, entonces $x \in \bigcup \varphi[D] \subseteq \bigcup \varphi[C]$.

Con todo lo anterior ya podemos afirmar que C realmente es un conjunto φ-pegajoso, pero aún no hemos terminado pues falta probar que C es cota superior de la cadena. Sea $D \in \mathcal{C}$. Ya sabemos que $D \subseteq C$, sólo falta notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} (C \setminus D) \cap \bigcup \varphi[D] &= \left[\bigcup_{\substack{D' \in \mathcal{C} \\ D \leq_\varphi D'}} (D' \setminus D) \right] \cap \bigcup \varphi[D] \\ &= \bigcup_{\substack{D' \in \mathcal{C} \\ D \leq_\varphi D'}} \left[(D' \setminus D) \cap \left(\bigcup \varphi[D] \right) \right] = \emptyset. \end{aligned}$$

En resumen, $D \subseteq C$ y $(C \setminus D) \cap \bigcup \varphi[D] = \emptyset$, por lo que $D \leq_\varphi C$. En consecuencia, C es cota superior de $\mathcal{C}$.

El argumento anterior garantiza que $(\mathcal{D}(\varphi), \leq_\varphi)$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn, lo cual asegura que $\mathcal{D}(\varphi)$ tiene un elemento $\leq_\varphi$-maximal. $\square$

Es tentador pensar que algún elemento $\leq_\varphi$-maximal del $\mathcal{D}(\varphi)$ resultará ser un núcleo para φ, sin embargo, este no será siempre el caso. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.5. Pensemos en $X = [0, \omega_1)$ con su topología de orden. Consideremos

$$\varphi(x) := \begin{cases} [0, x], & \text{si } \ x \text{ es límite}, \\ \{x\}, & \text{si } \ x \text{ no es límite}. \end{cases}$$

a. v. a.. Para cada $x \in X$ tenemos que $\varphi(x)$ es numerable. Recordemos que $e(X) = \aleph_0$, por lo que para cada $D \subseteq X$ cerrado y discreto se cumple que $\bigcup \varphi[D]$ es una unión numerable de conjuntos numerables, lo cual nos permite concluir que no existen núcleos para φ. Podemos decir más, afirmamos que $\mathcal{D}(\varphi) = \{\emptyset\}$.

Si existiera $D \in \mathcal{D}(\varphi) \setminus \{\emptyset\}$, tomamos un elemento fijo $\alpha \in D$. Para todo $\beta \in X$ sabemos que existe $\gamma \in X$ un ordinal límite tal que $\text{máx}\{\alpha, \beta\} \leq \gamma$. Así, tendremos que $\alpha \in [0, \gamma] = \varphi(\gamma)$, por lo que $\gamma \in \bigcup \varphi[D]$, entonces existe $\delta \in D$ ordinal límite tal que $\gamma \leq \delta$. De aquí podemos ver que $\beta \leq \delta$, lo que implica que $\beta \in \varphi(\delta)$. Lo anterior asegura que $\bigcup \varphi[D] = X$, lo cual es una contradicción al hecho de que φ no tiene núcleos. Por lo tanto, $\mathcal{D}(\varphi) = \{\emptyset\}$.

En el Ejemplo 1.3.5 resulta que el único elemento $\leq_\varphi$-maximal de los conjuntos φ-pegajosos era el vacío. Sin embargo, nuestra conjetura sobre que los conjuntos $\leq_\varphi$-maximales resultan ser núcleos para φ no es nada descabellada, lo único que nos hace falta es poder asegurar que dichos maximales no son el conjunto vacío. Esto nos proporciona la siguiente equivalencia para los D-espacios.

Teorema 1.3.6. *X es un D-espacio si y sólo si para toda a. v. a. φ de X existe $D \in \mathcal{D}(\varphi) \setminus \{\emptyset\}$.*

Demostración. Ya sabemos que la ida es cierta, pues todo núcleo de φ es un conjunto φ-pegajoso no vacío. Probemos el regreso. Sea φ una a. v. a. de X. Sabemos que $\mathcal{D}(\varphi)$ tiene un elemento $\leq_\varphi$-maximal, además de que estamos suponiendo que existe $E' \in \mathcal{D}(\varphi) \setminus \{\emptyset\}$. Como además $\emptyset \leq_\varphi E$ para toda $E \in \mathcal{D}(\varphi)$, podemos concluir que el elemento maximal no es el vacío. Sea $E \in \mathcal{D}(\varphi) \setminus \{\emptyset\}$ elemento $\leq_\varphi$-maximal.
Afirmamos que $\bigcup \varphi[E] = X$. Procedamos por contradicción y supongamos que $X \setminus \bigcup \varphi[E] \neq \emptyset$. Definamos la siguiente a. v. a.:

$$\Psi(x) := \begin{cases} \bigcup \varphi[E], & \text{si } \ x \in \bigcup \varphi[E], \\ (\bigcup \varphi[E]) \cup \varphi(x), & \text{si } \ x \notin \bigcup \varphi[E]. \end{cases}$$

Por hipótesis, existe $D \in \mathcal{D}(\Psi) \setminus \{\emptyset\}$. Notemos que $D \setminus (\bigcup \varphi[E])$ no puede ser vacío. En el caso contrario se satisface que $D \subseteq \bigcup \varphi[E]$. Tomando $x \in X \setminus \bigcup \varphi[E]$, como $D \cap \Psi(x) = D \cap ((\bigcup \varphi[E]) \cup \varphi(x)) \supseteq D \cap D \neq \emptyset$ y D es Ψ-pegajoso, entonces x está en $\bigcup \Psi[D] = \bigcup \varphi[E]$, lo cual es absurdo. Luego, $D \setminus (\bigcup \varphi[E]) \neq \emptyset$.

Sea $F := (D \setminus (\bigcup \varphi[E])) \cup E$. F es cerrado pues ambos uniendos lo son. Veamos que F es discreto. Sea $x \in F$ y pensemos en dos casos: si $x \in E$ entonces existe $V \subseteq \bigcup \varphi[E]$ vecindad de x tal que $V \cap E = \{x\}$. Por la forma en la que tomamos a V se cumple que $V \cap (D \setminus (\bigcup \varphi[E])) = \emptyset$, por lo que $V \cap F = \{x\}$; en cambio, si $x \in D \setminus (\bigcup \varphi[E])$ existe $V \subseteq X \setminus E$ vecindad de x tal que $D \cap V = \{x\}$. Ya que $V \cap E = \emptyset$ entonces $V \cap F = \{x\}$. Por ambos casos podemos concluir que F es cerrado y discreto.

Ahora demostraremos que F es un conjunto φ-pegajoso. Sea $x \in X$ tal que $\varphi(x) \cap F \neq \emptyset$. Nuevamente convendrá analizar dos casos: si $x \in \bigcup \varphi[E]$ habremos terminado pues $\bigcup \varphi[E] \subseteq \bigcup \varphi[F]$; si $x \notin \bigcup \varphi[E]$, notemos primero que $\varphi(x) \cap E = \emptyset$ pues el caso contrario implicaría que $x \in \bigcup \varphi[E]$ ya que E es φ pegajoso, por lo que $\emptyset \neq \varphi(x) \cap F = \varphi(x) \cap (D \setminus (\bigcup \varphi[E]))$ lo cual implica que $\Psi(x) \cap D = (\varphi(x) \cup (\bigcup \varphi[E])) \cap D \neq \emptyset$, y ya que D es Ψ-pegajoso tenemos que $x \in \bigcup \Psi[D] = (\bigcup \varphi[E]) \cup (\bigcup \varphi[D \setminus \bigcup \varphi[E]]) = \bigcup \varphi[F]$. En ambos casos siempre ocurre que $x \in \bigcup \varphi[F]$. Luego, F es un conjunto φ-pegajoso.

Finalmente, veamos que $E \leq_\varphi F$. Por construcción, $E \subseteq F$. Por otro lado,

$$(F \setminus E) \cap \bigcup \varphi[E] = (D \setminus \bigcup \varphi[E]) \cap \bigcup \varphi[E] = \emptyset$$

Con lo anterior podemos afirmar que $E \leq_\varphi F$, pero esto es una contradicción pues E es $\leq_\varphi$-maximal y $F \neq E$. La contradicción vino de suponer que $\bigcup \varphi[E] \neq X$ así que la igualdad se cumple. Como toda a. v. a. tiene un núcleo, entonces X es un D-espacio. $\square$

Tanto el enunciado como la demostración del Teorema 1.3.6 fueron idea mía mientras escribía la presente sección. Más tarde descubrí que Gruenhage generalizaba la noción de “conjuntos pegajosos” en [5], donde este teorema resultaba ser una consecuencia de la Proposición 2.2 de [5]. A pesar de ello yo lo considero mi primer teorema, por lo cual espero que el lector me permita reenunciarlo y nombrarlo en memoria a mi padre:

Teorema del Fayo. *X no es un D-espacio si y sólo si existe φ una a. v. a. tal que $\mathcal{D}(\varphi) = \{\emptyset\}$, es decir, si una asignación de vecindades abiertas falla en tener un conjunto pegajoso no trivial.*

Concluiremos esta sección, y capítulo, con la siguiente equivalencia, la cual nos deja ver a los D-espacios como aquellos espacios en los que siempre podremos extender cualquier conjunto φ-pegajoso hasta conseguir un núcleo para la a. v. a.:

Teorema 1.3.7. *Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Para toda φ a. v. a., para todo $D \in \mathcal{D}(\varphi)$ y para todo $x \in X$ existe $D' \in \mathcal{D}(\varphi)$ tal que $x \in \bigcup \varphi[D']$ y $D \leq_\varphi D'$.

(2) X es un D-espacio.

Demostración. Comenzaremos demostrando (1) $\Rightarrow$ (2). Sea φ una a. v. a. de X. Para $\emptyset \in \mathcal{D}(\varphi)$ y algún $x \in X$ sabemos que existe $D \in \mathcal{D}(\varphi)$ tal que $x \in \bigcup \varphi[D]$, por lo tanto $D \neq \emptyset$. Ya que existe $D \in \mathcal{D}(\varphi) \setminus \{\emptyset\}$ y esto fue para cualquier asginación de vecindades podemos concluir por el Teorema 1.3.6 que X es un D-espacio.

Ahora demostraremos (2) $\Rightarrow$ (1). Sean φ una a. v. a., $D \in \mathcal{D}(\varphi)$ y $x_0 \in X$. Consideremos al conjunto cerrado $Y := X \setminus \bigcup \varphi[D]$. Definamos la siguiente a. v. a.:

$$\Psi(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{si} \quad x \in X \setminus \bigcup \varphi[D], \\ \bigcup \varphi[D], & \text{si} \quad x \in \bigcup \varphi[D]. \end{cases}$$

Como X es un D-espacio, existe $E \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $\Psi[E] = X$. $E \cap Y$ es discreto y además es cerrado por ser la intersección de dos cerrados.

Tomemos $D' := D \cup (E \cap Y)$. D' es cerrado pues ambos uniendos lo son. Demostraremos que D' es discreto. Sea $y \in D'$, tenemos dos casos:

Caso 1. $y \in D$.

Existe V vecindad de y tal que $V \cap D = \{y\}$. Así, $U := V \cap \varphi(y)$ es una vecindad de y que cumple que $U \cap D = \{y\}$ y $U \cap (E \cap Y) \subseteq \varphi(y) \cap Y = \emptyset$, por lo tanto, $U \cap D' = \{y\}$.

Caso 2. $y \in E \cap Y$.

Entonces existe V vecindad de y tal que $V \cap E = \{y\}$ y, por ende, $V \cap (E \cap Y) = \{y\}$. Observemos que $\varphi(y) \cap D = \emptyset$ pues en caso contrario ocurriría que $y \in \bigcup \varphi[D]$ (ya que D es φ-pegajoso) y eso no es posible pues $x \in Y$.

Nuevamente, consideremos $U := V \cap \varphi(y)$ vecindad de y, la cual satisface que $U \cap D' = U \cap ((D \cup (E \cap Y)) = \emptyset \cup \{y\}$.

Los casos anteriores constatan que D' es discreto. Por último notemos lo siguiente: ya que para todo $x \in \bigcup \varphi[D]$ se tiene que $\Psi(x) \cap Y = \emptyset$, entonces $Y \subseteq \bigcup \Psi[E \cap Y]$. Por construcción $\Psi|_Y = \varphi|_Y$, por lo que $Y \subseteq \bigcup \varphi[E \cap Y]$. Por lo tanto,

$$X = Y \cup \left(\bigcup \varphi[D]\right) \subseteq \left(\bigcup \varphi[E \cap Y]\right) \cup \left(\bigcup \varphi[D]\right) = \bigcup \varphi[D'],$$

es decir, D' es un núcleo de φ y, por consiguiente, D' es un conjunto φ-pegajoso. Además, $x_0 \in \bigcup \varphi[D']$.

Ya sólo nos resta probar que $D \leq_\varphi D'$. Por construcción tenemos que $D \subseteq D'$. También sucede lo siguiente:

$$(D' \setminus D) \cap \bigcup \varphi[D] = (E \cap Y) \cap \left(\bigcup \varphi[D]\right) = \emptyset.$$

Por definición podemos afirmar que $D \leq_\varphi D'$. En resumen, existe $D' \in \mathcal{D}(\varphi)$ tal que $x_0 \in \bigcup \varphi[D']$ y $D \leq_\varphi D'$, lo cual es lo que queríamos demostrar. $\square$

Capítulo 2

Propiedades los D-espacios

2.1. Subespacios de D-espacios

Comenzaremos este capítulo estudiando los subespacios de los D-espacios. Naturalmente, la primera pregunta a abordar es si la propiedad se hereda a un subespacio cualquiera. Recurriendo al que ha sido nuestro caballito de batalla hasta el momento, el espacio $X = [0, \omega_1)$ con su topología de orden, podremos dar una respuesta a esta interrogante.

El espacio $Y = [0, \omega_1]$ visto con su topología de orden es compacto y, por lo tanto, un D-espacio. Por el contrario, en el Ejemplo 1.1.11 probamos que $X = [0, \omega_1)$ visto como subespacio de Y no es un D-espacio. Más aún, X resulta ser un subespacio abierto y denso de Y, permitiéndonos dar una respuesta un poco más amplia: la propiedad de ser D-espacio no es hereditaria, incluso si el subespacio en cuestión es abierto y denso.

No obstante, similar a otras propiedades de cubierta, ser D-espacio sí se heredará a un tipo de subespacio en particular: los subespacios cerrados. Incluso en el capítulo anterior llegamos a demostrar esta afirmación para casos particulares. Es momento de realizar la prueba de manera general:

Teorema 2.1.1. *Si X es un D-espacio y $F \subseteq X$ es un subespacio cerrado de X, entonces F es un D-espacio.*

Demostración. Consideremos τ y τ_F las topologías de X y F, respectivamente. Sea $\varphi : F \to \tau_F$ una a. v. a. de F. Para cada $x \in F$ tomamos $U_x \in \tau$ fijo tal que $\varphi(x) = U_x \cap F$. Consideremos $\psi : X \to \tau$ una a. v. a. de X dada por

$$\psi(x) := \begin{cases} U_x, & \text{si} \quad x \in F, \\ X \setminus F, & \text{si} \quad x \notin F. \end{cases}$$

Ya que X es D-espacio, existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto en X tal que $\bigcup \psi[D] = X$. Además, $D' := D \cap F$ es un cerrado y discreto de F. Veamos que D' es el núcleo que buscamos para φ. Basta probar que $\varphi[D']$ cubre a F. Si tomamos $y \in F$ sabemos que existe $d \in D$ tal que $y \in \psi(d)$. Notemos que d es un elemento de F pues en caso contrario ocurre que $y \in \psi(d) = X \setminus F$, lo cual contradice el hecho de que y es un elemento de F. Como $d \in F$, entonces $d \in F \cap D = D'$; adicionalmente, $y \in \psi(d) \cap F = U_d \cap F = \varphi(d)$. De esta manera, $y \in \bigcup \varphi[D']$ y, por lo tanto, $F = \bigcup \varphi[D']$. Así, D' es un núcleo para φ, lo cual muestra que F es un D-espacio. $\square$

Seremos capaces de generalizar el resultado anterior. La propiedad de ser D-espacio se seguirá heredando a cualquier unión numerable de subespacios cerrados, es decir, a subespacios F_σ. Si tomamos $F \subseteq X$ un conjunto F_σ y suponemos que X es un D-espacio, lo primero que sabemos es que

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

donde cada F_n es un subespacio cerrado de X. Por el Teorema 2.1.1 concluimos que cada uno de estos subespacios F_n es un D-espacio. Esto implica que F es unión de D-espacios. En este punto será necesario detenerse pues no contamos con algún resultado que nos diga cómo se comportan los D-espacios bajo la unión. Lamentablemente, dar una respuesta satisfactoria a la pregunta "¿la unión de D-espacios es un D-espacio?" escapa a nuestros alcances, hasta el momento en que se escribió este trabajo se mantiene como una pregunta abierta. Sin embargo, y para nuestra suerte, podremos dar respuesta al caso particular que necesitamos para nuestro cometido.

Antes de continuar con el resultado sobre la unión de D-espacios, enunciaremos una definición y un lema los cuáles tienen el único fin de simplificar la redacción posterior.

Definición 2.1.2. Dados X un espacio topológico y $Y \subseteq X$, decimos que Y es un *D-subespacio* de X si y sólo si Y es un subespacio de X que satisface ser un D-espacio con la topología que hereda como subespacio de X.

Respecto al lema, la idea es que al momento de trabajar con algún D-subespacio recurramos a asignaciones de vecindades abiertas del espacio total en lugar de las del subespacio. Notemos que si Y es un D-subespacio de X y φ es una a. v. a. de X, siempre podemos definir una a. v. a. para Y dada por $\psi(y) := \varphi(y) \cap Y$. Como Y es un D-espacio, existe $D \subseteq Y$ un cerrado y discreto de Y tal que $\bigcup \psi[D] = Y$ y, en consecuencia,

$$Y = \bigcup_{d \in D} \varphi(d) \cap Y \subseteq \bigcup_{d \in D} \varphi(d) = \bigcup \varphi[D].$$

Esto nos deja el siguiente lema:

Lema 2.1.3. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Si Y un D-subespacio de X, entonces para cualquier φ a. v. a. de X existe $D \subseteq Y$ un conjunto cerrado y discreto de Y tal que $Y \subseteq \bigcup \varphi[D]$.*

Ya con el Lema 2.1.3 será más sencillo, al menos en cuestión de redacción, demostrar que la unión numerable de D-espacios cerrados resulta ser D-espacio. Borges y Wehrly ofrecen una prueba en [2], la cual desarrollamos detalladamente a continuación:

Lema 2.1.4. *Sea X un espacio topológico. Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de D-subespacios cerrados de X y $X = \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces X es un D-espacio.*

Demostración. Sea φ una asignación de vecindades de X. Construiremos por recursión dos sucesiones: $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subespacios cerrados y $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados y discretos tal que $D_n \subseteq E_n \subseteq F_n$, $E_n \subseteq \bigcup \varphi[D_n]$ y $D_n \cap \bigcup \varphi \left[\bigcup_{m<n} D_m \right] = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, esto último para poder garantizar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ es cerrado y discreto:

- $E_0 := F_0$. Como éste es un D-espacio, existe $D_0 \subseteq E_0$ cerrado y discreto en E_0 tal que $E_0 \subseteq \bigcup \varphi[D_0]$.

- Suponiendo que existen $n \in \mathbb{N}$, $D_i \subseteq E_i \subseteq F_i$ tal que E_i es cerrado, D_i es cerrado y discreto en E_i y $E_i \subseteq \bigcup \varphi[D_i]$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, definimos
$$E_{n+1} := F_{n+1} \setminus \bigcup \varphi \left[\bigcup_{i=0}^{n} D_i \right].$$
Como $E_{n+1} \subseteq F_{n+1}$ es cerrado y F_{n+1} es D-espacio, entonces E_{n+1} también es D-espacio. Por ende, existe $D_{n+1} \subseteq E_{n+1}$ cerrado y discreto en E_{n+1} tal que $E_{n+1} \subseteq \bigcup \varphi[D_{n+1}]$.

Por construcción, si $n < m$ entonces $D_m \cap \varphi\left[\bigcup_{k<m} D_k\right] = \emptyset$ y, en particular, $D_n \cap D_m = \emptyset$. De manera más general, si $n \neq m$, entonces $D_n \cap D_m = \emptyset$. Sea $D := \bigcup\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$. D es nuestro candidato a ser un núcleo para φ.

Comencemos por demostrar que $\bigcup \varphi[D] = X$. Sea $x \in X$. Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_n$. Analizaremos dos casos:

Caso 1. $n = 0$.

Observemos lo siguiente:

$$x \in F_0 = E_0 \subseteq \bigcup \varphi[D_0] \subseteq \bigcup \varphi[D].$$

Caso 2. $n = m + 1$ para algún natural m.

Notemos que si $x \in \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{m} D_i\right]$ habremos terminado. Supongamos que $x \notin \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{m} D_i\right]$. Entonces

$$x \in F_{m+1} \setminus \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{m} D_i\right] = E_{m+1} \subseteq \bigcup \varphi[D_{m+1}] \subseteq \bigcup \varphi[D].$$

Por los dos casos anteriores concluimos que x siempre es un elemento de $\bigcup \varphi[D]$ y, por ende, se verifica la igualdad $X = \bigcup \varphi[D]$.

Probemos que D es cerrado. Primero reparemos en que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que D_n es un cerrado de E_n y E_n es un cerrado de X, por lo que cada D_n es un conjunto cerrado de X. Sea $x \in X \setminus D$. Como $x \in \bigcup \varphi[D]$, entonces existe un natural n tal que $x \in \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{n} D_i\right]$. El hecho de que $\bigcup_{i=0}^{n} D_i$ es cerrado implica que existe $U \subseteq \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{n} D_i\right]$, una vecindad de x, tal que $U \cap \bigcup_{i=0}^{n} D_i = \emptyset$. También, para cada $m > n$ se cumple que $D_m \subseteq E_m = F_m \setminus \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i<m} D_i\right]$ por lo que $D_m \cap \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{n} D_i\right] = \emptyset$ y, en consecuencia, $D_m \cap U = \emptyset$. Por consiguiente, $U \cap D = \emptyset$. Luego, D es un conjunto cerrado.

Para finalizar probemos que D es discreto. Sean $d \in D$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $d \in D_n$. Como D_n es discreto en E_n, existe $U \subseteq \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{n} D_i\right] \setminus \bigcup_{i<n} D_i$ tal que

$\{d\} = (U \cap E_n) \cap D_n = U \cap D_n$. Por la manera en que fue tomado el abierto U, para cada $m < n$ se cumple que $D_m \cap U = \emptyset$. Además, ya que $U \subseteq \bigcup \varphi\left[\bigcup_{i=0}^{n} D_i\right]$, de manera similar a cuando probamos que D es cerrado, podemos concluir que para cada $m > n$ se cumple que $D_m \cap U = \emptyset$. Todo lo anterior nos dice que $D \cap U = D_n \cap U = \{d\}$. Entonces, D es discreto.

De esta manera sabemos que D es un núcleo para φ. En conclusión, X es un D-espacio.

□

Para terminar esta sección enunciaremos y probaremos la generalización del Teorema 2.1.1 a los subespacios F_σ.

Proposición 2.1.5. *Si X es un D-espacio y $F \subseteq X$ es un subespacio F_σ, entonces F es un D-espacio.*

Demostración. Sea F un subespacio F_σ de X. Sabemos que existe un conjunto $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ formado por subespacios cerrados de X tal que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Por el Teorema 2.1.1 afirmamos que cada subespacio F_n es un D-espacio, encontrándonos así con que F es una unión numerable de D-subespacios cerrados la cual, por el Lema 2.1.4, resulta ser un D-espacio. □

2.2. Suma de D-espacios

En su momento no se hizo mención alguna, pero al demostrar el Teorema 1.2.3 tuvimos nuestro primer acercamiento a la suma topológica de D-espacios. La demostración de este teorema se dividió en dos partes principales: la primera fue probar que los espacios $\mathcal{S}_n = [n, n+1)$, con la topología subespacio de la recta de Sorgenfrey, son D-espacios; en la segunda parte empleamos este hecho para poder probar que la recta de Sorgenfrey es un D-espacio, ocupando fuertemente que ésta es la suma de los espacios $\mathcal{S}_n$.

Para nuestra fortuna, no tendremos que buscar condiciones extras para poder conservar la propiedad de ser D bajo la suma topológica. Además, como cada sumando es un subespacio cerrado de la suma topológica, podremos dar una equivalencia entre que el espacio total y cada uno de los sumandos sean D-espacios. La demostración será muy similar a la que realizamos en el Teorema 1.2.3.

Teorema 2.2.1. *Si X es un espacio topológico, I es un conjunto no vacío de subíndices y $\{X_i : i \in I\}$ es una colección de espacios topológicos tal que $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$, entonces X es un D-espacio si y sólo si para cada $i \in I$ se cumple que X_i es un D-espacio.*

Demostración. Como comentamos anteriormente, debido a que para toda $i \in I$ el subespacio X_i es cerrado en X, concluimos que si X es un D-espacio entonces X_i es un D-espacio para toda $i \in I$. La otra implicación es la que nos incumbe.

Supongamos que X_i es un D-espacio para toda $i \in I$. Para cada $i \in I$ tomemos a $\mathcal{B}_i$ una base para X_i y consideremos a la base $\mathcal{B} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ para X. Sea $\varphi : X \to \mathcal{B}$ una a. v. a. de X. En vista de que los espacios X_i son ajenos dos a dos, tendremos que para cada $j \in I$ y para cada $x \in X_j$ ocurre que $\varphi(x) \in \mathcal{B}_j$. Así, $\varphi|_{X_j}$ es una a. v. a. de X_j con codominio $\mathcal{B}_j$, por lo que para cada $j \in I$ existe $D_j \subseteq X_j$ cerrado y discreto en X_j tal que $X_j = \bigcup \varphi|_{X_j}[D_j] = \bigcup \varphi[D_j]$. Definamos $D := \bigcup_{i\in I} D_i$. D es nuestro candidato a ser un núcleo para φ. Por un lado, notemos que

$$\bigcup \varphi[D] = \bigcup \left(\bigcup_{i\in I} \varphi[D_i] \right) = \bigcup_{i\in I} \left(\bigcup \varphi[D_i] \right) = \bigcup_{i\in I} X_i = X.$$

Resta demostrar que D es cerrado y discreto. Primero probemos que D es discreto. Sean $d \in D$ e $i \in I$ tal que $d \in D_i$. Como D_i es discreto en X_i, existe $U \subseteq X_i$ abierto en X_i, y por lo tanto abierto en X, tal que $U \cap D_i = \{d\}$. Además, para cada $j \neq i$ ocurre que $D_i \cap X_j = \emptyset$; en consecuencia, $U \cap D = U \cap D_i = \{d\}$. Así, D es discreto.

Demostremos que D es cerrado. Sean $x \in X \setminus D$ e $i \in I$ tal que $x \in X_i$. Además, $x \notin D_i$ pues $x \notin D$, de donde se sigue que $x \in X_i \setminus D_i$, por lo que existe $U \subseteq X_i \setminus D_i$ abierto de X_i, y por lo tanto abierto en X, tal que $x \in U$. Nuevamente, para toda $j \neq i$ se cumple que $U \cap X_j = \emptyset$, y por ende $U \cap D = \emptyset$, lo cual demuestra que D es un conjunto cerrado.

En resumen, D es un núcleo para φ y, por ende, X es un D-espacio. $\square$

2.3. Imágenes y preimágenes de D-espacios

Comenzaremos esta sección estudiando a las imágenes de los D-espacios. No es de extrañar que ser un D-espacio sea una propiedad topológica (resultado que probaremos más adelante). Lo que nos interesa estudiar es qué tanto podemos debilitar a los homeomorfismos para que la imagen de estos sigan preservando la propiedad de ser D-espacio. Un primer acercamiento a este problema pueden ser las funciones continuas, pero el siguiente ejemplo nos muestra que la imagen continua de un D-espacio no siempre resulta ser un D-espacio.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos a $X = \omega_1$ con la topología discreta, a $Y = [0, \omega_1)$ con la topología de orden y a la función identidad $id : X \to Y$. Resulta que X es un D-espacio y la función id es continua debido a que X es discreto, sin embargo, en el Ejemplo 1.1.11 probamos que Y no es un D-espacio.

Así, Y es la imagen continua de un D-espacio pero Y no es un D-espacio. Incluso somos capaces decir un poco más, ser D-espacio no se preserva bajo imágenes continuas e inyectivas.

Sin embargo, la hipótesis de continuidad parece ser de gran importancia. Si f es una función continua que va de un D-espacio X, en un espacio Y, y además φ es una a. v. a. de Y, la continuidad de f nos permitirá definir una nueva a. v. a. en X en términos de φ pues a cada $x \in X$ podemos asignarle la vecindad $f^{-1}[\varphi(f(x))]$. Con esta nueva a. v. a. en X, llamémosla ψ, y con el supuesto de que X sí es un D-espacio, tomamos un núcleo $D \subseteq X$ para ψ. En este punto no suena tan descabellado pensar que un núcleo para φ debe involucrar a $D' := f[D]$. Es más, resulta que $\bigcup \varphi[D'] = Y$, pero la cuestión yace en probar que D' sigue siendo cerrado y discreto. A fin de resolver uno de nuestros dos problemas, si además pedimos que f sea una función cerrada obtendremos que D' es un conjunto cerrado. Para nuestra fortuna, no necesitaremos hipótesis adicional alguna después de esto. Veamos primero el siguiente lema:

Lema 2.3.2. *Si $f : X \to Y$ es una función cerrada y $D \subseteq X$ es un conjunto cerrado y discreto, entonces $f[D]$ es un conjunto cerrado y discreto.*

Demostración. $D' := f[D]$ es un conjunto cerrado pues D es cerrado y f es una función cerrada. Resta demostrar que $f[D]$ es discreto. Sea $e \in D'$. Consideremos $A := \{d \in D : f(d) = e\}$. Como D es discreto, para cada $d \in A$ existe un abierto U_d tal que $U_d \cap D = \{d\}$. Sea $U := \bigcup\{U_d : d \in A\}$. El conjunto $D \setminus U$ es cerrado, por lo que $f[D \setminus U] = D' \setminus \{e\}$ es un conjunto cerrado, de modo que $V := Y \setminus (D' \setminus \{e\})$ es un conjunto abierto el cual cumple que $D' \cap V = \{e\}$. Por lo tanto, D' también es discreto. $\square$

Con lo anterior, tenemos un tipo de función (más débil que los homeomorfismos) que preserva la propiedad de ser D-espacio:

Teorema 2.3.3. *Las imágenes continuas y cerradas de D-espacios son D-espacios.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva entre un D-espacio X y un espacio Y. Sea φ una a. v. a. de Y. Definimos una a. v. a. ψ de X dada por $\psi(x) := f^{-1}[\varphi(f(x))]$. Como X es un D-espacio existe $D \subseteq X$ cerrado y discreto tal que $X = \bigcup \psi[D]$.

Consideremos $D' := f[D]$. Como f es una función cerrada, el Lema 2.3.2 nos dice que D' es un conjunto cerrado y discreto. Lo que nos falta demostrar es que $Y = \bigcup \varphi[D']$. Sea $y \in Y$. Existen $x \in X$ y $d \in D$ tal que $f(x) = y$ y $x \in \psi(d) = f^{-1}[\varphi(f(d))]$. Así, $y = f(x) \in \varphi(f(d))$ donde $f(d) \in D'$. Por lo tanto, $y \in \bigcup \varphi[D']$. Entonces, $Y = \bigcup \varphi[D']$.

En resumen, D' es un núcleo para φ. Luego, Y es un D-espacio.

$\square$

Naturalmente, en este punto podemos preguntarnos qué ocurre en el otro extremo, donde pedimos que la función en cuestión sea abierta en lugar de ser cerrada. Una prueba similar a la del Teorema 2.3.3 no funcionaría, pues no parece ser cierto que la imagen abierta y continua de un núcleo sea un conjunto cerrado y discreto. Sin más rodeo, la respuesta a la pregunta es negativa y seremos capaces de dar un ejemplo de un espacio, no D-espacio, que es imagen continua y abierta de un D-espacio. Antes necesitaremos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.3.4. *Si X es primero numerable, entonces X es la imagen continua y abierta de un espacio metrizable.*

Demostración. Tomemos una base $\mathcal{B} := \{U_i : i \in I\}$ para la topología de X con I un conjunto no vacío de índices. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $X_n := I$ visto como un espacio topológico discreto. Resulta entonces que cada X_i es un espacio metrizable. Definimos

$$L := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n = I^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to I : f \text{ es función}\}.$$

Ya que L es el producto numerable de espacios métricos, éste resulta ser un espacio métrico también. Consideremos el subespacio

$$M := \{f \in L : \{U_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\} \text{ es una base local para alguna } x \in X\}.$$

Ya que ser metrizable se hereda a cualquier subespacio, tenemos que M es un subespacio metrizable de L. Además, como X no es vacío y es primero numerable tomamos $x \in X$ e $\{i_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq I$ tal que $\{U_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x, de modo que la función $f : \mathbb{N} \to I$ dada por $f(n) := i_n$ es un elemento de M, por lo que M no es vacío. M es el espacio que buscamos, procederemos a definir la función que necesitamos.

Por definición, para cada $f \in M$ existe $x \in X$ tal que $\{U_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para x. Además, como nuestro espacio X es T_2 afirmamos que dos puntos distintos no pueden tener una misma base local, garantizando así que al asignarle a cada $f \in M$ un punto $x \in X$ tal que $\{U_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para x lo estamos haciendo de forma única, llamémoslo x_f. De esta manera, somos capaces de definir la función $F : M \to X$ dada por $F(f) := x_f$. Demostraremos que F es suprayectiva, continua y abierta.

Veamos que F es una función suprayectiva pues cada elemento $x \in X$ tiene una base local numerable $\{U_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Así, la función $f : \mathbb{N} \to I$ dada por $f(n) := i_n$, satisface que $\{U_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para x y, por ende, $F(f) = x$. En suma, F es suprayectiva.

Demostraremos que F es una función continua en cada $f \in M$. Sea $f \in M$. Sabemos que $\{U_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable para x_f. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Demostraremos que existe $V \subseteq L$, una vecindad abierta de f, tal que $F[V \cap M] \subseteq U_{f(n_0)}$. Consideremos a $\pi_{n_0} : L \to X_{n_0}$ la n_0-proyección canónica. Como la proyección es continua y $\{f(n_0)\}$ es un abierto de $X_{f(n_0)}$ por ser un espacio discreto, entonces $V := \pi_{n_0}^{-1}[\{f(n_0)\}]$ es un abierto de L. Para $x \in F[V \cap M]$ existe $g \in V \cap M$ tal que $x = F(g)$. Como $g \in V$, entonces $f(n_0) = \pi_{n_0}(g) = g(n_0)$. Recordemos que $\{U_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x, por lo cual $x \in U_{g(n_0)} = U_{f(n_0)}$, es decir, $x \in U_{f(n_0)}$. Así, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe V vecindad de f tal que $F[V \cap M] \subseteq U_{f(n_0)}$, es decir, F es continua en f y, en consecuencia, es continua en todo M.

Finalmente, demostremos que F es una función abierta. Para ello demostraremos que F manda abiertos básicos de M en abiertos de X. Como cada uno de los espacios X_n es discreto, entonces una base para la topología en L es

$$\left\{\bigcap_{n=0}^{k} \pi_{l_n}^{-1}[\{i_n\}] : k \in \mathbb{N}, \{l_0, \dots, l_k\} \subseteq \mathbb{N}, \forall n \in \{0, \dots, k\}(i_n \in X_{l_n})\right\}.$$

Si W es un abierto básico de L, entonces existe $\{l_0, \dots, l_k\} \subseteq \mathbb{N}$ y para cada $n \in \{0, \dots, k\}$ existe $i_n \in X_{l_n}$ tal que $W = \bigcap\limits_{n=0}^{k} \pi_{l_n}^{-1}[\{i_n\}]$. Demostraremos que $F[W \cap M]$ es un abierto de X. El conjunto $\bigcap\limits_{n=0}^{k} U_{i_n}$ es un abierto de X pues es una intersección finita de abiertos. Afirmamos que $F[W \cap M] = \bigcap\limits_{n=0}^{k} U_{i_n}$. Comenzaremos con la primer contención, sean $x \in F[W \cap M]$ y $f \in W \cap M$ tal que $x = F(f)$. Como $f \in W$, entonces para toda $n \in \{0, \dots, k\}$ se cumple que $f(l_n) = i_n$, por lo cual $x = F(f) \in U_{f(l_n)} = U_{i_n}$, lo cual implica que $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{k} U_{i_n}$. Demostremos la otra contención. Sean $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{k} U_{i_n}$ y $g \in M$ tal que $\{U_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x decreciente. Definamos la función

$$f(n) := \begin{cases} i_m, & \text{si } \; n = l_m \text{ para alguna } m \in \{0, \dots, k\}, \\ g(n), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por construcción, para cada $n \in \{0, \dots, k\}$ se cumple que $f(l_n) = i_n$ por lo que $f \in \bigcap\limits_{n=0}^{k} \pi_{l_n}^{-1}[i_n] = W$. Demostremos que $\{U_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para x. Sea $V \subseteq X$ una vecindad de x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U_{g(N)} \subseteq V$. Sea $n := \text{máx}\{l_0, \dots, l_k, N\} + 1$, entonces $U_{f(n)} = U_{g(n)} \subseteq U_{g(N)} \subseteq V$. Así, $\{U_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para x y, en consecuencia, $f \in M$. Entonces, $x = F(f) \in F[W \cap M]$. Acabamos de demostrar que $F[W \cap M] = \bigcap\limits_{n=0}^{k} U_{i_n}$, por lo cual $F[W \cap M]$ es abierto y así, F es una función abierta.

En resumen, X es la imagen continua y abierta de M bajo F. □

Con la ayuda del Teorema 2.3.4 podemos ver el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.5. Consideremos a $X = [0, \omega_1)$ con su topología de orden. Ya sabemos que X no es un D-espacio pero sí es primero numerable. Por el Teorema 2.3.4 sabemos que existe M un espacio métrico y $f : M \to X$ una función suprayectiva, abierta y continua. En el Teorema 1.2.2 probamos que todo espacio métrico es un D-espacio; en particular, M es D-espacio. Así, X es la imagen continua y abierta de un D-espacio, pero X no es D-espacio. Concluimos que la propiedad de ser D-espacio no se preserva bajo imágenes continuas y abiertas.

Pasemos a trabajar con las preimágenes. En este caso al tener una función $f : X \to Y$ continua y suprayectiva donde Y es D-espacio, y teniendo φ una a. v. a. de X, nos gustaría definir a ψ una a. v. a. para Y que dependa de φ. Imitando la demostración del Teorema 2.3.3, al momento de tener D' un núcleo para ψ proponemos a $D := f^{-1}[D']$ como un núcleo para φ. Pedir continuidad a f nos garantizaría que D sea cerrado. Además, como consecuencia de la continuidad de f y del hecho de que D' es discreto, para cualquier $d \in D$ existe un abierto que contiene a $f^{-1}[\{f(d)\}]$ y no toca a $f^{-1}[D'] \setminus \{f(d)\}]$. Sin embargo, toparíamos con un problema al intentar separar a los elementos de $f^{-1}[\{f(d)\}]$. Una manera sencilla de resolver este problema es pidiendo que las fibras de f sean finitas, pero para nuestra fortuna podemos generalizar un poco más y pedir que las fibras de f sean compactas. Además, para poder definir a nuestra a. v. a. ψ será necesario pedir que f sea cerrada. Borges y Wehrly enuncian y bosquejan la prueba del siguiente teorema en [2]:

Teorema 2.3.6. *Toda preimagen perfecta y continua de un D-espacio es un D-espacio.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos con Y un D-espacio y $f : X \to Y$ una función continua, perfecta y suprayectiva. Sea φ una a. v. a. de X.

Para cada $y \in Y$ la fibra $f^{-1}[\{y\}]$ es compacta y $\{\varphi(x) : x \in f^{-1}[\{y\}]\}$ es una cubierta de la fibra, en consecuencia existe un conjunto finito $F_y \subseteq f^{-1}[\{y\}]$ tal que $f^{-1}[\{y\}] \subseteq \bigcup \varphi[F_y]$. El conjunto $X \setminus \bigcup \varphi[F_y]$ es un cerrado, por lo que $f[X \setminus \bigcup \varphi[F_y]]$ también es cerrado. Además, $y \notin f[X \setminus \bigcup \varphi[F_y]]$ pues la fibra de y está contenida en $\bigcup \varphi[F_y]$, así que $y \in Y \setminus f[X \setminus \bigcup \varphi[F_y]]$, donde éste último es un abierto. Fijemos a V_y una vecindad abierta de y tal que $V_y \subseteq Y \setminus f[X \setminus \bigcup \varphi[F_y]]$. Nombremos $U_y := f^{-1}[V_y]$, el cual es un conjunto abierto que contiene a la fibra de y. Afirmamos que $U_y \subseteq \bigcup \varphi[F_y]$. Procedamos por contrapuesta, sea $x \in X \setminus \bigcup \varphi[F_y]$. Aplicando f tenemos que $f(x) \in f[X \setminus \bigcup \varphi[F_y]]$, por lo que $f(x) \notin Y \setminus f[X \setminus \bigcup \varphi[F_y]]$ y, por lo tanto, $f(x) \notin V_y$. Entonces, $x \notin f^{-1}[V_y] = U_y$, concluyendo que $U_y \subseteq \bigcup \varphi[F_y]$.

Definamos una a. v. a. en Y dada por $\psi(y) = V_y$. Como Y es un D-espacio, existe $D \subseteq Y$ cerrado y discreto tal que $Y = \bigcup \psi[D]$. Sea $D' := \bigcup\{F_d : d \in D\}$. D' es nuestro candidato a ser un núcleo para φ.

Primero demostremos que $\bigcup \varphi[D'] = X$. Si $x \in X$, entonces $f(x) \in \psi(d) = V_d$ para algún $d \in D$, lo cual implica que la fibra de $f(x)$ está contenida en $U_d = f^{-1}[V_d]$ y, en particular, $x \in U_d$, pero por construcción $U_d \subseteq \bigcup \varphi[F_d] \subseteq \bigcup \varphi[D']$, así que $x \in \bigcup \varphi[D']$. En conclusión, $X = \bigcup \varphi[D']$.

Ahora demostremos que D' es cerrado. Sea $x \in X \setminus D'$. Veamos dos casos:

Caso 1. $x \in f^{-1}[D]$.

En este caso existe $d \in D$ tal que $f(x) = d$ pero $x \notin F_d$, además como D es discreto elegimos $V \subseteq Y$ abierto tal que $V \cap D = \{d\}$, por lo que $f^{-1}[d] \subseteq f^{-1}[V]$ y $f^{-1}[V] \cap D' = F_d$, entonces $U := f^{-1}[V] \setminus F_d$ es una vecindad abierta de x tal que $U \cap D' = \emptyset$, es decir, $x \in U \subseteq X \setminus D'$.

Caso 2. $x \notin f^{-1}[D]$.

Tenemos que $f(x) \notin D$ y, como D es cerrado, existe $V \subseteq Y \setminus D$ vecindad abierta de $f(x)$. Para $U := f^{-1}[V]$ se satisface que $x \in U$ y $U \cap f^{-1}[D] = \emptyset$, es decir, $x \in U \subseteq X \setminus f^{-1}[D] \subseteq X \setminus D'$.

Por los dos casos anteriores concluimos que D' es un conjunto cerrado.

Para finalizar con esta demostración veamos que D' es discreto. Sea $d \in D'$. Sabemos que $f(d) \in D$, como D es discreto existe $V \subseteq Y$ un abierto tal que $V \cap D = \{f(d)\}$. Ahora, $f^{-1}[V]$ es un abierto tal que $f^{-1}[V] \cap D' = F_{f(d)}$. Tomando $U := f^{-1}[V] \setminus (F_{f(d)} \setminus \{d\})$, U es una vecindad abierta de d que cumple la igualdad $U \cap D' = \{d\}$. Así, D' es discreto.

Con todo lo anterior tenemos que D' es un núcleo para φ. Por lo tanto, X es un D-espacio. $\square$

2.4. Producto de D-espacios

El producto de D-espacios no siempre resulta ser un D-espacio. Dar un ejemplo de la afirmación anterior no es tarea sencilla, nos hace falta enunciar una definición extra y tres resultados para poder dar nuestro ejemplo. Dos de estos resultados no incluirán una demostración pues éstas se escapan de los propósitos del presente trabajo:

Definición 2.4.1. Sea $B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que B es un *conjunto de Bernstein* si y sólo si para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ conjunto cerrado no numerable se cumple que $|F \cap B| = |F \setminus B| = 2^{\aleph_0}$.

Lema 2.4.2. *Existe un conjunto de Bernstein.*

Lema 2.4.3. *Si (X, τ) es un espacio Hausdorff, hereditariamente separable y primero numerable con $|X| = 2^{\aleph_0}$, entonces existe τ' una topología para X que satisface lo siguiente:*

(1) (X, τ') es un espacio localmente compacto y primero numerable;

(2) $\tau \subseteq \tau'$;

(3) (X, τ') no es Lindelöf; y

(4) si $V \subseteq X$ es numerable y $|cl_\tau(V)| = 2^{\aleph_0}$, entonces V tiene un punto de acumulación en (X, τ').

Las demostraciones de los Lemas 2.4.2 y 2.4.3 se pueden encontrar en [8] y [13], respectivamente.

Lema 2.4.4. *Sean $(X, \tau), (X, \rho)$ dos espacios topológicos tales que $\tau \subseteq \rho$, (X, τ) es Haudorff y $Z \subseteq X$. Consideremos a $W := X \times Z$ con la topología $\Gamma := \rho \times \tau_Z$. Sea $\Delta := \{(x, x) : x \in Z\}$. Entonces, (Δ, Γ_Δ) es un subespacio cerrado de W homeomorfo a (Z, ρ_Z).*

Demostración. Primero demostraremos que Δ es un conjunto cerrado de W. Sea $(x, y) \in W$ con $x \neq y$. Como (X, τ) es un espacio Hausdorff, existen $U, V \in \tau$ vecindades ajenas tal que $x \in U$ y $y \in V$. También, $V \in \tau \subseteq \rho$, por lo que $U \times (V \cap Z)$ es un abierto de (W, Γ). Además, como U y V son conjuntos ajenos se satisface la igualdad $U \times (V \cap Z) \cap \Delta = \emptyset$. Por lo tanto, $(x, y) \in U \times (V \cap Z) \subseteq W \setminus \Delta$. Así, Δ es un conjunto cerrado de W.

Demostraremos que (Δ, Γ_Δ) es homeomorfo a (Z, ρ_Z). Sea $f : \Delta \to Z$ dada por $f(x, x) := x$. f es una función biyectiva. Basta probar que es continua y abierta.

Comencemos por demostrar que f es continua. Sean $(x, x) \in \Delta$ y $U \in \rho$ tal que $x \in U \cap Z$. El abierto $U \times Z$ satisface que $(x, x) \in (U \times Z) \cap \Delta$.

Afirmamos que $f[(U \times Z) \cap \Delta] = U \cap Z$. Si $a \in f[(U \times Z) \cap \Delta]$, entonces $(a, a) \in (U \times Z) \cap \Delta$, lo cual implica que $a \in U \cap Z$; por otro lado, si $a \in U \cap Z$, entonces $(a, a) \in (U \times Z) \cap \Delta$ por lo que $a \in f[(U \times Z) \cap \Delta]$. En conclusión, $f[(U \times Z) \cap \Delta] = U \cap Z$, con lo cual concluimos que f es continua.

Continuaremos por demostrar que f es una función abierta. Sean $U \in \rho$ y $V \in \tau$. Como $V \in \tau \subseteq \rho$ entonces $U \cap \ V \cap Z \in \rho_Z$. Afirmamos que $f[(U \times (V \cap Z)) \cap \Delta] = U \cap V \cap Z$. Si $b \in f[(U \times (V \cap Z)) \cap \Delta]$, entonces $(b, b) \in U \times (V \cap Z) \cap \Delta$ y así, $b \in U \cap V \cap Z$; para la otra contención, si $b \in U \cap V \cap Z$, entonces $(b, b) \in (U \cap (V \cap Z)) \cap \Delta$; por lo tanto, $b \in f[(U \cap (V \cap Z)) \cap \Delta]$. Se cumple la igualdad $f[(U \times (V \cap Z)) \cap \Delta] = U \cap V \cap Z$ y, en consecuencia, f es una función abierta.

Luego, (Δ, Γ_Δ) es homeomorfo a (Z, ρ_Z). □

Con la herramienta que acabamos de presentar, Alas, Junqueira y Wilson presentan en [1] un ejemplo de dos espacios topológicos que son D-espacios pero cuyo producto no lo es. Procederemos a desarrollar dicho ejemplo:

Ejemplo 2.4.5. Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de Bernstein. Sea e la topología euclideana sobre $\mathbb{R}$. Consideremos $\rho := e_B$, el subespacio topológico (B, ρ) satisface las siguientes propiedades: (B, ρ) es Hausdorff pues $(\mathbb{R}, e)$ lo es; ya que $(\mathbb{R}, e)$ es segundo numerable, entonces cualquier subespacio de (B, ρ) resulta ser segundo numerable y, por lo tanto, separable. Conluimos que (B, ρ) es hereditariamente separable; (B, ρ) es primero numerable pues es metrizable; y $|B| = 2^{\aleph_0}$, por la Definición 2.4.1.

Por el Lema 2.4.3 sabemos que existe τ una topología en B la cual satisface lo siguiente: (B, τ) es localmente compacto y primero numerable, $\rho \subseteq \tau$ y (B, τ) no es Lindelöf.

A partir de e y τ generaremos una nueva topología para $\mathbb{R}$. Para ello, probaremos que $\beta := e \cup \tau$ es base para alguna topología en $\mathbb{R}$. En primer lugar, como e es una topología en $\mathbb{R}$, entonces $\bigcup e = \mathbb{R}$ y, por ende, $\bigcup \beta = \bigcup (e \cup \tau) = \mathbb{R}$; en segundo lugar, si $U, V \in \beta$ podemos diferenciar dos casos:

Caso 1. $U, V \in e$ o $U, V \in \tau$.

Ya que e y τ son topologías, entonces $U \cap V \in e$ o $U \cap V \in \tau$, respectivamente. En cualquier caso concluimos que $U \cap V \in \beta$.

Caso 2. $U \in e$ y $V \in \tau$.

Como $V \subseteq B$, entonces $V \cap B = V$, además $U \cap B \in \rho \subseteq \tau$, así $U \cap V = U \cap B \cap V \in \tau \subseteq \beta$. El caso cuando $U \in \tau$ y $V \in e$ es análogo.

En cualquier caso obtenemos que $U \cap V \in \beta$. En consecuencia, β es una base para alguna topología en $\mathbb{R}$. Sea σ la topología en $\mathbb{R}$ inducida por β. Vale la pena notar que $B \in \tau \subseteq \beta \subseteq \sigma$, por lo que (B, σ_B) es un subespacio abierto de $(\mathbb{R}, \sigma)$.

Antes de continuar será necesario demostrar que $\sigma_{\mathbb{R}\setminus B} = e_{\mathbb{R}\setminus B}$. Comencemos por tomar $U \in \sigma$ y $x \in U \cap (\mathbb{R} \setminus B)$. Como β es base de σ, existe $W \in \beta = e \cup \tau$ tal que $x \in W \cap (\mathbb{R} \setminus B) \subseteq U \cap (\mathbb{R} \setminus B)$. Ya que todo abierto que pertenece a τ está contenido en B y $x \in W \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, entonces $W \in e$. Así, $U \cap (\mathbb{R} \setminus B) \in e_{\mathbb{R}\setminus B}$; la otra contención se obtiene de una manera más inmediata recordando que $e \subseteq \beta \subseteq \sigma$, por lo que $e_{\mathbb{R}\setminus B} \subseteq \sigma_{\mathbb{R}\setminus B}$. En consecuencia, $\sigma_{\mathbb{R}\setminus B} = e_{\mathbb{R}\setminus B}$.

Probaremos que $(\mathbb{R}, \sigma)$ es un D-espacio. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \beta$ una a. v. a. de $(\mathbb{R}, \sigma)$. Ya que $\sigma_{\mathbb{R}\setminus B} = e_{\mathbb{R}\setminus B}$ y el espacio $(\mathbb{R} \setminus B, e_{\mathbb{R}\setminus B})$ es metrizable, por el Teorema 1.2.2 afirmamos que el espacio $(\mathbb{R} \setminus B, \sigma_{\mathbb{R}\setminus B})$ es un D-espacio. Por lo tanto, existe un conjunto cerrado y discreto $D_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ en $(\mathbb{R} \setminus B, \sigma_{\mathbb{R}\setminus B})$ tal que $\mathbb{R} \setminus B \subseteq \bigcup \varphi[D_1]$. Nuevamente, como $D_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ y para toda $d \in D_1$ se cumple que $\varphi(d) \in \beta$, entonces aseguramos que $\varphi(d) \in e$ (ya que cualquier elemento de τ está contenido en B). Luego, $F := \mathbb{R} \setminus \bigcup \varphi[D_1]$ es un conjunto cerrado de $(\mathbb{R}, e)$. Además, como $\mathbb{R} \setminus B \subseteq \bigcup \varphi[D_1] = \mathbb{R} \setminus F$ entonces $F \subseteq B$. Ya que B es un conjunto de Bernstein y $F \setminus B = \emptyset$, concluimos que F es un conjunto a lo más numerable. Por el Corolario 1.2.6 sabemos que (F, σ_F) es un D-espacio, por consiguiente existe un conjunto cerrado y discreto $D_2 \subseteq F$ en (F, σ_F) tal que $F \subseteq \bigcup \varphi[D_2]$. Sea $D := D_1 \cup D_2$. D es nuestro candidato a ser un núcleo para φ. Por construcción

$$\bigcup \varphi[D] = \bigcup \varphi[D_1] \cup \bigcup \varphi[D_2] \supseteq \bigcup \varphi[D_1] \cup \Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup \varphi[D_1]\Big) = \mathbb{R},$$

de modo que $\bigcup \varphi[D] = \mathbb{R}$.

Primero demostremos que D es un conjunto cerrado. Por un lado, D_1 es un conjunto cerrado de $(\mathbb{R} \setminus B, \sigma_{\mathbb{R}\setminus B})$ y $\mathbb{R} \setminus B$ es un conjunto cerrado de $(\mathbb{R}, \sigma)$, así D_1 es un conjunto cerrado de $(\mathbb{R}, \sigma)$; por otro lado, como $e \subseteq \sigma$ y F es un cerrado de $(\mathbb{R}, e)$, entonces F también es un cerrado de $(\mathbb{R}, \sigma)$. De manera similar, como D_2 es un cerrado de (F, σ_F), entonces D_2 es un cerrado de $(\mathbb{R}, \sigma)$.

Por lo tanto, $D = D_1 \cup D_2$ es un cerrado de $(\mathbb{R}, \sigma)$.

Probaremos que D es discreto. Fijemos $d \in D$ y consideremos dos casos:

Caso 1. $d \in D_2$.

Existe $U \in \beta$ tal que $D_2 \cap (U \cap F) = \{d\}$. Consideremos $V := U \cap B \in \sigma$. Como $D_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus B$, entonces $V \cap D_1 = \emptyset$. Además, ya que $D_2 \subseteq F \subseteq B$, entonces $D_2 \cap V = D_2 \cap (U \cap B) = D_2 \cap F \cap U \cap B = D_2 \cap F \cap U = \{d\}$. Luego, $V \cap D = \{d\}$.

Caso 2. $d \in D_1$.

Existe $U \in \sigma$ tal que $D_1 \cap (U \cap (\mathbb{R} \setminus B)) = \{d\}$, pero $D_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus B$, por lo que $D_1 \cap U = \{d\}$. Sea $V := U \cap \bigcup \varphi[D_1] \in \sigma$. Ya que $V \cap D_1 = \{d\}$ y $D_2 \subseteq F = \mathbb{R} \setminus \bigcup \varphi[D_1]$, entonces $V \cap D_2 = \emptyset$. Así, $D \cap V = \{d\}$.

Por los dos casos anteriores podemos concluir que para todo $d \in D$ existe $V \in \sigma$ tal que $D \cap V = \{d\}$ y, por ende, D es un conjunto discreto de $(\mathbb{R}, \sigma)$.

Por lo tanto, D es un nucleo para φ. Luego, $(\mathbb{R}, \sigma)$ es un D-espacio.

Para continuar, probaremos que $(\mathbb{R}, \sigma)$ es un espacio Lindelöf. Sea $\mathcal{U} \subseteq \beta$ una cubierta abierta de $\mathbb{R}$. Sea

$$\mathcal{V} := \{U \cap (\mathbb{R} \setminus B) : U \in \mathcal{U} \text{ y } U \cap \mathbb{R} \setminus B \neq \emptyset\}$$

una cubierta abierta de $(\mathbb{R} \setminus B, \sigma_{\mathbb{R} \setminus B}) = (\mathbb{R} \setminus B, e_{\mathbb{R} \setminus B})$. Como $(\mathbb{R} \setminus B, e_{\mathbb{R} \setminus B})$ es segundo numerable, entonces es Lindelöf y así existe $\{U_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_n \cap \mathbb{R} \setminus B \neq \emptyset\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathbb{R} \setminus B \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Ya que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $U_n \cap \mathbb{R} \setminus B \neq \emptyset$ y todos los elementos de τ están contenidos en B, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $U_n \in e$. De esta forma, $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n \in e$. Por otro lado, sea $F := \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq B$ el cual es un cerrado de $(\mathbb{R}, e)$ que está contenido en B y, en consecuencia, es un conjunto a lo más numerable. Por lo tanto, existe $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Así

$$\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. En conclusión, $(\mathbb{R}, \sigma)$ es un espacio Lindelöf.

Consideremos al espacio topológico $P := \mathbb{R} \times B$ donde $\mathbb{R}$ tiene la topología σ y B tiene la topología ρ. P es un producto de D-espacios ((B, ρ) es un D-espacio pues es metrizable), sin embargo resultará que P no es un D-espacio.

Por el Lema 2.4.4 sabemos que $\Delta = \{(x, x) : x \in B\}$ es un subespacio cerrado homeomorfo a (B, σ_B). Notemos que $\tau = \sigma_\beta$ pues $\beta = e \cup \tau$ es base para $(\mathbb{R}, \sigma)$ y $\rho \subseteq \tau$, por lo que Δ es homeomorfo a (B, τ) visto como subespacio de P. Demostraremos que (B, τ) no es un D-espacio y, por lo tanto, tampoco lo será P.

Por el Lema 2.4.3 ya sabemos que (B, τ) no es Lindelöf. Lo que probaremos a continuación es que la extensión de (B, τ) es igual a $\aleph_0$. Lo que afirmamos es que todo subconjunto no numerable de B tiene un punto de acumulación. Sea $X \subseteq B$ un conjunto no numerable. Como X no es numerable, entonces $|cl_e X| = 2^{\aleph_0}$ (la cerradura euclideana de todo subconjunto no numerable de los reales tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$). Así, $|cl_\rho X| = |B \cap cl_e X| = 2^{\aleph_0}$ ya que B es un conjunto de Bernstein y $cl_e X$ es un conjunto cerrado no numerable.

Como (B, ρ) es hereditariamente separable, entonces $(cl_\rho X, e_{cl_\rho X})$ es separable, por lo que existe $W \subseteq cl_\rho X$ un conjunto denso numerable. Además, notemos que $cl_{e_{cl_\rho X}} X = cl_e X \cap cl_\rho X = cl_\rho X$, por lo que X es un conjunto denso en $(cl_\rho X, e_{cl_\rho X})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $w \in W$ escogemos un elemento fijo $x(w)_n \in X \cap B_{\frac{1}{n}}(w)$. Consideremos al conjunto numerable $V := \{x(w)_n : w \in W, n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que V es denso en $(cl_\rho X, e_{cl_\rho X})$.

Si $x \in cl_{e_B} X$ y U es una vecindad de x en $(cl_\rho X, e_{cl_\rho X})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap cl_\rho X \subseteq U$. Como W es denso, existe $w \in W$ tal que $w \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap cl_\rho X$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(w) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x)$, entonces

$$x(w)_m \in B_{\frac{1}{m}}(w) \cap X \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x) \cap cl_\rho X \subseteq U.$$

Por lo tanto, $V \cap U \neq \emptyset$ y, por ende, V es denso en $(cl_\rho X, e_{cl_\rho X})$. Por consiguiente, $cl_\rho X = cl_{cl_\rho X} V = cl_\rho V \cap cl_\rho X$, lo que implica que $|cl_\rho V| = 2^{\aleph_0}$. Por el inciso (4) del Lema 2.4.3 concluimos que V tiene un punto de acumulación en (B, τ) y, en consecuencia, X tiene un punto de acumulación en (B, τ), como se quería demostrar.

Con lo demostrado anteriormente deducimos que no existen subconjuntos discretos en (B, τ) que no sean numerables, por lo que $e(B) \leq \aleph_0$. Además, como (B, τ) no es Lindelöf se cumple que $L(B) > \aleph_0$, de modo que $e(B) < L(B)$. Por el Teorema 1.1.10 aseguramos que (B, τ) no es un D-espacio y, por lo tanto,

(Δ, σ_Δ) no es un D-espacio. Ya que (P, σ) tiene un subespacio cerrado que no es un D-espacio concluimos que (P, σ) no es un D-espacio.

Pero no todo está perdido cuando nos referimos al producto de D-espacios. Si $\{X_i : i \in I\}$ es un conjunto de espacios topológicos y X el producto de estos espacios, X puede ser visto como la preimagen de cualquiera de los espacios X_i bajo la función proyección correspondiente. Además, las funciones proyección son continuas. Recordando el Teorema 2.3.6, lo único que nos hace falta en este punto es poder garantizar que al menos una de las proyecciones es una función perfecta. Aunque no podemos dar una respuesta general a esto, nos será posible responderla para el caso finito únicamente donde uno de los espacios es compacto.

Proposición 2.4.6. *Si X es un D-espacio y Y es un espacio compacto, entonces $X \times Y$ es un D-espacio.*

Demostración. Sea $\pi_X : X \times Y \to X$ la proyección canónica. π_X es una función continua que cumple que $X \times Y = \pi_X^{-1}[X]$. Además, como Y es compacto se satisface que π_X es una función cerrada. Para cada $x \in X$ tenemos que $\pi_X^{-1}[\{x\}] = \{x\} \times Y$, el cual resulta ser compacto por ser homeomorfo a Y, por lo cual π_X tiene fibras compactas. En suma, tenemos que $X \times Y$ es la preimagen continua y perfecta de un D-espacio. Por el Teorema 2.3.6 aseguramos que $X \times Y$ es un D-espacio. □

Para concluir con esta sección y capítulo veremos un ejemplo en el que el producto finito de D-espacios resulta ser nuevamente un D-espacio sin la necesidad de recurrir a algún espacio compacto. En el Teorema 1.2.3 vimos que la recta de Sorgenfrey, $\mathcal{S}$, es un D-espacio. Originalmente, van Douwen y Pfeffer prueban en [12] que toda potencia finita de la recta de Sorgenfrey es un D-espacio, todo esto con la idea de que todo espacio-SIG es un D-espacio. Lo que haremos en el siguiente resultado será definir un orden sobre un espacio homeomorfo a $\mathcal{S}^n$ para probar que es un espacio-SIG y, con el Teorema 1.2.5, concluir que dicho espacio es D, y en consecuencia lo será $\mathcal{S}^n$.

Teorema 2.4.7. *Toda potencia finita de la recta de Sorgenfrey es un espacio-SIG. En particular, cualquier potencia de la recta de Sorgenfrey es un D-espacio.*

Demostración. Consideremos al conjunto $H := \mathcal{S} \cap [0, \infty)$ con la topología que hereda como subespacio de la recta de Sorgenfrey. Sea n un entero positivo.

Probaremos que H^n es un espacio-SIG. Definamos la relación $\preccurlyeq$ en H^n donde para cualesquiera $x, y \in H^n$ tendremos que $x \preccurlyeq y$ si y sólo si $x_i \leq y_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, donde x_i denota la i-ésima entrada de x.

No sólo resulta que $(H^n, \preccurlyeq)$ es un conjunto con un orden reflexivo, sino que es un conjunto parcialmente ordenado (lo cual nos será útil más adelante). Demostraremos esta afirmación. Sean $x, y, z \in H^n$.

(1) Para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ ocurre que $x_i \leq x_i$, por lo cual $x \preccurlyeq x$. Así, $\preccurlyeq$ es reflexiva.

(2) Supongamos que $x \preccurlyeq y$ y $y \preccurlyeq x$. Por la definición, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sucede que $x_i \leq y_i$ y $y_i \leq x_i$, en consecuencia $x_i = y_i$ para cada i, concluyendo que $x = y$. Entonces, $\preccurlyeq$ es una relación antisimétrica.

(3) Supongamos que $x \preccurlyeq y$ y $y \preccurlyeq z$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $x_i \leq y_i \leq z_i$, de donde se sigue que $x_i \leq z_i$ y, por lo tanto, $x \preccurlyeq z$. De esta manera, $\preccurlyeq$ es transitiva.

Los tres puntos anteriores nos garantizan que $\preccurlyeq$ es un orden parcial en H^n.

Notemos que para cada $x \in H^n$ el conjunto $\{y \in H^n : x \preccurlyeq y\}$ es abierto porque

$$\{y \in H^n : x \preccurlyeq y\} = \prod_{i=1}^{n} [x_i, \infty)$$

es un producto finito de abiertos de H.

Lo único que nos falta demostrar es que todo cerrado no vacío tiene un elemento $\preccurlyeq$- minimal. Para ello haremos uso del Lema de Zorn. Sea $F \subseteq H^n$ un conjunto cerrado no vacío. $(F, \preccurlyeq|_F)$ es un conjunto parcialmente ordenado, por lo cual basta probar que toda cadena no vacía está acotada inferiormente en F. Sea $\mathcal{C} \subseteq F$ una cadena no vacía, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $m(i) := \text{ínf}\{x_i : x \in \mathcal{C}\}$, el cual es un elemento de H. Consideremos $m \in H^n$ tal que $m_i = m(i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por definición se satisface que $m \preccurlyeq x$ para toda $x \in \mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{C}$ está acotada inferiormente en H^n.

Falta demostrar que $m \in F$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $x(i, \varepsilon) \in F$ tal que $m_i \leq x(i, \varepsilon)_i < m_i + \varepsilon$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, escogemos

$x(\varepsilon)$ el elemento mínimo de $\{x(i,\varepsilon) : i \in \{1,\dots,n\}\}$. Así, $x(\varepsilon) \in \prod_{i=1}^{n} [m_i, m_i+\varepsilon)$, lo cual nos dice que $m \in cl(F)$, pero como F es cerrado concluimos que $m \in F$. Entonces, $\mathcal{C}$ está acotada inferiormente en F.

Por el Lema de Zorn afirmamos que F tiene un elemento $\preccurlyeq$-minimal. Con todo lo anterior podemos concluir que $(H^n, \preccurlyeq)$ es un espacio-SIG. Por el Teorema 1.2.5 se constata que H^n es un D-espacio.

Con esto habremos terminado pues notemos que tanto H como $\mathcal{S}$ son la suma topológica de una cantidad numerable de copias del espacio $\mathcal{S}_0 := [0,1)$, por lo cual H y $\mathcal{S}$ son espacios homeomorfos. En consecuencia, H^n y $\mathcal{S}^n$ son homeomorfos y, por ende, $\mathcal{S}^n$ es un D-espacio. $\square$

Capítulo 3

Otros D-espacios

Como el nombre lo puede indicar, el objetivo de este capítulo será ampliar nuestra lista de ejemplos de D-espacios, algunos de los cuales serán una generalización de los ejemplos vistos en el Capítulo 1.

3.1. Espacios σ-compactos

Comenzaremos trabajando con una generalización de los espacios compactos. La diferencia yace en que el espacio en cuestión X es la unión numerable de subespacios compactos, es decir, X es un *espacio σ-compacto*. La compacidad de estos subespacios tiene dos implicaciones importantes: la primera es que cada uno de dichos subespacios es cerrado (recordemos que estamos trabajando con espacios que cumplen el axioma T_2); la segunda es que cada uno de los subespacios es D-espacio por el Teorema 1.1.4. Los dos puntos anteriores nos dan las hipótesis del Lema 2.1.3: X es la unión numerable de D-subespacios cerrados; en consecuencia, X es un D-espacio. Nuestro primer resultado del Capítulo 3 es el siguiente:

Teorema 3.1.1. *Todo espacio σ-compacto es un D-espacio.*

3.2. Espacios semiestratificables

En el primer capítulo se demostró que todo espacio métrico es un D-espacio (véase el Teorema 1.2.2), resultado que también seremos capaces de generalizar mucho más. Resulta que todo espacio métrico es de Moore, todo espacio de

Moore es semimetrizable y todo espacio semimetrizable es semiestratificable. Lo que probaremos en esta sección es que todo espacio semiestratificable es un D-espacio. Primero veamos algunas definiciones:

Definición 3.2.1. Sean X un espacio topológico y U un abierto. Una familia de cerrados $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una *semiestratificación* de U si y sólo si se cumple que

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Definición 3.2.2. Sea X un espacio topológico, decimos que X *es semiestratificable* si y sólo si a cada abierto U le podemos asignar una semiestratificación $F(U) := \{F(U,n) : n \in \mathbb{N}\}$ que satisfaga la siguiente propiedad: si U, V son abiertos tal que $U \subseteq V$, entonces $F(U,n) \subseteq F(V,n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que si $F(U) = \{F(U,n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una semiestratificación de U, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ ocurre $G(U,n) = \bigcup\limits_{m\leq n} F(U,m)$ es un conjunto cerrado, los cuales satisfacen que $U = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G(U,n)$, por lo que $G(U) = \{G(U,n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una semiestratificación de U tal que $G(U,n) \subseteq G(U,n+1)$. A una semiestratificación con estas características le llamaremos *creciente*. Este hecho será útil más adelante.

Con las definiciones anteriores ya es posible demostrar el resultado principal de esta sección, el cual también se puede encontrar enunciado y demostrado en [2]:

Teorema 3.2.3. *Todo espacio semiestratificable es un D-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio semiestratificable y φ una a. v. a. de X. Para cada abierto U fijemos una semiestratificación creciente $F(U) = \{F(U,n) : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los siguientes conjuntos:

$$\Phi_n := \{\varphi(x) : x \in F(\varphi(x), n)\} \quad \text{y} \quad X_n := \{x \in X : \varphi(x) \in \Phi_n\}.$$

Notemos que por construcción es cierto que $\Phi_n \neq \emptyset$ si y sólo si $X_n \neq \emptyset$. También, observemos que para toda $x \in X$ la condición $x \in \varphi(x) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F(\varphi(x), n)$ implica la existencia de $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F(\varphi(x), N)$ y, por lo tanto, $x \in X_N$. Con esto podemos concluir que $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Además, como cada semiestratificación es creciente, entonces $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones crecientes. Como X no es vacío, el conjunto $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene al menos un elemento que no es el vacío. Sea j_0 el menor natural tal que $X_{j_0} \neq \emptyset$. Por recursión transfinita podemos hacer la siguiente construcción:

- x_0 es un elemento fijo de X_{j_0}.
- Para toda $\alpha > 0$: si $X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(x_\gamma) \neq \emptyset$ tomamos x_α un elemento fijo de $X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(x_\gamma)$; si $X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(x_\gamma) = \emptyset$, entonces tomamos $x_\alpha = x_0$.

Afirmamos que existe algún ordinal α tal que $X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(x_\gamma) = \emptyset$. Procedamos por contradicción y supongamos que dicho ordinal no existe. Primero observemos que si α, β son ordinales tal que $\alpha < \beta$, entonces $x_\beta \in X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \varphi(x_\gamma)$ y $x_\alpha \in \varphi(x_\alpha)$, por lo que $x_\alpha \neq x_\beta$. De aquí podemos concluir que si $\alpha \neq \beta$ entonces $x_\alpha \neq x_\beta$, es decir, existe una correspondencia inyectiva de la clase de los ordinales en el conjunto X_{j_0}, lo cual no es posible. Por lo tanto, existe un ordinal α tal que $X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \varphi(x_\gamma) = \emptyset$. Sea α_0 el menor ordinal tal que $X_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\alpha_0} \varphi(x_\gamma) = \emptyset$.

Afirmamos que $D_0 := \{x_\gamma : \gamma < \alpha_0\}$ es un conjunto cerrado y discreto en X. Demostraremos que D_0 es cerrado y discreto al mismo tiempo. Primero observemos que, como $D_0 \subseteq X_{j_0}$, entonces para cada $x \in D_0$ ocurre que $x \in F(\varphi(x), j_0)$ por construcción, y como $\varphi(x) \subseteq \bigcup \varphi[D_0]$, entonces $F(\varphi(x), j_0) \subseteq F(\bigcup \varphi[D_0], j_0)$, así que $x \in F(\bigcup \varphi[D_0], j_0)$. Por lo tanto, $D_0 \subseteq F(\bigcup \varphi[D_0], j_0)$. Además, $F(\bigcup \varphi[D_0], j_0)$ es un conjunto cerrado, implicando que $clD_0 \subseteq F(\bigcup \varphi[D_0], j_0)$. Si $x \in clD_0$, entonces $x \in F(\bigcup \varphi[D_0], j_0)$, pero $F(\bigcup \varphi[D_0], j_0) \subseteq \bigcup \varphi[D_0]$, por ende $x \in \bigcup \varphi[D_0]$.

Sea δ_0 el menor ordinal tal que $x \in \varphi(x_{\delta_0})$. Nombremos

$$V := \varphi(x_{\delta_0}) \setminus F\left(\bigcup_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma), j_0\right),$$

el cual es un conjunto abierto. $x \notin F\left(\bigcup\limits_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma), j_0\right)$ pues $F\left(\bigcup\limits_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma), j_0\right) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma)$ y δ_0 es el menor ordinal tal que $x \in \varphi(x_{\delta_0})$, lo cual muestra que V es una vecindad de x.

Conviene observar tres cosas: en primer lugar, por construcción para toda β ordinal tal que $\delta_0 < \beta < \alpha_0$ se satisface que $x_\beta \notin \varphi(x_{\delta_0})$ y, en particular,

$x_\beta \notin V$; por otro lado, de manera análoga a cuando demostramos que $D_0 \subseteq F(\bigcup\varphi[D_0], j_0)$ se puede argumentar que $\{x_\gamma : \gamma < \delta_0\} \subseteq F\left(\bigcup_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma), j_0\right)$, de modo que $x_\beta \notin V$ para toda $\beta < \delta_0$; por último, $x_{\delta_0} \in \varphi(x_{\delta_0})$ y $x_{\delta_0} \notin F\left(\bigcup_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma), j_0\right)$, pues $F\left(\bigcup_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma), j_0\right) \subseteq \bigcup_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma)$ y $x_{\delta_0} \notin \bigcup_{\gamma<\delta_0} \varphi(x_\gamma)$, por lo que $x_{\delta_0} \in V$.

De las tres observaciones anteriores podemos concluir que $V \cap D_0 = \{x_{\delta_0}\}$. Si $x = x_{\delta_0}$, entonces V es la vecindad tal que $V \cap D_0 = \{x\}$; en caso contrario, $U := V \setminus \{x_{\delta_0}\}$ es una vecindad abierta de x tal que $U \cap D_0 = \emptyset$, lo cual no es posible porque x se encuentra en la cerradura de D_0. Por lo tanto, $x = x_{\delta_0} \in D_0$. Con lo anterior demostramos dos cosas: la primera es que la cerradura de D_0 está contenida en D_0 y, por lo tanto, D_0 es cerrado; la segunda es que para toda $\delta < \alpha_0$ existe una vecindad $V_\delta := \varphi(x_\delta) \setminus F\left(\bigcup_{\gamma<\delta} \varphi(x_\gamma), j_0\right)$ de x_δ tal que $D_0 \cap V_\delta = \{x_\delta\}$, por lo que D_0 es discreto. Por lo tanto, D_0 es un conjunto cerrado y discreto de X.

Si $X = \bigcup\varphi[D_0]$, entonces D_0 es el núcleo para φ que buscamos. En el caso contrario, sea j_1 el menor natural tal que $X_{j_1} \setminus \bigcup\varphi[D_0] \neq \emptyset$. De manera análoga, por recursión transfinita podemos tomar $D_1 := \{x_\gamma : \gamma < \alpha_1\} \subseteq X_{j_1} \setminus \bigcup\varphi[D_0]$ para algún ordinal α_1, tal que para toda $\beta < \alpha_1$ se cumple que $x_\beta \in (X_{j_1} \setminus \bigcup\varphi[D_0]) \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} \varphi(x_\gamma)$ y además $X_{j_1} \setminus \bigcup\varphi[D_0] \subseteq \bigcup\varphi[D_1]$. De la misma manera se puede probar que D_1 es un conjunto cerrado y discreto de X. Recursivamente, podemos conseguir una sucesión creciente $\{j_i : i \in \mathbb{N}\}$ de naturales y una sucesión $\{D_i : i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos cerrados y discretos que satisfacen dos propiedades: $X_{j_n} \subseteq \bigcup\varphi\left[\bigcup_{k=0}^{n} D_k\right]$ y $D_{n+1} \cap \bigcup\varphi\left[\bigcup_{k=0}^{n} D_k\right] = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la segunda propiedad implica que si $i \neq j$, entonces $D_i \cap D_j = \emptyset$. El conjunto $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ es nuestro candidato a ser un núcleo para φ.

En primer lugar, para cualquier $x \in X$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_N$. Además, $N \leq i_N$, por lo que $x \in X_N \subseteq X_{j_N} \subseteq \bigcup\varphi\left[\bigcup_{k=0}^{N} D_k\right]$, así que $x \in \bigcup\varphi[D]$. En conclusión, $X = \bigcup\varphi[D]$.

Demostremos que D es cerrado. Sean $x \in X \setminus D$, N el menor natural tal que $x \in \bigcup \varphi[D_N]$ y $d \in D_N$ tal que $x \in \varphi(d)$. Definimos $V := \varphi(d) \setminus \bigcup_{i=0}^{N} D_i$, la cual es una vecindad abierta de x. Notemos que, como

$$V \cap D \subseteq \varphi(d) \cap \bigcup_{i>N} D_i \subseteq \varphi[D_N] \cap \bigcup_{i>N} D_i = \emptyset,$$

$x \in V \subseteq X \setminus D$. Luego, D es cerrado.

Finalmente demostremos que D es discreto. Sean $d \in D$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $d \in D_N$. Como D_N es cerrado y discreto, entonces $D_N \setminus \{d\}$ es un cerrado. El conjunto $V := \varphi(d) \setminus \left(\bigcup_{i<N} D_i \cup (D_N \setminus \{d\}) \right)$ es una vecindad abierta de d. De igual forma, para toda $i \neq N$ se satisface que $V \cap D_i = \emptyset$ y $V \cap D_N = \{d\}$, por consiguiente $V \cap D = \{d\}$. Así, D es un conjunto discreto.

Con lo demostrado anteriormente podemos afirmar que D es un núcleo para φ. Por lo tanto, X es un D-espacio.

$\square$

Como se comentó al principio de esta sección, podemos mencionar algunos tipos de espacios topológicos que resultan ser semiestratificables y, por ende, son D-espacios. Vale la pena enunciar la definición de uno de esos espacios, los espacios de Moore.

Definición 3.2.4. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas abiertas, decimos que $\mathcal{U}$ es un *desarrollo para* X si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) para todo $x \in X$ la familia $\{\bigcup\{U \in \mathcal{U}_n : x \in U\} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x; y

(2) para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+1}$.

Decimos que X *es un espacio desarrollable* si X tiene un desarrollo.

Definición 3.2.5. Un espacio topológico X es un *espacio de Moore* si y sólo si X es desarrollable y regular.

Al principio de la sección se mencionó que existe una cadena de implicaciones la cual termina en los espacios semiestratificables. La demostración de cada una de ellas se puede encontrar en [10]. Para nuestro fin, nosotros lo enunciaremos de la siguiente manera:

Lema 3.2.6. *Sea X un espacio topológico. X es un espacio semiestratificable si cumple alguna de las siguientes tres propiedades:*

(1) X es un espacio metrizable.

(2) X es un espacio de Moore.

(3) X es un espacio semimetrizable.

Con el Lema 3.2.6 y el Teorema 3.2.3 obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.2.7. *Sea X un espacio topológico. X es un D-espacio si se cumple alguna de las siguientes tres propiedades:*

(1) X es un espacio metrizable.

(2) X es un espacio de Moore.

(3) X es un espacio semimetrizable.

3.3. Base punto-numerable

Esta sección está basada en [3]. Comenzaremos definiendo el concepto principal para esta sección: base punto-numerable.

Definición 3.3.1. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{A}$ es una *familia punto-numerable* de X si y sólo si para cada $x \in X$ se cumple que $\{U \in \mathcal{A} : x \in U\}$ es a lo más numerable.

Definición 3.3.2. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para su topología. Decimos que $\mathcal{B}$ es una *base punto-numerable* si y sólo si $\mathcal{B}$ es una familia punto-numerable de X.

Dada una base punto-numerable $\mathcal{B}$ de X definimos $\mathcal{B}_x := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$, una base local para x la cual es numerable, digamos $\mathcal{B}_x = \{U(x,n) : n \in \mathbb{N}\}$. A partir de aquí podemos definir una nueva base punto-numerable para x, tomando

$V(x,n) := \bigcap_{i=1}^{n} U(x,i)$, de modo que $\mathcal{B}'_x := \{V(x,n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable de x cerrada bajo intersecciones finitas y $\mathcal{B}' := \bigcup\{\mathcal{B}'_x : x \in X\}$ es una base punto-numerable de X. Con esto en mente, procedamos al resultado principal de esta sección. La demostración es una adaptación de la que realiza Peng en [9].

Teorema 3.3.3. *Si X tiene una base punto-numerable, entonces X es un D-espacio.*

Demostración. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{B} := \bigcup\{\mathcal{B}_x : x \in X\}$ una base punto-numerable para la topología de X, tal que cada $\mathcal{B}_x$ es una base local para x cerrada bajo intersecciones finitas y φ una a. v. a. de X. Supongamos que $X = \{x_\alpha : \alpha < \xi\}$ para algún ordinal ξ. Para cada $x \in X$ definimos el conjunto

$$C_x := \{\{y \in B : B \subseteq \varphi(y)\} : B \in \mathcal{B} \text{ y } x \in B\}.$$

Como $\mathcal{B}$ es una familia punto-numerable, entonces cada conjunto C_x es a lo más numerable. Consideremos a los conjuntos C_x bien ordenados por algún ordinal $\eta_x \leq \omega$.

Construiremos una familia de conjuntos $\{D_\alpha : \alpha < \xi\}$ por recursión transfinita, a partir de la cual obtendremos un núcleo para φ. Para D_0 procederemos por inducción sobre ω. Sea $d_0^0 := \text{mín}\, X = x_0$. Supongamos que para alguna $n \in \mathbb{N}$ ya tenemos los elementos $d_1^0, \ldots, d_n^0$.

- $n+1 = p^m$ para algún primo p y algún entero positivo m. Sea

$$\mathcal{C}_{n+1}^0 = \left\{ Y \in C_{d_m^0} : Y \setminus \bigcup_{i=0}^{p^m-1} \varphi(d_i^0) \neq \emptyset \right\}.$$

  Si $\mathcal{C}_{n+1}^0 \neq \emptyset$, tomamos a su elemento mínimo, Y_{n+1}^0, y a d_{n+1}^0 un elemento fijo de $Y_{n+1}^0 \setminus \bigcup_{i=0}^{p^m-1} \varphi(d_i^0)$; si $C_{n+1}^0 = \emptyset$, elegimos $d_{n+1}^0 := d_0^0$

- $n+1$ es divisible por al menos dos primos distintos o es 1. Si $X \neq \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^0)$, definimos $d_{n+1}^0 := \text{mín}\left(X \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^0)\right)$; si $X = \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^0)$, nombramos $d_{n+1}^0 := d_0^0$.

Sea $D_0 := \{d_i : i \in \omega\}$. Supongamos que α es un ordinal con $0 < \alpha < \xi$ para el cual existe $\{D_\gamma \subseteq X : \gamma < \alpha\}$. Sea $W_\alpha := \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\gamma<\alpha} D_\gamma\right]$. Si $X = W_\alpha$, entonces tomamos $D_\alpha := \emptyset$; si $X \neq W_\alpha$, entonces escogemos $d_0^\alpha := \min(X \setminus W_\alpha)$. Supongamos que para alguna $n \in \mathbb{N}$ ya tenemos a los elementos $d_0^\alpha, \ldots, d_n^\alpha$. Al $(n+1)$-elemento lo escogeremos de la siguiente manera:

- $n+1 = p^m$ donde p es algún primo y m es un entero positivo. Consideremos a
$$\mathcal{C}_{n+1}^\alpha := \left\{Y \in C_{d_m^\alpha} : Y \setminus (W_\alpha \cup \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^\alpha)) \neq \emptyset\right\}.$$
Si $\mathcal{C}_{n+1}^\alpha \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{C}_{n+1}^\alpha$ tiene un elemento mínimo, digamos Y_{n+1}^α. Sea d_{n+1}^α un elemento fijo de $Y_{n+1}^\alpha \setminus \left(W_\alpha \cup \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^\alpha)\right)$; si $\mathcal{C}_{n+1}^\alpha = \emptyset$, elegimos $d_{n+1}^\alpha := d_0^\alpha$.

- $n+1$ es divisible por al menos dos primos distintos o es 1. Si $X \neq W_\alpha \cup \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^\alpha)$, tomamos $d_{n+1}^\alpha := \min\left(X \setminus \left(W_\alpha \cup \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^\alpha)\right)\right)$; si $X = W_\alpha \cup \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(d_i^\alpha)$, definimos $d_{n+1}^\alpha := d_0^\alpha$.

Sea $D_\alpha =: \{d_i^\alpha : i \in \omega\}$. El conjunto $D := \bigcup_{\alpha<\xi} D_\alpha$ es nuestro candidato a ser un núcleo para φ.

Primero veremos que $X = \bigcup \varphi[D]$. Para ello demostraremos por inducción transfinita que para toda $\alpha < \xi$ se cumple que $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\beta\leq\alpha} D_\beta\right]$. Para $\alpha = 0$ ocurre que
$$x_0 = \min X = d_0^0 \in D_0 \subseteq \bigcup \varphi[D_0]$$
por construcción. Supongamos que para alguna $\alpha < \xi$ se cumple que $x_\beta \in \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\gamma\leq\beta} D_\gamma\right]$ para toda $\beta < \alpha$, por lo que $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta\right]$ y, en consecuencia,
$$X \setminus \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta\right] \subseteq X \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\} = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}.$$

Si $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta\right]$, entonces habremos acabado. Si $x_\alpha \notin \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta\right]$, entonces $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta\right] \subseteq \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$ y, por ende,

$$x_\alpha = \text{mín}\left(X \setminus \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta\right]\right) = d_0^\alpha \in D_\alpha \subseteq \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\beta\leq\alpha} D_\beta\right].$$

Por ambos casos podemos concluir que $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta\leq\alpha} D_\beta\right]$. Con esto terminamos la inducción y obtenemos que para toda $\alpha < \xi$ se cumple que $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta\leq\alpha} D_\beta\right]$. Así, si $x_\alpha \in X$, entonces $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta\leq\alpha} D_\beta\right] \subseteq \bigcup \varphi[D]$, en consecuencia $X = \bigcup \varphi[D]$. Nos falta probar que D es un conjunto cerrado y discreto.

Comencemos por demostrar que D es cerrado. Sean $x \in X \setminus D$, α el menor ordinal tal que $x \in \bigcup \varphi[D_\alpha]$ y N el menor natural tal que $x \in \varphi(d_N^\alpha)$. Por construcción es cierto que para toda $\beta > \alpha$ se satisface la contención $D_\beta \subseteq X \setminus \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\gamma<\beta} D_\gamma\right]$, por lo que $D_\beta \cap \varphi(d_N^\alpha) = \emptyset$. También, por construcción se cumple que para todo natural $n > N$, con $d_n^\alpha \neq d_0^\alpha$, $d_n^\alpha \notin \varphi(d_N^\alpha)$. De esta forma, el abierto $U := \varphi(d_N^\alpha) \setminus \{d_i^\alpha : i \in \{0, \ldots, N\}\}$ es una vecindad de x que verifica la identidad $U \cap D_\beta = \emptyset$ para toda $\beta \geq \alpha$. Sean $B_1 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_1 \subseteq U$ y $B_2 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_2 \subseteq \varphi(x)$. Afirmamos que para toda $\beta < \alpha$ se cumple que $B_2 \cap D_\beta = \emptyset$.

Procedamos por contradicción y supongamos que $B_2 \cap D_\beta \neq \emptyset$ para alguna $\beta < \alpha$. Sean $\beta < \xi$ el menor ordinal tal que $B_2 \cap D_\beta \neq \emptyset$ y M el menor natural tal que $d_M^\beta \in B_2$. De esta manera, $x \in \{y \in B_2 : B_2 \subseteq \varphi(y)\} \in C_{d_M^\beta}$. Como $C_{d_M^\beta} = \{Y_n : n < \eta\}$ para alguna $\eta \leq \omega$, existe $l < \eta$ tal que $\{y \in B_2 : B_2 \subseteq \varphi(y)\} = Y_l$. Por nuestra elección, para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \in Y_l \setminus \left(W_\beta \cup \bigcup\limits_{i=0}^{n} \varphi(d_i^\beta)\right)$. En particular, para todo primo p ocurre que x es elemento de $Y_l \setminus \left(W_\beta \cup \bigcup\limits_{i=0}^{p^M-1} \varphi(d_i^\beta)\right)$ y, por consiguiente, $Y_l \in \mathcal{C}_{p^M}^\beta$.

Consideremos a $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todos los primos enumerados respecto a su orden. Afirmamos que para toda $j < \eta$ se cumple que $\mathcal{C}_{p_j^M}^\beta \subseteq$

$\{Y_i \in C_{d^\beta_M} : j \leq i < \eta\}$. Procederemos por inducción. Para $j = 0$ se cumple la contención $\mathcal{C}^\beta_{p^M_0} \subseteq C_{d^\beta_M} = \{Y_i \in C_{d^\beta_M} : 0 \leq i < \eta\}$; supongamos que para alguna $k < \eta$ se satisface que $\mathcal{C}^\beta_{p^M_k} \subseteq \{Y_i \in C_{d^\beta_M} : k \leq i < \eta\}$ y que $k+1 < \eta$. Ya sabemos que $\mathcal{C}^\beta_{p^M_k}$ no es vacío pues Y_l es un elemento de éste, por lo que en el p^M_k paso de la construcción de D_β se toma al menor elemento de $\mathcal{C}^\beta_{p^M_k}$ el cual, por hipótesis de inducción, es de la forma Y_n con $k \leq n < \eta$. Como

$$Y_n \subseteq \varphi(d^\beta_{p^M_k}) \subseteq W_\beta \cup \left(\bigcup_{i=0}^{p^M_{k+1}-1} \varphi(d^\beta_i) \right),$$

entonces $Y_n \notin \mathcal{C}^\beta_{p^M_{k+1}}$. Sea $Y \in \mathcal{C}^\beta_{p^M_{k+1}}$. Ya que $\mathcal{C}^\beta_{p^M_{k+1}} \subseteq \mathcal{C}^\beta_{p^M_k}$ existe alguna $k \leq m < \eta$ tal que $Y = Y_m$. Pero, $m \neq k$ pues $Y_m \in \mathcal{C}^\beta_{p^M_{k+1}}$ y ya probamos que $Y_n \notin \mathcal{C}^\beta_{p^M_{k+1}}$, donde $k \leq n \leq m < \eta$. En consecuencia $m > k$, es decir, $m \geq k+1$. Concluimos que $\mathcal{C}^\beta_{p^M_{k+1}} \subseteq \{Y_j \in \mathcal{C}_{d^\beta_M} : k+1 \leq j < \eta\}$. Esto finaliza nuestra inducción. En particular, para el l-ésimo primo se satisface que $\mathcal{C}^\beta_{p^M_l} \subseteq \{Y_j \in \mathcal{C}_{d^\beta_M} : l \leq j < \eta\}$, además $Y_l \in \mathcal{C}^\beta_{p^M_l}$ implicando que Y_l es el menor elemento de $\mathcal{C}^\beta_{p^M_l}$. Por construcción, $d^\beta_{p^M_l} \in Y_l \subseteq \varphi(d^\beta_{p^M_l})$, de modo que $x \in Y_l \subseteq \bigcup \varphi[D_\beta]$, lo cual es una contradicción a la minimalidad de α. Nuestra contradicción vino de suponer que $B_2 \cap \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta \neq \emptyset$. En conclusión, $B_2 \cap \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta = \emptyset$. Así, $B := B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_x$ satisface que $B \cap D = \emptyset$. Luego, D es cerrado.

Ahora probaremos que D es un conjunto discreto. Sean $d \in D$, $\alpha < \xi$ y $n \in \mathbb{N}$ el menor natural tal que $d = d^\alpha_n$. De la misma manera a cuando probamos que D es cerrado, $U := \varphi(d) \setminus \{d^\alpha_i : i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ es una vecindad de d la cual satisface que $U \cap D_\beta = \emptyset$ para toda $\beta > \alpha$ y para toda $m \neq n$ los elementos d^α_m no están en U. Sea $B \in \mathcal{B}_d$ tal que $B \subseteq U$. De forma similar a cuando probamos que D es cerrado, se puede probar que para toda $\beta < \alpha$ los conjuntos B y D_β son ajenos. En consecuencia, $B \cap D = \{d\}$. Así, D es un conjunto discreto.

En conclusión, D es un núcleo para φ. Luego, X es un D-espacio.

$\square$

Seremos capaces de dar otra versión más general del Teorema 3.3.3. Antes de eso será necesario definir nuevos conceptos.

Definición 3.3.4. Sea X un espacio topológico. Decimos que un conjunto $\mathcal{B} = \{B_x : x \in X\}$ es una *base débil* para la topología en X si y sólo si se satisface que:

1) para todo $x \in X$ se cumple que $x \in \bigcap \mathcal{B}_x$;

2) B_x es cerrado bajo intersecciones finitas; y

3) para todo $U \subseteq X$, U es abierto si y sólo si para todo $x \in U$ existe $V \in B_x$ tal que $V \subseteq U$.

Definición 3.3.5. Decimos que $\mathcal{B} = \{B_x : x \in X\}$ es una *base débil punto-numerable* si y sólo si $\mathcal{B}$ es una base débil y una familia punto-numerable.

Nuestro nuevo objetivo será demostrar que todo espacio con base débil punto-numerable es un D-espacio, para lo cual nos basaremos en el trabajo que realiza Burke en [3]. A fin de lograr nuestro cometido haremos uso de los espacios secuenciales y más herramientas que iremos desarrollando a continuación. Necesitaremos más definiciones.

Definición 3.3.6. Un espacio topológico X es *secuencial* si y sólo si para todo $A \subseteq X$ no cerrado existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ que converge a un punto $x \in X \setminus A$. Equivalentemente, X es *secuencial* si y sólo si para todo $A \subseteq X$, A es cerrado si para toda $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ que converge a un punto $x \in X$ se cumple que $x \in A$.

Definición 3.3.7. Sean X es un espacio topológico, $x \in X$ y $W \subseteq X$ tal que $x \in W$. Decimos que W es una *vecindad débil* de x si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se satisface que $x_n \in W$.

A pesar de ser una generalización del concepto de vecindad, las vecindades débiles nos seguirán permitiendo caracterizar a la topología en X cuando éste sea un espacio secuencial. Posteriormente, este resultado nos permitirá probar que algunos núcleos son efectivamente cerrados y discretos.

Proposición 3.3.8. *Si X es un espacio secuencial y $U \subseteq X$, entonces U es un conjunto abierto si y sólo si para todo $x \in U$ existe W, una vecindad débil de x, con $W \subseteq U$.*

Demostración. Para la primer implicación supongamos que U es un conjunto abierto y $x \in U$. Toda vecindad de x es una vecindad débil de éste, por consiguiente, U mismo es la vecindad débil de x que buscamos.

Para la otra implicación supongamos que $U \subseteq X$ satisface que para toda $x \in U$ existe una vecindad débil de x contenida en U. Procedamos por contradicción y supongamos que U no es abierto, o equivalentemente, que $X \setminus U$ no es cerrado. Ya que X es secuencial existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus U$ que converge a un punto $x \in U$. Por hipótesis, existe W una vecindad débil de x tal que $W \subseteq U$. Como W es una vecindad débil, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ es cierto que $x_n \in W \subseteq U$, lo cual es una contradicción al hecho de que la sucesión es un subconjunto de $X \setminus U$. Así, U es un conjunto abierto. $\square$

Dentro de los espacios secuenciales podremos definir el concepto que fungirá un papel similar al de una base para la topología pero en términos de bases débiles. Este conjunto recibirá el nombre de w-sistema.

Definición 3.3.9. Sean X un espacio secuencial y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{W}$ es un *w-sistema* si y sólo si para todo abierto U de X y para todo $x \in U$ existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ que satisface las siguientes propiedades: $x \in \bigcap \mathcal{V}$, $\bigcup \mathcal{V}$ es una vecindad débil de x y $\bigcup \mathcal{V} \subseteq U$.

Hemos introducido las nociones de espacio secuencial y de w-sistema porque daremos una respuesta más general a nuestra pregunta actual, no sólo los espacios con una base débil punto-numerable son D-espacios, como el lector se podrá imaginar, demostraremos que todo espacio secuencial con un w-sistema punto-numerable es un D-espacio.

Teorema 3.3.10. *Si X es un espacio secuencial con un w-sistema punto-numerable, entonces X es un D espacio.*

Demostración. Sea φ una a. v. a. para X. Consideremos a X bien ordenado por un ordinal ξ, es decir, $X = \{x_\alpha : \alpha < \xi\}$. Sea $\mathcal{W}$ un w-sistema punto-numerable para X. Para cada $x \in X$ fijemos $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{W}$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{V}_x$, $\bigcup \mathcal{V}_x$ es una vecindad débil de x y $\bigcup \mathcal{V}_x \subseteq \varphi(x)$. Para toda $x \in X$ definimos

$$\mathcal{H}_x := \left\{ W \in \mathcal{W} : x \in W \in \bigcup_{z\in X} \mathcal{V}_z \right\}.$$

Como $\mathcal{W}$ es una familia punto-numerable, entonces para cada $x \in X$ existe $\eta_x \leq \omega$ tal que $\mathcal{H}_x = \{W(x)_n : n < \eta_x\}$. Para cada $W \in \bigcup_{z \in X} \mathcal{V}_z$ definimos

$$c(W) := \{z \in W : W \in \mathcal{V}_z\}.$$

También consideremos a

$$C(x) := \bigcup \{c(W) : W \in \mathcal{H}_x\}.$$

Construiremos un núcleo para φ por recursión transfinita. Sea $d_0^0 := \text{mín}\, X = x_0$. Por recursión sobre ω definiremos una familia de conjuntos crecientes $\{F_n^0\}_{n\in\omega}$. Sea $F_0^0 := \{d_0^0\}$. Supongamos que para alguna $m \in \omega$ tenemos definido al conjunto F_m^0. Consideremos

$$E_m^0 := \left\{ y \in F_m^0 : C(y) \setminus \bigcup \varphi[F_m^0] \neq \emptyset \right\}.$$

- Si $E_m^0 = \emptyset$, entonces tomamos $F_{m+1}^0 := F_m^0$.
- Si $E_m^0 \neq \emptyset$, para cada $y \in E_m^0$ se cumple que

  $$\emptyset \neq C(y) \setminus \bigcup \varphi[F_m^0] = \bigcup_{n < \eta_y} c(W(y)_n) \setminus \bigcup \varphi[F_m^0]$$

  para alguna $\eta_y \leq \omega$. Sean $W(y)_{n_m}^0$ el primer elemento de $\mathcal{H}_y$ tal que $c(W(y)_{n_m}^0) \setminus \bigcup \varphi[F_m^0] \neq \emptyset$ y $x_m^0(y)$ un elemento fijo de $(W(y)_{n_m}^0) \setminus \bigcup \varphi[F_m^0]$. Definimos

  $$F_{m+1}^0 := F_m^0 \cup \{x_m^0(y) : y \in E_m^0\}.$$

Nombremos $D_0 := \bigcup_{n\in\omega} F_n^0$. Supongamos que para alguna $\alpha < \xi$ ya tenemos a los conjuntos $\{D_\beta : \beta < \alpha\}$. Si $X = \bigcup \varphi \left[\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta \right]$, entonces consideramos $D_\alpha = \emptyset$. En caso contrario nombremos a $W_\alpha := \bigcup \varphi \left[\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta \right]$ y tomemos $d_0^\alpha := \text{mín}\,(X \setminus W_\alpha)$. Nuevamente, por recursión sobre ω construiremos una familia de conjuntos crecientes cuya unión será nuestro D_α. Sea $F_0^\alpha := \{d_0^\alpha\}$. Supongamos que para alguna $m \in \omega$ tenemos definido al conjunto F_m^α. Consideremos a

$$E_m^\alpha = \left\{ y \in F_m^\alpha : \left(C(y) \setminus \bigcup \varphi[F_m^\alpha] \right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset \right\}.$$

- Si $E_m^\alpha = \emptyset$, definimos $F_{m+1}^\alpha := F_m^\alpha$.

- Si $E^\alpha_m \neq \emptyset$, para cada $y \in E^\alpha_m$ tomamos $W(y)^\alpha_{n_m}$ como el primer elemento de $\mathcal{H}_y$ tal que $\left(c(W(y)^\alpha_{n_m}) \setminus \bigcup \varphi[F^\alpha_m]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset$ y un elemento fijo $x^\alpha_m(y) \in \left(c(W(y)^\alpha_{n_m}) \setminus \bigcup \varphi[F^\alpha_m]\right) \setminus W_\alpha$. Nombramos

$$F^\alpha_{m+1} := F^\alpha_m \cup \{x^\alpha_m(y) : y \in F^\alpha_m\}.$$

Sea $D_\alpha := \bigcup\limits_{n \in \omega} F^\alpha_n$.

Podemos hacer tres observaciones de la construcción anterior.

(a) Para toda $n \in \omega$ y para toda $\alpha < \xi$ se cumple que F^α_n es finito.

(b) Si $\beta \leq \alpha < \xi$, entonces $W_\beta \cap F^\alpha_n = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. También, si $n < k < \omega$ entonces $\bigcup \varphi[F^\alpha_n] \cap (F^\alpha_k \setminus F^\alpha_n) = \emptyset$.

(c) Si $d \in D_\alpha$ para algún ordinal $\alpha < \xi$, entonces $C(d) \subseteq \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta \leq \alpha} D_\beta\right]$.

Demostraremos el inciso (c). Sean $\alpha < \xi$ y $d \in D_\alpha$. Sea $x \in C(d)$ y supongamos que $x \notin \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta \leq \alpha} D_\beta\right]$. En este caso, para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \in (C(d) \setminus \bigcup \varphi[F^\alpha_n]) \setminus W_\alpha$, en consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d \in E^\alpha_n$ para toda $n \geq N$. Consideremos $\mathcal{H}_d = \{W(d)_n : n < \eta_d\}$ para alguna $\eta_d \leq \omega$. Probaremos que para toda $n < \eta_d$ se cumple que

$$\text{mín}\left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F^\alpha_n]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\} = W(d)_m,$$

con $n \leq m$.

Para $n = 0$ siempre ocurre que

$$W(d)_0 \leq \text{mín}\left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F^\alpha_0]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\}.$$

Supongamos que para para alguna $k < \eta_d$ se cumple que $k + 1 < \eta_d$ y

$$\text{mín}\left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F^\alpha_k]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\} = W(d)_m,$$

donde $k \leq m$. Por construcción, $x^\alpha_k(d)$ es un elemento fijo de $c(W(d)_m)$ y $W(d)_m \subseteq \varphi(x^\alpha_k(d)) \subseteq \bigcup \varphi[F_{k+1}]$, por lo que

$$W(d)_m \notin \left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F^\alpha_{k+1}]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\}.$$

Como $F_k^\alpha \subseteq F_{k+1}^\alpha$, entonces

$$\left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F_{k+1}^\alpha]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\} \subseteq \left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F_k^\alpha]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\}$$

y, en consecuencia,

$$W(d)_p := \min \left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F_{k+1}^\alpha]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\}$$

satisface que $k \leq m \leq p$, pero como

$$W(d)_m \notin \left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F_{k+1}^\alpha]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\},$$

entonces $k < p$, es decir, $k+1 \leq p$, con lo cual concluimos con nuestra inducción.

Retomando la demostración para el inciso (c), como $x \in C(d)$ entonces existe $n < \eta_d$ tal que $x \in W(d)_n$.

$$W(d)_m := \min \left\{W \in \mathcal{H}_d : \left(c(W) \setminus \bigcup \varphi[F_n^\alpha]\right) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\right\}$$

con $n \leq m$, pero $W(d)_n \in \{W \in \mathcal{H}_d : (c(W) \setminus \bigcup \varphi[F_n^\alpha]) \setminus W_\alpha \neq \emptyset\}$, por lo que $n = m$. Por construcción, se toma $x_n^\alpha(d)$ un elemento fijo de $W(d)_n$ y se cumple que $x \in W(d)_n \subseteq \varphi(x_n^\alpha(d)) \subseteq \bigcup \varphi[D_\alpha]$, una contradicción. Por ende, $x \in \bigcup \varphi[\bigcup\limits_{\beta \leq \alpha} D_\beta]$, concluyendo la prueba de (c).

Definamos $D := \bigcup\limits_{\alpha < \xi} D_\alpha$. D es nuestro candidato a ser un núcleo para φ. Primero demostraremos que $\varphi[D]$ es una cubierta para X. Afirmamos que para toda $\alpha < \xi$ se cumple que $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta \leq \alpha} D_\beta\right]$.

Para $\alpha = 0$ nosotros ya sabemos que $x_0 = \min X = d_0^0 \in F_0^0 \subseteq D_0 \subseteq \bigcup \varphi[D_0]$; luego, supongamos que para alguna $\alpha < \xi$ es cierto que para toda $\beta < \alpha$ se cumple que $x_\beta \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\gamma \leq \beta} D_\gamma\right]$, distingamos dos casos: si $x_\alpha \in W_\alpha$ habremos terminado; por otro lado, si $x_\alpha \in X \setminus W_\alpha$, ya sabemos que $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq W_\alpha$ lo cual implica que x_α es el menor elemento de $X \setminus W_\alpha$ y, por ende, $x_\alpha = \min(X \setminus W_\alpha) = d_0^\alpha \in F_0^\alpha \subseteq D_\alpha$. Así, $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta \leq \alpha} D_\beta\right]$. Por la inducción anterior podemos concluir que para toda $\alpha < \xi$ se satisface que $x_\alpha \in \bigcup \varphi\left[\bigcup\limits_{\beta \leq \alpha} D_\beta\right]$, de modo que $X = \bigcup \varphi[D]$.

Demostraremos que D es un conjunto cerrado y discreto. Procedamos por contradicción y supongamos que D no es cerrado o no es discreto. Notemos que si D no es cerrado existe $\{y_n\}_{n\in\omega} \subseteq D$ que converge a un punto $y \in X \setminus D$; pero, si D no es discreto existe $y \in D$ tal que para toda V vecindad de y ocurre que $V \cap (D \setminus \{y\}) \neq \emptyset$, por lo tanto $D \setminus \{y\}$ es un conjunto que no es cerrado y, en consecuencia, existe $\{y_n\}_{n\in\omega} \subseteq D \setminus \{y\}$ que converge a un punto $y' \in (X \setminus D) \cup \{y\}$. En ambos casos obtenemos que existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega} \subseteq D$, eventualmente no constante, que converge a un punto $y \in X$.

Sean α_0 el menor ordinal tal que $y \in \bigcup \varphi[D_{\alpha_0}]$ y m_0 el menor natural tal que $y \in \bigcup \varphi[F^{\alpha_0}_{m_0}]$, en otras palabras, m_0 es el menor natural tal que existe $d \in F^{\alpha_0}_{m_0}$ con $y \in \varphi(d)$. Además, como $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converge a y y $\bigcup \mathcal{V}_y$ es una vecindad débil de y, existe $k \in \omega$ tal que $y_n \in \bigcup \mathcal{V}_y \cap \varphi(d)$ para toda $n \geq k$, lo cual implica que $\{y_n\}_{n\geq k} \subseteq \varphi[F^{\alpha_0}_{m_0}] \subseteq \varphi[D_{\alpha_0}]$. Por el inciso (b) podemos asegurar que $\{y_n\}_{n\geq k} \cap D_\beta = \emptyset$ para toda $\beta > \alpha_0$ y $\{y_n\}_{n\geq k} \cap (F^{\alpha_0}_n \setminus F^{\alpha_0}_{m_0}) = \emptyset$ para toda $n > m_0$. Así, $\{y_n\}_{n\geq k} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha_0} D_\beta \cup F^{\alpha_0}_{m_0}$. Debido a que $F^{\alpha_0}_{m_0}$ es finito, existe $l \geq k$ tal que $y_l \in D_\beta$ con $\beta < \alpha_0$. Por el inciso (c) podemos asegurar que $C(y_l) \subseteq \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\gamma\leq\beta} D_\gamma\right]$. Como $y_l \in \bigcup \mathcal{V}_y$, entonces existe $V \in \mathcal{V}_y$ tal que $y_l \in V$, por lo que $V \in \mathcal{H}_{y_l}$ y, por lo tanto, $y \in C(y_l)$, así que $y \in \bigcup \varphi\left[\bigcup_{\gamma\leq\beta} D_\gamma\right]$, lo cual es una contradicción a la minimalidad de α_0, pues $\beta < \alpha_0$. Nuestra contradicción vino de suponer que D no era un conjunto cerrado y discreto, por lo cual debe de serlo.

En resumen, D es un conjunto cerrado y discreto tal que $X = \bigcup \varphi[D]$, es decir, D es un núcleo para φ. Luego, X es un D-espacio.

$\square$

Como lo habíamos mencionado con anterioridad, procedamos a responder nuestra pregunta de las bases débiles punto-numerable con ayuda del Teorema 3.3.10.

Teorema 3.3.11. *Todo espacio con una base débil punto-numerable es un D espacio.*

Demostración. Sea X un espacio con una base débil punto-numerable $\mathcal{B} := \bigcup\{\mathcal{B}_x : x \in X\}$. Afirmamos que X es secuencial. Sea $A \subseteq X$ un conjunto no cerrado, o de forma equivalente, $X \setminus A$ no es abierto. Así, existe $x \in X \setminus A$

tal que para toda $V \in \mathcal{B}_x$ ocurre que $V \cap A \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ es una familia punto-numerable, podemos tomar $\mathcal{B}_x = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar $V_{n+1} \subseteq V_n$. Consideremos $x_n \in V_n \cap A$ un punto fijo. Afirmamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Sea U una vecindad abierta de x, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subseteq U$, pero además para toda $m > n$ se cumple que $V_m \subseteq V_n \subseteq U$. Por lo tanto, $x_m \in U$ para toda $m > n$, lo cual implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. De este modo, encontramos una sucesión contenida en A que converge a un punto que no está en A. Luego, X es un espacio secuencial.

Para ocupar el Teorema 3.3.10 nos hace falta probar que X tiene un w-sistema. Afirmamos que $\mathcal{B}$ es el w-sistema que buscamos. Sean $U \subseteq X$ un abierto y $x \in U$. Nuevamente, sin pérdida de generalidad tomemos $\mathcal{B}_x = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $V_{n+1} \subseteq V_n$. Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subseteq U$. Afirmamos que V_n es la vecindad débil de x que buscamos. Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x. Afirmamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > N$, entonces $x_m \in V_n$. En caso contrario, existe $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión tal que $y_m \notin V_n$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Así, $V_n \subseteq U \setminus \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$. También, ya que $\{y_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es un conjunto cerrado, para toda $y \in U \setminus \{y_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ existe $V_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $V_y \subseteq U \setminus \{y_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Esto nos hace concluir que $U \setminus \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una vecindad abierta de x, lo cual no puede ser posible pues $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a x. Nuestra contradicción vino de suponer que para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $m > N$ tal que $x_m \notin V_n$. Por ende, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in V_n$ para toda $m > N$, es decir, V_n es una vecindad débil de x. Con esto concluimos que $\mathcal{B}$ es un w-sistema para X.

En resumen, X es un espacio secuencial con $\mathcal{B}$ un w-sistema punto-numerable. Por el Teorema 3.3.10 concluimos que X es un D-espacio.

$\square$

Como podríamos pensar, resulta que todo espacio con una base punto-numerable tiene una base débil punto-numerable, por lo cual podemos ver al Teorema 3.3.3 como un corolario del Teorema 3.3.11. Demostraremos esta implicación para poder realizar la afirmación anterior con toda libertad.

Lema 3.3.12. *Todo espacio con una base punto-numerable tiene una base débil punto-numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base punto-numerable de un espacio topológico X. Para cada $x \in X$ definimos el conjunto $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$, la cual es una base local para x. Como $\mathcal{B}$ es una familia punto-numerable, entonces podemos enumerar a $\mathcal{B}_x$ como $\mathcal{B}_x = \{U(x)_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora, para toda $n \in \mathbb{N}$ consideramos a $V(x)_n = \bigcap_{i=0}^{n} U(x)_i$ y definimos $\mathcal{V}_x := \{V(x)_n : n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ es una base débil punto-numerable de X.

Para todo $x \in X$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \in U(x)_n$ y, por ende, $x \in \bigcap_{i=0}^{n} U(x)_i = V(x)_n$. Como esto es para todo natural, entonces $x \in \bigcap \mathcal{V}_x$.

También, debido a que para toda $n, m \in \mathbb{N}$ ocurre que

$$\left(\bigcap_{i=0}^{n} U(x)_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{m} U(x)_i\right) = \bigcap_{i=0}^{\text{máx}\{n,m\}} U(x)_i = V(x)_{\text{máx}\{n,m\}},$$

verificamos $\mathcal{V}_x$ es cerrado bajo intersecciones finitas.

Por último, como para toda $x \in X$ el conjunto $\mathcal{V}_x$ es una base local para x, entonces se cumple que para todo $U \subseteq X$, U es abierto si y sólo si para todo $y \in U$ existe $V \in \mathcal{V}_y$ tal que $V \subseteq U$.

Por los tres puntos anteriores podemos concluir que $\mathcal{V}$ es una base débil punto-numerable para X. □

Podemos aprovechar un poco más a los w-sistemas regresando al tema de imágenes directas. Antes de pasar a ello, notemos que toda base para una topología es un w-sistema y, a pesar de que las bases de espacios topológicos no suelen preservarse bajo imágenes directas continuas, podremos demostrar que, dentro de los espacios secuenciales, las imágenes directas cocientes de bases se conservan, al menos, como w-sistemas.

Proposición 3.3.13. *Si $f : X \to Y$ es una función cociente y X es un espacio secuencial, entonces $\mathcal{W} := f[\mathcal{B}]$ es un w-sistema para Y, en donde $\mathcal{B}$ es una base cualquiera para X.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una base para X y $\mathcal{W} := f[\mathcal{B}]$. Sean $U \subseteq Y$ un conjunto abierto y $x \in U$. Queremos probar que existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ que satisface que $x \in \bigcap \mathcal{V}$, $\bigcup \mathcal{V}$ es una vecindad débil de x y $\bigcup \mathcal{V} \subseteq U$. Consideremos

$$\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B} : B \cap f^{-1}[\{x\}] \neq \emptyset, B \subseteq f^{-1}[U]\}.$$

Probaremos que $\mathcal{V} := f[\mathcal{C}]$ es el conjunto que buscamos. En primer lugar, para cada $B \in \mathcal{C}$ existe $z \in B \cap f^{-1}[\{x\}]$, por lo que $x = f(z) \in f[B]$, por ende,

$x \in \bigcap \mathcal{V}$.

Verifiquemos que $\bigcup \mathcal{V}$ es una vecindad débil para x. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x. Por contradicción supongamos que para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $y_n \notin \bigcup \mathcal{V}$, por consiguiente existe $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión tal que $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \cap \bigcup \mathcal{V} = \emptyset$. Como Y cumple el axioma T_2, entonces $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ es un conjunto cerrado de Y y, por lo tanto, $f^{-1}[\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \cup \{x\}]$ es un conjunto cerrado en X. Por otro lado, como $x \in U$ entonces $f^{-1}[\{x\}] \subseteq f^{-1}[U]$, por lo que para todo $z \in f^{-1}[\{x\}]$ existe $V \in \mathcal{B}$ una vecindad de z tal que $V \subseteq f^{-1}[U]$ y, en particular, $z \in V \in \mathcal{C}$. Por ende, $f^{-1}[\{x\}] \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

Afirmamos que $(\bigcup\{f^{-1}[\{y_{n_m}\}] : m \in \mathbb{N}\}) \cap (\bigcup \mathcal{C}) = \emptyset$. En caso contrario tendríamos un elemento $z \in (\bigcup\{f^{-1}[\{y_{n_m}\}] : m \in \mathbb{N}\}) \cap (\bigcup \mathcal{C})$, por lo que $f(z) = y_{n_m}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y $f(z) \in \bigcup f[\mathcal{C}] = \bigcup \mathcal{V}$, es decir, $f(z) \in \{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \cap \bigcup \mathcal{V} = \emptyset$, una contradicción.

En conclusión, $(\bigcup\{f^{-1}[\{y_{n_m}\}] : m \in \mathbb{N}\}) \cap (\bigcup \mathcal{C}) = \emptyset$. Así, $\bigcup\{f^{-1}[\{y_{n_m}\}] : m \in \mathbb{N}\} = f^{-1}[\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}] \cap (X \setminus \bigcup \mathcal{C})$ y $f^{-1}[\{x\}] \cap (X \setminus \bigcup \mathcal{C}) = \emptyset$, implicando que $\bigcup\{f^{-1}[\{y_{n_m}\}] : m \in \mathbb{N}\} = f^{-1}[\{y_{n_m} : m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}] \cap (X \setminus \bigcup \mathcal{C})$, donde este último es un conjunto cerrado por ser la intersección de dos cerrados.

Con lo anterior concluimos que $X \setminus f^{-1}[\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}] = f^{-1}[Y \setminus \{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}]$ es un conjunto abierto. Como f es una función cociente, entonces $Y \setminus \{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es un conjunto abierto y, por lo tanto, $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es un conjunto cerrado, lo cual es una contradicción pues $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a x pero $x \notin \{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Nuestra contradicción vino de suponer que no existía un momento a partir del cual la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se queda dentro de $\bigcup \mathcal{V}$, en consecuencia existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se satisface que $y_n \in \bigcup \mathcal{V}$, es decir, $\bigcup \mathcal{V}$ es una vecindad débil para x.

Lo último que nos falta probar es que $\bigcup \mathcal{V} \subseteq U$. La contención es cierta pues para toda $B \in \mathcal{C}$ ocurre que $B \subseteq f^{-1}[U]$, por construcción, de modo que $f[B] \subseteq f[f^{-1}[U]] = U$. Como esto es para toda $B \in \mathcal{C}$, entonces podemos concluir que $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{C}} f[B] \subseteq U$.

Con los tres puntos anteriores ya podemos concluir que $\mathcal{W}$ es un w-sistema para Y.

$\square$

Con esto, si tenemos una base punto-numerable de un espacio X y f una función cociente, la imagen directa de dicha base será un w-sistema por la Proposición 3.3.13. Además, X es secuencial pues tiene una base punto-numerable. Si f puede conservar la propiedad de ser espacio secuencial tendríamos otra de las hipótesis del Teorema 3.3.10, para nuestra fortuna éste será el caso. Sin embargo, necesitaremos una hipótesis adicional para poder asegurar que el w-sistema es punto-numerable, veamos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.14. *Si X tiene una base punto-numerable y $f : X \to Y$ es una función cociente cuyas fibras son separables, entonces Y es un D-espacio.*

Demostración. Como lo comentamos anteriormente, el objetivo será demostrar que Y es un espacio secuencial con un w-sistema punto-numerable para poder concluir que Y es un D-espacio con ayuda del Teorema 3.3.10.

Primero veamos que Y es secuencial. Sea $A \subseteq Y$ un conjunto no cerrado, es decir, $Y \setminus A$ no es un conjunto abierto. Debido a que f es una función cociente, no puede ocurrir que $f^{-1}[Y \setminus A]$ sea un conjunto abierto y, por consiguiente, $X \setminus f^{-1}[Y \setminus A]$ no es un conjunto cerrado. Anteriormente ya se demostró que todo espacio con una base punto-numerable tiene una base débil punto-numerable y, por ende, es un espacio secuencial. Por ello, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus f^{-1}[Y \setminus A]$ que converge a un punto $x \in f^{-1}[Y \setminus A]$. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $x_n \notin f^{-1}[Y \setminus A]$ entonces $f(x_n) \notin Y \setminus A$, es decir, $f(x_n) \in A$. Por otro lado, $f(x) \in Y \setminus A$. Por la continuidad de f tenemos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ es una sucesión que converge a $f(x) \in Y \setminus A$. Con esto podemos concluir que Y es un espacio secuencial.

Veamos que Y tiene un w-sistema punto-numerable. Para ello consideremos una base punto-numerable $\mathcal{B}$ de X. Como f es una función cociente y X es un espacio secuencial, por la Proposición 3.3.13 podemos afirmar que $\mathcal{W} := f[\mathcal{B}]$ es un w-sistema para Y. $\mathcal{W}$ es el w-sistema que buscamos, por lo que sólo nos basta probar que es una familia punto-numerable. Sea $y \in Y$. Afirmamos que $\mathcal{A}_y := \{B \in \mathcal{B} : B \cap f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset\}$ es numerable.

Como $f^{-1}[\{y\}]$ es separable, entonces existe un conjunto denso numerable $C \subseteq f^{-1}[\{y\}]$. También, como $\mathcal{B}$ es una familia punto-numerable entonces para todo $c \in C$ el conjunto $\{B \in \mathcal{B} : c \in B\}$ es numerable. Así, $\bigcup_{c\in C}\{B \in \mathcal{B} : c \in B\}$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables. Demostraremos que $\mathcal{A}_y = \bigcup_{c\in C}\{B \in \mathcal{B} : c \in B\}$. Primero, si $B \in \mathcal{A}_y$ entonces $B \cap f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$. Como $B \cap f^{-1}[\{y\}]$ es un abierto no vacío de $f^{-1}[\{y\}]$, existe $c \in C \cap B \cap f^{-1}[\{y\}]$, por lo que $B \in \bigcup_{c\in C}\{B \in \mathcal{B} : c \in B\}$; para la otra contención tomamos $B \in \bigcup_{c \in C} \{B \in \mathcal{B} : c \in B\}$. Existe $c \in C \subseteq f^{-1}[\{y\}]$ tal que $c \in B$. Por ende, $B \cap f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$, así que $B \in \mathcal{A}_y$. En conclusión,

$$\mathcal{A}_y = \bigcup_{c \in C} \{B \in \mathcal{B} : c \in B\}$$

es un conjunto numerable. Para finalizar tomemos $y \in Y$. Ya que

$$\{f[B] : B \in \mathcal{B}, y \in f[B]\} = f[\{B \in \mathcal{B} : B \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset\}]$$

y $\mathcal{A}_y$ es numerable, entonces $\{f[B] : B \in \mathcal{B}, y \in f[B]\}$ es numerable. En resumen, $\mathcal{W}$ es un w-sistema punto-numerable para Y.

Luego, Y es un espacio secuencial con un w-sistema punto-numerable. Con el Teorema 3.3.10 podemos concluir que Y es un D-espacio, como se quería demostrar. $\square$

Podemos aprovechar un poco más las herramientas de esta sección y enunciar un último corolario:

Corolario 3.3.15. *Todo cociente de un espacio metrizable y separable es un D-espacio.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función cociente con X un espacio metrizable y separable. En virtud de que X es metrizable y separable, tenemos que X es un D-espacio hereditariamente separable. Por esta razón, el Teorema 3.3.14 garantiza que Y es un D-espacio. $\square$

3.4. Espacios ordenados generalizados

Uno de los temas que más nos interesa estudiar cuando se habla de propiedades de cubierta es bajo qué condiciones hay relación entre ellas, más interesante aún será saber en qué momento son equivalentes entre sí. En esta última sección estudiaremos un tipo de espacio topológico llamado *espacio ordenado generalizado*, en el cual ya existe una considerable lista de equivalencias de propiedades de cubierta a la cual seremos capaces de añadir la propiedad de ser D-espacio. Esta sección está basada en el trabajo que realizaron van Douwen y Lutzer en [11]. Procedamos a definir los conceptos que necesitaremos.

Definición 3.4.1. Un espacio (X, τ) es un *espacio ordenado generalizado* si y sólo si es un subespacio de un espacio linealmente ordenado.

Equivalentemente, tendremos que $(X, \tau, \leq)$ es un espacio ordenado generalizado si y sólo si existe una base para τ formada únicamente de conjuntos convexos respecto a $\leq$.

La propiedad de cubierta con la cual trabajaremos será la paracompacidad. Para ella también necesitaremos algunas definiciones previas:

Definición 3.4.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que una cubierta abierta $\mathcal{U}$ es *localmente finita* si y sólo si para todo $x \in X$ existe una vecindad U_x de x que intersecta únicamente a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$.

Definición 3.4.3. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta. Decimos que $\mathcal{V} \subseteq \tau$ es un *refinamiento* para $\mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta para X y para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

Con lo anterior, ya podemos decir formalmente qué es un espacio paracompacto:

Definición 3.4.4. Un espacio topológico es *paracompacto* si y sólo toda cubierta abierta tiene un refinamiento localmente finito.

El objetivo principal de esta última sección será demostrar que, cuando nos encontramos en un espacio ordenado generalizado, ser paracompacto y ser D-espacio son equivalentes. Para cada una de las implicaciones necesitaremos desarrollar herramienta previa. Comenzaremos por demostrar que ser D-espacio implica ser paracompacto, pero necesitaremos mencionar una equivalencia que hace uso de los conjuntos estacionarios:

Definición 3.4.5. Sea κ un cardinal regular no numerable. Un subconjunto $s \subseteq \kappa$ es un conjunto *estacionario* si y sólo si $s \cap c \neq \emptyset$ para todo $c \subseteq \kappa$ subconjunto cerrado y cofinal en κ.

La siguiente propiedad de los espacios paracompactos nos será de gran utilidad para más adelante, pero su demostración escapa de los alcances de este trabajo. Su demostración se encuentra en [4].

Teorema 3.4.6. *Sea X un espacio ordenado generalizado. X es paracompacto si y sólo si ningún subconjunto cerrado de X es homeomorfo a un conjunto estacionario de algún cardinal regular no numerable, donde este último cuenta con la topología de subespacio que hereda de la topología de orden del cardinal en cuestión.*

Para probar que ser D-espacio implica ser paracompacto también será de gran importancia el Lema de Fodor, por lo que procederemos a enunciarlo:

Lema 3.4.7. *Sean κ un cardinal regular no numerable, $s \subseteq \kappa$ un subconjunto estacionario y $f : s \to \kappa$ una función que satisface que $f(\alpha) < \alpha$ para toda $\alpha \in s \setminus \{0\}$, entonces existe $\beta \in k$ tal que $\{\alpha \in s : f(\alpha) = \beta\}$ es un subconjunto estacionario de κ.*

Demostremos la primer implicación de nuestra equivalencia.

Teorema 3.4.8. *Sea (X, τ) un espacio ordenado generalizado. Si X es un D-espacio entonces X es paracompacto.*

Demostración. Sea X un D-espacio ordenado generalizado. Supongamos que X no es paracompacto, por el Teorema 3.4.6 sabemos que existe un cardinal regular no numerable κ, $s \subseteq \kappa$ un conjunto estacionario y $F \subseteq X$ un conjunto cerrado tal que s y F son homeomorfos. Como F es un subconjunto cerrado, entonces F es un D-espacio y, por ende, s es un D-espacio. Consideremos la asignación de vecindades abiertas y convexas φ de s dada por $\varphi(x) := s \cap [0, x]$. Como s es un D-espacio existe un núcleo $D \subseteq s$ para φ.

Afirmamos que D es cofinal en κ. Sea $\alpha \in \kappa$, el intervalo $C := [\alpha + 1, \kappa)$ resulta ser cerrado y cofinal en κ, por lo que $s \cap C \neq \emptyset$. Así, existe $\beta \in s$ tal que $\alpha < \beta$. Por otra parte, $\beta \in \varphi(\delta) = s \cap [0, \delta]$ para alguna $\delta \in D$, implicando que $\beta \leq \delta$ y, por consiguiente, $\alpha < \delta$ para alguna $\delta \in D$. Luego, D es cofinal en κ.

Afirmamos que D es un conjunto estacionario de κ. Sea $C \subseteq \kappa$ un conjunto cerrado y cofinal en κ. Debido a que D y C son cofinales en k podemos construir dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\omega} \subseteq D$ y $\{b_n\}_{n\in\omega} \subseteq C$ tal que $a_n < b_n < a_{n+1}$ para toda $n \in \omega$. Por la construcción, tendremos que $\sup\limits_{n\in\omega} a_n = \gamma = \sup\limits_{n\in\omega} b_n$ y, ya que C y D son cerrados, ocurre que $\gamma \in C \cap D$. En conclusión, D es un conjunto estacionario de κ.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \notin D$, así que para cada $d \in D$ existe $\alpha(x) \in \kappa$ tal que $(\alpha(x), x] \cap D = \{x\}$. Por el Lema de Fodor podemos asegurar que existe $\beta \in \kappa$ tal que $Q := \{d \in D : \alpha(d) = \beta\}$ es un subconjunto estacionario de κ. Q es infinito pues es un conjunto estacionario. Sean $u, v \in Q$ dos elementos distintos y sin pérdida de generalidad supongamos

$u < v$. También $\alpha(u) = \beta = \alpha(v)$, pero $\alpha(v) = \alpha(u) < u < v$, por lo que $u \in (\alpha(v), v] \cap D = \{v\}$, lo cual contradice el hecho de que u y v son distintos. La contradicción vino de suponer que X no es paracompacto. Luego, X es paracompacto.

$\square$

Con esto ya contamos con la primer parte de la demostración. Ahora, nuestro objetivo será demostrar que dentro de los espacios ordenados generalizados, ser paracompacto implica ser D-espacio. Para demostrar esta implicación presentaremos nueva herramienta, primero vayamos con las definiciones:

Definición 3.4.9. Sean (X, τ) un espacio ordenado generalizado, φ una a. v. a. y $Y \subseteq X$ tal que $\varphi(y) \subseteq Y$ para toda $y \in Y$. Sean $D \subseteq Y$ y $\delta : D \to \tau$. Decimos que el par (D, δ) es *φ-aceptable para Y* si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) para todo $x \in D$ se cumple que $x \in \delta(x) \subseteq \varphi(x)$ y $\delta(x)$ es un abierto convexo;

(b) para toda $x \in D$, el conjunto $N(x) := \{z \in D \setminus \{x\} : \delta(x) \cap \delta(z) \neq \emptyset\}$ tiene a lo más dos elementos; y

(c) para toda $y \in Y$, si $\varphi(y) \cap \bigcup \delta[D] \neq \emptyset$, entonces $y \in \bigcup \delta[D]$.

Como se podrá intuir, haremos uso de los pares φ-aceptables para encontrar un núcleo para la asignación de vecindades que corresponda. Para fortalecer esta idea, primero veremos que el conjunto de puntos asociado a una pareja φ-aceptable es un subespacio cerrado y discreto en Y.

Lema 3.4.10. *Sean X un espacio ordenado generalizado, φ una asignación de vecindades abiertas convexas y $Y \subseteq X$ tal que $\varphi(y) \subseteq Y$ para toda $y \in Y$. Si (D, δ) es un par φ-aceptable para Y, entonces:*

(1) $\bigcup \delta[D]$ es un conjunto cerrado y abierto en Y; y

(2) D es cerrado y discreto en Y.

Demostración. Comenzaremos por demostrar el primer inciso. Por un lado, como $\bigcup \delta[D]$ es una unión de conjuntos abiertos entonces es abierto en X. Así, $Y \cap (\bigcup \delta[D])$ es abierto en Y. Sin embargo, para toda $y \in D \subseteq Y$ se cumple que $\delta(y) \subseteq \varphi(y) \subseteq Y$, por lo que $Y \cap (\bigcup \delta[D]) = \bigcup \delta[D]$ es un abierto de Y.

Para demostrar que $\bigcup \delta[D]$ es cerrado en Y tomaremos un elemento $x \in Y \setminus \bigcup \delta[D]$. Por el inciso (c) de la Definición 3.4.9 tendremos que $\varphi(y) \cap \bigcup \delta[D] = \emptyset$, además de que $\varphi(y) \subseteq Y$ por hipótesis. Por consiguiente, $y \in \varphi(y) \subseteq Y \setminus \bigcup \delta[D]$. Luego, $\bigcup \delta[D]$ es un conjunto cerrado de Y. Con esto concluiría la prueba para el primer inciso.

Para demostrar el segundo inciso mostraremos primero que D es un conjunto discreto. Tomemos $d \in D$ y consideremos a $U := \delta(d) \setminus N(d)$. U es una vecindad abierta de d pues $N(d)$ es un conjunto finito. Notemos que si $x \in U \cap D$, entonces $x \in \delta(d) \cap \delta(x)$, pero además $x \notin N(d)$ por lo que $x = d$, es decir, $U \cap D = \{d\}$, de modo que D es un conjunto discreto en X y, por ende, lo es en Y.

Falta probar que D es cerrado en Y. Como ya sabemos que $\bigcup \delta[D]$ es cerrado en Y y $D \subseteq \bigcup \delta[D]$, lo que haremos será demostrar que D es cerrado en $\bigcup \delta[D]$. Sean $x \in \bigcup \delta[D] \setminus D$ y $d \in D$ tal que $x \in \delta(d)$. Nuevamente, consideremos $U := \delta(d) \setminus \{y \in D : \delta(y) \cap \delta(d) \neq \emptyset\}$. El conjunto $\{y \in D : \delta(y) \cap \delta(d) \neq \emptyset\}$ es finito, por lo que U es una vecindad abierta para x la cual satisface que $U \cap D = \emptyset$. En consecuencia, $x \in U \subseteq \bigcup \delta[D] \setminus D$, de donde concluimos que D es un subconjunto cerrado de $\bigcup \delta[D]$. Luego, D es cerrado en Y.

$\square$

Resulta que el par $(\emptyset, \emptyset)$ siempre es un par φ-aceptable por lo cual, al igual que como lo hicimos con los conjuntos φ-pegajosos, nos interesará saber cuándo tendremos pares φ-aceptables que no sean triviales. Bajo las hipótesis que estamos trabajando en esta sección podremos construir no solo pares φ-aceptables que no sean triviales, sino también pares φ-aceptables que cubran algún punto en particular dado. Antes de pasar a dicho resultado necesitaremos un lema previo referente a un tipo de conjuntos llamados “conjuntos cerrados por la izquierda” y “conjuntos cerrados por la derecha”.

Definición 3.4.11. Sean X un espacio ordenado generalizado y $S \subseteq X$. Decimos que S es *cerrado por la derecha* si y sólo si $\bigcup\{(\leftarrow, s] : s \in S\}$ es un conjunto cerrado de X. Decimos que S es *cerrado por la izquierda* si y sólo si $\bigcup\{[s, \rightarrow) : s \in S\}$ es cerrado en X.

La demostración de este lema escapa de los alcances del presente trabajo, pero se podrá encontrar en [11].

Lema 3.4.12. *Sean $(X, \leq)$ un espacio ordenado generalizado paracompacto y $S \subseteq X$ un conjunto cerrado por la derecha. Existe $D \subseteq S$ cerrado y discreto* *que cumple que $(D,\leq)$ está bien ordenado y para todo $s\in S$ existe $d\in D$ tal que $s\leq d$. De igual forma, si S es un conjunto cerrado por la izquierda, existe $D\subseteq S$ cerrado y discreto para el cual $(D,\leq^{-1})$ está bien ordenado y que para todo $s\in S$ existe $d\in D$ tal que $d\leq s$.*

Regresando a nuestro camino, veamos el resultado que nos garantiza la existencia de parejas φ-aceptables que no sean triviales. Será de utilidad introducir la siguiente notación: dados X un espacio ordenado generalizado, $x\in X$ y $A\subseteq X$ diremos que $x>A$ si y sólo si $x>t$ para toda $t\in A$.

Lema 3.4.13. *Sea φ una asignación de vecindades abiertas y convexas para un espacio ordenado generalizado y paracompacto X. Sea $Y\subseteq X$ un subespacio abierto y cerrado de X tal que para toda $y\in Y$ se cumple que $\varphi(y)\subseteq Y$. Sea $p\in Y$ un punto fijo. Existe un par (D,δ) que es φ-aceptable para Y tal que $p\in D$.*

Demostración. Primero definiremos una sucesión $\{B(n):n\in\omega\}$ de subconjuntos de $Y\cap[p,\to)$ y una función β sobre el conjunto $B:=\bigcup\{B(n):n\in\omega\}$ tal que se cumplan las siguientes seis propiedades:

(1) para cada $x\in B$, el conjunto $\beta(x)$ es un abierto convexo de X tal que $x\in\beta(x)\subseteq\varphi(x)$;

(2) $B(0)=\{p\}$ y $\beta(p)=\varphi(p)$;

(3) cada $B(n)$ es un subespacio cerrado y discreto, bien ordenado por el orden de X;

(4) si $y\in B(n)$ y $z\in B(n+1)$, entonces $y<z$;

(5) si $y<z$ y $y,z\in B$, entonces $\beta(y)\subseteq(\leftarrow,z)$ y $\beta(z)\subseteq(y,\to)$; y

(6) si $x\geq p$, $x\in Y$ y además $\varphi(x)\cap\bigcup\beta[B]\neq\emptyset$, entonces $x\in\bigcup\beta[B]$.

Primero definiremos la sucesión de subconjuntos por recursión que satisfagan las propiedades (3) y (4). Nombremos $B(0):=\{p\}$, el cual es un subespacio cerrado y discreto de X, además de estar bien ordenado por el orden de X. Supongamos que para alguna $n\in\omega$ los conjuntos $B(0),\dots,B(n)$ existen y además satisfacen las propiedades (3) y (4). Definiremos un nuevo conjunto $B'(n)$ por casos: si $B(n)$ tiene un elemento máximo, llamémosle $q(n)$, definimos $B'(n):=\varphi(q(n))$; si $B(n)$ no tiene elemento máximo, definimos $B'(n):=B(n)$.

Sea $B"(n) := \{y \in Y : y > B'(n), \varphi(y) \cap B'(n) \neq \emptyset\}$: si el conjunto $B"(n) = \emptyset$, entonces definiremos $B(n+1) := \emptyset$; mientras que si el conjunto $B"(n) \neq \emptyset$, definiremos a $B(n+1)$ dependiendo de tres casos:

Caso 1. $B"(n)$ tiene elemento máximo.

Llamémosle $b"$ al elemento máximo de $B''(n)$, nombramos $B(n+1) := \{b"\}$.

Caso 2. $B"(n)$ no tiene elemento máximo pero es cerrado por la derecha.

Por el Lema 3.4.12 sabemos que existe $Z \subseteq B"(n)$ tal que Z está bien ordenado por el orden de X, Z es cerrado y discreto y para todo $x \in B"(n)$ existe $z \in Z$ tal que $x \leq z$. En este caso definamos $B(n+1) := Z$.

Caso 3. $B"(n)$ no tiene elemento máximo ni es cerrado por la derecha.

Como $\bigcup\limits_{x \in B"(n)} (\leftarrow, x]$ no es cerrado, entonces existe $r(n+1)$ un punto de acumulación de $B''(n)$ tal que $x < r(n+1)$ para toda $x \in B''(n)$, es decir, $r(n+1) = supB''(n)$, el cual es único. Cabe recalcar que $r(n+1) \notin \bigcup\limits_{x \in B''(n)} (\leftarrow, x]$. Como Y es cerrado y $r(n+1)$ es punto de acumulación de $B"(n) \subseteq Y$, entonces $r(n+1) \in Y$. Ya que $\varphi(r(n+1))$ es una vecindad abierta de $r(n+1)$ y $r(n+1)$ es punto de acumulación de $B"(n)$, entonces existe $e(n+1) \in \varphi(r(n+1)) \cap B"(n)$. Recordando que $r(n+1) > x$ para toda $x \in B"(n)$ podemos concluir que $e(n+1) < r(n+1)$. En este caso definimos $B(n+1) := \{e(n+1), r(n+1)\}$.

En los tres casos, $B(n+1)$ siempre resulta ser un subespacio cerrado y discreto, además de estar bien ordenado por el orden de X. Nos falta probar que $B(n)$ y $B(n+1)$ satisfacen la propiedad (4).

Antes veamos que todo elemento de $B"(n)$ está por arriba de cualquier elemento de $B(n)$. Sean $x \in B(n)$ y $y \in B"(n)$. Por definición, $t < y$ para toda $t \in B'(n)$. Si $B'(n) = B(n)$, en particular sucede que $x < y$. Si $B'(n) = \varphi(q(n))$, donde $q(n)$ es el elemento máximo de $B(n)$, entonces $x \leq q(n) < y$. En ambos casos concluimos que $x < y$. Así, si $x \in B(n)$ y $y \in B(n+1)$ podemos volver a pensar en dos casos. Si $B"(n)$ tiene elemento máximo o no lo tiene pero es cerrado por la derecha, se satisface que $B(n+1) \subseteq B"(n)$ por construcción, por lo cual $x < y$. Por otro lado, cuando $B"(n)$ no tiene elemento máximo ni es cerrado por la derecha definimos $B(n+1) = \{e(n+1), r(n+1)\}$, $e(n+1) \in B"(n)$, en donde $x < e(n+1) < r(n+1)$ y, debido a que $y \in B(n+1)$, concluimos que $x < y$. Luego, también se satisface la propiedad (4).

Resumiendo, acabamos de construir una familia $\{B(n) : n \in \omega\}$ tal que

(3) Cada $B(n)$ es un subespacio cerrado y discreto bien ordenado por el orden de X.

(4) Si $x \in B(n)$ y $y \in B(n+1)$ entonces $x < y$.

Sea $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{n\in\omega} B(n)$. Procederemos a definir la función β que va de $\mathcal{B}$ a los abierto de X. Notemos que para toda $x \in \mathcal{B}$ existe una única $n \in \omega$ tal que $x \in B(n)$, pues si existieran $n < m$ tal que $x \in B(n) \cap B(m)$ lo que debería de ocurrir es que $x < x$ por (4), lo cual no es posible. También por (4) podemos concluir que $\mathcal{B} \cap (\leftarrow, x] = \left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} B(i)\right) \cap (\leftarrow, x]$, lo cual implica que $\mathcal{B} \cap (\leftarrow, x]$ es un conjunto cerrado al ser intersección de conjuntos cerrados. También veamos que $\mathcal{B} \cap (\leftarrow, x]$ es un conjunto discreto. Si $y \in \mathcal{B} \cap (\leftarrow, x]$, entonces $y \in B(m)$ para alguna $m \leq n$. Como $B(m)$ es discreto, entonces existe $U(y)$ vecindad de y tal que $U(y) \cap B(m) = \{y\}$. Además, debido a que $\bigcup\{B(i) : 0 \leq i \leq n, i \neq m\}$ es cerrado y no tiene a y como elemento, pues éste aparece de manera única en $B(m)$, entonces $B = U(y) \cap (X \setminus \bigcup\{B(i) : 0 \leq i \leq n, i \neq m\})$ es una vecindad abierta de y la cual cumple que $B \cap \mathcal{B} \cap (\leftarrow, x] = \{y\}$. Por ende, $\mathcal{B} \cap (\leftarrow, x]$ es discreto.

Sea $M(x) := X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{x\})$. Afirmamos que $M(x)$ es una vecindad de x: si existe $y \in \mathcal{B}$ tal que $x < y$, entonces $\mathcal{B} \cap (\leftarrow, y]$ es un conjunto cerrado y discreto, por lo que existe U' vecindad de x tal que $U' \cap \mathcal{B} \cap (\leftarrow, y] = \{x\}$. Sea $U := U' \cap (\leftarrow, y)$, la cual es vecindad abierta de x con $U \subseteq X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{x\})$; si x es el elemento máximo de $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \cap (\leftarrow, x] = \mathcal{B}$ es cerrado y discreto y, por consiguiente, $X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{x\})$ es una vecindad abierta de x. Con ambos casos concluimos que $M(x)$ es una vecindad de x. Sea $\beta'(x)$ la componente convexa abierta de $M(x)$ tal que $x \in \beta'(x)$. Definimos $\beta(x) := \varphi(x) \cap \beta'(x)$, la cual resulta ser una vecindad abierta y convexa de x por ser intersección de vecindades convexas y abiertas de x, la cual satisface que $\beta(x) \subseteq \varphi(x)$, de modo que β verifica la propiedad (1).

Ya con nuestra familia de conjuntos y nuestra función definidas procederemos a ver que las tres propiedades que faltan se cumplen. Comencemos con la propiedad (2). Por construcción, $B(0) = \{p\}$. Notemos que p es elemento máximo de $B(0)$, lo cual implica $B'(p) = \varphi(p)$ por construcción. De esta manera, $B"(0) = \{t \in Y : t > p, \varphi(t) \cap \varphi(p)\}$: si $B"(0) \neq \emptyset$, entonces $B(1) \neq \emptyset$ y, por lo tanto, tiene elemento mínimo, llamémosle $b(1)$. Anteriormente vimos de manera general que $B(n+1) \subseteq B"(n)$ o que $e(n+1) = \min B(n+1) \in B"(n)$, en cualquiera de los dos casos $b(1) \in B"(0)$ y, en consecuencia, $t < b(1)$ para toda $t \in \varphi(p)$, por ende, $\mathcal{B} \cap \varphi(p) = \{p\}$, de modo que $\varphi(p) \subseteq X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{x\})$ es una vecindad abierta y convexa de p. Luego, $\varphi(p) \subseteq \beta'(p)$ por ser componente convexa abierta, con lo cual tenemos que $\beta(p) = \varphi(p) \cap \beta'(p) = \varphi(p)$, justo como se quería demostrar; al contrario, si $B"(0) = \emptyset$, entonces $\mathcal{B} = \{p\}$, lo cual nos dice que la componente convexa de p en $X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{p\}) = X$ es igual a X, por lo tanto $\beta(p) = \varphi(p) \cap \beta'(p) = \varphi(p)$. En cualquiera de los dos casos obtenemos que $\beta(p) = \varphi(p)$, con lo cual la propiedad (2) también se satisface.

Veamos que se satisface la propiedad (5). Sean $x, y \in \mathcal{B}$ tal que $x < y$. Notemos que

$$X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{x\}) \subseteq (\leftarrow, y) \cup (y, \rightarrow),$$

por lo cual $\beta(x) \subseteq (\leftarrow, y) \cup (y, \rightarrow)$, pero como $\beta(x)$ es convexo y $x \in \beta(x) \cap (\leftarrow, y)$, entonces $\beta(x) \subseteq (\leftarrow, y)$. De manera análoga se puede verificar que $\beta(y) \subseteq (x, \rightarrow)$, con lo cual se estaría satisfaciendo la propiedad (5).

Finalmente, comprobemos que se satisface la propiedad (6). Sea $x \in Y \cap [p, \rightarrow)$ tal que $\varphi(x) \cap (\bigcup \beta[\mathcal{B}]) \neq \emptyset$. Procedamos por contradicción y supongamos que $x \notin \bigcup \beta[\mathcal{B}]$.

La primer afirmación que vamos a demostrar es que existe $z \in \mathcal{B}$ tal que $x \leq z$. Supongamos lo contrario, es decir, $\mathcal{B} \subseteq (\leftarrow, x)$. Como $\varphi(x) \cap (\bigcup \beta[\mathcal{B}]) \neq \emptyset$ podemos tomar $n \in \omega$ y $b \in B(n)$ tal que $\varphi(x) \cap \beta(b) \neq \emptyset$. Ya que $\mathcal{B} \subseteq (\leftarrow, x)$, entonces $b < x$. Afirmamos que $y < x$ para toda $y \in B'(n)$:

Caso 1. $B(n)$ no tiene elemento máximo.

En este caso, $B'(n) = B(n) \subseteq \mathcal{B} \subseteq (\leftarrow, x)$, por consiguiente $y < x$ para toda $y \in B'(n)$.

Caso 2. $B(n)$ tiene elemento máximo.

Bajo este supuesto, $B'(n) = \varphi(q(n))$ donde $q(n) := \max B(n)$. Además, $q(n) < x$ pues $q(n)$ es elemento de $\mathcal{B}$. Procedamos por contradicción y supongamos que existe $w \in B'(n)$ tal que $x \leq w$, esto aunado al hecho de que $q(n) < x$ y $\varphi(q(n))$ es convexo implica que $x \in \varphi(q(n))$.

Notemos que $B''(n) = \emptyset$. En caso contrario $B''(n) \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $B(n+1) \neq \emptyset$. Sea c el primer elemento de $B(n+1)$, del cual ya probamos que también pertenece a $B''(n)$. Por construcción se satisface que $y < c$ para toda $y \in B'(n)$, en particular $w < c$ pero $c \in B(n+1) \subseteq \mathcal{B}$ por lo que $c < x$, de modo que $x \leq w < c < x$ lo cual es una contradicción. Luego, $B(n+1) = \emptyset$ y, por lo tanto, $B(k)=\emptyset$ para toda $k>n$. Así, $\mathcal{B}=\bigcup\limits_{i=0}^{n} B(n)$, lo cual junto a la propiedad (4) nos dice que $q(n)$ es el elemento máximo de $\mathcal{B}$. Como $q(n)\in\beta'(q(n))$ y $[q(n),\to)\subseteq X\setminus(\mathcal{B}\setminus\{q(n)\})$, entonces $[q(n),\to)\subseteq\beta'(q(n))$ por convexidad. Debido al hecho de que $x\in\varphi(q(n))$ y que $q(n)<x$ tendremos que

$$x\in\varphi(q(n))\cap[q(n),\to)\subseteq\varphi(q(n))\cap\beta'(q(n))=\beta(q(n)),$$

lo cual es una contradicción al supuesto de que $x\notin\bigcup\beta[\mathcal{B}]$. En consecuencia, debe de ocurrir que $y<x$ para toda $y\in B'(n)$.

Por ambos casos podemos concluir que x es cota superior de $B'(n)$ pero $x\notin B'(n)$.

Nuestra segunda afirmación es que $\varphi(x)\cap B'(n)\neq\emptyset$. Trabajaremos con dos casos: si $B(n)$ no tiene un elemento máximo, entonces $B'(n)=B(n)$ y, en consecuencia, $x\in\varphi(x)\cap B'(n)$; por el contrario, si $B(n)$ tiene un elemento máximo $q(n)$, se cumple que $b\leq q(n)<x$. Si $b=q(n)$, entonces $\beta(b)=\beta(q(n))\subseteq\varphi(q(n))=B'(n)$, por lo que $\emptyset\neq\beta(b)\cap\varphi(x)\subseteq B'(n)\cap\varphi(x)$. Si $b<q(n)$, por (5) sabemos que $\beta(b)\subseteq(\leftarrow,q(n))$ y, por ende, existe $z\in\beta(b)\cap\varphi(x)\cap(\leftarrow,q(n))$. Ya que $z<q(n)<x$ y $\varphi(x)$ es convexo podemos asegurar que $q(n)\in\varphi(x)$. Entonces, $\emptyset\neq\varphi(x)\cap\varphi(q(n))=\varphi(x)\cap B'(n)$. En ambos casos concluimos que $\varphi(x)\cap B'(n)\neq\emptyset$.

En resumen, hemos obtenido que $\varphi(x)\cap B'(n)\neq\emptyset$ y que $y<x$ para toda $y\in B'(n)$. Por construcción podemos concluir que $x\in B"(n)$, por lo que $B(n+1)\neq\emptyset$. Por la definición de $B(n+1)$ existe $y\in B(n+1)$ tal que $x\leq y$, pero esto es imposible pues $y\in B(n+1)\subseteq\mathcal{B}\subseteq(\leftarrow,x)$. Nuestra contradicción vino de suponer que $\mathcal{B}\subseteq(\leftarrow,x)$, por lo que existe $w\in\mathcal{B}$ tal que $x\leq w$.

Nuestro argumento demuestra que $\mathcal{S}:=\{s\in\mathcal{B}:x\leq s\}$ es un conjunto no vacío. Como $\mathcal{B}$ está bien ordenado y $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{S}$ tiene elemento mínimo. Sea $z:=\min\mathcal{S}$.

Afirmamos que $x\in\beta'(z)$. Como $x\notin\bigcup\beta[\mathcal{B}]$, en particular $x\notin\mathcal{B}$ de donde concluimos que $x<z$. Además, como $z=\min\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{B}\cap(\leftarrow,z)\subseteq(\leftarrow,x)$. Observemos que $\mathcal{B}\cap(\leftarrow,z)=\bigcup\limits_{i=0}^{m-1}B(i)\cup(B(m)\cap(\leftarrow,z))$, donde $z\in B(m)$. Como los conjuntos $B(n)$ son cerrados y discretos, entonces $\mathcal{B}\cap(\leftarrow,z)$ es cerrado. También es un conjunto discreto pues para cada $y\in\mathcal{B}$, la vecindad

$M(y)$ no intersecta a $\mathcal{B}$ salvo por el punto y. Así, $X \setminus (\mathcal{B} \cap (\leftarrow, z))$ es un conjunto abierto y x pertenece a él, por consiguiente existe U' vecindad abierta y convexa de x tal que $U' \subseteq X \setminus (\mathcal{B} \cap (\leftarrow, z))$. Sea $U := U' \cup (x, \rightarrow)$, el cual es un abierto convexo con x y z como elementos tal que $U \cap (\mathcal{B} \cap (\leftarrow, z)) = \emptyset$. Si z es el máximo de $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \cap [z, \rightarrow) = \{z\}$ y $\mathcal{B} \cap (\leftarrow, z) = \mathcal{B} \setminus \{z\}$, lo cual implica que $U \cap \mathcal{B} = \{z\}$, de manera que $U \cup [z, \rightarrow) \subseteq X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{z\})$ y, en consecuencia, $x \in U \cup [z, \rightarrow) \subseteq \beta'(z)$; por otro lado, si z no es el elemento máximo de $\mathcal{B}$ podemos tomar a w el primer elemento de $\mathcal{B}$ tal que $z < w$. El conjunto $V := (U \cap (\leftarrow, w)) \cup [z, w)$ es un abierto convexo contenido en $X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{z\})$ que tiene a x y z como elementos. Así, $x \in V \subseteq \beta'(z)$. Por ambos casos podemos concluir que $x \in \beta'(z)$.

Nuestra siguiente afirmación es que $x \in \varphi(z)$. Sea $k \in \omega$ tal que $z \in B(k)$. Como $p \leq x < z$, entonces $z \notin \{p\} = B(0)$, por lo que $k > 0$, así que $B''(k-1)$ existe y no es vacío. Si $\varphi(z) \cap \mathcal{B} \cap (\leftarrow, z) \neq \emptyset$, entonces elegimos $c \in \varphi(z) \cap \mathcal{B}$ tal que $c < z$. Por la minimalidad de z podemos afirmar que $c < x < z$. La convexidad de $\varphi(z)$ implica que $(c, z) \subseteq \varphi(z)$, por consiguiente $x \in \varphi(z)$; para el otro caso supongamos que $\varphi(z) \cap \mathcal{B} \cap (\leftarrow, z) = \emptyset$, primero probaremos por casos que $z \in B''(k-1)$: cuando $B''(k-1)$ tiene un punto máximo, digamos b'', entonces $z \in B(k) = \{b''\} \subseteq B''(k-1)$; si $B''(k-1)$ no tiene elemento máximo pero es cerrado por la derecha, por construcción $B(k) \subseteq B''(k-1)$, en consecuencia $z \in B''(k-1)$; cuando $B''(k-1)$ no tiene elemento máximo ni es cerrado por la derecha, entonces $z \in B(k) = \{e(k), r(k)\}$. Si $z = e(k)$ habremos terminado pues $e(k) \in B''(k-1)$, por construcción. Por contradicción supongamos que $z = r(k)$. Bajo este supuesto

$$e(k) \in \varphi(r(k)) \cap B''(k-1) = \varphi(z) \cap B''(k-1),$$

además $e(k) < r(k)$, por lo tanto $e(k) \in \varphi(z) \cap \mathcal{B} \cap (\leftarrow, z)$, lo cual es una contradicción. Luego, $z = e(k)$. Con los tres casos anteriores ya podemos afirmar que $z \in B''(k-1)$.

Como $z \in B''(k-1)$, entonces $y < z$ para todo $y \in B'(k-1)$ y $\varphi(z) \cap B'(k-1) \neq \emptyset$, por construcción. Continuaremos por demostrar que $B'(k-1) \neq B(k-1)$. Supongamos que ambos conjuntos son iguales. De esta manera $\varphi(z) \cap B(k-1) \neq \emptyset$ y, debido a que $y < z$ para toda $y \in B(k-1)$ por la propiedad (4), entonces

$$\emptyset \neq \varphi(z) \cap B(k-1) = \varphi(z) \cap B(k-1) \cap (\leftarrow, z) \subseteq \varphi(z) \cap \mathcal{B} \cap (\leftarrow, z),$$

lo cual es una contradicción. En conclusión, $B(k-1) \neq B'(k-1)$. Por construcción podemos asegurar que $B(k-1)$ tiene un elemento máximo, digamos q, tal que $B'(k-1) = \varphi(q)$. Nuevamente, la minimalidad de z nos dice que $q < x < z$.

Probaremos que $z = \text{mín}\, B(k)$. Supongamos que existe $w \in B(k)$ tal que $w < z$. Veamos que $w \in B''(k-1)$. Si $B''(k-1)$ tiene elemento máximo o no lo tiene pero es cerrado por la derecha, sabemos que $B(k) \subseteq B''(k-1)$, por lo que $w \in B''(k-1)$; en otro casi, si $B''(k-1)$ no tiene ni elemento máximo ni es cerrado por la derecha, entonces $w, z \in B(k) = \{e(k), r(k)\}$, y como $w < z$ podemos afirmar que $w = e(k) \in B''(k-1)$. Por ambos casos sabemos que $w \in B''(k-1)$. Así, $y < w$ para toda $y \in B'(k-1) = \varphi(q)$ y $\emptyset \neq \varphi(w) \cap B'(k-1) = \varphi(w) \cap \varphi(q)$. Ya que $q < z$ y $\varphi(q) \cap \varphi(z) \neq \emptyset$, entonces $[q, z] \subseteq \varphi(q) \cup \varphi(z)$ pues ambas vecindades son convexas, pero $w \in [q, z]$, lo cual implica que $w \in \varphi(z) \cup \varphi(q)$. En vista de que $y < w$ para toda $y \in \varphi(q)$, concluimos que $w \in \varphi(z)$. Luego, $w \in \varphi(z) \cap \mathcal{B} \cap (\leftarrow, z)$, lo cual es una contradicción. Por ende, $z = \text{mín}\, B(k)$.

Como q es el elemento máximo de $B(k-1)$ y z es el mínimo de $B(k)$, por la propiedad (4) aseguramos que $(q, z) \cap \mathcal{B} = \emptyset$, de modo que $(q, z) \subseteq \beta'(q) \cap \beta'(z)$, pues ambas son componentes convexas abiertas de $X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{q\})$ y $X \setminus (\mathcal{B} \setminus \{z\})$, respectivamente. Como $x \in (q, z)$, entonces $x \in \beta'(q) \cap \beta'(z)$. También sabemos que $\varphi(q) \cap \varphi(z) \neq \emptyset$, por la convexidad de φ tendremos que $(q, z) \subseteq \varphi(q) \cup \varphi(z)$. Entonces, $x \in \varphi(q) \cup \varphi(z)$. Ya que $x \in \varphi(q)$ o $x \in \varphi(z)$, ocurre que $x \in \varphi(q) \cap \beta'(q)$ o $x \in \varphi(z) \cap \beta'(z)$. En cualquiera de los dos casos obtenemos que $x \in \bigcup \beta[\mathcal{B}]$, lo cual es una contradicción pues en un principio supusimos $x \notin \bigcup \beta[\mathcal{B}]$. Luego, $x \in \bigcup \beta[\mathcal{B}]$. Así, la propiedad (6) se satisface.

De una manera análoga podemos construir subconjuntos $A(n) \subseteq Y \cap (\leftarrow, p]$ y una función α definida sobre $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \omega} A(n)$ tal que:

(1') para cada $x \in \mathcal{A}$ se cumple que $\alpha(z)$ es un abierto convexo de X y $x \in \alpha(x) \subseteq \varphi(x)$;

(2') $A(0) = \{p\}$ y $\alpha(p) = \varphi(p)$;

(3') cada $A(n)$ es un cerrado discreto de X, además de que $(A(n), \leq^{-1})$ es un buen orden;

(4') si $y \in A(n)$ y $z \in A(n+1)$, entonces $z < y$;

(5') si $y < z$ son elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\alpha(y) \subseteq (\leftarrow, z)$ y $\alpha(z) \subseteq (y, \rightarrow)$; y

(6') si $y \in Y \cap (\leftarrow, p]$ y $\varphi(y) \cap (\bigcup \alpha[\mathcal{A}]) \neq \emptyset$, entonces $y \in \bigcup \alpha[\mathcal{A}]$.

Definimos la función δ sobre $D := \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mediante la regla

$$\delta(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{si} \quad x \in \mathcal{A}, \\ \beta(x), & \text{si } x \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Demostraremos que (D, δ) es un par φ-aceptable en Y.

Para comenzar, $D \subseteq Y$ pues $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ambos subconjuntos de Y. Además, para cada $x \in \mathcal{A}$ se cumple que $\alpha(x) \subseteq \varphi(x)$, por construcción, del mismo modo para $\mathcal{B}$ y la función β, por lo que para toda $x \in D$ ocurre que $\delta(x) \subseteq \varphi(x)$. También, cada una de las imágenes de las funciones α y β es un abierto convexo, haciendo que para toda $x \in D$ el conjunto $\delta(x)$ sea un abierto convexo.

Sea $x \in D$. Demostraremos que $N(x) := \{y \in D \setminus \{x\} : \delta(x) \cap \delta(y) \neq \emptyset\}$ tiene a lo más dos elementos. Primero notemos que si $x \in \mathcal{A}$ y $y \in \mathcal{B}$ con $x \neq p \neq y$, entonces $\alpha(x) \subseteq (\leftarrow, p)$ pues $x < p$, así como $\beta(y) \subseteq (p \rightarrow)$. Por ello, $\delta(x) \cap \delta(y) = \alpha(x) \cap \beta(y) = \emptyset$. Lo mismo ocurre en el caso en que $x \in \mathcal{B}$ y $y \in \mathcal{A}$. Por esta razón podemos afirmar que si $x \in \mathcal{A}$ entonces $N(x) \subseteq \mathcal{A}$, y si $x \in \mathcal{B}$ entonces $N(x) \subseteq \mathcal{B}$. Más aún, es cierto que $N(x) = \{y \in \mathcal{A} \setminus \{x\} : \alpha(x) \cap \alpha(y) \neq \emptyset\}$ o $N(x) = \{y \in \mathcal{B} \setminus \{x\} : \beta(x) \cap \beta(y) \neq \emptyset\}$, respectivamente, y en cada caso el conjunto en cuestión tiene a lo más dos elementos. Por ambos casos podemos concluir que $N(x)$ tiene a lo más dos elementos. Ahora, si $x = p$, entonces $N(x) = \{y \in \mathcal{A} \setminus \{p\} : \alpha(x) \cap \alpha(y) \neq \emptyset\} \cup \{y \in \mathcal{B} \setminus \{x\} : \beta(x) \cap \beta(y) \neq \emptyset\}$, donde cada uno de estos conjuntos tiene a lo más un elemento y, por lo tanto, su unión tiene a lo más dos elementos. En conclusión, $N(x)$ siempre tiene a lo más dos elementos.

Para finalizar, sea $y \in Y$ tal que $\varphi(y) \cap (\bigcup \delta[D]) \neq \emptyset$. Demostraremos que $y \in \bigcup(\delta[D])$. Notemos que $\varphi(y) \cap (\bigcup \delta[D]) = \varphi(y) \cap [(\bigcup \alpha[\mathcal{A}]) \cup (\bigcup \beta[\mathcal{B}])]$, por lo que $\varphi(y) \cap \bigcup \alpha[\mathcal{A}] \neq \emptyset$ o $\varphi(y) \cap \bigcup \beta[\mathcal{B}] \neq \emptyset$. Supongamos que $\varphi(y) \cap \bigcup \alpha[\mathcal{A}] \neq \emptyset$. Si $y \leq p$, entonces $y \in \bigcup \alpha[\mathcal{A}] \subseteq \bigcup \delta[D]$. En caso contrario, si $p < y$, como $\alpha(x) \subseteq (\leftarrow, p)$ para toda $x \in \mathcal{A} \setminus \{p\}$ y $\varphi(y)$ es convexo, entonces $\beta(p) \cap \varphi(y) = \alpha(p) \cap \varphi(y) \neq \emptyset$, por lo que $y \in \bigcup \beta[\mathcal{B}] \subseteq \bigcup \delta[D]$. En cualquier caso ocurre que $y \in \bigcup \delta[D]$; de manera análoga podemos ver que $y \in \bigcup \delta[D]$ cuando $\varphi(y) \cap \bigcup \beta[\mathcal{B}] \neq \emptyset$.

En resumen, (D, δ) es una pareja φ-aceptable en Y, tal que $p \in D$.

$\square$

Definición 3.4.14. Para cualquier asignación φ de vecindades abiertas convexas de X definimos el conjunto $A(\varphi) := \{(E, \mu) : (E, \mu)$ es φ-aceptable en $X\}$. A $A(\varphi)$ lo equiparemos con una relación $\leq$ dada por $(E, \mu) \leq (F, \nu)$ si y sólo si $E \subseteq F$ y $\nu|_E = \mu$.

Dados φ una asignación de vecindades abiertas y convexas para un espacio X y $(E, \nu), (F, \mu), (G, \eta)$ elementos de $A(\varphi)$, podemos verificar que:

(1) $(E, \nu) \leq (E, \nu)$ pues $E \subseteq E$ y $\nu|_E = \nu$;

(2) si $(E, \nu) \leq (F, \mu)$ y $(F, \mu) \leq (E, \nu)$ tendremos que $E \subseteq F$ y $F \subseteq E$, por lo que $E = F$. Además, $\mu = \nu|F = \nu|E = \nu$. De esta manera obtenemos que $(E, \nu) = (F, \mu)$; y

(3) si $(E, \nu) \leq (F, \mu)$ y $(F, \mu) \leq (G, \eta)$, entonces $E \subseteq F \subseteq G$ y $\nu = \mu|_E = (\eta|_F)|_E = \eta|_{E \cap F} = \eta_E$, llegando a que $(E, \nu) \leq (G, \eta)$.

Los tres puntos anteriores indican que el par $(A(\varphi), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, esto junto al Lema 3.4.13, tomando $Y = X$, garantiza que $(A(\varphi), \leq)$ es un orden parcial no vacío.

Hay que recordar que nuestra empresa actual consiste en encontrar un núcleo para φ, una asignación de vecindades abiertas (y convexas, por el momento). Ya se había adelantado previamente que uno de los elementos de $A(\varphi)$ es el que funcionará como un núcleo para φ, y guiados por la intuición y experiencia de la Sección 1.3 podemos asumir que buscamos un elemento "lo suficientemente grande" en términos de nuestro orden $\leq$. De igual forma a como lo hicimos para los conjuntos pegajosos, un elemento maximal de $(A(\varphi), \leq)$ es el que terminará salvando el día. Como es de esperar, procederemos a ocupar el Lema de Zorn.

Lema 3.4.15. *Sea X un espacio ordenado generalizado paracompacto y φ una asignación de vecindades abiertas convexas de éste. $A(\varphi)$ tiene un elemento $\leq$-maximal.*

Demostración. Ya sabemos que $(A(\varphi), \leq)$ es un orden parcial no vacío. Nos falta probar que toda cadena no vacía está acotada superiormente.

Sea $\mathcal{C} \subseteq A(\varphi)$ una cadena. Digamos $\mathcal{C} = \{(E_i, \delta_i) : i \in I\}$ para algún conjunto no vacío I. Sean $E := \bigcup_{i \in I} E_i$ y $\delta := \bigcup_{i \in I} \delta_i$. δ es función pues si $(x, \delta_i(x)), (x, \delta_j(x)) \in \delta$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(E_i, \delta_i) \leq (E_j, \delta_j)$ con $x \in E_i \cap E_j$, entonces $\delta_i(x) = \delta_j|_{E_i}(x) = \delta_j(x)$ y, en consecuencia, $(x, \delta_i(x)) = (x, \delta_j(x))$. Por construcción, se cumple que $E_i \subseteq E$ y $\delta_i = \delta|_{E_i}$ para cada $i \in I$. Lo único que falta ver es que la pareja (E, δ) es un par φ-aceptable en X.

Para comenzar, para cada $x \in E$ existe $i \in I$ tal que $x \in E_i$. Sabemos que $\delta_i(x) \subseteq \varphi(x)$ y que $\delta_i(x)$ es un abierto convexo. Como $\delta(x) = \delta_i(x)$, entonces $\delta(x)$ es una vecindad convexa y abierta de x tal que $\delta(x) \subseteq \varphi(x)$.

Por otra parte, sea $x \in E$. Probaremos que $N_\delta(x) := \{y \in E \setminus \{x\} : \delta(x) \cap \delta(y) \neq \emptyset\}$ tiene a lo más dos elementos. Supongamos que $|N_\delta(x)| \geq 3$. En ese caso podemos tomar $y_1, y_2, y_3 \in N_\delta(x)$ elementos distintos entre sí. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $i \in I$ tal que $x, y_1, y_2, y_3 \in E_i$. Con esto, $\delta_i(x) \cap \delta_i(y_j) = \delta(x) \cap \delta(y_j) \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Esto nos dice que y_1, y_2, y_3 son tres elementos distintos de $N_{\delta_i}(x) = \{y \in E_i \setminus \{x\} : \delta_i(x) \cap \delta_i(y) \neq \emptyset\}$, lo cual es una contradicción pues (E_i, δ_i) es una pareja φ-aceptable en X y, en particular, $|N_{\delta_i}(x)| \leq 2$. Por tanto, $|N_\delta(x)| \leq 2$.

Finalmente, sea $x \in X$ tal que $\varphi(x) \cap (\bigcup \delta[E]) \neq \emptyset$. Existe $i \in I$ tal que $\varphi(x) \cap \bigcup \delta[E_i] \neq \emptyset$, o en otras palabras, $\varphi(x) \cap \bigcup \delta_i[E_i] \neq \emptyset$. Como (E_i, δ_i) es un par φ-aceptable en X, entonces $x \in \bigcup \delta_i[E_i] \subseteq \bigcup \delta[E]$, como se quería probar.

Por los tres puntos anteriores podemos afirmar que (E, δ) es un par φ-aceptable. Por lo tanto, $(E, \delta) \in A(\varphi)$ y éste es una cota superior para $\mathcal{C}$. Luego, como $(A(\varphi), \leq)$ es un orden parcial no vacío donde toda cadena no vacía está acotada superiormente, por el Lema de Zorn podemos garantizar que $A(\varphi)$ tiene un elemento $\leq$-maximal. $\square$

Ya sabemos que el elemento maximal de $A(\varphi)$, (E, μ), cumple que E es un conjunto cerrado y discreto por el Lema 3.4.10. Para que sea un núcleo para φ sólo falta comprobar que $\varphi[E]$ es una cubierta para X.

Lema 3.4.16. *Sea φ una asignación de vecindades abiertas convexas para un espacio X ordenado generalizado y paracompacto. Si (E, μ) es un elemento*

$\leq$-maximal de $(A(\varphi), \leq)$, entonces $\bigcup \mu[E] = X$.

Demostración. Supongamos que $\bigcup \mu[E] \neq X$. Consideremos $Y := X \setminus \bigcup \mu[E]$ y sea $p \in Y$ un punto fijo. Como (E, μ) es un par φ-aceptable en X, entonces para todo $y \in Y$ se cumple que $\varphi(y) \cap \bigcup \mu[E] = \emptyset$, por lo que $\varphi(y) \subseteq Y$, lo cual implica que Y es un conjunto abierto. Por su parte, como $\bigcup \mu[E]$ es un abierto de X, entonces $Y = X \setminus \bigcup \mu[E]$ es un conjunto cerrado. En resumen, como Y es un subespacio cerrado y abierto de X tal que $\varphi(y) \subseteq Y$ para toda $y \in Y$, existe un par (D, δ) que es φ-aceptable en Y tal que $p \in D$, por el Lema 3.4.13. Sean $F := D \cup E$ y $\nu := \mu \cup \delta$. ν es una función bien definida pues μ y δ son funciones definidas sobre conjuntos ajenos. Afirmamos que (F, ν) es una pareja φ-aceptable sobre X.

- Para empezar, si $x \in F$ podemos separar dos casos: si $x \in D$, entonces $x \in \nu(x) = \delta(x) \subseteq \varphi(x)$, con $\delta(x)$ un abierto convexo; mientras que si $x \in E$, sucede que $x \in \nu(x) = \mu(x) \subseteq \varphi(x)$, con $\mu(x)$ un abierto convexo. En cualquier caso obtuvimos que $\nu(x) \subseteq \varphi(x)$ y que $\nu(x)$ es una vecindad abierta convexa de x.

- Sea $x \in F$. Queremos probar que $N(x) := \{y \in F \setminus \{x\} : \nu(x) \cap \nu(y) \neq \emptyset\}$ tiene a lo más dos elementos. Sea $y \in N(x)$. Si $x \in E$ y $y \in D$, entonces $\nu(x) = \mu(x) \subseteq \bigcup \mu[E]$ y $\nu(y) = \delta(x) \subseteq X \setminus \bigcup \mu[E]$, por ende $\nu(x) \cap \nu(y) = \emptyset$, una contradicción, en consecuencia $y \in E$. De este modo,

  $$N(x) = \{y \in F \setminus \{x\} : \nu(x) \cap \nu(y) \neq \emptyset\} = \{y \in E \setminus \{x\} : \mu(x) \cap \mu(y) \neq \emptyset\}.$$

  Como (E, μ) es un par φ-aceptable en X, entonces $\{y \in E \setminus \{x\} : \mu(x) \cap \mu(y) \neq \emptyset\}$ tiene a lo más dos elementos, es decir, $|N(x)| \leq 2$. De igual formar, si $x \in D$ entonces

  $$|N(x)| = |\{y \in D \setminus \{x\} : \delta(x) \cap \delta(y) \neq \emptyset\}| \leq 2.$$

  Por ambos casos podemos concluir que $|N(x)| \leq 2$.

- Para finalizar, sea $x \in X$ tal que $\varphi(x) \cap \bigcup \nu[F] \neq \emptyset$. Observemos que

  $$\bigcup \nu[F] = \left(\bigcup \mu[E]\right) \cup \left(\bigcup \delta[D]\right),$$

  por lo que $\varphi(x) \cap \bigcup \mu[E] \neq \emptyset$ o $\varphi(x) \cap \bigcup \delta[D] \neq \emptyset$. Así, $x \in \bigcup \mu[E]$ o $x \in \bigcup \delta[D]$. En cualquiera de los dos casos podemos concluir que $x \in \bigcup \nu[F]$.

Con los tres puntos anteriores queda demostrado que (F, ν) es φ-aceptable en X. Pero $E \subsetneq F$ y $\nu|_E = \mu$ por construcción, por lo que $(E, \mu) \leq (F, \nu)$ y $(E, \mu) \neq (F, \nu)$, lo cual es una contradicción al hecho de que (E, μ) es $\leq$-maximal en $A(\varphi)$. Nuestra contradicción vino de suponer que $\mu[E]$ no era una cubierta para X. Luego, $X = \bigcup \mu[E]$.

$\square$

Por fin podemos probar nuestro último resultado.

Teorema 3.4.17. *Todo espacio ordenado generalizado paracompacto es un D-espacio.*

Demostración. Sean X un espacio ordenado generalizado paracompacto y φ una a. v. a. de X. Para cada $x \in X$ existe $\psi(x)$ vecindad abierta convexa de x tal que $\psi(x) \subseteq \varphi(x)$.

Por el Lema 3.4.15 sabemos que existe un elemento maximal (D, μ) de $(A(\psi), \leq)$. Como (D, μ) es una pareja ψ-aceptable, entonces D es un conjunto cerrado y discreto. También, por el Lema 3.4.16 sabemos que $\bigcup \mu[D] = X$. Como para todo $x \in D$ se cumple que $\mu(x) \subseteq \psi(x) \subseteq \varphi(x)$, entonces $X = \bigcup \varphi[D]$. Por lo tanto, D es un núcleo para φ. Luego, X es un D-espacio. $\square$

Bibliografía

[1] ALAS, O.T.; JUNQUEIRA,L. R.; WILSON, R.G., Dually discrete spaces, Topology and its Applications, 155 (2008) 1420-1425.

[2] BORGES, C.R.; WEHRLY, A.C., A study of D-spaces, Topology Proceedings, 16 (1991) 7-15.

[3] BURKE, D.K., Weak-bases and D-spaces, Comment. Math. Univ. Carolin. 48 (2) (2007) 281-289.

[4] FLEISSNER, W.G.; STANLEY,A.M., D-spaces, Topology and its Applications, 114 (2001) 261-271.

[5] GRUENHAGE, G., A note on D-spaces, Topology and its Applications, 153 (2006) 2229-2240.

[6] GRUENHAGE, G., A survey of D-spaces, Contemporary Mathematics, 533 (2011).

[7] HRUSÁK, M.; MOORE, J., Twenty problems in set theoretic topology, Open problems in topology II, Elliott Pearl, (2007) 111-114.

[8] KYSIAK, M., Bernstein Sets with algebraic properties, Open Mathematics, 7 (4) (2009) 725-731.

[9] PENG, L., The D-property of some Lindelöf spaces and related conclusions, Topology and its Applications, 154 (2007) 469-475.

[10] TOVAR, E.E., Espacios semiestratificables, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, (2019).

[11] VAN DOUWEN, E.K.; LUTZER, D.J., A note on paracompactness in generalized ordered spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 125 (4) (1997) 1237-1245.

[12] VAN DOUWEN, E.K.; PFEFFER, W.F., Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces, Pacific Journal of Mathematics, 81 (2)(1979) 371-377.

[13] VAN DOUWEN, E.K., A technique for constructing honest locally compact submetrizable examples, Topology and its Applications, 47 (1992)179-201.

Índice alfabético