



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE FÍSICA
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES
NUCLEARES

OBSERVACIÓN DE NEUTRINOS MASIVOS A TRAVÉS DE
LENTES GRAVITACIONALES DÉBILES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

RAFAEL MORALES MORENO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEJANDRO AVILÉS CERVANTES (TUTOR
PRINCIPAL),
CONACYT - INSTITUTO NACIONAL DE
INVESTIGACIONES NUCLEARES (ININ)

COMITÉ TUTOR:

DRA. MARIANA VARGAS MAGAÑA, IF-UNAM
DR. SÉBASTIEN FROMENTEAU, ICF-UNAM.

Ciudad Universitaria, CD.MX. Julio 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia, especialmente a doña Rosita y Lucha, mis abuelas.
A Oreo, la raza.*

Agradecimientos

A todos aquellos que contribuyeron de manera directa e indirecta, no solo en este trabajo, sino a lo largo de este proceso académico y personal; a mis amigos y compañeros que me han apoyado en diversos momentos.

Hago extensos mis agradecimientos a los docentes del Instituto de Física (IF), Instituto de Ciencias Físicas (ICF) e Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) por su labor y con quienes tuve la fortuna de aprender de ellos, principalmente al Dr. Alejandro por la continua tutela brindada y su absoluta intervención a lo largo del proceso de esta tesis, así como durante mis cursos de maestría en general desde el primer momento, en donde tuve el gusto también de coincidir con (y aprender de) los Dres. Mariana y Sébastien, miembros de mi Comité Tutor. A mis compañeros de posgrado por las constantes consultas y trabajo codo a codo: Claudio, José, Daniel. A mis amigos Aidán y Yamir que me recibieron de tan buena manera en la ciudad. A María, mi compañera y pilar en tantos momentos, por todo el apoyo a lo largo de los últimos años tanto anímica como académica e intelectualmente. No podía pasar por alto la especial gratitud a mis padres, quienes siempre me han brindado todo lo necesario para mi formación personal y profesional.

Agradezco al programa de Becas Nacionales del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y al Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ) por el vital soporte a este proyecto y permitirme realizar los estudios de maestría.

Resumen

En la actualidad, una de las principales formas de estudiar la estructura a gran escala del universo (LSS) es mediante el uso de lentes gravitacionales, particularmente vía *weak lensing* (WL). Este efecto es debido a la presencia de cualquier tipo de materia (no solo bariónica), de la cual los neutrinos forman parte, siendo que en la actualidad no solamente está establecido que estos poseen masa, sino que representan la segunda partícula más abundante en el universo, únicamente por debajo de los fotones. Por consiguiente, WL ha resultado en una herramienta trascendente en el estudio de materia oscura y el comportamiento de la evolución de perturbaciones de materia en el universo, usando información de catálogos fotométricos y simulaciones. En particular, se ha mostrado que al usar el espectro de potencias de la materia, estadístico del espacio de Fourier, es posible obtener información de la masa absoluta de los neutrinos mismos, tema que en la actualidad permanece sin resolverse.

El presente trabajo se aboca al uso de estos espectros probando distintas masas de neutrinos para el cálculo de funciones de correlación de *lensing* ξ_{\pm} , el *shear* cósmico, para lo cual se ha desarrollado un método numérico y un código computacional, llamado WLnu (github.com/rafaelmoramore/WLnu), capaz de simular estas funciones de *shear* a orden lineal y con correcciones de 1-*loop* (teoría estándar de perturbaciones, SPT), bajo la variación de parámetros de entrada Ω_m , h y, principalmente, M_{ν} , la masa absoluta de neutrinos, así como desde entradas de CLASS con espectros de referencia.

Se ha demostrado que con el uso de transformadas rápidas de Fourier (FFTLog), la velocidad de cómputo al calcular ξ_{\pm} mejora hasta en aproximadamente un 400% con respecto al método conservador (integración directa), mismo cálculo que es realizado para diversas masas absolutas de neutrinos en apego a los límites dados por los experimentos de oscilación y decaimiento β (KATRIN), mostrando que el *shear* se ve afectado por la presencia de neutrinos masivos, siendo en general suprimido. Asimismo, la implementación de un modelo más allá del orden lineal (SPT), permite una mejora considerable en la precisión de estos cálculos.

Palabras clave: *Weak lensing*, neutrinos masivos, catálogos fotométricos, espectro de potencias, *shear* cósmico, teoría de perturbaciones a 1-*loop*, FFTLog.

Índice general

Introducción	VI
1 Cosmología de fondo y observaciones	1
§1.1 Cosmología homogénea e isotrópica	1
§1.1.1 Relatividad General y Principio Cosmológico	1
§1.1.2 Ecuaciones de movimiento de la cosmología de fondo	3
§1.1.3 Distancias cósmicas	7
§1.1.4 Ecuación de Boltzmann	11
§1.2 Perturbaciones lineales en RG	12
§1.2.1 Universo inhomogéneo	12
§1.2.2 Inflación	17
§1.3 Espectros lineales de potencias: perturbaciones a orden lineal	20
§1.4 Observaciones	22
§1.4.1 Modelo de Concordancia: observaciones acordes a Λ CDM	24
§1.4.2 Pruebas de estructura	26
§1.5 Weak lensing	27
§1.5.1 Catálogos fotométricos: observaciones pasadas, hoy en día y futuras (LSST)	31
2 Estadística: espectro de potencias y función de correlación	33
§2.1 Función de correlación y su espectro	33
§2.1.1 Espacio de Fourier	35
§2.1.2 2PCF y espectro de potencias	36
§2.1.3 Espectro de potencias de materia en espacio real	37
§2.2 Distorsión del espacio de <i>redshift</i>	41
§2.2.1 RSD en <i>Weak lensing</i>	42
§2.3 Estadística en <i>lensing</i>	42
§2.3.1 Espectro de potencias de la convergencia	43
§2.3.2 Función de correlación de WL: <i>shear</i> galáctico	46
3 Neutrinos masivos en cosmología	49
§3.1 Los neutrinos en la física	49
§3.2 Historia térmica del universo: intervención de neutrinos masivos	52
§3.2.1 Breve cronología de la termodinámica en el universo	52
§3.2.2 Bases del universo térmico: Física Estadística y gas ideal	54
§3.2.3 Plasma primordial con acoplamiento de neutrinos	55

§3.2.4	Desacople de neutrinos y transición de estado relativista	56
§3.2.5	<i>Neutrino Dark Matter</i>	59
§3.3	Oscilaciones de neutrinos y el problema del ordenamiento de masas	62
§3.3.1	Estatus actual del problema de ordenamiento de masas	64
§3.4	Efectos de los neutrinos en cosmología	65
§3.4.1	Época relativista: efectos en el CMB	67
§3.4.2	Época no-relativista: supresión de la formación de estructura	67
4	Teoría analítica lineal y de perturbaciones	70
§4.1	Dinámica de una partícula en un potencial gravitatorio	70
§4.1.1	Momentos de la ecuación de Boltzmann	72
§4.2	Teoría estándar de perturbaciones (SPT)	77
§4.2.1	No linealidades	78
§4.2.2	Ecuaciones de la teoría de perturbaciones	80
§4.2.3	SPT: Espectro a 1-loop	84
§4.2.4	Espectro angular	90
§4.2.5	<i>CLASS</i>	90
5	Análisis numérico: Método FFTlog	92
§5.1	Métodos numéricos: módulos de Python	92
§5.1.1	Algoritmo FFTLog	100
§5.1.2	Cálculo de las funciones de correlación	106
§5.1.3	Régimen no lineal: SPT	109
6	Análisis comparativo	114
§6.1	Eficiencia: comparación entre los métodos de integración directa y <i>FFTLog</i>	114
§6.2	Variación de parámetros cosmológicos	116
§6.3	Análisis comparativo de las funciones de correlación de <i>shear</i> con neutrinos masivos	121
	Conclusiones	130
	Bibliografía	131
	Apéndices	142
	A Temperatura del fondo de neutrinos	143
	B Velocidad térmica de los neutrinos calientes (HDM)	146
	C Ecuación diferencial para la función de crecimiento	148

Introducción

En la actualidad, existe un modelo cosmológico de alta correspondencia con las observaciones: el Modelo de Concordancia, nombrado Λ CDM [Peebles, 1984, Peebles and Ratra, 2003, Carroll, 2001], el cual es cimentado (entre otros dos pilares igual de importantes: constante cosmológica y materia oscura fría) bajo la consideración de la etapa primigenia conocida como inflación, la cual representa la semilla de la hoy llamada Estructura a Gran Escala (LSS) [Dodelson and Schmidt, 2020]. Una vía que permite estudiar directamente la evolución de la LSS mediante la observación es el efecto de lentes gravitacionales [Kilbinger, 2015], específicamente bajo el régimen de lentes débiles, mejor conocidos por su término en inglés, *Weak Lensing* (WL), el cual consiste en la deformación de la trayectoria de la luz proveniente de fuentes lejanas debido a los potenciales gravitacionales producidos por la materia que se encuentra entre ellas y nosotros.

A la fecha, es sabido que la composición de materia-energía en el universo es en su mayoría de carácter oscuro, representando cerca del 26 % del contenido total, mientras que solo el 4.9 % corresponde a materia bariónica (el resto es atribuido a la componente de energía oscura o energía de vacío) [Aghanim et al., 2020a]. Los neutrinos, fermiones elementales (leptones neutros) de interacción débil producidos en el universo temprano, han representado una opción viable como candidatos a materia oscura, habiéndola de dos tipos bajo ciertas condiciones de velocidad térmica promedio, las cuales permiten definir una escala de distancia adicional en cosmología, llamada “escala de *free streaming*”: escala de distancia típica que pueden recorrer los neutrinos en un tiempo de Hubble según su masa. Así, para valores inferiores a esta, las partículas se consideran un componente de materia oscura fría (CDM), mientras que para una escala por encima de este valor, se consideran materia oscura caliente (HDM).¹ Neutrinos con masas del orden de eV son candidatos naturales a HDM. Sin embargo, múltiples modelos cosmológicos son propuestos bajo el supuesto de esta partícula fermiónica siendo estrictamente no masiva (que por muchos años fue así considerada, representando claramente una inconsistencia en la actualidad).

No obstante, diversos experimentos han llevado a la conclusión de que los neutrinos son partículas masivas [Fukuda et al., 1998, Ahmad et al., 2001, Ahmad et al., 2002] (al menos algunos tal que exista una diferencia de masa no nula entre estados), entre órdenes de $\mathcal{O}(m_\nu) \sim 0.01 - 1$ eV [Aker et al., 2022]. Así, mientras que aún el límite más restrictivo en su masa indica que estas partículas deben ser no relativistas a tiempos recientes (al menos

¹A escalas por encima de la escala de *free streaming*, k_{fs} , la velocidad térmica de los neutrinos no es lo suficientemente grande para evitar el colapso gravitacional en los pozos de potencial generados por la CDM y los bariones.

dos de ellos),² sus velocidades térmicas siguen siendo relevantes, implicando una escala (en este caso la recíproca, de frecuencia) $k < k_{\text{fs}}$, provocando que las perturbaciones de materia sean borradas por los altos momentos de HDM. Así, neutrinos con estas características impiden el crecimiento de las perturbaciones, contrarrestando el colapso gravitacional.³

En virtud de ello, la masa de los neutrinos, aún siendo pequeña, representa un “grado de libertad” en la variación de parámetros de los modelos extendidos, puesto que (aún ligeros) representan la segunda partícula más abundante del universo (solo por debajo del fotón), representando un papel crucial en la cosmología, aunado al hecho de tener grandes repercusiones en la historia térmica del universo al representar una partícula que presumiblemente ha existido desde el universo primigenio (plasma primordial a escalas hadrónicas), y que debido a su naturaleza tan peculiar (partícula elemental del Modelo Estándar, fermiónica, neutra y de interacción débil), denota un factor importante en procesos tan significativos que van impresos desde la nucleosíntesis hasta el Fondo Cósmico de Microondas (CMB, por sus siglas en inglés).

Otro aspecto importante de los neutrinos es que estos se desacoplaron del plasma primordial a tiempos tempranos, con distribución de momentos aún relativista, mientras que hoy en día son no relativistas, por lo que no solamente contribuyeron como radiación en la historia del universo temprano, sino que, en épocas más recientes, lo hicieron como materia misma. En virtud de la masa que posea cada especie, esta transición del límite relativista al no relativista ocurrirá en un momento específico.

En pos de lo anterior, se han hecho esfuerzos en torno a entender los efectos impresos por neutrinos masivos en la estructura del universo, principalmente mediante el uso del ampliamente utilizado estadístico denominado espectro de potencias (PS), perteneciente al espacio de Fourier: por vez primera, [Hu et al., 1998] mostraron que sondeos de *redshift* de galaxias permiten estimar con cierta sensibilidad la masa de los neutrinos (masa total o absoluta M_ν de N especies de neutrinos débilmente interactuantes en el orden de eV), dado a través de una “huella” en la cola del espectro de la materia (supresión del PS o “*neutrino signature*”). Más tarde, en [Saito et al., 2008] se realiza el primer intento analítico de estudiar al PS de la materia a orden no lineal bajo teoría de perturbaciones, mismo que permite la mejoría en un factor de 2 con respecto al análisis lineal. La metodología del presente trabajo está inspirada en estas últimas nociones.

Así, el PS de la materia total (que incluye términos que surgen del espectro cruzado de materia-neutrinos y el espectro de potencias de neutrinos) se amortigua justo por debajo de la escala de *free streaming* en comparación con una cosmología de neutrinos sin masa. Gratamente, WL representa una vía que directamente es afectada por esta contribución total de materia, ya que el espectro de *lensing* (tanto de convergencia como *shear*) es escrito como una integral pesada por el espectro de materia total mismo, la cual incluye

²Los neutrinos se volvieron no relativistas después de la época de última dispersión, alrededor de $z \sim \mathcal{O}(10^2)$ (en dependencia de su masa). Desde ese entonces a la fecha, se comportan como HDM.

³Sus grandes velocidades térmicas impiden que los neutrinos puedan ser confinados por atracción gravitacional en regiones más pequeñas que k_{fs} . Esta escala depende de la velocidad térmica de los neutrinos, la cual, a su vez, depende de su masa (para masas típicas de los neutrinos, esta escala es del orden de $10 - 30 h^{-1} \text{Mpc}$), de tal manera que los neutrinos no pueden formar estructuras más pequeñas que la escala k_{fs} (a diferencia de CDM que forma estructura a todas las escalas).

las contribuciones tanto de materia oscura fría, como de bariones y neutrinos masivos.⁴

Bajo tal motivación, el presente trabajo es dispuesto de la siguiente manera:

El capítulo 1 se centra en los preliminares de muchos trabajos en cosmología (“*background cosmology*”), como lo es el Principio Cosmológico, las ecuaciones de movimiento, componentes y distancias cósmicas, y el tratamiento estadístico en cosmología (ecuación de Boltzmann). Asimismo, se refiere brevemente al estudio de las perturbaciones lineales en gravedad, para lo cual es necesario introducir la teoría de la inflación, para posteriormente hablar de manera general de los espectros lineales de potencias. Aunado a ello, una sección completa es destinada a las principales observaciones en cosmología a nivel descriptivo, terminando este primer capítulo con la introducción al formalismo necesario para entender WL, ahondando en su nomenclatura, conceptos básicos y el uso de catálogos fotométricos, como es el caso particular del *Legacy Survey of Space and Time*, LSST.

Para el capítulo 2, es dedicada la atención a los conceptos estadísticos necesarios para la comprensión del estudio de funciones de correlación (espacio real) y espectros de potencia (su contraparte en espacio de Fourier), así como los diversos tipos de estos espectros según las fuentes de información consideradas, siendo de particular interés el *lensing* gravitacional débil, información de la cual es deducida la estadística más importante de este trabajo: la función de correlación de *shear* cósmico.

Posteriormente, con respecto al capítulo 3, se explora un panorama genérico de la intervención de neutrinos ligeramente masivos en la cosmología, mencionando primeramente el escenario global de los neutrinos a través de un recuento histórico, hasta llegar a lo que se conoce al día de hoy. Seguido de ello, se describe la historia térmica del universo con los neutrinos como principal protagonistas, haciendo énfasis en su desacople del plasma primordial y más tarde su transición no relativista. Dentro de este contexto, se mencionan los escenarios y condiciones necesarias para considerar a los neutrinos como candidatos a materia oscura. Posteriormente, se rescata de manera breve la existencia del problema de ordenamiento de masas y su estatus actual. Finalmente, es de capital interés referir a los efectos directos de la existencia de neutrinos masivos en la formación de estructura a través del llamado *neutrino signature* referido anteriormente.

Bajo la necesidad de estudiar cosmología estadísticamente, el capítulo 4 introduce las ecuaciones de fluido requeridas para el estudio de las perturbaciones de materia a nivel estadístico, introduciendo los conceptos de la teoría analítica lineal y desarrollando un método para el régimen perturbativo (*Standard perturbation theory*). Códigos como el *Cosmic Linear Anisotropy Solving System* (CLASS) son requeridos para la solución numérica de las ecuaciones de las perturbaciones de los campos y la obtención de la función de crecimiento, transferencia y , y con ello, el espectro de potencias, razón por la que una última sección en este capítulo es dedicada a introducir las principales nociones de este código libre.

El capítulo 5 (y como parte del desarrollo principal del trabajo) se aboca a las dos objetivos centrales de este estudio: 1) a la construcción de un método numérico basado en

⁴Un universo con neutrinos masivos tendrá menos estructura que un universo con neutrinos sin masa. El cuánto es suprimida la estructura, depende de la abundancia cosmológica de los neutrinos masivos o, equivalentemente, de su masa. Entonces, al medir la supresión, es posible medir la masa de los neutrinos.

transformadas rápidas de Fourier sobre conjuntos de puntos espaciados logarítmicamente (conocido como *FFTLog*), con la finalidad de realizar de manera rápida integrales de línea de visión, lo cual es expuesto en la sección §5.1.1 y que conduce a las ecuaciones (5.38) y (5.39) para encontrar las funciones de correlación del *shear*;⁵ 2) la descripción del código computacional, llamado *WLnu*,⁶ desarrollado para la obtención de las funciones de correlación de *shear*, tanto para el régimen lineal como no lineal (perturbativo con correcciones a un *loop*), bajo la introducción de algunos parámetros cosmológicos de interés del modelo sin extensión Λ CDM (h y Ω_m), así como de un solo parámetro de modelo extendido, Ω_ν . Para ello, se escriben los pormenores de siete módulos de un código escrito en lenguaje *Python*, cuyo contenido principal radica en la aplicación del método numérico *FFTLog*, rutina de amplia mejoría en el tiempo de cómputo de largos procesos que involucran transformadas de Fourier.

A modo de discusión final y a nivel comparativo, el capítulo 6 muestra el grado de eficiencia del método *FFTLog* comparado al método estándar (resolución por integración directa) en términos del tiempo de cómputo, así como de las fluctuaciones entre ambos resultados (precisión del método numérico), mostrando que los valores obtenidos apenas se desvían del cálculo estándar e, inclusive, solventa de mejor manera los problemas de divergencia a grandes escalas angulares en el método tradicional. Asimismo, varios experimentos son realizados para diversos valores de los *inputs* (variación de parámetros de entrada), específicamente, variando la abundancia de materia Ω_m , la constante adimensional de Hubble h y, de principal importancia, la masa absoluta de los neutrinos, M_ν (suma de masas de todas las familias).

Finalmente, se exponen las principales conclusiones tras los experimentos realizados, exhibiendo principalmente la esperada supresión de las funciones de correlación ante presencia de neutrinos masivos y la amplia mejoría tras la implementación de un algoritmo *FFTLog* propiamente desarrollado, trascendiendo el régimen lineal, así como algunos de los aspectos de potencial mejoría en futuras investigaciones.

En el presente trabajo se asumen unidades naturales ($c = \hbar = k_B = 1$).

⁵Cabe decir que aunque llevan el mismo nombre, estos métodos son distintos a los que se han usado para calcular no linealidades de espectros de potencias [Chudaykin et al., 2020, Noriega et al., 2022b].

⁶El código es de libre acceso y se puede encontrar en el repositorio github.com/rafaelmoramore/WLnu.

Capítulo 1

Cosmología de fondo y observaciones

1.1. Cosmología homogénea e isotrópica

De acuerdo con *Science Team Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* de la NASA [Team, 2017], se define a la cosmología como el estudio científico de las propiedades a gran escala del universo como un todo. Esta rama de la física busca responder a las interrogantes sobre el origen, evolución y posibles destinos del universo.

El estudio de la cosmología fue construido sobre dos grandes pilares: por un lado, la Teoría de la Relatividad General de Albert Einstein, formalismo del cual surgen las ecuaciones de campo que brindan una interpretación de la gravitación, es decir, los efectos de curvatura en el espacio-tiempo debido a la presencia de masas; por el otro, el Principio Cosmológico, enunciado del cual parte el entendimiento a gran escala del Universo. A continuación se desglosan estas dos nociones.

1.1.1. Relatividad General y Principio Cosmológico

En 1915, A. Einstein publica la Teoría de la Relatividad General, concibiendo el concepto de gravedad ya no como el pensamiento newtoniano de una aceleración constante relativa a cuerpos masivos, sino como los efectos de la curvatura del espacio-tiempo debido a la presencia de masa en el mismo [Liddle, 2015]. Habiendo renovado esta idea, se abrió paso al estudio del universo ya no desde un aspecto clásico, sino a partir de formulaciones desde el punto de vista de la Geometría Diferencial.

Relatividad General (RG)

La Teoría de Einstein resulta imprescindible al momento de hacer cosmología; en palabras de d’Inverno, la cosmología como un estudio científico separado solo viene a la existencia con el advenimiento de la Relatividad General (RG) [d’Inverno, 1992].

Señalan también los autores Misner, Thorne y Wheeler: “La teoría de Einstein atrae el interés de muchos hoy en día porque es rica en aplicaciones [...]. La expansión del universo

es la más grande de todas las pruebas de la geometrodinámica,¹ y la cosmología la más grande de sus aplicaciones” [Misner et al., 2017].

A través de la RG, Einstein pretendía obtener una teoría que describiera la dinámica del universo mismo, por medio de una construcción que replanteara la concepción newtoniana y su idea de la gravedad. Esta misma se transformaría entonces en la curvatura de la tela espaciotemporal debido a la presencia de un cuerpo masivo. Según la interpretación previamente mencionada, las ecuaciones de campo de Einstein reproducen directamente este significado, brindando una relación entre la geometría del espacio-tiempo y la existencia de masa en él, visto a través de la expresión

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento (TEM) de materia (representando entonces el contenido material del universo y, posiblemente, de campos escalares según sea la teoría), $\kappa \equiv 8\pi G$ ($c = 1$) una constante física,² y $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein, dado por $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, definido vía el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ (dado como la contracción del tensor de Riemann i.e., $g^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha\nu\beta} = R_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu\beta} = R_{\mu\nu}$), su traza, el escalar de Ricci (también llamado escalar de curvatura, $R \equiv R_{\mu}{}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$), y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, tales que (1.1) satisface la ecuación de conservación $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$, por lo que, en consecuencia, $T_{\mu\nu}$ análogamente lo satisface también.

Es imprescindible notar de (1.1) que el miembro izquierdo de la igualdad refiere a conceptos puramente geométricos, mientras que el miembro derecho involucra toda la contribución de la materia-energía, por medio del tensor antes mencionado que considera los efectos de esta a través de su presión y densidad. Este hecho es aclarado con mayor exhaustividad en futuras líneas.

Principio cosmológico

Habiendo definido el propósito de la cosmología, es necesario establecer las condiciones a ser cumplidas (aproximaciones y suposiciones bajo la necesidad de modelar al universo como un todo) para poder hacerla reproducible. De acuerdo con Liddle, en principio, se busca tener la representación más simple y adecuada posible de la realidad. Esto es llevado a cabo a partir de suavizar todas las irregularidades en el espacio y en el tiempo y al centrarse simplemente en los grandes rasgos del universo.

Este hecho es sustentado por la hipótesis del Principio Cosmológico, el cual enuncia [d’Inverno, 1992]:

“En cada punto, el universo es (estadísticamente) homogéneo e isotrópico a gran escala”,

o bien, en palabras del *NASA/WMAP Science Team*:

¹Misner, et al. suelen usar el término geometrodinámica para aludir a la teoría de Einstein debido a la relación de este estudio con la capacidad de medir la dinámica de los cuerpos con relación a la geometría del espacio-tiempo mismo.

²En realidad, $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$. Sin embargo, es común utilizar unidades naturales, en donde algunas constantes fundamentales son reducidas a la unidad, como es ahora el caso, haciendo $c = 1$.

“La materia en el universo es en promedio homogénea e isotrópica a grandes escalas”.³

Es decir, si se considera a un observador en un punto arbitrario del espacio, este no distinguiría diferencia alguna de si estuviese ubicado en cualquier otro punto (homogeneidad) o si observara hacia cualquier otra dirección (isotropía): el Universo tiene la misma apariencia general observado desde cualquier lugar y hacia cualquier dirección.

Liddle hace hincapié en la siguiente aseveración: una condición no implica automáticamente la otra. Son independientes, así que no basta con afirmar una sola. La hipótesis del Principio Cosmológico no es más que la confirmación teórica de que la ubicación espacial de un elemento arbitrario en el cosmos no goza de privilegio alguno. Por ello, es común encontrarse con la afirmación de que nuestro lugar en el universo no es ninguno en especial.

Asimismo, el término “gran escala”, hace referencia a la convención existente (regla estándar) de, aproximadamente, 150 Mpc⁴ (la cual es típicamente en referencia al tamaño promedio de un cúmulo de galaxias; para [Peacock, 1999, Kolb and Turner, 2018, Liddle, 2015, Giunti and Kim, 2007] la convención en esta escala es establecida como excedente a los 100 Mpc), para la cual el Principio Cosmológico es válido: “solo una vez que estamos a escalas grandes, cientos de megapársecs o más, el Universo comienza a parecer suave” [Liddle, 2015].

1.1.2. Ecuaciones de movimiento de la cosmología de fondo

Métrica FLRW

Una de las principales nociones a considerar en el estudio de RG es el concepto de métrica, entendida como un elemento matemático matricial (tensorial) de medición de intervalo de espacio-tiempo. Se define al elemento de línea o intervalo espaciotemporal [Misner et al., 2017] como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

usando la convención de suma de Einstein y la signatura en la métrica⁵

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +), \quad (1.3)$$

mismas convenciones que se usarán a lo largo de este trabajo.

Nótese que la expresión anterior indica separación de eventos espaciotemporales que pueden presentarse en un escenario no plano, tal como hace énfasis Liddle: en RG interesa la distancia entre puntos en espacio-tiempo cuatridimensional, y se debe permitir también la posibilidad de que el espacio tiempo pueda estar curvado. Esta situación es resuelta al

³“The matter in the universe is homogeneous and isotropic when averaged over very large scales”. *Cosmological Principle*.

⁴El pársec (pc) es una unidad de medida astronómica equivalente a 3.2616 años luz, o bien, 3.0857×10^{16} m (es decir, del orden de miles de billones de metros).

⁵No confundir con al tensor métrico \mathbf{g} con las componentes del mismo, $g_{\mu\nu}$. Fuentes como [Wald, 2010] denotan indistintamente $\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2$.

considerar a la métrica como una función de las coordenadas espaciales para así poder describir espacios-tiempos curvos. Es posible imponerle un término de curvatura a la parte espacial del intervalo ds^2 sin que alguna parte se vea privilegiada respecto a otra. En un sistema de coordenadas esféricas, esto es visto como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2 dr^2}{1 - kr^2} + a^2 r^2 d\theta^2 + a^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1.4)$$

denominada la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, aludida comúnmente como FLRW (o simplemente FRW) por las siglas en alusión a las iniciales de sus autores, donde k en el término radial es conocido como la constante de curvatura. De este depende la geometría del Universo a modelar (las partes angulares no se ven afectadas).

Asimismo, se define al factor de escala $a(t)$, como aquella función que mide el ritmo de expansión entre un sistema coordenado comóvil (debido a la expansión misma) y uno fijo (físico), siendo que solo depende del tiempo coordenado t en virtud del Principio Cosmológico.

Ecuaciones de Friedmann

En RG, materia y campos son descritos por el TEM $T_{\mu\nu}$ [Wald, 2010] presente en (1.1). Para el caso de un fluido perfecto con cuadrivelocidad u^μ , entendiendo a este como una distribución continua de materia con densidad de energía ρ y presión asociada \mathcal{P} ,⁶ este tensor toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + \mathcal{P}(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) = (\rho + \mathcal{P})u_\mu u_\nu + \mathcal{P}g_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

En su forma mixta, el TEM bajo estas consideraciones adopta matricialmente la forma

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

en donde se observa que

$$T^0{}_0 = -\rho, \quad T^i{}_i = \mathcal{P} \text{ (sin suma sobre } i), \quad (1.7)$$

para la contribución temporal y espacial, respectivamente (*i.e.*, la aportación es idéntica para $i = 1, 2, 3$). Para el caso FLRW (1.4), considerando la ecuación (1.1) y el anterior resultado, surge⁷

$$G^0{}_0 + g^0{}_0 \Lambda = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{k}{a^2} - \Lambda = -\kappa\rho, \quad (1.8)$$

⁶En cosmología, es necesario describir al universo mediante esta concepción, en donde para cada punto con densidad ρ existe una presión $\mathcal{P}(\rho)$ asociada (asumiendo Principio Cosmológico, *i.e.*, homogeneidad e isotropía).

⁷Para ambas de estas expresiones resulta útil tomar la forma del escalar de Ricci como $R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right)$.

$$G^i_i + g^i_i \Lambda = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \Lambda = \kappa \mathcal{P}. \quad (1.9)$$

De la conservación del TEM, resulta

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \mathcal{P}) = 0, \quad (1.10)$$

la ecuación de continuidad de fluido perfecto, que en conjunto con (1.8) permiten escribir (haciendo explícitos los términos de la constante κ)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{6}(\rho + 3\mathcal{P}) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.12)$$

o más comúnmente en la literatura, mediante la definición

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.13)$$

conocida como la función de Hubble,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\mathcal{P}) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.15)$$

Las expresiones (1.14) y (1.15) son las ecuaciones de Friedmann [Carroll, 2019], también conocida la segunda de ellas como la ecuación de aceleración.⁸

Corrimiento al rojo y parámetro de densidad Ω

Es útil introducir el concepto de corrimiento al rojo z (o equivalentemente en su término anglosajón ya ampliamente adoptado, *redshift*) mediante

$$\nu_0 = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}\nu_e \quad (1.16)$$

para una señal lumínica (onda electromagnética con cierta longitud y, por ende, frecuencia) al tiempo de emisión t_e y uno de observación t_0 (a lo largo de este trabajo, la etiqueta “0” hace referencia a cantidades evaluadas u observadas hoy en día), con sus respectivos valores

⁸Las ecuaciones de movimiento en RG que describen la expansión métrica del espacio son conocidas como las ecuaciones de Friedmann, un conjunto de ecuaciones que halló Alexander Friedmann en 1922 al tratar una cosmología con homogeneidad e isotropía y para un fluido con densidad de energía ρ y presión \mathcal{P} (Carroll, 2019).

de frecuencias, en donde se suele adoptar la convención en el factor de escala $a_0 = a(t_0) = 1$ para el tiempo presente, de modo que

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \boxed{\frac{1}{a_e} \equiv 1 + z}. \quad (1.17)$$

Notar que $z(a_0) = 0$ y $z(a \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. En este sentido, el *redshift* z alude a una medida hacia atrás en el tiempo (mirada al cono de luz pasado), tal que se puede entender equivalentemente como una escala temporal.

Bajo lo anterior, es posible escribir la ecuación (1.14) en función de z y en términos de Ω_A , la abundancia del componente cósmico A , dada por

$$\Omega_A(a) = \frac{\rho_A(a)}{\rho_{cr}(a)}, \quad \Omega_A = \frac{\rho_A^0}{\rho_{cr}^0}, \quad (1.18)$$

donde $\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$ es la densidad crítica, entendida como la cantidad de energía necesaria para hacer al universo plano (*i.e.*, $k = 0$ en 1.14). Así, de (1.14) y usando la definición de ρ_{cr} ,

$$1 = \Omega_A(a) - \frac{k}{a^2 H^2} = \Omega_A(a) + \Omega_K(a), \quad (1.19)$$

con $\Omega_K(a) \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}$.

Fluido barotrópico y ecuación de estado

Las ecuaciones de Friedmann (1.14, 1.15) y la ecuación de continuidad de un fluido perfecto (1.10) en conjunto, resultan aún insuficientes para establecer un modelo cosmológico específico. Para ello, es necesario tratar al medio como un fluido barotrópico (*i.e.*, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$) tal que sea posible establecer una ecuación de estado de la forma

$$\mathcal{P} = w(\rho)\rho, \quad (1.20)$$

donde $w(\rho)$ parametriza a la ecuación de estado (de allí su nombre, parámetro de estado). Los escenarios más recurridos en la cosmología tienen al parámetro de la ecuación de estado w constante, por lo que esta puede escribirse como

$$\mathcal{P} = w\rho, \quad (1.21)$$

según el componente cósmico en estudio; estos son

Materia (polvo):

$$\mathcal{P} = 0 \Rightarrow w = 0,$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (1.22)$$

$$\rho_m = \frac{\rho_{m,0}}{a^3} = \rho_{m,0}(1+z)^3. \quad (1.23)$$

Radiación:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow w = \frac{1}{3},$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (1.24)$$

$$\rho_r = \frac{\rho_{r,0}}{a^4} = \rho_{r,0}(1+z)^4. \quad (1.25)$$

Constante cosmológica Λ :

$$\mathcal{P} = -\rho \Rightarrow w = -1,$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0, \quad (1.26)$$

$$\rho_\Lambda : \text{cte.}, \quad (1.27)$$

donde $\rho_{A,0}$ es la densidad del componente cósmico A hoy en día.

1.1.3. Distancias cósmicas

De (1.19) y haciendo uso de (1.23), (1.25) y del hecho de que la curvatura escala en (1.14) como $\frac{1}{a^2}$, se obtiene⁹

$$\begin{aligned} H(z) &= H_0 \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda} \\ &= H_0 \sqrt{\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

En (1.28) se han usado las abundancias (o parámetro de densidad al tiempo presente) Ω_A de cada componente cósmica, siendo Ω_m la abundancia de materia (tanto materia bariónica como oscura, *i.e.*, $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{\text{CDM}}$, a veces también referido el último sumando simplemente como Ω_c), Ω_r la de radiación (fotones, neutrinos y partículas relativistas) y Ω_Λ la componente de constante cosmológica (o bien, energía oscura). Resulta de gran importancia esta expresión, ya que permite estudiar la dinámica del universo mediante factores dependientes de la cosmología en su valor presente (Ω_A es constante) para un momento en específico, esto es, para un valor z dado. Este hecho, permite establecer la noción del cálculo de distancias en cosmología, desde un evento ocurrido en z el pasado hasta $z = 0$ (su observación en el presente).

Distancia radial comóvil

Definir distancias en un universo en expansión precisa consideraciones importantes. En principio, hay dos maneras de llevarlo a cabo: por un lado, considerar distancias en un marco que se mantenga fijo con la expansión (distancia comóvil, es decir, es independiente

⁹No confundir a la función de Hubble $H(t)$ (también llamada tasa de Hubble, *rate*) con la constante de Hubble $H_0 \equiv H(t_0)$, *i.e.*, la función de Hubble evaluada al tiempo presente t_0 , la cual es parametrizada como $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, mediante el parámetro (valga la redundancia) de Hubble h .

de los efectos de expansión del universo), o bien, considerar una distancia que se vea afectada por la expansión y, por ende, crezca debido a ella (distancia física, dependiente de la expansión) [Dodelson and Schmidt, 2020].

Es de particular interés el uso de la distancia que es comóvil con la expansión, misma que se proyecta en la dirección radial. Así, para una fuente lejana de luz, en un intervalo de tiempo dt , una señal emitida por esta viaja una distancia

$$d\chi = \frac{dt}{a}. \quad (1.29)$$

Se define entonces a la distancia radial comóvil [Dodelson and Schmidt, 2020] como aquella distancia comóvil total cubierta por la luz haciendo un recorrido desde un objeto distante al tiempo t (o desde un *redshift* z) hasta el punto de observación (el presente, t_0 , o bien, $z = 0$),¹⁰

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.30)$$

En este sentido, se dice que (1.30) considera una medición tras “congelar” la expansión.

Dado que el universo siempre se ha estado expandiendo, la función de Hubble es positiva a todo tiempo t , y la función $\chi(z)$ es monótona creciente. Entonces, es posible usar la distancia radial comóvil (1.30) como una escala temporal. Esto es muy común en el estudio de lentes gravitacionales débiles y así se hará subsecuentemente en este trabajo. En particular, el código computacional que se presenta en esta tesis usa esta variable “temporal” en algunos de sus cálculos. Dada su importancia, la distancia comóvil es graficada en la fig. 1.1 para distintos valores de Ω_m .

¹⁰Integrando (1.29) desde t hasta t_0 , se tiene

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_a^{a_0=1} \frac{da'}{a^2 H(a')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

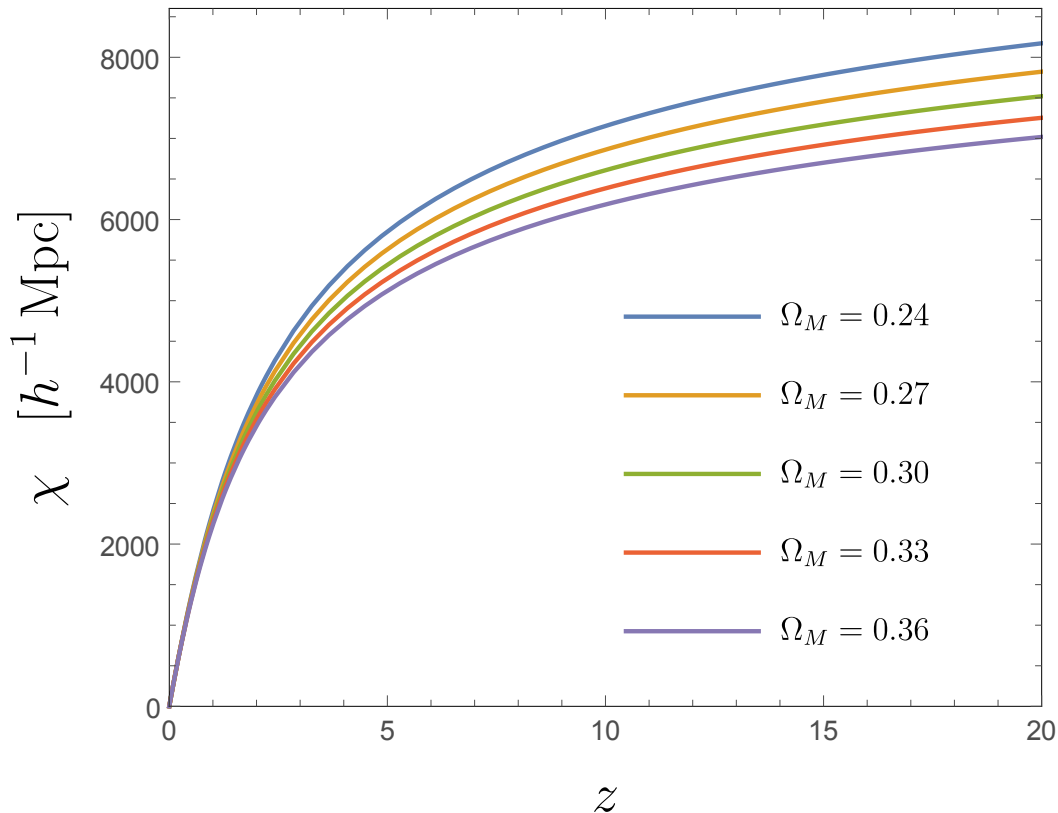


Figura 1.1: Distancia radial comóvil (1.30) como función del *redshift* para distintas cosmologías (variación de la abundancia de materia).

Distancia luminosa

La distancia radial comóvil también permite definir a la distancia luminosa

$$d_L(z) = (1+z)\chi(z), \quad (1.31)$$

entendida como la distancia asociada a la luminosidad absoluta de un objeto, en donde los fotones de esta fuente se ven afectados por el corrimiento al rojo, perdiendo energía en un factor de $\frac{1}{1+z}$ (difusión de energía por efecto Doppler), así como por la razón del número de fotones emitidos y recibidos (siendo el primero más grande) en un universo en expansión, introduciendo otro factor de $\frac{1}{1+z}$ (*clock slowing*: el flujo recibido al momento z en el pasado tiene un retardo de $1+z$).¹¹

Distancia angular

Asimismo, de (1.30) se define la distancia angular mediante el ángulo subtendido $\theta = \frac{L}{a} \frac{1}{\chi(z)}$ (bajo aproximación de espacio plano) en el que se posiciona un objeto de tamaño conocido

¹¹Esto es visto explícitamente solo cuando en (1.31) aparecen directamente los términos de luminosidad absoluta y flujo recibido, los cuales dependen de la cantidad de energía, tiempo y área.

L , siendo que la distancia está dada como $d_A = \frac{L}{\theta}$, *i.e.*,

$$d_A(z) = \frac{\chi(z)}{(1+z)}. \quad (1.32)$$

Las distancias luminosa (1.31) y angular (1.32) (ver fig. 1.2) son las más usadas en cosmología debido a que se les asocia con el uso de candelas estándar, por ejemplo en la medición de la luminosidad de supernovas, y con reglas estándar, como en la medición de la escala de las oscilaciones acústicas de bariones.

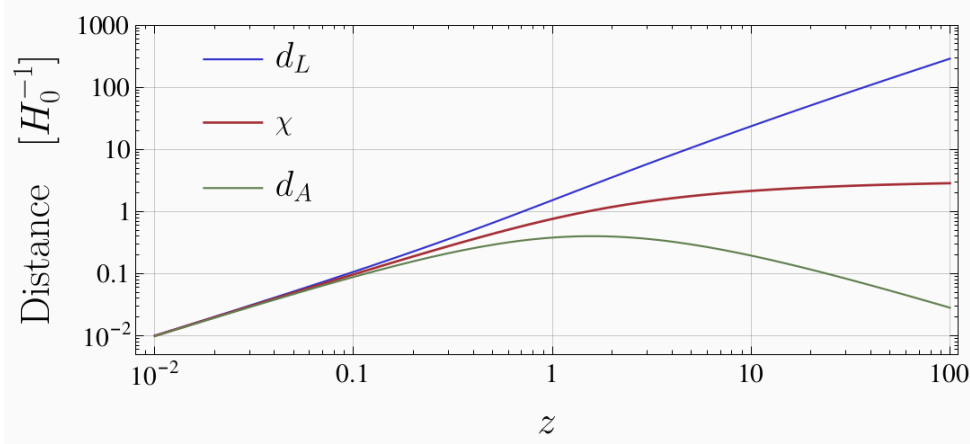


Figura 1.2: Distancias cósmicas como función del *redshift*. Notar que a bajos *redshift* las tres distancias coinciden. Figura extraída de [Aviles, 2022].

Con el propósito de poder asociar distancias comóviles con las observables, es común definir a la cantidad η mediante

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.33)$$

como la distancia comóvil máxima que una señal podría haberse propagado desde el comienzo del universo hasta un tiempo t arbitrario, tal que no existe información más allá de este horizonte que pudiese haberse propagado en la red coordinada (desconexión causal), de allí que también se le atribuya el nombre de horizonte de partícula u horizonte comóvil.

Cuando esta cantidad es medida desde el cero temporal en el que $\eta = 0$ (*e.g.*, el fin de la inflación, o bien, el tiempo en el que las ecuaciones de Friedmann indican $a(t) = 0$), se le conoce como tiempo conforme, definido entonces por $\eta = \int^t \frac{dt'}{a(t')}$. En términos generales, la definición (1.33) y el tiempo conforme comparten significado, pudiendo entenderlas como una variable temporal debido a su incremento monótono (se ahondará sobre estas nociones en §1.2.1). Adicionalmente, la distancia radial comóvil (1.30) y el tiempo conforme están

relacionados directamente mediante¹²

$$\chi(t) = \eta_0 - \eta(t), \quad (1.34)$$

siendo $\eta_0 \equiv \eta(t_0)$, es decir, el tiempo conforme hoy en día. De esta ecuación queda en mayor evidencia el uso de la distancia radial comóvil como variable temporal.

1.1.4. Ecuación de Boltzmann

Como se ha anticipado, el estudio de la cosmología, como una aplicación de la RG, se interesa por los aspectos gravitatorios (espaciotiempo) de la materia, mismos que conducen a la formación de estructura. Por otro lado, su estudio se apega también a los aspectos evolutivos del universo completo (no de partículas individuales, sino un conjunto de ellas), es decir, del comportamiento colectivo y estadístico de la materia, el cual es descrito vía la mecánica estadística [Dodelson and Schmidt, 2020]. Bajo esta premisa, la ecuación de Boltzmann resulta imprescindible en el tratamiento estadístico del universo. Para ello, es necesario considerar un conjunto de partículas ocupando cierta región del espacio, con posiciones \mathbf{x} , momento \mathbf{p} (clásicamente, el espacio fase) y a cierto tiempo t mediante una función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, de manera que el número de partículas en un elemento de espacio-fase¹³ alrededor de (\mathbf{x}, \mathbf{p}) es

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)(\Delta x)^3 \frac{(\Delta p)^3}{(2\pi)^3}. \quad (1.35)$$

Prescindiendo de la interacción entre partículas (exceptuando, por supuesto, la gravitación), el único campo de fuerzas de largo alcance proviene del campo de aceleración $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ definido por el potencial gravitacional Ψ (independiente del momento) como $\mathbf{a} = -\nabla\Psi(\mathbf{x}, t)$.

Es importante tener en cuenta que el número de partículas es conservado (con el elemento de volumen en espacio fase $(\Delta x)^3(\Delta p)^3$ constante a lo largo de las trayectorias en el espacio fase), por lo que se cumple así la ecuación de Boltzmann en ausencia de colisiones, o ecuación de Vlasov,

$$\frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{dt} = 0, \quad (1.36)$$

con $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_x + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_p$, de manera que se entiende que la tasa de cambio de la función de distribución está determinada por la cantidad de partículas transitando un elemento de volumen de espacio fase (mismo que se conserva).

¹²Para la distancia radial comóvil expresada en la variable t como $\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}$, se tiene

$$\chi(t) \equiv \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \underbrace{\int_0^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}}_{\eta(t_0)} - \underbrace{\int_0^t \frac{dt'}{a(t')}}_{\eta(t)} = \eta(t_0) - \eta(t).$$

¹³En el límite de un gran número de partículas (el cual es el caso de interés), f se aproxima a una función continua, tal que no deba seguirse tratando como la caracterización de partículas individuales.

Por otro lado, si se considera la interacción entre partículas, aparece el llamado término de colisión $C[f]$, en donde (1.36) no se satisface, es decir, f deja de conservarse, obteniendo

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (1.37)$$

En un universo homogéneo en expansión, la ecuación de Boltzmann tiene la forma¹⁴

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p \hat{p}^i}{E a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Hp \frac{\partial f}{\partial p} = C[f], \quad (1.38)$$

en donde se suelen tomar dos casos límites: para partículas relativistas (mismo que será de interés para el tratamiento de fotones y especialmente neutrinos, en donde $p \gg m$, $E \simeq p$) y no relativistas ($p \ll m$, *i.e.*, $E \simeq m$),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Hp \frac{\partial f}{\partial p} = C[f], \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p \hat{p}^i}{m a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Hp \frac{\partial f}{\partial p} = C[f], \quad (1.40)$$

respectivamente.

1.2. Perturbaciones lineales en RG

En la presente sección, se estudia al universo con pequeñas inhomogeneidades mediante el uso de la teoría de perturbaciones lineales alrededor de una métrica FRW usando RG. El interés es describir cómo se obtiene el espectro de potencias de materia a utilizar más adelante en el desarrollo del trabajo. Asimismo, en el capítulo 4, se estudiará el crecimiento de las perturbaciones de materia en el universo tardío usando teoría newtoniana, lo cual permitirá adentrarse en el régimen no lineal.

1.2.1. Universo inhomogéneo

En presencia de inhomogeneidades y bajo la aproximación de pequeñas desviaciones de la métrica FLRW (en donde el universo bajo una distribución suave requiere únicamente del factor de escala dependiente del tiempo $a(t)$), un universo perturbado está caracterizado por los potenciales (dependientes del tiempo y espacio) Ψ y Φ , de tal manera que la métrica satisface¹⁵

$$\begin{aligned} g_{00}(\mathbf{x}, t) &= -1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t) \\ g_{0i}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ g_{ij}(\mathbf{x}, t) &= a^2(t)\delta_{ij}[1 - 2\Phi(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \quad (1.41)$$

¹⁴Este es el caso de un universo FLRW, en donde la parcial en el segundo término es nula en realidad (sin cambio espacial debido a la homogeneidad); sin embargo, de manera general conserva tal forma, misma que será importante recuperar en el caso perturbativo.

¹⁵Notar que en ausencia de estos campos se recupera el caso estándar FLRW

siendo Ψ el potencial newtoniano que actúa en el régimen no relativista (movimiento de cuerpos de bajas velocidades) y Φ la perturbación de la curvatura espacial (corrección local al factor de escala, vista desde (1.41) como $a(t) \rightarrow a(\mathbf{x}, t) = a(t)\sqrt{1 - 2\Phi(\mathbf{x}, t)}$), ambas perturbaciones de la métrica g_{ij} dada.

Asimismo, también las cantidades referentes a los fluidos son perturbadas. El TEM se expresa como

$$T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}, \quad (1.42)$$

donde $\bar{T}_{\mu\nu}$ se refiere al tensor de energía en un universo homogéneo e isotrópico y $\delta T_{\mu\nu}$ a la parte perturbada. Una cantidad que será muy usada en el resto del trabajo es la “sobredensidad” δ , definida a partir de la componente 00 (temporal) del tensor de energía momento $\rho = -T^0_0$ comparando sus partes perturbadas y de fondo

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}. \quad (1.43)$$

En general, podemos escribir el tensor de energía momento en términos de la función de distribución como [Ma and Bertschinger, 1995]

$$T_{\mu\nu} = \int dP_1 dP_2 dP_3 (-g)^{-1/2} \frac{P_\mu P_\nu}{P^0} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.44)$$

con P^μ el cuádrimomento de los elementos de fluido, y el momento espacial (aquel sobre el cual está definido el espacio-fase) $p^i = p \hat{p}^i$ con $p = g_{ij} P^i P^j$. Además, g el determinante del tensor métrico, por lo que $(-g)^{-1/2} = a^{-4}(1 - \Psi + 3\Phi)$ y $P^0 = E(1 - \Psi)$ con $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ la energía de un elemento de fluido definida en las hipersuperficies de tiempo cósmico t o conforme η constante.

Dada la escasa magnitud de las perturbaciones (menor que el orden de 10^{-4}), resulta propicio trabajar bajo esta aproximación como un caso dentro del régimen lineal. Así, la ecuación de Boltzmann (sin término de colisión) para especies no masivas (radiación) y masivas, respectivamente, es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{1}{a} \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f}{\partial p} \quad (1.45)$$

y

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{E}{ap} \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (1.46)$$

bajo algunas simplificaciones en virtud de las características de independencia de f en la dirección \hat{p}^i y restringiendo hasta orden lineal las perturbaciones.

Debido al interés en las anisotropías en la distribución de fotones e inhomogeneidades en la materia, se requiere resolver una ecuación de Boltzmann para cada especie, considerando dependencia espacial y direccional de la función de distribución. En cuanto a las posibles interacciones existentes en este contexto, tomarán parte tanto los efectos gravitacionales como la dispersión Compton de fotones con electrones libres.

En particular, serán consideradas cuatro componentes cósmicas o especies de partículas: fotones, materia oscura fría, bariones y neutrinos, habiendo una ecuación de Boltzmann para cada una (según sea el caso, debido a las diferentes propiedades y comportamientos que manifiestan). A modo de síntesis, la ecuación de Boltzmann para cada especie (las cuales serán requeridas posteriormente) es mostrada a continuación.

Fotones

La función de distribución perturbada para fotones puede ser escrita como

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \left[\exp \left(\frac{p}{T(t)(1 + \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t))} \right) - 1 \right]^{-1} = f^{(0)} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta, \quad (1.47)$$

donde $f^{(0)}$ es la distribución de Bose-Einstein, que es homogénea e isotrópica, e introduciendo una perturbación a la temperatura

$$\Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t). \quad (1.48)$$

Usando un término de colisión debido a dispersión electromagnética Compton, de la ecuación de Boltzmann (1.38) se obtiene [Dodelson and Schmidt, 2020]

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau' [\Theta_0 - \Theta + \mu u_b], \quad (1.49)$$

en términos del tiempo conforme η (denotando $'$ la derivada $\frac{d}{d\eta}$), $\mu \equiv \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{k}$ (coseno del ángulo entre el vector de onda y la dirección del momento $\hat{\mathbf{p}}$ de los fotones), de la velocidad global (longitudinal) u_b de los electrones (b indica que es la misma que la de los bariones), el monopolo $\Theta_0(x, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{\mathbf{p}}', x, t)$ y la “profundidad óptica” $\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a$ (tal que en tiempos tardíos cuando la densidad de electrones libres n_e es pequeña, $\tau \ll 1$, mientras que muy temprano ocurre lo contrario; además, $\tau' = -n_e \sigma_T a$), donde se usa la sección eficaz de Thomson $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$.

Materia oscura fría

La materia oscura solo interacciona gravitacionalmente con las demás partículas del universo. Para la fluctuación de densidad de esta componente δ_c (de *cold dark matter*), sus ecuaciones de fluido son

$$\delta_c' + ik u_c + 3\Phi' = 0, \quad (1.50)$$

$$u_c' + \frac{a'}{a} u_c + ik\Psi = 0, \quad (1.51)$$

en donde se ha utilizado la densidad de número de materia oscura (referida en texto como DM y en ecuaciones con el subíndice c)

$$n_c = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c \quad (1.52)$$

y se define la velocidad peculiar de fluido

$$u_c^i \equiv \frac{1}{n_c} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p \hat{p}^i}{E(p)}. \quad (1.53)$$

Bariones

Considerando la sobredensidad de bariones como el valor común de densidad de protones y electrones acoplados

$$\frac{\rho_e - \bar{\rho}_e}{\bar{\rho}_e} = \frac{\rho_p - \bar{\rho}_p}{\bar{\rho}_p} \equiv \delta_b \quad (1.54)$$

con velocidades comunes $u_e = u_p = u_b$. Tomando los momentos de la ecuación de Boltzmann para δ_b y u_b nos lleva, respectivamente, a la ecuación de momento cero

$$\delta'_b + ik u_b + 3\Phi' = 0 \quad (1.55)$$

y a la de primeros momentos

$$u'_b + \frac{a'}{a} u_b + ik\Psi = \tau' \frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b} [3i\Theta_1 + u_b], \quad (1.56)$$

en donde se ha introducido el *dipolo* como $\Theta_1(k, \eta) \equiv i \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu \Theta(\mu, k, \eta)$

Neutrinos

Para la función de distribución $f_\nu(x, p, t)$ de neutrinos relativistas a tiempos tempranos y en equilibrio a temperatura $T_\nu(a)$ a orden cero, se tiene

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \left[\exp \left(\frac{p}{T(t)(1 + \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta))} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (1.57)$$

donde la perturbación de su distribución en términos de la perturbación de temperatura $\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta)$ que permite escribir, cuando esta es pequeña,

$$f_\nu = \left[1 - \mathcal{N} p \frac{d}{dp} \right] f_\nu^{(0)}(p), \quad (1.58)$$

con $f_\nu^{(0)}(p) = [e^{p/T_\nu} + 1]^{-1}$ la función de distribución de Fermi-Dirac.

Desde el desacople de neutrinos, cualquier interacción no gravitacional es despreciable, por lo que la ecuación de Boltzmann se expresa sin colisiones, y a primer orden es

$$\mathcal{N}'(k, p, \mu, \eta) + ik\mu \frac{p}{E_\nu(p)} \mathcal{N} - Hp \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{N} = -\Phi' - ik\mu \frac{E_\nu(p)}{p} \Psi. \quad (1.59)$$

Perturbaciones gravitacionales escalares y tensoriales

El estudio de las inhomogeneidades a través de las ecuaciones de Boltzmann, teniendo en cuenta los efectos gravitacionales, conlleva la pregunta: ¿cómo afectan las perturbaciones en la distribución de partículas a estos campos gravitacionales? (es decir, la relación inversa, y ya no solo a nivel de distribución de partículas en sí mismas, sino de sus perturbaciones), para lo cual es necesario considerar las ecuaciones de Einstein del caso homogéneo en §1.1.2, haciendo ahora una expansión perturbativa a orden lineal (como se anticipaba similarmente en (1.41), en donde se tomó el caso particular de norma conformemente

newtoniano, pero que resulta insuficiente para describir el efecto gravitacional completo) alrededor de la solución homogénea (orden cero).

A través de la descomposición

$$\begin{aligned} g_{00}(\mathbf{x}, t) &= -1 - h_{00}(\mathbf{x}, t) \\ g_{0i}(\mathbf{x}, t) &= a(t)h_{0i}(\mathbf{x}, t) \\ g_{ij}(\mathbf{x}, t) &= a^2(t) [\delta_{ij} + h_{ij}(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \quad (1.60)$$

donde $h_{\mu\nu}$ representa las perturbaciones de la métrica dependientes del espaciotiempo, cuyas componentes se asumen de magnitud lo suficientemente pequeñas comparadas con la parte no perturbada,¹⁶ y acorde al comportamiento que adoptan las perturbaciones bajo rotaciones espaciales, se obtiene un desacople de perturbaciones a nivel escalar, vectorial y tensorial, las cuales resultan evolucionar independientemente unas de otras a orden lineal.

Así, al tomar las dos componentes (temporal y espaciales) de las ecuaciones de Einstein (1.1) para el caso particular de la métrica FLRW perturbada (1.41), se tiene¹⁷

$$G^0_0 = g^{00} \left[R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \right] = (-1 + 2\Psi)R_{00} - \frac{R}{2} \quad (1.61)$$

$$G^i_j = g^{ik} \left[R_{kj} - \frac{1}{2}g_{kj}R \right] = \frac{\delta^{ik}(1 + 2\Phi)}{a^2} R_{kj} - \frac{\delta^i_j R}{2}. \quad (1.62)$$

con las componentes inversas de la métrica $g^{00} = -1 + 2\Psi$ y $g^{ij} = a^2\delta^{ij}(1 + 2\Phi)$.

Así, de (1.61, 1.62), respectivamente, se llega a las ecuaciones que describen la evolución de las perturbaciones escalares de la métrica, Φ y Ψ , las cuales son, en espacio de Fourier (por simplicidad es común transformar del espacio real al espacio de Fourier, formalismo del cual se hará mayor énfasis posteriormente, poniendo detalle en las convenciones usadas para su notación), que son

$$-k^2\Phi - 3\frac{a'}{a} \left(\Phi' + \Psi \frac{a'}{a} \right) = 4\pi G a^2 [\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}], \quad (1.63)$$

$$k^2(\Psi - \Phi) = -32\pi G a^2 \rho_r \Theta_{r,2}, \quad (1.64)$$

en donde, una vez más, el subíndice m alude tanto a materia bariónica como oscura, mientras que r indica términos de radiación tales como fotones y neutrinos.

¹⁶En general, la descomposición tiene la forma (1.60). En (1.41) se ha asumido a $h_{\mu\nu}$ como $h_{00} = 2\Psi$, $h_{0i} = 0$ y $h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij}$.

¹⁷En este caso, las componentes del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\Psi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} + 2\Phi_{,0}), \\ R_{ij} &= \delta_{ij} [(2a^2H^2 + \ddot{a}a)(1 - 2\Psi - 2\Phi) - a^2H(\Psi_{,0} + 6\Phi_{,0}) - a^2\Phi_{,00} - k^2\Phi] + k_ik_j(\Psi - \Phi). \end{aligned}$$

1.2.2. Inflación

A continuación se discute de manera sucinta el escenario más aceptado para obtener las condiciones iniciales del universo (a nivel de las ecuaciones de Boltzmann). Este escenario es genericamente llamado teoría de inflación, y provee del espectro de potencias primordial de las perturbaciones al campo gravitacional, el cual es modulado por funciones de transferencia para obtener los espectros de potencia lineales de las distintas componentes de materia que serán usados más adelante. No es del interés particular de este trabajo el estudiar los sutiles pormenores dentro de esta teoría (posible origen, motivación de su propuesta, detalles técnicos y matemáticos), sino dar justificación con las perturbaciones iniciales a la estructura en la que más tarde evolucionarían, haciendo especial hincapié, como se ha dicho, en el noción del espectro de potencias desde el punto de vista de la inflación.

Para resolver las ecuaciones de Boltzmann, este conjunto de condiciones iniciales es requerido, mismo que puede obtenerse tras entender etapas de la evolución temprana del universo, *i.e.*, la inflación. Este concepto, estudiado por Guth [Guth, 1981], Linde [Linde, 1982], Starobinsky [Starobinsky, 1982], Albrecht y Steinhardt [Albrecht and Steinhardt, 1982] como algunos de sus pioneros, no solo explicaría tan alta homogeneidad a grandes escalas (uniformidad en la temperatura) en un espacio sin causalidad aparente, sino que también remite al origen de las perturbaciones en el universo, las cuales serían las *semillas* de la estructura. Dichas condiciones iniciales para la formación de estructura se predicen gaussianas, adiabáticas y cercanas a la invariancia escalar.

Según Dodelson y Schmidt, se entiende a la inflación como la época de aceleración temprana que resuelve los del modelo estándar cosmológico en el universo primigenio, tal como lo es el problema del horizonte. Las condiciones con las que contó este periodo fueron tales que el universo consiguiente estuviera conectado causalmente y, por ende, termalizado a tan gran nivel de homogeneidad como se conoce hoy en día. Para entender esta noción, es pertinente remitir a la ecuación (1.33), en donde haciéndola una integral sobre el factor de escala con el cambio de variable de integración de t' a $\ln a'$, de manera que se obtenga

$$\eta(a) = \int_0^a d \ln a' \frac{1}{a' H(a')}, \quad (1.65)$$

la integral logarítmica del radio comóvil de Hubble, $\frac{1}{aH}$ distancia sobre la cual la luz viaja en el curso de un tiempo de expansión, siendo que al tener caracter exponencial en inflación, es en el tiempo en el cual el factor de escala incrementa por un factor de e . Esta idea permite introducir el concepto de un e -fold de expansión¹⁸. En términos de e -folds, si la función de Hubble fuera constante, la expansión sería exponencial en el tiempo, requiriendo expandirse en el orden de 60 e -folds.

En este sentido, se dice que el radio de Hubble recibe grandes contribuciones de regiones capaces de termalizar por encima del tamaño del horizonte comóvil, es decir, existen señales que salen del horizonte durante esta época.

¹⁸En inflación, el factor de escala crece de forma exponencial en un factor de e^N . Al número N se le conoce como e -fold [Piattella, 2018].

Así, para el tiempo del fin de la inflación t_e como punto de partida, se recupera (1.33), ya que la forma (1.65) carece de sentido para referir a un parámetro temporal para instancias posteriores a la inflación. En añadidura, la definición (1.33) implicaría valores negativos de η .

De la condición de adiabaticidad (igualdad de de las perturbaciones fraccionarias en cada una de las especies participantes) de las perturbaciones en inflación, las condiciones para la ecuación de Boltzmann (la cual permite ahora relacionar a la perturbación del potencial Ψ con el resto de variables perturbadas) quedan establecidas.

Modos perturbativos en el horizonte

De las ecuaciones (1.49 - 1.59), para tiempos tempranos después del final de inflación ($\eta > 0$ pequeño), tales que se satisfaga

$$k\eta \ll 1, \quad (1.66)$$

lo que es equivalente a $\frac{k}{aH} \ll 1$, se obtiene que los términos en la ecuación de Boltzmann, multiplicados por k , son despreciables a tiempos tempranos (de la misma manera que ocurre para u_b y Π), es decir, que todas las perturbaciones tienen longitudes de onda mucho mayores que las escalas de causalidad. Dicho lo anterior, se tiene que las perturbaciones a la temperatura de los fotones y neutrinos satisfacen

$$\begin{aligned} \Theta'_0 + \Phi' &= 0 \\ \mathcal{N}' + \Phi' &= 0, \end{aligned} \quad (1.67)$$

mientras que para la sobredensidad se tiene

$$\begin{aligned} \delta'_c &= -3\Phi' \\ \delta'_b &= -3\Phi', \end{aligned} \quad (1.68)$$

siendo que se sigue la misma ecuación para materia bariónica que oscura debido al predominante efecto gravitacional que actúa sobre ambas especies.

Por otro lado, de las ecuaciones obtenidas (1.63), a tiempos tempranos y expresada en función del tiempo conforme η

$$3\frac{a'}{a} \left(\Phi' - \frac{a'}{a} \Psi \right) = 16\pi G a^2 \rho_r \Theta_{r,0}, \quad (1.69)$$

en donde la radiación es dominante y $a \propto \eta$, de modo que $a'/a = aH = 1/\eta$, por lo que, de la ecuación de Friedmann,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'}{\eta} - \frac{\Psi}{\eta^2} &= \frac{16\pi G \rho^2}{3} \Theta_{r,0} = \frac{2}{\eta^2} \Theta_{r,0} \\ \Rightarrow \Phi''\eta + \Phi' - \Psi' &= -2\Phi', \end{aligned} \quad (1.70)$$

mientras que de la segunda ecuación de Einstein

$$\Phi''\eta + 4\Phi' = 0, \quad (1.71)$$

en donde se estableció $\Psi = -\Phi$.

Bajo el ansatz $\Phi = \eta''$, la ecuación consiguiente $p(p-1) + 4p = 0$ tiene como soluciones un modo decadente ($p = -3$) y $p = 0$ no decadente bajo excitación, el cual sostiene la relación $\Phi = 2\Theta_{r,0}$ e implica que $\Theta_{r,0}$ es constante, y para perturbaciones adiabáticas,

$$\Phi(\mathbf{k}, \eta_0) = 2\Theta_0(\mathbf{k}, \eta_0). \quad (1.72)$$

Análogamente, de (1.67) y (1.68) se obtiene

$$\delta_c(\mathbf{k}, \eta) = 3\Theta_0(\mathbf{k}, \eta). \quad (1.73)$$

En cuanto a las condiciones iniciales para la velocidad y momentos dipolares de la materia y radiación, se cumple

$$\Theta_1(\mathbf{k}, \eta) = \mathcal{N}_1(\mathbf{k}, \eta) = \frac{iu_b(\mathbf{k}, \eta)}{3} = \frac{iu_c(\mathbf{k}, \eta)}{3} = -\frac{k}{6aH}\Phi(\mathbf{k}, \eta). \quad (1.74)$$

En virtud de lo anterior, la ecuación para la perturbación de curvatura¹⁹ en escalas más allá del horizonte es

$$\mathcal{R} = -\frac{3}{2}\Psi. \quad (1.76)$$

La importancia de inflación en la cosmología remite, además de dar solución a problemas del modelo de concordancia como los de planitud y horizonte, a dar explicación al mecanismo por el cual se generan las perturbaciones primordiales. Asimismo, Dodelson y Schmidt afirman que la inflación predice que estas perturbaciones cuánticas en el universo temprano son originadas cuando las escalas relevantes están causalmente conectadas. De esta manera, “estas escalas son arrastradas fuera del horizonte por la inflación”, y vuelven a entrar mucho más tarde para fungir como las condiciones iniciales para el crecimiento de la estructura en el universo.

Las perturbaciones resultan tener una mejor descripción en términos de sus modos en el espacio de Fourier (de hecho, anticipadamente, todas las expresiones para las ecuaciones de Boltzmann antes definidas, han sido escritas ya en términos de modos trasladados al espacio de Fourier). Tales formalismos serán propiamente definidos en el capítulo 2. Sin embargo, desde ahora se anticipa que la estadística más importante en cosmología (tanto en CMB como estructura a gran escala, LSS) es la función de correlación de dos puntos, la cual, al ser medido usando campos en espacio de Fourier, es llamado “espectro de potencias” (o bien, *power spectrum*, aludido en la introducción como PS) $P(k)$, el cual, para el caso de interés presente, se expresa como la varianza no nula del potencial gravitacional para un par de modos dados

¹⁹Se define, en general, a la perturbación de curvatura \mathcal{R} como

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \eta) \equiv \frac{ik_i \delta T_0^i(\mathbf{k}, \eta) a^2 H(\eta)}{k^2 [\rho + \mathcal{P}](\eta)}. \quad (1.75)$$

Este concepto ayuda a ligar la noción de perturbaciones de la métrica y de la densidad de energía.

$$\langle \Phi(\mathbf{k})\Phi^*(\mathbf{k}') \rangle = P_\Phi(k)(2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.77)$$

(con $\delta_D^{(3)}$ la distribución delta de Dirac en tres dimensiones), siendo este el primer momento en aparecer que resulta distinto de cero, ya que $\langle \Phi(k) \rangle = 0$.

Espectro de perturbaciones en inflación

En la época cosmológica actual, las perturbaciones escalares originadas en inflación son parametrizadas en términos del espectro de potencias de la perturbación de curvatura invariante de norma \mathcal{R} (1.75), la cual, como su nombre lo indica, es invariante sin importar la época de dominio (materia o radiación), siendo que se escribe

$$P_{\mathcal{R}}(k) \equiv 2\pi^2 \mathcal{A}_s k^{-3} \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n_s-1}, \quad (1.78)$$

con \mathcal{A}_s la amplitud de la perturbación²⁰, una medida de la varianza de la perturbación de curvatura en un intervalo logarítmico de número de onda, centrado alrededor de una escala pivote k_p , mientras que n_s es el llamado índice espectral escalar.

1.3. Espectros lineales de potencias: perturbaciones a orden lineal

Una vez establecidas las ecuaciones (Boltzmann) y las condiciones iniciales (dadas por inflación), es posible calcular las inhomogeneidades y anisotropías de las distintas componentes cósmicas, principalmente centrados en las perturbaciones del sector de DM (la perturbación de densidad δ_c y su velocidad u_c), las cuales están acopladas al resto únicamente por interacción gravitacional.²¹ Con el objetivo de obtener el espectro de potencias completo de la materia (es decir, la evolución de cada modo de Fourier), es necesario tener la solución de los modos perturbados y el estado inicial de inflación con el cual comienzan para poder predecir su evolución.

Acercas de las condiciones al comienzo del universo, tres factores son de relevante importancia en ello: en primer lugar, la inestabilidad gravitacional; sutiles regiones de sobre-densidad de materia inicialmente acumuladas fueron la principal razón de la formación de estructura con el paso del tiempo a través de la edad del universo, aún siendo inicialmente muy pequeñas. Aunado a ello, en segundo lugar, la expansión, la cual ralentizaba el crecimiento de estructura. Por último, la presión ejercida por bariones y fotones, la cual incrementa en proporción a la densidad de estas especies, hace tender al gas a moverse en

²⁰Las mediciones más precisas a la fecha en las anisotropías de la radiación cósmica de fondo constriñen a la amplitud escalar $\mathcal{A}_s = \frac{k_p^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k_p)$ en el rango $\log(10^{10}\mathcal{A}_s) = 3.047 \pm 0.014$ (*i.e.*, aproximadamente del orden $\simeq 2.1 \times 10^{-9}$) y al índice espectral en $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$, a una escala pivote $k_p = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$; véase tabla 4 de [Aghanim et al., 2020b].

²¹A tiempos tardíos, los potenciales Φ, Ψ dependen muy poco de la radiación, debido al dominio de materia en esa época, mientras que para tiempos tempranos los únicos momentos relevantes son el monopolo y el dipolo.

la dirección opuesta a la que se encuentran estas partículas, buscando la región de menor presión (*i.e.*, “una sobredensidad de bariones no acumula materia tan rápidamente como una de DM, debido a que la presión –que es mayor comparada a la del entorno– tiende a ralentizar o frenar el flujo de gas entrante” [Dodelson and Schmidt, 2020].²²

La evolución del potencial gravitacional se puede comprender bajo tres etapas: en tiempos tempranos, cuando los modos están fuera del horizonte ($\eta > 0$ después de inflación, $k\eta \ll 1$) y el potencial es constante; en tiempos intermedios cuando los modos entran al horizonte y el universo transita de dominio de radiación a materia (los modos de escalas pequeñas antes de la época de igualdad radiación-materia y los de grandes escalas después); en tiempos tardíos, donde todos los modos evolucionan idénticamente, manteniéndose constantes hasta el dominio de energía oscura. En esta última etapa la distribución de materia es predominante.

La evolución del potencial está relacionada con la perturbación de curvatura primordial \mathcal{R} mediante dos funciones importantes en la literatura referente al crecimiento de estructura, la función de transferencia y el factor de crecimiento, esto es a través de la ecuación

$$\Phi(k, a) = \frac{3}{5} \mathcal{R}(k) T(k) \frac{D_+(a)}{a}, \quad (1.79)$$

siendo $T(k) \equiv \frac{\Phi(k, a_{\text{late}})}{\Phi_{\text{large-scale}}(k, a_{\text{late}})}$ la función de transferencia, definida como el cociente del potencial en una escala arbitraria y a grandes escalas, y $D_+(a)$ la función (o factor) de crecimiento, la cual, para dominio de materia, adopta la forma $D_+(a) = a$. Más adelante (§4.2) se verá la ecuación precisa de esta función de crecimiento a tiempos tardíos.

Esta evolución en el potencial determinará la forma en la que evolucionen también las sobredensidades: para tiempos tardíos, la sobredensidad de DM evoluciona como $\delta_c(k, a) \propto D_+(a)$ y crece con el tiempo aún cuando Φ es constante (de allí el nombre). Por supuesto que la DM no representa la única forma de materia (aunque sí la mayoría), sin embargo, a tiempos tardíos, los bariones siguen a la materia oscura debido a la gravedad, siendo que se expresa de manera conjunta a ambas especies (de hecho, a cualquier tipo de especie de masa) como δ_m . Dicha sobredensidad de materia, está relacionada a los términos introducidos en (1.79) para tiempos tardíos vía la ecuación de Poisson en el límite de grandes k y en ausencia de radiación

$$k^2 \Phi(k, a) = 4\pi G \rho_m(a) a^2 \delta_m(k, a) \quad (k \gg aH), \quad (1.80)$$

$$\Rightarrow \delta_m(\mathbf{k}, a) = \frac{2}{5} \frac{k^2}{\Omega_m H_0^2} \mathcal{R}(k) T(k) D_+(a). \quad (1.81)$$

De este modo, de (1.78), el espectro de la materia a tiempos tardíos toma la forma

$$P_L(k, a) = \frac{8\pi^2}{25} \frac{\mathcal{A}_s}{\Omega_m^2} D_+^2(a) T^2(k) \frac{k^{n_s}}{H_0^4 k_p^{n_s-1}}. \quad (1.82)$$

Obteniendo solución al sistema lineal de Einstein - Boltzmann para DM (permitiendo así simplificar el tratamiento de bariones y radiación), se da lugar a resultados según dos

²²Recordar que DM no emite presión de radiación por su carácter electromagnético “oscuro”.

casos particulares: en modos a gran escala (entrantes en dominio de materia) y modos a pequeñas escalas (entrantes en dominio de radiación), siendo que, en dominio de radiación, las perturbaciones de radiación oscilan como ondas sonoras estacionarias y las de materia oscura crecen logarítmicamente, mientras que posteriormente en dominio de materia, las perturbaciones de DM crecen proporcionales al factor de escala.

Para ello, es importante mencionar que, como se anticipó, a tiempos tempranos (antes de la recombinación $a = a_*$), la distribución de fotones es caracterizada solo por los primeros dos momentos Θ_0, Θ_1 , siendo que el resto son suprimidos ya que los fotones están fuertemente acoplados al plasma; después del desacople esto deja de ser cierto, pero en dominio de materia es irrelevante para la distribución de materia cómo esté la distribución de fotones. Por esto, el potencial al ser dominado por efectos de DM, se remite únicamente a efectos del monopolo y dipolo, donde además se desprecian los momentos de orden mayor para neutrinos de igual manera, situación que permite unificar en el mismo par de momentos ambos efectos radiativos (fotones y neutrinos) en los momentos denotados por $\Theta_{r,0}, \Theta_{r,1}$ de radiación total, volviendo idénticas las ecuaciones de Boltzmann para ambas especies, de tal modo que son combinadas.

Cabe señalar que la presencia de neutrinos masivos afecta la descomposición del espectro de potencias de materia en la forma (1.82), es decir, en términos de una función de transferencia y un factor de crecimiento, para escalas más pequeñas que el llamado *free-streaming* de neutrinos ($k \geq k_{fs}$), haciendo a D_+ dependiente de la escala y a $T(k)$ dependiente del tiempo [Dodelson and Schmidt, 2020].

1.4. Observaciones

Exitosas observaciones en los últimos años han significado un indispensable sustento de lo que hoy se conoce y considera correcto sobre el universo; las principales son: la expansión de Hubble [Hubble, 1929], *Big Bang* nucleosíntesis y la abundancia existente de elementos ligeros [Alpher et al., 1948], la estructura a gran escala [Peebles, 2020] y el fondo cósmico de microondas (o radiación cósmica de fondo, mejor conocida como CMB por sus siglas en inglés) [Smoot et al., 1992].

Como se abordó en §1.1.1, más específicamente en (1.1), geometría y energía están íntimamente relacionadas, de modo que la densidad de energía total en el universo ρ_T determina la geometría, teniendo tres posibles casos: universo cerrado (esférico), abierto (hiperbólico) o euclidiano (plano). Si esta densidad es mayor (menor) que la densidad crítica ρ_{cr} (vista en §1.1.2), el universo será cerrado (abierto). Sin embargo, observaciones indican que el universo actualmente tiene un valor de densidad total muy cercano al crítico [Dolgov and Kawasaki, 2003], resultando así en el caso de planitud geométrica.

Expansión de Hubble

Fue descubierto en 1929 que el universo sufre una expansión (hoy se sabe es además acelerada), provocando que a gran escala los objetos se alejen (por efectos de gravedad, esto solo ocurre a escalas fuera de los cúmulos de galaxias) [Hubble, 1929]. El ritmo de

expansión es determinado mediante la medición de la velocidad de recesión de galaxias distantes con respecto a la posición del observador, de manera que suele escribirse en unidades de velocidad sobre distancia. La función que permite establecer la tasa de esta expansión se conoce como función de Hubble o tasa de Hubble dependiente del tiempo $H(t)$, siendo la constante de Hubble la función evaluada hoy en día, es decir, $H_0 \equiv H(t_0)$. Esta última, a su vez, es comúnmente parametrizada como

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (1.83)$$

donde h es llamada constante de Hubble adimensional. De hecho, su valor se encuentra actualmente bajo discrepancia. Este es el famoso problema de la tensión en H_0 [Verde et al., 2019]. Asumiendo el modelo base Λ CDM y según los resultados finales de la misión completa de Planck 2018, la constante de Hubble tiene un valor de $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [Aghanim et al., 2020a]. Sin embargo, usando mediciones del universo tardío, se obtienen valores significativamente más altos. Por ejemplo, el caso de colaboración *SHOES Team*, que mediante distancias de estrellas variables Cefeidas, estiman un valor de $H_0 = 73.30 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [Riess et al., 2022]. Asimismo, la colaboración *HOLiCOW* determinó mediante *delays* de tiempo en *strong lensing* de cuasares el valor $H_0 = 73.3_{-1.8}^{+1.7} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ en la cosmología Λ CDM plana, con un 2.4% de precisión, en concordancia con mediciones locales de H_0 calibradas con supernovas (aunque con 3.1σ de tensión con Planck) [Wong et al., 2020]. Cabe notar que estas últimas mediciones no dependen de la validez del modelo Λ CDM, a diferencia de las estimaciones hechas con los datos del satélite Planck.

***Big Bang* nucleosíntesis**

Encontrándose el universo en escalas de temperatura del orden de 1 MeV (1.16×10^{10} K en unidades naturales donde $k_B = 1$), las partículas se hallaban en un estado en el cual les era imposible conformar núcleos de átomos debido a la alta energía cinética proporcionada por las altas temperaturas y a los fotones altamente energéticos que rápidamente dispersaban las partículas. Fue hasta que el universo enfrió con la expansión hasta cierto grado (debajo de los niveles típicos de energía de amarre) que los bariones pudieron enlazarse para la formación de los primeros núcleos de átomos ligeros en un proceso conocido como Big Bang nucleosíntesis [Alpher et al., 1948].

Inhomogeneidad en el universo: formación de estructura

Mapas de la distribución de galaxias en el universo local son evidencia de la inhomogeneidad en la estructura [Peebles, 2020]. Diversos sondeos de galaxias miden el *redshift* de millones de ellas, obteniendo así su lejanía y distribución en el espacio. Como resultado, las galaxias no presentan una distribución aleatoria, sino que poseen una estructura a gran escala dada en virtud de la existencia de perturbaciones gravitacionales alrededor de la materia de fondo inicialmente suave, que evolucionaron eventualmente en regiones de sobredensidad.

Por otro lado, tal crecimiento de la estructura implica una constante contrariedad entre la inestabilidad gravitacional (tendencia de una región sobredensa a colapsar bajo su

propia gravedad) y la expansión misma, volviendo a la estructura sensible a un conjunto de factores que intervienen en este proceso (composición, evolución y curvatura), significando así una prueba contundente del modelo cosmológico de Concordancia (§1.4.1) sujeto, por supuesto, a la misma RG.

CMB

En 1965, fue descubierto un rastro esencialmente uniforme de temperatura en el cielo mediante señales obtenidas por un radiómetro de antena reflectora que apuntaba al cenit [Penzias and Wilson, 1965]; hoy se sabe es el CMB, el fondo de fotones que fueron desacoplados del resto de partículas y viajaron libremente desde que el universo era mucho más joven, al rededor de $z = 1100$, en donde ocurrió el evento conocido como la superficie de última dispersión. Actualmente, la longitud de onda de estos fotones corresponde a la escala de microondas, de donde proviene el nombre de fondo cósmico de microondas, CMB. El CMB corresponde a un mapa de temperatura altamente homogéneo, el cual es modelado como un cuerpo negro perfecto (de hecho, es la medición de un espectro de cuerpo negro más precisa en la naturaleza), cuya temperatura se encuentra bien determinada con un valor $T_{CMB} = 2.726 \pm 0.001$ K hoy en día [Fixsen, 2009].

Un rasgo sumamente importante del CMB recae en el alto grado de suavidad que implica sobre el universo temprano, siendo que los campos de temperatura de los fotones del CMB muestran un espectro altamente isotrópico, observado únicamente fluctuaciones de temperatura del orden de 1×10^{-5} .²³

Aunado a lo anterior, las pruebas del CMB no solo fueron útiles en determinar el fondo de fotones, su temperatura y anisotropía, sino que conduce a la par a la estimación del parámetro de densidad total en el universo (a la par de implicar así la expansión misma [Dolgov and Kawasaki, 2003]) muy cercano a un valor crítico, $\Omega = 1$ (planitud geométrica): “Las mediciones de CMB han confirmado la mayoría de las predicciones básicas de inflación, incluida la ausencia de curvatura espacial” [Dodelson and Schmidt, 2020].

1.4.1. Modelo de Concordancia: observaciones acordes a Λ CDM

En cosmología, existe un fuerte consenso con respecto al modelo que impera sobre la física de nuestro universo en virtud de las numerosas observaciones con las que ha estado en conformidad; este es el modelo de concordancia, mejor conocido como el Modelo Λ CDM. En palabras de los mismos Dodelson y Schmidt, este modelo es, a grandes rasgos, descrito por el escenario siguiente: “un universo euclidiano actualmente dominado por materia no bariónica –la materia oscura fría (CDM)– y una constante cosmológica, con perturbaciones primordiales generadas durante la inflación” [Dodelson and Schmidt, 2020].

De acuerdo con el conjunto de misiones espaciales de los últimos años (como lo fueron en 1989 COBE [Boggess et al., 1992, Smoot, 1999, Volz et al., 1991], BOOMERanG y MAXIMA a finales de los 90s [Miller et al., 1999, de Bernardis et al., 2000, Hanany et al.,

²³De hecho, estas fluctuaciones fraccionales $\frac{\Delta T}{T} \sim 1 \times 10^{-5}$ fueron detectadas por el satélite de la misión COBE en 1992, determinando así que el universo temprano no fue del todo suave, sino que refleja a través del CMB grados de anisotropía.

2000], WMAP en el 2001 [Spergel et al., 2003, Kogut et al., 2003, Jarosik et al., 2011] y, más actualmente, las diversas ediciones del satélite Planck en 2013, 2015 y 2018 [Ade et al., 2014, Ade et al., 2016, Aghanim et al., 2020a]), mediante observaciones al CMB fue posible predecir la composición del universo, así como la predicción de la existencia (de manera indirecta) de un componente de energía de vacío al que llamaron energía oscura. Dentro del modelo Λ CDM, este componente desconocido de energía oscura (al cual se le atribuye ser el responsable de provocar la expansión acelerada en el universo a través de un efecto de presión negativa) es modelado por un factor constante en las ecuaciones de campo de Einstein, conocido como Constante Cosmológica.

A modo de síntesis, el modelo de concordancia consiste en los siguientes tres elementos descritos (con algunos aspectos adicionales en referencia a los principales componentes cósmicos):

1. **Λ :** Actualmente siendo un hecho irrefutable la acelerada expansión del universo (observaciones de alto *redshift* mediante supernovas [Riess et al., 1998] e indirectamente vía el CMB [Lee et al., 2001]), se presume que existe un agente desconocido responsable de la aceleración cósmica, señalado en principio como energía oscura. Diversas fuentes [Riess et al., 1998, Perlmutter et al., 1999, Carroll, 2001, Copeland et al., 2006] señalan estar en consistencia con la existencia de una constante cosmológica (aún con la presencia de innegables problemas [Weinberg, 1989]) que mimetiza tales efectos, siendo que se observa como un factor que permanece constante en la evolución del universo.²⁴
2. **CDM:** Además de la evidente existencia de la materia ordinaria (partículas de materia bariónica, visible), pruebas indirectas en curvas de rotación de galaxias [Zwicky, 1933], así como las mismas observaciones hacia el CMB, indicaron la presencia de un diferente tipo de masa imposible de observar, pero predecible por sus efectos gravitatorios, la cual llamaron materia oscura. Adicionalmente, dada la necesidad de un componente capaz de aglomerarse eficientemente en el universo temprano para así conformar los pozos de potencial teorizados para la formación de estructura que se conoce hoy en día, esta materia debía tener la peculiaridad de no poseer velocidades térmicas que le impidieran este comportamiento, por lo que se predijeron partículas de materia “fría”. De allí el término “materia oscura fría”, o CDM (*cold dark matter*).²⁵
3. **Inflación:** Como se ha hecho un exhaustivo preámbulo en las previas secciones, este periodo en el universo muy temprano supone hasta ahora el mecanismo más razonable por el cual vinieron a existir las perturbaciones primordiales que evolucionaron en la estructura dada hoy. La existencia de este proceso implica numerosas concordancias con el resto de etapas acontecidas y aspectos descritos según Λ CDM.

²⁴De hecho, desde mucho antes se hablaba de una constante cosmológica aunque con fines distintos, introducida por el mismo Einstein década atrás.

²⁵Este aspecto hace omitir a los neutrinos como posibles candidatos a CDM, en cuyo caso serían partículas de un componente de HDM (*hot dark matter*). Estas consideraciones serán discutidas posteriormente (§3.4)

Además de los componentes del sector oscuro (materia y energía), los principales componentes cósmicos acordes a Λ CDM (y, de momento, al Modelo Estándar de Física de Partículas, aunque no necesariamente limitados a este) son:

- Bariones
- Fotones del CMB
- Neutrinos.

1.4.2. Pruebas de estructura

Tanto mediante observaciones del CMB a través de su espectro angular de temperatura, como mediante la predicción del espectro lineal de materia, es posible obtener información importante (energía oscura, constante de Hubble y, más aún, la masa de los neutrinos). A pesar de la ausencia de mediciones directas en la última, existen observables que indirectamente prueban la distribución de materia, entre ellas, la más importante: el agrupamiento de galaxias (o *clustering* de galaxias).

El *clustering* consiste en el uso de galaxias (o cualquier otro objeto astronómico en general) como trazadores de la distribución de materia a gran escala. Ahora, los campos de densidad de galaxias están dados por censos (*surveys*) de *redshift* en términos de posiciones angulares y corrimientos al rojo de galaxias.

Sin embargo, el uso de *surveys* de *redshift* implica ciertos detalles, como lo son la consideración del “sesgo galáctico” (*bias*)²⁶ y del efecto Doppler por velocidades peculiares, dando lugar al conjunto de modificaciones en la estadística de galaxias sufridas por el cambio al espacio de *redshift* conocido como “distorsión del espacio de *redshift*”, RSD (por sus siglas en inglés).

No obstante, a primer orden tales cambios no modifican la forma del *clustering*, hecho que permite tomar la forma del espectro de galaxias para obtener información de la expansión mediante la llamada “oscilación acústica de bariones” (BAO) en el espectro de materia.

Al usar catálogos de galaxias y estudio de imágenes, un objeto tiene una distancia comóvil $\chi(z)$ asociada a un *redshift*, la cual, escrita en como una posición tridimensional será

$$\mathbf{x}(z, \theta, \phi) = \chi(z)\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi). \quad (1.84)$$

Cabe mencionar que al buscar la relación distancia - *redshift* es posible encontrarse con algunas alteraciones (como lo es el efecto Alcock-Paczyński, el cual es debido al uso impreciso de parámetros cosmológicos y las distorsiones RSD arriba mencionadas [Alcock and Paczyński, 1979, Kaiser, 1987]. Al no ser perfectamente suave la curva del espectro de galaxias, esta relación tiene menor complejidad. Tal es el caso del uso de la curva característica del BAO en la materia después de la recombinación, la cual es una regla

²⁶El hecho que manifiesta que el *clustering* de galaxias es diferente del de materia [Kaiser, 1984, Desjacques et al., 2018].

estándar de la cosmología y permite gran precisión en la medición de la relación distancia-*redshift*.

Adicionalmente, pueden no ser consideradas distancias a galaxias individualmente, sino un conjunto o distribución de ellas, definiendo así a la “distribución de distancias” (normalizada) del conjunto de N_g galaxias,

$$W_g(\chi) = \frac{1}{N_g} \frac{dN_g}{d\chi}, \quad (1.85)$$

la cual tiende a cero para valores extremos en χ (pequeños volúmenes y a muy grandes distancias donde las galaxias son indistinguibles para el *survey*) y que además, claramente, satisface la condición de normalización $\int_0^\infty W_g(\chi) d\chi = 1$.

Es común tomar una proyección bidimensional del campo de densidad de galaxias que permita un conteo de galaxias por pixel del cielo, definiendo también a la sobredensidad proyectada

$$\Delta_g(\hat{n}) = \int_0^\infty d\chi W(\chi) \delta_{g,obs}(\chi, \hat{n}), \quad (1.86)$$

con $\delta_{g,obs}$ el campo de densidad observado de galaxias, el cual es función del redshift, o alternativamente de $\chi(z)$, y de la dirección en el cielo \hat{n} .

Los *surveys* de tipo fotométrico permiten medir el *clustering* proyectado (así como la función de correlación angular y su contraparte de Fourier, los multipolos $C_g(l)$), cuya forma y amplitud contienen información cosmológica a pesar de que el BAO y RSD sea suavizado (especialmente cuando es combinado con lentes débiles).

1.5. Weak lensing

Hacia 1919 y tras las predicciones de la RG cuatro años antes, los primeros efectos de desviación de rayos de luz por campos de gravedad ya habían sido observados gracias al acontecimiento de un eclipse solar [Dyson et al., 1920]. No fue sino hasta 1987 que efectos específicos de distorsión fuerte de imágenes por lentes extragalácticas y de gran magnitud fueron observados a causa de galaxias distantes detrás de *clusters* de mucha mayor masa [Soucail et al., 1987]. Sin embargo, fue en 1990 [Tyson et al., 1990] que se obtuvo la primera detección de lentes gravitacionales en el régimen débil, *i.e.*, *weak lensing* (WL, a diferencia del régimen fuerte, *strong lensing*), reconociéndola en su momento como un alineamiento tangencial estadístico de dichos objetos tras su distorsión.

Entrado el nuevo milenio, recién al año 2000 [Bacon et al., 2000, Kaiser et al., 2000, Van Waerbeke et al., 2000, Wittman et al., 2000], se mostró evidencia de WL como una distorsión coherente de galaxias, sustentando así la existencia de *lensing* causada por la LSS del universo y, con ella misma, el acuñamiento del término shear cósmico.

Se entiende por *shear* galáctico (o simplemente *shear*) al fenómeno de distorsión de la imagen de galaxias distantes por régimen débil debido a la LSS [Kilbinger, 2015]. Esta

deformación se produce de manera coherente por el llamado campo de marea de las inhomogeneidades de materia a lo largo de la línea de visión (LoS por el término en inglés *line of sight*).

A partir de medir la correlación en la forma y alineamiento de las galaxias, es posible estudiar las propiedades y la evolución de la LSS así como la geometría del universo [Kilbinger, 2015].

Las mediciones del *shear* representan una herramienta útil no solo para directa explicación de lo anteriormente mencionado, sino específicamente correlacionarlo a la naturaleza de la materia oscura y el origen del actual estado de expansión acelerada del universo.

Toda la luz observada de galaxias distantes está sujeta a *lensing* gravitacional debido a las inhomogeneidades producidas por las fluctuaciones de densidad a gran escala. La distorsión que presenten en términos del tamaño y forma que adopten las galaxias determinarán la medición del *shear*, siendo que en este contexto son del orden de apenas $\sim 1 \times 10^{-2}$ con relación a su imagen original²⁷ y que, galaxia a galaxia, el alineamiento coherente medido estadísticamente permite hacer una correlación de sus formas por pares.

Un detalle trascendente es que el *lensing* gravitacional no es sensible al estado dinámico de la masa en el universo en cada tipo de manifestación, sino que responde a la medición total de materia (oscura y no oscura, incluyendo a los neutrinos), por lo que resulta una herramienta íntegra de los efectos gravitacionales por cualquier tipo de presencia de masa sin importar su naturaleza [Takahashi et al., 2017].

Para la propagación de luz en un medio inhomogéneo, considérese la métrica con perturbación de potenciales gravitacionales a primer orden (de 1.41)

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Psi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + a^2(t) \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) dl^2, \quad (1.87)$$

siendo c la velocidad de la luz propagándose en el vacío²⁸, $a(t)$ el factor de escala descrito en §1.1.2 (con valor $a(t_0) = 1$ en el presente) y dl^2 la parte espacial de la métrica con coordenada comóvil l (constante con la expansión en la ausencia de potenciales gravitacionales).

Una vez más, los términos Ψ y Φ en (1.87) son los potenciales gravitacionales, los cuales describen campos débiles, *i.e.*, satisfacen $\Psi, \Phi \ll c^2$. Asimismo, en ausencia de estrés anisotrópico (el cual es el caso de LSS, a tiempos tardíos en los que es posible despreciar las contribuciones relativistas) se cumple $\Psi = \Phi$; ver ec. (1.64).

En cuanto a la parte espacial del elemento de línea, consta de los términos radial y angulares, de la forma $dl^2 = d\chi^2 + f_K^2(\chi)d\omega$, donde χ es la coordenada comóvil y $f_K(\chi)$

²⁷Tal factor del orden del 1% de elipticidad refiere al que se añade, adicionalmente a la forma elíptica intrínseca de cada galaxia, como la producida por WL.

²⁸A pesar de la común convención $c = 1$ tomada en la literatura habitualmente y como se anticipó en la introducción de este trabajo, en este caso particular se hace uso explícito del factor c^2 par especificar el régimen débil en los potenciales y con motivo de hacer énfasis en la diferencia de orden de magnitud.

está dada (según la curvatura adoptada) por

$$f_K(\chi) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2}\chi), & K > 0 \text{ (esférico)} \\ \chi, & K = 0 \text{ (plano)} \\ (-K)^{-1/2} \sinh[(-K)^{1/2}\chi], & K < 0 \text{ (hiperbólico)} \end{cases} \quad (1.88)$$

Formación de estructura y formalismo de WL

Las fluctuaciones de densidad (dependientes del tiempo) crecieron hasta pasar de perturbaciones lineales en tiempos tempranos a no lineales. Dichas fluctuaciones son medidas a través del contraste de densidad (o sobre/sub densidad) con relación a la densidad promedio $\bar{\rho}$ (1.43), visto más directamente como una sobredensidad mediante la forma

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta), \quad (1.89)$$

(*i.e.*, qué tanto crecen, o disminuyen, en relación al promedio estadístico). Para un fluido perfecto (presión nula), δ se relaciona con Φ por la ec. de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta. \quad (1.90)$$

Acorde a RG, los fotones se propagan en geodésicas nulas dadas por un elemento de línea ds yendo a $ds = 0$. De la métrica (1.87) se tiene entonces

$$t = \frac{1}{c} \int \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) dr \quad (1.91)$$

a lo largo del camino del rayo de luz en coordenadas propias r , en donde, según el principio de Fermat, el potencial actúa como un medio con índice de refracción variable $n = 1 - 2\Phi/c^2$ ($\Phi < 0$). De las ecuaciones de Euler-Lagrange para Φ con $\delta t = 0$, se obtiene el ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$ entre las direcciones emitida y recibida,²⁹

$$\hat{\alpha} = -\frac{2}{c^2} \int \nabla_{\perp} \Phi dr. \quad (1.92)$$

En un universo FLRW, la separación comóvil transversa \mathbf{x} entre dos rayos de luz para un observador a la distancia χ es

$$\mathbf{x}(\chi) = \chi \boldsymbol{\theta}, \quad (1.93)$$

bajo un ángulo de separación $\boldsymbol{\theta}$ pequeño y en el entendido de una geometría plana escogida de entre (1.88).

²⁹El gradiente del potencial es tomado como perpendicular al trayecto del rayo de luz. Cabe destacar que este resultado es dos veces la cantidad predicha con dinámica newtoniana [Von Soldner, 1804]. Asimismo, diversas fuentes suelen denotar al ángulo de deflexión simplemente como $\boldsymbol{\theta}$; sin embargo, pese a la confusión prestada con el resto de ángulos relacionados a esta cantidad, se eligió seguir la notación de [Kilbinger, 2015] solo para esta cantidad.

Por otro lado, la diferencia entre el ángulo aparente $\boldsymbol{\theta}$ (el ángulo observado que de hecho se mide) y el ángulo de la fuente $\boldsymbol{\theta}_S$ (posición “real” del objeto; [Kilbinger, 2015] lo denota como $\boldsymbol{\beta}$), permiten definir la ecuación de *lensing*

$$\boldsymbol{\theta}_S = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.94)$$

Esta cantidad permite definir a la matriz (inversa) de amplificación como el jacobiano $\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_S}{\partial \boldsymbol{\theta}}$,³⁰ linealizando (1.94)

$$A_{ij} = \frac{\partial \theta_i^S}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j}, \quad (1.95)$$

donde los índices $i, j = 1, 2$ corren sobre las coordenadas $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, las cuales mapean la bóveda celeste.

La deflexión puede ser escrita como el gradiente del potencial (bidimensional) de *lensing* ψ , tal que

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i \partial_j \psi, \quad (1.96)$$

en donde

$$\psi(\boldsymbol{\theta}, \chi) = -\frac{2}{c^2} \int_0^\chi \frac{d\chi'}{\chi'} \frac{(\chi - \chi')}{\chi} [\Psi(\mathbf{x}(\chi')) + \Phi(\mathbf{x}(\chi'))]. \quad (1.97)$$

La matriz \mathbf{A} es simétrica y se parametriza como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (1.98)$$

en donde el término escalar κ se conoce como convergencia, mientras que $\gamma_{1,2}$ son las componentes del objeto de espín-dos³¹ $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ conocido como el mencionado *shear*, siendo que representa un número complejo de la forma rectangular y polar

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 + i\gamma_2 = |\boldsymbol{\gamma}| e^{2i\phi_l}. \quad (1.99)$$

Expandiendo (1.94) bajo pequeños ángulos de deflexión,

$$\theta_i^S(\boldsymbol{\theta}) = \underbrace{A_{ij}\theta_j}_{\text{convergencia} + \textit{shear}} + \underbrace{\frac{1}{2}\partial_i\partial_j\partial_k\psi}_{\text{deflexión}} + \dots \quad (1.100)$$

en donde el régimen débil de *lensing* restringe hasta $\theta_i^S = A_{ij}\theta_j$ (asumiendo que $\partial_i\partial_j\psi$ es constante a través de la superficie de la fuente). En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} \theta_1^S \\ \theta_2^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & -\kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (1.101)$$

³⁰Esta ecuación describe el mapeo lineal de la imagen con lente en coordenadas $\boldsymbol{\theta}$ a la fuente, la imagen sin lente con coordenadas $\boldsymbol{\theta}_S$.

³¹El *shear* transforma como una cantidad espín-dos: una rotación sobre un ángulo π es la transformación identidad de una elipse; *i.e.*, al variar φ entre 0 y 2π , la elipse gira alrededor de π (Takahashi et al.).

Mediante (1.96), es directo relacionar estas cantidades con las segundas derivadas del potencial (1.97)

$$\kappa = \frac{1}{2}(\partial_1\partial_1 + \partial_2\partial_2)\psi = \frac{1}{2}\nabla^2\psi, \quad (1.102)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2)\psi, \quad (1.103)$$

$$\gamma_2 = \partial_1\partial_2\psi. \quad (1.104)$$

Por construcción, el valor esperado de ambas cantidades es nulo en promedio (*i.e.*, $\langle\kappa\rangle = \langle\gamma\rangle = 0$), de modo que la primera estadística no trivial es el segundo momento. Estimadores usuales de estadística de 2° orden de WL suelen expresarse en el espacio de Fourier.

Estimación de *shear* cósmico y modos-*E* y *B*

Se le atribuye a las galaxias la cantidad intrínseca y compleja denominada elipticidad de la fuente ε^s , misma que depende y es modificada directamente como función del llamado *shear* reducido (también complejo) g ³²

$$g = \frac{\gamma}{1 - \kappa}, \quad (1.105)$$

el cual satisface las mismas propiedades y es una buena aproximación a orden lineal de γ .

En general, la elipticidad es $\varepsilon = \frac{\varepsilon^s + g}{1 + g^*\varepsilon^s}$, con g^* el complejo conjugado. En régimen de WL, la relación entre la elipticidad de la fuente y la observada está dada mediante $\varepsilon \approx \varepsilon^s + \gamma$ (en donde también $\langle\varepsilon^s\rangle = 0, \Rightarrow \langle\varepsilon\rangle = g$).

Definiendo cierto campo vectorial \mathbf{u} como el gradiente de la convergencia, $\mathbf{u} = \nabla\kappa$, y aplicando el rotacional $\nabla \times \mathbf{u} = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0$, al sustituir κ, γ en términos de ψ mediante (1.102). El campo de *shear* que satisface la relación anterior es llamado un campo de *modo-E* (en analogía al campo eléctrico). Respectivamente, el campo de convergencia que satisface esta condición, siendo que puede descomponerse ahora en dos modos, representa al modo-*E* κ^E y al modo-*B* κ^B dados por $\nabla^2\kappa^E = \nabla u$ y $\nabla^2\kappa^B = \nabla \times \mathbf{u}$.

Las componentes del *lensing*, convergencia y *shear* galáctico, a su vez, definen espectros de potencias y funciones de correlación de WL que serán los trazadores de estructura buscados (tema que se tratará más adelante en §2.3).

1.5.1. Catálogos fotométricos: observaciones pasadas, hoy en día y futuras (LSST)

Como se ha anticipado (1.4.2), la más importante de las pruebas (indirectas) de la distribución de materia está dada por el *clustering* de las galaxias como trazadores de la LSS

³²El *shear* cósmico está basado en la medición de la forma de las galaxias, de manera que la observable en cuestión no es el *shear* en sí mismo sino el *shear* reducido, dividido por un factor $1 - \kappa$ factorizable de \mathbf{A} debido a que esta cantidad no afecta la forma de la fuente sino solo su tamaño. Sin embargo, nótese que para lentes muy débiles, $\gamma, \kappa \ll 1$, por lo que $\frac{\gamma}{1 - \kappa} \sim \gamma$.

mediante catálogos, mismos que son medidos directamente usando el *redshift*.

Sin embargo, si bien dichos *surveys* brindan una amplia cantidad de información útil, suelen ser operacionalmente costosos [Dodelson and Schmidt, 2020], debido a que el proceso implica obtener el espectro de cada galaxia (*i.e.*, una gran cantidad de fotones), a diferencia de, por ejemplo, obtener la posición angular de estas (es decir, una menor cantidad de fotones necesarios para obtener la imagen de la galaxia). Esta es la diferencia que caracteriza a los catálogos de tipo fotométrico. Más aún, los catálogos fotométricos, toman imágenes de porciones del cielo, compensando la falta de información radial mediante la observación de múltiples galaxias.

Observatorio Rubin (*Legacy Survey of Space and Time*)

El Observatorio Vera C. Rubin (o simplemente Observatorio Rubin) es un observatorio astronómico ubicado en Cerro Pachón, Chile, financiado por *National Science Foundation* (NSF) y *Department of Energy* (DOE), cuya construcción comenzó en el año 2015 y continúa en el presente, y que alberga al telescopio principal de tres espejos *Simonyi Survey Telescope*³³ encargado de realizar el sondeo (o *survey*) a 10 años *Legacy Survey of Space and Time* (LSST) [Ivezić et al., 2019]. Este telescopio opera con el propósito de realizar continuos mapeos completos del cielo y así formar la mayor base de datos astronómica sin precedentes (y de información ampliamente accesible) para el estudio del universo, particularmente con los siguientes cuatro objetivos:

- Reconocimiento dentro del Sistema Solar
- Detección de eventos ópticos transitorios, como supernovas
- Realización de mapeos de la Vía Láctea
- Medición de lentes gravitacionales débiles para la detección de materia y energía oscura.

El presente trabajo está enfocado, precisamente, en el último de estos campos, aunque no particularmente dirigido a DM.

³³En el 2008, el ingeniero en software y empresario húngaro Charles Samonyi realizó un donativo en pos a la realización de este proyecto. De allí el nombre.

Capítulo 2

Estadística: espectro de potencias y función de correlación

Siendo los catálogos de galaxias la vía por la cual se estudia el comportamiento de la LSS, gracias al mapeo de la distribución de estos objetos en el cielo local, se requiere de una herramienta matemática que permita englobar el análisis de múltiples señales provenientes de la porción del cielo observada y, el punto importante, comparar estas observaciones con la teoría. Así, la comparación teoría-observación en el estudio de la estructura se remite a un análisis estadístico.

2.1. Función de correlación y su espectro

La estadística juega un papel crucial en el estudio de los mapas de LSS, siendo el estadístico más importante la función de correlación (CF), misma que permite la asociación de las posiciones entre pares de galaxias. Las hay de N puntos, siendo la más básica (y la utilizada en este trabajo) la función de correlación de dos puntos (2PCF) (o su contraparte, el espectro de potencias introducido en el capítulo anterior). Teniendo las fluctuaciones de densidad δ para las posiciones \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 de dos objetos al tiempo t , la función de correlación se define como

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1, t) \delta(\mathbf{x}_2, t) \rangle, \\ &= \xi(x_{12}),\end{aligned}\tag{2.1}$$

con $x_{12} \equiv |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ (es decir, en general, la 2PCF no depende del vector posición \mathbf{x} , sino de la norma x) y representando los brackets angulares el promedio en todo el ensamble.

La ecuación (2.1) suele expresarse también como

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle,\tag{2.2}$$

con \mathbf{x} la posición a la que se mide el contraste de densidad de referencia y \mathbf{r} el radio de la circunferencia a la cual se evalúa el valor de un segundo contraste de densidad a correlacionar (ver las figuras. 2.1 y 2.2).

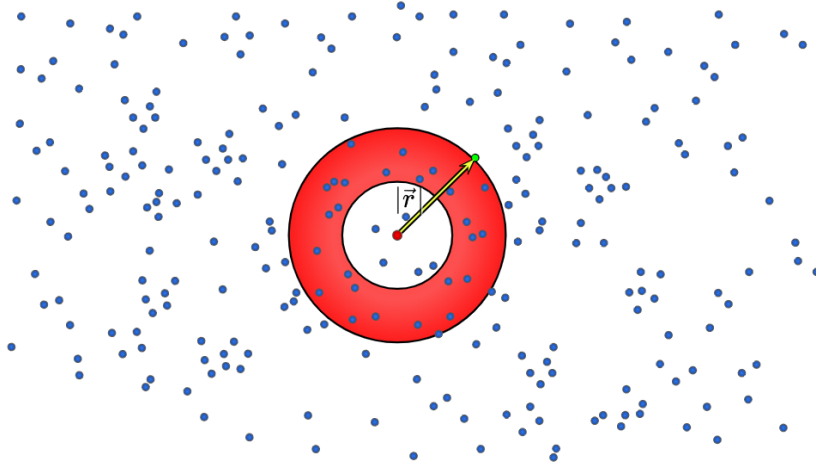


Figura 2.1: Representación de una distribución arbitraria de N galaxias, en la cual una de ellas (punto rojo) es tomada como referencia para hacer la correlación por pares con el resto de sus $N - 1$ vecinos hallados a una distancia menor o igual a $|\mathbf{r}|$ (por isotropía, se toma la circunferencia de radio $|\mathbf{r}| = r$ centrada en el punto rojo). Frecuentemente suele tomarse como región de interés el área comprendida entre dos radios, es decir, la corona circular sombreada en rojo, obteniendo la probabilidad de hallar a alguna galaxia comprendida entre r y cierto $r' < r$.

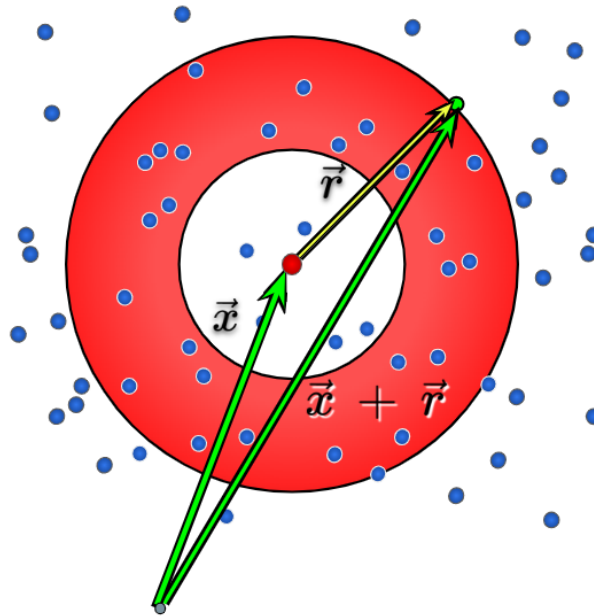


Figura 2.2: Acercamiento de la fig. 2.1 en el cual se ilustra a la galaxia situada en \mathbf{x} a partir de la cual se busca la probabilidad de hallar a alguna galaxia a una distancia $|\mathbf{r}|$ (en su defecto, dentro de la corona circular roja). Respectivamente, los campos de sobredensidad serán $\delta(\mathbf{x})$ y $\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})$. La función de correlación es contruida a partir de promediar sobre todas los radios \mathbf{r} para cada posición \mathbf{x} , de la forma (2.2) (recordar que tales corchetes representan el promedio en todo el ensamble).

La 2PCF es también el primer estadístico de los campos de densidad, ya que, por construcción, los campos de densidad $\delta(\mathbf{r})$ promedian a cero (primeros momentos).¹

Asimismo, en términos de galaxias en una distribución de materia y en virtud de (2.1), la función de correlación representa el exceso de probabilidad (con respecto a una distribución aleatoria) que existe de hallar un par de galaxias en dos volúmenes, dV_1 y dV_2 , respectivamente, separados por una distancia r_{12} [Johnston, 2006], es decir,

$$dP_{12} = \bar{n}_g^2 [1 + \xi(r_{12})] dV_1 dV_2, \quad (2.3)$$

donde \bar{n}_g es la densidad de número promedio de galaxias en la región de *sampleo* (véase la fig. 2.3 como referencia).

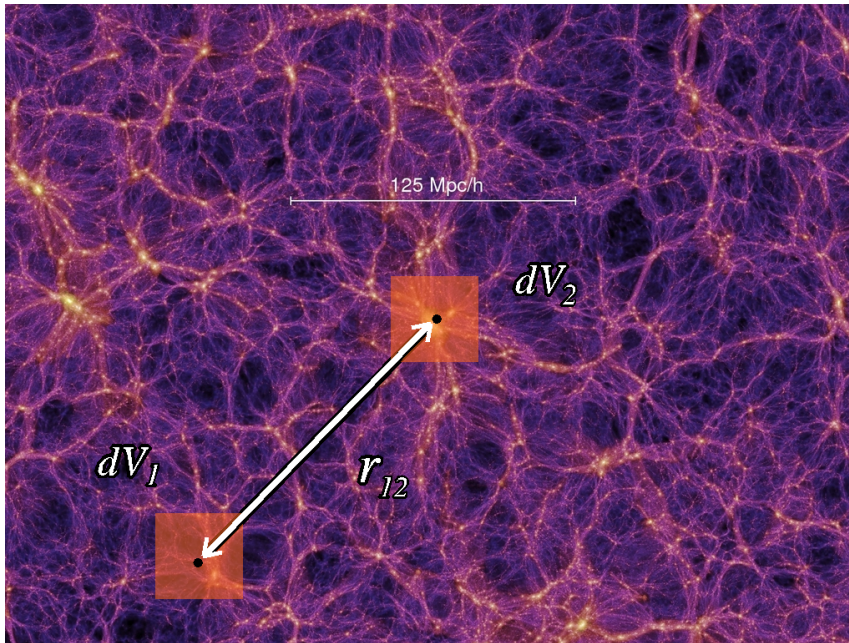


Figura 2.3: Diagrama que representa las dos distribuciones de materia en un respectivo elemento diferencial de volumen (dV_1 , dV_2) cada una, separadas por la distancia r_{12} . Figura adaptada de [yt project, 2017] sobre la imagen simulada de estructura a gran escala [Virgo, 2005] descrita en [Springel et al., 2005].

2.1.1. Espacio de Fourier

Debido a que las perturbaciones en materia a pequeñas escalas (menor a 10 Mpc) se vuelven grandes en el universo tardío, las fluctuaciones de densidad que son cercanas a la unidad (orden lineal), se vuelven no lineales. Esto beneficia la comparación de estas señales con la teoría (sin embargo, es posible obtener esta información también para escalas menores dependiendo de las observables en cuestión). Es necesario separar las contribuciones de

¹Dada la definición de fluctuación de densidad $\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\mathbf{x}, t))$, y debido a que el promedio en el ensamble $\langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle$ es precisamente el promedio de la densidad en el tiempo $\bar{\rho}(t)$, se sigue que el primer momento del campo de densidad es necesariamente $\langle \delta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$.

pequeñas y grandes escalas, razón por la cual es útil operar en el espacio de ‘frecuencias’, en donde las escalas cambian sustancialmente. Esto es llevado a cabo mediante transformadas de Fourier de una función real $f(\mathbf{x})$ a su contraparte en el espacio de Fourier $\hat{f}(\mathbf{k})$, dados por la siguiente convención²

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}), \quad (2.4)$$

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

en donde cabe notar que una representación integral de la distribución delta de Dirac es

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.6)$$

2.1.2. 2PCF y espectro de potencias

En el caso particular de interés, la función de espacio real $\xi(\mathbf{r})$, al ser trasladada al espacio de Fourier mediante (2.5), resulta en el llamado espectro de potencias (referido en adelante como PS por las siglas de su término en inglés). Es decir,

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k), \quad (2.7)$$

—en donde es merecedor destacar que la distribución delta surge en virtud de la homogeneidad estadística, mientras que la dependencia del espectro únicamente en la norma (*i.e.*, $P(k = |\mathbf{k}|)$) y no en el vector \mathbf{k} mismo es consecuencia de la suposición de isotropía estadística— o bien, explícitamente como una transformada de Fourier (usando la ec. (2.1) es fácil demostrar que el PS y la CF son transformadas de Fourier recíprocamente una de la otra) de la forma

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P(k). \quad (2.8)$$

De hecho, es posible prescindir de la dependencia en (2.8) del vector \mathbf{r} y hacerla dependiente de su norma r . Al ser el kernel invariante ante rotaciones (es decir, este solo depende de las normas k y r y del ángulo entre los vectores $x \equiv \cos \theta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$) se satisface $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr x}$, por lo que es válido escribir

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} P(k) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi e^{ikr \cos \theta} P(k) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx e^{ikr x} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} \end{aligned} \quad (2.9)$$

²De hecho, se omitirá el uso del sombrero “^”, dando por entendido el espacio en el que opera por cómo se expresa explícitamente su dependencia.

donde en la segunda igualdad se ha usado a \hat{r} como la dirección cenital (\hat{z}), de modo que θ sea el ángulo polar y φ el azimutal, cuya integral aporta 2π . Finalmente, se usa la función de Bessel esférica de grado cero $j_0(x) = \sin(x)/x$, permitiendo escribir

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 j_0(kr) P(k). \quad (2.10)$$

La expresión (2.10) es de interés debido a la forma integral en función de $j_0(kr)$, que comparte la misma estructura que las ecuaciones de shear (2.50, 2.51), que serán vistas a futuro en §2.3.2.

Asimismo, el PS suele expresarse como

$$P(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \text{Var}(\delta(\mathbf{k})). \quad (2.11)$$

En este sentido y gracias a la discusión dada en relación a la definición (2.1), se dice que el PS refleja la dispersión, o bien, es la varianza (Var), de la distribución. Esto es, ante una distribución de materia más uniforme, el PS se vería reducido. Es importante destacar que la dependencia del PS no recae en el vector de número de onda \mathbf{k} , sino solo en su norma debido a isotropía.

Al igual que en muchos campos de la física, los campos a considerar en cosmología son de carácter real. De hecho, se trata con campos aleatorios reales (no gaussianos, a diferencia de los campos de temperatura en el CMB), que satisfacen $\langle \delta \rangle = 0$ (promedio nulo). En general, la condición para campos reales del tipo $f(\mathbf{k})$ es

$$f(-\mathbf{k}) = f^*(\mathbf{k}). \quad (2.12)$$

Esta condición es trascendente en la estadística del PS, particularmente en el espectro de *lensing* (§2.3) y en los métodos numéricos empleados (§5.1.1).

2.1.3. Espectro de potencias de materia en espacio real

Habiendo definido el espectro de potencias, es pertinente mencionar que existen distintos tipos de PS, construidos por cierto tipo de señales u objetos fuente, siendo los más importantes el espectro de materia, del CMB y de *lensing*. El PS de interés en este estudio es el espectro de *lensing* (vía el espectro de materia).

El espectro de potencias de la materia describe la inhomogeneidad de la distribución de estructura a lo largo de la historia del universo, es decir, es una función $P_m(k)$ para cada modo k (norma del vector de onda \mathbf{k}) en el tiempo cósmico (normalmente escrita simplemente como $P(k)$, sin el subíndice m de materia, en el entendido de que los espectros de las demás diversas fuentes son denotados de manera distinta), siendo que pasa por la etapa de dominio de radiación, con un característico quiebre en la época de la igualdad (radiación-materia), dominio de materia y subsecuente dominio de constante cosmológica (véase la figura 2.4). Durante la evolución del PS de materia, este tiene un comportamiento mayoritariamente lineal, hasta cierta escala k_{NL} a partir del cual se vuelve no lineal (es

decir, no es suficiente la teoría linealizada vista en el capítulo anterior), mismos que son descritos a continuación.

Asimismo, es importante destacar que el PS puede considerarse dentro del contexto de un “espacio real” (coordenada \boldsymbol{x}) o bajo la afectación de efectos del *redshift* cosmológico, en el “espacio de *redshift*” (coordenada \boldsymbol{s}): en cosmología, se mapean objetos del cielo a través de sus coordenadas angulares, $\hat{\boldsymbol{x}}$, y su posición aparente, \boldsymbol{s} , inferida vía el corrimiento al rojo (§2.2), dando lugar a los efectos de distorsiones de espacio - *redshift*. Sin embargo, estas no tienen una influencia importante en observaciones de *lensing* galáctico, por lo que no son consideradas en este trabajo.

Como se verá, para las masas esperadas de los neutrinos ($M_\nu \sim 0.06 - 1 \text{ eV}$),³ estos se volvieron relativistas en el universo tardío, durante la época dominada por la materia (véase ec. (3.41) más adelante), por lo que su contribución actualmente es similar a la DM, aunque con algunas diferencias que serán vistas posteriormente.

De hecho, la ec.(1.81) puede ser escrita para cada componente de materia de la siguiente manera,

$$\delta_X(k, a) = \frac{2}{5} \frac{k^2}{\Omega_m H_0^2} \mathcal{R}(k) T_X(k) D_+(a) \quad (2.13)$$

donde las componentes X muestran las diferentes componentes de materia en el universo tardío. Es decir, $X = c, b, \nu$, haciendo referencia a la DM, bariones y neutrinos masivos, respectivamente. Equivalentemente, pueden ser encontrados los distintos espectros de potencias para las componentes de materia

$$P_L^X(k) = |\delta_X(k)|^2. \quad (2.14)$$

Para calcular las distintas las distintas funciones de transferencia $T_X(k)$ en este trabajo se usa el código Cosmic Linear Anisotropy Solving System⁴ (CLASS) [Lesgourgues, 2011, Blas et al., 2011] escrito en lenguaje Python y que resuelve el conjunto de ecuaciones que se han expuesto en este capítulo para obtener las densidades a partir de sus condiciones iniciales.

Los distintos espectros de potencias pueden ser interesantes para distintas aplicaciones. Cuando se trabaja con lentes gravitacionales, se debe tomar en cuenta que la trayectoria de los fotones es deformada por toda la materia que se encuentra entre su camino, es decir, por las tres componentes de materia (descritas en 1.2.1), de manera que deben conjuntarse estas tres componentes en la materia total, es decir,

$$\delta_m = f_c \delta_c + f_b \delta_b + f_\nu \delta_\nu \quad (2.15)$$

donde la abundancia relativas de la componente X respecto a toda la materia es

$$f_X = \frac{\Omega_X}{\Omega_c + \Omega_b + \Omega_\nu}, \quad \text{con } X = c, b, \nu. \quad (2.16)$$

³Se verá en el capítulo siguiente que esta cantidad, referida como la masa total de las especies de neutrinos masivos, posee cotas experimentales de la física de partículas y la cosmología misma

⁴https://github.com/lesgourg/class_public.

El espectro de potencias de los neutrinos se ve apagado a partir de cierta escala k . La razón de esto es que los neutrinos tienen velocidades de dispersión muy altas y no pueden ser contenidos en escalas pequeñas. Este efecto es sumamente importante dado que depende de la abundancia de neutrinos, y el observarlo permite, en principio, estimar la masa de los neutrinos.

Espectro de potencias lineal

Como se ha anticipado en §1.2.2, el campo de sobredensidad de materia δ_m describe en conjunto a los bariones que son arrastrados por las mayores cantidades de materia oscura. Esta sobredensidad de materia tiene por espectro a la expresión construida del PS primordial formado en inflación, la función de transferencia y el factor de crecimiento (1.82). El espectro escala polinomialmente en k al grado n_s en la primera parte de la curva aún después de la época de la igualdad hasta $k = k_{NL}$, es decir, en las escalas grandes (ley de potencias $P = A_s(k/k_p)^{n_s} \propto k^{n_s}$)

Según la discusión en §1.3, en específico la ecuación (1.82), el PS lineal de materia se comporta (a tiempos tardíos)⁵ como

$$P_L(k, a) \simeq \frac{A_s}{\Omega_m^2} D_+^2(a) T^2(k) \frac{k^{n_s}}{H_0^4 k_p^{n_s-1}}, \quad (2.17)$$

en dónde la escala pivote k_p se toma a convención, comúnmente determinada como la escala de mejor restricción en un conjunto de observaciones dadas (e.g., CMB). *Planck* 2018 adopta el valor $k_p = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ [Aghanim et al., 2020a]. También es posible observar que el espectro de potencias lineal evoluciona con el cuadrado de la función de crecimiento lineal $D_+(a)$. En la figura 2.4 se grafica el espectro lineal de materia para distintos redshifts $z = 1/(1+a)$.

Nótese que la ecuación (2.17) indica que el PS evoluciona como $P_L(k) \propto k^{n_s}$ a grandes escalas, donde $T(k) = 1$.

⁵El espectro de materia es relevante a tiempos tardíos debido a que es muy adentrados en la época de dominio de materia en que la formación de estructura ocurre

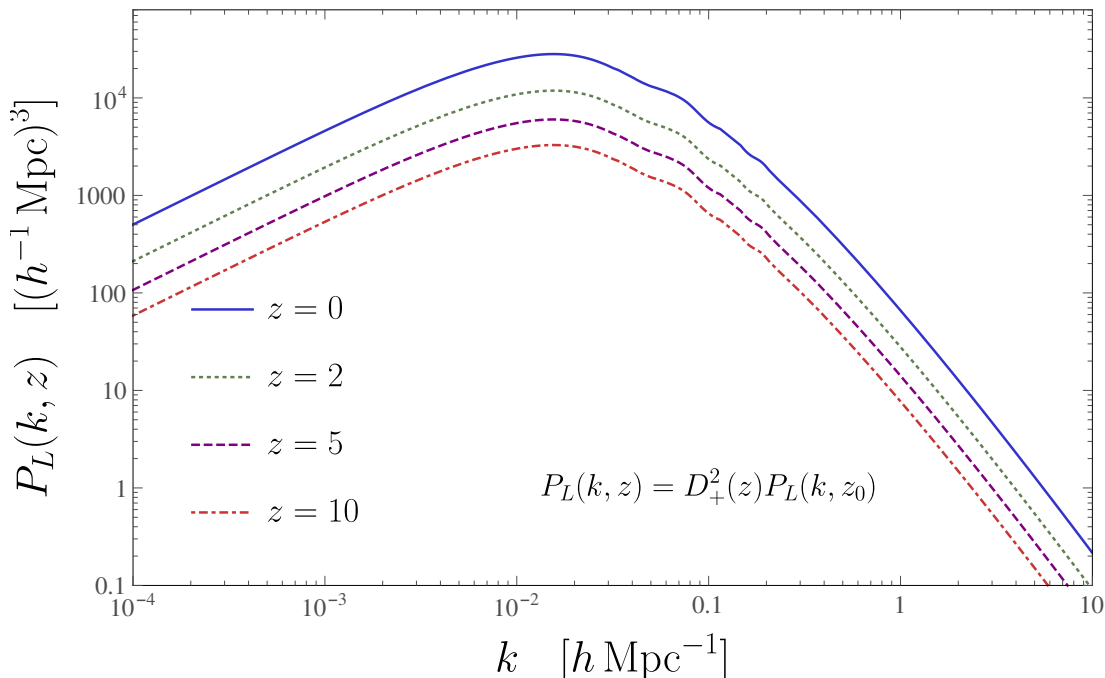


Figura 2.4: Espectro de potencias lineal de la materia $P_L(k)$ en la cosmología fiducial para cada valor del modo k . La curva se muestra para diferentes valores de *redshift*.

Espectro de potencias no lineal

Por otro lado, el PS de materia, escala no-linealmente en k para valores $k > k_{NL}$, esto es, en escalas pequeñas (recordar que en este contexto esto implica grandes escalas lineales y a tiempos tardíos).

Existen diferentes prescripciones para la escala no lineal en la literatura. Por ejemplo, [Matsubara, 2008] considera a la escala no lineal como

$$k_{NL} = \alpha \left[\frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty P_L(k, z) dk \right]^{-1/2} \quad (2.18)$$

(con α una constante poco menor que la unidad). Cabe destacar que, al ser el espectro lineal creciente con el tiempo (a menores z , P_L es más grande), k_{NL} se hace más pequeña con el tiempo. A $z = 0$ se tiene $k_{NL} \approx 0.1 h \text{ Mpc}^{-1}$.⁶

Así, en orden de estudiar la evolución del universo no solo para tiempos tempranos (pequeñas escalas en el espacio, grandes escalas en k) sino cuando se tiene la presencia de estrellas, galaxias y cúmulos de ellas (que, de hecho es la época de interés para WL), se debe trascender el régimen lineal, es decir, donde las perturbaciones evolucionan de manera no linealmente. A tal punto, una primera complicación sería el grado de dificultad que se manifestaría en las ecuaciones para las perturbaciones (Einstein y Boltzmann). Sin embargo, aún en el universo tardío, los efectos de gravedad permanecen siendo débiles,

⁶Se es consciente de la imposibilidad de determinar de manera estricta y precisa la escala de no linealidad en la teoría, siendo que esta se define y aproxima según la consideración tomada por cada autor.

haciendo que sea válido preservar el orden lineal al nivel de la métrica (1.87 con perturbaciones lineales), aún cuando las perturbaciones en la densidad de materia requieran ser completamente no lineales.

“La estructura colapsa y se vuelve no lineal primero en pequeñas escalas” [Dodelson and Schmidt, 2020], debido a que las perturbaciones de densidad son pequeñas a grandes escalas mientras que a pequeñas escalas las perturbaciones crecen.⁷ Posterior a ello, esta estructura colapsada se ensambla jerárquicamente en estructuras más grandes conforme evoluciona el universo. Se puede pensar que la estructura no lineal en el universo está compuesta por estructuras ligadas de DM, los halos. Estos halos ayudan a comprender la distribución de materia a orden no lineal.

A diferencia del caso anterior en donde se estudia la evolución de materia fría sin colisiones bajo un campo de gravedad, la formación de galaxias se da “a través del enfriamiento radiativo y por colisión del gas, que eventualmente colapsa para formar estrellas” [Dodelson and Schmidt, 2020]. Aún con ello, es posible usar un enfoque perturbativo para describir el agrupamiento de galaxias a gran escala y así tomar el *clustering* como trazador.⁸

2.2. Distorsión del espacio de *redshift*

Con el propósito de obtener una representación de la distribución tridimensional de galaxias, se realizan mapas del espacio, no en el real sino en el llamado espacio de *redshift*. Tal espacio funciona análogamente, de modo que en lugar de observar objetos a cierta distancia radial χ , lo hace en función del corrimiento al rojo que presenten. Esta situación, sin embargo, puede presentar diversas consecuencias: “el eje radial del *redshift* es modificado por efecto Doppler de la velocidad peculiar” [Peacock, 1999] de la forma $(1+z) \rightarrow (1+z)(1+v/c)$. Según Yamamoto, Nakamichi y Kamino, se puede entender al RSD como el conjunto de distorsiones de la aparente distribución espacial de los objetos cosmológicos debido a la velocidad peculiar de estas fuentes, así como a la expansión misma que conlleva a otro tipo de distorsión geométrica; RSD implica efectos tanto en el régimen lineal (grandes escalas) como en el no lineal (pequeñas escalas) [Yamamoto et al., 2006].

Una región de sobredensidad a gran escala (que es la escala de interés en este estudio) aparenta ser aplastada en el espacio de *redshift*. Esto es, las galaxias más cercanas al observador en la Tierra se mueven hacia el centro de la región sobredensa, alejándose de dicho observador. El caso opuesto ocurre en la analogía inversa de galaxias circundantes más alejadas al observador; sin embargo, en términos generales, se habla de una anisotropía aparente en una sobredensidad circular. Así, en pocas palabras, dado este aplastamiento por RSD, en el espacio de *redshift* se tiene un mayor *clustering* que en el real a lo largo de la línea de visión (LoS) entre el observador y las galaxias mencionadas.

⁷Los componentes del *clustering* están dominados por DM. Por otro lado, es solo a pequeñas escalas que el gas de bariones ejerce presión al encontrarse a altas temperaturas.

⁸Para ello, es necesario introducir algunos términos, como lo son la regla estándar de oscilación acústica de bariones (BAO), el efecto Alcock-Paczynski (AP) y las distorsiones del espacio de *redshift* (RSD); sin embargo, como se discute a continuación, tales tratamiento no son necesarios bajo el enfoque de WL.

Con el único propósito de clarificar el efecto RSD como una transformación de coordenadas (afectación al espacio), se establece la ecuación que conecta ambos espacios: real y de *redshift*. En general, considerando a la coordenada real como \mathbf{x} y a la coordenada del espacio z como \mathbf{s} (la velocidad peculiar viene del agrupamiento mismo con un corrimiento dado únicamente por expansión ideal de Hubble), la relación entre coordenadas está dada por

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{x}}{H} \hat{x} = \mathbf{x} + \frac{\mu u}{H} \hat{x}, \quad (2.19)$$

para el campo de velocidad peculiar \mathbf{u} de la fuente en desplazamiento, asumiendo una región distante de espacio bajo un ángulo pequeño. Notar que μ representa el coseno del ángulo entre el vector velocidad y la LoS. En pequeñas escalas (régimen no lineal), las velocidades son mayores, haciendo aún más trascendente el desplazamiento en el espacio de *redshift*.

2.2.1. RSD en *Weak lensing*

RSD del agrupamiento de galaxias es clave en el entendimiento de la distribución de la LSS y es, además, una prueba importante para constriñir a la gravedad a escalas cosmológicas [Scoccimarro, 2015].⁹

Sin embargo, en los catálogos fotométricos no se tienen estimaciones precisas del *redshift* de las galaxias, sino que en estas solo se conocen a qué distribución pertenecen, a través de la función W_g (ver ec.1.85). Esto hace que un pequeño cambio en el *redshift* debido a RSD no cambie el que una galaxia en particular siga siendo identificada dentro de la misma distribución de galaxias. Es por esto que los efectos RSD no son importantes para el *weak lensing* de galaxias y no son considerados en este trabajo (mas por su importancia en muchas áreas de la cosmología, sí fueron explicados).

2.3. Estadística en *lensing*

A diferencia de los métodos de estudio de LSS como lo es el *clustering* de galaxias, la cual toma solamente en cuenta la materia bariónica en la medición de la distribución de galaxias como distribución de masa en general, el *lensing* gravitacional proporciona una herramienta capaz de englobar todo tipo de materia, abriendo la posibilidad de tener predicciones sobre la estructura misma, dado que se evita la descripción de trazadores sesgados de la materia.

Como se ha discutido en §1.5, existe un formalismo específico para el estudio del *lensing*, en donde el fin principal es cuantificar en qué medida una imagen es distorsionada debido a efectos de gravedad producidos por cuerpos considerablemente de mayor masa (lentes). Es importante mencionar que esta distorsión, a diferencia de casos como el mapeo de

⁹Datos de RSD en catálogos de galaxias son completamente consistentes con las predicciones de modelos estándar cosmológicos basados en RG, *i.e.*, teoría de gravedad de Einstein no modificada. [De La Torre et al., 2013]

temperatura del CMB, refiere al cambio de posición incluso de una galaxia entera, sufriendo un desplazamiento de una posición verdadera a una observada.

Estadísticamente, dada la ecuación de Boltzmann aplicada a fotones observados tras un potencial de gravedad (sin término de colisión despreciando dispersión y absorción en el universo tardío), se establece que la función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ es conservada, de manera que la intensidad específica de la fuente I_ν (energía incidente por unidad de ángulo sólido, de área, de tiempo y de frecuencia). Al ser directamente proporcional I_ν a la función (conservada) de distribución de fotones, la intensidad específica, tanto observada para una posición angular aparente $\boldsymbol{\theta}$ como la verdadera para una fuente en $\boldsymbol{\theta}_S$, es la misma, esto es

$$I_{obs}(\boldsymbol{\theta}) = I_{verdadera}(\boldsymbol{\theta}_S). \quad (2.20)$$

Sin embargo, en la práctica el camino empleado consiste no en retener la información referente a la posición en sí misma sino en desplazamientos relativos dada la forma del objeto, esto debido a que el ángulo de deflexión de *lensing* no es constante para distintos valores angulares en el cielo.

2.3.1. Espectro de potencias de la convergencia

En la presente subsección se introducen las expresiones necesarias para el cálculo del PS de *lensing*: la convergencia. Para ello, es pertinente introducir las transformadas de Fourier en dos dimensiones, debido a la necesidad de mapear coordenadas en el cielo, aproximando la región de la bóveda celeste deseada sobre la cual se toma estadística con un plano (interviene aproximación de Limber, misma que será referida más adelante, la cual implica la consideración de pequeñas regiones, siendo válida hasta aproximadamente 200 arcmin, es decir, poco más de 3° [Limber, 1953]). Las coordenadas en este plano son $\boldsymbol{\theta}$; es decir, una distancia proyectada es escrita como una distancia angular. Las expresiones de estas transformadas en dos dimensiones son

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\ell e^{i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\theta}} \hat{f}(\boldsymbol{\ell}), \quad (2.21)$$

$$\hat{f}(\boldsymbol{\ell}) = \int d^2\theta e^{-i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\theta}} f(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.22)$$

Notar que se ha empleado la variable de escala angular ℓ (misma que será ampliamente usada a partir de ahora), la cual se relaciona con el ángulo θ inversamente ($\theta \sim 1/\ell$ en el mismo sentido en que en la escala lineal la longitud de onda y el modo de oscilación satisfacen $\lambda \sim 1/k$, siendo variables conjugadas de una transformada de Fourier.¹⁰

¹⁰ Asimismo, cabe hacer el discernimiento: ℓ también es referido como el grado de momento multipolar, denotando a los ℓ -ésimos momentos del espacio de Fourier Θ_ℓ (e.g., $\ell = 0$ denota al monopolo, $\ell = 1$ el dipolo, $\ell = 2$ el cuadrupolo, etc.) en la aproximación esférica, siendo que ℓ representa un conjunto de valores discretos (e.g., en el CMB). Sin embargo, dentro de este contexto, *i.e.*, en el caso en el que se aproxima a un plano, al ser este infinito, implica que el conjunto de vectores ℓ forman un espectro continuo.

Con el propósito de obtener el espectro de *lensing*, se toma la transformada de Fourier en dos dimensiones del tensor de distorsión (definido como el término de segundas derivadas en (1.96) del potencial de *lensing* ψ_{ij} escrito como (1.97)), *i.e.*,

$$\varphi_{ij} \equiv \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j} = \partial_i \partial_j \psi, \quad (2.23)$$

se obtiene

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{\ell}) = \ell_i \ell_j \psi(\boldsymbol{\ell}), \quad (2.24)$$

expresión que permite obtener el espectro de convergencia (*shear*) deseado, usando el hecho de que el potencial de *lensing* es descrito también vía (1.96) y (1.98), relacionándolo así con la matriz de amplificación A_{ij} . El modo- E (mencionado anteriormente en §1.5) resulta ser

$$E(\boldsymbol{\ell}) = -\varphi_{ij}(\boldsymbol{\ell}) \left(\frac{\ell^i \ell^j}{\ell^2} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \ell^2 \psi(\boldsymbol{\ell}) \equiv \kappa(\boldsymbol{\ell}), \quad (2.25)$$

es decir, el modo- E de *lensing* es igual a la convergencia misma. Por otro lado, el modo- B es cero (se discutirá posteriormente).

Así, obtener el PS del modo- E (espectro de la convergencia) significa realizar el promedio

$$\langle E(\boldsymbol{\ell}) E^*(\boldsymbol{\ell}') \rangle = (2\pi)^2 \delta_D^{(2)}(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}') C_{EE}(\ell). \quad (2.26)$$

Consecuentemente, el espectro del modo- E es equivalentemente el espectro de convergencia, ambos relacionados con el espectro de *lensing* mediante

$$C_{EE}(\ell) = C_{\kappa\kappa}(\ell) = \frac{1}{4} \ell^4 C_{\psi\psi}(\ell). \quad (2.27)$$

En particular, el espectro de *lensing* se expresa en términos del potencial de *lensing* cuando este es escrito como

$$\psi = 2 \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi} g_L(\chi) \Phi(\boldsymbol{x}(\chi), \eta_0 - \chi), \quad (2.28)$$

con $g_L(\chi)$ el kernel definido de la forma

$$g_L(\chi) \equiv \int_\chi^\infty d\chi' \frac{\chi' - \chi}{\chi'} W(\chi'), \quad (2.29)$$

resultando en

$$C_{\psi\psi}(\ell) = 4 \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi} \frac{g_L^2(\chi)}{\chi^2} P_\Phi \left(k = \frac{\ell + 1/2}{\chi}, \eta(\chi) \right). \quad (2.30)$$

En la ecuación anterior, se ha introducido el kernel de proyección de *lensing* $g_L(\chi)$ que depende de la distribución de probabilidad de galaxias misma. De igual manera, se hace usado el hecho de que $\ell \gg 1/2$, así como la ecuación de Poisson $k^2 \phi = -\frac{3}{2} \Omega_m H_0^2 a^{-1} \delta_m$ para expresar a $P_\Phi \left(k = \frac{\ell}{\chi} \right) = \left(\frac{3\Omega_m H_0^2}{2a} \right)^2 \frac{\chi^4}{\ell^4} P_\delta(\ell/\chi)$, obteniendo

$$C_{EE}(\ell) = C_{\kappa\kappa}(\ell) = \left(\frac{3}{2} \Omega_m H_0^2 \right)^2 \int_0^\infty d\chi a^{-2}(\chi) g_L^2(\chi) P_\delta \left(k = \frac{\ell}{\chi}, \eta(\chi) \right), \quad (2.31)$$

donde P_δ es el espectro de potencias de la materia, lo que significa que el PS angular de correlaciones de elipticidad de galaxias obtenido por *lensing* está directamente relacionado con el PS no lineal de materia pesado por el kernel $g_L(\chi)$. Nótese que el espectro de potencias angular de *shear* galáctico depende de todas las contribuciones a la materia, incluyendo a los neutrinos masivos, a través de P_δ .

Otra manera de expresar a los espectros (2.31) es vía la introducción de la eficiencia del lente o eficiencia de *lensing* $q(\chi)$, como se hace a continuación. Mediante las expresiones (1.102, 1.97), es posible obtener la convergencia como una densidad proyectada,

$$\begin{aligned}\kappa(\boldsymbol{\theta}, \chi) &= -\frac{1}{2}\partial^2\psi = \int_0^\chi \frac{d\chi'}{\chi} \frac{\chi - \chi'}{\chi} \partial^2\Phi \\ &= \frac{3}{2}\Omega_m H_0^2 \int \frac{d\chi'}{a(\chi')} \chi' \frac{\chi - \chi'}{\chi} \delta(\chi'\boldsymbol{\theta}, \chi'),\end{aligned}\tag{2.32}$$

donde en la segunda igualdad se usó la ecuación de Poisson.

Así, la convergencia total de una población de galaxias fuente se obtiene pesando a la función misma $\kappa(\boldsymbol{\theta}, \chi)$ con la distribución de probabilidad de galaxias $W_g(\chi)$ vista en (1.85), el espectro obtenido es

$$\begin{aligned}\kappa(\boldsymbol{\theta}) &= \int_0^\infty d\chi W_g(\chi) \kappa(\boldsymbol{\theta}, \chi) \\ &= \frac{3}{2}\Omega_m H_0^2 \int_0^\infty d\chi' \int_{\chi'}^\infty d\chi W_g(\chi) \frac{1}{a(\chi')} \chi' \frac{\chi - \chi'}{\chi} \delta(\boldsymbol{\theta}, \chi') \\ &= \int_0^\infty d\chi' q(\chi') \delta(\chi'\boldsymbol{\theta}, \chi'),\end{aligned}\tag{2.33}$$

con la eficiencia de *lensing* definida por

$$q(\chi) = \frac{3}{2}\Omega_m H_0^2 \frac{\chi}{a(\chi)} \int_\chi^\infty d\chi' W_g(\chi') \frac{\chi' - \chi}{\chi'},\tag{2.34}$$

de modo que el PS de convergencia (ahora angular) se calcula una vez más vía

$$\langle \kappa(\boldsymbol{\ell}) \kappa(\boldsymbol{\ell}') \rangle = (2\pi)^2 \delta_D(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}') C_\kappa(\ell),\tag{2.35}$$

donde bajo la aproximación de Limber¹¹ resulta en

$$C_\kappa(\ell) = \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi^2} q^2(\chi) P_\delta\left(\frac{\ell + 1/2}{\chi}, \chi\right).\tag{2.36}$$

Es importante recalcar que (2.36) es ampliamente similar al espectro angular de galaxias proyectas (el cual se obtiene de tomar $\langle \Delta_g(\boldsymbol{\ell}) \Delta_g(\boldsymbol{\ell}') \rangle$), donde la sobredensidad de galaxias

¹¹La aproximación de Limber surge de considerar ángulos de separación pequeños o, equivalentemente, ℓ grandes, típicamente para $\ell > 20$ [Limber, 1953].

proyectadas está dada por la ec. (1.86)), con la excepción de aparecer $q(\chi)$ en el lugar de la distribución de probabilidad de galaxias $W_g(\chi)$ y, aún más trascendente, el espectro que interviene ahora no es simplemente $P_g(\chi)$ sino $P_\delta(\chi)$, lo que indica un punto de relevante importancia para el este estudio y el *lensing* en general: WL comprende la evaluación de un espectro que incluye todo tipo de materia, inclusive DM.

Por otro lado, para el caso del espectro angular del *shear*, de (1.99) se observa que las componentes del *shear* pueden ser escritas como

$$\gamma(\boldsymbol{\ell}) = e^{2i\phi_l} \kappa(\boldsymbol{\ell}) = [\cos(2\phi_l) + i \sin(2\phi_l)] \kappa(\boldsymbol{\ell}), \quad (2.37)$$

de tal manera que los modos de *lensing* se componen de la forma

$$E(\boldsymbol{\ell}) = \cos(2\phi_\ell) \gamma_1(\boldsymbol{\ell}) + \sin(2\phi_\ell) \gamma_2(\boldsymbol{\ell}) \quad (2.38)$$

$$B(\boldsymbol{\ell}) = -\sin(2\phi_\ell) \gamma_1(\boldsymbol{\ell}) + \cos(2\phi_\ell) \gamma_2(\boldsymbol{\ell}) \quad (2.39)$$

haciendo que, para el cálculo de las correlaciones $\langle E(\boldsymbol{\ell})E(\boldsymbol{\ell}') \rangle$, $\langle E(\boldsymbol{\ell})B(\boldsymbol{\ell}') \rangle$ y $\langle B(\boldsymbol{\ell})B(\boldsymbol{\ell}') \rangle$, se satisfagan las relaciones (como se anticipaba parte de ello en (2.27))

$$C_{EE}(\ell) = C_\kappa(\ell), \quad C_{E,B}(\ell) = 0, \quad C_{BB}(\ell) = 0. \quad (2.40)$$

Esta es la razón por la cual los espectros de convergencia $C_\kappa(\ell)$ y *shear* $C_\gamma(\ell)$ son equivalentes, i.e.,

$$C_\gamma(\ell) = \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi^2} q^2(\chi) P_\delta \left(\frac{\ell + 1/2}{\chi}, \chi \right) = C_\kappa(\ell) \quad (2.41)$$

en equivalencia con (2.36).

La forma típica de la curva que representa al espectro de convergencia se muestra en la figura 2.5.

2.3.2. Función de correlación de WL: *shear* galáctico

La función de correlación de dos puntos (2PCF) de la convergencia (la cual es invariante ante traslación y rotación en analogía con el campo de densidad δ por homogeneidad e isotropía estadísticas) es $\langle \kappa(\boldsymbol{\vartheta}) \kappa(\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\theta}) \rangle$, que en el espacio de Fourier se expresa como (2.35), en términos del PS angular de convergencia C_κ (y la distribución Delta de Dirac δ_D) dependiente del modo ℓ en espacio angular (variable conjugada de θ).

Es importante mencionar que, así como el PS de convergencia $C_\kappa(\boldsymbol{\ell})$ es igual al de *shear* $C_\gamma(\boldsymbol{\ell})$ (2.40 indica el porqué), existe un solo estadístico de CF de *lensing*: el de *shear* mismo.¹² El PS del *shear* puede ser obtenido directamente de la observación de las elipticidades o a través de pixelización de mapas de convergencia en espacio de Fourier reconstruidas de las elipticidades mismas. Sin embargo, es más simple calcular la 2PCF del *shear*, i.e., en espacio real. En términos generales, la 2PCF del *shear* puede ser estimada simplemente multiplicando las elipticidades de pares de galaxias y haciendo un promedio.

¹²Es verdad que este cuenta con dos componentes no nulas, lo cual se verá en los siguientes párrafos; sin embargo, con la línea anterior se hace alusión únicamente a la no distinción entre convergencia y *shear* al momento de calcular tanto PS como CF.

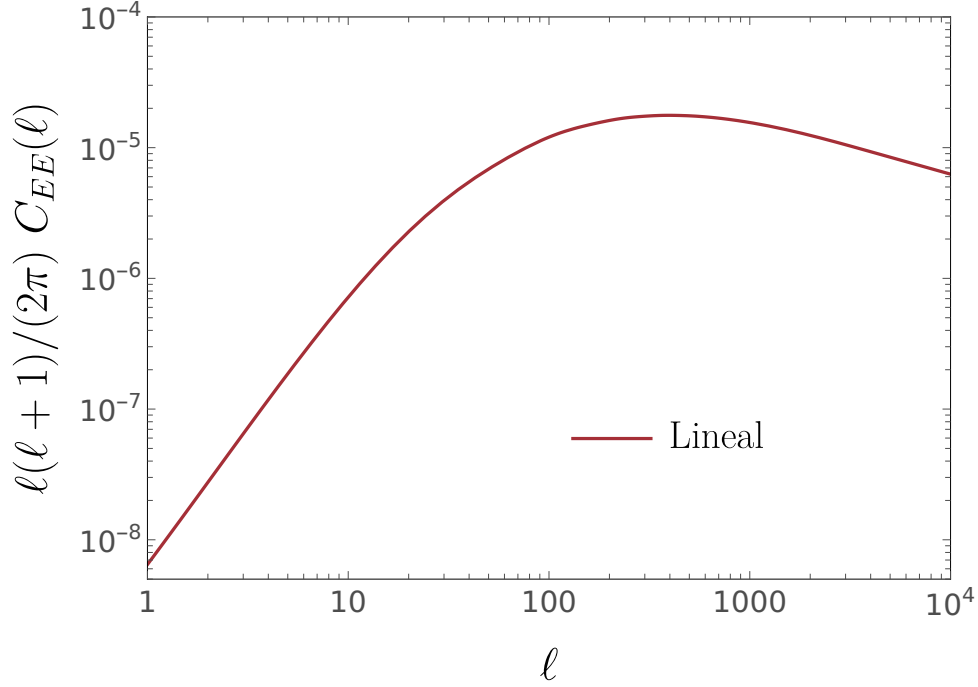


Figura 2.5: Espectro de potencias angular del modo- E del *shear*, que es equivalente al PS angular de la convergencia. La curva se muestra para un modelo a orden lineal.

Autocorrelaciones de las componentes del *shear*

Volviendo al espacio real, una vez más, mediante la transformada de Fourier, ahora desde el PS del *shear* (2.31), se obtendrá la función de correlación del *shear* ξ . De hecho, se verá que en realidad no es una sino dos funciones, una para cada componente. Para ello, es preciso recordar primero que en términos análogos a los de polarización, los componentes del *shear* se relacionan con el modo- E como

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(\ell) \\ \gamma_2(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi_\ell \\ \sin 2\phi_\ell \end{pmatrix} E(\ell), \quad (2.42)$$

siendo la autocorrelación de la primera componente (para $\ell = \mathbf{0}$ y $\ell' = \boldsymbol{\theta}$, por conveniencia)

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1(\mathbf{0})\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \rangle &= \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\ell'}{(2\pi)^2} \cos 2\phi_\ell \cos 2\phi_{\ell'} \langle E(\ell)E(\ell') \rangle e^{i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\theta}} \\ &= \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} e^{i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\theta}} \cos^2 2\phi_\ell C_{EE}(\ell). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Análogamente, el caso la autocorrelación con la componente γ_2 resulta en la misma expresión con la única diferencia de sustituir $\cos^2 2\phi_\ell$ por $\sin^2 2\phi_\ell$, de manera que al tomar la suma y resta, respectivamente, de ambas correlaciones, se tiene

$$\langle \gamma_1(\mathbf{0})\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \rangle + \langle \gamma_2(\mathbf{0})\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) \rangle = \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_0(\ell\theta) C_{EE}(\ell), \quad (2.44)$$

$$\langle \gamma_1(\mathbf{0})\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \rangle - \langle \gamma_2(\mathbf{0})\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) \rangle = \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_4(\ell\theta) C_{EE}(\ell), \quad (2.45)$$

siendo $J_0(\ell\theta)$ y $J_4(\ell\theta)$ las funciones de Bessel de primera especie de grado 0 y 4.

Componentes tangencial y cruzada, γ_t , γ_\times

Tal como se describió en (1.99), el *shear* galáctico es descompuesto en dos partes, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, en general. Sin embargo, medir distorsión de galaxias por WL mediante γ_1 y γ_2 resulta dependiente del sistema coordenado que se defina. Para generalizar la descomposición de modo que no dependa del sistema de coordenadas, se definen componentes construidas a partir de estas dos, las cuales serán paralelas o perpendiculares a la línea de conexión entre las galaxias en cuestión. Asimismo, también existe la componente cruzada que refiere a un *shear* orientado a 45° (o 135°) con respecto al vector de separación.

Así, las dos componentes de *shear* en cada galaxia son descompuestas convenientemente en la parte tangencial γ_t y cruzada (*cross*) γ_\times , definidas por su parte real e imaginaria como

$$\gamma_t = -\Re(|\gamma|e^{-2i\phi_i}); \quad \gamma_\times = -\Im(|\gamma|e^{-2i\phi_i}), \quad (2.46)$$

de modo que, en analogía con (2.44) y (2.45) se definen la suma y resta de las autocorrelaciones del *shear*, como se expresa a continuación.

Funciones de correlación del *shear* ξ_+ , ξ_-

A partir de (2.46), surgen tres correlaciones de dos puntos: $\langle \gamma_t \gamma_t \rangle$, $\langle \gamma_\times \gamma_\times \rangle$ y $\langle \gamma_t \gamma_\times \rangle$, en donde la última se hace cero, mientras que las primeras dos permiten definir las combinaciones lineales

$$\xi_+(\boldsymbol{\theta}) = \langle \gamma_t \gamma_t \rangle(\boldsymbol{\theta}) + \langle \gamma_\times \gamma_\times \rangle(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.47)$$

$$\xi_-(\boldsymbol{\theta}) = \langle \gamma_t \gamma_t \rangle(\boldsymbol{\theta}) - \langle \gamma_\times \gamma_\times \rangle(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.48)$$

las 2PCF de *shear* $\xi_\pm(\boldsymbol{\theta})$, cuyo estimador es

$$\hat{\xi}_\pm(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_{ij} w_i w_j (\varepsilon_{t,i} \varepsilon_{t,j} \pm \varepsilon_{\times,i} \varepsilon_{\times,j})}{\sum_{ij} w_i w_j} \quad (2.49)$$

sobre los pares de galaxias (i, j) en las posiciones $(\vartheta_i, \vartheta_j)$ con sus respectivas elipticidades ε (para la componente t y \times) y pesos atribuidos w .

Visto de forma integral como una transformada de Fourier, mediante (2.47, 2.48) las funciones de correlación de tipo “más” y “menos”, ξ_\pm , se expresan

$$\xi_+(\boldsymbol{\theta}) = \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_0(\ell\theta) C_{EE}(\ell), \quad (2.50)$$

$$\xi_-(\boldsymbol{\theta}) = \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_4(\ell\theta) C_{EE}(\ell). \quad (2.51)$$

De esta manera, las correlaciones del *shear* se determinan del espectro de potencias $C_{EE}(\ell) = C_{\kappa\kappa}(\ell)$, en analogía con los casos ordinarios del espectro $P(k)$.

Capítulo 3

Neutrinos masivos en cosmología

La existencia de neutrinos representa un hecho de gran relevancia no solo en la cosmología, sino en la física en general, principalmente tras el descubrimiento que dicta que estos poseen masa: en 2015, les fue otorgado el Premio Nobel de Física a Takaaki Kajita (University of Tokyo, Kashiwa Japón) y Arthur B. McDonald (Queen's University, Kingston Canadá) por los experimentos de Super-Kamiokande (neutrinos atmosféricos [Fukuda et al., 1998]) y SNO (*Sudbury Neutrino Observatory*, estudiando neutrinos solares [Ahmad et al., 2001, Ahmad et al., 2002]), respectivamente, obteniendo evidencia experimental del fenómeno de oscilación de neutrinos, el cual implica la existencia de (al menos) dos diferencias de masa no nulas (las cuales serán referidas concretamente en §3.3) entre los distintos estados de masa de neutrinos. No solo este, sino el hecho de ser también partículas que, en la evolución cósmica, representen componentes tanto de radiación como de materia en virtud de su desacople del plasma primordial y su transición no relativista, los vuelve tan importantes en el estudio de la historia térmica de nuestro universo [Fornengo et al., 1997, Hannestad and Madsen, 1995, de Salas and Pastor, 2016, Akita and Yamaguchi, 2020].

3.1. Los neutrinos en la física

Tras haberse cimentado ya las bases de la radioactividad natural (primeros años del siglo XX con Becquerel, Curie's, Rutherford), en 1911, L. Meitner y O. Hahn inician los primeros estudios del decaimiento β , los cuales llevaron a J. Chadwick al acontecimiento en donde, sorpresivamente y según la conservación de energía, se mostraba una fuerte inconsistencia en el espectro de energía esperado para tal canal de desintegración, dando lugar a la teorización de alguna partícula adicional faltante en el modelo [Chadwick, 1914] (véase la figura 3.1).

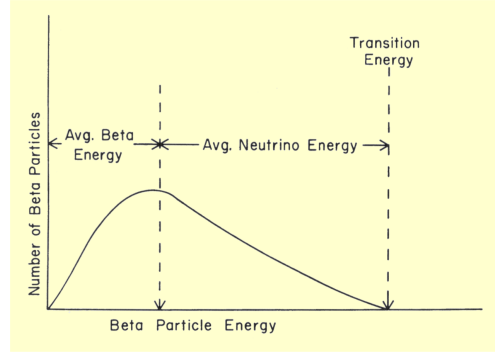
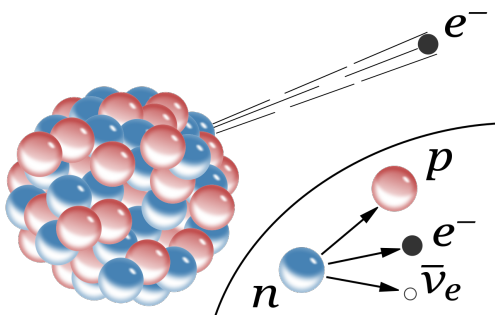


Figura 3.1: **a)** Decaimiento del neutrón en el proceso β^- [Inductiveload, 2007]. **b)** Gráfica del espectro observado del electrón (partícula β) en el decaimiento β^- de un elemento radiactivo, en donde queda de manifiesto que sigue un continuo, a diferencia de los casos del decaimiento α y γ , en donde la energía permanece en el valor constante del *endpoint*, implicando así la posible existencia de una partícula ignorada hasta ese entonces [Sprawls Educational Foundation, 2014].

Fue en 1930 que W. Pauli remitió a lo que él mismo llamó “un remedio desesperado”, proponiendo la existencia de una partícula sabida como neutra, débilmente interactuante y de espín $s = \frac{1}{2}$ [Pauli, 2000].¹ Un par de años más tarde, E. Fermi propone llamarle “neutrino” [Fermi, 1934], en relación al recién descubierto neutrón (J. Chadwick en el mismo año, 1932 [Chadwick, 1932], tras su teorización por Rutherford en 1920) por su cualidad neutra (siendo que la palabra neutrino significa “neutrón pequeño” o “chiquito” en italiano). Dos años después, en 1934, el mismo Fermi desarrolla lo que fue la primera Teoría del decaimiento β , explicando así la aparición de esta partícula en conjunto con el electrón en el canal de decaimiento del neutrón [Wilson, 1968].

No fue sino hasta 1956 que F. Reines y C. Cowan detectaron a través de fragmentos de fisión en el decaimiento beta inverso la existencia de neutrinos, confirmando así su descubrimiento experimental [Reines and Cowan Jr, 1953, Cowan Jr et al., 1956, Reines, 1996]. En 1959, Pontecorvo vendría con la propuesta de que el neutrino que acompaña al muón (partícula fermiónica μ descubierta en el 37 mediante rayos cósmicos) en el decaimiento del pión π es diferente al producido en el decaimiento beta [Pontecorvo, 1958b, Pontecorvo, 1958a, Pontecorvo, 1959]. Este hecho en conjunto con todos los experimentos que se realizarían más tarde sobre la diferencia en el sabor y el déficit de neutrinos (experimento de Brookhaven: Lederman, Schwartz & Steinberger, 1962 [Danby et al., 1962]; problema de los neutrinos solares [Davis Jr, 1955, Davis Jr, 1964, Davis Jr et al., 1968, Davis, 1994]) darían lugar a la propuesta del fenómeno de oscilación de sabores, particularmente, con Mikheyev, Smirnov y Wolfenstein en 1978 proponiendo solución al problema de neutrinos solares mediante el llamado efecto MSW, en términos de oscilaciones de neutrinos en materia [Wolfenstein, 2018, Mikheev and Smirnov, 1985, Mikheev and Smirnov, 1985].

En 1987, neutrinos de la supernova SN1987A fueron detectados en tres distintos experimentos: Kamiokande (Japón) [Hirata et al., 1987, Collaboration, 2005], IMB (Irvine-Michigan-Brookhaven, EUA) [Bionta et al., 1987, Bratton et al., 1988, Haines et al., 1988]

¹Según el Principio de Exclusión de Pauli (1925), esta partícula correspondía a un fermión.

y Baksan (en ese entonces URSS) [Alekseev et al., 1987, Alexeyev et al., 1988]. Asimismo, más experimentos relevantes fueron llevados a cabo, como lo fue a partir de 1990 el experimento LEP del CERN que contribuyó a establecer la existencia de solo tres tipos de neutrinos (o estados de sabores, las tres familias del modelo estándar, SM) [Aarnio et al., 1989, Decamp et al., 1989, Akrawy et al., 1989]. El experimento DONUT de Fermilab detecta al neutrino del taón, ν_τ [Kodama et al., 2001]. Posterior a los experimentos de Super-Kamiokande (1998) y SNO (2002) mencionados anteriormente y que dieron lugar al premio Nobel referido, diversos experimentos adicionales dieron sustento a este hallazgo (KamLAND, 2002; K2K, 2004; MINOS, 2006; Double-Chooz, Daya-Bay, RENO, 2012; T2K, 2013; OPERA, 2015).

Evidenciado por primera vez mediante el experimento de líquido centellador (LSND [LSND, 2023]), se observó que una oscilación (distinta al resto) de neutrino correspondía con una diferencia de masa $\Delta m \sim 1$ eV (anomalía LSND [Conrad et al., 2013]), lo que implicaría la existencia de un neutrino con masa de al menos 1 eV [De Angelis and Pimenta, 2018]. Por otro lado, experimentos como el *Large electron - positron* (LEP) implicaron el número de tres familias de neutrinos (activos), lo que indicaría que esta partícula represente un nuevo tipo de neutrino, que debería ser estéril, o al menos no estar acoplado a W^\pm y Z . Sin embargo, la interpretación del resultado obtenido por LSND y posteriormente MiniBooNE [Aguilar-Arevalo et al., 2013] en términos de oscilaciones a neutrinos estériles está fuertemente desfavorecida en la actualidad. Existe una fuerte tensión entre los resultados de experimentos de desaparición de $\bar{\nu}_\mu$ y de aparición de $\bar{\nu}_e$ a cortas distancias (*Short Baseline experiments*, SBL) [Kopp et al., 2011, Bolshakova and group, 2011, Bolshakova et al., 2012]. El efecto observado podría estar relacionado con otros efectos de la física más allá del Modelo Estándar.

Adicionalmente, la anomalía de reactores nucleares se ha visto desfavorecida con resultados recientes del experimento DayaBay [DayaBay HomePage, 2022], que pueden explicar la aparente desaparición de anti neutrinos de reactores con esta escala de $\Delta m^2 \sim 1$ eV² (a distancias de algunos metros) mediante un error en el cálculo del flujo de neutrinos del U-238 [Cañas et al., 2018, Dentler et al., 2020]. Aunado a todo lo anterior, el enfoque cosmológico indica que existiría incompatibilidad con tal anomalía basados en los datos combinados obtenidos de los experimentos en el CMB, LSS y el llamado Bosque de Lyman- α [Dodelson et al., 2006].

Por el otro lado, aún quedan evidencias a favor de esta anomalía, bajo la llamada anomalía del Galio, que recientemente ha sido confirmada por el experimento BEST [Barinov et al., 2018], la cual apunta también a una escala de $\Delta m^2 \sim 1$ eV².

Por fortuna, esta hipótesis no intervendría en la manera en la que está construido el Modelo Estándar para las interacciones débiles de las tres especies activas ya confirmadas, y menos así en la manera en la que este modelo es propuesto para la masa absoluta de neutrinos M_ν .

3.2. Historia térmica del universo: intervención de neutrinos masivos

Dado el dominio de cada componente (radiación, materia y constante cosmológica) expuestos en §1.1.2, es posible determinar el comportamiento del fluido cosmológico a través de las ecuaciones dinámicas que sigue la densidad de energía en términos del factor de escala. En general, $a(t)$ crece con el tiempo, de modo que la densidad tanto de radiación como de materia en el universo temprano era tan grande que existía equilibrio térmico debido a las interacciones rápidas de las partículas [Giunti and Kim, 2007]. Se teoriza que la evolución del universo puede ser comprendida en un cúmulo de eras de gran distinción: inflación, era GUT,² era hadrónica (que comprende a la época de quarks, o plasma quark-gluón, para la posterior transición quark-hadrón), era leptónica (ocurre desacople de neutrinos) y nucleosíntesis. Comienza recombinación y posterior a ello viene el fenómeno conocido como la Superficie de Última Dispersión ($z \simeq 1100$), lo que da origen al CMB. Posterior a ello, tiene lugar la llamada edad oscura, para pasar eventualmente a formación de primeras estrellas y galaxias (interviene reionización en $z \simeq 7.6$) y, actualmente, dominio de energía oscura.³

3.2.1. Breve cronología de la termodinámica en el universo

Previo a la explicación termodinámica exclusiva a los neutrinos, a modo de resumen se abordan algunos aspectos importantes de la evolución del universo temprano:

- A temperaturas muy altas ($\sim 10^{32} - 10^{12}$ K), la materia del universo existió en forma de plasma de quark-gluón, fotones, leptones y sus antipartículas. Cuando la temperatura desciende a valores alrededor de $T \sim 300 - 200$ MeV,⁴ los quarks dejan de ser partículas libres.⁵
- En la era hadrónica, se encuentran los protones, neutrones (bariones) y piones (mesones) como componentes no relativistas, de modo que estos no dominan en el universo. Por el contrario, las partículas dominantes son las relativistas (fotones y leptones).⁶

²*Grand Unified Theory*. Escala de energía a la cual todas las interacciones de la física estaban unidas. Se postula que aquí tuvieron sus inicios los primeros procesos de bariogénesis.

³Cabe mencionar que para muchos de estos eventos existen posibles traslapes y no todas estas épocas están perfectamente acotadas. A grandes rasgos, la evolución del universo puede describirse en cuatro etapas de dominio: inflación (dominio del campo de inflatón), era de radiación (inmediatamente después de inflación), materia ($z \simeq 3400$) y energía oscura ($z \simeq 0.3$). Asimismo, las transiciones entre un suceso y otro no se dieron abruptamente, sino que ocurrieron de manera suave.

⁴Se sigue que, de la relación entre la densidad de energía y el factor de escala, el universo también se enfría conforme a la relación $a(t) \propto \frac{1}{T(t)}$, es decir, el universo se enfría con la expansión.

⁵Los altos niveles de energía que permiten a los quarks permanecer no ligados descienden hasta que tiene lugar la combinación de quarks y gluones para formar hadrones (bariones y mesones). Quarks y gluones libres dejan de existir.

⁶Para las épocas previas al confinamiento de quarks, ya se encontraban los neutrinos así como el resto de fermiones (leptones, que son electrones, muones y tauones, con sus respectivas antipartículas). Para la era hadrónica, las formas de radiación eran principalmente fotones, neutrinos y algunos electrones ultra relativistas.

- La aniquilación de piones marca el fin de la era hadrónica alrededor de $T \sim 10^{12}$ K ~ 130 MeV. Los piones π^\pm se aniquilan ($\pi^+ + \pi^-$), mientras que los π^0 decaen en fotones.
- Al fin de la era hadrónica permanecen algunos protones, neutrones, leptones cargados (e^- , μ^- , τ^- , ν) y sus antipartículas, así como los fotones.
- Tiene lugar la era leptónica, en un periodo aproximado comprendido entre $T \sim 130 - 0.5$ MeV $\sim 5 \times 10^9$ K.⁷ De los leptones restantes, los muones se aniquilan ($\mu^+ + \mu^-$) en $T \lesssim 10^{12}$ K, siendo que los neutrinos aún se encuentran en equilibrio termodinámico.
- Las reacciones de interacción débil tienen una razón de interacción Γ , en donde, para el universo en expansión inhibiendo las reacciones a un ritmo H , si $\Gamma < H$, no hay equilibrio. Se verá en §3.2.4 que para $T < 3 \times 10^{10}$ K ~ 1 MeV (lo que implica justamente $\Gamma < H$), los neutrinos se desacoplarán del plasma en equilibrio, conservando su distribución de momentos y disminuyendo su temperatura con la expansión.
- Posteriormente, cuando la temperatura era $T \sim 0.5$ MeV, los pares e^\pm pasan a ser no relativistas y el límite de alta temperatura deja de ser válido: sucede la gran aniquilación de pares electrón-positrón, dando lugar al *boost* de temperatura en el baño térmico de fotones.
- Así, a $T \gtrsim m_e \simeq 5.9 \times 10^9$ K, existe equilibrio termodinámica entre fotones y electrones (positrones). Luego, cuando $T \ll m_e$ (límite no relativista), los neutrinos, ya desacoplados y fuera de equilibrio, poseen una temperatura T_ν independiente del gas de fotones a temperatura T_γ , la cual se vio incrementada por la aniquilación de electrones, mientras que T_ν simplemente decae como radiación con la expansión.

De esta manera, en la historia cósmica, los hadrones y en particular los bariones (protones, neutrones) se aniquilan primero, después los leptones cargados y finalmente los menos interactuantes y menos masivos, como lo son los neutrinos (la densidad de número de los fotones es la que disminuye menos ya que siempre estos son relativistas, al tener masa en reposo nula).

Como se ha observado ya, durante el equilibrio termodinámico las interacciones entre partículas continúan (“aniquilación en equilibrio”), hasta que la expansión supera el ritmo de interacción y sucede un efecto de *freeze out*: a mayor interacción de partículas, más tiempo siguen en equilibrio y, por tanto, se siguen aniquilando, hasta que la tasa de interacción decae por debajo de la tasa de expansión y las partículas en cuestión se desacoplan del resto de los componentes cósmicos, cesando su aniquilación, siendo que su abundancia está únicamente controlada por la expansión misma.

⁷Notar que esta es la masa del electrón, $m_e \simeq 0.511$ MeV.

3.2.2. Bases del universo térmico: Física Estadística y gas ideal

Se asume al universo como un gas de partículas e interacciones en equilibrio termodinámico con comportamiento de gas ideal (es decir, cada especie de partículas forma un gas diluido débilmente interactuante, lo cual es completamente válido para tales escalas de energía en el universo temprano) en un escenario dado por las ecuaciones de FLRW.

Para la especie x de partículas, estas forman un gas diluido débilmente interactuante con densidad de número, densidad de energía y presión⁸ dados, respectivamente, por

$$n_x = \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int f_x(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad (3.1)$$

$$\rho_x = \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int E_x(\mathbf{p}) f_x(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{P}_x = \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{3E_x(\mathbf{p})} f_x(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad (3.3)$$

siendo g_x el número de grados de libertad internos (también llamado factor de degeneración) de la especie x , $E_x = \sqrt{p^2 + m_x^2}$ la energía y $f_x(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ la distribución de momentos de las partículas en cuestión (en términos de la energía misma, el potencial químico μ y la temperatura T) introducida en la ecuación de Boltzmann, dada por

$$f_x(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{e^{(E_x - \mu_x)/T_x} \pm 1}. \quad (3.4)$$

La expresión (3.4) posee el símbolo \pm ya aplica de manera general tanto para fermiones (+) como para bosones (-). Cabe mencionar que, en la mayor parte de la historia del universo, dado que la razón barión-fotón es tan pequeña, el potencial químico asociado a bariones es despreciado.

Por otro lado, se sabe que una partícula tiene comportamiento relativista o no según la comparación de la masa en reposo y su energía cinética, en este caso dada por la temperatura (debido a que $E \sim k_B T$, con $k_B = 1.38 \times 10^{23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ la constante de Boltzmann, pero esta suele hacerse $k_B = 1$ en unidades naturales), es decir, para la temperatura T del universo en equilibrio y la masa en reposo de la partícula m

$$T \gg m, \quad (\text{relativista}), \quad (3.5)$$

$$T \ll m, \quad (\text{no relativista}). \quad (3.6)$$

De tal modo, la densidad de número de partículas y la densidad de energía (3.1 y 3.2) en el límite relativista, para el caso tanto de bosones como fermiones, son respectivamente

$$n_B \simeq \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_B T^3; \quad \rho_B \simeq \frac{\pi^2}{30} g_B T^4 \quad (\text{bosones}), \quad (3.7)$$

$$n_F \simeq \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_F T^3; \quad \rho_F \simeq \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_F T^4 \quad (\text{fermiones}), \quad (3.8)$$

con $\zeta(3)$ la función Zeta de Riemann evaluada en $n = 3$, con valor $\zeta(3) \simeq 1.202$, y donde g_B y g_F son los grados de libertad relativistas bosónicos y fermiónicos, respectivamente.

⁸A partir de ahora, no confundir al momento p (generalmente expuesto como \mathbf{p} debido a su carácter vectorial) con la presión \mathcal{P} .

3.2.3. Plasma primordial con acoplamiento de neutrinos

Los neutrinos se encontraban a la temperatura de equilibrio T_γ con el resto de partículas,⁹ a través de reacciones del tipo

$$\begin{aligned} \nu + \bar{\nu} &\longleftrightarrow e^+ + e^- \\ \overset{(-)}{\nu} + e^\pm &\longleftrightarrow \overset{(-)}{\nu} + e^\pm, \end{aligned} \quad (3.9)$$

en donde $\overset{(-)}{\nu}$ representa a un neutrino ν o un antineutrino $\bar{\nu}$ en el mismo sentido que e^\pm refiere a un positrón o electrón, en el mismo orden (debe respetarse estrictamente la manera en que se lee), las cuales son las interacciones dominantes, ya que en dominio de radiación las interacciones de protones y neutrones son despreciables. La tasa de interacción para cada neutrino es

$$\Gamma = n \langle \sigma v \rangle, \quad (3.10)$$

con n la densidad de número de blancos (partículas que participan en las interacciones débiles, e^\pm , $\overset{(-)}{\nu}$), σ la sección eficaz y v la velocidad promedio, que en conjunto estas últimas dos forman el promedio térmico. De (3.8), $n = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_{bl} T_\gamma^3$, con el número de grados de libertad de los blancos $g_{bl} = \frac{3}{4} (g_{e^\pm} + g_{\overset{(-)}{\nu}}) = \frac{30}{4}$, de modo que $\frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_{bl} \sim 1 \Rightarrow \mathcal{O}(1)$, donde además $v \sim 1$ y $\sigma \sim G_F^2 T_\gamma^2$ (siendo $G_F = 1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ la constante de acoplamiento de Fermi). De esta manera, la tasa de interacción resulta

$$\Gamma \sim G_F^2 T_\gamma^5. \quad (3.11)$$

Como se ha dicho, los neutrinos se desacoplan del resto del plasma cuando $\Gamma \sim H$,¹⁰ de manera que para el escenario establecido de universo plano en dominio de radiación, $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho}$, $\rho \propto a^{-4} \propto T^4$,

$$H \sim \sqrt{G} T_\gamma^2. \quad (3.12)$$

Al momento del desacople, los neutrinos aún compartían la misma temperatura en equilibrio, es decir, $T_\gamma = T_\gamma^{\nu-dec}$.

⁹A lo largo de esta sección y posteriores, se referirá con esto a la temperatura de los fotones, siendo que los fotones abundaban en el baño térmico y debido a que, por fines prácticos, las ecuaciones son escritas en términos de la misma cantidad siempre, ya que corresponde a la temperatura del CMB y es la que hoy en día se puede medir con precisión.

¹⁰En general, cierta especie de partículas se desacopla del plasma primordial cuando su razón de interacción Γ se vuelve menor que la tasa de cambio de temperatura (en este caso, la temperatura de equilibrio del gas de fotones), *i.e.*,

$$\Gamma \lesssim |\dot{T}_\gamma|/T_\gamma.$$

En el caso del universo en expansión, se sabe que $T \propto \frac{1}{a}$. Por lo tanto, la condición de desacople toma la forma

$$\Gamma \leq H.$$

3.2.4. Desacople de neutrinos y transición de estado relativista

De la condición de desacople y en virtud de (3.11 y 3.12), se sigue que

$$G_F^2 T_\gamma^5 \sim \sqrt{G} T_\gamma^2, \quad (3.13)$$

concluyendo que la temperatura de desacople de los neutrinos con el plasma primordial es

$$T_\gamma^{\nu-dec} \simeq 1.3 \text{ MeV} \gg m_\nu \sim \mathcal{O}(0.1 - 1 \text{ eV}), \quad (3.14)$$

es decir, los neutrinos se desacoplan siendo aún relativistas (de acuerdo con diversas fuentes, la masa de los neutrinos, aún sin ser medida, se sabe que es menor que 1 eV por los experimentos de decaimiento de tritio [Aker et al., 2022] y mayor que 0.06 eV por observaciones de oscilaciones de neutrinos).

Cuando una especie se desacopla siendo relativista, conserva su distribución de momentos relativistas de la misma forma y se dice que esta especie de partícula es una reliquia caliente. Dado que los neutrinos eran relativistas al momento de su desacoplamiento, su temperatura desciende como [Giunti and Kim, 2007]

$$T_\nu = \frac{T_\gamma^{\nu-dec}}{a/a_{\nu-dec}} \sim a^{-1}. \quad (3.15)$$

Bajo dominio de radiación, la temperatura del plasma (T_γ) también desciende inversamente con el factor de escala, por lo que durante un breve tiempo $T_\nu = T_\gamma$. Sin embargo, posteriormente deja de satisfacerse este escenario.

Gran aniquilación de pares e^\pm

Posterior al desacople de neutrinos, los pares de electrón-positrón (ahora no relativistas) en equilibrio con los fotones se aniquilan (ver figura 3.2), siguiendo el proceso adiabático

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (3.16)$$

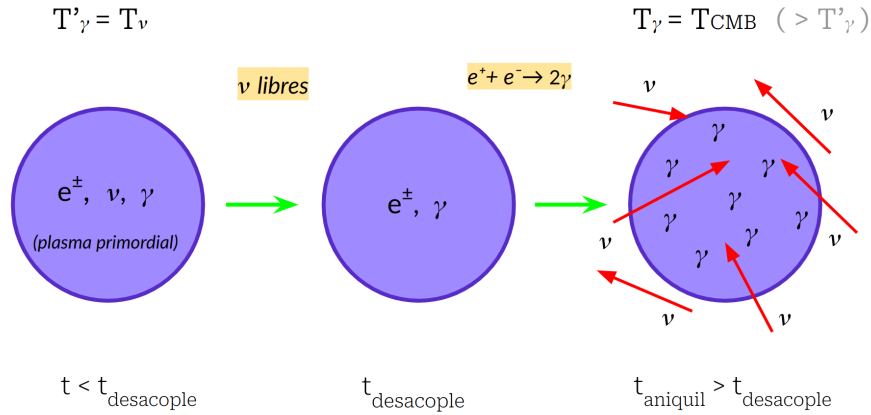


Figura 3.2: Gran aniquilación de pares electrón-positrón que ocurre posterior al desacople de neutrinos, dando inicio a la era radiativa. Este proceso (3.16) provocó un aumento en la temperatura del gas de fotones con respecto a la temperatura de los neutrinos, hecho mismo que se discutirá en la presente sección. Pevio al desacople de los neutrinos, el plasma primordial se encontraba a la temperatura común T'_γ (izquierda); al desacoplarse los neutrinos, su temperatura permaneció como $T_\nu = T'_\gamma$ (centro); tras ocurrir la aniquilación de pares e^\pm , la temperatura de los fotones incrementó con respecto al baño térmico inicial, al valor $T_\gamma = T_{\text{CMB}}$ (derecha).

Al ser adiabático ($dS = 0$), la transición antes y después de la aniquilación permite establecer $S(a_1) = S(a_2)$, siendo estas respectivamente la cantidad de entropía en los instantes a_1 antes de la aniquilación (con temperatura en común T'_γ) y a_2 posterior a la aniquilación, en donde la temperatura de los neutrinos es T_ν y la temperatura de los fotones pasa a ser T_γ ,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{2\pi^2}{45} V g T_\gamma^3 \\
 \Rightarrow \frac{T_\nu}{T_\gamma} &= \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Véase el apéndice A para los detalles de este cálculo.

Temperatura del fondo de neutrinos

De los resultados expuestos en §1.4 de Planck para la temperatura actual del CMB $T_\gamma = 2.726$ K, se sigue de la ec. (3.17) que la temperatura del fondo de neutrinos al día de hoy es

$$T_\nu^0 \simeq 1.94 \text{ K}, \tag{3.18}$$

o en general para el *redshift* z

$$T_\nu \simeq 1.676 \times 10^{-4} (1 + z) \text{ eV}. \tag{3.19}$$

Asimismo y como se anticipaba en la introducción de este capítulo, de los experimentos de oscilación de neutrinos, se sigue que al menos dos estados de masa definidos m_k tendrían masa $m_k \neq 0$,

$$m_k \gtrsim \sqrt{\Delta m_{sol}^2} \sim 8.6 \times 10^{-3} \text{ eV} \gg T_\nu^0, \quad (3.20)$$

siendo Δm_{sol}^2 la diferencia de masas al cuadrado en experimentos de neutrinos solares, atribuida a la diferencia de los estados de masa m_k más cercanos, tal que satisface $\Delta m_{sol}^2 \ll \Delta m_{atm}^2$ con la diferencia de masas al cuadrado en neutrinos atmosféricos [Esteban et al., 2020].¹¹ Por ende, al menos dos especies de neutrinos masivos son hoy en día no relativistas.

Cota en masa de los neutrinos: límite de Gershtein - Zeldovich

A partir de la expresión para la densidad de número de fermiones vista (3.8), la abundancia de una sola especie de neutrino (o antineutrino) con estado $(\bar{\nu})_k$ hoy en día se determina como

$$n_{(\bar{\nu})_k}^0 = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_{(\bar{\nu})} (T_\nu^0)^3, \quad (3.21)$$

con $g_{(\bar{\nu})} = g_\nu + g_{\bar{\nu}} = 1 + 1$ la contribución de un neutrino de quiralidad izquierda y un antineutrino de quiralidad derecha de la misma especie,¹² obteniendo así

$$n_{\nu_k}^0 + n_{\bar{\nu}_k}^0 = \frac{3}{11} \underbrace{\left[\frac{\zeta(3)}{\pi^2} (T_\nu^0)^3 \right]}_{n_\gamma^0} = \frac{3}{11} n_\gamma^0, \quad (3.22)$$

siendo n_γ^0 el valor bien conocido de la abundancia de fotones hoy en día [Dodelson and Schmidt, 2020], con valor de

$$n_\gamma^0 = 411 \text{ cm}^{-3}. \quad (3.23)$$

De esta manera,

$$n_{(\bar{\nu})_k}^0 = 112 \text{ cm}^{-3}, \quad (3.24)$$

representando la segunda partícula más abundante en el universo, solo por debajo de los fotones.

De la definición del parámetro de densidad Ω , se tiene que una especie de neutrino (no relativista) con estado de masa m_k contribuye a esta abundancia con

$$\Omega_k^0 = \frac{n_{(\bar{\nu})_k}^0 m_k}{\rho_{cr}^0} = \frac{m_k}{93.14 \text{ eV } h^2}. \quad (3.25)$$

Por lo tanto, la contribución de todas las especies de neutrinos no relativistas hoy en día, estará dada por

$$\Omega_\nu^0 = \frac{M_\nu}{93.14 h^2 \text{ eV}}, \quad (3.26)$$

¹¹Se ahondará en los detalles de estas aseveraciones en §3.3

¹²Existe un grado de libertad de espín para cada generación de (anti)neutrino. Asimismo, en el Modelo Estándar no existen neutrinos derechos o antineutrinos izquierdos, únicamente con la quiralidad mencionada.

con

$$M_\nu \equiv \sum_k m_k. \quad (3.27)$$

Usando esta ecuación, y asumiendo $\Omega_\nu^0 < 1$, se obtiene el límite para la masa de los neutrinos $M_\nu < 93.14 h^2 \text{eV}$. Este es el nombrado límite de Gershtein-Zeldóvich para la masa total de los neutrinos [Gershtein and Zel'dovich, 1966], dado en el año 1966.¹³

De este resultado, es posible establecer un límite más directamente en M_ν basándose en el valor de Ω_m [Aghanim et al., 2020a] más permisivo, siendo que $\Omega_\nu < \Omega_m$, con $\Omega_m h^2 = 0.1432 \pm 0.0020$. Así,

$$M_\nu < 13.34 \text{ eV}. \quad (3.28)$$

3.2.5. *Neutrino Dark Matter*

Acorde a las discusiones dadas en el primer capítulo (§1.2, 1.4), la formación de la LSS es una consecuencia de las perturbaciones de densidad de materia en el universo, las cuales fueron aglomerándose en sobredensidades cada vez mayores debido a efectos gravitatorios, esencialmente por materia oscura. En esta sección, se abordan las posibilidades y aspectos implicados por el tipo de materia que dio lugar a estos pozos de potencial que atrajeron a la materia a la estructura que hoy conocemos.

Por la inflación, se sabe que las fluctuaciones primordiales estuvieron siempre dentro de la escala del horizonte dado por inflación, d_{iH} , (como es requerido por causalidad), pero no del horizonte de partícula d_H (no inflación); posterior a este periodo, el horizonte creció más rápido que el factor de escala $a(t)$ (en dominio de radiación con el horizonte escalando como $d_H \propto a^2$ y en dominio de materia como $d_H \propto a^{3/2}$), de modo que la longitud de onda de las perturbaciones de densidad entraron al horizonte.¹⁴

Considérese como escala de superhorizonte a aquellas que salen de este, es decir, las fluctuaciones con longitud de onda $\lambda > d_H$, denominadas perturbaciones del superhorizonte. La amplitud de estas fluctuaciones crecen con la expansión independientemente del número de onda.

El comportamiento y evolución de las perturbaciones de densidad de cada componente estará dado en dependencia de la velocidad de sonido que este posea, según sea el caso:

¹³Algunas fuentes como [Giunti and Kim, 2007] reportan este límite bajo la cifra

$$\Omega_\nu^0 = \frac{M_\nu}{94.14 h^2 \text{eV}}.$$

Sin embargo, este cálculo es realizado asumiendo (incorrectamente) un desacople instantáneo del plasma primordial y simultáneo para las tres especies de neutrinos, mientras que se trata de un proceso de tiempo finito, además de que, debido a su diferente naturaleza (masa) por cada familia, se sigue que no necesariamente tuvo que haber sido simultáneo el desacople para todos los neutrinos.

¹⁴Cabe notar que para la formación de estructura, el horizonte dado por inflación d_{iH} es irrelevante, siendo que las partículas se generaron por el decaimiento del campo del inflatón al fin de esta época. Así, el comportamiento a observar es el del horizonte d_H con respecto a la longitud de onda de las fluctuaciones.

materia bariónica, materia oscura fría (CDM) y materia oscura caliente (HDM), dando lugar a un análisis individual de materia con velocidades térmicas en flujo libre (*free streaming*), donde los neutrinos juegan un papel crucial.

Hot Dark Matter vs Cold Dark Matter

Un fuerte candidato a materia oscura es el propuesto en los 70s bajo el nombre de WIMPs (*Weakly interacting massive particles*) [De Swart et al., 2017]. Tal como se argumentó sobre los neutrinos en un principio, estos cumplen con gran parte de las características deseadas por los WIMPs. Por definición, HDM y CDM en principio estarían compuestos por WIMPs, siendo esencialmente las velocidades promedio lo que las diferencian.

Hot dark matter

Los WIMPs como reliquias calientes son una forma de HDM, con densidad de número del orden de $n_{\gamma-CMB}$ (3.22). Al ser reliquias calientes, estas debieron desacoplarse cuando eran aún relativistas, a una temperatura debajo de la transición quark-hadrón (~ 300 MeV). Neutrinos con masa del orden de 1 eV corresponden a candidatos naturales para HDM [Giunti and Kim, 2007], siendo que para estas escalas de masa (como se ha visto), hoy en día representan partículas no relativistas. Sin embargo, poseen una velocidad promedio relativamente grande, dada por (ver apéndice B)

$$v_{HDM}^0 \simeq 150 \left(\frac{T_{HDM}^0}{T_\nu^0} \right) \left(\frac{1 \text{ eV}}{m_{\nu_{HDM}}} \right) \text{ km/s.} \quad (3.29)$$

Free streaming

Así, cuando las partículas de HDM eran aún relativistas, sus perturbaciones dentro del horizonte fueron “borradas” por el denominado *free streaming*: velocidades de partículas aleatorias cercanas a c permitieron a la materia caliente escapar de las regiones de sobre-densidad (ver figura 3.3).

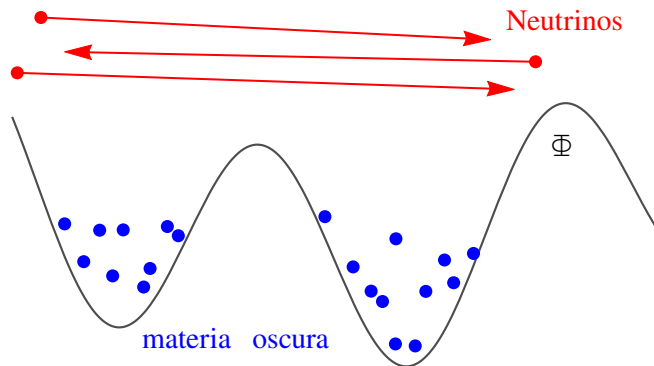


Figura 3.3: *Free streaming* de los neutrinos con respecto a los pozos de potencial creados por las regiones de sobredensidad de la materia. Figura adaptada de [Aviles, 2022].

Los WIMPs eran un gas sin colisiones en la formación de LSS y mantuvieron el *free streaming* en su etapa relativista, dispersando las sobredensidades de HDM con tamaños menores que el horizonte. Sin embargo, este efecto cesó cuando el gas se volvió no relativista a *redshift* z_{nr} , provocando que solo las perturbaciones de longitud de onda $\lambda > d_H(z_{nr})$ prevalecieran y pudieran participar en la generación de estructura en el Universo.

Cold dark matter

En cuanto al caso de WIMPs formados por materia fría, el desacople se da cuando estas partículas eran no relativistas, de modo que su densidad de número pudiese ser muy pequeña y su masa muy grande, teniendo así velocidades térmicas despreciables [Giunti and Kim, 2007]. Dadas estas consideraciones, neutrinos pesados ν_h ($m_{\nu_h} \gtrsim \frac{m_{Z^0}}{2} \simeq 45$ GeV según mediciones del LEP en la anchura de decaimiento del bosón Z^0 a neutrinos [collaboration et al., 2005]) podrían ser candidatos de este tipo de DM. Fuera de este esquema, otros posibles candidatos serían hipótesis como neutrinos estériles pesados, partículas supersimétricas, axiones o agujeros negros primordiales.

La reliquia fría de WIMPs como CMD es un gas no relativista de partículas sin colisiones que no presenta *free streaming* ($v \simeq 0$). Como se verá en el siguiente capítulo, la evolución de las perturbaciones de densidad de subhorizonte para CDM en el régimen lineal está dada por

$$\ddot{\delta}_{\text{CDM}}(t, \mathbf{k}) + 2H\dot{\delta}_{\text{CDM}}(t, \mathbf{k}) - 4\pi G\rho_{\text{CDM}}\delta_{\text{CDM}}(t, \mathbf{k}) = 0. \quad (3.30)$$

Previo a la igualdad de materia y radiación t_{eq} (en dominio de radiación, $t < t_{eq}$), $\delta_{\text{CDM}}(t, \mathbf{k})$ permanece casi constante, con un incremento logarítmico (efecto Meszaros [Meszaros, 1974]; crecimiento es frenado gradualmente al momento en que tal perturbación entra al horizonte). Por otro lado, para el dominio de materia ($t > t_{eq}$) la perturbación de densidad de CDM evoluciona como $\delta_{\text{CDM}}(t, \mathbf{k}) \propto t^{2/3}$.

Así, para escalas mayores al horizonte, las perturbaciones evolucionan como

$$\delta_{\text{CDM}} \propto \begin{cases} R^2 \sim t & (\text{dominio de radiación}) \\ R \sim t^{2/3} & (\text{dominio de materia}). \end{cases} \quad (3.31)$$

Es importante notar que esto ocurre únicamente para perturbaciones pequeñas ($\delta_{\text{CDM}} \ll 1$) en donde la aproximación lineal es válida.

3.3. Oscilaciones de neutrinos y el problema del ordenamiento de masas

Experimentos de neutrinos solares y atmosféricos (KamLAND y K2K), así como de reactores nucleares y de aceleradores a grandes distancias, han mostrado que estas partículas poseen la peculiaridad de transitar entre estados de sabor. Una especie de neutrino usualmente no está caracterizada por un estado definido de masa (definidos como los estados propios del Hamiltoniano sin interacciones), sino que un “estado de sabor” (correspondiente a los estados en los que participan en la interacción débil) ν_α está dado por la superposición (combinación lineal) de “estados de masa” ν_k ,¹⁵ visto de la forma

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k} \nu_{kL}, \quad (3.32)$$

en un esquema de mezcla de neutrinos (izquierdos), con $\alpha = e, \mu, \tau$ los sabores o especies activas acorde al Modelo Estándar de la Física de Partículas (SM), y $U_{\alpha k}$ la matriz de Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS), o simplemente llamada la matriz de mezcla, introducida en [Maki et al., 1962]. Este fenómeno que les permite un cambio de sabor representado en (3.32) es conocido como la oscilación de neutrinos, cuya probabilidad de transitar de un estado de sabor α a uno β está dada, en el vacío, por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) + 2 \sum_{k>j} \Im \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right), \quad (3.33)$$

con U_{ij}^* a matriz transpuesta conjugada de la matriz de mezcla, L la longitud de oscilación (entre emisión y detector en el experimento), E la energía de la fuente y $\delta_{\alpha,\beta}$ la delta de Kronecker, donde $\alpha \neq \beta$ (debido a que se trata de un experimento de transición de sabor, mientras que el caso $\alpha = \beta$ corresponde a una probabilidad de supervivencia $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}$).

Siendo que se sabe de los experimentos que este fenómeno de hecho ocurre, la probabilidad de transición de un estado α a β debe ser, en efecto, $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \neq 0$. De tal manera, al ser la probabilidad (3.33) dependiente de L y E , además de requerir las condiciones triviales

¹⁵Se suele denotar a los estados de masa con los índices latinos i, j, k , así como a los estados de sabor con los índices griegos α, β .

de longitud y energía no nulas, se hace particular hincapié en que $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ es sensible a un *split* de masa cuadrada entre dos estados masivos. Así, dado que la matriz de mezcla es unitaria ($UU^* = \mathbb{1}$), para que exista al menos un canal de oscilación (en este caso transición, no supervivencia) con probabilidad no nula, debe existir asimismo al menos dos estados masivos distintos, tal que consecuentemente se tenga una diferencia Δm_{ij}^2 distinta de cero (en el mismo esquema de tres neutrinos).

En virtud de lo anterior, estas partículas no solo deben poseer masa (una diferencia entre pares de estados de masa al cuadrado, en realidad), sino que están sujetas a dos posibles configuraciones. Es decir, al desconocerse actualmente el valor de masa de cada estado de neutrino m_k , así como la masa absoluta M_ν , los resultados de los experimentos en oscilaciones brindan dos opciones en las que puede establecerse el esquema en la escala de masas. Este problema es conocido como el problema de la jerarquía de masas en neutrinos, o más actualmente, el problema del ordenamiento de masas de los neutrinos. Estas dos posibles configuraciones, aludidas comúnmente como clases, son conocidas como el Ordenamiento Normal (ON) e Invertido (OI).

De la ecuación (3.32), se pueden observar tres diferencias de masas al cuadrado $\Delta m_{i,j}^2$,

$$\Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2, \quad \Delta m_{31}^2 \equiv m_3^2 - m_1^2, \quad \Delta m_{32}^2 \equiv m_3^2 - m_2^2, \quad (3.34)$$

lo que indica que en este esquema hay dos diferencias independientes. Estas pueden verse de

$$\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2, \quad (3.35)$$

permitiendo escribir la tercera en términos de las otras dos. Estos *split* de masas (tres en total, dos independientes) son confirmados por los experimentos como dos diferencias con órdenes de magnitud muy característicos: un *split* “menor” dado por los experimentos en neutrinos solares y uno “mayor” de los experimentos con neutrinos atmosféricos, del orden de $\sim 1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ y $\sim 1 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, respectivamente.¹⁶ Según el problema del ordenamiento de masas, la pregunta es: ¿qué diferencia de masa tiene estados más masivos? ¿cuál la de menos masivos? ¿qué configuración en una escala absoluta de masas es la correcta?

La respuesta son, precisamente, estas dos posibilidades referidas anteriormente: la primera, la diferencia más pequeña de masas corresponde a los dos estados más ligeros y el tercer estado de masa es el de la diferencia mayor (ON); la segunda, el autoestado de masa más ligero es seguido por un doblete de autoestados de mayor masa ($\sim 1 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ más pesados), siendo nuevamente de $\sim 1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ la diferencia de masa entre el doblete (OI). Ambas clases de ordenamiento tienen la representación de la fig. 3.4, en donde se elige arbitrariamente el etiquetado para la numeración de los neutrinos masivos con el fin de tener

$$\Delta m_{sol}^2 \equiv \Delta m_{21}^2, \quad \Delta m_{atm}^2 \equiv |\Delta m_{31}^2|, \quad (3.36)$$

¹⁶El signo de Δm_{21}^2 está fijo por las observaciones de oscilaciones en neutrinos solares mediante el efecto MSW en el Sol. Estas determinan que el estado 1 es el que tiene mayor composición de sabor del electrón, mientras que el estado 2 tiene composición similar de estados del electrón y del muón. Por el momento no existe una restricción similar para el otro *split*, Δm_{31}^2 , pues solo se ha medido en oscilaciones en el vacío, por lo que su signo permanece indeterminado.

bajo la aproximación

$$\Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31}^2. \quad (3.37)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \Delta m_{32}^2 &= \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2 \\ &= \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{sol}^2 \\ &\simeq \Delta m_{31}^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

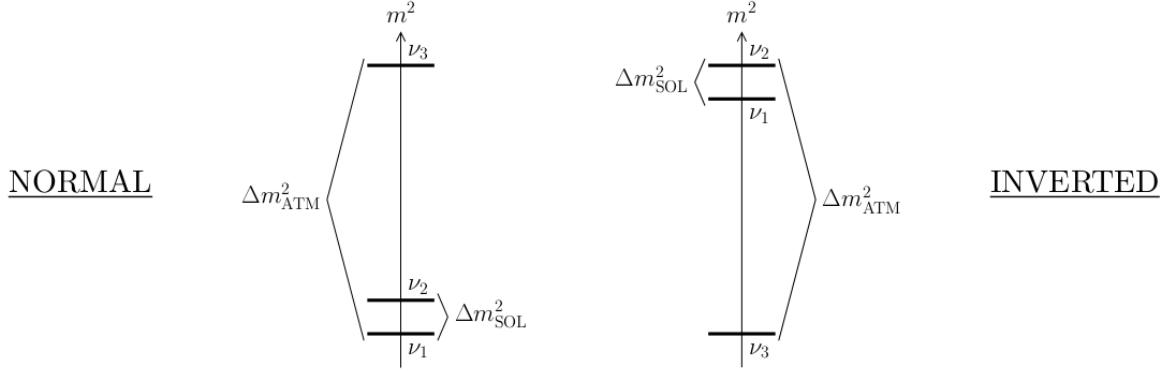


Figura 3.4: Esquemas permitidos (dos) de la mezcla de tres neutrinos masivos por el ordenamiento $\Delta m_{sol}^2 \ll \Delta m_{atm}^2$ [Giunti and Kim, 2007].

3.3.1. Estatus actual del problema de ordenamiento de masas

En la actualidad, no se ha establecido preferencia absoluta por alguno de los dos esquemas. Experimentos y colaboraciones como T2K, NOvA y *NuFIT* reúnen esfuerzos año tras año para poder dar respuesta a esta interrogante (muchos de ellos convergiendo a través de eventos como las conferencias celebradas por la *International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics*).

La matriz de mezcla PMNS entre los tres estados, es escrita en términos de los parámetros buscados por tales experimentos, siendo estos las dos diferencias independientes de masa (Δm_{21}^2 y Δm_{31}^2), tres ángulos de oscilación (θ_{12} , θ_{23} , θ_{13}) y una fase compleja $e^{i\delta}$. Efectivamente, los datos sustentan $|\Delta m_{31}^2| \gg \Delta m_{21}^2$, y $\Delta m_{21}^2 > 0$ de mediciones de neutrinos solares. Específicamente, los resultados más recientes de la contribución *NuFit* [NuFIT, 2022b] (5.2, 2022) muestran

$$\begin{aligned} \text{ON: } \Delta m_{21}^2 &= 7.41_{-0.20}^{+0.21} \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ \Delta m_{31}^2 &= 2.507_{-0.027}^{+0.026} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \text{OI: } \Delta m_{21}^2 &= 7.41_{-0.20}^{+0.21} \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ \Delta m_{31}^2 &= -2.486_{-0.028}^{+0.025} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

para ambas clases con el mejor ajuste a $\pm 1\sigma$ añadiendo datos de SK en experimentos atmosféricos [Esteban et al., 2020].

Una mejor representación de la figura 3.4 con la actualización de esta última discusión es brindada por la figura 3.5.

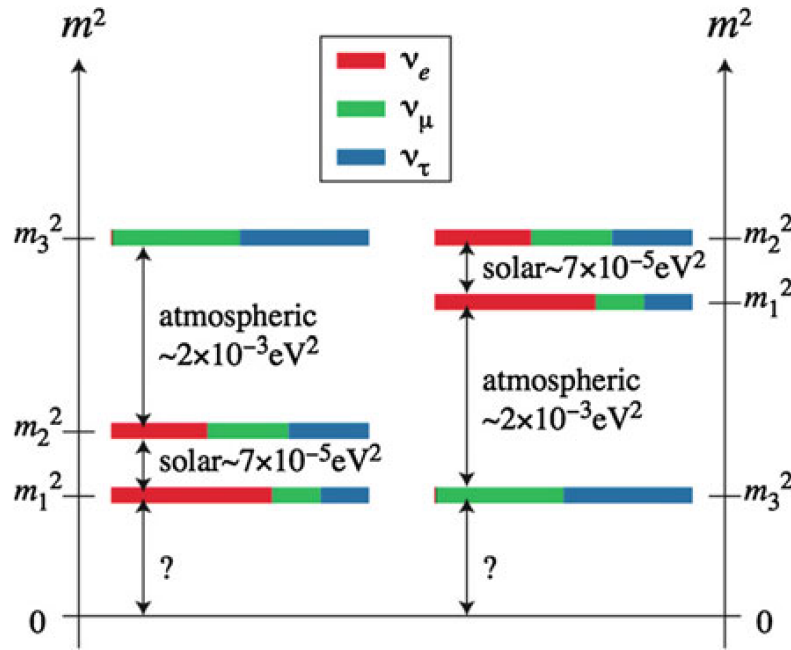


Figura 3.5: Diagrama de la relación entre eigenestados de masa (1, 2 y 3) para neutrinos de sabor α (neutrinos solares son usados para determinar la relación entre m_2 y m_1 , donde m_3 puede ser más grande o más pequeña). La contribución fraccional de cada familia al estado propio de masa correspondiente es señalado por las barras de color [De Angelis and Pimenta, 2018].

Estos últimos resultados (*NuFIT* 5.2 [NuFIT, 2022a]) muestran que el ordenamiento normal es ligeramente favorecido, con un nivel de 1.6σ . Combinado con los datos de SK para análisis de neutrinos atmosféricos, esta preferencia por el ON incrementa a 2.7σ [Esteban et al., 2020]. De allí que incluso colaboraciones como lo es *Planck* remitan al uso de una jerarquía normal como *ansatz*, adicional al modelo base Λ CDM establecido.

El estudio de catálogos de galaxias (en este caso, de *lensing*) podrían significar una pista para dar respuesta a esta situación, al acotar la masa absoluta de estas partículas.

3.4. Efectos de los neutrinos en cosmología

Un detalle trascendente en neutrinos masivos en cosmología es el hecho que estas partículas contribuyen no solo a la materia hoy en día (al menos dos especies no relativistas) sino que en el pasado formaron parte de la densidad de radiación (forma relativista de los neutrinos antes de su transición a no relativista). Esta aseveración es importante ya que establece que los neutrinos aportan a ambas abundancias, radiación y materia, y que es en virtud de su masa el indicativo del momento en que estos transitaron de relativistas a no

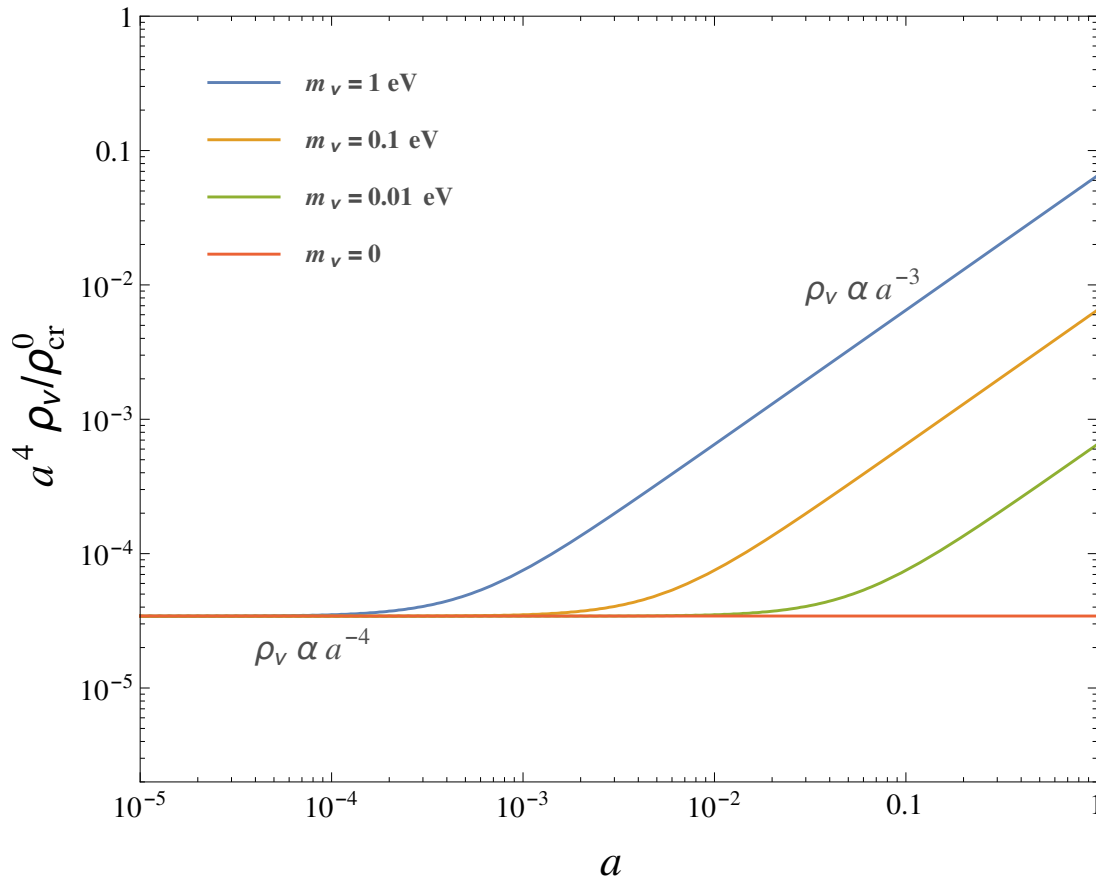


Figura 3.6: Momento de la transición al límite no relativistas en función del orden de sus masas. A mayor masa, antes es el momento de su transición. Figura adaptada de [Aviles, 2022].

relativistas. La figura 3.6 muestra la densidad de una especie de neutrinos multiplicada por a^4 , de tal manera que se obtiene una representación de cuando estas partículas se sufren su transición, en función de sus posibles masas, comportándose como una constante cuando son relativistas.

Los neutrinos se vuelven no relativistas cuando la energía promedio por partícula en el límite relativista es menor que su masa en reposo, es decir, $\langle E_\nu \rangle \simeq 3.15 T_\nu < m_{\nu k}^{(0)}$ [Shoji and Komatsu, 2010]. Esto ocurre al *redshift*

$$1 + z_{\text{nr}, k} \simeq 189 \left(\frac{m_{\nu, k}}{0.1 \text{ eV}} \right). \quad (3.41)$$

Diversos autores pertenecientes a ambas áreas, tanto de física de partículas como astrofísica [Gershtein and Zel'dovich, 1966, Szalay and Marx, 1976, Cowsik and McClelland, 1972], señalaron desde un principio que la simple observación de que la densidad total no era mucho mayor que la densidad crítica conduce a restricciones en la masa de neutrinos que son mucho más estrictas que las que entonces se podían obtener de los experimentos de laboratorio. La posibilidad de que los neutrinos pudieran constituir una fracción de la densidad total (una vez siendo constituyentes de materia y no de radiación) resurgió en

los 90s, cuando se postuló que sería posible estimar una pequeña cantidad de neutrinos correspondientes a masas más pequeñas que 1 eV, observando su efecto en la LSS [Hu et al., 1998].

3.4.1. Época relativista: efectos en el CMB

De la discusión en §3.2.4, se ha establecido ya que los neutrinos se desacoplaron del plasma primordial (electrones, positrones y fotones) durante la era leptónica, cuando estos aún eran relativistas (presumiblemente al menos dos especies), hasta transitar al régimen no relativista que se conoce hoy en día ($m \gg T_\nu$). Este conjunto de sucesos son de vital importancia en la evolución cósmica, ya que marcan diferencias cruciales en las características del fondo de fotones y su temperatura, así como un efecto en los neutrinos en virtud del valor de la masa de estos, incluso para cada especie: al tratar con distintos eigenestados de masa, se tendría un momento preciso de desacople distinto para cada familia, así como una transición no relativista a distintos *redshift*. En general, a mayor valor de masa asociado a los neutrinos, es que sucedería más pronta la transición de límite relativista y el desacople se daría en condiciones distintas.

En particular, el proceso (3.16) de aniquilación de pares es de relevante importancia, debido a que representa el agente responsable de que exista un fondo de fotones con una temperatura considerablemente mayor al de neutrinos, siendo que inicialmente estaban a la misma temperatura de equilibrio: al darse esta reacción, la producción de tal cantidad de fotones (dos por cada par e^\pm) lleva a un incremento considerable de estos y, con ello, de su temperatura (de allí que el resultado reproducido sea ~ 1.4 veces mayor, según 3.19).

3.4.2. Época no-relativista: supresión de la formación de estructura

Mediciones precisas del espectro de potencias de la materia permiten inferir la masa de los neutrinos. Fue en 1998 que Hu, Eisenstein y Tegmark propusieron por primera vez estimar la masa absoluta M_ν vía los efectos de supresión en el PS usando catálogos de galaxias [Hu et al., 1998].

En general, el crecimiento de la estructura se ve afectado directamente por la masa de los neutrinos en dos maneras: por un lado, la densidad de energía de este componente evoluciona en el universo temprano como $\rho \propto a^{-4}$ (radiación), mientras que posteriormente decae como $\rho \propto a^{-3}$ (materia), lo que implica una modificación en la tasa de expansión vía la ecuación de Friedmann, alterando asimismo al factor de crecimiento; por el otro lado, debido a que los neutrinos como HDM se desplazan a altas velocidades y poseen un *free streaming* que les permiten salir de las regiones de sobredensidad, inhibiendo así el crecimiento de la estructura a pequeña escala. Por ende, se suprimen las perturbaciones en escalas más pequeñas que la distancia típica que recorren los neutrinos, la escala de *free streaming*.

Es posible estimar la escala en la que se amortiguan las perturbaciones calculando la distancia de comovimiento que puede viajar un neutrino masivo en un tiempo de Hubble

[Shoji and Komatsu, 2010]. Esta escala estará dada, claro está, en términos de la masa misma, del factor de escala, la tasa de Hubble (construida a través de este mismo), y su valor constante al tiempo presente, H_0 , mediante

$$k_{\text{fs}}(a) \simeq 0.063 h \text{ Mpc}^{-1} \frac{m_\nu}{0.1 \text{ eV}} \frac{a^2 H(a)}{H_0}. \quad (3.42)$$

Así, un mayor (menor) valor en la masa de los neutrinos significa una mayor aportación a la densidad total del universo, provocando así una mayor (menor) supresión al PS a pequeñas escalas.

De acuerdo con [Hu et al., 1998], las mediciones cosmológicas representan una vía indirecta e independiente de la medición de M_ν que pudiera representar un paso adelantado a los experimentos en física de partículas. Esta situación, adicionalmente, se presume en vistas de mejora considerable en el futuro cercano debido a la buena precisión en la medición de parámetros cosmológicos vía el CMB y los *surveys* de galaxias.

Neutrino signature

El espectro inicial de las fluctuaciones de densidades adiabáticas escala como $P(k) \propto k^n$, evolucionando según la inestabilidad gravitacional de las fluctuaciones. Tal como se ha comentado con respecto al *free streaming*, los grandes momentos p_ν evitan que los neutrinos se agrupen con los componentes fríos en escalas más pequeñas que las que estos pueden moverse en un tiempo de Hubble. De esta manera, el crecimiento de tales fluctuaciones es entonces suprimido en escalas debajo del horizonte, en las que los neutrinos se vuelven no relativistas. Tal escala está dada como [Hu et al., 1998]

$$k_{nr} \simeq 0.026 \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ eV}} \right)^{1/2} \Omega_m^{1/2} h \text{ Mpc}^{-1}. \quad (3.43)$$

Como se ha hecho hincapié, esta escala dependerá de la masa del neutrino m_ν . Asimismo, la susodicha supresión del PS se expresa mediante el cociente $\Delta P/P$ y está dado como

$$\left(\frac{\Delta P}{P} \right) \simeq -8 \frac{\Omega_\nu}{\Omega_m} \simeq -0.8 \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ eV}} \right) \left(\frac{0.1 N}{\Omega_m h^2} \right), \quad (3.44)$$

para N especies masivas cuasi degeneradas de neutrinos, de acuerdo con [Hu et al., 1998].¹⁷

A nivel gráfico, la diferencia entre las curvas del PS con y sin neutrinos masivos a grandes escalas en k (*i.e.*, $k > k_{nr}$) es lo que se denomina *neutrino signature* (ver figs. 3.7, 3.8).

¹⁷El factor también denotado como N_{eff} representa el número efectivo de grados de libertad de especies (extra) relativistas, con un valor de $N_{\text{eff}} = 2.98_{-0.38}^{+0.39}$ según [Aghanim et al., 2020a], en concordancia con el valor $N_{\text{eff}} = 2.98$ predicho por el SM. La palabra “extra” usada por [Aghanim et al., 2020a] hace alusión a las especies relativistas aparte del fotón al momento del desacople (antes del CMB).

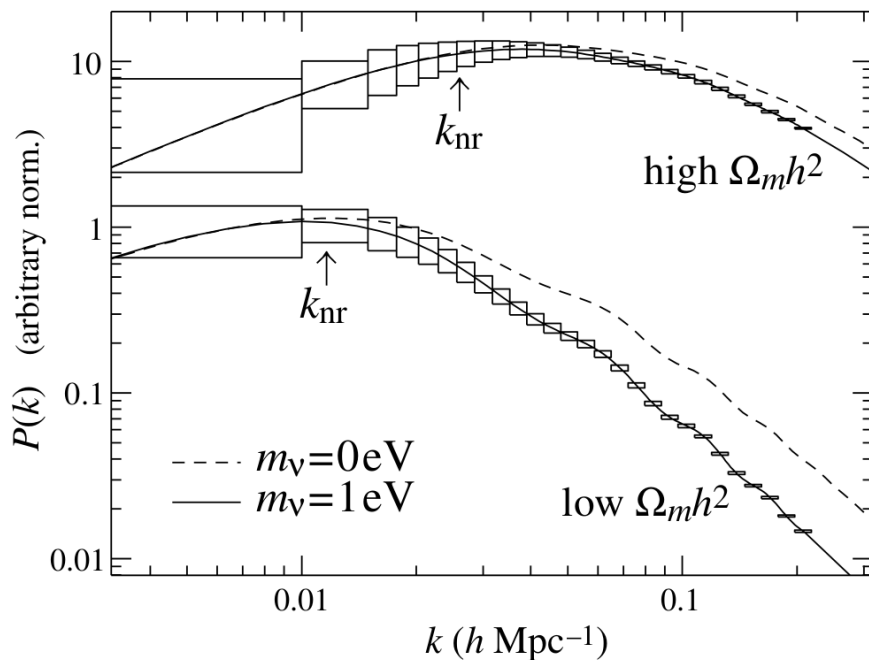


Figura 3.7: Efecto de neutrino con $m_\nu = 1 \text{ eV}$ en el PS dado por SDSS *Bright Red Galaxy survey* para dos cosmologías: modelo de alta y baja densidad de materia (superior e inferior, respectivamente), con $\Omega_m = 1.0$, $h = 0.5$ y $\Omega_m = 0.2$, $h = 0.65$ correspondientemente (en ambos casos, se asume $\Omega_b h^2 = 0.0125$), en donde se puede apreciar una supresión del espectro a escalas posteriores a la señalada por k_{nr} . Figura extraída de [Hu et al., 1998].

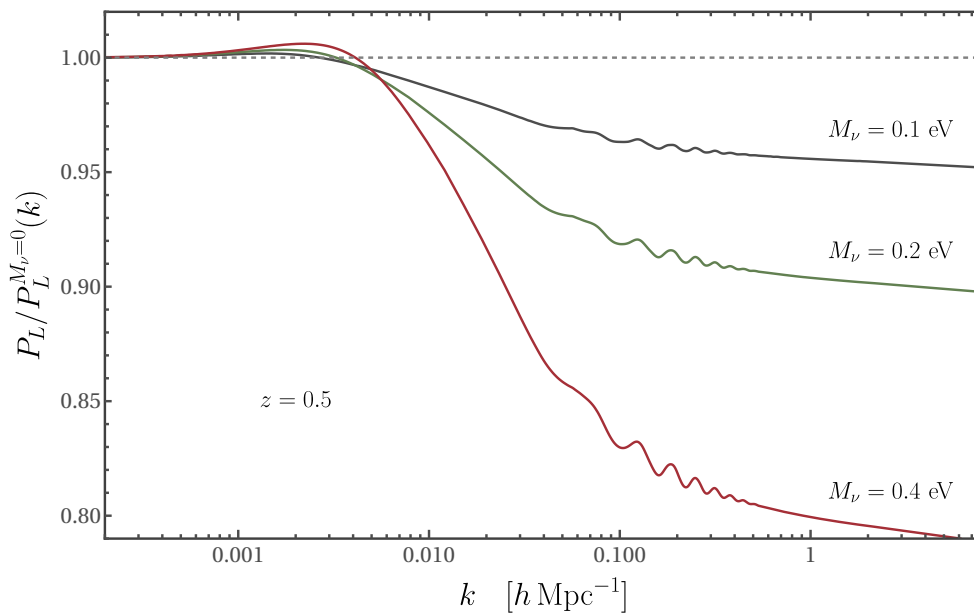


Figura 3.8: Supresión en el espectro lineal vista a través del cociente del PS con y sin neutrinos masivos, para diferentes masas.

Capítulo 4

Teoría analítica lineal y de perturbaciones

En este capítulo se explora la teoría lineal de la dinámica en el universo (al considerar su contenido como un fluido perfecto resoluble analíticamente partiendo de un lagrangiano, así como su generalización al régimen perturbativo, necesarios para una descripción más acorde en la evolución del universo, especialmente a tiempos tardíos. Para ello, formalismos como la teoría estándar de perturbaciones (SPT, por sus siglas en inglés) es propuesto para explicar la evolución del contenido del universo como un fluido con cierta función de distribución de momentos, así como para justificar la distribución de la materia oscura en regiones de particular geometría, los halos. Para ello, se introducen los conceptos necesarios para el entendimiento de estos modelos y su construcción, así como algunas de las herramientas computacionales utilizadas para su resolución.

4.1. Dinámica de una partícula en un potencial gravitatorio

En esta sección se presenta el escenario en que la descripción de una distribución de partículas puede ser aproximada por ecuaciones de fluido. Para ello, se sigue cercanamente a [\[Aviles, 2016\]](#) y el conjunto de notas que pueden encontrarse en [\[Aviles, 2022\]](#).

Bajo el escenario de una partícula en un espacio-tiempo con factor de escala $a(t)$ y con posición

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x} \quad (4.1)$$

(siendo \mathbf{r} la coordenada física y \mathbf{x} la coordenada comóvil con la expansión del universo) sometida al campo ϕ_N del potencial gravitacional newtoniano, el lagrangiano en cuestión se construye mediante

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m(\dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}})^2 - m\phi_N(\mathbf{x}, t), \quad (4.2)$$

el cual¹ puede ser reescrito como [Rasband, 1983]

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\mathbf{x}}^2 - m\Phi(\mathbf{x}, t), \quad (4.3)$$

en donde se ha definido

$$\Phi \equiv \phi_N + \frac{1}{2}a\ddot{a}\mathbf{x}^2. \quad (4.4)$$

Así, la ecuación de Poisson

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2\phi_N = 4\pi G\rho = 4\pi G\bar{\rho}(1 + \delta), \quad (4.5)$$

con $\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \equiv \frac{1}{a}\nabla$ (4.1), se escribe en términos del nuevo potencial Φ , haciendo uso del hecho de que $\phi_N = \Phi - \frac{1}{2}a\ddot{a}\mathbf{x}^2$, obteniendo

$$4\pi G\bar{\rho}(1 + \delta) = \frac{1}{a^2}\nabla^2\left(\Phi - \frac{1}{2}a\ddot{a}\mathbf{x}^2\right) = \frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi - 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (4.6)$$

en donde se sabe que de la ecuación de Friedmann (aceleración) $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}$, de modo que se llega a

$$\frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G\bar{\rho}(t)\delta(\mathbf{x}, t), \quad (4.7)$$

que es la ecuación de Poisson para el campo perturbado y corresponde al límite newtoniano de las ecs. (1.63) y (1.64).

De la mecánica lagrangiana, se sabe que para las coordenadas canónicas de posición y momento conjugado (\mathbf{x}, \mathbf{p}) , se satisface

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = ma^2\dot{\mathbf{x}} = ma\mathbf{u}, \quad (4.8)$$

con $\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\eta}$ la velocidad peculiar de la partícula con respecto al flujo de Hubble, siendo así la velocidad total $\mathbf{v}_T = a\mathbf{x}H + \mathbf{u}$.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (4.9)$$

para las coordenadas generalizadas $(\mathbf{q}_i = \mathbf{x}, \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}})$, se obtiene que el momento conjugado satisface

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\nabla\Phi. \quad (4.10)$$

¹Vía la invarianza de un sistema ante la posibilidad de expresar al mismo mediante dos lagrangianos que, a lo sumo, difieren por un término adicional escrito como una derivada total en el tiempo, *i.e.*,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dg}{dt},$$

representando la transformación $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ una simetría en el sistema (ambos, \mathcal{L}' y \mathcal{L} son soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange) [Rasband, 1983], la ecuación (4.2) puede expresarse como (4.3) en particular a través de la definición de $g \equiv -\frac{1}{2}ma\dot{a}\mathbf{x}^2$.

²La relación entre el tiempo físico t y el tiempo propio η (referido también anteriormente como el tiempo conforme) está dada a través del factor de escala $a(t)$ con (1.33).

Ecuación de Vlasov

La ecuación de Vlasov, que no es más que la ecuación de Boltzmann en ausencia de colisiones (ecuación diferencial de la evolución de la función de distribución en el espacio fase $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ de una especie de partículas como un fluido –tratamiento estadístico–), es

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{ma^2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - m \nabla \Phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (4.11)$$

que escrita en dependencia del tiempo conforme η se convierte en

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta) = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{p}}{ma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - ma \nabla \Phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (4.12)$$

4.1.1. Momentos de la ecuación de Boltzmann

Análogamente a la definición de la densidad de número dada por (3.1), se define a la densidad de número comóvil como

$$n_C(\mathbf{x}, \eta) = \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta), \quad (4.13)$$

en donde es evidente que ambas se relacionan por $n = n_C/a^3$.

Una vez más, análogo al caso estándar (3.2) y asumiendo que en promedio toda partícula de DM tiene una masa m , la densidad de energía $\rho = mn$ como función del tiempo conforme se escribe

$$\rho(\mathbf{x}, \eta) = \frac{m}{a^3} \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta). \quad (4.14)$$

Así, obteniendo el promedio en el ensamble de partículas de materia $\langle(\dots)\rangle_p$ sobre los momentos, para un tensor arbitrario \mathbf{A}

$$\langle \mathbf{A} \rangle_p = \frac{\int d^3p \mathbf{A} f}{\int d^3p f}, \quad (4.15)$$

de modo que la cantidad $\rho \langle \mathbf{A} \rangle_p$ está dada por

$$\rho \langle \mathbf{A} \rangle_p = \frac{m}{a^3} \int d^3p \mathbf{A} f. \quad (4.16)$$

En particular, del promedio en el ensamble de la cantidad $\langle p^i \rangle$ y usando el hecho obtenido en (4.8) de modo que $\mathbf{u} = \mathbf{p}/(ma)$, se obtiene la llamada velocidad promedio de las partículas,

$$\rho v^i(\mathbf{x}, \eta) \equiv \rho \langle u^i \rangle_p = \frac{1}{am} \rho \langle \rho^i \rangle_p = \frac{1}{a^4} \int d^3p p^i f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta) \quad (4.17)$$

la cual permite definir al tensor de dispersión de velocidad σ^{ij} , a partir de la diferencia al cuadrado entre las velocidades peculiares y la velocidad promedio, promediadas sobre todo el ensamble, es decir,

$$\sigma^{ij} = \langle (v^i - u^i)(v^j - u^j) \rangle_p. \quad (4.18)$$

Así, el segundo momento de la función de distribución conduce a

$$\rho \langle u^i u^j \rangle_p = \frac{\rho \langle \rho^i \rho^j \rangle_p}{m^2 a^2} = \frac{1}{m a^5} \int d^3 p p^i p^j f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta) = \rho (v^i v^j + \sigma^{ij}). \quad (4.19)$$

Ahora, en general es posible expresar la ecuación de Boltzmann como

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3 = 0, \quad (4.20)$$

en donde

$$\mathcal{B}_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \mathcal{B}_2 \equiv \frac{p^i}{m a} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \mathcal{B}_3 \equiv -m a \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p^i}, \quad (4.21)$$

con momentos

$$\int d^3 p p^{i_1} p^{i_2} \dots p^{i_N} \mathcal{B} = 0 \quad (4.22)$$

para formar la llamada jerarquía de Boltzmann, como a continuación se aborda.

Momento cero

El momento cero o momento nulo de la ecuación de Boltzmann refiere a la cantidad que satisface

$$\frac{m}{a^3} \int d^3 p \mathcal{B} = 0. \quad (4.23)$$

Esta ecuación se puede dividir en tres partes, correspondientes a \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 , que a continuación se desarrollan.

- \mathcal{B}_1 :

$$\frac{m}{a^3} \int d^3 p \mathcal{B}_1 = \frac{m}{a^3} \int d^3 p \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{m}{a^3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{a^3}{m} \rho \right) = \partial_\eta \rho + 3 \mathcal{H} \rho,^3 \quad (4.24)$$

con $\mathcal{H} = \partial_\eta a / a = aH$ la tasa conforme de Hubble.

- \mathcal{B}_2 :

$$\frac{m}{a^3} \int d^3 p \mathcal{B}_2 = \frac{m}{a^3} \int d^3 p \frac{p^i}{m a} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{a^4} \int d^3 p p^i f \right) = \partial_i (\rho v^i), \quad (4.25)$$

con \mathbf{x}, \mathbf{p} variables canónicas del espacio fase (*i.e.*, independientes), por lo que se permite extraer la derivada parcial respecto a \mathbf{x} de la integral.

³Se ha hecho uso de la ecuación 4.14.

- \mathcal{B}_3

$$\frac{m}{a^3} \int d^3p \mathcal{B}_3 = \frac{m}{a^3} \int d^3p \left(-ma \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right) = -\frac{m}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \int d^3p \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0, \quad (4.26)$$

dado que el potencial gravitacional Φ es solo función de las coordenadas espaciales y no de los momentos (*i.e.*, $\Phi \neq \Phi(\mathbf{p})$), por lo que es posible sacarlo de la integral, y en la última igualdad se ha usado el teorema de la divergencia para reescribir $\int_V dV \frac{\partial f}{\partial p^i} = \int_S dS f$, escogiendo la frontera a suficientemente grandes valores de p , donde se asume que la función de distribución vale cero.

Así, de (4.24, 4.25, 4.26), la ecuación para la evolución del momento de orden 0 de la ecuación de Boltzmann (4.20) es

$$\partial_\eta \rho + 3\mathcal{H}\rho + \partial_i(\rho v^i) = 0. \quad (4.27)$$

La ecuación (4.27) es conocida como la ecuación de continuidad (de los momentos de Boltzmann).

Primer momento

Partiendo una vez más de (4.22) y análogamente a (4.23), el momento de primer orden está dado por

$$\frac{1}{a^4} \int d^3p p^i \mathcal{B} = 0. \quad (4.28)$$

- \mathcal{B}_1 :

$$\frac{1}{a^4} \int d^3p p^i \mathcal{B}_1 = \frac{1}{a^4} \int d^3p p^i \frac{\partial f}{\partial \eta} = \partial_\eta(\rho v^i) + 4\mathcal{H}\rho v^i. \quad (4.29)$$

- \mathcal{B}_2 :

$$\frac{1}{a^4} \int d^3p p^i \mathcal{B}_2 = \frac{a}{a^4} \int d^3p p^i \frac{p^j}{ma} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \partial_j [\rho(v^i v^j + \sigma^{ij})]. \quad (4.30)$$

- \mathcal{B}_3

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^4} \int d^3p p^i \mathcal{B}_3 &= \frac{1}{a^4} \int d^3p p^i p \left(-ma \frac{\partial f}{\partial p^j} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right) = -\frac{m}{a^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \int d^3p \left[\frac{\partial}{\partial p^j} (p^i f) - f \frac{\partial p^i}{\partial p^j} \right] \\ &= \frac{m}{a^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \underbrace{\int d^3p p f \delta_j^i}_{\rho a^3/m} = \rho \partial^i \Phi. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Finalmente, sumando las contribuciones de cada componente de Boltzmann de la forma $a^{-4} \int d^3p (p^i \mathcal{B}_1 + p^i \mathcal{B}_2 + p^i \mathcal{B}_3) = 0$, se obtiene

$$\partial_\eta(\rho v^i) + 4\mathcal{H}\rho v^i + \partial_j [\rho(v^i v^j + \sigma^{ij})] + \rho \partial^i \Phi = 0. \quad (4.32)$$

Haciendo uso de (4.27), se llega a la ecuación de fluido de Euler

$$\partial_\eta v^i + \mathcal{H}v^i + v^j \partial_j v^i + \frac{1}{\rho} \partial_j (\rho \sigma^{ij}) + \partial^i \Phi = 0. \quad (4.33)$$

Segundo momento

Análogamente, para el caso del momento de segundo orden, la ecuación

$$\frac{1}{ma^5} \int d^3p p^i p^j \mathcal{B} = 0 \quad (4.34)$$

conduce a

$$\partial_\eta \sigma^{ij} + 2\mathcal{H}\sigma^{ij} + v^k \partial_k \sigma^{ij} + \sigma^{ij} \partial_k v^j + \sigma^{ij} \partial_k v^i = \frac{1}{\rho} \partial_k (\rho \sigma^{ijk}), \quad (4.35)$$

conocida como la ecuación del tensor de dispersión de velocidad (VDT) [Aviles, 2016].

Las consecuentes ecuaciones hidrodinámicas son reescritas a continuación. Haciendo uso de $\rho = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\mathbf{x}, t))$ y $\partial_\eta \bar{\rho} + 3\mathcal{H}\bar{\rho} = 0$, se sigue que

$$\partial_\eta \delta(\mathbf{x}, \eta) + \partial_i((1 + \delta)v^i) = 0, \quad (4.36)$$

$$\partial_\eta v^i(\mathbf{x}, \eta) + \mathcal{H}v^i + v^j \partial_j v^i + \partial \Phi = -\frac{1}{(1 + \delta)} \partial_j((1 + \delta)\sigma^{ij}), \quad (4.37)$$

$$\partial_\eta \sigma^{ij}(\mathbf{x}, t) + 2\mathcal{H}\sigma^{ij} + v^k \partial_k \sigma^{ij} + \sigma^{ik} \partial_k v^j + \sigma^{jk} \partial_k v^i = \frac{1}{(1 + \delta)} \partial_k((1 + \delta)\sigma^{ijk}). \quad (4.38)$$

Las ecuaciones (4.36, 4.37, 4.38), en conjunto con la ecuación de Poisson (4.7), que de hecho se puede expresar como

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} \delta = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m(a) \delta, \quad (4.39)$$

conforman el conjunto de ecuaciones hidrodinámicas.

Se ha referido a lo largo de los anteriores capítulos que la principal contribución de materia responsable de la estructura es de carácter frío (CDM), por lo que se entiende como un fluido libre de presión. En virtud de ello, es que este componente es descrito mediante la jerarquía completa de Boltzmann (la cual es en principio infinita). Por otro lado, cabe notar que la dispersión de velocidad (4.18) muestra una estimación de cuánto se desvían las partículas con respecto a un flujo individual (ver fig. 4.1). Asimismo, como se aludió en §3.2.5 y §3.4.2, la dispersión de velocidad produce una supresión en el *clustering* por debajo de la escala de *free streaming* (3.42): $\lambda_{fs} \sim \sqrt{\sigma}/\mathcal{H}$ [Aviles, 2016]. Debido a que existen estructuras de hasta unas cuantas decenas de kpc, σ debe ser muy pequeño. Es decir, si se espera que un fluido forme estructura a todas las escalas, este debe tener

dispersión de velocidad nula, que es lo que se asume en CDM. Sin embargo para los neutrinos la velocidad de dispersión está dada por [Shoji and Komatsu, 2010]

$$\sigma(z) = \left[\frac{\int d^3p p^2 / m^2 (\exp(p/T_\nu(z)) + 1)^{-1}}{\int d^3p (\exp(p/T_\nu(z)) + 1)^{-1}} \right]^{1/2} \approx 3.6 \frac{T_{\gamma,0}}{m_\nu} (1+z), \quad (4.40)$$

por lo que los neutrinos representan una componente caliente de materia oscura y no forman estructura por debajo de la escala λ_{fs} . A menor su masa, la dispersión de velocidades es mayor y por tanto participan menos en la formación de estructura.

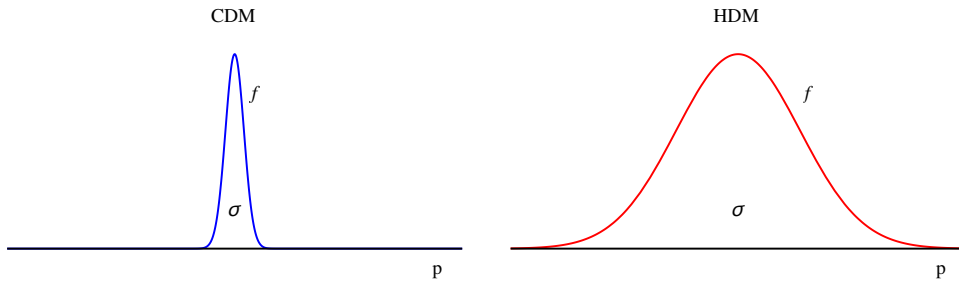


Figura 4.1: Distribución de momentos en un fluido de materia oscura fría (azul) y caliente (rojo). Esta figura muestra la diferencia en las dispersiones de velocidades σ para cada contexto. Figura adaptada de [Cusin et al., 2017].

Ahora, si se escriben las ecuaciones de fluido en términos del tiempo cósmico t , estas resultan ser

$$\dot{\delta}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a} \partial_i v^i = -\frac{1}{a} \partial_i (\delta v^i), \quad (4.41)$$

$$\dot{v}^i(\mathbf{x}, t) + H v^i + \frac{1}{a} \partial^i \Phi = -\frac{1}{a} v^j \partial_j v^i. \quad (4.42)$$

Tomando el rotacional de la ecuación de Euler a orden lineal (4.42)

$$\partial_t \nabla \times \mathbf{v} + H \nabla \times \mathbf{v} + \frac{1}{a} \underbrace{\nabla \times \nabla \Phi}_{=0} = 0, \quad (4.43)$$

se sigue que el campo de vorticidad $w \equiv \nabla \times \mathbf{v} \propto 1/a$. Manteniendo al VDT en las ecuaciones hidrodinámicas, un término $\nabla \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})$ se vuelve una fuente de la ecuación de Euler, permitiendo que la vorticidad (rotacional de la velocidad) crezca, aún cuando su contribución sea todavía pequeña.

A grandes escalas, es posible caracterizar con mayor seguridad a la velocidad del fluido a través de su divergencia, escrita como

$$\theta(\mathbf{x}, t) \equiv -\frac{\partial_i v^i}{aHf} \quad (4.44)$$

(siendo que esta decae con el tiempo, usualmente se asume nula), en donde se ha introducido por conveniencia la función $f(t)$ que se detallará más adelante (§4.2).

4.2. Teoría estándar de perturbaciones (SPT)

Con el propósito de tener un panorama más exhaustivo de la dinámica del universo a tiempos tardíos, surge la necesidad de considerar teorías que rescaten la evolución de las perturbaciones más allá del orden lineal, siendo que estas no son suficientes para una descripción satisfactoria, especialmente si el punto de interés es la formación de estructura y el *lensing* provocado por esta: el tratamiento a orden lineal en todas las perturbaciones (radiación, materia, así como del espacio-tiempo mismo) es suficiente para una descripción adecuada del CMB, pero falla al intentar describir el universo tardío, en presencia de estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias [Dodelson and Schmidt, 2020].

Bajo tal motivación, una de las principales teorías a considerar es la SPT. Así, se parte de los conceptos introducidos en §4.1 y extrapolados más allá del primer orden.

Usando la divergencia del campo de velocidad desde (4.44) y tomando ahora la divergencia de la ecuación lineal de Euler (análogo a lo hecho en 4.43), se sigue respectivamente que

$$H^{-1} \frac{\partial \delta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - f\theta = 0,^4 \quad (4.45)$$

$$H^{-1} \frac{\partial(f\theta)}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) f\theta - \frac{3}{2} \Omega_m(a) \delta = 0. \quad (4.46)$$

Combinando estos dos resultados, es posible escribir en espacio de Fourier

$$\ddot{\delta}(\mathbf{k}, t) + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} \Omega_m(a) H^2 \delta = 0. \quad (4.47)$$

La solución a esta ecuación se puede separar de la forma

$$\delta(\mathbf{k}, t) = D_+(t)A(\mathbf{k}) + D_-(t)B(\mathbf{k}), \quad (4.48)$$

en una combinación lineal de funciones de crecimiento y decrecimiento, separando la dependencia temporal y en el vector \mathbf{k} . De esta manera, la ecuación diferencial para $D(t)$ resulta

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2H \frac{d}{dt} - \frac{3}{2} \Omega_m(a) H^2 \right) D(t) = 0. \quad (4.49)$$

La función de crecimiento lineal D_+ que aparece en la expresión para el campo (1.79), corresponde a la solución de más rápido crecimiento a la ecuación diferencial (4.49). De hecho, las soluciones a la ec. diferencial (4.49) dadas en términos del cambio de variable $\eta = \ln(a)$ (se verá en la sección §5.1 vía (5.6)) cuando el universo está dominado por la materia, *i.e.*, $\Omega_m(a) = 1$, corresponden a

$$D_+(\eta) \propto e^{3\eta} = a, \quad D_-(\eta) \propto e^{-3/2\eta} = a^{-3/2}, \quad (4.50)$$

mismas que serán halladas a continuación para el caso general en que $\Omega_m(a) \neq 1$, (de hecho, únicamente D_+ es de interés, ya que se iniciará la evolución en tiempos tempranos y el modo D_- se asume ya despreciable para tiempos tardíos).

⁴Notar el hecho de que se ha utilizado la ec. (4.41) a orden lineal para sustituir la divergencia por la evolución temporal del campo de densidad, es decir, $\delta = -\frac{1}{a} \partial_i v^i$.

De este modo, a primer orden,

$$\delta^{(1)}(\mathbf{k}, t) = D_+(t)\delta^{(1)}(\mathbf{k}, t_0), \quad (4.51)$$

normalizando con $D_+(t_0) = 1$. Por otro lado, la otra solución corresponde a $D_-(t) \propto H$. Ahora, escogiendo a la función $f(t)$ introducida en (4.44) de la forma

$$f(t) \equiv \frac{d \ln D_+}{d \ln a}, \quad (4.52)$$

se obtiene

$$\theta^{(1)}(\mathbf{k}, t) = \delta^{(1)}(\mathbf{k}, t). \quad (4.53)$$

A la función (4.52) se le conoce como el factor de crecimiento logarítmico, algunas veces referido como tasa del crecimiento lineal. La figura 4.2 muestra el comportamiento de la función de crecimiento lineal D_+ y su tasa de cambio logarítmico f , como funciones del factor de escala. Además de eso, se han agregado la muy usada aproximación $f(a) \approx [\Omega_m(a)]^{0.55}$ [Peebles, 2020] y la función $[\Omega_m(a)]^{1/2}$ por motivos que serán vistos más adelante.

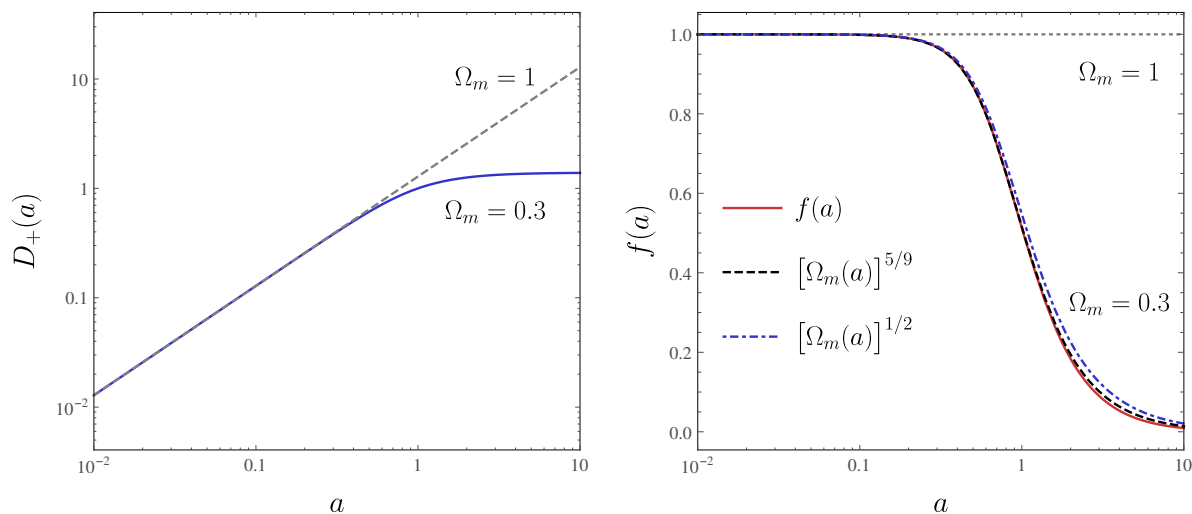


Figura 4.2: **Izquierda:** Factor de crecimiento lineal D_+ como función del factor de escala a para dos escenarios cosmológicos dados por la abundancia de materia Ω_m . **Derecha:** Tasa de crecimiento logarítmico como función del factor de escala, $f(a)$ para los mismos dos valores de densidad de materia. Asimismo, se compara con el factor $[\Omega_m(a)]^{5/9}$, el cual sigue prácticamente la misma evolución. Figura adaptada de [Aviles, 2022].

4.2.1. No linealidades

A partir de las convenciones adoptadas en §2.1.1 para las transformadas de Fourier (2.4, 2.5), se puede establecer

$$\mathcal{F}[\partial_i f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = ik_i \mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = ik_i f(\mathbf{k}), \quad (4.54)$$

denotando \mathcal{F} la transformada de Fourier, en donde se observa que

$$\partial_i \rightarrow ik_i, \quad \nabla^2 \rightarrow -k^2. \quad (4.55)$$

De este modo, las ecuaciones hidrodinámicas en §4.1.1 toman la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{k}, t) - Hf\theta(\mathbf{k}, t) = \mathcal{F} \left[-\frac{1}{a} \partial_i (v^i \delta) \right] (\mathbf{k}, t), \quad (4.56)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (aHf\theta(\mathbf{k}, t)) - aH^2 f\theta(\mathbf{k}, t) - a\frac{k^2}{a^2} \Phi(\mathbf{k}, t) = \mathcal{F} \left[-\frac{1}{a} \partial_i (v^j \partial_j v^i) \right] (\mathbf{k}, t). \quad (4.57)$$

Ecuaciones hidrodinámicas para las no linealidades

Tomando el miembro derecho de (4.56) (*i.e.*, aplicando la transformada de Fourier) en el régimen no lineal, surge la ecuación de continuidad para los no linealidades como

$$\mathcal{F} \left[-\frac{1}{a} \partial_i (v^i(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x})) \right] (\mathbf{k}) = -\frac{1}{a} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x})), \quad (4.58)$$

y expresando también a la velocidad $v(\mathbf{x})$ y el campo de densidad $\delta(\mathbf{x})$ como transformadas de Fourier con modos \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[-\frac{1}{a} \partial_i (v^i \delta) \right] (\mathbf{k}) &= -\frac{1}{a} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}} v^i(\mathbf{k}_1) \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{k}_2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{a} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}} i(k_1^i + k_2^i) v^i(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \\ &\quad - \frac{1}{a} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) i(k_1^i + k_2^i) v^i(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (4.59)$$

en donde se ha hecho uso de (4.55) en las derivadas explícitas para pasar a la segunda igualdad y se ha realizado la integral en \mathbf{x} para llegar a la tercera (recordar que $(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$).

Por otro lado, la divergencia de la velocidad θ (4.44) en el espacio de Fourier nos dice

$$\theta(\mathbf{k}) = -\frac{ik_i v^i(\mathbf{k})}{aHf} \Rightarrow v^i(\mathbf{k}) = i\frac{k^i}{k^2} aHf\theta(\mathbf{k}). \quad (4.60)$$

En virtud de lo anterior, se obtiene que la transformada de Fourier buscada es

$$\mathcal{F} \left[-\frac{1}{a} \partial_i (v^i(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x})) \right] (\mathbf{k}) = Hf \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \left(1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} \right) \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2).^5 \quad (4.61)$$

⁵Se ha utilizado la notación

$$\int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{12}), \quad \mathbf{k}_{12} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.$$

En general,

$$\int_{\mathbf{k}_{1\dots n}=\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{1\dots n}), \quad \mathbf{k}_{1\dots n} \equiv \mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n.$$

Este primer resultado será utilizado a continuación para expresar la ecuación hidrodinámica (4.56). Por otro lado, se obtendrá un segundo resultado usado para (4.57) partiendo una vez más de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[-\frac{1}{a} \partial_i (v^j(\mathbf{x}) \partial_j v_i(\mathbf{x})) \right] (\mathbf{k}) &= -\frac{1}{a} i k_i \mathcal{F} [v^j(\mathbf{x}) \partial_j v_i(\mathbf{x})] (\mathbf{k}) \\ &= -\frac{i k^i}{a} \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \left[\frac{i k_1^j a H f \theta(\mathbf{k}_1)}{k_1^2} i k_2^j \frac{i k_2^j a H f \theta(\mathbf{k}_2)}{k_2^2} \right] \\ &= -a H^2 f^2 \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ahora, simetrizando en los índices 1 y 2 de los modos \mathbf{k} de la forma

$$\frac{1}{2} [(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2) + (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1)],$$

la transformación anterior toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[-\frac{\partial_i (v^j \partial_j v_i)}{a} \right] &= a H^2 f^2 \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) + \int_{\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1)}{k_2^2 k_1^2} \theta(\mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \right] \\ &= a H^2 f^2 \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2 k_1^2 k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2) \\ &= a H^2 f^2 \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \frac{k_{12}^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2 k_1^2 k_2^2} \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Así, retomando la ecuación hidrodinámica para no linealidades en el espacio de Fourier (4.56), dividiendo entre H y sustituyendo el resultado en (4.61) para el miembro derecho, se sigue

$$H^{-1} \frac{\partial \delta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - f \theta = f \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2), \quad (4.64)$$

en donde se ha definido (por conveniencia al escribir) a la función $\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv 1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2}$. Análogamente, de (4.57) y (4.46), tomando el resultado de (4.63), y dividiendo entre aH , se obtiene la ecuación

$$H^{-1} \frac{\partial (f\theta)}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) f \theta - \frac{3}{2} \Omega_m(a) \delta = f^2 \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta(\mathbf{k}_1) \theta(\mathbf{k}_2), \quad (4.65)$$

en donde se definió también el término $\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \frac{k_{12}^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2 k_1^2 k_2^2}$.

4.2.2. Ecuaciones de la teoría de perturbaciones

Como en cualquier otro campo de la física, la teoría de perturbaciones surge al considerar una expansión en serie de los campos a orden (n), de la forma

$$\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)} + \delta^{(3)} + \dots \quad (4.66)$$

$$\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \theta^{(3)} + \dots, \quad (4.67)$$

siendo los campos de interés en este contexto el campo de densidad y el de (divergencia de la) velocidad, respectivamente.

Kernels

Con el objetivo de hallar las soluciones a las ecuaciones (4.64, 4.65) para el n -ésimo orden dado como

$$H^{-1} \frac{\partial \delta^{(n)}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - f\theta^{(n)} = \sum_{m=1}^{n-1} f \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta^{(m)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(n-m)}(\mathbf{k}_2), \quad (4.68)$$

$$H^{-1} \frac{\partial (f\theta^{(n)})}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) f\theta^{(n)} - \frac{3}{2} \Omega_m(a) \delta = \sum_{m=1}^{n-1} f^2 \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta^{(m)}(\mathbf{k}_1) \theta^{(n-m)}(\mathbf{k}_2), \quad (4.69)$$

se proponen las soluciones de la forma

$$\delta^{(n)}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_{1\dots n}=\mathbf{k}} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1, t) \dots \delta_L(\mathbf{k}_n, t), \quad (4.70)$$

$$\theta^{(n)}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_{1\dots n}=\mathbf{k}} G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1, t) \dots \delta_L(\mathbf{k}_n, t). \quad (4.71)$$

A orden n , cada campo es una convolución pesada de n campos de densidad lineales $\delta_L \equiv \delta^{(1)}$, y las funciones $F(\mathbf{k})$, $G(\mathbf{k})$ que se definieron toman los valores en $n = 1$

$$F_1(\mathbf{k}) = 1, \quad G_1(\mathbf{k}) = 1. \quad (4.72)$$

Así, la integral en la ec. (4.68) resulta

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \theta^{(m)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(n-m)}(\mathbf{k}_2) \\ &= \int_{\mathbf{k}_{1\dots n}=\mathbf{k}} \alpha(\mathbf{k}_{1\dots m}, \mathbf{k}_{m+1\dots n}) G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n) \\ &= \int_{\mathbf{k}_{1\dots n}=\mathbf{k}} \alpha_{\bar{m}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) F_{n-m}(\bar{n}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n), \end{aligned} \quad (4.73)$$

en donde se ha introducido la notación

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{m}, \bar{n}} &\equiv \alpha(\mathbf{k}_{1\dots m}, \mathbf{k}_{m+1\dots n}), \\ G_m(\bar{m}) &\equiv G_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m), \\ F_{n-m}(\bar{n}) &\equiv F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \dots, \mathbf{k}_n). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Asumiendo que los núcleos F_n y G_n son funciones independientes del tiempo, las ecuaciones (4.68, 4.69) se pueden escribir en términos de estos como se muestra a continuación.

Para la ecuación de continuidad (4.68), se tiene

$$H^{-1} \frac{\partial \delta^{(n)}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - f\theta^{(n)} = \sum_{m=1}^{n-1} f \int_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n = \mathbf{k}} \alpha_{\bar{m}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) F_{n-m}(\bar{n}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n), \quad (4.75)$$

en donde la derivada temporal del n -ésimo campo de fluctuación de densidad (4.70) (al ser F_n independiente del tiempo, por ansatz) es

$$\dot{\delta}^{(n)}(\mathbf{k}, t) = n \int_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n = \mathbf{k}} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \dot{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_1, t) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n, t). \quad (4.76)$$

De (4.45) y (4.53) se sabe que $\dot{\delta}^{(1)} = fH\theta^{(1)} = fH\delta^{(1)}$, por lo que el miembro izquierdo de (4.75) resulta

$$\int_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n = \mathbf{k}} [nfF_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) - fG_n \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n] \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1, t) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n), \quad (4.77)$$

obteniendo así la ecuación de recurrencia

$$nF_n - G_n = \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{\bar{m}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) F_{n-m}(\bar{n}). \quad (4.78)$$

Por otro lado, para la ecuación de Euler (4.69) se sigue que

$$\begin{aligned} H^{-1} \frac{\partial (f\theta^{(n)}(\mathbf{k}, t))}{\partial t} + \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) f\theta^{(n)} - \frac{3}{2} \Omega_m(a) \delta^{(n)} \\ = \sum_{m=1}^{n-1} f^2 \int_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n = \mathbf{k}} \beta_{\bar{m}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) G_{n-m}(\bar{n}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n). \end{aligned} \quad (4.79)$$

De (4.46) se usa que $\dot{f} = \frac{3}{2} \Omega_m(a) H^2 - H \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) f - Hf^2$ para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}^{(n)}(\mathbf{k}, t)}{fH} - \theta + \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f^2} (\theta - \delta) \\ = \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n = \mathbf{k}} \beta_{\bar{m}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) G_{n-m}(\bar{n}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n), \end{aligned} \quad (4.80)$$

con lo que finalmente se llega a la relación de recurrencia

$$(n-1)G_n + \frac{3}{2} \frac{\Omega_m(a)}{f^2} (G_n - F_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \beta_{\bar{m}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) G_{n-m}(\bar{n}). \quad (4.81)$$

Escenario EdS

Dentro del contexto de un universo Einstein-de Sitter (EdS), como consecuencia de las imposiciones dinámicas dadas por este modelo, se tienen las siguientes condiciones cosmológicas sobre las ecuaciones previas:

$$\Omega_m(a) = 1, \quad f = 1. \quad (4.82)$$

De este modo, (4.78, 4.81) resultan

$$nF_n - G_n = \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{\bar{n}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) F_{n-m}(\bar{n}), \quad (4.83)$$

$$\frac{1}{2}(2n+1)G_n - \frac{3}{2}F_n = \sum_{m=1}^{n-1} \beta_{\bar{n}, \bar{n}} G_m(\bar{m}) G_{n-m}(\bar{n}), \quad (4.84)$$

Resolviendo para F_n y G_n :

$$F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\bar{m})}{(2n+3)(n-1)} [(2n+1)\alpha_{\bar{n}, \bar{n}} F_{n-m}(\bar{n}) + 2\beta_{\bar{n}, \bar{n}} G_{n-m}(\bar{n})], \quad (4.85)$$

$$G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\bar{m})}{(2n+3)(n-1)} [3\alpha_{\bar{n}, \bar{n}} F_{n-m}(\bar{n}) + 2n\beta_{\bar{n}, \bar{n}} G_{n-m}(\bar{n})]. \quad (4.86)$$

Sin embargo, nótese que para llegar a estas ecuaciones no son estrictamente necesarias las condiciones (4.82), sino una más débil, que es

$$f(a) \approx [\Omega_m(a)]^{1/2} \quad (4.87)$$

ya que en la ec. (4.81) aparece el término Ω_m/f^2 , que es el que se requiere sea igual a la unidad, y no estrictamente Ω_m y f lo sean por separado. Como se observa de la figura 4.2, la condición de arriba se satisface de manera muy aproximada, por lo que la utilización de kernels EdS es muy precisa en el modelo Λ CDM.

Kernels en presencia de neutrinos masivos

En presencia de neutrinos masivos, los kernels F_n y G_n cambian, de modo que, en principio, no es posible escribirlos de manera simple [Aviles and Banerjee, 2020]. Sin embargo, en [Aviles et al., 2021] y [Noriega et al., 2022a] se demuestra que lo anterior solo tiene importancia cuando son considerados los efectos de RSD, siendo que los cambios no son relevantes en los kernels F_n , sino únicamente en los kernels G_n . Por ende, en este trabajo se consideran los kernels F_n EdS descritos arriba.

4.2.3. SPT: Espectro a 1-loop

Comenzando por retomar el concepto de espectro de potencias (PS) (2.7) mediante el promedio en el ensamble de un par de campos de densidad en el espacio de Fourier $\delta(\mathbf{k})$, resulta de trascendente importancia en el presente análisis el tratar a estos campos (asumidos como gaussianos a orden lineal, es decir, se pueden expresar como una función de distribución gaussiana con una media y desviación dadas) como una expansión en series a orden n . Este es el principio que sustenta a la llamada Teoría Estándar de Perturbaciones (SPT).

Entonces, del promedio de los campos expandidos en serie sobre el ensamble, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle &= \langle (\delta^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta^{(2)}(\mathbf{k}) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}) + \dots) (\delta^{(1)}(\mathbf{k}') + \delta^{(2)}(\mathbf{k}') + \delta^{(3)}(\mathbf{k}') + \dots) \rangle \\ &= (P_L(k) + 2P^{(13)}(k) + P^{(22)} + \dots) (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{1\text{-loop}}^{\text{SPT}}(k) + \dots \end{aligned} \quad (4.88)$$

en donde se ha hecho uso del teorema de Wick⁶.

Esta es la expansión del PS a mayor orden, siendo $P_{1\text{-loop}}^{\text{SPT}}(k)$ el famoso espectro a un *loop* (o lazo), es decir, la primera corrección perturbativa, siendo que puede obtenerse la segunda corrección como el espectro a 2-*loop*, etc. Asimismo, se ha hecho uso de la expresión $P^{(nm)}$, definida a través de

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P^{(nm)} = \langle \delta^{(n)}(\mathbf{k})\delta^{(m)}(\mathbf{k}') \rangle. \quad (4.89)$$

Cabe destacar que la aportación del PS para el grado $n = 1$, $m = 2$ en los campos es nula,

$$P^{(12)} = \langle \delta^{(1)}\delta^{(2)} \rangle' \sim \int \langle \delta^{(1)}\delta^{(1)}\delta^{(1)} \rangle' = 0. \quad (4.90)$$

En general, el PS en SPT se expresa como la aportación lineal más las correcciones a un *loop* (ver fig. 4.4), es decir,

$$P^{\text{SPT}}(k) = P_L(k) + P_{1\text{-loop}}(k) + \dots \quad (4.91)$$

con

$$P_{1\text{-loop}}(k) = P_{22}(k) + P_{13}(k) \quad (4.92)$$

(ver 4.3).

⁶También conocido como teorema de Isserlis en estadística, enuncia que, para ciertos campos aleatorios gaussianos centrales (media 0), el valor esperado de un número impar de estos es nulo, pero para un número par de ellos estará determinado completamente por su función de correlación por pares únicamente.

⁷La notación primada en esta ecuación no indica derivación respecto al tiempo conforme ni algo similar. Únicamente se utiliza para indicar que este no es exactamente el mismo promedio fiel a la definición usada en el resto de ecuaciones.

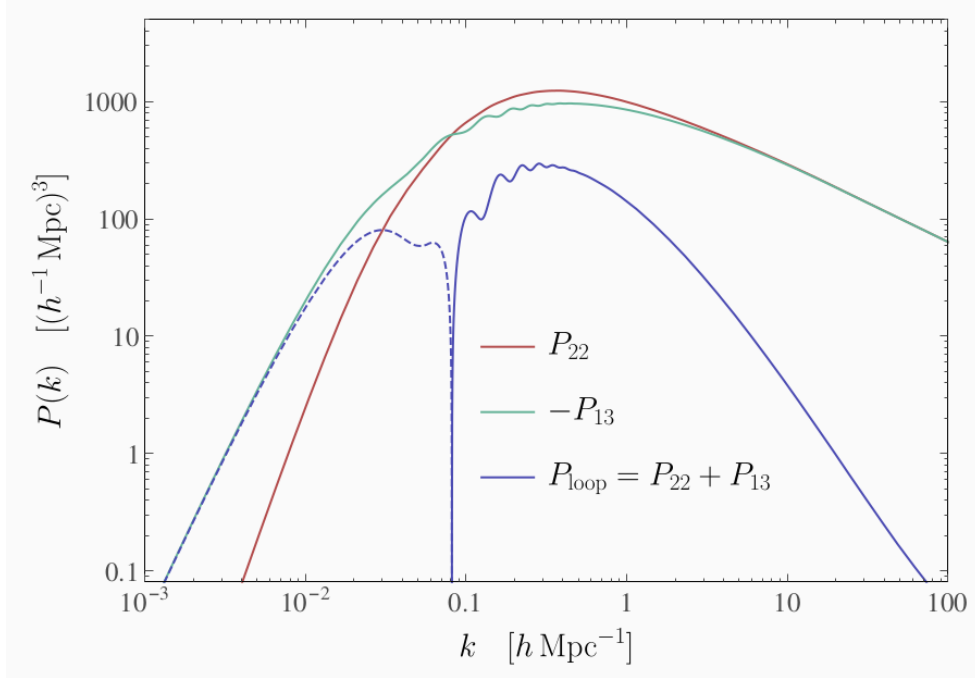


Figura 4.3: Contribuciones individuales de las correcciones perturbativas P_{22} y P_{13} al espectro de potencias de un lazo. Asimismo, se muestra la suma de ambas correcciones.

Espectros P_{22} y P_{13}

A continuación se realiza la deducción de las contribuciones P_{22} y P_{13} al PS de 1-loop. Partiendo de la definición de la corrección del espectro a orden n , m en los campos, respectivamente (4.89), la corrección P_{13} definida por

$$P_{13}(k) \equiv P^{(13)}(k) + P^{(31)}(k) = 2P^{(13)}(k), \quad (4.93)$$

está dada mediante el promedio en el ensamble $\langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(3)}(\mathbf{k}') \rangle$, y dado que el campo $\delta^{(n)}(\mathbf{k})$ bajo la aproximación EdS está dado por

$$\delta^{(n)}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}_{1\dots n}=\mathbf{k}'} F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_3) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \dots \delta^{(1)}(\mathbf{k}_n), \quad (4.94)$$

este promedio se calcula como

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(3)}(\mathbf{k}') \rangle &= \left\langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{k}_{123}=\mathbf{k}'} F_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \right\rangle \\ &= \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{(2\pi)^9} (2\pi)^3 \delta_{\text{D}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) F_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle, \end{aligned} \quad (4.95)$$

en donde el promedio $\langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}_1)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_2)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle$ está dado por (una vez más, aplicando el teorema de Wick)

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}_1)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_2)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle &= \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \rangle \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle \\
 &+ \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}_2) \rangle \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle \\
 &+ \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_2) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Dentro de la integral (4.95), es posible simetrizar en los índices de \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 y \mathbf{k}_3 , de modo que el *kernel* F_3 sea sustituido por su simétrico F_3^s . Así, el producto anterior (4.96) se exprese como

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}_1)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_2)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle &\rightarrow 3\langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \rangle \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2)\delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \rangle \\
 &= 3(2\pi)^6 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)\delta_D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)P_L(k)P_L(k_2).
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

Reintroduciendo este resultado de nuevo en (4.95), la integración prosigue como

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(3)}(\mathbf{k}') \rangle &= 3(2\pi)^3 \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \delta_D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\
 &\quad F_3^s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) P_L(k) P_L(k_2) \\
 &= 3(2\pi)^3 \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \delta_D(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) F_3^s(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2) P_L(k) P_L(k_2) \\
 &= (2\pi)^3 \underbrace{\delta_D(\mathbf{k}' + \mathbf{k})}_{\neq k_2} 3P_L(k) \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} F_3^s(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2) P_L(k_2) \\
 &= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) 3P_L(k) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_3^s(\mathbf{k}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}) P_L(p),
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

en donde, por la identidad de Dirac $\int \delta_D(x-a)f(x)dx = f(a)$, al integrar respecto a k_1 , k_3 desde la primera igualdad a la segunda, los índices fueron cambiados como $\mathbf{k}_1 \rightarrow -\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}_3 \rightarrow -\mathbf{k}_2$. Asimismo, en la última igualdad se ha hecho uso de la simetría (cambio de signo) de F_3^s tal que $F_3^s(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2) = F_3^s(\mathbf{k}, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2)$, y se ha definido la variable $\mathbf{p} \equiv \mathbf{k}_2$.

Así,

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{13}(k) \equiv \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k})\delta^{(3)}(\mathbf{k}') \rangle + \langle \delta^{(3)}(\mathbf{k})\delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle, \tag{4.99}$$

de modo que se concluye que

$$P_{13}(k) = 6P_L(k) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_3^s(\mathbf{k}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}) P_L(p). \tag{4.100}$$

De manera análoga, la parte P_{22} del espectro se define vía

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P^{(22)} = \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k})\delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle, \tag{4.101}$$

por lo que se calcula mediante

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k})\delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle &= \left\langle \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2) \int_{\mathbf{k}_{34}=\mathbf{k}} F_2(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_3) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_4) \right\rangle \\
 &= \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^6} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_D(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_2(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \langle \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Ahora, el último promedio se calcula como

$$\langle \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \rangle = \langle \delta_1 \delta_2 \rangle \langle \delta_3 \delta_4 \rangle + \langle \delta_1 \delta_3 \rangle \langle \delta_2 \delta_4 \rangle + \langle \delta_1 \delta_4 \rangle \langle \delta_2 \delta_3 \rangle. \quad (4.103)$$

La primera correlación no contribuye debido a que $\langle \delta_1 \delta_2 \rangle \langle \delta_3 \delta_4 \rangle \ni \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$, de modo que el *kernel* F_2 bajo el cambio que surge al integrar con una función delta de Dirac ($\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$) es $F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = F_2(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_1) = 0$. Por otro lado, la integral es simétrica en \mathbf{k}_3 y \mathbf{k}_4 , lo que implica $\langle \delta_1 \delta_3 \rangle \langle \delta_2 \delta_4 \rangle + \langle \delta_1 \delta_4 \rangle \langle \delta_2 \delta_3 \rangle = 2\langle \delta_1 \delta_3 \rangle \langle \delta_2 \delta_4 \rangle$. Así,

$$\langle \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \rangle \rightarrow 2\langle \delta_1 \delta_3 \rangle \langle \delta_2 \delta_4 \rangle = 2(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta_D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) P_L(k_1) P_L(k_2). \quad (4.104)$$

Volviendo a (4.102),

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle &= 2(2\pi)^3 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4}{(2\pi)^6} F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_2(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) P_L(k_1) P_L(k_2) \\ &\quad \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_D(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta_D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) \\ &= 2(2\pi)^3 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_D(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_2(-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2) P_L(k_1) P_L(k_2) \\ &= 2(2\pi)^3 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^6} F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F_2(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) F_2(-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}' + \mathbf{k}_1) P_L(k_1) P_L(|-\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1|) \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ &= 2(2\pi)^3 \underbrace{\delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}_{\neq \mathbf{k}_1} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^6} (F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}))^2 P_L(p) P_L(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|), \end{aligned} \quad (4.105)$$

en donde se ha hecho el cambio $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{p}$ en virtud de la integración con la distribución delta, se definió $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}$, y se ha usado la simetría $F_2(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) = F_2(-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}' + \mathbf{k}_1)$.

Por lo tanto, la contribución perturbativa de los campos (22) en términos del espectro lineal es

$$P_{22}(k) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p})]^2 P_L(p) P_L(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|). \quad (4.106)$$

Así, desglosando los términos del PS que aportan en (4.88), o más específicamente, en (4.92), se tiene que los espectros de las contribuciones de los campos a n, m -ésimo orden están dados, en términos del PS lineal, por

$$\boxed{P_{22}(k) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p})]^2 P_L(p) P_L(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|),} \quad (4.107)$$

$$\boxed{P_{13}(k) = 6P_L(k) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_3^s(\mathbf{k}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}) P_L(p).} \quad (4.108)$$

La figura 4.3 muestra las contribuciones individuales y en conjunto de los espectros $P_{22}(k)$ y $P_{13}(k)$ para conformar el PS a 1-loop.

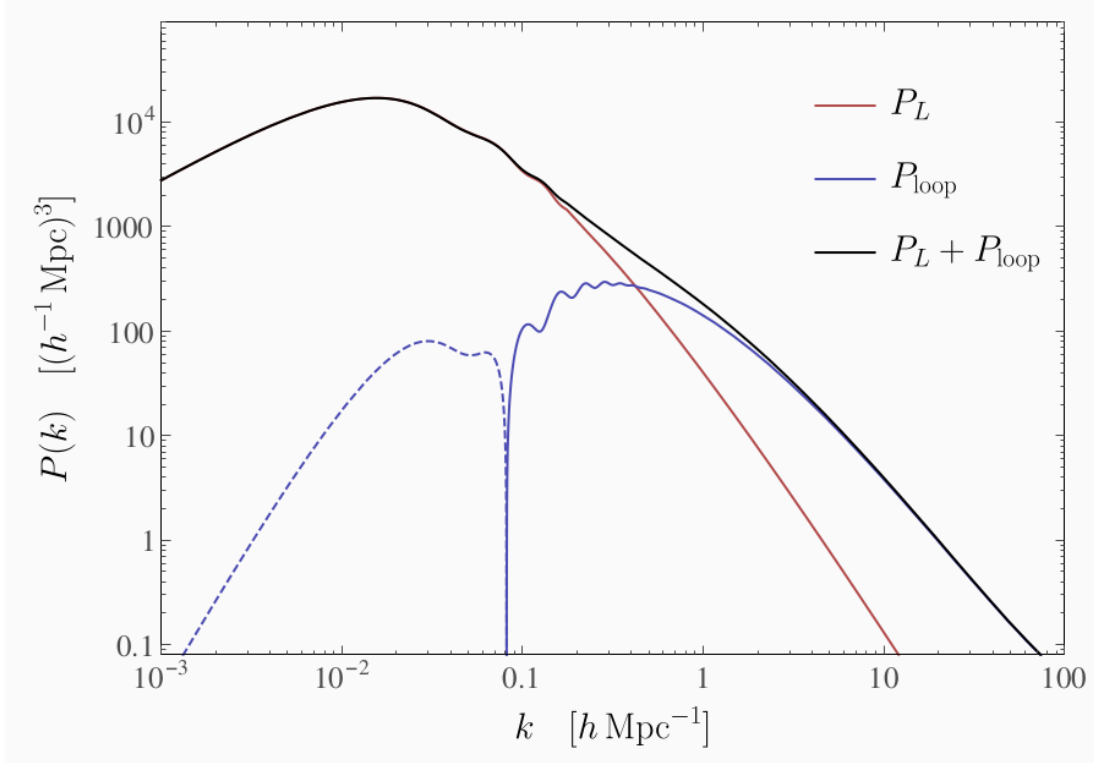


Figura 4.4: Aportación de la corrección perturbativa a un lazo (4.92) con respecto al espectro de potencias lineal. La diferencia entre el PS lineal y no lineal (SPT, 4.91) es evidente para grandes escalas de k .

Debido a que el PS lineal es proporcional al factor de crecimiento como $P_L(k, t) \propto D_+^2(t)$ (1.82), de (4.107, 4.108) se puede observar que, entonces, las correcciones a 1-loop crecen de acuerdo a

$$P_{1\text{-loop}}(k, t) = D_+^4(t) P_{1\text{-loop}}(k, t_0). \quad (4.109)$$

A tiempos tempranos, estas correcciones son suprimidas por el crecimiento lineal (es dominante D_+).

Así, es usual escribir al espectro perturbado (4.91) como

$$P^{\text{SPT}}(k, t) = D_+^2(t) P_L(k, t_0) + D_+^4(t) (P_{22}(k, t_0) + P_{13}(k, t_0)) + \dots \quad (4.110)$$

El cálculo de las integrales P_{22} y P_{13} es bastante lento, por lo que se usan métodos *FFTLog* (similares a los que se discuten en el siguiente capítulo) propuestos en [McEwen et al., 2016]. Sin embargo, estos métodos no alcanzan valores de k muy grandes como las que son requeridas por *WL*. Es por esto que se usa la aproximación, propuesta en [Brieden et al., 2021] (en otro contexto),

$$P_{1\text{-loop}}^{\text{aprox}}(k) = \left(\frac{P_L(k)}{P_L^{\text{ref}}(k)} \right)^2 P_{1\text{-loop}}^{\text{ref}}(k), \quad (4.111)$$

con $P_L^{\text{ref}}(k)$ el PS lineal en una cosmología de “referencia”, que se fija con ciertos parámetros cosmológicos. De esta manera solo se calculan las contribuciones perturbativas

$$P_{1\text{-loop}}^{\text{ref}}(k, t_0) = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [F_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p})]^2 P_L^{\text{ref}}(p, t_0) P_L^{\text{ref}}(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|, t_0) + 6P_L(k, t_0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F_3^s(\mathbf{k}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}) P_L^{\text{ref}}(p, t_0). \quad (4.112)$$

una sola vez usando el PS lineal de referencia $P_L^{\text{ref}}(p, t_0)$ y se almacena. En la figura 4.5 se muestra el grado de eficiencia de (4.111) (qué tan buena es esta aproximación cuando se utiliza el cálculo directo y la aproximación) mostrando el cociente

$$R = \frac{P_L(k) + P_{1\text{-loop}}^{\text{aprox}}(k)}{P_L(k) + P_{1\text{-loop}}(k)}, \quad (4.113)$$

para los casos de neutrinos masivos con $M_\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ eV, donde la cosmología de referencia, fija, tiene la masa de neutrinos $M_\nu = 0.0$ eV.

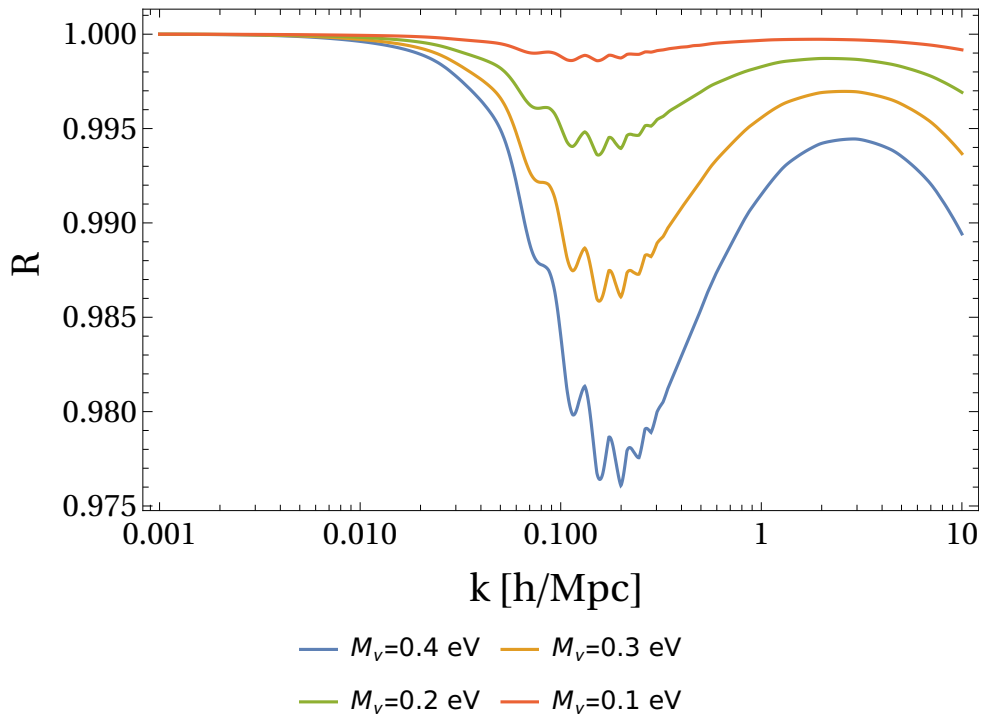


Figura 4.5: Cociente (4.113) que muestra el *shift* entre los espectros no lineales $P_L(k) + P_{1\text{-loop}}(k)$ cuando se toma la aproximación (4.111) (bajo un PS de referencia) y en el caso estándar (sin aproximación). Cada curva es mostrada para distintos valores de la masa absoluta de neutrinos M_ν , siendo el PS de referencia el caso de $P^{\text{ref}}(k)$ con $M_\nu = 0$. Nótese que aún para el caso más alejado ($M_\nu = 0.4$ eV) se sigue obteniendo una buena aproximación ($\sim 2\%$ de desviación).

4.2.4. Espectro angular

Cabe mencionar que, como es de esperarse, también los espectros angulares de *lensing* (convergencia o *shear*) se ven afectados según se tome en consideración una teoría lineal o no lineal. La figura 4.6 muestra el espectro de (2.41) para una teoría lineal (como en 2.5) como para correcciones a 1-loop.

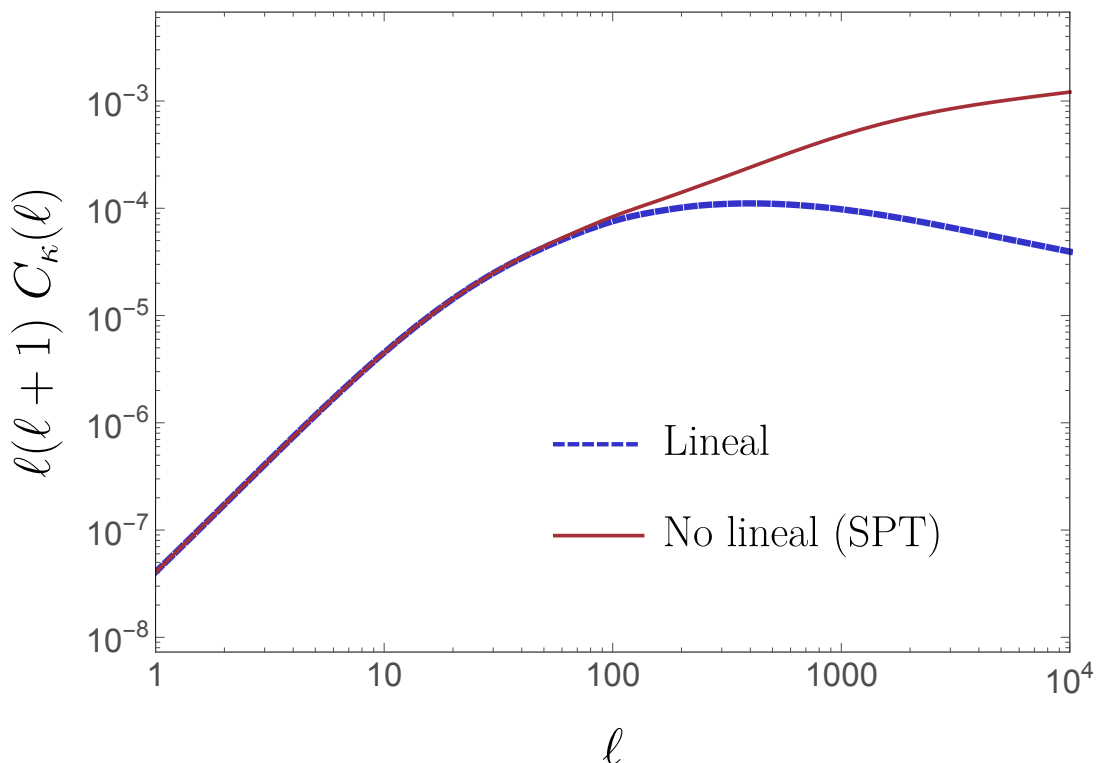


Figura 4.6: Espectro angular de *lensing* (*shear* o convergencia) para una teoría lineal (rojo, punteada) y no lineal (correcciones a un lazo, azul).

4.2.5. CLASS

Dado el sistema de ecuaciones lineales de Einstein-Boltzmann con sus condiciones iniciales y las perturbaciones al campo de densidad de materia (DM), se requiere determinar el PS y establecer su evolución por cada modo de Fourier.

Además de las soluciones analíticas en los casos particulares de pequeñas y grandes escalas para dominio de radiación y materia (respectivamente),⁸ en general, el crecimiento de la estructura se integra numéricamente.

Existen códigos públicos para el cálculo eficiente de estas soluciones, siendo los dos más ampliamente utilizados CAMB [Lewis et al., 2000] y CLASS [Blas et al., 2011]. Ambos

⁸Durante la era de dominio de radiación, las perturbaciones de radiación oscilaban en forma de ondas sonoras estacionarias. Por otro lado, las perturbaciones en DM crecieron logarítmicamente. Posteriormente, en dominio de materia, δ_c evoluciona proporcionalmente al factor de escala [Dodelson and Schmidt, 2020].

códigos permiten calcular la función de transferencia, así como brindar tanto el PS de materia como el angular de anisotropías del CMB. En específico, como se mencionó en §1.3, el presente trabajo está apoyado en cálculos realizados en **CLASS**.

CLASS (*Cosmic Linear Anisotropy Solving System*) es el código libre para la simulación de la evolución de las perturbaciones lineales (para así calcular observables del CMB y de LSS), escrito internamente en el lenguaje de programación **C** (para un más eficiente tiempo de cómputo), mimetizando la noción de “clases” en **C++** –o **Python**– (también de allí el nombre), organizando el código en algunos módulos que reproduzcan esta arquitectura de clases en favor de optimizar su lectura y modularidad [[Lesgourgues-CLASS_HomePage, 2022](#)].

Capítulo 5

Análisis numérico: Método FFTlog

Descripción del código `WLnu.py`

El presente capítulo se basa en la descripción del método numérico y el programa computacional desarrollados en este proyecto, los cuales consistieron en la elaboración de un código en lenguaje Python que calcula las funciones de correlación de *shear* mediante datos de entrada, así como la realización de experimentos a partir de distintas cosmologías, con la peculiaridad de considerar diversas masas de neutrinos dentro del orden de $\mathcal{O}(m_\nu) \sim 0.01 - 1$ eV.

El código base (`WLnu.py`) para el cálculo de las funciones de correlación $\xi_+(\theta)$ y $\xi_-(\theta)$ (2.50, 2.51) consiste en seis módulos (o secciones) de python pertenecientes a un mismo *script* exportado en formato `.py`, de manera que este pueda ser importado (*import statement*) como un módulo del entorno o ámbito local mediante alguna libreta de lectura.

En virtud de lo anterior, existe también un archivo escrito como una *notebook* de Jupyter (`Pipeline_functions.ipynb`), que funciona como el canal por el cual todas las funciones definidas en `WLnu.py` son invocadas y utilizadas como el medio por el cual se realizan todas las acciones (cálculos diversos), a partir de ciertos parámetros de entrada (*inputs*), siendo capaz de obtener los valores requeridos de salida (*outputs*). Asimismo, `Pipeline_functions.ipynb` opera utilizando el código libre CLASS (§4.2.5). En tal sentido, se dice que `Pipeline_functions.ipynb` funciona como una “caja negra”, o bien, una “tubería”. De allí el nombre de *pipeline* (figs. 5.1, 5.2).

A continuación se detalla el proceso seguido en cada uno de los módulos anteriormente referidos, no sin mencionar que el código en general está escrito en serie y no en paralelo, debido a su funcionalidad como pieza de un *pipeline*, en el que un “muestreador” de parámetros (e.g., Monte Carlo Markov *Chain*, MCMC) invoque repetidamente a `WLnu.py` (del orden de decenas de miles de veces), acción que sí se realiza en un proceso en paralelo.

5.1. Métodos numéricos: módulos de Python

A nivel de interfaz código (`WLnu`) - usuario, la libreta `Pipeline_functions` ofrece un ambiente amigable que permite al usuario mismo introducir los parámetros cosmológicos Ω_m y h deseados como *inputs* manipulables en una primer celda. Asimismo, se deja a

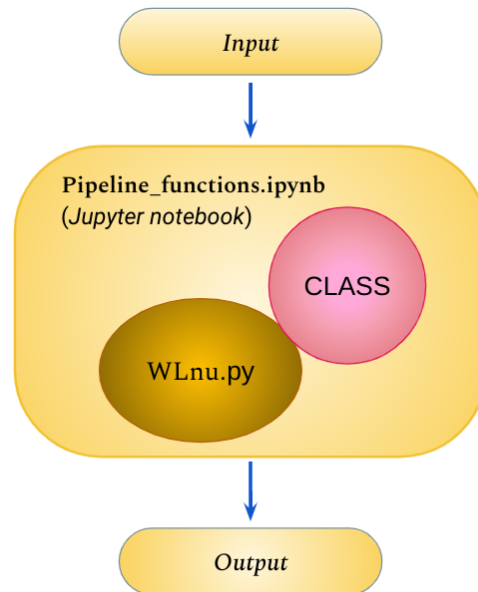


Figura 5.1: Descripción del proceso lógico seguido en `Pipeline_functions.ipynb`. El funcionamiento básico consiste en introducir parámetros de entrada de la cosmología de fondo y del espectro de potencias lineal para obtener variables de salida y , y con ello, las funciones de correlación ξ_+ y ξ_- . Para ello, es necesario utilizar un módulo de `CLASS`, así como las funciones importadas desde los módulos de `WLnu.py`.

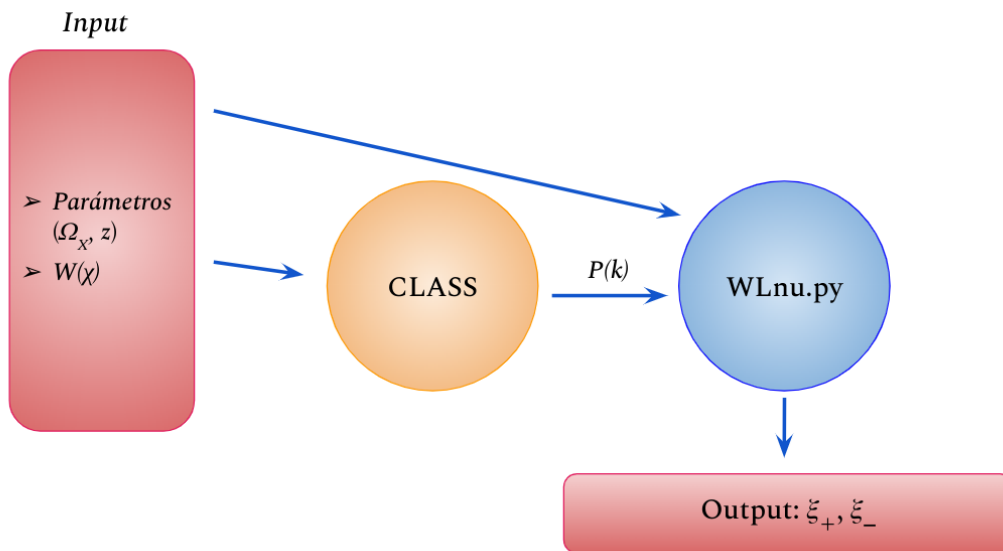


Figura 5.2

elección la masa absoluta de neutrinos con la que se desee realizar el experimento de la obtención tanto del PS de convergencia como las 2PCF $\xi_{\pm}(\theta)$ del *shear*, a orden lineal y no lineal.¹

Por otro lado, `Pipeline_functions` permite establecer el método de resolución que se quiera emplear, siendo la rutina `FFTLog` el método en el que se ha enfocado este estudio, pero permitiendo también, a modo de comparación, el uso del método de integración directa de las funciones de Bessel y espectro de convergencia, sin descomposición por transformadas rápidas de Fourier (el módulo **6** de la subsección §5.1.2 explora este contraste).

El código `WLnu.py` consta de siete módulos internos, cuyos pormenores son detallados a continuación.

1) Módulo “*Background Cosmology*”

Este módulo toma por entrada los siguientes parámetros:

Input

- `OmegaM` (flotante). Abundancia de materia Ω_m ²
- `zT` (*numpy array* equiespaciado). *Redshift* cosmológico z .

¹Los parámetros propios de `CLASS` pueden ser también manipulables si se desea, esto a nivel interno desde `WLnu`, ya que propiamente la cosmología que se busca variar es a nivel de los primeros parámetros mencionados.

²Como se refirió en §1.1.3, el parámetro de densidad Ω_m refiere a la suma de cualquier tipo de presencia de masa que gravita, visible o no (es decir, en el sentido más práctico, $\Omega_m = \Omega_c + \Omega_b$).

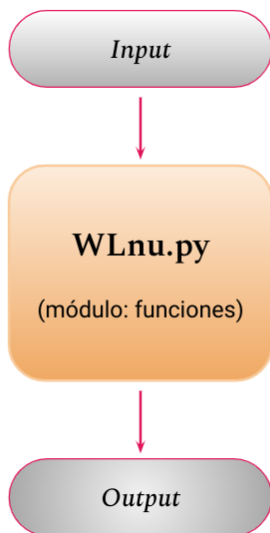


Figura 5.3: A su vez, cada uno de los seis módulos en `WLnu.py` funciona como una “caja negra”, en la que parámetros de entrada son procesados vía una rutina (e.g., la rutina *FFTLog*), obteniendo datos de salida tomados por `Pipeline_functions.ipynb`.

El valor de H_0 es introducido como variable global vía la parametrización (1.83), específicamente de la forma

$$H_0 = \frac{1}{2997.92458} h \text{ Mpc}^{-1}, \quad (5.1)$$

de modo que no es necesario introducirla como parámetro local en los módulos.

Así, basado en la definición de la distancia radial comóvil dada (1.30), con $H(z)$ la ecuación de Friedmann (1.28) en términos de z y las abundancias Ω_X de la respectiva especie X de la forma

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)}, \quad (5.2)$$

es decir, con $\Omega_r + \Omega_m + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1$, de manera que se asume un escenario en donde $\Omega_K = \Omega_r = 0$ (i.e., geoméricamente plano y sin radiación),³ se calcula la función $\chi(z)$ en función de los parámetros de entrada establecidos, integrando desde 0 hasta cierto valor arbitrario z' de interés.

Asimismo, una vez obtenida $\chi(z)$, es necesario obtener su función inversa $z(\chi)$, así como el factor de escala (normalmente escrito $a(t)$) en función de $z(\chi)$ mismo, de tal manera que se obtenga al factor de escala a como función de la distancia comóvil. Esto es obtenido tomando la definición (1.17) de la forma

$$a(\chi) = \frac{1}{1 + z(\chi)}. \quad (5.3)$$

³Como se ha hecho énfasis a lo largo de este escrito, el presente trabajo tiene su enfoque en etapas tardías de la evolución del universo, i.e., en presencia de galaxias (e.g., $z < 5$), razón que explica la ausencia de radiación (contribuciones relativistas a la expansión del universo son despreciables).

De esta manera, los valores de salida para este primer módulo son

Outputs

- `chi0fzT_back` (*numpy array*). Distancia radial comóvil $\chi(z)$
- `z0fchiT_back` (*numpy array*). Redshift $z(\chi)$
- `a0fchiT_back` (*numpy array*). Factor de escala $a(\chi)$

Cada uno de estos resultados son arreglos de python con un valor flotante para cada *redshift* introducido por el usuario (el subfijo `back` refiere a “background”, debido a que representan la información de fondo en las siguientes secciones del código).

2) Módulo “*Linear Growth*”

La función de crecimiento lineal $D_+(a)$ introducida en (1.79) permite establecer una ecuación diferencial con la variable independiente $\eta = \ln(a)$, tal que $D(\eta)$ sostenga las siguientes condiciones iniciales (en virtud de ser un escenario cosmológico EdS para tiempos tempranos, es decir, $D(a) = a$)

$$D(\eta_{\text{ini}}) = e^{\eta_{\text{ini}}}, \quad (5.4)$$

$$D'(\eta_{\text{ini}}) = e^{\eta_{\text{ini}}}. \quad (5.5)$$

Es decir, las condiciones iniciales se escogen a tiempos tempranos, pero en épocas ya dominadas por la materia: esto es, un universo en expansión con $\Omega_m = 1$ (o EdS),⁴ entonces, como se vio en §1.3, $D_+(t_i) \propto a(t_i)$. En la práctica se hace $D_+(\eta_{\text{ini}}) = e^{\eta_{\text{ini}}}$ y $D'_+(\eta_{\text{ini}}) = e^{\eta_{\text{ini}}}$ (5.4, 5.5), y una vez calculada numéricamente la función de crecimiento, esta se reescala para que su valor hoy en día sea igual a la unidad, $D_+(\eta = 0) = 1$.

Así, la función de crecimiento lineal $D_+(a)$ es la solución de más rápido crecimiento a la ecuación diferencial (4.49) (en la variable del tiempo cósmico t)

Inputs

- `eta_ini` (entero). η_{ini}
- `eta_fin` (entero). η_{fin} ⁵
- `Dplus_i`, `dDplus_i` (flotantes). Condiciones iniciales (CI) correspondientes a la evaluación en el valor inicial de la función D_+ y su derivada en η , *i.e.*, $D(\eta_{\text{ini}})$, $D'(\eta_{\text{ini}})$
- `OmegaM` (flotante). Ω_m

⁴En particular, se ha escogido $\eta_{\text{ini}} = -8$.

⁵Notar entonces que se ha considerado como momento final al día de hoy, *i.e.*, $a = 1$, de modo que $\eta = 0$.

La ecuación diferencial (4.49) es resuelta numéricamente, expresando esta solución como función de a . Para ello, es conveniente escribir esta ecuación en dependencia del tiempo conforme (ver apéndice C) a través de la definición (1.33), como

$$D''[\eta] + \left(2 - \frac{3}{2\left(1 + \frac{(1-\Omega_m)}{\Omega_m}e^{3\eta}\right)}\right) D'[\eta] - \frac{3}{2\left(1 + \frac{(1-\Omega_m)}{\Omega_m}e^{3\eta}\right)} D[\eta] = 0, \quad (5.6)$$

para, una vez hallada la solución, escribirla como función de la distancia comóvil χ .

La solución a (5.6) es hallada numéricamente por `WLnu.py` mediante el método `odeint` (*ordinary differential equation*) de `scipy.integrate`.

Outputs

- `DplusOfchi_linG` (función de `CubicSpline`). Función de crecimiento lineal $D_+(\chi)$
- `DplusOfa_linG` (función de `CubicSpline`). Función de crecimiento lineal $D_+(a)$.

3) Módulo “*Gravitationl lensing: lens efficiency*”

Input

- `W_input` (*numpy array*). Distribución de probabilidad de galaxias $W(\chi)$ ⁶

Resulta útil en la práctica aproximar la fuente de distribución de galaxias (1.85) con una distribución delta de Dirac, como función de la distancia comóvil a la fuente, χ_S (ver figura 5.4).

⁶Concepto introducido y descrito en §1.4.2, que refiere a la probabilidad de hallar una galaxia en un *bin* del cielo (foto- z).

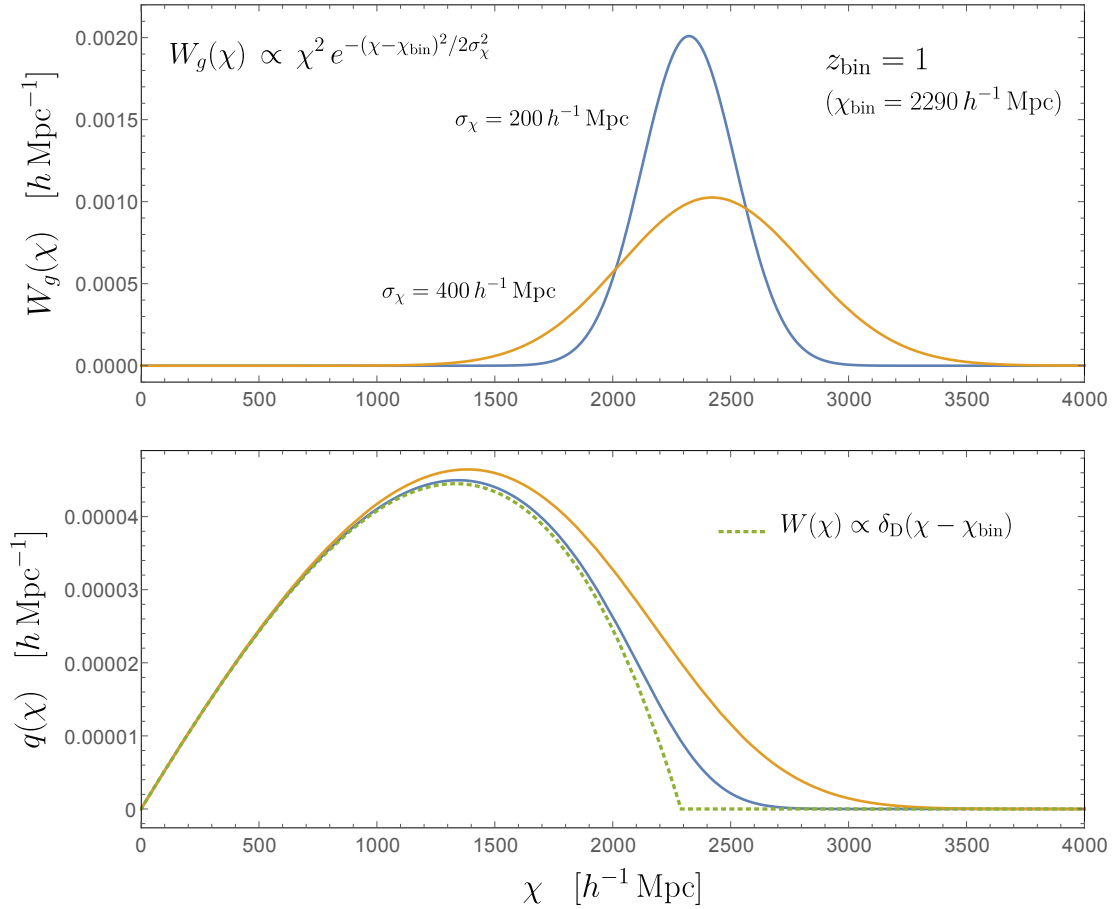


Figura 5.4: Eficiencia de lente q como función de χ (panel inferior) para distintas distribuciones de galaxias $W(\chi)$ (mostradas correspondientemente por el panel superior como formas gaussianas para una desviación σ_χ dada). La función $q(\chi)$ muestra una curva generalmente suave con un máximo y cierto valor χ_{max} para el cual la eficiencia es despreciable. El caso particular de la distribución de probabilidad de galaxias $W(\chi)$ aproximándose a la delta de Dirac es mostrado, haciendo notar que su comportamiento es completamente similar.

La función delta de Dirac es la distribución más utilizada al momento de probar modelos con simulaciones [Takahashi et al., 2017], debido a que en estos se adoptan bins pequeños en χ . En tal caso, la eficiencia de lente $q(\chi)$ (2.34) tiene solución analítica

$$q(\chi) = \frac{3H_0^2\Omega_m}{2c^2} \frac{\chi}{a(\chi)} \frac{\chi_S - \chi}{\chi_S} \Theta(\chi_S - \chi), \quad (5.7)$$

para $W(\chi) = \delta_D(\chi_S - \chi)$, siendo $\Theta(\chi_S - \chi)$ la función de *Heaviside* definida por

$$\delta_D(\chi_S - \chi) \equiv \frac{d}{d\chi} \Theta(\chi_S - \chi). \quad (5.8)$$

Así, dados H_0 , Ω_m , z_{Bin} y la aproximación mencionada para $W(\chi)$, es posible definir y

calcular tanto $g_L^{DD}(\chi)$ como consecuentemente $q^{DD}(\chi)$ (donde DD denota el caso particular de la distribución Delta de Dirac).

La función $q^{DD}(\chi)$ de desvanece (notar de la fig. 5.4) a partir de cierto valor χ_{max} , el cual se calcula. Para el caso general en que $W(\chi)$ esté representada por una distribución cualquiera, se sigue el procedimiento análogo, obteniendo así $g_L(\chi)$ y $q(\chi)$ a partir de la distribución $W(\chi)$ escogida. Para $q(\chi) \neq q^{DD}(\chi)$ es imposible alcanzar el cero, por lo que se considera el valor de χ para el cual $q(\chi) \rightarrow 0$ hasta cierto orden, en donde es despreciable.

Es importante notar que la variable χ_{max} es útil en términos de eficiencia computacional debido a que representa el límite superior (dada su definición) en que debe calcularse la eficiencia de lente q . Por ello, este módulo también computa el $(i - 1)$ -ésimo valor del arreglo de χ en que ocurre.

Outputs

- `qT_lensEff` (*numpy array* de dos dimensiones). Eficiencia de lente $q(\chi)$
- `chimax_lensEff` (flotante). Máxima distancia radial comóvil a partir de la cual la eficiencia de lente comienza a considerarse despreciable, χ_{max} ⁷
- `chiBin_lensEff` (flotante). Distancia radial comóvil para el valor z_{Bin} elegido, *i.e.*, $\chi(z_{Bin})$.

4) Módulo “*Convergence Power Spectrum*”

Input

- `inputpkT` (*numpy array* de dos dimensiones, `k`, `pk`). Espectro de potencias lineal $P_L(k)$ obtenido de `Class`⁸.

Este módulo parte de la obtención del espectro de potencial lineal de materia, mismo que es calculado por una rutina de `CLASS` (fig. 5.2) mediante parámetros cosmológicos de entrada solicitados por el mismo código de Boltzmann. A partir del espectro de potencias dado, se establecen los valores máximo y mínimo de k en el archivo de datos, los cuales permiten definir las funciones $\chi_{min}(\ell)$ y $\chi_{max}(\ell)$ respectivamente (notar la relación opuesta entre máximo y mínimo), siendo que la variable ℓ corre de los valores fijos ℓ_{min} y ℓ_{max} (recordar que ℓ es análogo a k en la escala angular y se mide en minutos de arco, arcmin) en un arreglo de N puntos de intervalos logarítmicamente espaciados,

$$\ell_{array}[i] = 10^{\lceil \log_{10}(\ell_{min}) + \Delta_\ell \cdot i \rceil}, \quad (5.9)$$

⁷Más precisamente, el valor `chimaxinqT_lensEff` es calculado en función de una distinta eficiencia q y, por ende, de la distribución W usada. El valor a partir del cual la eficiencia de lente es despreciable, *i.e.*, $q(\chi > \chi_{max}) \simeq 0$, se calcula haciendo $\chi_{max} = \chi[i - 1]$ para la i -ésima entrada del arreglo q en que $q(\chi[i]) \simeq 0$ hasta cierta precisión (1×10^{-3} veces menor que el primer valor distinto de cero en q).

⁸Entrada con la información de la variable k (vector de onda, también llamado lo “modo k ” de propagación, únicamente representando su magnitud debido a isotropía) y el espectro de potencias P asociado a dicho modo, respectivamente.

con $\Delta_\ell = \log_{10} \left(\frac{\ell_{\max}}{\ell_{\min}} \right) / (N - 1)$.

Para el cálculo del espectro de potencias de convergencia (definido por 2.36 y escrito ahora de la forma siguiente empleando la descomposición $P_{DD\ lin}(\ell, \chi) = D_+(\chi)^2 P_{lin}(k)$)

$$C_\kappa(\ell) = \int_0^\infty d\chi \frac{q(\chi)q(\chi)}{\chi^2} P_{\delta\delta} \left(k = \frac{1}{\chi}, \chi \right), \quad (5.10)$$

se realiza una secuencia que calcule la integral mediante un método típico de trapezoides (suma de áreas por iteraciones), en donde cada valor del cálculo de $\frac{q^2(\chi)}{\chi^2} P_{\delta\delta} \left(\frac{1}{\chi}, \chi \right)$ para cada ℓ es almacenado en un arreglo, el cual representa la suma de $C(\kappa)$ en cada punto.

Output

- CkappaT_kappaPS (*numpy array* de dos dimensiones, la variable ℓ y su función C_κ).
- Espectro de potencias de la convergencia $C_\kappa(\ell)$.

5.1.1. Algoritmo FFTLog

En la presente sección se sigue el cálculo realizado para la obtención de las funciones de correlación del *shear* (a diferencia del trivialmente sugerente cálculo por integración directa del espectro del espectro de convergencia 5.10) empleando una rutina de Transformadas Rápidas de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), algoritmo popularizado en los 60s por los matemáticos estadounidenses James William Cooley y John Wilder Tukey [Cooley and Tukey, 1965] que se distingue por brindar un alto grado de eficiencia para calcular transformadas discretas de Fourier de una señal periódica discreta, ya que, para un conjunto de N puntos en la muestra, normalmente se requiere de N^2 operaciones, mientras que el algoritmo FFT reduce este factor a un número de $N \log N$ pasos, haciendo notablemente menor el tiempo de cómputo.

El algoritmo FFT se caracteriza por la posibilidad de descomponer a la transformada completa de un conjunto de señales en un conjunto de transformadas más simples, así iterativamente hasta tener transformadas de únicamente dos elementos. Una vez realizadas las transformadas, se reagrupan haciendo el proceso inverso a la descomposición. La virtud de la optimización en este algoritmo recae en las propiedades de simetría de la transformada de Fourier (vista matricialmente, existe la simetría de elementos $a_{ij} = a_{ji}$ que conforman a los coeficientes de la suma), requiriendo así muchos menos términos a calcular.

Asimismo, el carácter logarítmico en el nombre *FFTLog* proviene del hecho de considerar intervalos logarítmicamente espaciados en el total de N elementos de la muestra, en lugar de hacerlo linealmente como en el caso estándar. El algoritmo *FFTLog* fue originalmente propuesto por el matemático aplicado James D. Talman [Talman, 1978].

Formalismo en el algoritmo FFTLog

El algoritmo *FFTLog* calcula la transformada rápida de Fourier o de Hankel (la cual es análoga a la transformada de Fourier con una función de Bessel como kernel) de una secuencia periódica de puntos logarítmicamente espaciados [Hamilton, 2000]. *FFTLog* brinda

la transformada “exacta” (en virtud de la precisión de cómputo disponible) a orden arbitrario μ en el mismo sentido que *FFT* lo hace para una secuencia de señales periódicas linealmente espaciadas, de modo que comparten los mismos problemas de *ringing* y *aliasing* vistos en §4.2 (respuesta a pasos repentinos y plegamiento periódico de frecuencias, respectivamente), pero bajo circunstancias apropiadas, *FFTLog* puede aproximarse a los resultados de una transformada continua de Fourier o Hankel.

Considere la Transformada de Hankel (HT) continua⁹

$$a(r) = \int_0^\infty \tilde{a}(k)(kr)^{-q} J_\mu(kr) r dk. \quad (5.11)$$

$$\tilde{a}(k) = \int_0^\infty a(r)(kr)^q J_\mu(kr) k dr, \quad (5.12)$$

de las funciones arbitrarias $\tilde{a}(k)$ y $a(r)$ (HT directa e inversa, respectivamente), con q un número (en principio) arbitrario, llamado sesgo, y $J_\mu(kr)$ la función de Bessel de primera especie de orden μ ($\mu \geq -1/2$). Bajo la sustitución $\tilde{a}(k) = \tilde{A}(k)k^q$ y $a(r) = A(r)r^{-q}$, las ecuaciones (5.11, 5.12) se expresan como

$$A(r) = \int_0^\infty \tilde{A}(k) J_\mu(kr) r dk. \quad (5.13)$$

$$\tilde{A}(k) = \int_0^\infty A(r) J_\mu(kr) k dr. \quad (5.14)$$

Aunque la HT (5.11) con un sesgo de la ley de potencias $(kr)^{\pm q}$ es equivalente en el caso continuo a la HT insesgada (5.13), las transformadas son diferentes cuando se discretizan y se hacen periódicas; si $a(r)$ es periódica, entonces $A(r) = a(r)r^q$ no lo es [Hamilton, 2000]. Sin embargo, estas transformadas siempre se realizan sobre un intervalo finito, así que la periodicidad de las funciones no es importante si se limita su validez a dicho intervalo. De tal manera, se escoge el valor del sesgo q de manera tal que se obtenga una mejor convergencia de las transformadas integrales con un número menor de puntos de muestreo una vez que hayan sido discretizadas.

Si el producto kr en la HT es escrito como $e^{\ln k + \ln r}$, la transformada se convierte una integral de convolución en la variable de integración $\ln r$ (o $\ln k$) [Siegman, 1977].¹⁰ De tal modo, la HT puede ser calculada numéricamente por el algoritmo *FFT* de la forma

$$\text{FFT} \rightarrow \text{multiplicación por función} \rightarrow \text{IFFT (inversa)}, \quad (5.15)$$

visto de manera general [Candel, 1981, Anderson, 1982, Hansen, 1985]. Una ventaja de las HT es que el orden μ de la función de Bessel puede ser cualquier número real arbitrario. En particular, *FFTLog* opera con μ siendo un semi entero.

⁹La transformada de Hankel expresa cualquier función dada como la suma pesada por un número infinito de funciones de Bessel de primera especie $J_\mu(kr)$. También es conocida simplemente como la Transformada de Fourier-Bessel.

¹⁰La convolución es equivalente a la multiplicación en el correspondiente espacio de Fourier.

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Suponga a la secuencia periódica de puntos espaciados linealmente $a(r)$ como continua, con periodo R , de manera que $a(r+R) = a(r)$, $[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$ (en general evaluada en complejos). Así,

1. Al ser $a(r)$ periódica, su transformada de Fourier (FT) contiene solo modos discretos de Fourier $e^{2\pi i m \frac{r}{R}}$, con m el número de onda (entero).
2. $a(r)$ es suave, *i.e.*, se puede expresar como una combinación lineal solo de los N modos de frecuencias de Fourier más bajas ($m = 0, \pm 1, \dots, \pm[N/2]$, con $[N/2]$ el entero más grande $\geq N/2$),

$$a(r) = \sum_m ' c_m e^{2\pi i m \frac{r}{R}}, \quad (5.16)$$

siendo los coeficientes de Fourier más externos idénticos, $c_{-N/2} = c_{N/2}$, en el caso de N un número par (la suma primada indica una suma desde $-[N/2]$ hasta $[N/2]$). Los elementos más externos de la suma reciben solo la mitad del peso para N par.

3. Por el teorema de muestreo, los coeficientes c_m pueden ser expresados en términos de los valores $a_n = a(r_n)$, con $r_n = n \frac{R}{N}$ (reconstrucción exacta de una señal continua a partir de sus muestras). Así, la señal puede expresarse como una serie con los coeficientes c_m en (5.16) de la forma

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_m ' a_n e^{-2\pi i m \frac{n}{N}}, \quad (5.17)$$

donde $a_n \equiv a(r_n) = \sum_n ' c_m e^{2\pi i m \frac{n}{N}}$.

La ecuación (5.17) junto con la última definición de a_n constituyen la DFT que relacionan dos secuencias periódicas de longitud N espaciadas linealmente, a_n y c_m . La FFT estándar evalúa exactamente esta DFT.

Transformada Discreta de Hankel (DHT)

Ahora, suponga a la secuencia periódica $a(r)$ en el espacio logarítmico $\ln r$, con periodo logarítmico L , de modo que cumpla $a(re^L) = a(r)$.

Análogamente al caso anterior, dado que $a(r)$ es una función periódica, la transformada de Fourier (FT) con respecto a $\ln r$ contiene solo los modos discretos de Fourier $e^{2\pi i m \frac{\ln(r/r_0)}{L}}$, con m el número de onda entero, para el intervalo $[\ln r_0 - \frac{L}{2}, \ln r_0 + \frac{L}{2}]$ centrado en $\ln r_0$.

Así, para los N modos de Fourier de frecuencia más baja, la función $a(r)$ se expresa como

$$a(r) = \sum_m ' c_m e^{2\pi i m \ln(r/r_0)/L}, \quad (5.18)$$

con $c_{-N/2} = c_{N/2}$ una vez más, dados en general por

$$c_m = \frac{1}{N} \sum'_m a_n e^{-2\pi i m \frac{n}{N}}, \quad (5.19)$$

$$a_n \equiv a(r_n = r_0 e^{nL/N}).$$

Tomando por definición la HT continua $\tilde{a}(k)$ de $a(r)$

$$\tilde{a}(k) = \sum'_m c_m \int_0^\infty e^{2\pi i m \frac{\ln(r/r_0)}{L}} (kr)^q J_\mu(kr) k dr = \sum'_m c_m u_m e^{2\pi i m \frac{\ln(r/r_0)}{L}}, \quad (5.20)$$

con

$$u_m(\mu, q) \equiv (k_0 r_0)^{-2\pi i m/L} U_\mu \left(q + \frac{2\pi i m}{L} \right). \quad (5.21)$$

Es importante destacar que U_μ es la integral en (5.20) expresada en términos de la función Gamma de la forma

$$U_\mu(x) \equiv \int_0^\infty t^x J_\mu(t) dt = 2^x \frac{\Gamma[(\mu + 1 + x)/2]}{\Gamma[(\mu + 1 - x)/2]}, \quad (5.22)$$

misma que es utilizada en el módulo de la rutina *FFTlog* en `WLn.py`. Asimismo, es importante el hecho de que $u_m^* = u_{-m}$, lo cual garantiza que la función $\tilde{a}(k)$ es real si $a(r)$ lo es (condición de realidad 2.12).

En virtud de lo anterior, el par de DHT resulta ser

$$\tilde{a}_n = \sum'_m a_m v_{(m+n)}^+(\mu, q), \quad a_m = \sum'_n \tilde{a}_n v_{(m+n)}^-(\mu, q), \quad (5.23)$$

donde los modos $v_n^\pm(\mu, q)$ directo (+) e inverso (-) son las DFT de $u_m(\mu, q)$ y de $\frac{1}{u_{-m}(\mu, q)} = u_m(\mu, -q)$, cuyas matrices de transformación son mutuamente inversas (*i.e.*, su producto es la delta Kronecker). Ambos difieren en el caso discreto solo para N par y en el coeficiente de más alta componente de frecuencia de Fourier, que se espera sea pequeño.

Algoritmo *FFTLog*

Para obtener la DHT (5.23) de una secuencia a_n de N puntos, se realiza la siguiente secuencia lógica:

1. Realizar la FFT sobre a_n para obtener los coeficientes c_m (5.19).
2. Multiplicar por u_m (dado por 5.21) para obtener $c_m u_m$
3. Aplicar la FFT sobre $c_m u_m$ de regreso (es decir, la inversa) para obtener la DHT, \tilde{a}_n (este proceso inverso se logra mediante la misma serie de pasos, excepto que c_m se divide entre u_m , en lugar de multiplicar).

$$c_m u_m = \frac{1}{N} \sum'_n \tilde{a}_n e^{2\pi i m n/N}, \quad \tilde{a}_n = \sum'_m c_m u_m e^{-2\pi i m n/N}. \quad (5.24)$$

En principio, el método *FFTLog* funciona para teoría lineal. Sin embargo, se busca la manera de utilizarlo para el régimen no lineal, como es el caso de modelos de halo.

Cálculo de la función de correlación del *shear* mediante método *FFTLog*

El uso de este método es válido para campos lineales, debido a la posibilidad de factorizar al espectro de potencias (1.82) como¹¹

$$P(k, t) \simeq D_+^2(t)P(k). \quad (5.25)$$

El objetivo es integrar las 2PCF (2.47, 2.48) sin pasar por el cálculo directo de la integración de $C_\kappa(\ell)$, tomando provecho del hecho de poder expresar

$$\begin{aligned} \xi_+(\theta) &= \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_0(\theta\ell) C_\kappa(\ell) \\ &= \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_0(\theta\ell) \int d\chi \frac{q_f(\chi)q_g(\chi)}{\chi^2} D_+^2(\chi) P_\delta\left(\frac{\ell}{\chi}\right) \\ &= \int d\chi \frac{q_f(\chi)q_g(\chi)}{\chi^2} D_+^2(\chi) \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_0(\theta\ell) P_\delta\left(\frac{\ell}{\chi}\right), \end{aligned} \quad (5.26)$$

en donde se ha usado la definición (2.36) y la descomposición del PS (5.25), para $\ell \gg 1$ (i.e., $\ell + \frac{1}{2} \simeq \ell$). Se realiza lo análogo para el caso $\xi_-(\theta)$ con argumento $J_4(\theta\ell)$.¹²

Definiendo $k = \ell/\chi$, se obtiene entonces

$$\xi_\pm(\theta) = \int d\chi \frac{q^2(\chi)}{\chi^2} \chi^2 D_+^2(\chi) \int \frac{dk}{2\pi} k J_{0,4}(\theta k\chi) P_\delta(k), \quad (5.27)$$

separando en dos integrales, una en el término lineal (χ) y otra en su recíproco k , en donde se ha dejado explícito el término χ^2 por conveniencia.

Expandiendo el PS lineal como la suma de los espectros invariantes de escala con potencias complejas como

$$\bar{P}_L(k) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} c_m k^{\nu+i\eta_m}, \quad (5.28)$$

con

$$\eta_m = \frac{N-1}{N} \frac{2\pi m}{\ln\left(\frac{k_{\max}}{k_{\min}}\right)}, \quad (5.29)$$

en donde se ha dividido un intervalo $[k_{\max}, k_{\min}]$ en N números de onda logarítmicamente espaciados. Por otro lado, los coeficientes c_m surgen de la DFT logarítmica

¹¹Como se discutió en §1.2.2, el crecimiento de la estructura se vuelve independiente de escala después del desacoplamiento. Por esta razón, resulta conveniente descomponer el crecimiento en la función de transferencia $T(k)$ (dependiente de la escala k) y el factor de crecimiento $D_+(a)$ (dependiente del tiempo a través de $a(t)$) (1.79). Esta parametrización permite desvincular la física del universo primitivo (codificada en $T(k)$) de la del universo tardío (capturada por $D_+(a)$).

¹²En general, la expresión (5.26) funciona para fuentes con dos posibles distribuciones de galaxias distintas, que darían lugar a dos eficiencias de lente $q_f(\chi)$ y $q_g(\chi)$ como funciones a discernir. Sin embargo, no es el caso actual, ya que refiere a exactamente la misma distribución, por lo que en las ecuaciones subsecuentes se denota únicamente como $q^2(\chi)$.

$$c_m = W_m k_{\min}^{-\nu - i\eta m} \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} P_L(k_\ell) \left(\frac{k_\ell}{k_{\min}} \right)^{-\nu} e^{-2\pi i m \ell / N}. \quad (5.30)$$

W_m son los pesos, los cuales se establecen como $W_m = 1$ en toda m excepto en los extremos, donde valen

$$W_{-N/2} = W_{N/2} = 1/2. \quad (5.31)$$

Como se mencionó al inicio de esta subsección, el sesgo (*bias*), en principio, puede ser cualquier número real; sin embargo, se elige de tal manera que brinde una mejor convergencia.

Así, definiendo al factor

$$a_m = 1 + \nu + i\eta m, \quad (5.32)$$

se modifica (5.27) sustituyendo al espectro con (5.28), de manera que quede en términos de los coeficientes (5.30) como

$$\xi_{\pm}(\theta) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} c_m \int d\chi \frac{q^2(\chi)}{\chi^2} \chi^2 D_+^2(\chi) \int \frac{dk}{2\pi} k^{a_m} J_{0,4}(\theta k \chi). \quad (5.33)$$

Ahora, análogo al caso descrito en (5.22), la integral sobre los modos k se expresa como

$$\int \frac{dk}{2\pi} k^{a_m} J_n(x k) = \frac{2^{-1+a_m} x^{-a_m-1} \Gamma(\frac{1}{2}(a_m + n + 1))}{\pi \Gamma(\frac{1}{2}(-a_m + n + 1))}, \quad (5.34)$$

bajo las condiciones en a_m

$$\Re[a_m] < 1/2, \quad \Re[a_m + n] > -1, \quad (5.35)$$

(debido a que el índice es $n = 0, 1, 2, \dots$). De este modo, la elección del sesgo ν queda más al descubierto. Por ejemplo, tomando $\nu = -1.5$, implica $a_m = -0.5 + i\eta m$. Así,

$$\begin{aligned} \xi_n(\theta) &= \sum_{m=-N/2}^{N/2} c_m \int d\chi \frac{q^2(\chi)}{\chi^2} \chi^2 D_+^2(\chi) (\chi \theta)^{-a_m-1} \frac{2^{-1+a_m} \Gamma(\frac{1}{2}(a_m + n + 1))}{\pi \Gamma(\frac{1}{2}(-a_m + n + 1))} \\ &= \sum_{m=-N/2}^{N/2} c_m \theta^{-a_m-1} \frac{2^{-1+a_m} \Gamma(\frac{1}{2}(a_m + n + 1))}{\pi \Gamma(\frac{1}{2}(-a_m + n + 1))} \int d\chi q^2(\chi) \chi^{-a_m-1} D_+^2(\chi). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Finalmente, esta última expresión se puede simplificar mediante la siguiente definición,

$$A_m \equiv \int d\chi q^2(\chi) \chi^{-a_m-1} D_+^2(\chi), \quad (5.37)$$

obteniendo así

$$\xi_+(\theta) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} c_m A_m \theta^{-(a_m+1)} \frac{2^{-1+a_m} \Gamma(\frac{1}{2}(a_m + 1))}{\pi \Gamma(\frac{1}{2}(-a_m + 1))}, \quad (5.38)$$

$$\xi_{-}(\theta) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} c_m A_m \theta^{-(a_m+1)} \frac{2^{-1+a_m} \Gamma\left(\frac{1}{2}(a_m + 5)\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2}(-a_m + 5)\right)}, \quad (5.39)$$

la cual es la forma que se emplea en el código `WLnu` para calcular las funciones de correlación de WL.

5.1.2. Cálculo de las funciones de correlación

En la presente subsección se describe el módulo que en particular se orienta al cálculo del objetivo primordial en `WLnu.py`: las funciones de correlación del *shear* cósmico ξ_{\pm} , utilizando el método descrito en §5.1.1.

5) Módulo “*Correlation functions ξ_{+} , ξ_{-} using FFTlog Method*”

El objetivo de este módulo es calcular las 2PCF del *shear* cósmico mediante el algoritmo *FFTLog* descrito en §5.1.1, a partir de las ecuaciones finales (5.38, 5.39). Para ello, se requiere la construcción de todos los términos implicados en las ecuaciones referidas: η_m para un número N de *items* escogido en el método, los coeficientes c_m (5.30) de la expansión en serie (asumiendo cierto valor de sesgo), k_{\max} , k_{\min} y los términos A_m (5.37) vía la asunción de una eficiencia de lente (distribución de probabilidad de galaxias) y la solución del factor de decrecimiento $D_{+}(a)$.

Input

- `inputpkT` (*numpy array* de dos dimensiones, `k`, `pk`). Espectro de potencias lineal $P_L(k)$ obtenido de `Class`.

Este módulo opera con variables angulares como término independiente, las cuales deben ser convertidas de su escala angular original (`arcmin`) a `radianes` para su lectura en `Python`. De esta manera, es necesario establecer un intervalo logarítmicamente espaciado en términos angulares, para lo cual se elige un valor máximo y mínimo dentro del cuál se tomen N muestras de ángulos subtendidos análogamente al módulo anterior, es decir,

$$t \text{ angle}_{\text{array}} [i] = 10^{\lceil \log_{10}(\theta_{\min}) + \Delta_{\theta} \cdot i \rceil}, \quad (5.40)$$

para el índice i del arreglo, con $\Delta_{\theta} = \log_{10} \left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right) / (N - 1)$.

Específicamente para la implementación de la rutina `FFTlog`, se utiliza un total de $N_{\text{FFT}} = 128$ objetos,¹³ un valor máximo $k_{\max\text{FFT}} = 10$ y mínimo $k_{\min\text{FFT}} = 1 \times 10^{-4}$ ($h \text{ Mpc}^{-1}$), y un *bias* (§1.4.2) elegido como $\nu_{\text{bias}} = -1.3$.

Mediante un proceso totalmente análogo al utilizado tanto para ℓ como para θ , se toma un intervalo logarítmico (base 10) para los N_{FFT} puntos, de la forma $\Delta_{k_{\text{FFT}}} = \log_{10} \left(\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right) / (N_{\text{FFT}} - 1)$, el cual permite ahora definir el arreglo para los modos k

$$k_{\text{FFT array}} [i] = k_{\min} e^{i \cdot \Delta_{k_{\text{FFT}}}}. \quad (5.41)$$

¹³El método `FFTlog` utiliza una muestra de N objetos, siendo convencionalmente N un número de la forma 2^n .

De esta manera, se establece

$$g_{\text{fft}}(\nu_{\text{bias}}, k_i) = P_L(k_i) \left(\frac{k_i}{k_{\text{min}}} \right)^{-\nu_{\text{bias}}} \quad (5.42)$$

como el conjunto de valores (arreglo multivaluado en 5.41 para los índices i) que será operado mediante una DFT.¹⁴ Es decir, g_{fft} es la función previo a aplicar la transformada \mathcal{F} , de modo que se puede definir

$$G_{\text{FFT}} = \mathcal{F}\{g_{\text{fft}}\}. \quad (5.43)$$

Adicionalmente, es necesario definir

$$\eta_{\text{m, array}}[n] = \nu_{\text{bias}} + 2\pi i \left(n - \frac{N_{\text{FFT}}}{2} \right) \frac{N_{\text{FFT}} - 1}{\ln \left(\frac{k_{\text{max}}}{k_{\text{min}}} \right) N_{\text{FFT}}}, \quad (5.44)$$

para el índice n del arreglo; en este caso i representa a la unidad imaginaria (i.e., $i^2 = -1$).

Como se describió en §5.1.1, los coeficientes c_m (5.30) de la serie son requeridos para calcular las funciones de *shear*. Estos coeficientes (en general un arreglo complejo de dimensión N_{FFT}) se obtienen bajo la condición en N_{FFT}

$$c_m[n] = \begin{cases} k_{\text{min}}^{-\eta_{\text{m, array}}[n]} G_{\text{FFT}}^*(\nu_{\text{bias}}, k_n)[-n + \frac{N_{\text{FFT}}}{2}], & 0 \leq n < \frac{N_{\text{FFT}}}{2} \\ k_{\text{min}}^{-\eta_{\text{m, array}}[n]} G_{\text{FFT}}(\nu_{\text{bias}}, k_n)[n - \frac{N_{\text{FFT}}}{2}], & \frac{N_{\text{FFT}}}{2} \leq n < N_{\text{FFT}} + 1, \end{cases} \quad (5.45)$$

denotando $G^*(\nu, k)$ el conjugado de la función definida en (5.43), es decir, una vez aplicada la función `np.fft.fft`). Por otro lado, cabe destacar, en relación a (5.31), que los coeficientes c_m para los valores particulares de $n = 0, N_{\text{FFT}}$ (i.e., el primer y último coeficiente) satisfacen

$$\begin{aligned} c_m[0] &= \frac{c_m[0]}{2} \\ c_m[N_{\text{FFT}}] &= \frac{c_m[N_{\text{FFT}}]}{2}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

lo que indica que los valores extremos contribuyen como la mitad de su valor asignado por (5.45).

A continuación, se construye el arreglo de los términos A_m (5.37) mediante una rutina de iteraciones que realicen una integración por el método de sumas de áreas de trapecios con una anchura $\Delta\chi_{A_m}$ dada, para lo que es necesario emplear un arreglo de N_χ puntos logarítmicamente espaciados (análogamente a los casos anteriores, aunque ahora no se requiere que N tenga la forma de 2^n) de χ_{FFT} en el intervalo $[\chi_{\text{min}}, \chi_{\text{max}}]$, es decir,

$$\chi_{\text{FFT}}[n] = 10^{\{\log_{10}(\chi_{\text{min}}) + \Delta\chi_{\text{FFT}} \cdot n\}}, \quad (5.47)$$

¹⁴Se ha utilizado la función unidimensional `fft.fft` de la librería `numpy` de Python para obtener la Transformada Rápida de Fourier.

para el índice n corriendo en la longitud de N_χ , con $\Delta\chi_{\text{FFT}} = \log_{10} \left(\frac{\chi_{\text{max}}}{\chi_{\text{min}}} \right) / (N_\chi - 1)$.

Así, integrando como indica (5.37), se obtiene la función A_m como un arreglo para cada entrada n . Auxiliándose de (5.32), $a_m = 1 + \eta_{m,\text{array}}$ (notar que la definición 5.44 ya incluye al sesgo ν_{bias}), se define a los arreglos de números complejos $I_{m,0,4}$ (en relación a las funciones de Bessel de primera especie de orden 0 y 4 referidas en 5.38 y 5.39) vía (5.34) como

$$I_{m0} = \frac{2^{-1+a_m} \Gamma\left(\frac{1}{2}(1+a_m)\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-a_m)\right)}, \quad (5.48)$$

$$I_{m4} = \frac{2^{-1+a_m} \Gamma\left(\frac{1}{2}(5+a_m)\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2}(5-a_m)\right)}. \quad (5.49)$$

De esta manera, multiplicando los resultados arrojados por (5.45, 5.37, 5.48 y 5.49) con su respectivo ángulo $\theta^{-(1+a_m)}$, se obtienen los arreglos ξ_+ y ξ_- para cada ángulo en la entrada n . Los respectivos resultados son mostrados por la figura 5.5.

Output

- `xiPlusT_FFT_output`, `xiMinusT_FFT_output` (*numpy arrays*). Funciones de correlación $\xi_{\pm}(\theta)$.

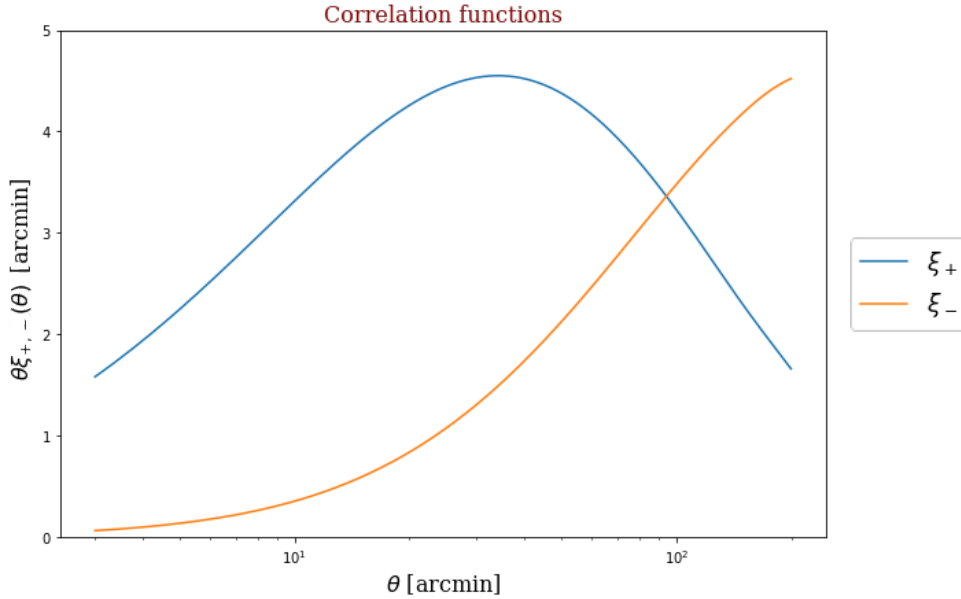


Figura 5.5: Funciones de correlación del *shear* cósmico (2.47, 2.48) para distintos valores de θ , usando el algoritmo *FFTLog* (§5.1.1, 5.38, 5.39). $\xi_{\pm}(\theta)$ es multiplicada por su variable independiente misma por fines de visualización (eje vertical).

6) Módulo “*Correlation functions* ξ_+ , ξ_- using direct integration of C_κ ”

A modo de prueba de la efectividad computacional al emplear rutinas *FFTLog*, en el módulo actual se realizó un cálculo directo de las funciones de correlación $\xi_+(\theta)$, $\xi_-(\theta)$ vía las

ecuaciones (2.47, 2.48), mediante el resultado obtenido en el cuarto módulo “*Convergence Power Spectrum*” (output `CkappaT_kappaPS`) e integrando.

Definiendo

$$I_{\pm}(\theta, \ell) = \frac{1}{2\pi} \int_{\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} \ell J_{0,4}(\ell\theta) C_{\kappa}(\ell) d\ell, \quad (5.50)$$

con θ el valor de cada entrada del arreglo `t angle [n]` (5.40). Así, de (2.50, 2.51) se obtienen las curvas de la fig. 5.6.

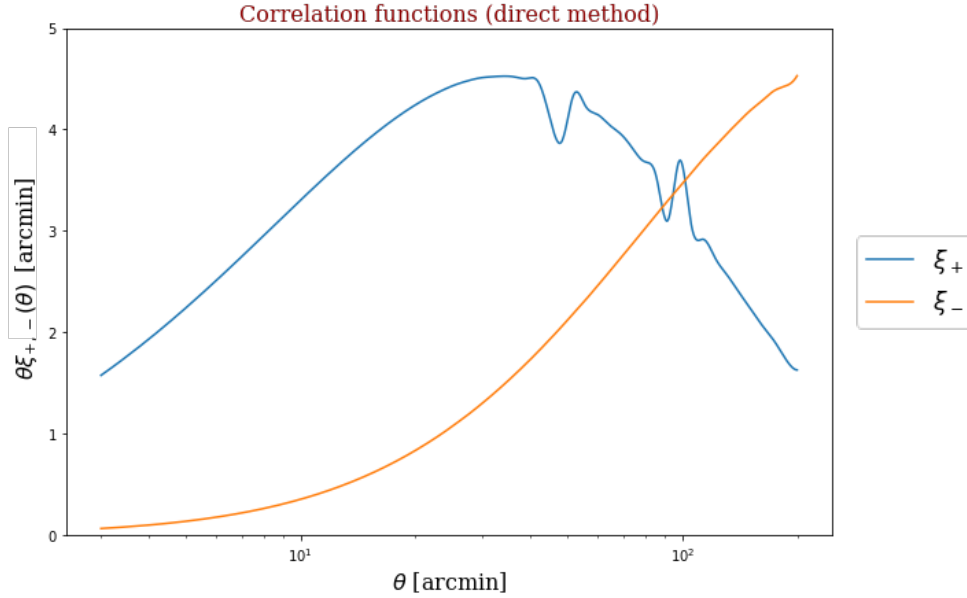


Figura 5.6: 2PCF del *shear* empleando integración directa (2.50, 2.51).

5.1.3. Régimen no lineal: SPT

Finalmente, en el último módulo de `WlNu.py` se explora la parte no lineal descrita en §4.2 (y cuya motivación también ha sido expuesta), realizando el procedimiento análogo a 5) “*Correlation functions using FFTLog Method*”, con la peculiaridad de añadir las contribuciones del espectro a 1-loop.

7) Módulo “*Nonlinear regime*”

Con el objetivo de brindar información más precisa bajo las correcciones a un lazo en el espectro de la materia, el presente módulo consiste en calcular, nuevamente, las 2PCF de *shear* ξ_{\pm} mediante la rutina `FFTLog` (5.38, 5.39 en §5.1.1)), pero ahora bajo las consideraciones de SPT tomando las correcciones P_{22} y P_{13} del PS no lineal (4.91). En virtud de ello, el mismo procedimiento del quinto módulo es usado, con la única diferencia de requerir el espectro no lineal bajo la aproximación (4.111).

Input

- `inputpkT` (*numpy array* de dos dimensiones: `k_class`, `pk_class`). Espectro de potencias lineal $P_L(k)$ obtenido de `Class`.
- `pk_allT` (*pandas Data Frame* de cuatro dimensiones: `k_all`, `pk_lin`, `pk_22`, `pk_13`). Espectro de potencias de referencia no lineal $P^{\text{ref}}(k)$ extraído desde un archivo de datos (en formato `.dat`) importado manualmente.

En particular, la información de `pk_allT` proviene de una realización a *redshift* $z = 0$ (hoy), y consiste en las partes

$$P^{\text{ref}}(k) = P_L^{\text{ref}}(k) + P_{1\text{-loop}}^{\text{ref}}(k) \quad (5.51)$$

(ver fig. 5.7), de modo que es el segundo término la contribución tomada para la aproximación al PS de un *loop* dada por (4.111) (la fig. 5.8 muestra qué tan buena es la relación entre ambos espectros). Para ello, los espectros de referencia tanto lineal como su corrección a un lazo, deben ser evaluados bajo los mismos modos k , *i.e.*, sometidos a los mismos valores del arreglo `k_class` (primer columna del PS de `Class`, `inputpkT`. En caso contrario (tomar valores de k distintos o arbitrarios para el PS de referencia y el *input* de `Class`), se estaría recayendo en un error.

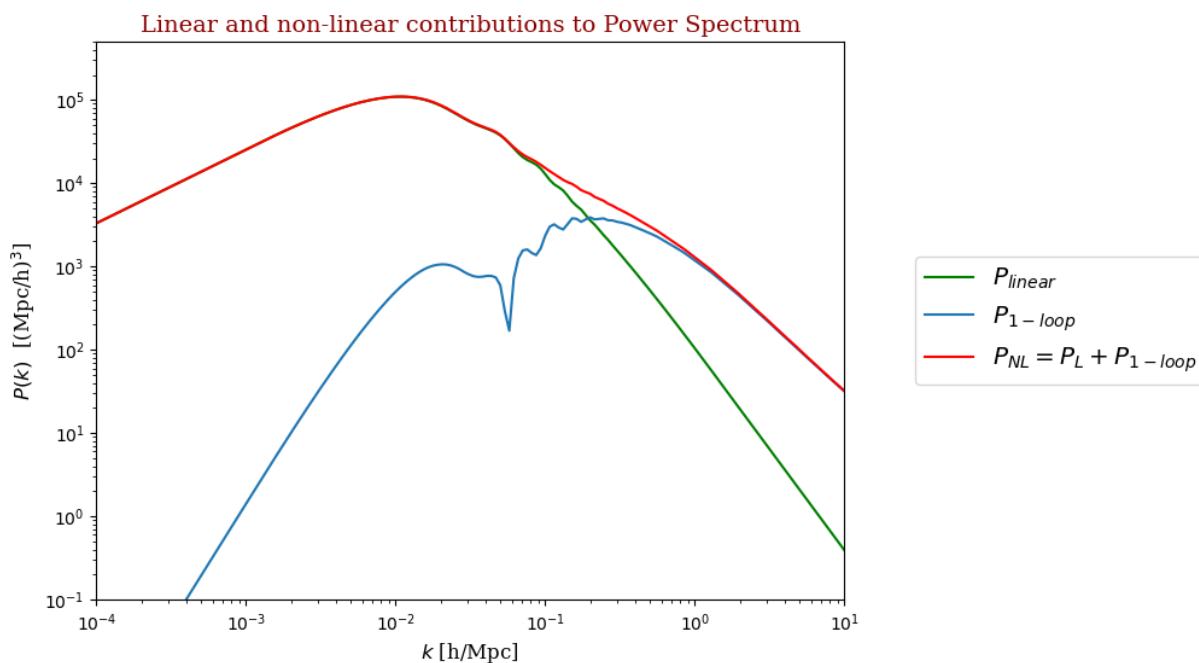


Figura 5.7: Espectro no lineal de referencia (*input* desde `.dat`), con su contribución lineal y a un *loop* (5.51).

Así, análogamente a (5.41), se define el arreglo de modos k_{FFT} de la rutina `FFTLog` (estos valores no están relacionados con `k_class`, por lo que no deben ser confundidos), con la diferencia de tomar como máximo al valor $k_{\text{maxFFT_nl}} = 100$ ($h \text{ Mpc}^{-1}$) según es sugerido en [Noriega et al., 2022a].

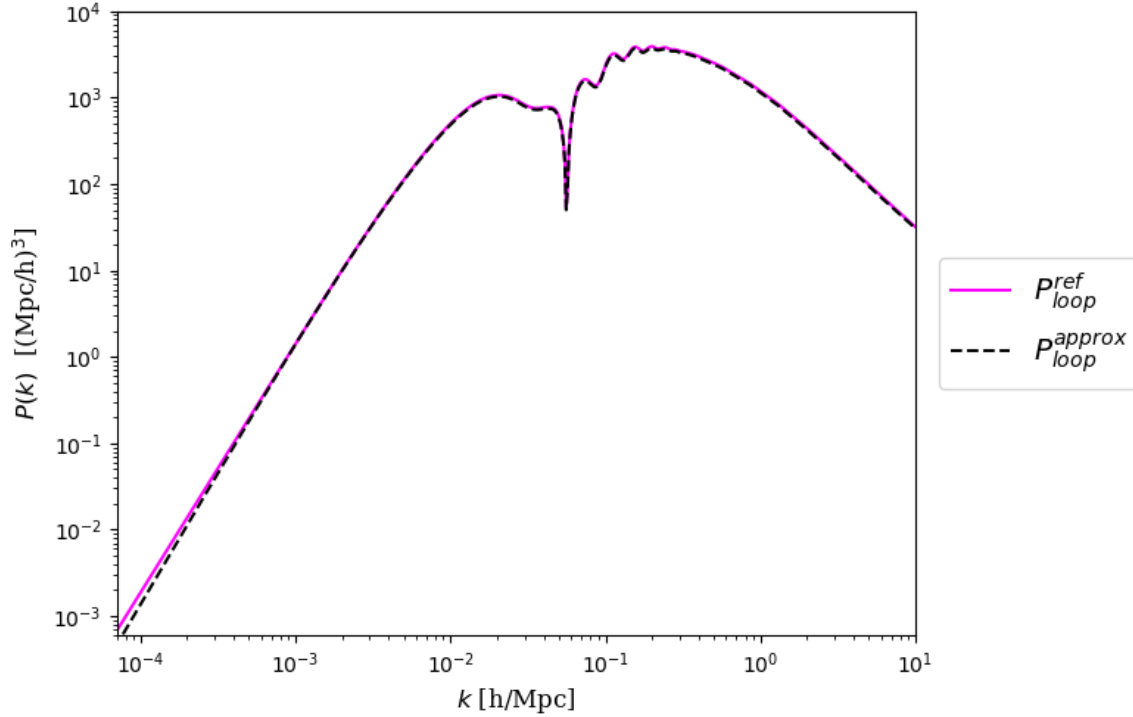


Figura 5.8: Comparación entre los espectros a 1-*loop* de referencia y su aproximación dada la ec. (4.111), en donde se puede ver que, en efecto, surten una buena aproximación.

Asimismo, es crucial mencionar que el punto de contraste más fuerte entre el módulo a régimen lineal y no lineal (cálculo de ξ_{\pm} a 1-*loop*) recae en la ecuación (4.110), en donde se observa que el segundo término refiere a la contribución requerida para este módulo, siendo que en el paso descrito por (5.37) para la rutina *FFTLog*, el término $D_+^2(a)$ es reemplazado por la contribución a la cuarta potencia, $D_+^4(a)$, de manera que ahora las integrales A_m son definidas por

$$A_m^{\text{loop}} \equiv \int d\chi q^2(\chi) \chi^{-a_m-1} D_+^4(\chi), \quad (5.52)$$

para el correspondiente espectro a un lazo $P_{1\text{-loop}}(k) = P_{22}(k) + P_{13}(k)$. Posteriormente, las ecuaciones (5.48, 5.49) son equivalentemente calculadas, bajo el uso de (5.52), obteniendo las curvas mostradas por 5.9, 5.10.

Output

- `xiPlusT_FFT_output_nl`, `xiMinusT_FFT_output_nl` (*numpy arrays*). Funciones de correlación $\xi_{\pm}^{\text{loop}}(\theta)$.

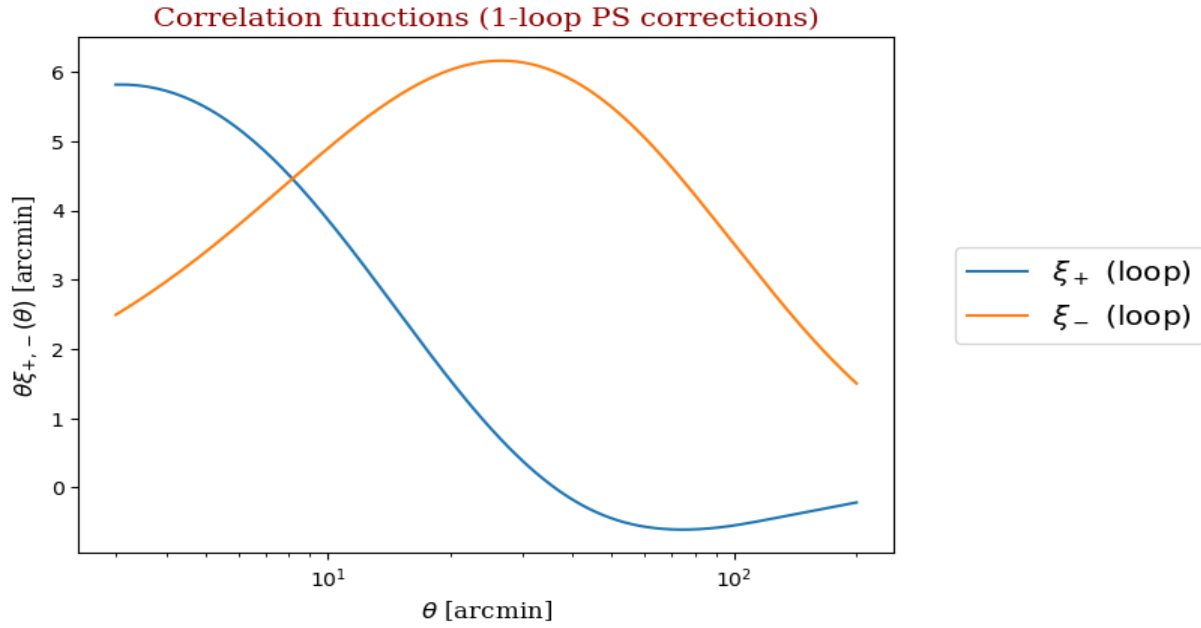


Figura 5.9: 2PCF del *shear* a un *loop* empleando la rutina *FFTLog* (5.38, 5.39, considerando 5.52).

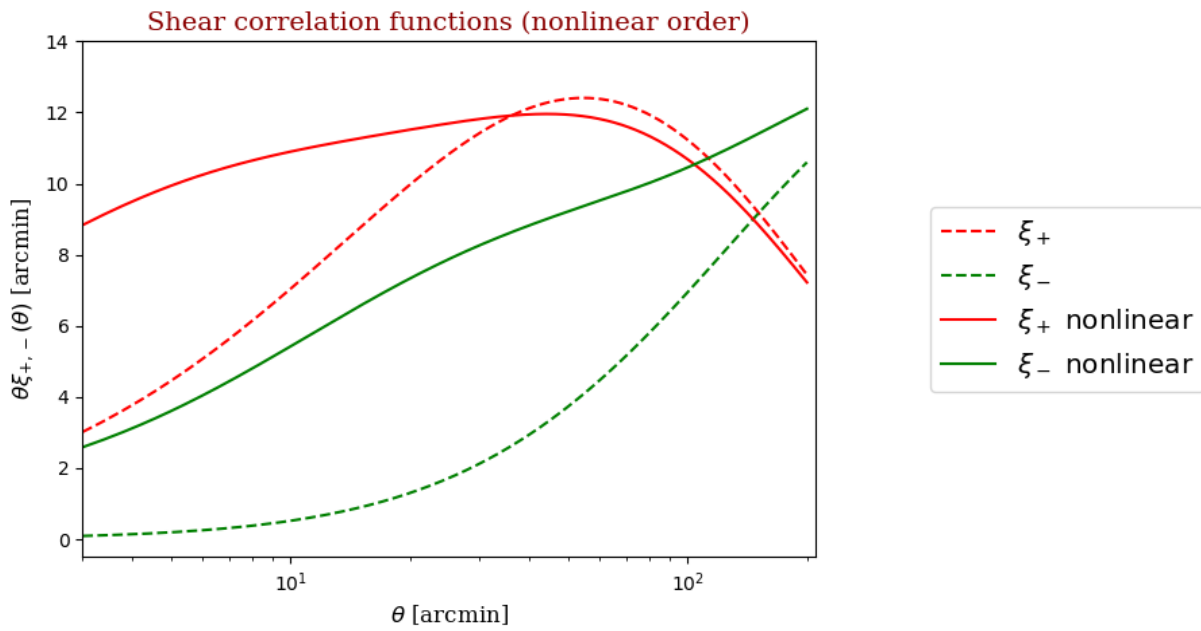


Figura 5.10: Comparación de las 2PCF del *shear* a orden lineal y no lineal (total: $P_L + P_{1-loop}$). Cálculo vía método *FFTLog*.

A modo de síntesis, la tabla 5.1 muestra las principales operaciones de cada módulo con sus datos de entrada y salido, siguiendo la secuencia ilustrada por la figura (5.3).

Módulo	<i>Inputs</i>	Operaciones principales	<i>Outputs</i>
1) <i>Background Cosmology</i>	Ω_m, z	Ec. Friedmann y $\chi(z)$	$\chi(z), z(\chi), a(\chi)$
2) <i>Linear growth</i>	$\eta_{\text{ini,fin}}$ y sus CI	EDO (5.6)	$D_+(a), D_+(\chi)$
3) <i>Lens efficiency</i>	$W_g(\chi)$	(5.7)	$q(\chi), \chi_{\text{max}}, \chi_{\text{Bin}}$
4) <i>Convergence PS</i>	$P_L(k)$	(5.10)	$C_\kappa(\ell)$
5) ξ_\pm <i>using FFTLog</i>	$P_L(k)$	<i>FFTLog</i> vía (5.38, 5.39)	$\xi_\pm(\theta)$
6) <i>Direct integration</i>	$C_\kappa(\ell)$	(2.50, 2.51)	$\xi_\pm(\theta)$
7) <i>Nonlinear regime</i>	$P_L^{\text{class}}(k), P_{NL}^{\text{ref}}(k)$	(5.38, 5.39) (4.110, 4.111)	$\xi_\pm(\theta)$ (NL)

Tabla 5.1: Principales funciones y operaciones realizadas en `WLnU.py` para cada uno de los módulos, mostrando los datos de entrada y sus resultados.

Capítulo 6

Análisis comparativo

El presente apartado se aboca a la discusión en torno a los resultados obtenidos por los módulos descritos anteriormente (§5.1), bajo el régimen lineal y de SPT, haciendo énfasis en la justificación del método *FFTLog* en comparación al cálculo estándar (§6.1). Asimismo, se abre el análisis bajo variación de parámetros los cosmológicos Ω_m y h (§6.2). En particular, es de interés el análisis hecho con respecto a diversos valores de M_ν , la masa total de las familias de neutrinos (§6.3).

6.1. Eficiencia: comparación entre los métodos de integración directa y *FFTLog*

el uso de una rutina *FFTLog* brinda de manera satisfactoria el cálculo de las funciones de correlación ξ_\pm de manera consistente con el cálculo original, el cual, en comparación con el método de integración directa, resulta en una mayor precisión a altos θ (ver la fig. 6.1).

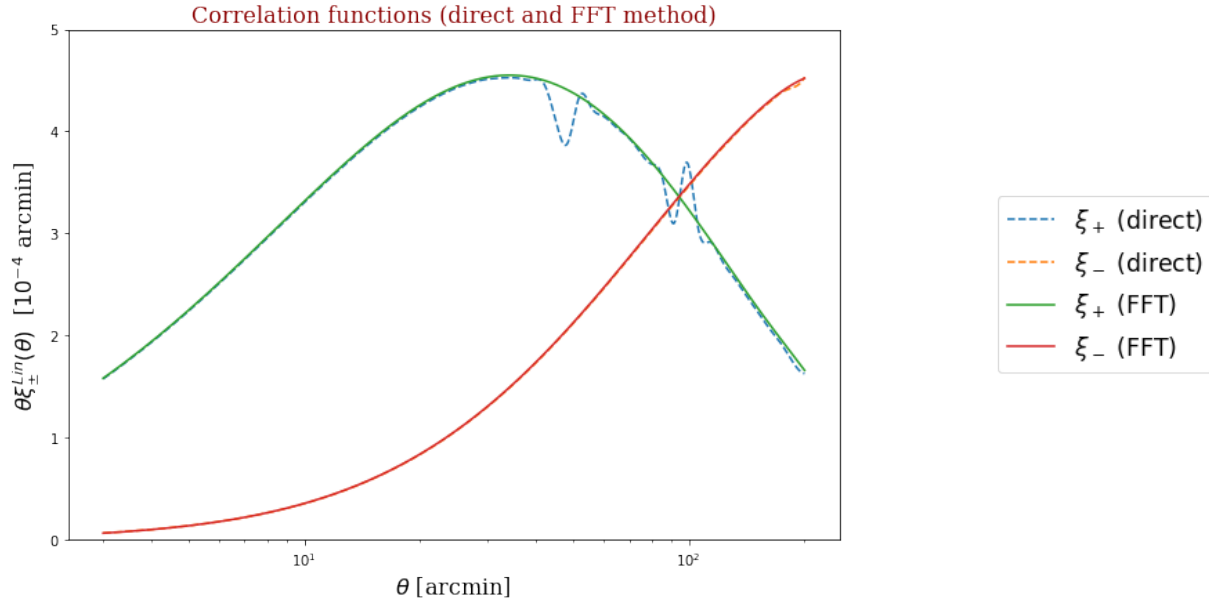


Figura 6.1: Contraste entre el cálculo de las 2PCF ξ_{\pm} vía la rutina *FFTLog* e integración directa.

Comparación de las 2PCF $\xi_{\pm}(\theta)$: fluctuación

Los resultados usando el método *FFTLog* y la integración directa son comparados mediante la fluctuación expresada como

$$\left| \frac{\xi_{\pm \text{ directo}}}{\xi_{\pm \text{ FFT}}} - 1 \right|, \quad (6.1)$$

lo cual es mostrado mediante 6.2).

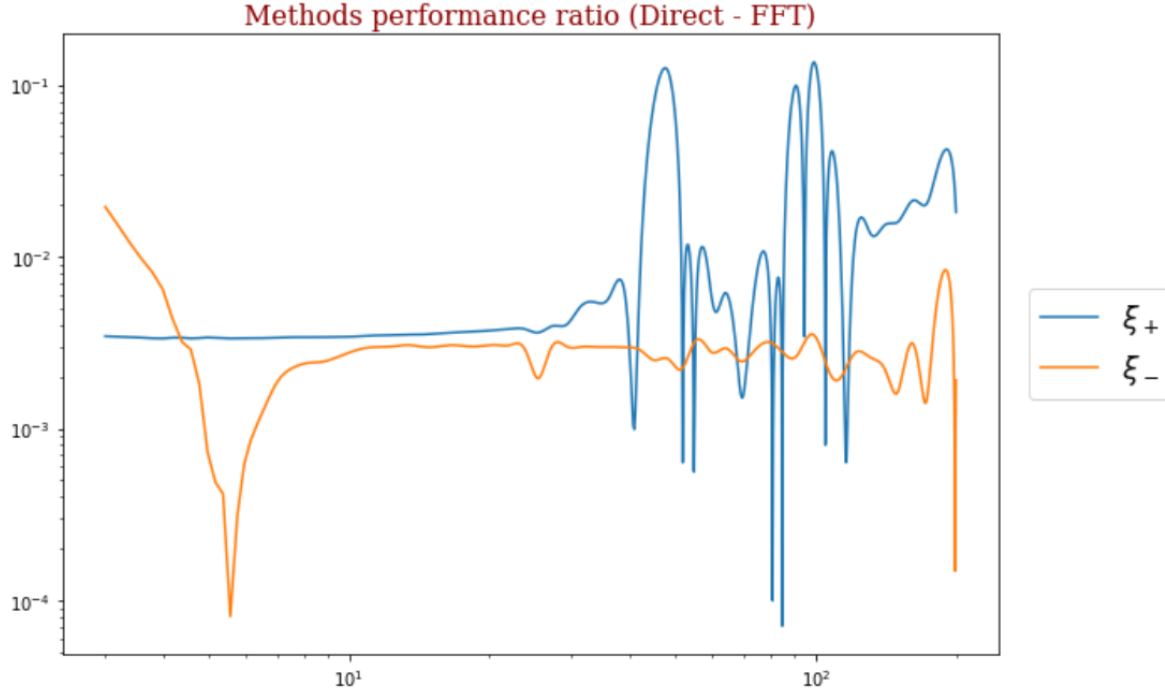


Figura 6.2: Fluctuación entre el cálculo directo y el método utilizando el algoritmo *FFTLog* (6.1) para la obtención de las funciones de correlación del *shear* ξ_{\pm} .

Tiempo de cómputo

La eficiencia medida en términos del tiempo de cómputo empleado entre un método y otro es notorio: se muestra que para el uso de la rutina *FFTLog*, el tiempo estimado, en promedio, sigue un valor del orden de décimas de segundo, (~ 0.4095 s), mientras que la integración directa resulta en un total de ~ 1.5442 s hasta arrojar las funciones ξ_{\pm} , siendo considerablemente más eficiente el primero hasta en un orden, de 3 a 4 veces más rápido.

Tiempo (rutina *FFTLog*): 0.409534 ± 0.003859 s.

Tiempo (integración directa): 1.544208 ± 0.022778 s.¹

6.2. Variación de parámetros cosmológicos

Con la intención de explorar el comportamiento global de los *outputs* obtenidos en el código `Pipeline_functions.ipynb` (*i.e.*, las funciones de correlación simuladas ξ_{\pm}) ante la presencia de un parámetro cosmológico específico (*input*), la presente sección es dedicada al análisis de variación de parámetros cosmológicos, específicamente, a aquellos de la

¹Este tiempo de cómputo ha sido obtenido directamente usando el método `time()` del módulo de *Python* `time`, para un experimento de 10 realizaciones idénticas calculando su error asociado. Esta cifra evidentemente puede variar en virtud del poder de cómputo. En particular, se ha empleado una CPU de 16 GB de RAM. Asimismo, para el experimento realizado vía `Pipeline_functions` se ha utilizado la cosmología fiducial: $\Omega_m = 0.3$, $h = 0.6711$, con $M_\nu = 0.06$ eV.

cosmología no extendida de mayor trascendencia en el presente trabajo:

1. Ω_m : la abundancia total de materia que será la fuente del *lensing* mismo a través del espectro de materia total
2. h : la constante adimensional de Hubble, cuya variación se justifica bajo la tensión que sufre la constante H_0 discutida en §1.4, misma que afecta a toda la cosmología de fondo (abundancias reducidas $\omega_x \equiv \Omega_x h^2$, entre otros valores).

Tales variaciones son realizadas como experimentos mediante la secuencia del mismo *pipeline*, modificando con saltos constantes a un solo parámetro de estudio, dejando fijos al resto.²

Abundancia de materia Ω_m

Siguiendo la variación en torno al valor de la cosmología fiducial en la abundancia de materia Ω_m proporcionada por el resultado combinado de [Aghanim et al., 2020a], la tabla 6.1 muestra la asignación de los tres valores escogidos para la variable `OmegaM_n` que es proporcionada como *input* global en la *notebook* `Pipeline_functions.ipynb`.

	Ω_m
1. <code>OmegaM_1</code>	0.27
2. <code>OmegaM_2</code>	0.29
3. <code>OmegaM_3</code>	0.31

Tabla 6.1: Variación de la abundancia de materia.

Las figuras (6.3, 6.4, 6.5) muestran los cambios sufridos por las funciones ξ_{\pm} , a orden lineal, un *loop* y la suma de estos (orden no lineal), cuando son sometidas a los distintos valores de 6.1.

²En realidad, se verá que para la afectación de una abundancia, por la ecuación (1.19), otro sumando debe verse modificado. En virtud de hacer prevalecer el mismo valor fiducial de materia bariónica y una abundancia de neutrinos escogida tal que $M_\nu = 0.06$ eV como uno de los valores en concordancia con los experimentos de oscilación, el parámetro que se ve afectado es Ω_{CDM} .

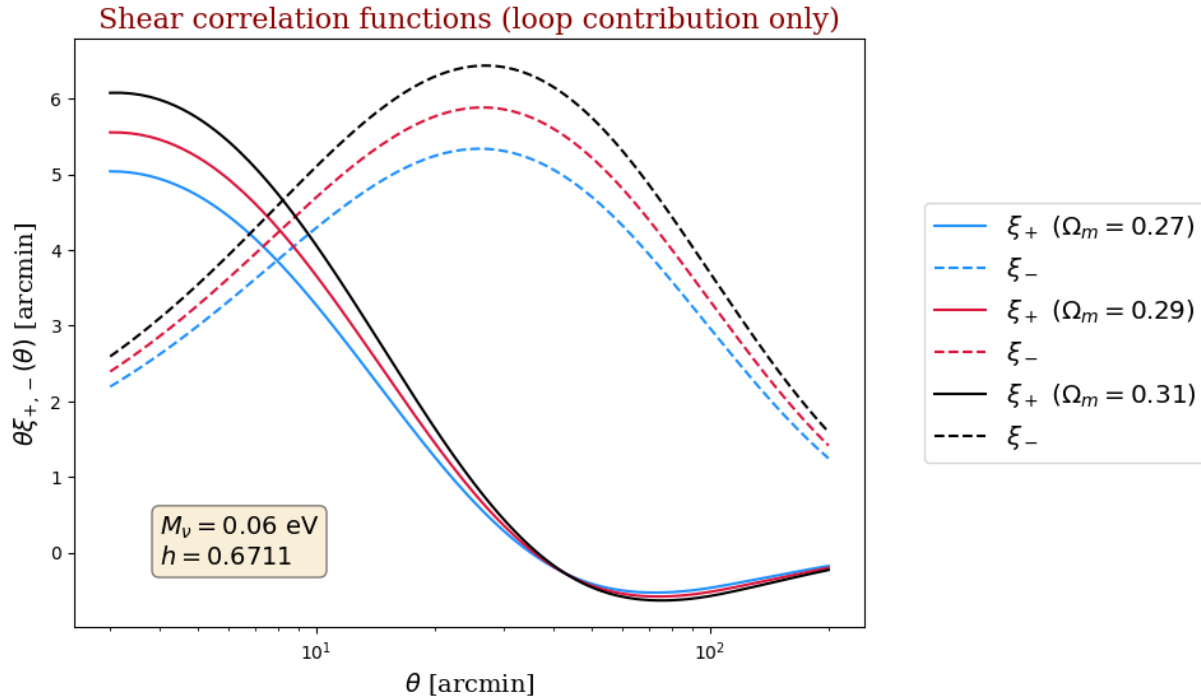


Figura 6.3: Funciones de correlación del *shear* a orden lineal para distintas abundancias de materia total, manteniendo fija h y para un valor escogido de masa absoluta de neutrinos M_ν .

Constante (adimensional) de Hubble h

De manera similar, la tabla 6.2 sigue la asignación de valores de la constante reducida de Hubble $h = H_0/100$ en torno al valor fiducial de [Aghanim et al., 2020a] que es introducida en `Pipeline_functions.ipynb` mediante la información del módulo de CLASS.

	h
1. <code>h_1</code>	0.66
2. <code>h_2</code>	0.69
3. <code>h_3</code>	0.72

Tabla 6.2: Variación de la constante adimensional de Hubble h .

Análogamente, las figuras (6.6, 6.7, 6.8) exhiben los cambios sufridos por las funciones ξ_\pm , una vez más, a orden lineal, un *loop* y ambas contribuciones sumadas, respectivamente, en el caso en que el parámetro h adopta los distintos valores de 6.2.

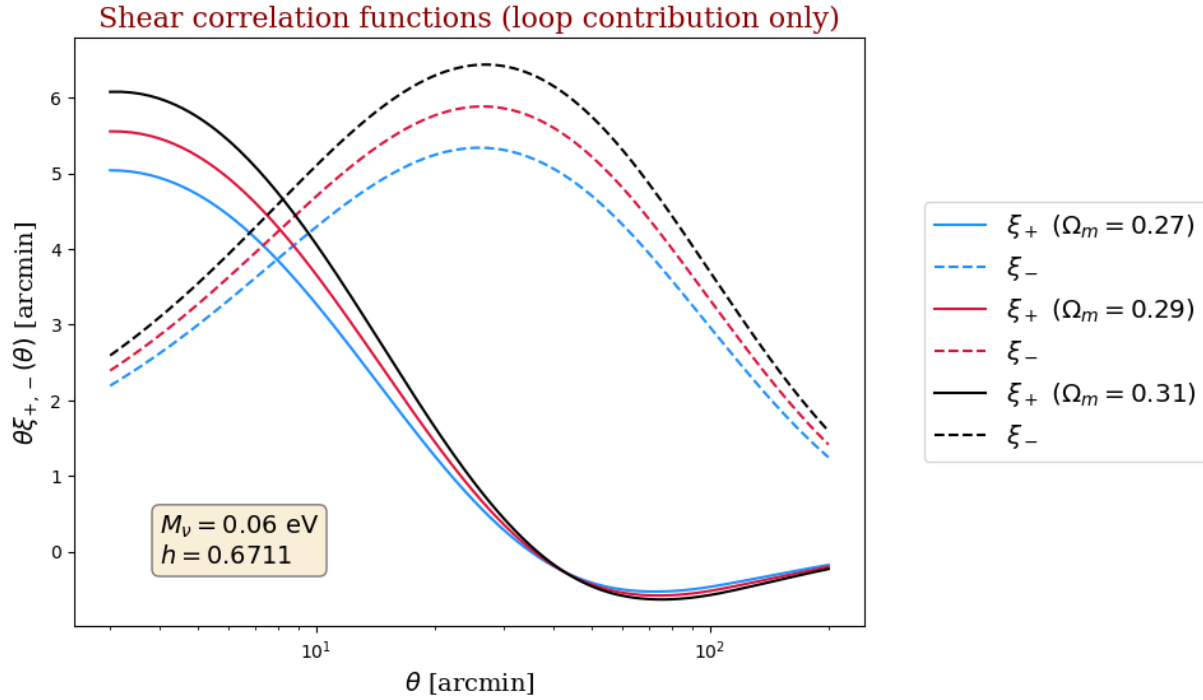


Figura 6.4: Correcciones a un lazo de las funciones de correlación del *shear*, variando la abundancia de materia total de acuerdo a 6.1 y para h y M_ν fijas.

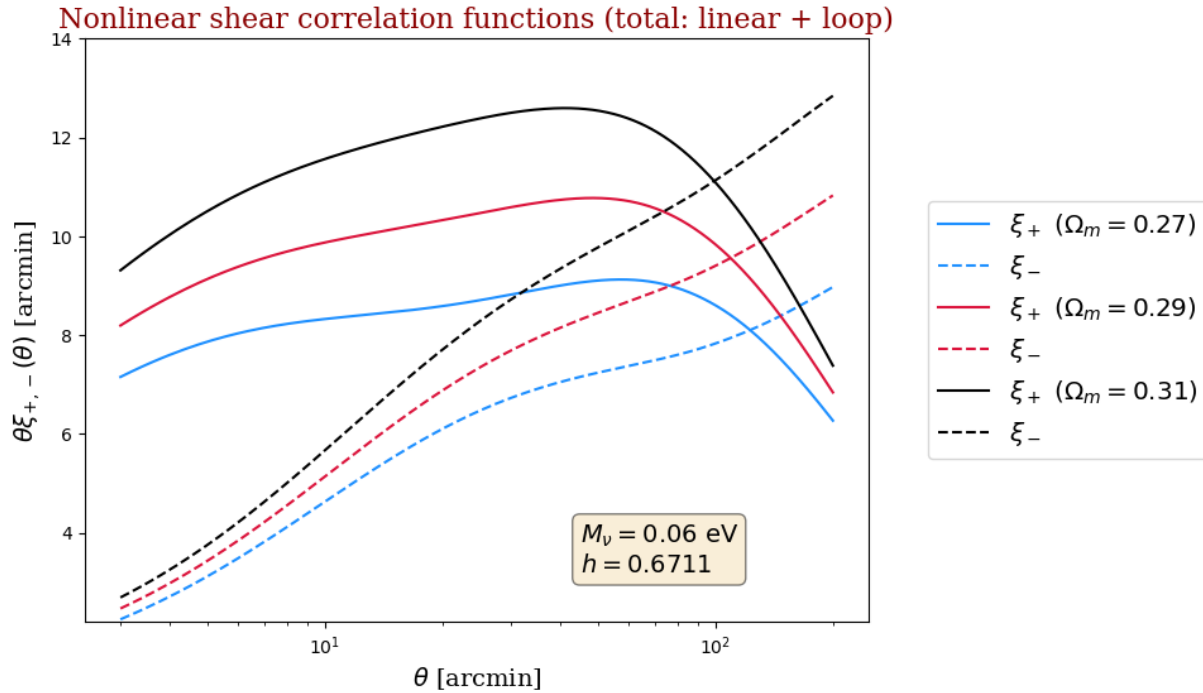


Figura 6.5: Contribución total del orden no lineal (término lineal y *loop*) en las 2PCF ξ_\pm (sólida y discontinua correspondientemente para la misma variación de parámetro en el par de curvas), modificando la abundancia Ω_m (tabla 6.1) con h y M_ν fijas.

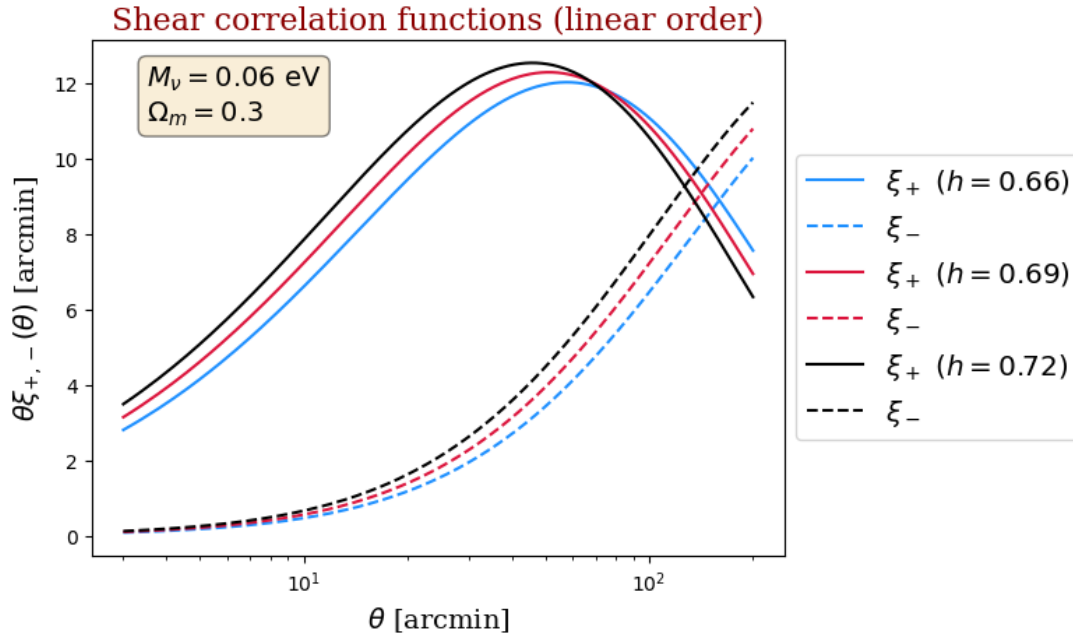


Figura 6.6: Funciones de *shear* a orden lineal bajo la alternación de la constante de Hubble h , con presencia de materia constante y fija a $\Omega_m = 0.3$, siendo la contribución de masa total de neutrinos de $M_\nu = 0.06 \text{ eV}$.

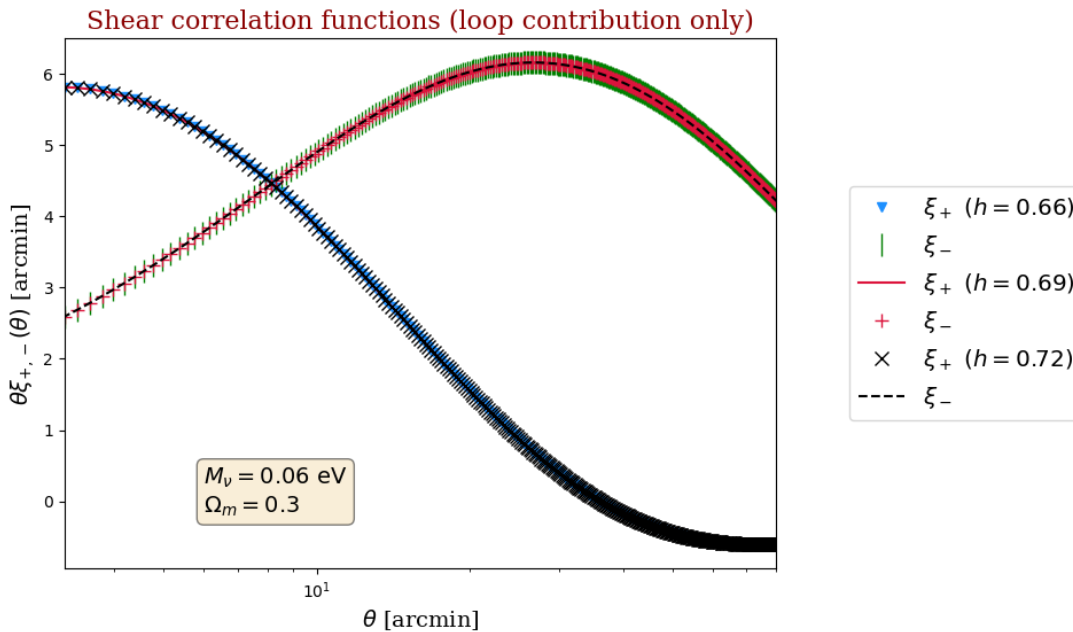


Figura 6.7: Correcciones a un lazo de las funciones del *shear*, variando de acuerdo a 6.2 la constante de Hubble h , con Ω_m y M_ν fijas. Puede notarse que no existen diferencias significativas a nivel de las correcciones a un lazo. Sin embargo, se observará que a nivel de la contribución total (lineal + *loop*) los contrastes son significativos.

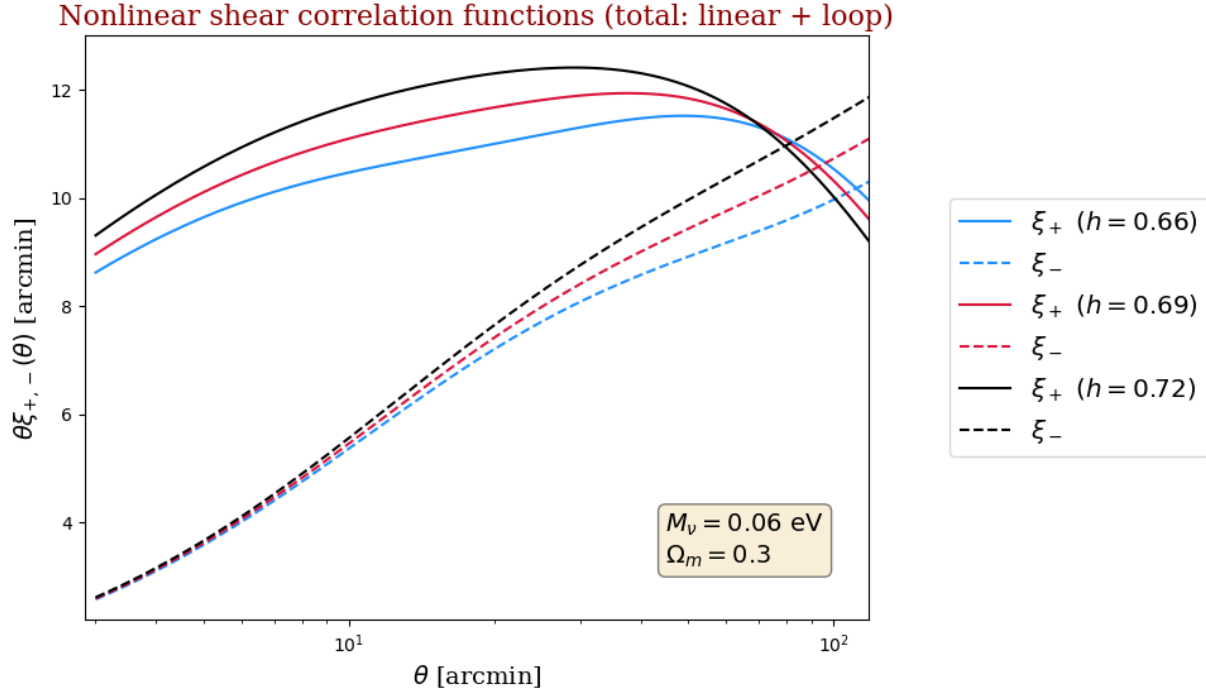


Figura 6.8: Contribución total del orden no lineal (término lineal y *loop*) en las 2PCF ξ_\pm (sólida y discontinua correspondientemente para la misma variación), alternando los valores de h en concordancia con la tabla 6.1, para la materia total Ω_m y M_ν fijas.

6.3. Análisis comparativo de las funciones de correlación de *shear* con neutrinos masivos

Para la variación de la masa absoluta de neutrinos, M_ν , se siguen los seis valores mostrados por la tabla 6.3, los cuales fueron escogidos bajo criterio del rango sugerido por los experimentos de oscilación y decaimiento del tritio como valores extremos (sin contar el primer valor trivial de neutrinos no masivos).³

Cabe destacar, que el espectro lineal mismo se ve notablemente afectada bajo la introducción del parámetro extendido de materia no nula de neutrinos, lo cual puede observarse en la figura 6.9. Por otro lado, las gráficas (6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.15) exhiben las 2PCF de *shear* a orden lineal, correcciones a un lazo y la suma de ambas (no lineal).

³El sexto valor de M_ν , M_{nuKatrin} , refiere al límite superior combinado (primera y segunda campaña) en la masa efectiva del anti-neutrino electrónico de $m_\nu < 0.8 \text{ eV}$ a 90% de CL.

Nombre de la variable	Valor de la masa M_ν [eV]
1. M_nu0	0
2. M_nu1	0.06
3. M_nu2	0.1
4. M_nu3	0.2
5. M_nu4	0.4
6. M_nuKatrin	0.8

Tabla 6.3: Valores adoptados como masa absoluta de neutrinos en la variación de parámetros, comenzando por el caso límite de neutrinos no masivos y hasta el límite superior dado por el experimento KATRIN [Aker et al., 2022].

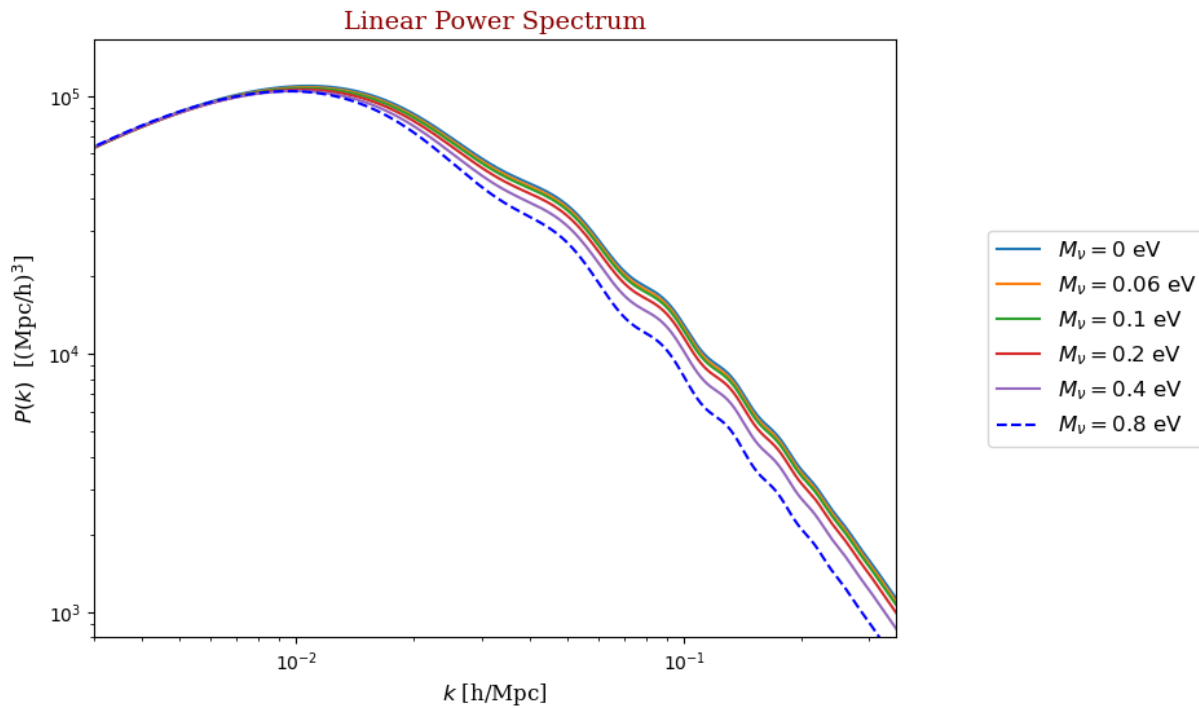


Figura 6.9: Espectro de potencias lineal de la materia para distintas masas absolutas de neutrinos M_ν , en donde el caso trivial el mostrado (neutrinos no masivos), así como los límites menos y más restrictivos dados por oscilaciones y el experimento KATRIN.

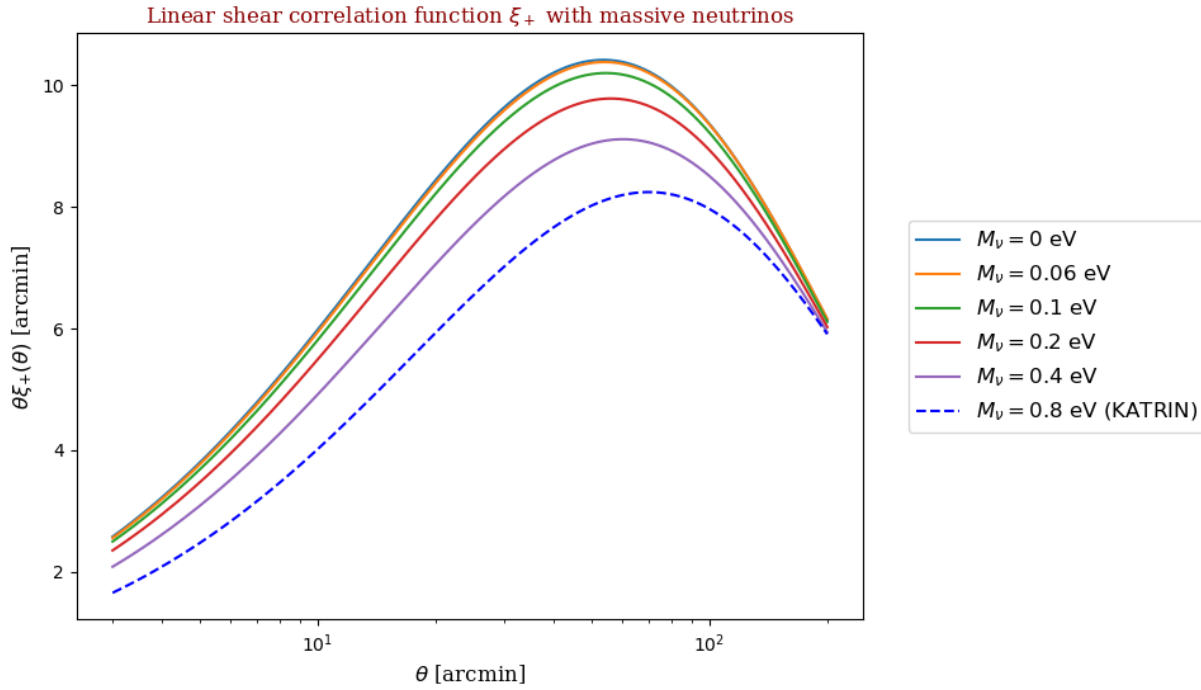


Figura 6.10: Régimen lineal de la función del *shear* cósmico ξ_+ para la variación de M_ν mostrada por la tabla 6.3. La distinción entre las amplitudes de oscilación es evidente, mostrando una tendencia supresiva a mayores masas.

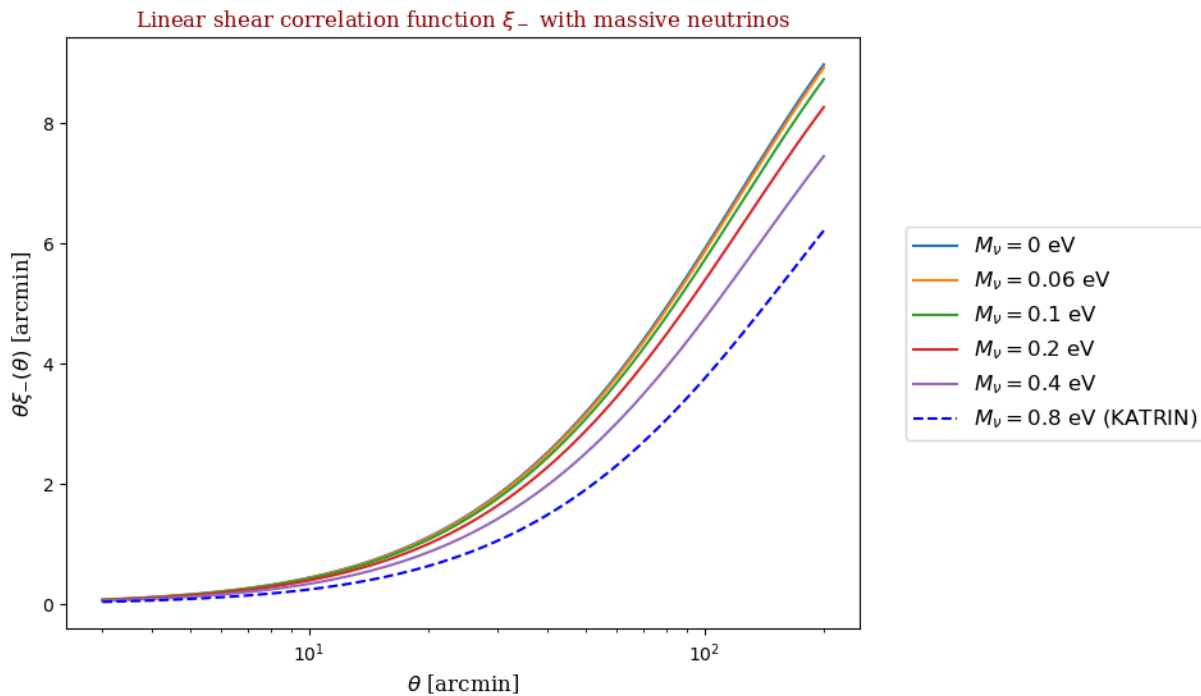


Figura 6.11: Función del *shear* ξ_- bajo la misma variación de parámetros, mostrando el mismo comportamiento de supresión que su componente ξ_+ .

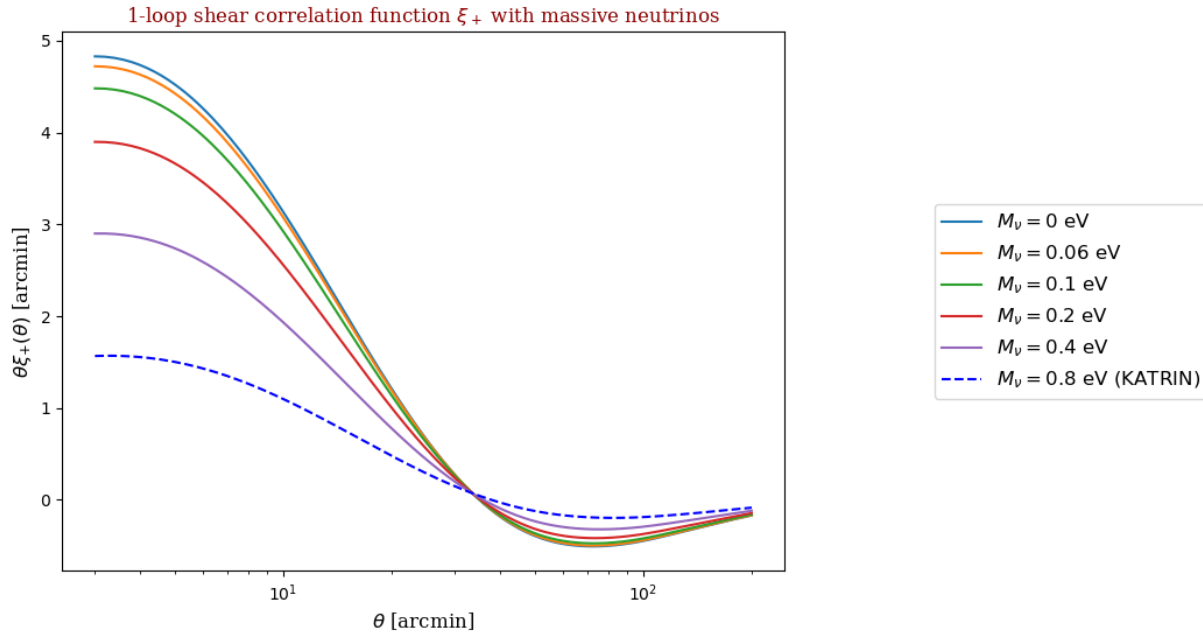


Figura 6.12: Contribución perturbativa (1-loop) de la función de correlación de shear ξ_+ para las masas M_ν de 6.3.

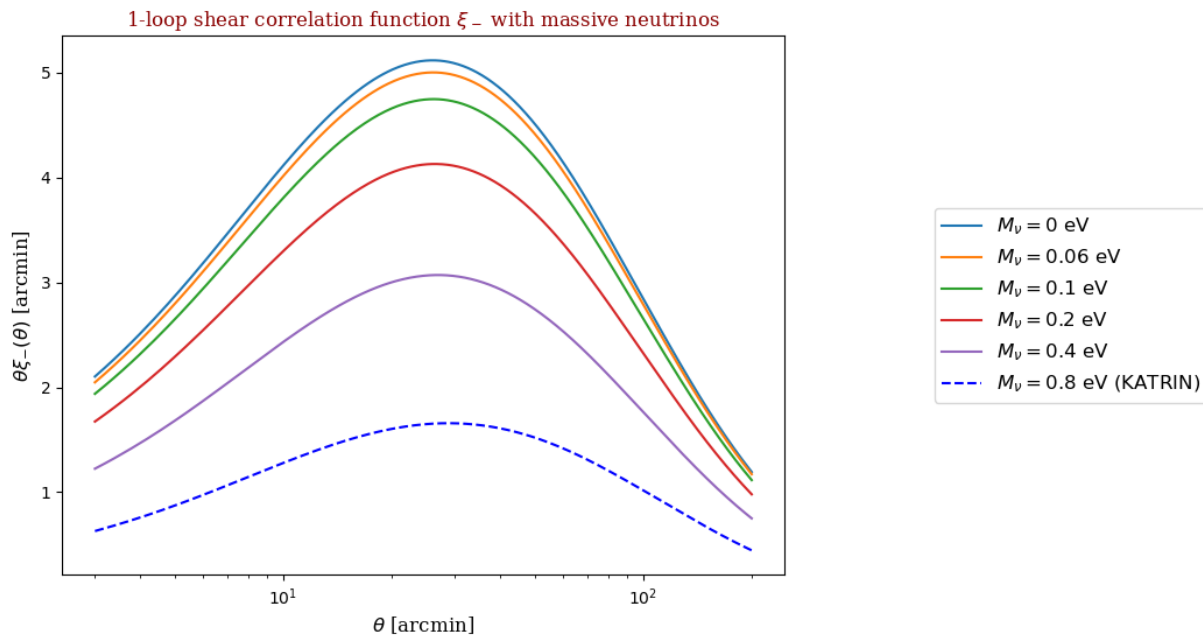


Figura 6.13: Contribución perturbativa (1-loop) de la función de correlación de shear ξ_- para las masas M_ν de 6.3.

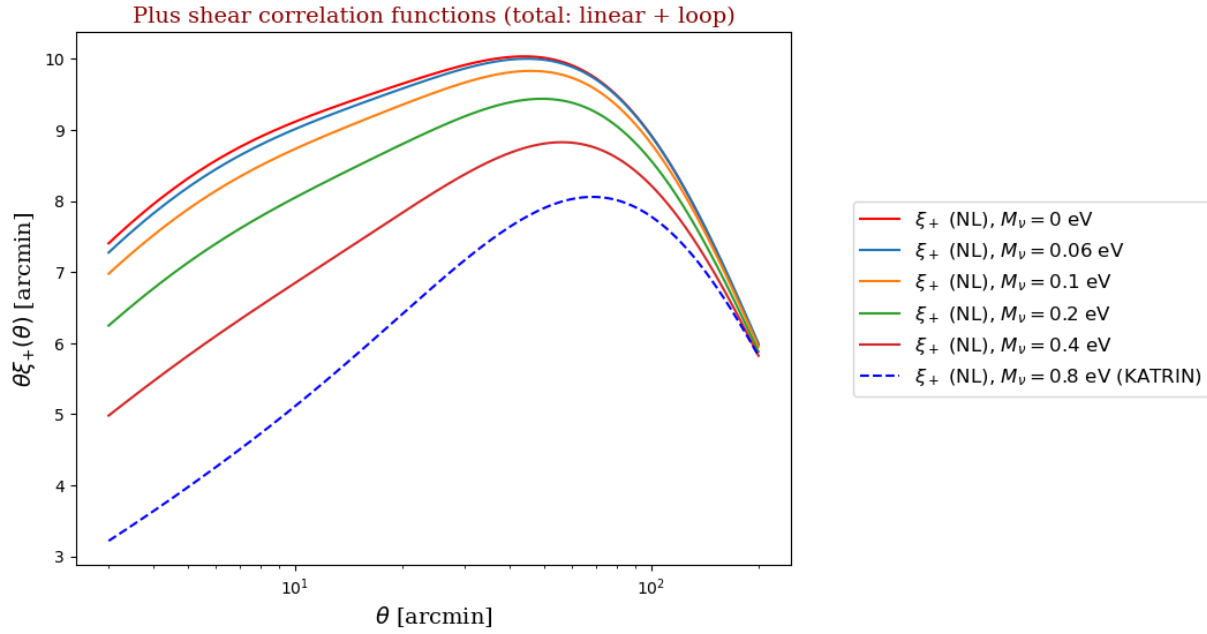


Figura 6.14: Función de correlación ξ_+ de *lensing* bajo régimen no lineal (aportación total de la suma a orden lineal y a un lazo), usando los valores en la tabla 6.3 para M_ν . Una vez más, el comportamiento a mayor masa se ve reflejado en una menor amplitud de oscilación y viceversa.

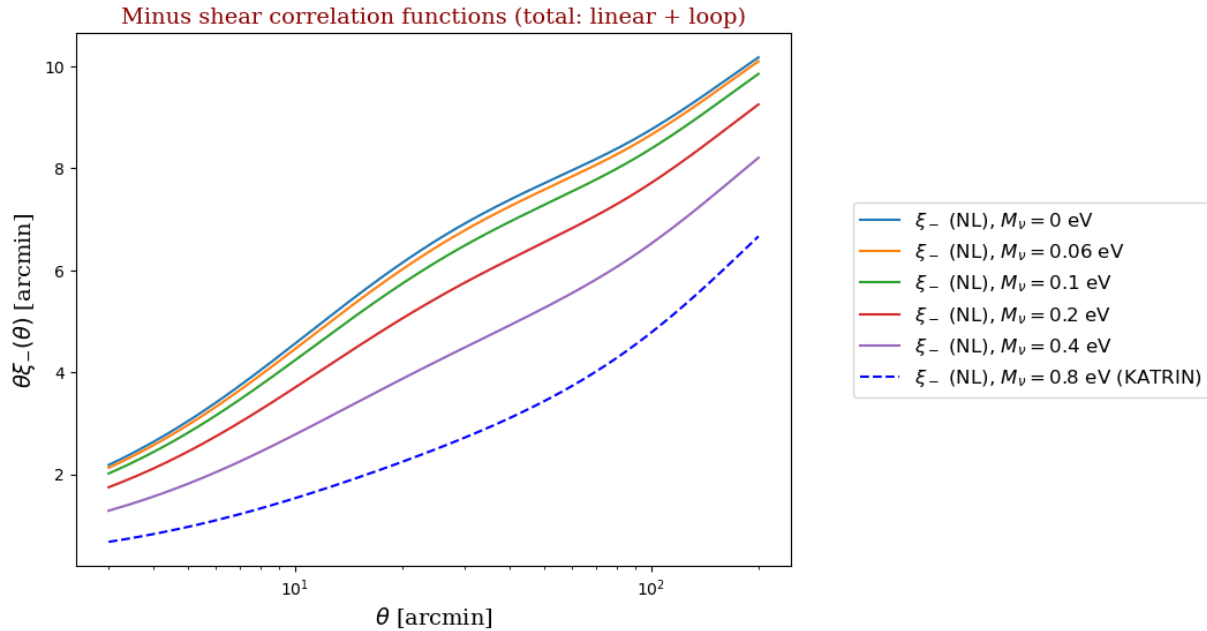


Figura 6.15: Función de *shear* ξ_- a orden no lineal (suma a orden lineal y a un *loop*), usando los valores de M_ν en 6.3.

Finalmente, las figuras (6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21) muestran la fluctuación de cada

curva $\xi_{\pm}(\theta)$ (considerando su respectiva aportación de masa de neutrinos) con respecto a la función de correlación de referencia con neutrinos no masivos, $\xi_{\pm}^{M_{\nu}=0}$, es decir,

$$\frac{\xi_{\pm}^{M_{\nu}}(\theta)}{\xi_{\pm}^{M_{\nu}=0}(\theta)}, \quad (6.2)$$

manifestando la supresión sufrida en las funciones de correlación del *shear* debido a la presencia de neutrinos cada vez más masivos.

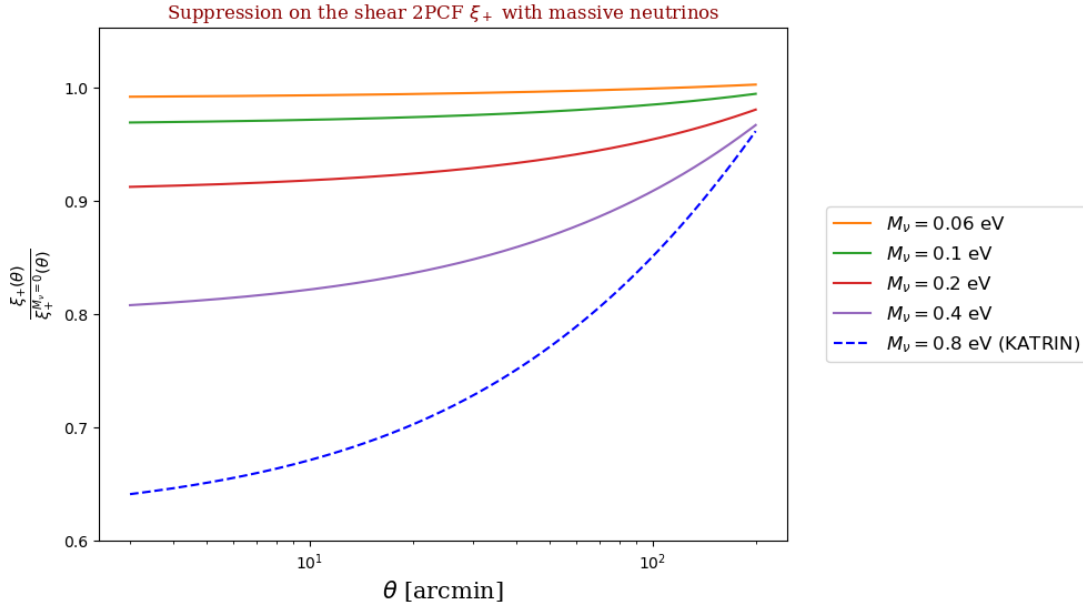


Figura 6.16: Supresión de la 2PCF $\xi_+(\theta)$ a orden lineal para cada masa M_{ν} .

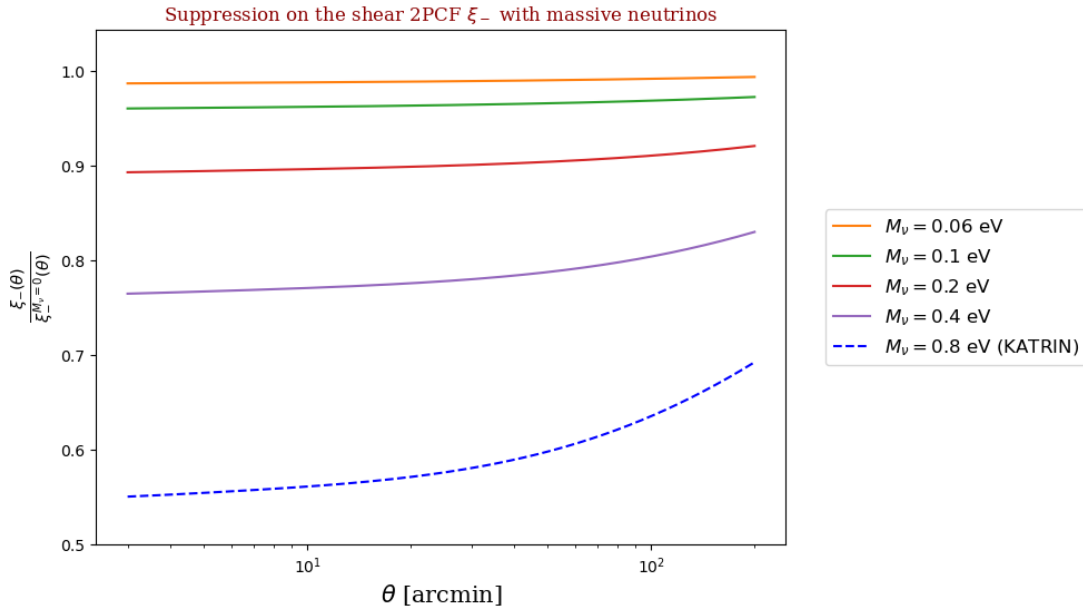


Figura 6.17: Supresión de la 2PCF $\xi_-(\theta)$ a orden lineal para cada masa M_ν .

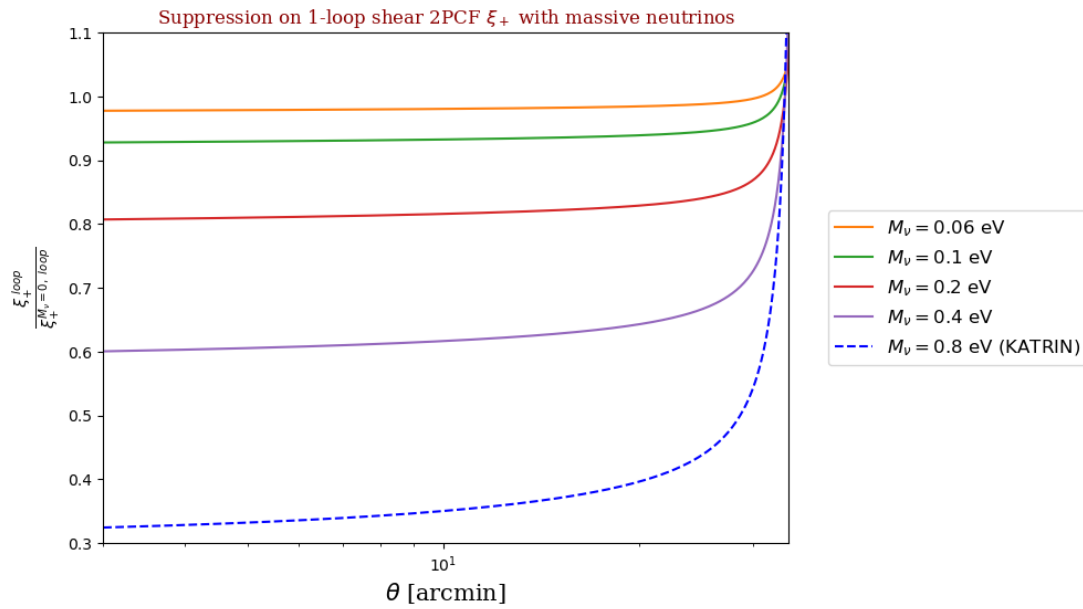


Figura 6.18: Supresión en la contribución no lineal (1-loop) de la 2PCF $\xi_+(\theta)$ para cada masa absoluta de neutrinos M_ν .

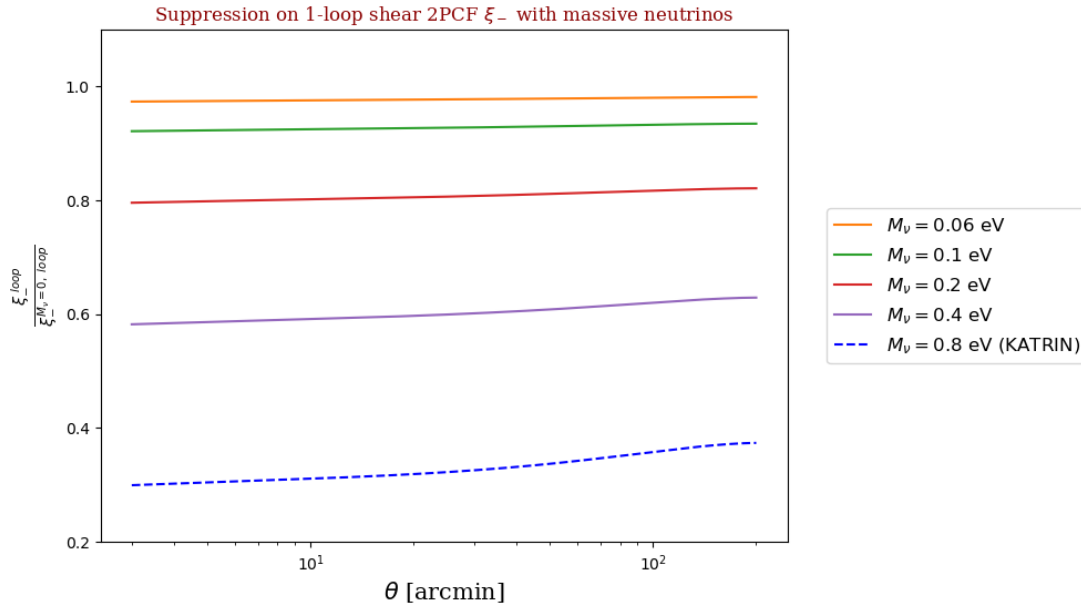


Figura 6.19: Supresión en la contribución no lineal (1-loop) de la 2PCF $\xi_{-}(\theta)$ para cada masa absoluta de neutrinos M_{ν} .

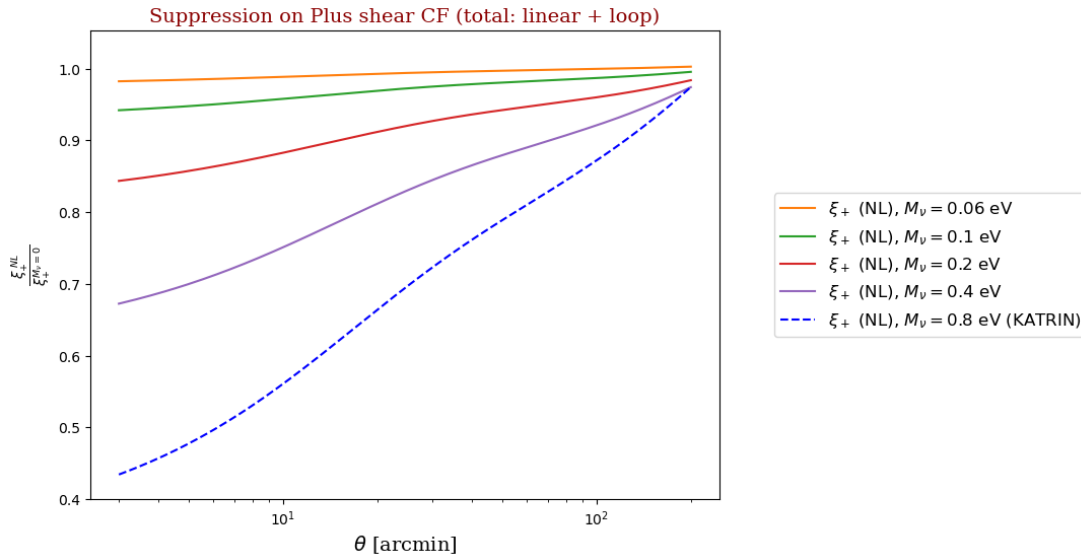


Figura 6.20: Supresión en la aportación total de la 2PCF $\xi_{+}(\theta)$ a régimen no lineal (lineal y a un lazo) para cada masa absoluta de neutrinos M_{ν} .

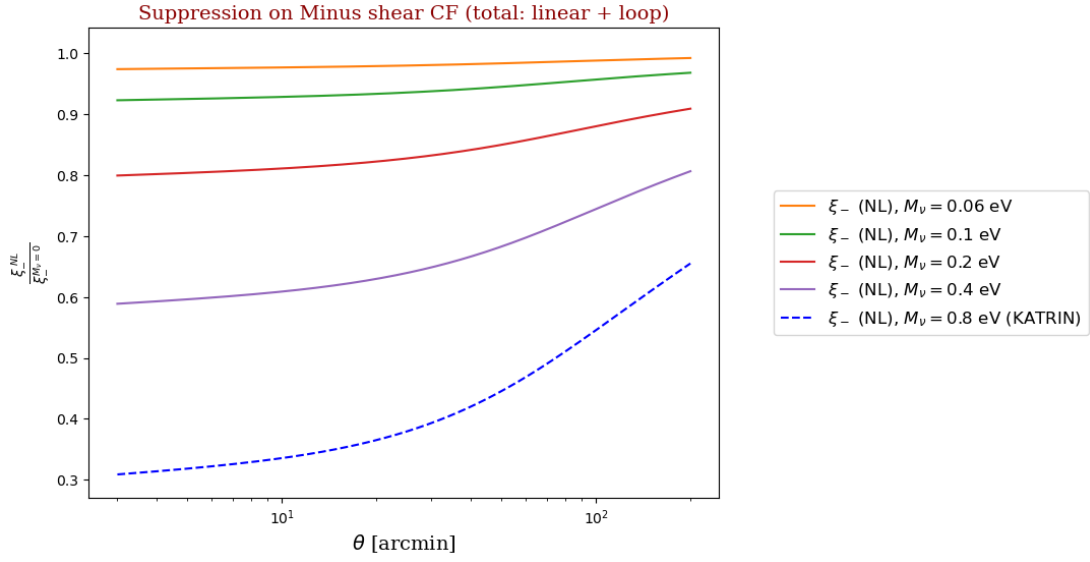


Figura 6.21: Supresión en la aportación total de la 2PCF $\xi_{-}(\theta)$ a régimen no lineal (lineal y a un lazo) para cada masa absoluta de neutrinos M_ν .

Conclusiones

Se ha verificado que el uso de una rutina *FFTL* desarrollada en este trabajo de tesis incrementa hasta en un 377 % la velocidad de resolución con respecto al método estándar. Asimismo, no solamente mejora a nivel considerable el tiempo de cómputo, sino que ofrece una mayor precisión de puntos, especialmente a mayores valores de la variable θ . Esto se debe a que en el integrando aparece la función de Bessel con argumento θ , provocando que a mayores valores en esta variable la frecuencia de oscilación crezca y mayor sea la complejidad de integración.

La variación en el espacio de parámetros ha permitido visualizar los cambios que sufren las funciones de correlación ante escenarios cosmológicos sutilmente distintos, siendo esto necesario ante la aún vigente tensión en H_0 , y más concretamente al enfoque de este estudio, ante la actual incógnita del valor de M_ν , la masa absoluta de las especies de neutrinos. En virtud de estas variaciones, se muestra una clara supresión en la amplitud de oscilación del factor $\theta \xi_\pm(\theta)$ al aumentar la masa de los neutrinos, fenómeno que era ya visualizado a nivel del espectro de potencias $P(k)$ a grandes escalas. Por otro lado, se evidencia un cambio opuesto en la amplitud de las funciones de correlación ξ_\pm al variar la abundancia de materia total Ω_m , dado que a mayor cantidad de materia se amplía la oscilación, esto en virtud de que el aumento de materia se refleja a nivel de la ecuación (1.19) en un aumento en la contribución de CDM, Ω_{CDM} , dejando fija la materia bariónica y la contribución de neutrinos como Ω_{ncdm} (neutrino *cold dark matter*, νCDM). Finalmente, la variación en h permite visualizar dos aspectos: por un lado, un comportamiento similar al caso de Ω_m , debido a que el incremento en este parámetro refleja un crecimiento en las funciones ξ_\pm mismas, como consecuencia del cambio en Ω_{CDM} (el aumento de h fijando Ω_m y M_ν se refleja en un incremento de CDM misma); por otro lado, el incremento en h imprime un desplazamiento de la función de correlación ξ a menor valor en θ . Este aumento en la función y el *shift* de los picos de oscilación muestran un símil con el caso básico del espectro de potencias de materia en el espacio de Fourier.

Finalmente, se evidencia que el uso de una teoría a régimen más allá de la escala lineal brinda información significativamente útil y más completa, especialmente bajo aspectos en los que modelos a orden lineal presentan rápidamente deficiencias al momento de ser contrastados con las observaciones, como lo es el caso de los espectros de potencias para las diversas fuentes posibles. En tal sentido, SPT ha significado un avance en la búsqueda de mejor precisión en el modelaje de funciones de correlación en este estudio, desarrollando a su vez un método numérico capaz de reproducir estas correcciones no lineales.

Bibliografía

- [Aarnio et al., 1989] Aarnio, P., Abreu, P., Adam, W., Adrianos, P., Adye, T., Akopdzhanov, G., Alekseev, G., Allaby, J., Allen, P., Allport, P., et al. (1989). Measurement of the mass and width of the z_0 -particle from multihadronic final states produced in e^+e^- annihilations. *Physics Letters B*, 231(4):539–547.
- [Ade et al., 2014] Ade, P. A., Aghanim, N., Armitage-Caplan, C., Arnaud, M., Ashdown, M., Atrio-Barandela, F., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A. J., Barreiro, R., et al. (2014). Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 571:A16.
- [Ade et al., 2016] Ade, P. A., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A., Barreiro, R., Bartlett, J., Bartolo, N., et al. (2016). Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13.
- [Aghanim et al., 2020a] Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A., Barreiro, R., Bartolo, N., Basak, S., et al. (2020a). Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6.
- [Aghanim et al., 2020b] Aghanim, N. et al. (2020b). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- [Aguilar-Arevalo et al., 2013] Aguilar-Arevalo, A., Brown, B., Bugel, L., Cheng, G., Church, E., Conrad, J. M., Dharmapalan, R., Djurcic, Z., Finley, D., Ford, R., et al. (2013). Improved search for $\nu^- \mu \rightarrow \nu^- e$ oscillations in the miniboone experiment. *Physical review letters*, 110(16):161801.
- [Ahmad et al., 2002] Ahmad, Q. R., Allen, R., Andersen, T., Anglin, J., Barton, J., Beier, E., Bercovitch, M., Bigu, J., Biller, S., Black, R., et al. (2002). Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory. *Physical review letters*, 89(1):011301.
- [Ahmad et al., 2001] Ahmad, Q. R., Allen, R., Andersen, T., Anglin, J., Bühler, G., Barton, J., Beier, E., Bercovitch, M., Bigu, J., Biller, S., et al. (2001). Measurement of the rate of $\nu e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by $\bar{\nu}$ solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *Physical review letters*, 87(7):071301.
- [Aker et al., 2022] Aker, M. et al. (2022). Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity. *Nature Phys.*, 18(2):160–166.

- [Akita and Yamaguchi, 2020] Akita, K. and Yamaguchi, M. (2020). A precision calculation of relic neutrino decoupling. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(08):012.
- [Akrawy et al., 1989] Akrawy, M., Alexander, G., Allison, J., Allport, P., Anderson, K., Armitage, J., Arnison, G., Ashton, P., Azuelos, G., Baines, J., et al. (1989). Measurement of the z_0 mass and width with the opal detector at lep. *Physics Letters B*, 231(4):530–538.
- [Albrecht and Steinhardt, 1982] Albrecht, A. and Steinhardt, P. J. (1982). Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Physical Review Letters*, 48(17):1220.
- [Alcock and Paczyński, 1979] Alcock, C. and Paczyński, B. (1979). An evolution free test for non-zero cosmological constant. *Nature*, 281(5730):358–359.
- [Alekseev et al., 1987] Alekseev, E., Alekseeva, L., Volchenko, V., and Krivosheina, I. (1987). Possible detection of a neutrino signal on 23 february 1987 at the baksan underground scintillation telescope of the institute of nuclear research. *JETP lett*, 45(589):247–248.
- [Alexeyev et al., 1988] Alexeyev, E., Alexeyeva, L., Krivosheina, I., and Volchenko, V. (1988). Detection of the neutrino signal from sn 1987a in the lmc using the inr baksan underground scintillation telescope. *Physics Letters B*, 205(2-3):209–214.
- [Alpher et al., 1948] Alpher, R. A., Bethe, H., and Gamow, G. (1948). The origin of chemical elements. *Phys. Rev.*, 73:803–804.
- [Anderson, 1982] Anderson, W. L. (1982). Fast hankel transforms using related and lagged convolutions. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 8(4):344–368.
- [Aviles, 2016] Aviles, A. (2016). Dark matter dispersion tensor in perturbation theory. *Phys. Rev. D*, 93:063517.
- [Aviles, 2022] Aviles, A. (2022). Slides for cosmology courses. <https://github.com/alejandroaviles/CosmologyLectureNotes>. Accessed: 2023-03-07.
- [Aviles and Banerjee, 2020] Aviles, A. and Banerjee, A. (2020). A Lagrangian Perturbation Theory in the presence of massive neutrinos. *JCAP*, 10:034.
- [Aviles et al., 2021] Aviles, A., Banerjee, A., Niz, G., and Slepian, Z. (2021). Clustering in massive neutrino cosmologies via Eulerian Perturbation Theory. *JCAP*, 11:028.
- [Bacon et al., 2000] Bacon, D. J., Refregier, A. R., and Ellis, R. S. (2000). Detection of weak gravitational lensing by large-scale structure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318(2):625–640.
- [Barinov et al., 2018] Barinov, V., Cleveland, B., Gavrin, V., Gorbunov, D., and Ibragimova, T. (2018). Revised neutrino-gallium cross section and prospects of best in resolving the gallium anomaly. *Physical Review D*, 97(7):073001.

- [Bionta et al., 1987] Bionta, R., Blewitt, G., Bratton, C., Casper, D., Ciocio, A., Claus, R., Cortez, B., Crouch, M., Dye, S., Errede, S., et al. (1987). Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987a in the large magellanic cloud. *Physical Review Letters*, 58(14):1494.
- [Blas et al., 2011] Blas, D., Lesgourgues, J., and Tram, T. (2011). The cosmic linear anisotropy solving system (class). part ii: approximation schemes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(07):034.
- [Boggess et al., 1992] Boggess, N. W., Mather, J. C., Weiss, R., Bennett, C. L., Cheng, E. a., Dwek, E., Gulkis, S., Hauser, M. G., Janssen, M. A., Kelsall, T., et al. (1992). The coBE mission-its design and performance two years after launch. *The Astrophysical Journal*, 397:420–429.
- [Bolshakova et al., 2012] Bolshakova, A., Boyko, I., Dedovitch, D., Elagin, A., Emelyanov, D., Gostkin, M., Guskov, A., Kroumchtein, Z., Nefedov, Y., Nikolaev, K., et al. (2012). Revisiting the lsnd anomaly. i. impact of new data. *Physical Review D*, 85(9):092008.
- [Bolshakova and group, 2011] Bolshakova, A. and group, H.-C. (2011). Is there any “lsnd anomaly”? *Physics of Particles and Nuclei*, 42(4):680.
- [Bratton et al., 1988] Bratton, C., Casper, D., Ciocio, A., Claus, R., Crouch, M., Dye, S., Errede, S., Gajewski, W., Goldhaber, M., Haines, T., et al. (1988). Angular distribution of events from sn1987a. *Physical Review D*, 37(12):3361.
- [Brieden et al., 2021] Brieden, S., Gil-Marín, H., and Verde, L. (2021). ShapeFit: extracting the power spectrum shape information in galaxy surveys beyond BAO and RSD. *JCAP*, 12(12):054.
- [Cañas et al., 2018] Cañas, B., Garcés, E., Miranda, O., and Parada, A. (2018). The reactor antineutrino anomaly and low energy threshold neutrino experiments. *Physics Letters B*, 776:451–456.
- [Candel, 1981] Candel, S. (1981). Dual algorithms for fast calculation of the fourier-bessel transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29(5):963–972.
- [Carroll, 2001] Carroll, S. M. (2001). The cosmological constant. *Living reviews in relativity*, 4(1):1–56.
- [Carroll, 2019] Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press.
- [Chadwick, 1914] Chadwick, J. (1914). Intensitätsverteilung im magnetischen spectrum der β -strahlen von radium b+ c. *Verhandl. Dtsc. Phys. Ges.*, 16:383.
- [Chadwick, 1932] Chadwick, J. (1932). Possible existence of a neutron. *Nature*, 129(3252):312–312.

- [Chudaykin et al., 2020] Chudaykin, A., Ivanov, M. M., Philcox, O. H. E., and Simonović, M. (2020). Nonlinear perturbation theory extension of the Boltzmann code CLASS. *Phys. Rev. D*, 102(6):063533.
- [collaboration et al., 2005] collaboration, A., collaboration, D., Collaboration, L., collaboration, O., collaboration, S., Group, L. E. W., et al. (2005). Precision electroweak measurements on the z resonance. *arXiv preprint hep-ex/0509008*.
- [Collaboration, 2005] Collaboration, K.-I. (2005). Observation of a neutrino burst from the supernova sn1987a. In *Atmospheric Diagnostics of Stellar Evolution: Chemical Peculiarity, Mass Loss, and Explosion: Proceedings of the 108th Colloquium of the International Astronomical Union, Held at the University of Tokyo, Japan, 1–4 September 1987*, pages 335–347. Springer.
- [Conrad et al., 2013] Conrad, J. M., Louis, W. C., and Shaevitz, M. H. (2013). The lsnd and miniboone oscillation searches at high δ m 2. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 63:45–67.
- [Cooley and Tukey, 1965] Cooley, J. W. and Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301.
- [Copeland et al., 2006] Copeland, E. J., Sami, M., and Tsujikawa, S. (2006). Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11):1753–1935.
- [Cowan Jr et al., 1956] Cowan Jr, C. L., Reines, F., Harrison, F., Kruse, H., and McGuire, A. (1956). Detection of the free neutrino: a confirmation. *Science*, 124(3212):103–104.
- [Cowsik and McClelland, 1972] Cowsik, R. and McClelland, J. (1972). An upper limit on the neutrino rest mass. *Physical Review Letters*, 29(10):669.
- [Cusin et al., 2017] Cusin, G., Tansella, V., and Durrer, R. (2017). Vorticity generation in the Universe: A perturbative approach. *Phys. Rev. D*, 95(6):063527.
- [Danby et al., 1962] Danby, G., Gaillard, J. M., Goulianos, K., Lederman, L. M., Mistry, N., Schwartz, M., and Steinberger, J. (1962). Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Physical Review Letters*, 9(1):36.
- [Davis, 1994] Davis, R. (1994). A review of the homestake solar neutrino experiment. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 32:13–32.
- [Davis Jr, 1955] Davis Jr, R. (1955). Attempt to detect the antineutrinos from a nuclear reactor by the cl 37 (ν , e-) a 37 reaction. *Physical Review*, 97(3):766.
- [Davis Jr, 1964] Davis Jr, R. (1964). Solar neutrinos. ii. experimental. *Physical Review Letters*, 12(11):303.
- [Davis Jr et al., 1968] Davis Jr, R., Harmer, D. S., and Hoffman, K. C. (1968). Search for neutrinos from the sun. *Physical Review Letters*, 20(21):1205.

- [DayaBay HomePage, 2022] DayaBay HomePage, D. (2022). Daya Bay Reactor Neutrino Experiment. <http://dayawane.ihep.ac.cn/twiki/bin/view/Public/>.
- [De Angelis and Pimenta, 2018] De Angelis, A. and Pimenta, M. (2018). The higgs mechanism and the standard model of particle physics. In *Introduction to Particle and Astroparticle Physics*, pages 393–454. Springer.
- [de Bernardis et al., 2000] de Bernardis, P., Ade, P. A., Bock, J. J., Bond, J., Borrill, J., Boscaleri, A., Coble, K., Crill, B., De Gasperis, G., Farese, P., et al. (2000). A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404(6781):955–959.
- [De La Torre et al., 2013] De La Torre, S., Guzzo, L., Peacock, J., Branchini, E., Iovino, A., Granett, B., Abbas, U., Adami, C., Arnouts, S., Bel, J., et al. (2013). The vimos public extragalactic redshift survey (vipers)-galaxy clustering and redshift-space distortions at z 0.8 in the first data release. *Astronomy & Astrophysics*, 557:A54.
- [de Salas and Pastor, 2016] de Salas, P. F. and Pastor, S. (2016). Relic neutrino decoupling with flavour oscillations revisited. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(07):051.
- [De Swart et al., 2017] De Swart, J., Bertone, G., and van Dongen, J. (2017). How dark matter came to matter. *Nature Astronomy*, 1(3):0059.
- [Decamp et al., 1989] Decamp, D., Deschizeaux, B., Lees, J.-P., Minard, M.-N., Crespo, J., Delfino, M., Fernandez, E., Martinez, M., Miquel, R., Mir, M., et al. (1989). Determination of the number of light neutrino species. *Physics Letters B*, 231(4):519–529.
- [Dentler et al., 2020] Dentler, M., Esteban, I., Kopp, J., and Machado, P. (2020). Decaying sterile neutrinos and the short baseline oscillation anomalies. *Physical Review D*, 101(11):115013.
- [Desjacques et al., 2018] Desjacques, V., Jeong, D., and Schmidt, F. (2018). Large-Scale Galaxy Bias. *Phys. Rept.*, 733:1–193.
- [d’Inverno, 1992] d’Inverno, R. A. (1992). *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press.
- [Dodelson et al., 2006] Dodelson, S., Melchiorri, A., and Slosar, A. (2006). Is cosmology compatible with sterile neutrinos? *Physical review letters*, 97(4):041301.
- [Dodelson and Schmidt, 2020] Dodelson, S. and Schmidt, F. (2020). *Modern cosmology*. Academic Press.
- [Dolgov and Kawasaki, 2003] Dolgov, A. D. and Kawasaki, M. (2003). Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? *Physics Letters B*, 573:1–4.

- [Dyson et al., 1920] Dyson, F. W., Eddington, A. S., and Davidson, C. (1920). IX. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333.
- [Esteban et al., 2020] Esteban, I., González-García, M. C., Maltoni, M., Schwetz, T., and Zhou, A. (2020). The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, 2020(9):1–22.
- [Fermi, 1934] Fermi, E. (1934). Tentativo di una teoria dei raggi β . *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 11(1):1–19.
- [Fixsen, 2009] Fixsen, D. (2009). The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2):916.
- [Fornengo et al., 1997] Fornengo, N., Kim, C., and Song, J. (1997). Finite temperature effects on the neutrino decoupling in the early universe. *Physical Review D*, 56(8):5123.
- [Fukuda et al., 1998] Fukuda, Y., Hayakawa, T., Ichihara, E., Inoue, K., Ishihara, K., Ishino, H., Itow, Y., Kajita, T., Kameda, J., Kasuga, S., et al. (1998). Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical review letters*, 81(8):1562.
- [Gershtein and Zel'dovich, 1966] Gershtein, S. and Zel'dovich, Y. B. (1966). Rest mass of muonic neutrino and cosmology. *JETP Lett.(USSR)(Engl. Transl.)*, 4: 120-2 (Sept. 1, 1966).
- [Giunti and Kim, 2007] Giunti, C. and Kim, C. W. (2007). *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press.
- [Guth, 1981] Guth, A. H. (1981). Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347.
- [Haines et al., 1988] Haines, T., Bratton, C., Casper, D., Ciocio, A., Claus, R., Crouch, M., Dye, S., Errede, S., Gajewski, W., Goldhaber, M., et al. (1988). Neutrinos from sn1987a in the imb detector. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 264(1):28–31.
- [Hamilton, 2000] Hamilton, A. (2000). Uncorrelated modes of the non-linear power spectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 312(2):257–284.
- [Hanany et al., 2000] Hanany, S., Ade, P., Balbi, A., Bock, J., Borrill, J., Boscaleri, A., De Bernardis, P., Ferreira, P., Hristov, V., Jaffe, A., et al. (2000). Maxima-1: a measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10° -5. *The Astrophysical Journal*, 545(1):L5.
- [Hannestad and Madsen, 1995] Hannestad, S. and Madsen, J. (1995). Neutrino decoupling in the early universe. *Physical Review D*, 52(4):1764.

- [Hansen, 1985] Hansen, E. (1985). Fast hankel transform algorithm. *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 33(3):666–671.
- [Hirata et al., 1987] Hirata, K., Kajita, T., Koshiba, M., Nakahata, M., Oyama, Y., Sato, N., Suzuki, A., Takita, M., Totsuka, Y., Kifune, T., et al. (1987). Observation of a neutrino burst from the supernova sn1987a. *Physical Review Letters*, 58(14):1490.
- [Hu et al., 1998] Hu, W., Eisenstein, D. J., and Tegmark, M. (1998). Weighing neutrinos with galaxy surveys. *Physical Review Letters*, 80(24):5255.
- [Hubble, 1929] Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173.
- [Inductiveload, 2007] Inductiveload (2007). A diagram showing beta-minus decay. <http://www.sprawls.org/ppmi2/RADIOTRANS/#Beta%20Emission>.
- [Ivezić et al., 2019] Ivezić, Ž., Kahn, S. M., Tyson, J. A., Abel, B., Acosta, E., Allsman, R., Alonso, D., AlSayyad, Y., Anderson, S. F., Andrew, J., et al. (2019). Lsst: from science drivers to reference design and anticipated data products. *The Astrophysical Journal*, 873(2):111.
- [Jarosik et al., 2011] Jarosik, N., Bennett, C., Dunkley, J., Gold, B., Greason, M., Halpern, M., Hill, R., Hinshaw, G., Kogut, A., Komatsu, E., et al. (2011). Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap*) observations: sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):14.
- [Johnston, 2006] Johnston, D. E. (2006). Measuring the galaxy–galaxy–mass three-point correlation function with weak gravitational lensing. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 367(3):1222–1240.
- [Kaiser, 1984] Kaiser, N. (1984). On the Spatial correlations of Abell clusters. *Astrophys. J. Lett.*, 284:L9–L12.
- [Kaiser, 1987] Kaiser, N. (1987). Clustering in real space and in redshift space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 227(1):1–21.
- [Kaiser et al., 2000] Kaiser, N., Wilson, G., and Luppino, G. A. (2000). Large-scale cosmic shear measurements. *arXiv preprint astro-ph/0003338*.
- [Kilbinger, 2015] Kilbinger, M. (2015). Cosmology with cosmic shear observations: a review. *Reports on Progress in Physics*, 78(8):086901.
- [Kodama et al., 2001] Kodama, K., Ushida, N., Andreopoulos, C., Saoulidou, N., Tzanakos, G., Yager, P., Baller, B., Boehnlein, D., Freeman, W., Lundberg, B., et al. (2001). Observation of tau neutrino interactions. *Physics Letters B*, 504(3):218–224.
- [Kogut et al., 2003] Kogut, A., Spergel, D., Barnes, C., Bennett, C., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Limon, M., Meyer, S., Page, L., et al. (2003). First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)* observations: Temperature-polarization correlation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148(1):161.

- [Kolb and Turner, 2018] Kolb, E. W. and Turner, M. S. (2018). *The early universe*. CRC press.
- [Kopp et al., 2011] Kopp, J., Maltoni, M., and Schwetz, T. (2011). Are there sterile neutrinos at the eV scale? *Physical Review Letters*, 107(9):091801.
- [Lee et al., 2001] Lee, A., Ade, P., Balbi, A., Bock, J., Borrill, J., Boscaleri, A., De Bernardis, P., Ferreira, P. G., Hanany, S., Hristov, V. V., et al. (2001). A high spatial resolution analysis of the maxima-1 cosmic microwave background anisotropy data. *The Astrophysical Journal*, 561(1):L1.
- [Lesgourgues, 2011] Lesgourgues, J. (2011). The cosmic linear anisotropy solving system (class) i: overview. *arXiv preprint arXiv:1104.2932*.
- [Lesgourgues-CLASS_HomePage, 2022] Lesgourgues-CLASS_HomePage (2022). CLASS Home Page. https://lesgourg.github.io/class_public/class.html.
- [Lewis et al., 2000] Lewis, A., Challinor, A., and Lasenby, A. (2000). Efficient computation of cosmic microwave background anisotropies in closed friedmann-robertson-walker models. *The Astrophysical Journal*, 538(2):473.
- [Liddle, 2015] Liddle, A. (2015). *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons.
- [Limber, 1953] Limber, D. N. (1953). The analysis of counts of the extragalactic nebulae in terms of a fluctuating density field. *The Astrophysical Journal*, 117:134.
- [Linde, 1982] Linde, A. D. (1982). A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108(6):389–393.
- [LSND, 2023] LSND (2023). Liquid Scintillating Neutrino Detector. <http://www.nu.to.infn.it/exp/all/lsnd/>.
- [Ma and Bertschinger, 1995] Ma, C.-P. and Bertschinger, E. (1995). Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. *Astrophys. J.*, 455:7–25.
- [Maki et al., 1962] Maki, Z., Nakagawa, M., and Sakata, S. (1962). Remarks on the Unified Model of Elementary Particles. *Progress of Theoretical Physics*, 28(5):870–880.
- [Matsubara, 2008] Matsubara, T. (2008). Resumming cosmological perturbations via the lagrangian picture: One-loop results in real space and in redshift space. *Physical Review D*, 77(6):063530.
- [McEwen et al., 2016] McEwen, J. E., Fang, X., Hirata, C. M., and Blazek, J. A. (2016). FAST-PT: a novel algorithm to calculate convolution integrals in cosmological perturbation theory. *JCAP*, 09:015.

- [Meszaros, 1974] Meszaros, P. (1974). The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 37, no. 2, Dec. 1974, p. 225-228., 37:225–228.
- [Mikheev and Smirnov, 1985] Mikheev, S. and Smirnov, A. Y. (1985). Resonance amplification of oscillations in matter and spectroscopy of solar neutrinos. *Yadernaya Fizika*, 42(6):1441–1448.
- [Miller et al., 1999] Miller, A. D., Caldwell, R., Devlin, M. J., Dorwart, W., Herbig, T., Nolta, M., Page, L., Puchalla, J., Torbet, E., and Tran, H. (1999). A measurement of the angular power spectrum of the cosmic microwave background from $l=100$ to 400. *The Astrophysical Journal*, 524(1):L1.
- [Misner et al., 2017] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (2017). *Gravitation*. Princeton University Press.
- [Noriega et al., 2022a] Noriega, H. E., Aviles, A., Fromenteau, S., and Vargas-Magaña, M. (2022a). Fast computation of non-linear power spectrum in cosmologies with massive neutrinos. *JCAP*, 11:038.
- [Noriega et al., 2022b] Noriega, H. E., Aviles, A., Fromenteau, S., and Vargas-Magaña, M. (2022b). Fast computation of non-linear power spectrum in cosmologies with massive neutrinos. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(11):038.
- [NuFIT, 2022a] NuFIT (2022a). NuFIT 5.2 2022 results. <http://www.nu-fit.org/?q=node/256>.
- [NuFIT, 2022b] NuFIT (2022b). NuFIT_org results. <http://www.nu-fit.org/>.
- [Pauli, 2000] Pauli, W. (2000). Cambridge monogr. *Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol*, 14(1).
- [Peacock, 1999] Peacock, J. A. (1999). *Cosmological physics*. Cambridge university press.
- [Peebles, 1984] Peebles, P. (1984). Tests of cosmological models constrained by inflation. *This page is intentionally left blank*, page 84.
- [Peebles, 2020] Peebles, P. J. E. (2020). *The large-scale structure of the universe*. Princeton university press.
- [Peebles and Ratra, 2003] Peebles, P. J. E. and Ratra, B. (2003). The cosmological constant and dark energy. *Reviews of modern physics*, 75(2):559.
- [Penzias and Wilson, 1965] Penzias, A. A. and Wilson, R. W. (1965). A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal*, vol. 142, p. 419-421, 142:419–421.

- [Perlmutter et al., 1999] Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E., et al. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565.
- [Piattella, 2018] Piattella, O. (2018). *Lecture notes in cosmology*. Springer.
- [Pontecorvo, 1958a] Pontecorvo, B. (1958a). Inverse *beta* processes and nonconservation of lepton charge. *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.*, 34.
- [Pontecorvo, 1958b] Pontecorvo, B. (1958b). Mesonium and antimesonium. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 6:429.
- [Pontecorvo, 1959] Pontecorvo, B. (1959). Electron and muon neutrinos. *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.*, 37.
- [Rasband, 1983] Rasband, S. N. (1983). *Dynamics*. Wiley-VCH.
- [Reines, 1996] Reines, F. (1996). The neutrino: From poltergeist to particle. *Reviews of Modern Physics*, 68(2):317.
- [Reines and Cowan Jr, 1953] Reines, F. and Cowan Jr, C. (1953). Detection of the free neutrino. *Physical Review*, 92(3):830.
- [Riess et al., 1998] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The astronomical journal*, 116(3):1009.
- [Riess et al., 2022] Riess, A. G., Yuan, W., Macri, L. M., Scolnic, D., Brout, D., Casertano, S., Jones, D. O., Murakami, Y., Anand, G. S., Breuval, L., et al. (2022). A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with 1 km s⁻¹ mpc⁻¹ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team. *The Astrophysical Journal Letters*, 934(1):L7.
- [Saito et al., 2008] Saito, S., Takada, M., and Taruya, A. (2008). Impact of massive neutrinos on the nonlinear matter power spectrum. *Physical Review Letters*, 100(19):191301.
- [Scoccimarro, 2015] Scoccimarro, R. (2015). Fast estimators for redshift-space clustering. *Physical Review D*, 92(8):083532.
- [Shoji and Komatsu, 2010] Shoji, M. and Komatsu, E. (2010). Massive Neutrinos in Cosmology: Analytic Solutions and Fluid Approximation. *Phys. Rev. D*, 81:123516. [Erratum: Phys.Rev.D 82, 089901 (2010)].
- [Siegman, 1977] Siegman, A. (1977). Quasi fast hankel transform. *Optics letters*, 1(1):13–15.

- [Smoot et al., 1992] Smoot, G., Bennett, C., Kogut, A., Wright, E., Aymon, J., Boggess, N., Cheng, E., De Amici, G., Gulkis, S., Hauser, M., et al. (1992). 1992apj. 396l. 1s: Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. vol. 396, pp. 11-15. *Astrophys J.*
- [Smoot, 1999] Smoot, G. F. (1999). COBE observations and results. In *AIP Conference Proceedings CONF-981098*, volume 476, pages 1–10. American Institute of Physics.
- [Soucail et al., 1987] Soucail, G., Fort, B., Mellier, Y., and Picat, J. (1987). A blue ring-like structure in the center of the A370 cluster of galaxies. *Astronomy and astrophysics*, 172:L14–L16.
- [Spergel et al., 2003] Spergel, D. N., Verde, L., Peiris, H. V., Komatsu, E., Nolta, M., Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., et al. (2003). First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* observations: determination of cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148(1):175.
- [Sprawls Educational Foundation, 2014] Sprawls Educational Foundation, S. F. (2014). Spectrum of Beta Radiation Energy. <http://www.sprawls.org/ppmi2/RADIOTRANS/#Beta%20Emission>.
- [Springel et al., 2005] Springel, V., White, S. D., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., Navarro, J., Thacker, R., Croton, D., Helly, J., et al. (2005). Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *nature*, 435(7042):629–636.
- [Starobinsky, 1982] Starobinsky, A. A. (1982). Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations. *Physics Letters B*, 117(3-4):175–178.
- [Szalay and Marx, 1976] Szalay, A. and Marx, G. (1976). Neutrino rest mass from cosmology. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 49, no. 3, June 1976, p. 437-441., 49:437–441.
- [Takahashi et al., 2017] Takahashi, R., Hamana, T., Shirasaki, M., Namikawa, T., Nishimichi, T., Osato, K., and Shiroshima, K. (2017). Full-sky gravitational lensing simulation for large-area galaxy surveys and cosmic microwave background experiments. *The Astrophysical Journal*, 850(1):24.
- [Talman, 1978] Talman, J. D. (1978). Numerical Fourier and Bessel transforms in logarithmic variables. *Journal of computational physics*, 29(1):35–48.
- [Team, 2017] Team, N. S. (2017). NASA/WMAP Science Team. <https://map.gsfc.nasa.gov/>.
- [Tyson et al., 1990] Tyson, J. A., Valdes, F., and Wenk, R. (1990). Detection of systematic gravitational lens galaxy image alignments—mapping dark matter in galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 349:L1–L4.

- [Van Waerbeke et al., 2000] Van Waerbeke, L., Mellier, Y., Erben, T., Cuillandre, J., Bernardreau, F., Maoli, R., Bertin, E., Mc Cracken, H., Fevre, O. L., Fort, B., et al. (2000). Detection of correlated galaxy ellipticities on cfht data: first evidence for gravitational lensing by large-scale structures. *Arxiv preprint astro-ph/0002500*.
- [Verde et al., 2019] Verde, L., Treu, T., and Riess, A. (2019). Tensions between the early and the late universe (2019). *arXiv preprint arXiv:1907.10625*.
- [Virgo, 2005] Virgo, M. (2005). The Millennium Simulation Project. <https://virgo.dur.ac.uk/2005/06/02/Millennium/>.
- [Volz et al., 1991] Volz, S., Dipirro, M., Castles, S., Ryschkewitsch, M., and Hopkins, R. (1991). Final cryogenic performance report for the nasa cosmic background explorer (cobe). *Advances in Cryogenic Engineering*, pages 1183–1192.
- [Von Soldner, 1804] Von Soldner, J. (1804). *Berlines astron.*
- [Wald, 2010] Wald, R. M. (2010). *General relativity*. University of Chicago press.
- [Weinberg, 1989] Weinberg, S. (1989). The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23.
- [Wilson, 1968] Wilson, F. L. (1968). Fermi’s theory of beta decay. *American Journal of Physics*, 36(12):1150–1160.
- [Wittman et al., 2000] Wittman, D. M., Tyson, J. A., Kirkman, D., Dell’Antonio, I., and Bernstein, G. (2000). Detection of weak gravitational lensing distortions of distant galaxies by cosmic dark matter at large scales. *nature*, 405(6783):143–148.
- [Wolfenstein, 2018] Wolfenstein, L. (2018). Neutrino oscillations in matter. In *Solar neutrinos*, pages 294–299. CRC Press.
- [Wong et al., 2020] Wong, K. C., Suyu, S. H., Chen, G. C., Rusu, C. E., Millon, M., Sluse, D., Bonvin, V., Fassnacht, C. D., Taubenberger, S., Auger, M. W., et al. (2020). Holicow–xiii. a 2.4 per cent measurement of h_0 from lensed quasars: 5.3σ tension between early-and late-universe probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498(1):1420–1439.
- [Yamamoto et al., 2006] Yamamoto, K., Nakamichi, M., Kamino, A., Bassett, B. A., and Nishioka, H. (2006). A measurement of the quadrupole power spectrum in the clustering of the 2df qso survey. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 58(1):93–102.
- [yt project, 2017] yt project (2017). Two-Point Correlation Function. https://yt-attic.readthedocs.io/en/latest/two_point_functions.html.
- [Zwicky, 1933] Zwicky, F. (1933). Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helvetica Physica Acta, Vol. 6, p. 110-127*, 6:110–127.

Apéndice A

Temperatura del fondo de neutrinos

En este apéndice se sigue la deducción de la relación entre la temperatura de los neutrinos T_ν con respecto a la temperatura del fondo de fotones T_γ a partir de la igualdad en los valores de la entropía para los instantes antes y después de la aniquilación de pares $e^- + e^+$.

De la primera ley de la termodinámica,

$$TdS(U, V) = dU + \mathcal{P}dV, \quad (\text{A.1})$$

con $U = \rho V$ y $\mathcal{P} = \mathcal{P}(T)$, $\rho = \rho(T)$, de modo que $S = S(V, T)$, pudiéndose escribir (A.1) como

$$dS(V, T) = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} dT + \frac{\rho + \mathcal{P}}{T} dV, \quad (\text{A.2})$$

en donde, por la condición de integrabilidad (o Teorema de Schwarz del cálculo diferencial) $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$, se tiene que

$$\frac{d\mathcal{P}}{dT} = \frac{\rho + \mathcal{P}}{T}. \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, de la ecuación de continuidad de fluido (1.10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho + \mathcal{P})a^3] - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho + \mathcal{P})a^3] - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho + \mathcal{P})a^3] - \frac{\rho + \mathcal{P}}{T} \frac{\partial T}{\partial t} &= 0 \\ \frac{T}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{(\rho + \mathcal{P})a^3}{T} \right]}_S &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

lo cual es escrito de la forma $TdS = 0$ para el caso de un proceso adiabático, con $T \neq 0$ (asimismo, $a \neq 0$). Por consiguiente, la expresión para la entropía de un fluido bajo un proceso adiabático es

$$S = \frac{(\rho + \mathcal{P})}{T} a^3. \quad (\text{A.5})$$

Asimismo, puede demostrarse esta relación para un proceso termodinámico en general, teniendo de la primera ley (como se ha demostrado) y mediante (A.3) que

$$\begin{aligned}
 dS &= \frac{V}{T}d\rho + \frac{\rho + \mathcal{P}}{T}dV = \frac{V}{T}d\rho + \frac{\rho + \mathcal{P}}{T}dV + \underbrace{\left[\frac{V}{T^2}(\rho + \mathcal{P})dT - \frac{V}{T^2}(\rho + \mathcal{P})dT \right]}_0 \\
 &= \frac{V}{T}d\rho + \frac{\rho + \mathcal{P}}{T}dV + \frac{V}{T} \underbrace{\frac{d\mathcal{P}}{(\rho + \mathcal{P})} dT}_{\frac{d\mathcal{P}}{T} dT} - \frac{(\rho + \mathcal{P})V}{T^2}dT = d \underbrace{\left[\frac{(\rho + \mathcal{P})V}{T} \right]}_S,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

de donde nuevamente se obtiene (A.5) con $V = a^3$.

En particular, al tratar con cierto tipo de partículas en específico, la expresión para la entropía se puede expresar de manera distinta. Considerando las densidades de energía (3.7) y (3.8) para los bosones (fotones) y fermiones (electrones y neutrinos) participantes en dicho proceso, es posible escribir a la entropía como

$$S = \frac{2\pi^2}{45} \left(g_B + \frac{7}{8}g_F \right) (aT)^3. \tag{A.7}$$

Para el caso del proceso termodinámico que involucra la aniquilación de pares e^\pm , tratándose de un proceso adiabático, se sigue que la cantidad de entropía en las instancias previo a la aniquilación y posterior a ella, son idénticos, es decir, $S(a_1) = S(a_2)$. Antes de la aniquilación, el plasma se encontraba a una temperatura común T_1 entre fotones ($g_B = g_\gamma = 2$), electrones/positrones ($g_{e^\pm} = 2 + 2$) y neutrinos ($g_\nu = 6$), siendo que estos aportan a la entropía ($g_F = g_{e^\pm} + g_\nu$)

$$\begin{aligned}
 S(a_1) &= \frac{2\pi^2}{45} \left[2 + \frac{7}{8}(4 + 6) \right] a_1^3 T_1^3(a_1) \\
 &= \frac{43\pi^2}{90} a_1^3 T_1^3.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

No obstante, después de la aniquilación, al momento a_2 , los electrones y positrones no están más en el plasma y los neutrinos no comparten ya la misma temperatura que los fotones ($T_\nu \neq T_\gamma \neq T_1$ en desacople), teniendo que la entropía posterior a la aniquilación aporta

$$\begin{aligned}
 S(a_2) &= \frac{2\pi^2}{45} \left[2T^3 + \frac{7}{8}(6)T_\nu^3 \right] a_2^3 \\
 &= \frac{2\pi^2}{45} \left[2T^3 + \frac{21}{4}T_\nu^3 \right] a_2^3.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Igualando las expresiones para la entropía $S(a_1) = S(a_2)$

$$\begin{aligned}
 \frac{43\pi^2}{90} a_1^3 T_1^3 &= \frac{2\pi^2}{45} \left[2T^3 + \frac{21}{4}T_\nu^3 \right] a_2^3 \\
 \frac{43\cancel{\pi}^2}{2} (a_1 T_1)^3 &= 4 \left[\left(\frac{T}{T_\nu} \right)^3 + \frac{21\cancel{\pi}^2}{8} \right] (a_2 T_\nu)^3.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Por último, se sabe que ahora la temperatura de los neutrinos (comportamiento de un componente de radiación) desciende como $T_\nu(a_2) \propto T_1/a_2$ (y aproximando que los volúmenes no cambian considerablemente en este lapso, *i.e.*, $a_2 T_\nu(a_2) = a_1 T_1$),

$$\begin{aligned} \frac{43}{2}(a_1 T_1)^3 &= 4 \left[\left(\frac{T}{T_\nu} \right)^3 + \frac{21}{8} \right] (a_2 T_\nu)^3 \\ \left(\frac{T}{T_\nu} \right)^3 &= \frac{43}{8} - \frac{21}{8} = \frac{11}{4} \end{aligned} \tag{A.11}$$

siendo $T = T_\gamma$ la temperatura del fondo de fotones aumentada con respecto a $T_1(a_1)$ por la aniquilación. De este modo, se obtiene

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3}, \tag{A.12}$$

que es la expresión deseada (3.19).

Apéndice B

Velocidad térmica de los neutrinos calientes (HDM)

El momento promedio de una especie relativista (sea bosón o fermión) χ a la temperatura T_χ está dado, aproximadamente, por

$$\langle |\mathbf{p}| \rangle \simeq 3T_\chi. \quad (\text{B.1})$$

Por otro lado, si tal especie ha evolucionado de tal manera que al tiempo presente sea no relativista, tendrá un momento en términos de su masa y su velocidad, como

$$|\mathbf{p}|_\chi = m_\chi |\mathbf{v}_\chi|. \quad (\text{B.2})$$

A partir de este par de consideraciones, se muestra que una especie de neutrinos con masa $m_\nu \sim 1$ eV y densidad de número del orden de la densidad de fotones ($n_{\nu_{HDM}} \sim n_{\gamma-CMB}$) como candidato a HDM posee una velocidad promedio no relativista alta, del orden de $\sim 1 \times 10^2$ km/s.

Estas partículas debieron desacoplarse cuando eran aún relativistas, por lo que representan una reliquia caliente, la cual tiene la peculiaridad de preservar su distribución de momentos de forma relativista (aún cuando hoy en día no lo sean). Así, para la temperatura actual de esta especie de neutrinos T_ν^0 ,

$$T^{\nu-dec} \simeq T_\nu^0 = 1.945 \text{ K} \simeq 1.589 \times 10^{-4} \text{ eV}, \quad (\text{B.3})$$

teniendo en cuenta que, al ser al ser una reliquia caliente, es válido aproximar su temperatura en el momento del desacople como la temperatura actual T_ν^0 , cuyo valor es conocido. De esta manera, el momento promedio de estos neutrinos está dado por

$$\langle |\mathbf{p}| \rangle_{\text{rel}} \simeq 3T_\nu^0. \quad (\text{B.4})$$

Por otra parte, en el régimen no relativista, el momento de la partícula será

$$|\mathbf{p}|_{\text{no-rel}} = m_\nu |\mathbf{v}_\nu^0|. \quad (\text{B.5})$$

Sabiendo que el momento promedio en estas partículas es conservado, de (B.4) y (B.4), se sigue que la velocidad de la velocidad de los neutrinos es hoy en día

$$|\mathbf{v}_\nu^0| \simeq 142.969 \text{ km/s}, \quad (\text{B.6})$$

que se encuentra muy por debajo de la velocidad de la luz ($\sim 0.0005 c$, no relativista).

Así, de manera general, la velocidad promedio de la especie de neutrinos como HDM estará dada análogamente vía la normalización con la temperatura T_{HDM} (del momento promedio relativista $\langle |\mathbf{p}| \rangle_{HDM} \simeq 3T_{HDM}$) y con la masa m_{HDM} (de $|\mathbf{p}|_{HDM} = m_{HDM}|\mathbf{v}_{HDM}|$) como

$$|\mathbf{v}_{HDM}^0| = |\mathbf{v}_\nu^0| \frac{\beta T_{HDM}^0}{\beta T_\nu^0} \frac{1}{m_\nu}, \quad (\text{B.7})$$

es decir,

$$|\mathbf{v}_{HDM}^0| \simeq 142.969 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left(\frac{T_{HDM}^0}{T_\nu^0} \right) \left(\frac{1 \text{ eV}}{m_{HDM}} \right). \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Ecuación diferencial para la función de crecimiento

En este apéndice se lleva a cabo la deducción de la ecuación diferencial (5.6) para la función de crecimiento $D(\eta)$ a partir de su forma en (4.49).

Partiendo del hecho de poder expresar el cambio de variable $\eta = \ln(a)$, se sigue que

$$\frac{d}{dt} = H \frac{d}{d\eta}, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = H^2 \frac{d^2}{d\eta^2} + H \frac{dH}{d\eta} \frac{d}{d\eta}. \quad (\text{C.2})$$

La ecuación para la función de crecimiento se convierte en

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \left(2 + \frac{1}{H} \frac{dH}{d\eta} \right) \frac{d}{d\eta} - \frac{3}{2} \Omega_m(\eta) H^2 \right] D(\eta) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Ahora, considerando únicamente contenido de materia y constante cosmológico (lo cual es perfectamente razonable para edades tardías en el universo), se satisface $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$, de modo que

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{d\eta} = -\frac{3}{2} \Omega_m(\eta) = -\frac{3}{2 \left(1 + \frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} e^{3\eta} \right)}. \quad (\text{C.4})$$

Así,

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \left(2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} e^{3\eta} \right)} \right) \frac{d}{d\eta} - \frac{3}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} e^{3\eta} \right)} \right] D(\eta) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Notar que las soluciones no dependerán de H_0 .