



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE TORNEOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

Emisenia Vázquez Cisneros



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Juan José Montellano Ballesteros**

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Alumno Vázquez Cisneros Emisenia
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
403069624

Tutor Dr. Juan José Montellano Ballesteros

Propietario Dra. Mucuy Kak del Carmen Guevara Aguirre

Propietario Dra. Rita Esther Zuazua Vega

Suplente Dr. José David Flores Peñaloza

Suplente Dr. Eduardo Rivera Ocampo

Trabajo Sobre Torneos
77 p.
2012.

Agradecimientos

La culminación de éste proyecto significa un gran logro en mi vida, representa el esfuerzo y constancia propios, pero sobretodo apoyo y paciencia de quienes han estado a mi lado y han sabido guiarme e impulsarme a ser alguien mejor, quisiera darles las gracias por acompañarme y permitirme compartir con ustedes el llegar a esta meta y concluir esta etapa.

Quiero agradecerle a Dios por permitirme vivir este logro. A mi familia por todo ese apoyo incondicional que me han brindado, no hubiera podido lograrlo sin la confianza de mis padres que me dejaron elegir y seguir mi camino, mamá, gracias por procurarme, consentirme y apoyarme, nunca dejaste de estar presente en cada paso que he dado; papá, no tengo palabras para agradecer el esfuerzo extra que hiciste para apoyarme en todo, muchas gracias, porque siempre me has demostrado lo importante que somos tus hijos para ti; Dany y Roge, mis hermanos, su cariño y respeto me impulsa siempre a ser alguien en quienes ustedes se puedan apoyar, sus palabras de aliento y la confianza que me brindan son invaluable para mi. Gracias a mis tíos y primos que siempre estuvieron ahí también, a todos ustedes los amo, muchas gracias por todo.

Por otro lado, tengo la fortuna de contar con grandes personas como amigos, de todos y cada uno de ellos he aprendido algo que me ha ayudado a crecer en muchos aspectos y en una o varias formas han sido un ejemplo, Luis, Lety, Alfredo, Héctor, Mafer, Pastor, Roberto, Katya, Fernando, Violeta, Carlos, y todos aquellos que estuvieron conmigo, no sé cómo agradecer a la vida que me los haya puesto en el camino, ustedes

han sido parte realmente importante de lo que ahora soy y de lo que hoy festejo, muchas gracias.

Un especial agradecimiento a mi jefe, Jose Carlos García Ponce, su apoyo, paciencia y comprensión fueron muy importantes.

Agradezco a mi asesor, Dr. Juan José Montellano, por su paciencia, por la dedicación a este trabajo y por el apoyo que me brindo. A la profesora, Dra. Rita Esther Zuazua, sin su apoyo inicial, este trabajo no hubiera sido posible. Agradezco también a los profesores, Dra. Mucuy Kak del Carmen Guevara y Dr. José David Flores por su dedicación y tiempo durante la evaluación de este proyecto, todos ustedes son unos excelentes profesores, muchas gracias.

Gracias a la Facultad de Ciencias, a mis profesores y a ésta Universidad de la que me siento muy orgullosa de pertenecer.

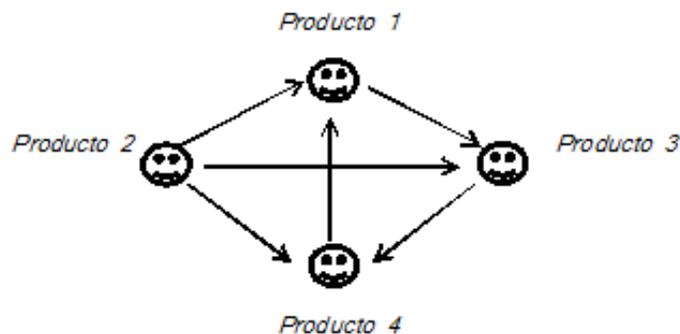
Índice

Introducción	1
Capítulo 1	
Notación y Definiciones	3
Capítulo 2	
Torneos.....	10
Capítulo 3	
¿Qué tan ordenado es un torneo?	30
Capítulo 4	
Torneos Fuertes	48
Capítulo 5	
Torneos Transitivos Inevitables	70
Conclusión	77

Introducción

En este trabajo presentamos un estudio sobre una estructura denominada *torneos Round Robin* o conocida simplemente como torneos. El nombre proviene del hecho de que esta estructura representa precisamente un torneo Round Robin, esto es, un torneo donde cada pareja de jugadores o equipos se enfrentan exactamente una vez en juegos donde no puede haber empate.

Aunque la estructura de torneo se podría pensar como muy restrictiva, es una estructura que se presenta en un gran número de fenómenos tales como relaciones de dominación entre especies o miembros de alguna especie o también estructuras definidas por preferencias (de productos a la venta, candidatos a puestos, etc.). Pongamos como ejemplo que queremos conocer la estructura de preferencias de una persona sobre un conjunto de productos. A esta persona se le pedirá que por cada pareja de productos, exprese su preferencia entre ellos (sin admitir empates en las preferencias). La estructura resultante es un torneo.



Podemos observar en este caso, que el producto 2 fue el preferido de entre todos los demás productos

El presente trabajo está ordenado de la siguiente manera. En la primer sección se ofrecen las definiciones básicas y notación necesarias para el desarrollo del tema. El Capítulo 2 presenta resultados generales sobre los torneos. La tercera parte del trabajo trata de la transitividad en los torneos y se presentan resultados al respecto. El Capítulo 4 se adentra en los llamados torneos fuertes y en la última parte del escrito se presenta como es que existen ciertas estructuras cuya aparición es inevitable en los torneos.

Capítulo 1

Notación y definiciones

Presentaremos las definiciones y notación que debemos tener presentes durante el desarrollo del presente trabajo.

Una *gráfica dirigida* o *digráfica* D consiste en un par ordenado de conjuntos $(V(D), F(D))$ donde $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ es llamado el conjunto de vértices de D y $F(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de elementos de $V(D)$ llamados flechas.

Cada flecha (v_i, v_j) , se dice que está orientada y que va dirigida del vértice v_i al vértice v_j y se representa como $\overrightarrow{v_i v_j}$.

Si cada flecha de D es una pareja de vértices distintos, se dice que D es **irreflexiva**, y si no hay flechas iguales, se dice que D es **simple**.

En este trabajo solo consideraremos digráficas simples e irreflexivas.

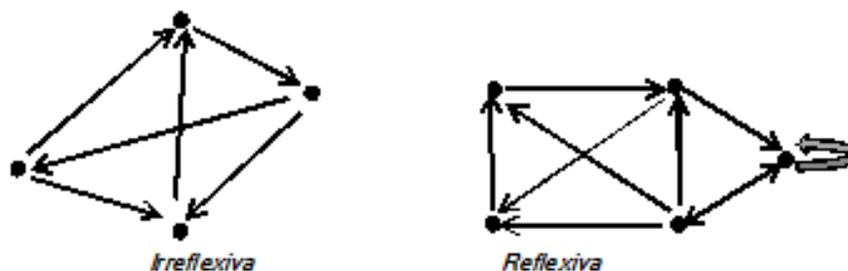


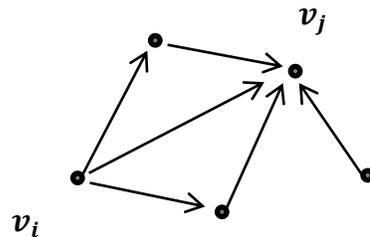
Figura 1.1

Si $\overrightarrow{uv} \in F(D)$, entonces se dice que u es **in-vecino** de v y que v es **ex-vecino** de u .

Dada una flecha $\overrightarrow{vu} \in F(D)$, al vértice v lo llamamos **vértice inicial** de la flecha \overrightarrow{vu} y al vértice u lo llamamos **vértice final** de la flecha \overrightarrow{vu} .

El **ex-grado** de un vértice $v \in V(D)$, denotado como $d_D^+(v)$, es el número de ex-vecinos de v , es decir, la cantidad de flechas que salen de v a otros vértices de la digráfica. De la misma manera, el **in-grado** $d_D^-(v)$, es el número de in-vecinos de v o la cantidad de flechas que llegan a este vértice.

Una **fuentes** de una digráfica es un vértice con ex-grado positivo y cero in-grado. Un **pozo** es un vértice con in-grado positivo y cero ex-grado.



v_i una fuente de D con $d^+(v) = 3$

v_j un pozo en D con $d^-(v) = 4$

Figura 1.2

Denotemos como $\Delta^+(D)$ al máximo ex-grado de la digráfica D y por medio de $\Delta^-(D)$ al máximo in-grado de la digráfica D .

De la misma manera, $\delta^+(D)$ y $\delta^-(D)$ denota al mínimo ex-grado y el mínimo in-grado respectivamente de la digráfica D .

El **orden** de una digráfica D es el número de vértices de D .

Una flecha $\overrightarrow{v_i v_j}$ de una digráfica D es **asimétrica** si $\overrightarrow{v_j v_i}$ no es flecha de D . Una digráfica es **asimétrica** si todas sus flechas son asimétricas.

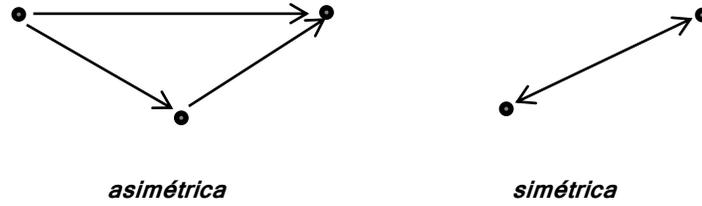


Figura 1.3

Se dice que una digráfica D es **transitiva** si para tres diferentes vértices v_i, v_j, v_k , se cumple que, si $\overrightarrow{v_i v_j}, \overrightarrow{v_j v_k} \in F(D)$ entonces $\overrightarrow{v_i v_k} \in F(D)$.

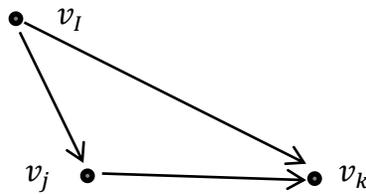


Figura 1.4

Se le llama **completa** a aquella digráfica en la que para cualesquiera dos vértices $v_i, v_j \in V(D)$, tenemos que $\overrightarrow{v_i v_j} \in F(D)$ ó $\overrightarrow{v_j v_i} \in F(D)$.

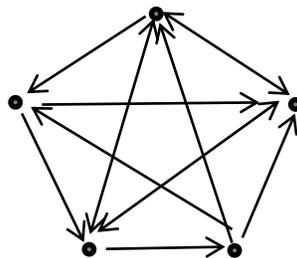


Figura 1.5

Una digráfica $D' = (V(D'), F(D'))$ es una **subdigráfica** de $D = (V(D), F(D))$ si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$.

Dado un vértice v de D , denotamos como $D \setminus v$ a la digráfica donde $V(D \setminus v) = V(D) \setminus \{v\}$ y $F(D \setminus v) = F(D) \setminus \{\vec{uw} \in F(D) : v = w \text{ ó } v = u\}$.
 Similarmente, dado $U \subseteq V(D)$, denotaremos como $D \setminus U$ a la digráfica donde $V(D \setminus U) = V(D) \setminus U$ y $F(D \setminus U) = F(D) \setminus \{\vec{uw} \in F(D) : w \in U \text{ ó } u \in U\}$.

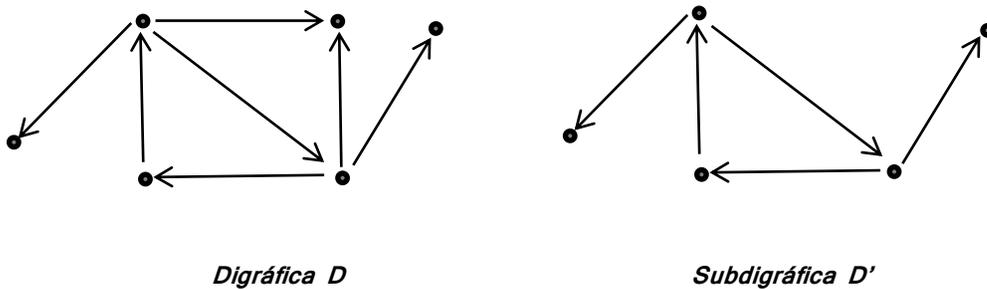


Figura 1.6

Dado $U \subseteq V(D)$, la **subdigráfica inducida** por U , denotada por $D[U]$ es la subdigráfica de D donde $V(D[U]) = U$, y $\vec{v_i v_j} \in F(D[U])$ si y sólo si $\vec{v_i v_j} \in F(D)$ y $v_i, v_j \in U$.

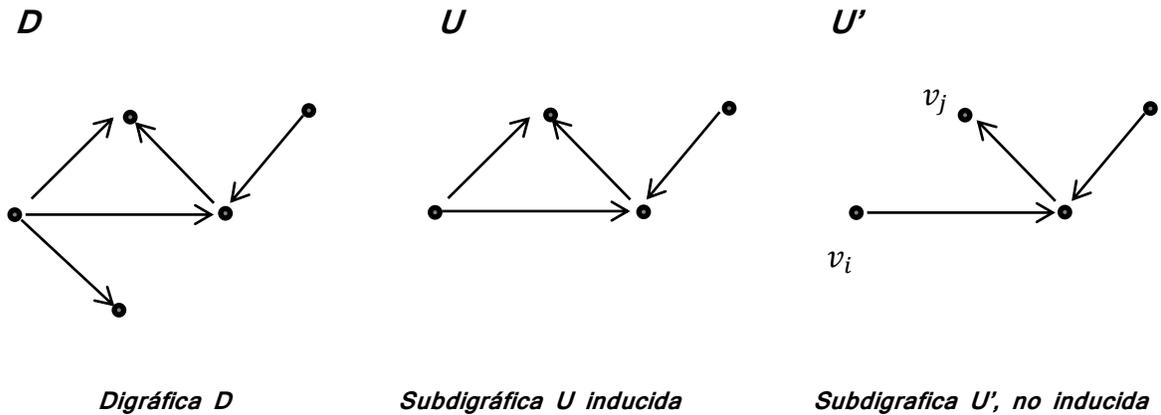


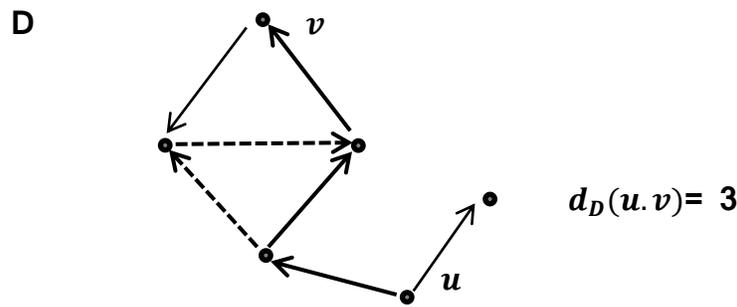
Figura 1.7

Dados dos vértices $u, v \in V(D)$, un uv -camino es una secuencia alternante de vértices y flechas de D de la forma $u_1, \overrightarrow{u_1 u_2}, u_2, \overrightarrow{u_2 u_3}, u_3, \dots, \overrightarrow{u_{n-1} u_n}, u_n$ en donde $u = u_1$ y $v = u_n$. Para abreviar, si la digráfica es simple, se puede escribir $u_1 u_2 \dots u_n$.

Se dice que un camino es **completo** si contiene todos los vértices de la digráfica.

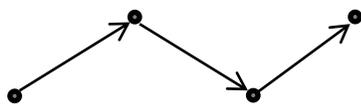
Si hay un uv -camino, entonces se dice que v es **alcanzable** por u .

La distancia de u a v , denotada como $d_D(u, v)$, es la longitud del uv -camino más corto, siendo la longitud de un camino, el número de flechas que hay en él.

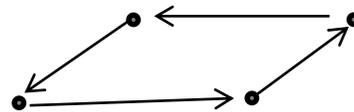


Podemos observar que hay más de un camino de u a v

Figura 1.8



Trayectoria de longitud= 3



Ciclo de longitud =4

Figura 1.9

Se le llama **trayectoria** a un camino en el que todos los vértices y flechas son distintos.

Si una trayectoria pasa por todos los vértices de una digráfica D , se dice que es una **trayectoria completa** o **hamiltoniana**.

Un camino de longitud positiva en el que solo el primero y el último vértice son el mismo, es un **ciclo** o **ciclo dirigido**.

Una digráfica es **fuertemente conexa** o **fuerte**, si cada pareja de vértices son mutuamente alcanzables. Una **componente fuerte** de una digráfica D es una subdigráfica de D que es fuerte y que es máxima con dicha propiedad. Esto es, si D' es una componente fuerte de D , para todo subconjunto no vacío S de $V(D) \setminus V(D')$, la subgráfica inducida por $V(D') \cup S$ no es fuerte.

Sea D

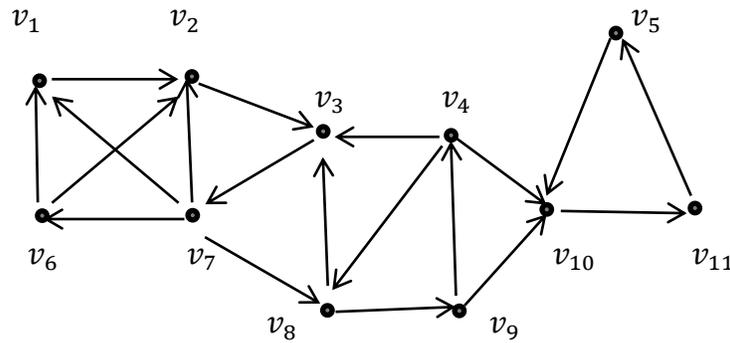
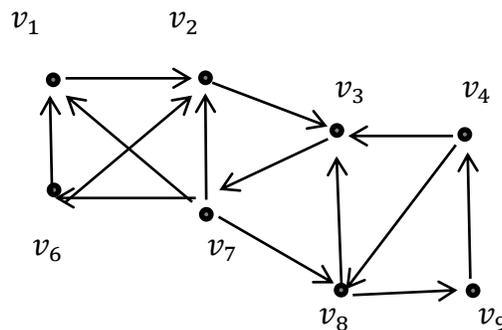


Figura 1.10

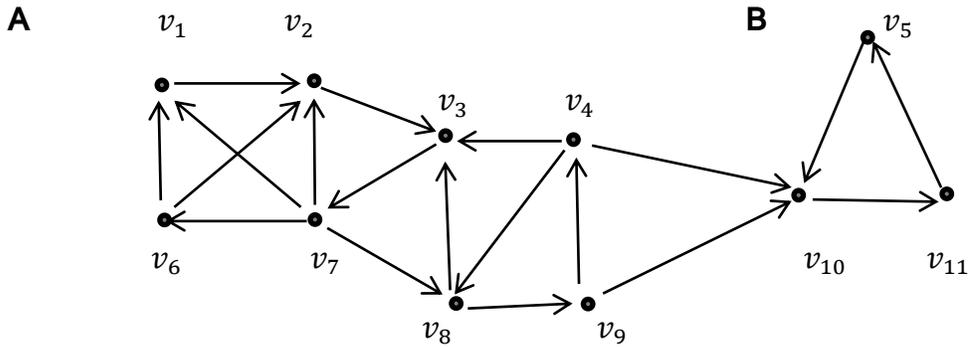
A



Tenemos A un componente fuerte de D . Notemos que si agregamos el vértice v_{10} , ya no se cumple con la condición de fuerte, es decir, tenemos que en A ningún vértice es alcanzable por v_{10} .

Figura 1.11

La **condensación** D^* de una digráfica D se define como la digráfica cuyos vértices son las componentes fuertes de D , y para cada par $S_i, S_j \in V(D^*)$, $\overrightarrow{S_i S_j} \in F(D^*)$ si y sólo si hay una flecha en D , de algún vértice de S_i a un vértice de S_j .



Las componentes fuertes de D son las digráficas de D inducidas por los conjuntos de vértices A y B .



Condensación D^*

Figura 1.12

Dadas D_1 y D_2 dos digráficas de n vértices, decimos que D_1 es **isomorfa** a D_2 si y sólo si existe $f: V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ biyectiva tal que para cada $v_i, v_j \in V(D_1)$, $\overrightarrow{v_i v_j} \in F(D_1)$ si y solo si $\overrightarrow{f(v_i) f(v_j)} \in F(D_2)$.

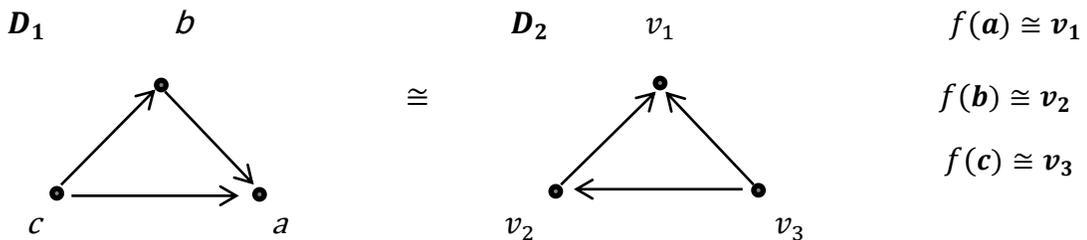


Figura 1.13

Capítulo 2

Torneos

Un *torneo* es una digráfica asimétrica y completa. En la Figura 2.1 podemos ver todos los torneos, salvo isomorfismo, de orden 1, 2, 3 y 4. No es difícil ver que si T es un torneo, entonces para cada $U \subseteq V(T)$, $T[V(T) \setminus U]$ y $T[U]$ son torneos también.

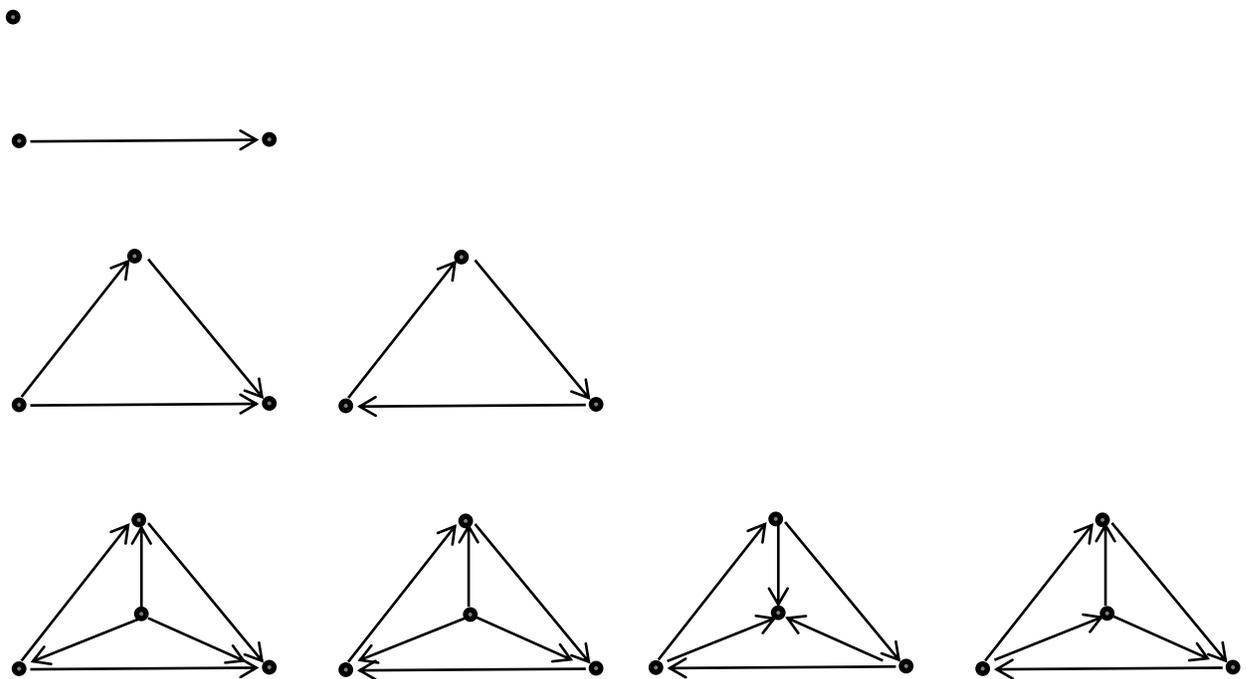


Figura 2.1

Por definición de torneo, sabemos que un vértice solo se relaciona una vez (*asimetría*) con cada uno de los demás vértices (*completo*), entonces, si v es cualquier vértice de un torneo T con p vértices, tenemos que

$$d_T^+(v) + d_T^-(v) = p - 1.$$

Además, el que un torneo T sea completo y asimétrico significa que cada pareja de vértices son los extremos de exactamente una flecha, por tanto, la cantidad de flechas de T es exactamente el número de parejas de vértices de T , a saber

$$\binom{p}{2} = \frac{p!}{(p-2)!2!} = \frac{p(p-1)(p-2)!}{(p-2)!2!} = \frac{1}{2} p(p-1).$$

Dado un torneo T , con $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, la **sucesión de ex-grados** del torneo T es la sucesión ordenada de enteros (s_1, s_2, \dots, s_p) donde $d_T^+(v_i) = s_i$ para $1 \leq i \leq p$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los vértices v_i han sido ordenados de tal forma que $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$.

El siguiente teorema, demostrado por H.G. Landau [5], nos proporciona una condición suficiente y necesaria para que una sucesión de enteros no negativos sea la sucesión de ex-grados de un torneo.

Aquí sólo presentaremos la prueba de una de las implicaciones.

Teorema 1.

Una sucesión de enteros no negativos $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$ es una sucesión de ex-grados de un torneo si y sólo si:

$$(i) \quad \sum_{i=1}^p s_i = \frac{1}{2}p(p-1);$$

y para todos los enteros positivos $k < p$,

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^k s_i \geq \frac{1}{2}k(k-1).$$

Demostración.

Sea (s_1, s_2, \dots, s_p) una sucesión ordenada de ex-grados de un torneo T con p vértices v_1, v_2, \dots, v_p . Sabemos que para cada $v_i \in V(T)$, $s_i = d_T^+(v_i)$. Esto es, s_i es el número de flechas que tienen como vértice inicial a v_i . Como cada flecha del torneo tiene un único vértice inicial, podemos ver que $\sum_{i=1}^p s_i = \sum_{i=1}^p d_T^+(v_i)$ es el número total de flechas de T , el cual es $\frac{1}{2}p(p-1)$ por ser T una digráfica completa y asimétrica. Así,

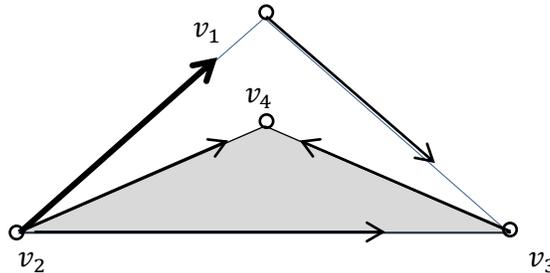
$$\sum_{i=1}^p s_i = \frac{1}{2}p(p-1).$$

Ahora sea $U = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V(T)$ y T' el subtorneo de T inducido por U . Entonces tenemos que la cardinalidad de las flechas de T' es $\sum_{i=1}^k d_{T'}^+(v_i) = \frac{1}{2}k(k-1)$.

Claramente, para cada $v_i \in U$, $d_{T'}^+(v_i) \leq d_T^+(v_i)$ y entonces

$$\sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k d_T^+(v_i) \geq \sum_{i=1}^k d_{T'}^+(v_i) = \frac{1}{2} k(k-1).$$

Torneo T con $p = 4$



Sea $T[U]$ el torneo inducido por los vértices v_2, v_3 y v_4 . Observamos que la flecha $\overrightarrow{v_2 v_1} \notin F(T[U])$, aunque $v_2 \in V(T[U])$

Figura 2.2

□

Si un torneo T tiene una fuente v , entonces, todos los vértices de T son ex-vecinos de v , la distancia de la fuente a cada vértice es 1 y su ex-grado es $p - 1$. Es claro que un torneo tiene a lo más una fuente.

Si T no tiene una fuente, entonces habrá al menos un vértice con el ex-grado máximo, el cual es menor que $p - 1$. El siguiente teorema nos brinda información sobre una propiedad que cumplen los vértices de ex-grado máximo.

Teorema 2.

En cualquier torneo, la distancia de un vértice con ex-grado máximo a cualquier otro de los vértices es 1 ó 2.

Demostración.

Sea v un vértice tal que $d_T^+(v) = \Delta^+(T)$, y supongamos que existe $u \in V(T)$ tal que $d_T(v, u) \geq 3$.

Como $d_T(v, u) \neq 1$ entonces $u \notin N^+(v)$.

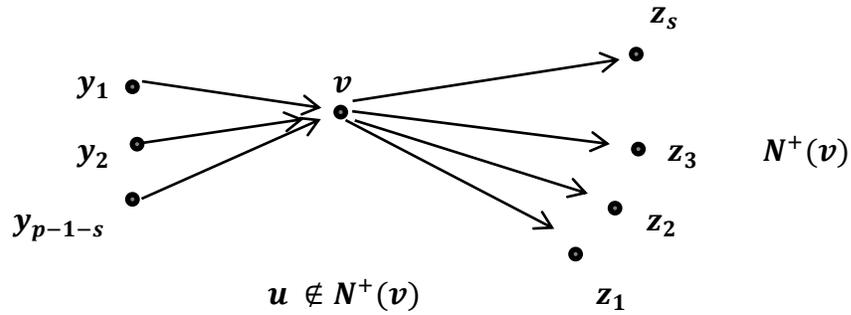


Figura 2.3

Tenemos entonces que $\overrightarrow{vu} \notin F(T)$ y por tanto $\overrightarrow{uv} \in F(T)$ ya que T es un torneo.

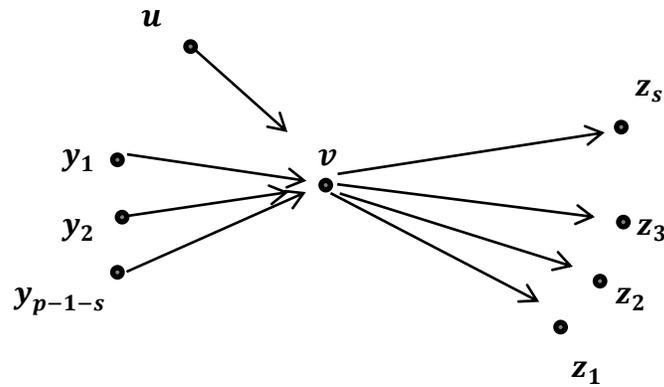


Figura 2.4

Como $d_T(v,u) \geq 3$, entonces, para cada $z \in N^+(v)$ $\overrightarrow{z}u \notin F(T)$.

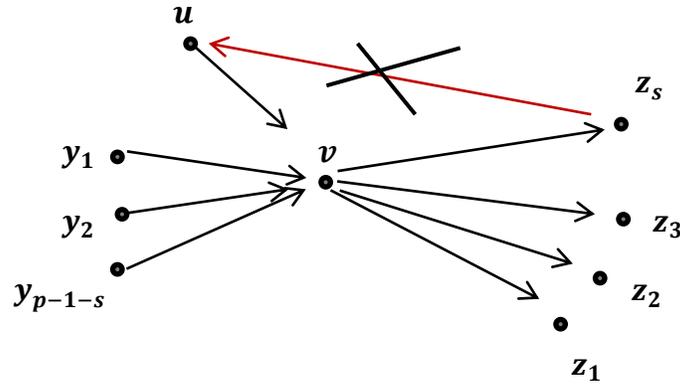


Figura 2.5

Y ya que T es torneo, tenemos que para todo $z \in N^+(v)$, $\overrightarrow{u}z \in F(T)$.

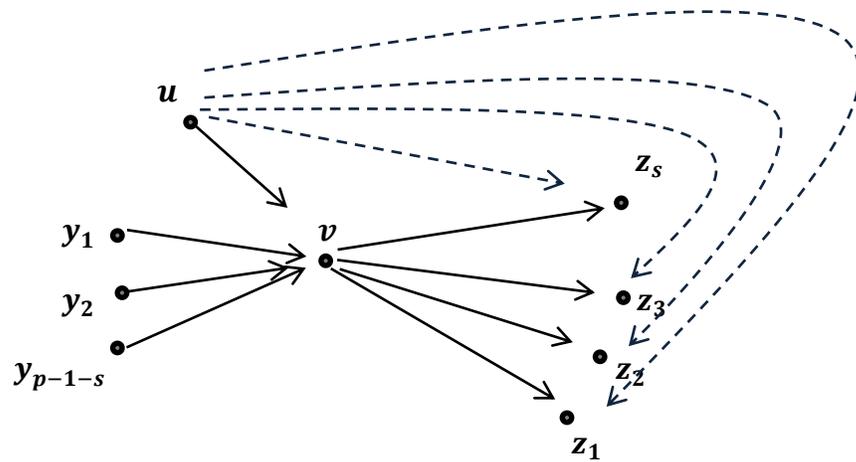


Figura 2.6

Pero entonces $N^+(u) \supseteq N^+(v) \cup \{v\}$ y por lo tanto $d_T^+(u) \geq d_T^+(v) + 1$ lo cual es una contradicción ya que por hipótesis, tenemos que v es un vértice con ex-grado máximo. Así queda probado el teorema.

□

Del Teorema 2 se sigue una interesante consecuencia si se aplica a un torneo Round Robin con al menos tres jugadores. Si v es un jugador con el ex-grado máximo, es decir, un jugador tal que ningún otro jugador ha ganado más juegos que él, entonces cualquier jugador que derrote a v , es un jugador que ha sido derrotado por otro jugador derrotado por v . La doble dirección de ésta conclusión nos dice que si v es un jugador con el ex-grado mínimo entonces, cualquier jugador derrotado por v derrota a otro jugador que derrota a v .

El siguiente teorema nos muestra como en un torneo sin fuentes siempre hay tres vértices tales que todos los demás vértices están a muy corta distancia de ellos.

Teorema 3. [Harary y Moser [3]]

Si un torneo T no tiene fuentes, entonces existen al menos tres vértices $v_1, v_2, v_3 \in V(T)$ tales que para todo $u \in V(T)$, $d_T(v_i, u) \leq 2$, para $i = 1, 2, 3$.

Demostración.

Sea $v_1 \in V(T)$ tal que $d_T^+(v_1) = \Delta^+(T)$. Por el Teorema 2 *para todo* $u \in V(T)$ *tenemos que* $d_T(v_1, u) \leq 2$.

Por hipótesis sabemos que T no tiene fuentes, es decir, $\partial^-(T) > 0$, y entonces $N^-(v_1) \neq \emptyset$. Sea v_2 un vértice con ex-grado máximo en el torneo inducido por $N^-(v_1)$.

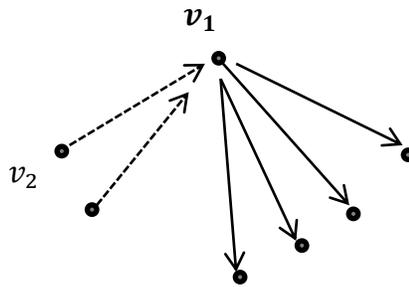


Figura 2.7

Sea $z \in V(T)$. Si $z \in N^+(v_1)$, entonces como $\overrightarrow{v_2 v_1}, \overrightarrow{v_1 z} \in F(T)$, $d_T(v_2, z) \leq 2$.

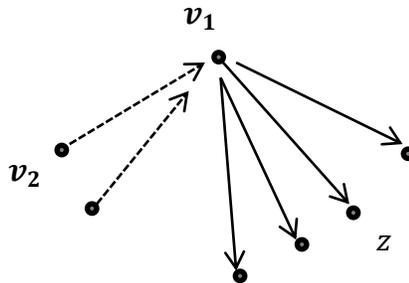


Figura 2.8

Si $z \in N^-(v_1)$, entonces z está en el torneo inducido por $N^-(v_1)$ en el cual v_2 es un vértice de ex-grado máximo, entonces por el Teorema 2 tenemos que, $d_{T[N^-(v_1)]}(v_2, z) \leq 2$. Entonces $\overline{v_2 z} \in F(T[N^-(v_1)])$ o bien, existe $w \in N^-(v_1)$ tal que $\overline{v_2 w}, \overline{w z} \in F(T[N^-(v_1)])$. Como $T[N^-(v_1)]$ es subtorneo de T , entonces $\overline{v_2 z} \in F(T)$ o bien, existe $w \in N^-(v_1) \subseteq V(T)$ tal que $\overline{v_2 w}, \overline{w z} \in F(T)$ y así $d_T(v_2, z) \leq 2$.

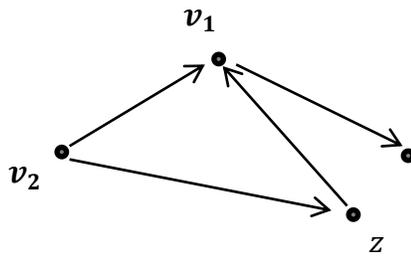


Figura 2.9

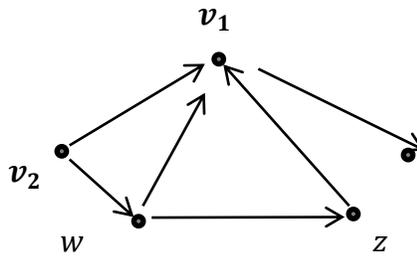


Figura 2.10

Como por hipótesis no hay fuentes, entonces $N^-(v_2) \neq \emptyset$. Veamos los dos únicos posibles casos.

Caso 1. $N^-(v_1) \cap N^-(v_2) \neq \emptyset$.

Sea $A = N^-(v_1) \cap N^-(v_2) \neq \emptyset$. Sea v_3 un vértice de ex-grado máximo en $T[A]$. Sea $z \in V(T)$. Si $z \in N^+(v_1) \cup N^+(v_2)$, entonces es fácil ver que $d_T(v_3, z) \leq 2$.

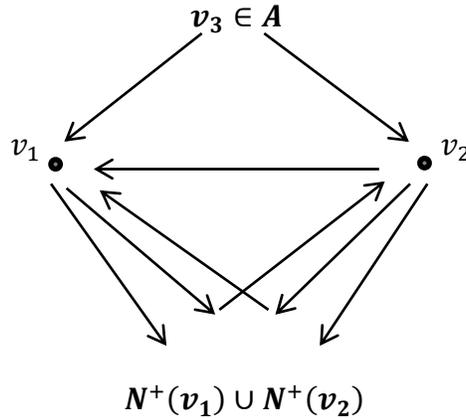


Figura 2.11

Si $z \notin N^+(v_1) \cup N^+(v_2)$ entonces $z \in A = N^-(v_1) \cap N^-(v_2)$, y z es un vértice del torneo inducido por A . Como v_3 es un vértice de ex-grado máximo en $T[A]$ por el Teorema 2 vemos que $d_{T[A]}(v_3, z) \leq 2$. Como $T[A]$ es un subtorneo de T , de manera análoga a lo visto previamente concluimos que la $d_T(v_3, z) \leq 2$.

Caso 2. $N^-(v_1) \cap N^-(v_2) = \emptyset$.

En este caso tenemos que $N^+(v_1) \cap N^-(v_2) \neq \emptyset$ pues $N^-(v_2) \neq \emptyset$. Sea $B = N^+(v_1) \cap N^-(v_2) \neq \emptyset$ y sea v_3 un vértice de ex-grado máximo en $T[B]$. Sea $z \in V(T)$. Si $z \in N^+(v_2)$, vemos que $d_T(v_3, z) \leq 2$ (ver Figura 2.12). Si $z \in N^-(v_2)$, entonces $z \in N^+(v_1)$ ya que $N^-(v_1) \cap N^-(v_2) = \emptyset$, es decir, $z \in B$. Por tanto, z está en el torneo inducido por B del cual v_3 es un vértice de ex-grado máximo. De manera análoga a los caso anteriores, vemos que $d_T(v_3, z) \leq 2$ y así queda demostrado el teorema.

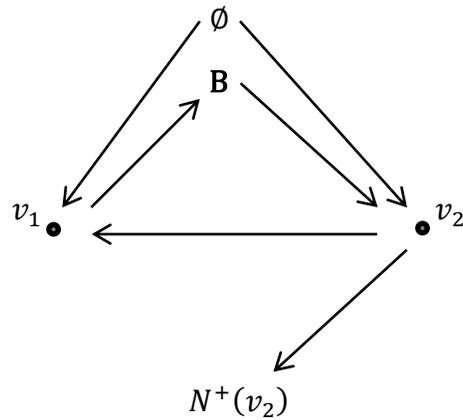


Figura 2.12

□

A continuación veremos varios resultados que nos hablan del comportamiento de los torneos con respecto de los ciclos y de las trayectorias. El siguiente teorema de L. Rédei [7] es posiblemente el resultado más conocido sobre torneos.

Teorema 4

Todo torneo tiene una trayectoria completa.

Demostración.

Sea T un torneo de n vértices y sea $Q = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ una trayectoria de longitud máxima en T .

Supongamos que $p < n$. Entonces existe $v \in V(T)$ tal que no está en la trayectoria Q .

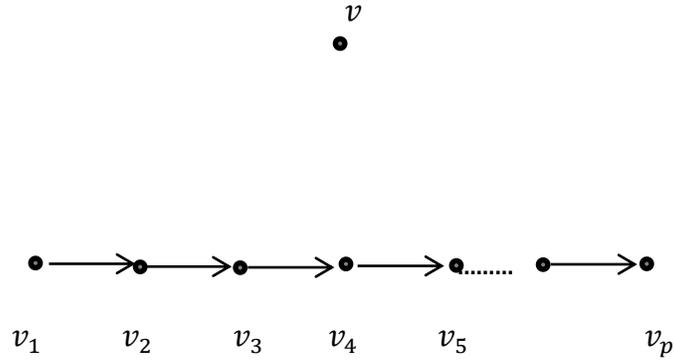


Figura 2.13

Por ser T torneo, sabemos que $\overline{v_1 v} \in F(T)$ ó $\overline{v v_1} \in F(T)$.

Si $\overline{v v_1} \in F(T)$, entonces la trayectoria v, v_1, v_2, \dots, v_p es más larga que Q , lo cual no es posible. Entonces $\overline{v_1 v} \in F(T)$.

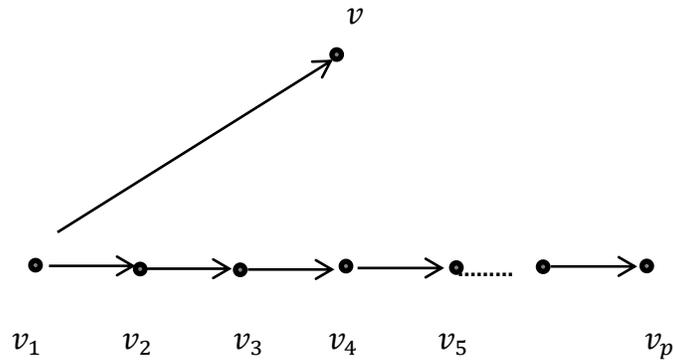


Figura 2.14

De forma análoga tenemos que $\overline{v_p v} \in F(T)$ ó $\overline{v v_p} \in F(T)$ y si $\overline{v_p v} \in F(T)$ entonces la trayectoria v_1, v_2, \dots, v_p, v es mas larga que Q , lo cual no es posible. Entonces $\overline{v v_p} \in F(T)$.

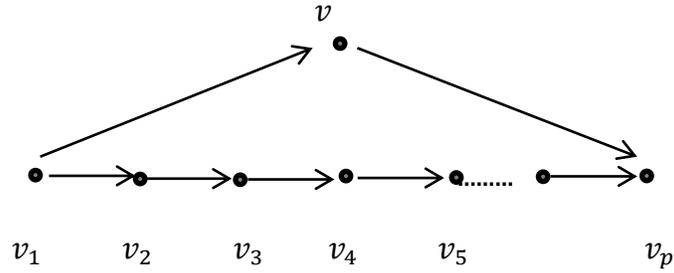


Figura 2.15

Como $\overrightarrow{v_1 v}$, $\overrightarrow{v v_p} \in F(T)$ debe de existir $1 \leq i \leq p - 1$ tal que $\overrightarrow{v_i v} \in F(T)$ y $\overrightarrow{v v_{i+1}} \in F(T)$.

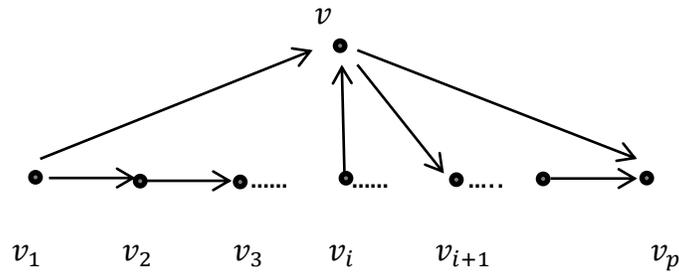


Figura 2.16

Pero entonces la trayectoria $v_1, v_2, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_p$ es mas larga que Q lo que también contradice la hipótesis.

Entonces, si Q es la trayectoria mas larga no puede haber vértices que no estén en Q pues si no habría una contradicción. Por lo tanto en Q están todos los vértices y Q es completo.

□

El siguiente lema nos muestra que la existencia de un ciclo dirigido en un torneo implica la existencia de un ciclo dirigido de longitud tres, también llamado triángulo dirigido o cíclico, en el mismo torneo.

Lema 1.

T es un torneo que contiene al menos un ciclo dirigido si y sólo si T tiene un triángulo dirigido.

Demostración.

Sea T un torneo con al menos un ciclo dirigido. Sea $c = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_r, v_1)$ el ciclo dirigido más pequeño en T y supongamos que no es un triángulo dirigido, esto es, $r \geq 4$.

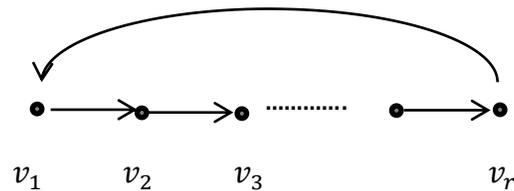


Figura 2.17

Tenemos que T es un torneo, entonces sabemos que $\overrightarrow{v_1 v_3} \in F(T)$ ó $\overrightarrow{v_3 v_1} \in F(T)$. Por lo tanto, si $\overrightarrow{v_1 v_3} \in F(T)$, $(v_1, v_3, \dots, v_r, v_1)$ es un ciclo más pequeño que c . Y si $\overrightarrow{v_3 v_1} \in F(T)$, (v_1, v_2, v_3, v_1) es un ciclo más pequeño que c . En cualquier caso, al suponer que el ciclo más pequeño en T no es un triángulo dirigido, llegamos a una contradicción.

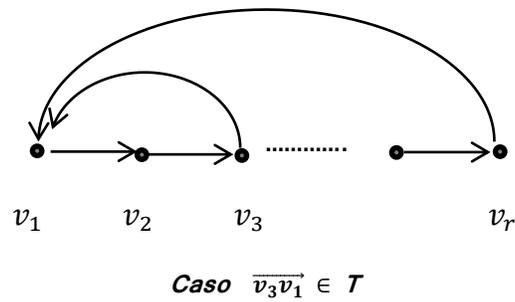
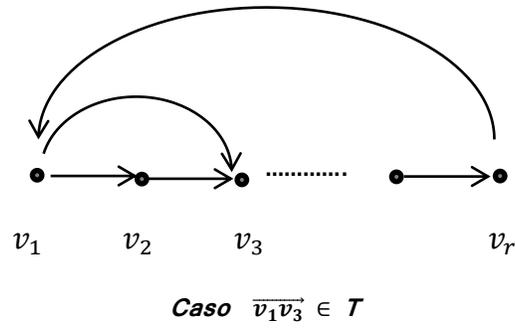


Figura 2.18

Por lo tanto, si T contiene al menos un ciclo, el más pequeño es un triángulo dirigido.

Nos podemos dar cuenta de que el regreso es evidente ya que un triángulo dirigido, es un ciclo dirigido.

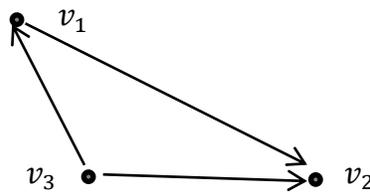


Figura 2.19

□

Lema 2.

Si un torneo T no tiene pozos, o no tiene fuentes, entonces contiene un ciclo.

Demostración.

Sea T un torneo y sea $P = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ la trayectoria más larga en T . Si T no tiene pozos, $d_T^+(v_p) > 0$ y entonces existe y tal que $\overrightarrow{v_p y} \in F(T)$.

Ya que tenemos que P es de longitud máxima, entonces $y \in V(P)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y = v_i$ y entonces, $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_p, v_i)$ es un ciclo en T .

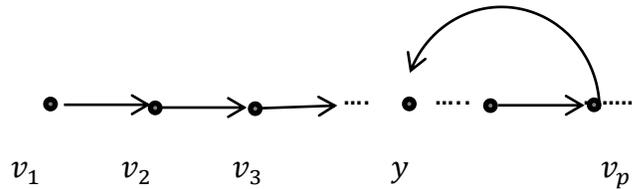


Figura 2.20

Por lo tanto, si el ex-grado más pequeño en el torneo T es mayor a cero, entonces hay un ciclo en él.

En el caso en que el torneo no tenga fuentes, la prueba se sigue de manera análoga observando ahora el comportamiento de v_1 en P .

□

Ahora veremos un resultado que nos muestra una propiedad que deben cumplir las secuencias de ex-grados de un torneo.

Teorema 5 [*Harary y Moser* [3]]

Sea T un torneo con una sucesión de ex-grados $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$. Entonces cada uno de los ex-grados s_k satisface la desigualdad

$$\frac{1}{2}(k-1) \leq s_k \leq \frac{1}{2}(p+k-2).$$

Demostración.

Sea T un torneo cuya sucesión de ex-grados es $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$.

Primero probaremos que para cada s_k , $\frac{1}{2}(k-1) \leq s_k$.

Supongamos que existe k tal que $s_k < \frac{1}{2}(k-1)$. Entonces, como para $i < k$, $s_i < s_k$ vemos que $s_i < \frac{1}{2}(k-1)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, por lo que $\sum_{i=1}^k s_i < k \frac{1}{2}(k-1)$ lo cual es una contradicción, pues por el Teorema 1, sabemos que $\sum_{i=1}^k s_i \geq \frac{1}{2} k(k-1)$.

Ahora veremos que para cada s_k , $s_k \leq \frac{1}{2}(p+k-2)$. Si cambiamos la dirección de cada una de las flechas del torneo T , obtenemos el torneo \tilde{T} con la sucesión de ex-grados, $p-1-s_p \leq p-1-s_{p-1} \leq \dots \leq p-1-s_1$.

Renombremos los ex-grados de \tilde{T} .

Sea $s_1^* = (p-1) - s_p$;

$$s_2^* = (p-1) - s_{p-1};$$

$$s_3^* = (p-1) - s_{p-2};$$

.....

$$s_p^* = (p-1) - s_{p-(p-1)}.$$

Así, la sucesión $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ es la sucesión de ex-grados del torneo \tilde{T} , donde $s_{t+1}^* = (p-1) - s_{p-t}$, para cada $0 \leq t \leq p-1$; y $s_1^* \leq s_2^* \leq \dots \leq s_p^*$.

Sea $k = p - t$. Como vimos al inicio de la prueba de este teorema, $\frac{1}{2}(t+1-1) \leq s_{t+1}^*$ y como $s_{t+1}^* = (p-1) - s_k$, entonces

$$\frac{t}{2} \leq s_{t+1}^* = (p-1) - s_k,$$

por lo que

$$s_k \leq (p-1) - \frac{1}{2}t = (p-1) - \frac{p-k}{2} = \frac{2p-2-p+k}{2} = \frac{p+k-2}{2}$$

concluyendo la prueba del teorema.

□

Antes de finalizar este capítulo, veremos un resultado que nos muestra una propiedad de las condensaciones de los torneos.

Lema 3.

La condensación de un torneo, es un torneo.

Demostración.

Sea T un torneo y T' su condensación.

Sean S_1, S_2 dos vértices de T' .

Como T es torneo, existen flechas que van de S_1 a S_2 y/o flechas que van de S_2 a S_1 . Así que T' es una digráfica completa.

Ahora veremos que es asimétrica.

Supongamos que no lo es, esto es, existen $S_1, S_2 \in V(T')$ tales que $\overrightarrow{S_1 S_2}, \overrightarrow{S_2 S_1} \in F(T')$. Entonces en T existen flechas que van de S_1 a S_2 y flechas que van de S_2 a S_1 .

Sean $u_1, v_1 \in V(S_1)$ y $u_2, v_2 \in V(S_2)$ tales que $\overrightarrow{u_1 u_2}, \overrightarrow{v_2 v_1} \in F(T)$.

Sean $w_1 \in V(S_1)$ y $w_2 \in V(S_2)$. Como S_1 es fuerte, u_1 es alcanzable por w_1 y como $\overrightarrow{u_1 u_2} \in F(T)$, u_2 es alcanzable por w_1 .

Como S_2 es fuerte, w_2 es alcanzable por u_2 , por lo que w_2 es alcanzable por w_1 .

Por otro lado, como S_2 es fuerte, u_2 es alcanzable por w_2 , y como $\overrightarrow{v_2 v_1} \in F(T)$, v_1 es alcanzable por w_2 . Como S_1 es fuerte, w_1 es alcanzable por v_1 , por lo que w_1 es alcanzable por w_2 .

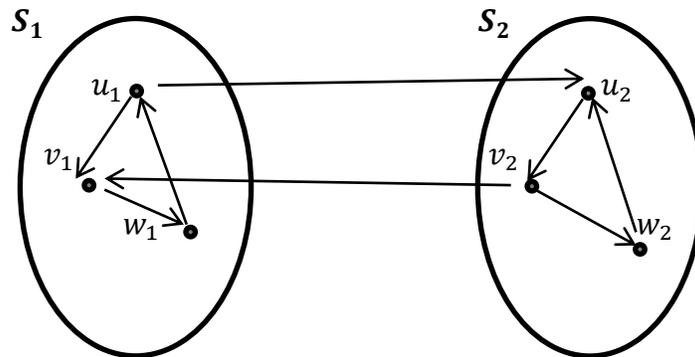


Figura 2.21

Así w_1 es alcanzable por w_2 y w_2 es alcanzable por w_1 , esto es, toda pareja de vértices de $V(S_1) \cup V(S_2)$ son mutuamente alcanzables, contradiciendo el que S_1 y S_2 son componentes fuertes.

Por lo tanto la condensación de un torneo es una digráfica completa y asimétrica y queda demostrado el teorema.

□

Capítulo 3

¿QUÉ TAN ORDENADO ES UN TORNEO?

El resultado del Teorema 4 nos permite ver que es posible ordenar a todos los vértices v_1, v_2, \dots, v_n de un torneo T de tal manera que para cada $1 \leq i \leq n-1$, $\overrightarrow{v_{i+1}v_i} \in F(T)$. Sin embargo, nos encontramos con que un torneo puede tener más de una trayectoria completa, haciendo que este orden no sea único. Este problema de no poder dar un orden “natural” a los vértices de un torneo se hace evidente al notar que un torneo no tiene por qué representar un *orden completo*, esto es, no necesariamente existe una relación uno a uno entre el conjunto de n vértices de un torneo y el conjunto de los primeros n números naturales con su orden natural.

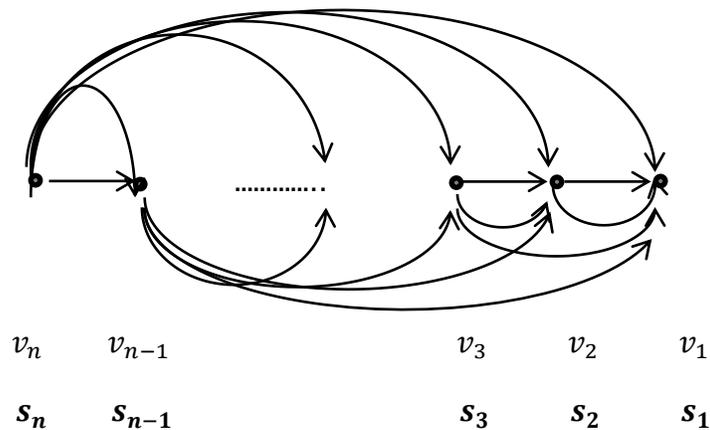


Figura 3.1

Nótese que un orden completo es una relación, irreflexiva, asimétrica, completa y transitiva. Dado que cualquier torneo es irreflexivo, asimétrico y completo, observamos que entonces un torneo que además sea transitivo representará un orden completo.

A continuación veremos un teorema que presenta varias equivalencias con la propiedad de que un torneo sea transitivo.

Teorema 6

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier torneo T con p vértices.

- (1) *T es transitivo.*
- (2) *T es acíclico.*
- (3) *T tiene una única trayectoria completa de longitud $p - 1$.*
- (4) *La sucesión de ex-grados de T es $(0, 1, 2, \dots, p - 1)$.*
- (5) *T tiene $p(p - 1)(p - 2)/6$ triángulos transitivos.*

Demostración

(1) \Rightarrow (2)

Sea T un torneo transitivo. Obsérvese que T no tiene triángulos cíclicos (ver Figura 3.2) lo cual por el Lema 1, implica que el torneo T es acíclico.

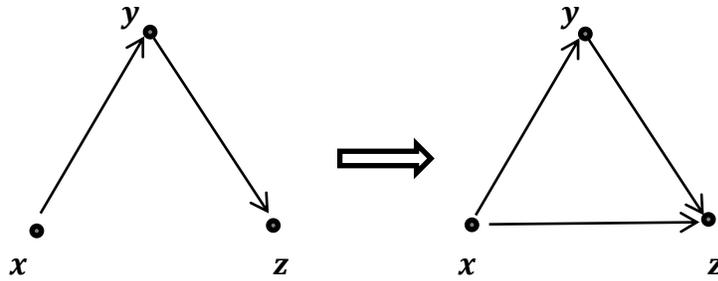


Figura 3.2

□

(2) \Rightarrow (5)

Si T es un torneo acíclico, vemos por el Lema 1 que T no contiene triángulos dirigidos, por lo tanto todos sus triángulos son transitivos y el número total de triángulos es $\binom{p}{3} = \frac{p(p-1)(p-3)}{6}$.

□

(5) \Rightarrow (1)

Sea T con $\binom{p}{3}$ triángulos transitivos, esto es con el total de sus triángulos transitivos y sean x, y y z vértices del torneo tales que $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \in F(T)$. Como T es torneo $\overrightarrow{xz} \in F(T)$ ó $\overrightarrow{zx} \in F(T)$, y dado que x, y, z no pueden inducir un triángulo dirigido, se sigue que $\overrightarrow{xz} \in F(T)$ y por tanto T es transitivo.

□

(2) \Rightarrow (3)

Sea T un torneo acíclico y sea (v_1, v_2, \dots, v_p) una trayectoria máxima en T .

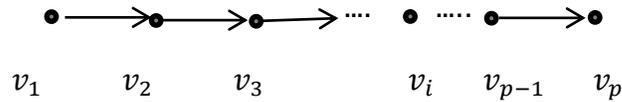


Figura 3.3

Si existe otra trayectoria máxima tiene que ocurrir que para alguna pareja i, j , $\overrightarrow{v_i v_j}$ con $i > j$ y entonces $v_i, v_j, v_{j+1}, \dots, v_i$ es un ciclo, lo cual es una contradicción.

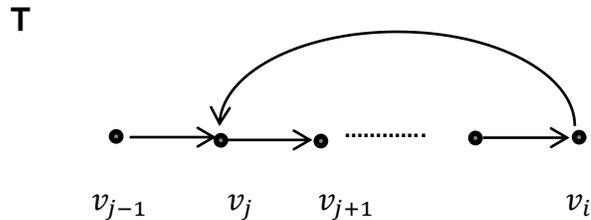


Figura 3.4

Por lo tanto T tiene una única trayectoria completa.

□

(3) \Rightarrow (4)

Probaremos esta implicación por inducción sobre el número de vértices p . Sea T un torneo de 3 vértices con una única trayectoria de longitud $p-1=2$. Vemos que T tiene que ser el torneo transitivo de tres vértices el cual tiene como sucesión de ex-grados 0,1,2. Ahora supongamos que la implicación es cierta para todo torneo con p vértices.

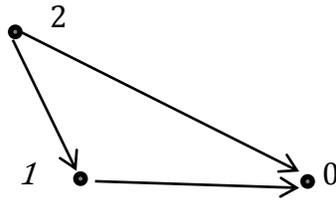


Figura 3.5

Sea T un torneo con $p + 1$ vértices y una única trayectoria de longitud p $(v_{p+1}, v_p, \dots, v_1)$. Primero veremos que $d_T^+(v_1) = 0$.

Supongamos que $d_T^+(v_1) > 0$ y sea $k = \max\{i : \overrightarrow{v_1 v_i} \in F(T)\}$. Si $k = p + 1$ tenemos que en T hay un ciclo completo y por tanto al menos $p + 1$ trayectorias completas lo cual no es posible. Por lo tanto vemos que $\overrightarrow{v_1 v_k}$ y $\overrightarrow{v_{k+1} v_1} \in F(T)$. Así $(v_{p+1}, v_p, \dots, v_{k+1}, v_1, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2)$ es otra trayectoria completa en T lo cual no es posible. Así $d_T^+(v_1) = 0$.

T

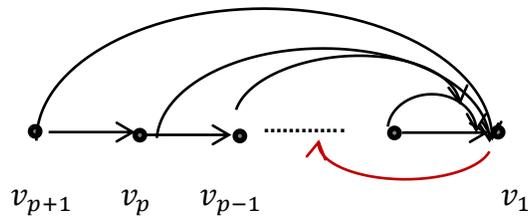


Figura 3.6

Consideremos $T \setminus v_1$.

Si $T \setminus v_1$ tuviera dos trayectorias completas distintas, $z_1 z_2 \dots z_p$ y $x_1 x_2 \dots x_p$, dado que $d^+(v_1) = 0$, $\overrightarrow{z_p v_1}$, $\overrightarrow{x_p v_1} \in F(T)$, por lo que $z_1 z_2 \dots z_p, v_1$ y $x_1 x_2 \dots x_p, v_1$ serían dos trayectorias completas distintas en T , lo cual no es posible. Así $T \setminus v_1$ es un torneo de p vértices con una única trayectoria completa y por hipótesis de inducción, eso implica que su sucesión de ex-grados es $0, 1, \dots, p-1$. Así como $d_T^+(v_1) = 0$, la sucesión de ex-grados de T es $0, 1, 2, 3, \dots, p$ y la implicación (3) \Rightarrow (4) ha sido probada.

□

(4) \Rightarrow (2)

Probaremos esta implicación por inducción sobre el número de vértices p . Sea T un torneo con 3 vértices y sucesión de ex-grados $0, 1, 2$. Vemos que ese torneo es el torneo transitivo de tres vértices es cual es acíclico.

Ahora supongamos que la implicación es cierta para todo torneo con a lo más p vértices y sea T un torneo con $p+1$ vértices y sucesión de ex-grados $0, 1, 2, \dots, p$. Como $d_T^+(v_{p+1}) = p$, vemos que $T \setminus v_{p+1}$ es un torneo de p vértices y sucesión de ex-grados $0, 1, 2, \dots, p-1$. Por hipótesis de inducción $T \setminus v_{p+1}$ no contiene ciclos, por tanto, si T tiene algún ciclo, debe pasar por v_{p+1} , pero si v_{p+1} esta en un ciclo, su in-vecindad no puede ser vacía, pero si lo es, por lo tanto T no tiene ciclos, y la implicación ha sido probada.

□

Vemos entonces que

$$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2) \text{ y } (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1),$$

por lo que queda probado el Teorema 6.

□

Corolario 6a.

Sea T un torneo transitivo. Entonces para toda pareja $x, y \in V(T)$, $d_T^+(x) > d_T^+(y)$ si y sólo si $\overrightarrow{xy} \in F(T)$.

Demostración.

Probaremos este resultado por inducción sobre el número p de vértices. Para $p = 3$ vemos que el resultado se cumple.

Supongamos cierto el resultado para todo torneo transitivo de a los más p vértices y sea T un torneo transitivo de $p + 1$ vértices v_1, v_2, \dots, v_{p+1} . Por el Teorema 6 vemos que la sucesión de ex-grados de T es $(0, 1, 2, \dots, p)$. Por lo que para cada $1 \leq i \leq p + 1$, $d_T^+(v_i) = i - 1$.

Sea $T' = T \setminus v_{p+1}$. Como $d_T^+(v_{p+1}) = p$ tenemos que para todo $1 \leq i \leq p$, $d_{T'}^+(v_i) = d_T^+(v_i)$ y entonces la sucesión de ex-grados de T' es $(0, 1, \dots, p - 1)$, que por el Teorema 6 implica que es un torneo transitivo con p vértices.

Por hipótesis de inducción, para todo par $x, y \in V(T')$, $d_{T'}^+(x) > d_{T'}^+(y)$ si y sólo si $\overrightarrow{xy} \in F(T')$ con lo cual vemos que para todo par $x, y \in V(T) \setminus v_{p+1}$, $d_T^+(x) > d_T^+(y)$ si y sólo si $\overrightarrow{xy} \in F(T)$. Ahora solo

observemos que para todo $1 \leq i \leq p$, $d_T^+(v_{p+1}) > d_T^+(v_i)$ y $\overline{v_{p+1}v_i} \in F(T)$. De aquí se sigue el resultado.

□

Corolario 6b

Sean T_1 y T_2 dos torneos transitivos de orden p . Entonces T_1 y T_2 son isomorfos.

Demostración.

Sean T_1 y T_2 dos torneos transitivos donde $V(T_1) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$; $V(T_2) = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ y supongamos que $d_{T_1}^+(x_i) = d_{T_2}^+(y_i) = i - 1$ para cada $1 \leq i \leq p$.

Sea $f: V(T_1) \rightarrow V(T_2)$ la biyección definida como $f(x_i) = y_i$ para cada $1 \leq i \leq p$.

Por el Corolario 6a vemos que $\overline{x_i x_j} \in F(T_1)$ si y sólo si $i > j$ si y sólo si $\overline{y_i y_j} \in F(T_2)$. Como por definición de f , $f(x_i) = y_i$ y $f(x_j) = y_j$ se sigue entonces que $\overline{x_i x_j} \in F(T_1)$ si y sólo si $\overline{f(x_i) f(x_j)} \in F(T_2)$ por lo que T_1 y T_2 son isomorfos y queda probado el corolario.

□

Observamos que existen solo dos tipos de triángulos en un torneo, a saber, los transitivos y los cíclicos.

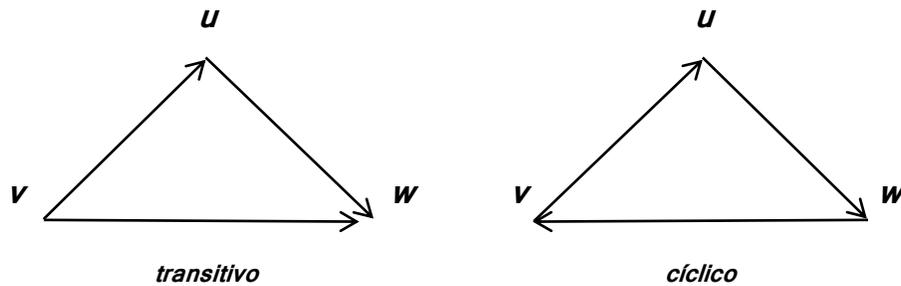


Figura 3.7

A la luz de los resultados anteriores, vemos que los torneos son transitivos si y sólo si todos sus triángulos son transitivos. Así, para los torneos no transitivos, tiene sentido “medir” su transitividad en términos de cuantos triángulos transitivos tiene. A continuación presentamos unos resultados que nos permiten “medir” esa transitividad.

Teorema 7. [Kendall y Babington [4]]

El número b de triángulos transitivos en un torneo T con una sucesión de ex-grados (s_1, s_2, \dots, s_p) es

$$b = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} s_i (s_i - 1).$$

Demostración.

Sea (s_1, s_2, \dots, s_p) la sucesión de ex-grados de un torneo T de p vértices.

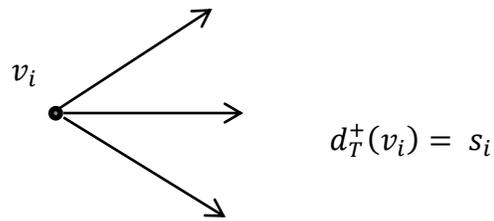


Figura 3.8

Dado un vértice v_i del torneo T , tenemos que por cada pareja de ex-vecinos de este vértice, se forma un triángulo transitivo con v_i como fuente. Por otro lado los triángulos transitivos tienen una única fuente, y todos los triángulos transitivos cuya fuente es v_i tiene como vértices a v_i y a un par de ex-vecinos de v_i .

Así, podemos relacionar de manera biunívoca a cada triángulo transitivo cuya fuente es v_i con cada pareja de ex-vecinos de v_i . De esta manera, el número de triángulos transitivos cuya fuente es v_i es exactamente el número de parejas de ex-vecinos de v_i , a saber,

$$\binom{s_i}{2} = \frac{1}{2}s_i(s_i - 1).$$

Como cada triángulo transitivo tiene una única fuente, el número total b de triángulos transitivos del torneo T se puede obtener sumando, por cada vértice, de cuántos torneos transitivos es fuente cada vértice, esto es

$$b = \sum_{i=1}^p \binom{s_i}{2} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2}s_i(s_i - 1).$$

□

En un torneo T con p vértices, el número total de triángulos es $\binom{p}{3}$ y ya que el triángulo puede ser o cíclico o transitivo, obtenemos la siguiente fórmula para el número de triángulos cíclicos.

Corolario 7a. El número c de triángulos cíclicos en un torneo satisface la ecuación

$$c = \frac{1}{6} p(p-1)(p-2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p s_i(s_i-1).$$

Demostración.

Un torneo T tiene $\binom{p}{3}$ triángulos posibles, esto es

$$\binom{p}{3} = \frac{p!}{3!(p-3)!} = \frac{1}{6} p(p-1)(p-2),$$

y ya que en un torneo solo hay triángulos cíclicos o transitivos, entonces, para saber el número de triángulos cíclicos, al número de triángulos posibles le restamos los triángulos transitivos.

Por el Teorema 7 sabemos que el número b de triángulos transitivos en un torneo T es $b = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} s_i(s_i-1)$, así tenemos que el número de triángulos cíclicos en un torneo T es:

$$c = \frac{1}{6} p(p-1)(p-2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p s_i(s_i-1).$$

□

El siguiente teorema nos dice cuál es el máximo número de triángulos cíclicos que pueden ocurrir en un torneo con un número dado de vértices.

Teorema 8 [Kendall y Babington [4]]

El máximo número de triángulos cíclicos en un torneo de p vértices es

$$c_{max}(p) = \begin{cases} \frac{p^3 - p}{24} & \text{si } p \text{ es impar;} \\ \frac{p^3 - 4p}{24} & \text{si } p \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración.

Sabemos por el Corolario 7a, que la cantidad de triángulos cíclicos en un torneo T es $\binom{p}{3} - \sum_{i=1}^p \binom{s_i}{2}$. Para saber el máximo número posible de triángulos cíclicos, entonces, estudiamos que tan pequeño puede ser $\sum_{i=1}^p \binom{s_i}{2}$, el número de triángulos transitivos.

Sea $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$ la sucesión de ex-grados de un torneo T con el mínimo número posible de triángulos transitivos.

Primero veremos que

Afirmación 1

$$s_1 \leq s_p \leq s_1 + 1.$$

Supongamos que existen $1 \leq i < j \leq p$ tal que $2 + s_i \leq s_j$. Entonces existe un $v_q \in V(T)$ tal que $\overrightarrow{v_q v_i} \in F(T)$ y $\overrightarrow{v_j v_q} \in F(T)$. Sea T' el torneo obtenido de T al cambiar las flechas $\overrightarrow{v_q v_i}$ y $\overrightarrow{v_j v_q}$ por $\overrightarrow{v_i v_q}$ y $\overrightarrow{v_q v_j}$.

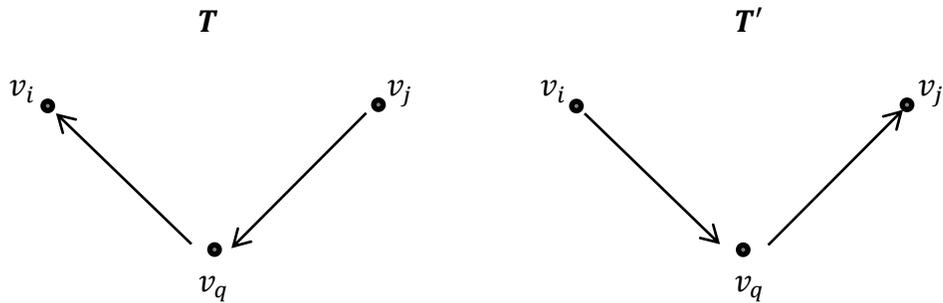


Figura 3.9

Observemos que T' tiene como sucesión de ex-grados a s'_1, s'_2, \dots, s'_p donde

$$s'_i = s_i + 1,$$

$$s'_j = s_j - 1,$$

y para $k \neq i, j$ $s'_k = s_k$.

Como s_1, s_2, \dots, s_p es una sucesión de ex-grados de un torneo con el mínimo número de triángulos transitivos, por el Teorema 7

$$\sum_{t=1}^p \binom{s_t}{2} \leq \sum_{t=1}^p \binom{s'_t}{2},$$

y sabemos que para $k \neq i, j$ $s'_k = s_k$. Así

$$\binom{s_i}{2} + \binom{s_j}{2} \leq \binom{s'_i}{2} + \binom{s'_j}{2}$$

entonces

$$\binom{s_i}{2} + \binom{s_j}{2} \leq \binom{s_i + 1}{2} + \binom{s_j - 1}{2}$$

lo cual equivale a

$$\frac{1}{2} s_i(s_i - 1) + \frac{1}{2} s_j(s_j - 1) \leq \frac{1}{2} (s_i + 1)s_i + \frac{1}{2} (s_j - 1)(s_j - 2)$$

de donde se sigue que

$$s_i(s_i - 1) + s_j(s_j - 1) \leq (s_i + 1)s_i + (s_j - 1)(s_j - 2).$$

Desarrollando la desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned} s_i^2 - s_i + s_j^2 - s_j &\leq s_i^2 + s_i + s_j^2 - 2s_j - s_j + 2 \\ -s_i - s_j &\leq s_i - 3s_j + 2 \end{aligned}$$

y así

$$2s_j \leq 2s_i + 2$$

entonces

$$s_j \leq s_i + 1$$

lo cual es una contradicción pues por hipótesis $2 + s_i \leq s_j$.

Por lo tanto, si s_1, s_2, \dots, s_p es la sucesión de ex-grados de un torneo con el mínimo número de triángulos transitivos, no puede ocurrir que para algún i, j $s_i \geq s_j + 2$. Entonces en particular $s_1 \leq s_p \leq s_1 + 1$ y así queda demostrada la Afirmación 1.

□

De la Afirmación 1 vemos que en la sucesión si s_1, s_2, \dots, s_p aparecen a lo más dos valores, cuya diferencia es a lo más 1. Dado que $\sum_{i=1}^p s_i = \frac{1}{2}p(p-1)$, el promedio de los ex-grados es $\frac{p-1}{2}$, y claramente, si algún valor está arriba del promedio, algún otro valor

está debajo del promedio. Observamos entonces que si p es impar, el promedio $\frac{p-1}{2}$ es entero y si algún ex-grado es mayor a $\frac{p-1}{2}$ habrá otro valor menor a $\frac{p-1}{2}$, pero entonces la diferencia entre ellos sería mayor que 1 lo cual no es posible.

Así, si p es impar $s_i = \frac{p-1}{2}$ para toda $1 \leq i \leq p$.

Entonces tenemos que la cantidad más pequeña de triángulos transitivos si p es impar es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \binom{s_i}{2} &= \sum_{i=1}^p \binom{\frac{p-1}{2}}{2} = p \binom{\frac{p-1}{2}}{2} \\ &= p \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-3}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{p(p-1)(p-3)}{8} \\ &= \frac{p^3 - 4p^2 + 3p}{8}. \end{aligned}$$

Por tanto, el máximo número de triángulos cíclicos para p impar es

$$\begin{aligned} c_{max}(p) &= \binom{p}{3} - \sum_{i=1}^p \binom{s_i}{2} = \binom{p}{3} - \frac{p^3 - 4p^2 + 3p}{8} \\ &= \left(\frac{p(p-1)(p-2)}{6}\right) - \left(\frac{p^3 - 4p^2 + 3p}{8}\right) \\ &= \left(\frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{6}\right) - \left(\frac{p^3 - 4p^2 + 3p}{8}\right) \\ &= \left(\frac{4p^3 - 12p^2 + 8p - 3p^3 + 12p^2 - 9p}{24}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{p^3 - p}{24}.$$

Si el valor de $\frac{p-1}{2}$ no es entero, vemos que para cada $1 \leq i \leq p$, $\frac{p-2}{2} \leq s_i \leq \frac{p}{2}$, y como $\sum_{i=1}^p s_i = \frac{1}{2}p(p-1)$, vemos que hay $\frac{p}{2}$ vértices de ex-grado $\frac{p}{2}$ y $\frac{p}{2}$ vértices de ex-grado $\frac{p-2}{2}$, por lo que la mínima cantidad de triángulos transitivos es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \binom{s_i}{2} &= \frac{p}{2} \binom{\frac{p}{2}}{2} + \frac{p}{2} \binom{\frac{p-2}{2}}{2} \\ &= \frac{p}{2} \left(\frac{\binom{p}{2} \binom{p-2}{2}}{2} \right) + \frac{p}{2} \left(\frac{\binom{p-2}{2} \binom{p-4}{2}}{2} \right) \\ &= \frac{p^3 - 2p^2}{16} + \frac{p^3 - 6p^2 + 8p}{16} \\ &= \frac{p^3 - 4p^2 + 4p}{8}. \end{aligned}$$

Así, el máximo número de triángulos cíclicos para p par es

$$\begin{aligned} c_{max}(p) &= \binom{p}{3} - \sum_{i=1}^p \binom{s_i}{2} = \binom{p}{3} - \frac{p^3 - 4p^2 + 4p}{8} \\ &= \left(\frac{p(p-1)(p-2)}{6} \right) - \left(\frac{p^3 - 4p^2 + 4p}{8} \right) \\ &= \left(\frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{6} \right) - \left(\frac{p^3 - 4p^2 + 4p}{8} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{4p^3 - 12p^2 + 8p - 3p^3 + 12p^2 - 12p}{24} \right) \\
&= \frac{p^3 - 4p}{24}.
\end{aligned}$$

Así queda probado el teorema.

□

Antes de terminar este capítulo, veremos un resultado el cual nos indica que, independientemente de que un torneo no sea transitivo, contiene una estructura que es transitiva y que involucra a todo el torneo.

Teorema 9

La condensación de un torneo es un torneo transitivo.

Demostración.

Sea T un torneo. Si T es fuerte o si T contiene sólo dos componentes fuertes, vemos que la condensación es un vértice o dos vértices unidos por una flecha siendo ambos casos, por vacuidad, torneos transitivos. Supongamos pues que T al menos tiene tres componentes fuertes y que las componentes fuertes A, B y C forman un triángulo cíclico en la condensación.

Observamos entonces que para cada $x \in V(A)$, $y \in V(B)$ y $z \in V(C)$, los vértices x, y, z inducen un triángulo cíclico en el torneo T . Así todo par de vértices de $V(A) \cup V(B) \cup V(C)$ son mutuamente alcanzables contradiciendo que A, B y C son componentes fuertes.

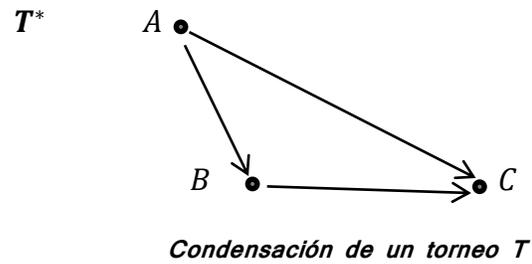


Figura 3.10

□

Capítulo 4

Torneos Fuertes

Por el Teorema 9, vemos que la condensación de cualquier torneo es un torneo transitivo. En ese sentido, todos los torneos pueden ser vistos como un conjunto de torneos fuertes (sus componentes fuertes) “insertadas” en una estructura de torneo transitivo. De ahí que es importante el estudio de los torneos fuertes. En éste capítulo veremos diversas propiedades que cumplen dichos torneos.

Teorema 10 [Harary y Moser [3]]

Si un torneo T es fuerte, entonces contiene ciclos de longitud k , para cada $k = 3, 4, 5, \dots, p$.

Demostración.

Sea T un torneo fuerte con p vértices, esto es que cada par de vértices es mutuamente alcanzable. Observamos entonces que T no es transitivo y por lo tanto (Teorema 6) contiene un triángulo cíclico. De esta manera para $k=3$ el teorema se cumple,

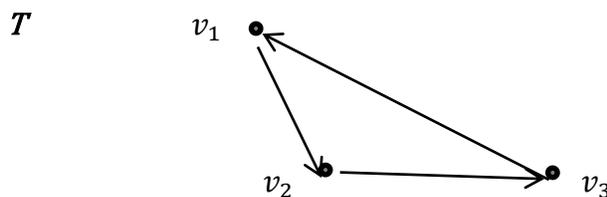


Figura 4.1

Sea $Z = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ un ciclo en T de longitud $3 \leq k < p$.

Si observamos los vértices que no pertenecen a Z , vemos que existen dos posibilidades.

Caso 1 Existe $u \notin V(Z)$, tal que para algún par de vértices $v, w \in V(Z)$, $\overrightarrow{uv} \in F(T)$ y $\overrightarrow{wu} \in F(T)$.

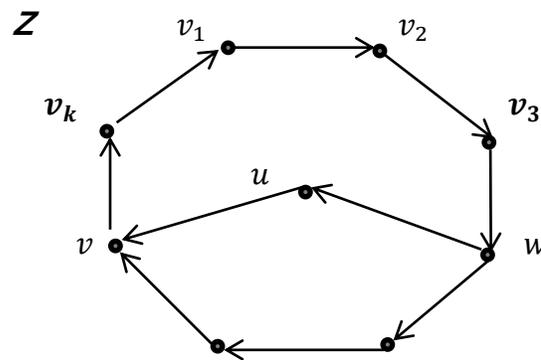


Figura 4.2

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\overrightarrow{v_1 u} \in F(T)$ y que v_i es el vértice de índice menor tal que $\overrightarrow{u v_i} \in F(T)$.

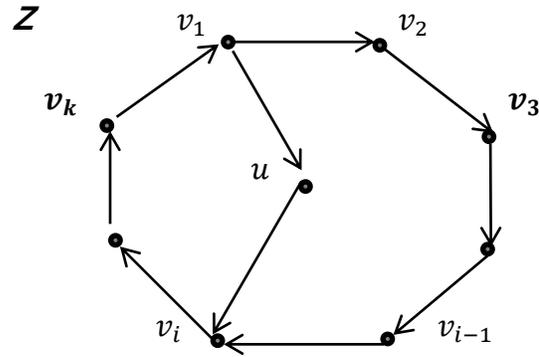


Figura 4.3

Por como escogimos v_i y como T es un torneo, entonces tenemos que necesariamente $\overrightarrow{v_{i-1}u}$.

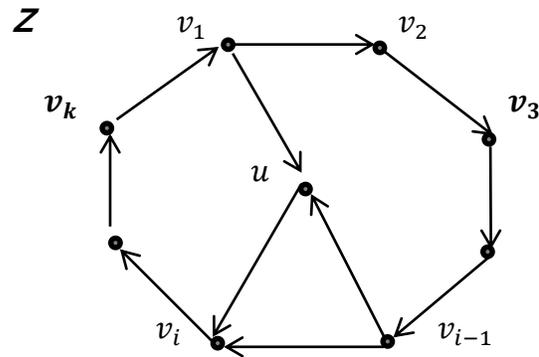


Figura 4.4

Y así, observamos que hay un ciclo $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{i-1}, u, v_i, \dots, v_k, v_1$ de tamaño $k + 1$.

Caso 2 No existe un vértice u como el descrito en el caso anterior.

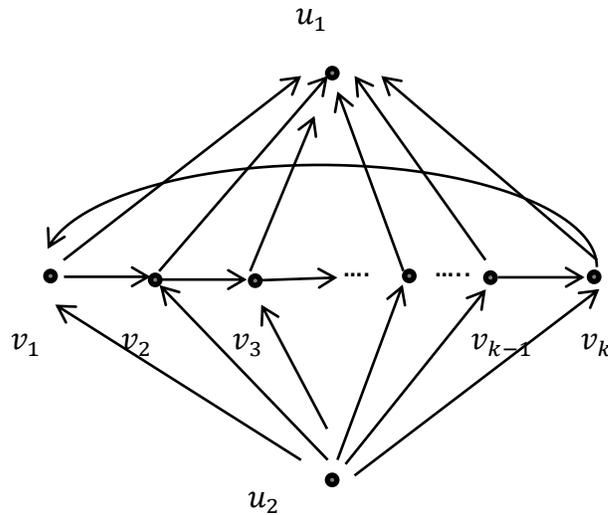


Figura 4.5

Entonces existe un conjunto U_1 de ex-vecinos de los vértices en Z y un conjunto U_2 de in-vecinos de los vértices en Z .

Ya que por hipótesis tenemos que T es fuerte, entonces existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tal que $\overrightarrow{u_1 u_2} \in F(T)$ y así vemos que existe el ciclo $u_2, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, u_1, u_2$ de longitud $k + 1$.

□

Por el Teorema 6, vemos que un criterio para que un torneo sea transitivo, es que tenga un único camino completo. El primer corolario del Teorema 10 nos brinda un criterio análogo para el caso de los torneos fuertes.

Corolario 10a. Un torneo es fuerte si y sólo si tiene un ciclo completo.

Demostración.

Por el Teorema 10, tenemos que un torneo fuerte de p vértices tiene un ciclo de longitud p , lo que es un ciclo completo.

Y por otro lado, si tenemos que un torneo tiene un ciclo completo, claramente es un torneo fuerte.

□

Corolario 10b Si T es un torneo fuerte, con p vértices, entonces T tiene al menos $p-2$ triángulos cíclicos.

Demostración.

Probaremos este corolario por inducción sobre el número de vértices. Si T es un torneo fuerte con 3 vértices, observamos que cumple tener $p - 2 = 1$ ciclo.

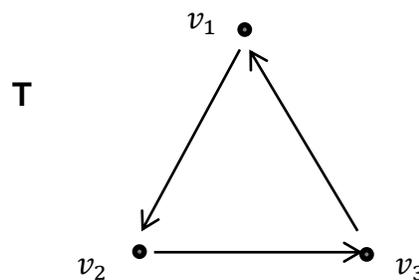


Figura 4.6

Supongamos cierto que para todo torneo fuerte con p vértices se cumple que tiene al menos $p - 2$ triángulos cíclicos.

Sea T un torneo fuerte con $p + 1$ vértices. Sabemos por el Teorema 10 que T tiene al menos un ciclo dirigido de p vértices.

Sea $C = (v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ un ciclo de p vértices en T .

Tenemos que C es un ciclo contenido en el torneo $T \setminus v_{p+1}$. Observamos que el torneo $T \setminus v_{p+1}$ es un torneo fuerte con p vértices, entonces, por hipótesis, $T \setminus v_{p+1}$ tiene al menos $p - 2$ triángulos cíclicos.

Como T es fuerte, tenemos que v_{p+1} tiene ex-grado e in-grado mayor que cero.

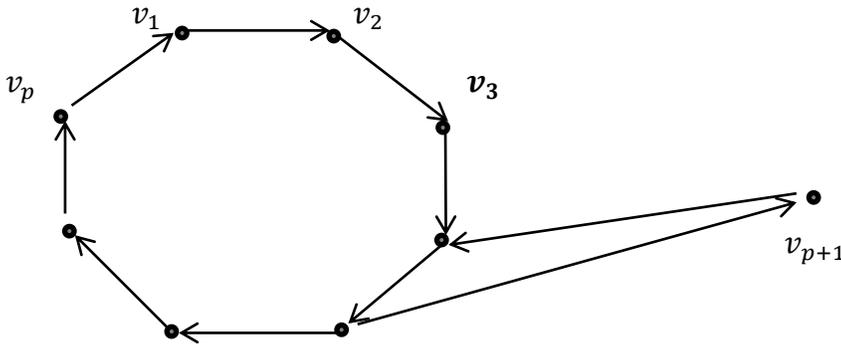


Figura 4.7

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\overrightarrow{v_{p+1}v_1} \in F(T)$.

Sea $j = \min\{j \mid \overrightarrow{v_j v_{p+1}} \in F(T)\}$. Entonces, por ser torneo, sabemos que $\overrightarrow{v_{p+1}v_{j-1}} \in F(T)$ y así, observamos que se forma el triángulo dirigido v_{p+1}, v_{j-1}, v_j .

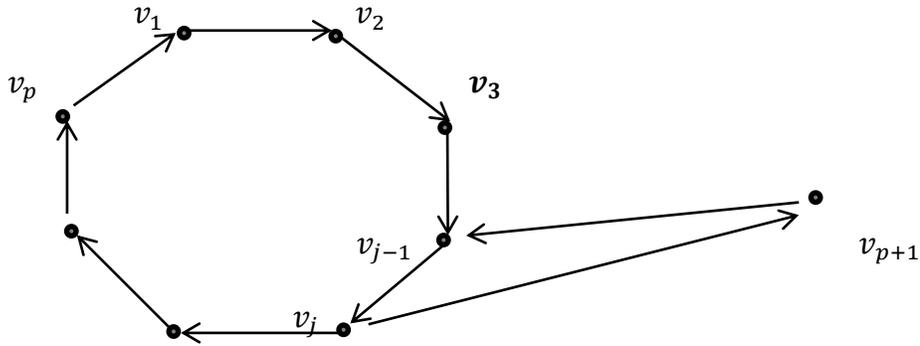


Figura 4.8

Por lo tanto, tenemos que en el torneo T con $p+1$ vértices contiene al menos un triángulo dirigido más que $T \setminus v_{p+1}$, es decir, tiene al menos, $p+1-2$ triángulos dirigidos, probándose así el Corolario 10b.

□

En el corolario anterior se probó que un torneo fuerte de p vértices no puede tener menos de $p-2$ triángulos cíclicos. Ahora mostraremos un torneo fuerte de p vértices con exactamente $p-2$ triángulos cíclicos.

Lema 4. Existe un torneo con p vértices y con $p-2$ triángulos cíclicos.

Demostración.

Sea T un torneo transitivo con p vértices donde $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ y $\overrightarrow{v_i v_j} \in F(T)$ si y sólo si $j < i$.

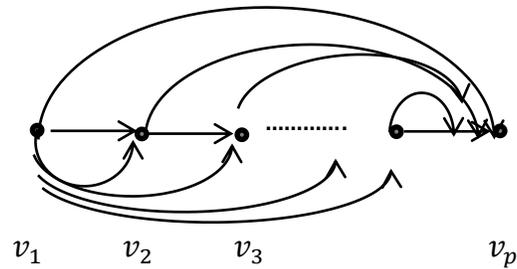
T 

Figura 4.9

Sea T' el torneo que obtenemos de T al cambiar la dirección de la flecha de la fuente v_1 al pozo v_p .

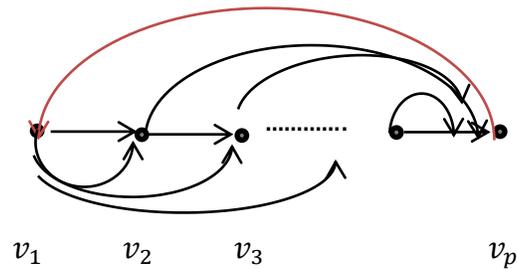
 T' 

Figura 4.10

Observamos que de ésta manera T' es fuerte y que tanto $T' \setminus v_1$ como $T' \setminus v_p$ carecen de triángulos dirigidos. Entonces cualquier triángulo dirigido en T' tiene a v_1 y v_p como vértices. Finalmente observamos que para cada vértice $v \in \{v_2, v_3, \dots, v_{p-1}\}$, los vértices v_1, v, v_p inducen un triángulo cíclico, entonces en T' hay exactamente $p - 2$ triángulos cíclicos. \square

Los resultados anteriores nos dicen cual es el mínimo número de triángulos dirigidos en un torneo fuerte. El siguiente teorema nos da una condición suficiente, en términos del número de triángulos dirigidos en un torneo de p vértices, para que sea fuerte.

Teorema 11 [Beineke L.W. [1]]

Si T es un torneo con $p+1$ vértices en el cual hay más triángulos dirigidos de los que pueden ocurrir en un torneo con p vértices, entonces T es fuerte.

Demostración.

Sea T un torneo con $p+1$ vértices tal que contiene $Q > C_{max}(p)$, triángulos dirigidos y supongamos que T no es fuerte. Sea S la fuente de la condensación de T y supongamos que S tiene $p+1-q$ vértices. Vemos que los triángulos cíclicos en T están contenidos en S ó en $T \setminus S$, por lo que $C_{max}(p) < Q \leq C_{max}(p+1-q) + C_{max}(q)$. Nótese que como $C_{max}(1) = 0$, $p-1 \geq q \geq 2$.

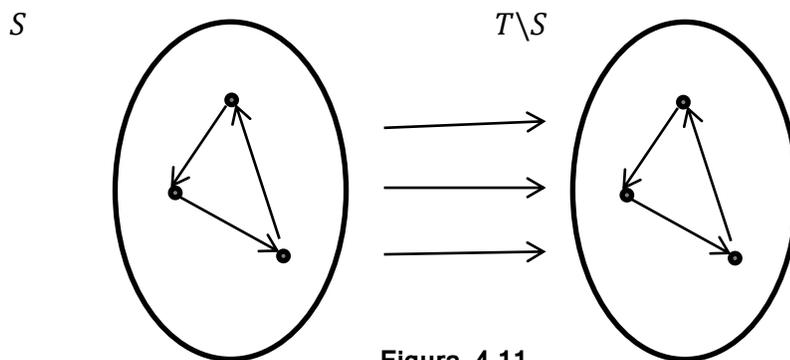


Figura 4.11

Del Teorema 8 vemos que

$$C_{\text{máx}}(p) \geq \frac{p^3 - 4p}{24};$$

$$C_{\text{máx}}(p + 1 - q) \leq \frac{(p + 1 - q)^3 - (p + 1 - q)}{24};$$

y

$$C_{\text{máx}}(q) \leq \frac{q^3 - q}{24}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{p^3 - 4p}{24} &< \frac{(p + 1 - q)^3 - (p + 1 - q)}{24} + \frac{q^3 - q}{24} \\ &= \frac{(p - q)^3 + 3(p - q)^2 + 3(p - q) + 1 + q^3 - (p + 1)}{24}. \end{aligned}$$

Como

$$p^3 = (p + q - q)^3 = (p - q)^3 + 3q(p - q)^2 + 3q^2(p - q) + q^3$$

se sigue que

$$\frac{p^3 - 4p}{24} = \frac{(p - q)^3 + 3q(p - q)^2 + 3q^2(p - q) + q^3 - 4p}{24}$$

$$< \frac{(p-q)^3 + 3(p-q)^2 + 3(p-q) + 1 + q^3 - (p+1)}{24}$$

y por lo tanto, restando $\frac{(p-q)^3 + q^3}{24}$ de ambos lados de la desigualdad, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{3q(p-q)^2 + 3q^2(p-q) - 4p}{24} \\ & < \frac{3(p-q)^2 + 3(p-q) + 1 - (p+1)}{24}. \end{aligned}$$

Y así, restando $\frac{3(p-q)^2 + 3(p-q)}{24}$ de ambos lados y sumando $\frac{4p}{24}$ de ambos lados, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{3q(p-q)^2 - 3(p-q)^2 + 3q^2(p-q) - 3(p-q) - 4p + 4p}{24} \\ & < \frac{4p + 1 - (p+1)}{24} \end{aligned}$$

$$\frac{3(p-q)^2(q-1) + 3(p-q)(q^2-1)}{24} < \frac{4p+1-(p+1)}{24} = \frac{3p}{24} \clubsuit$$

Como $(q^2 - 1) = (q - 1)(q + 1)$ vemos que

$$\begin{aligned} & 3(p-q)^2(q-1) + 3(p-q)(q^2-1) \\ & = 3(p-q)(p-q)(q-1) + 3(p-q)(q-1)(q+1) \\ & = 3(p-q)(q-1)[(p-q) + (q+1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3(p - q)(q - 1)(p - q + q + 1) \\
 &= 3(p - q)(q - 1)(p + 1);
 \end{aligned}$$

y como $p - 1 \geq q \geq 2$

$$3(p - q)(q - 1)(p + 1) \geq 3(p + 1).$$

Así

$$\frac{3(p - q)^2(q - 1) + 3(p - q)(q^2 - 1)}{24} \geq \frac{3(p + 1)}{24}$$

lo cual por \clubsuit implica que

$$\frac{3(p + 1)}{24} < \frac{3p}{24}$$

lo que es una contradicción y queda demostrado el Teorema 11.

□

Corolario 11a Si un torneo tiene $p \geq 3$ vértices y el número máximo $C_{m\acute{a}x}(p)$ de triángulos dirigidos, entonces T es fuerte.

Demostración.

Por el Teorema 8 vemos que

$$C_{m\acute{a}x}(p) \geq \frac{p^3 - 4p}{24}$$

y

$$\begin{aligned}
C_{\max}(p-1) &\leq \frac{(p-1)^3 - (p-1)}{24} \\
&= \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{24} = \frac{p^3 - 4p}{24} + \frac{6p - 3p^2}{24}
\end{aligned}$$

y como $p \geq 3$, entonces

$$\frac{6p - 3p^2}{24} < 0$$

por lo que

$$C_{\max}(p-1) < \frac{p^3 - 4p}{24}$$

de donde se sigue que

$$C_{\max}(p) > C_{\max}(p-1).$$

Por lo tanto, por el Teorema 11, el Corolario 11a se cumple.

□

Los siguientes teoremas y sus corolarios nos muestran ciertas relaciones existentes entre los ex-grados de los vértices y los componentes fuertes de los torneos.

Teorema 12 [*Harary y Moser* [3]]

Sean v_i y v_j vértices en diferentes componentes fuertes de un torneo T , entonces $\overrightarrow{v_i v_j} \in F(T)$ si y sólo si $s_i > s_j$.

Demostración.

Supongamos que $\overrightarrow{v_i v_j} \in F(T)$. Como v_i y v_j están en componentes fuertes diferentes de T , no existe un ciclo que contenga a la flecha $\overrightarrow{v_j v_i}$. En particular, no existen triángulos dirigidos que contengan a la flecha $\overrightarrow{v_j v_i}$.

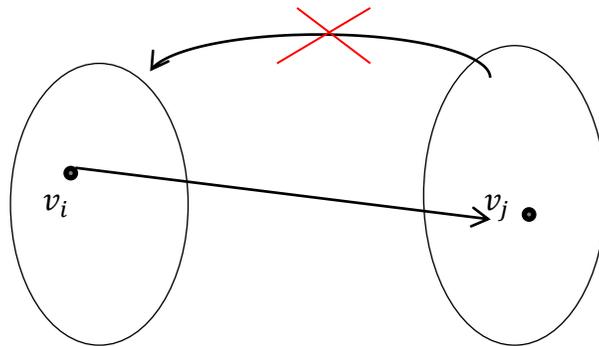


Figura 4.12

Por lo tanto, para cada $v_r \in N^+(v_j)$, $\overrightarrow{v_r v_i} \notin F(T)$ y por ser torneo, entonces $\overrightarrow{v_i v_r} \in F(T)$ por lo que $N^+(v_j) \subseteq N^+(v_i)$.

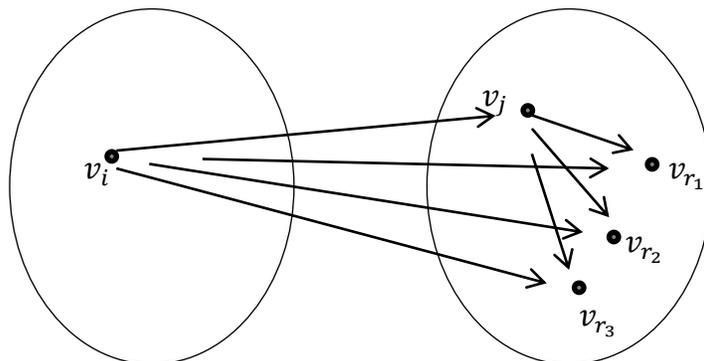


Figura 4.13

Y ya que sabemos que $\overline{v_i v_j} \in F(T)$, entonces $v_j \in N^+(v_i)$, así, $s_i = |N^+(v_i)| > |N^+(v_j)| = s_j$. Por lo tanto $s_i > s_j$.

Ahora sea v_i y v_j vértices en diferentes componentes fuertes de un torneo T con $s_i > s_j$.

Supongamos que $\overline{v_j v_i} \in F(T)$. Como $s_i > s_j$ entonces $|N^+(v_i)| > |N^+(v_j)|$ y como $v_j \notin N^+(v_i)$, existe $v_k \neq v_j$ tal que $v_k \in N^+(v_i)$ y $v_k \notin N^+(v_j)$. Como T es torneo $v_j \in N^+(v_k)$ y así $v_j v_i v_k$ forman un ciclo lo cual es una contradicción pues por hipótesis tenemos que v_i y v_j están en diferentes componentes fuertes y el resultado se sigue

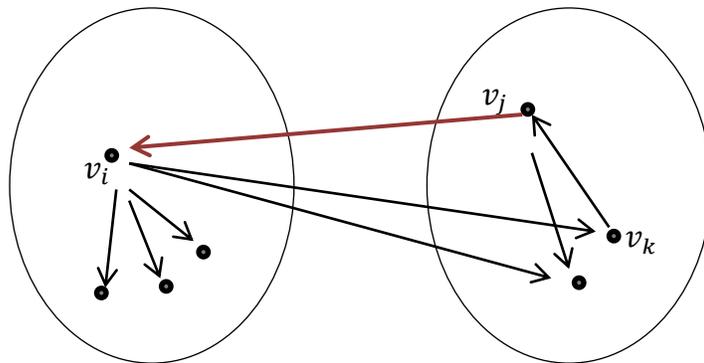


Figura 4.14

□

Corolario 12a Cualesquiera dos vértices v_i, v_j de un torneo T tales que $s_i = s_j$, están en la misma componente fuerte.

Demostración.

Por el Teorema 12, sabemos que si dos vértices v_i y v_j están en diferentes componentes fuertes, entonces $s_i \neq s_j$, de donde se sigue el resultado.

□

Corolario 12b Sea T un torneo con sucesión de ex-grados $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$. Si en una componente fuerte S de T tenemos que $v_i, v_j \in V(S)$, con $i < j$, entonces, para toda $i < k < j$, $v_k \in V(S)$.

Demostración.

Sea S una componente fuerte de T y supongamos que $v_i, v_j \in V(S)$, con $i < j$ y supongamos que existe $i < k < j$ tal que $v_k \notin V(S)$.

Por el Corolario 12a, $s_i < s_k < s_j$ y por el Teorema 12, $\overrightarrow{v_j v_k}, \overleftarrow{v_k v_i} \in F(T)$ lo cual no es posible pues implicaría que entre S y la componente fuerte donde está v_k hay flechas en ambos sentidos.

□

El siguiente teorema, nos exhibe una condición suficiente para que un par de vértices con distintos ex-grados estén en una misma componente fuerte.

Teorema 13 [Harary y Moser [3]]

Sea un torneo T con la sucesión de ex-grados $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$. Si $0 \leq s_n - s_m \leq \frac{1}{2}(n - m + 1)$, entonces v_m y v_n están en la misma componente fuerte.

Demostración.

Sean S_1, S_2, \dots, S_q las componentes fuertes de T , donde para cada par S_i y S_j tenemos que $i > j$ si y sólo si $\overrightarrow{S_i S_j}$ es flecha de la condensación de T .

Ahora supongamos que v_m y v_n , con $n > m$, están en diferentes componentes fuertes.

Sean $S_i = \{v_{n+s}, v_{n+s-1}, \dots, v_n, \dots, v_{n-r}\}$ la componente fuerte donde está v_m y $S_j = \{v_{m+q}, v_{m+q-1}, \dots, v_m, \dots, v_{m-l}\}$ la componente fuerte donde está v_n . Por el Teorema 12, vemos que $\overrightarrow{v_n v_m} \in F(D)$ y entonces $i > j$.

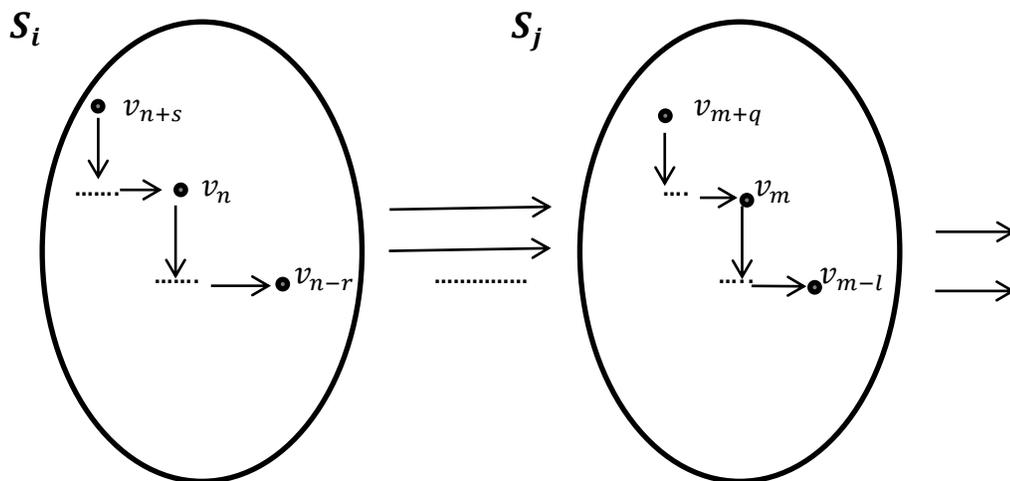


Figura 4.15

Observemos que para toda $z \in V(S_l)$, si $j > l$ entonces z es ex-vecino tanto de v_m como de v_n ; si $l > i$, z es in-vecino de ambos vértices; y si $i > l > j$ entonces, z es ex-vecino de v_n e in-vecino de v_m . Por otro lado todo vértice de S_j es ex-vecino de v_n .

Así,

$$s_n - s_m = d_T^+(v_n) - d_T^+(v_m) = d_{S_i}^+(v_n) + (n - r - m + l) - d_{S_j}^+(v_m), \quad \star$$

donde $n - r - m + l$ es el número de vértices entre S_i y S_j más los vértices de S_j .

Por el Teorema 5, tenemos que,

$$d_{S_j}^+(v_n) \geq \frac{1}{2}(n - (n - r) + 1) = \frac{1}{2}(n - n + r + 1) = \frac{r+1}{2}$$

y

$$\begin{aligned} d_{S_i}^+(v_m) &\leq \frac{1}{2}(m + q - (m - l) + 1 + m - (m - l + 1)) \\ &\leq \frac{1}{2}(m + q - m + l + 1 + m - m + l - 1) \\ &\leq \frac{1}{2}(q + 2l). \end{aligned}$$

De ambas desigualdades y \star tenemos que,

$$\begin{aligned} s_n - s_m &\geq \frac{r+1}{2} + n - r - m + l - \frac{q+2l}{2} \\ &= n - m - \frac{r+q-1}{2}. \end{aligned}$$

Como $n - r > m + q$ entonces, $n - m > r + q$ y así $n - m - \frac{r+q}{2} > \frac{n-m}{2}$ y por tanto

$$n - m - \frac{r + q - 1}{2} > \frac{n - m + 1}{2}.$$

Por lo tanto

$$s_n - s_m > \frac{1}{2}(n - m + 1).$$

Así, si $s_n - s_m \leq \frac{1}{2}(n - m + 1)$, entonces v_m y v_n están en la misma componente fuerte y así queda demostrado el teorema.

□

Corolario 13a Si la diferencia entre cualquier par de ex-grados en un torneo T con p vértices, es menor que $\frac{1}{2}p$, entonces T es fuerte.

Demostración

Sea T un torneo con p vértices y una sucesión de ex-grados $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$,

Si $s_p - s_1 \leq \frac{1}{2}p$, por el Teorema 13, v_1 y v_p están en el mismo componente fuerte. Del Corolario 12b v_1, v_2, \dots, v_p están en la misma componente fuerte, por lo tanto, T es fuerte.

□

Corolario 13b Si para cada vértice en un torneo T con p vértices, se cumple que

$$d^+(v) \geq \frac{1}{4}(p - 1) \quad y \quad d^-(v) \geq \frac{1}{4}(p - 1),$$

entonces T es fuerte.

Demostración

Tenemos que

$$\begin{aligned}d^-(v_p) &= p - 1 - d^+(v_p) \\ &= p - 1 - s_p.\end{aligned}$$

Como $d^-(v_p) \geq \frac{1}{4}(p - 1)$ vemos que

$$p - 1 - s_p \geq \frac{1}{4}(p - 1)$$

entonces

$$s_p \leq \frac{3}{4}(p - 1).$$

Por otro lado

$$s_1 \geq \frac{1}{4}(p - 1)$$

entonces

$$s_p - s_1 \leq \frac{3}{4}(p - 1) - \frac{1}{4}(p - 1) = \frac{p - 1}{2} < \frac{p}{2}$$

Y así, por el Corolario 13a, T es fuerte. □

Las fórmulas del Teorema 1 nos proporcionan una condición suficiente y necesaria para que una sucesión de enteros sea la sucesión de ex-grados de un torneo con p vértices. El siguiente teorema nos brinda el criterio correspondiente para un torneo fuerte.

Teorema 14 [Harary y Moser [3]]

Sea T un torneo con una sucesión de ex-grados $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p$.

Entonces T es fuerte si y sólo si

$$\sum_{i=1}^p s_i = \frac{1}{2} p(p-1) \quad (I)$$

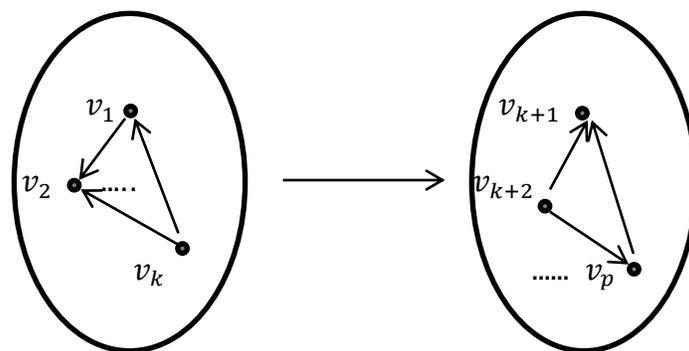
y para todos los posibles enteros $k < p$:

$$\sum_{i=1}^k s_i > \frac{1}{2} k(k-1). \quad (II)$$

Demostración.

Sea T un torneo fuerte. Ya que T es un torneo, por el Teorema 1 sabemos que la ecuación (I) se satisface.

Para la segunda ecuación, notamos que para cualquier entero $k < p$, el subtorneo generado por $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ contiene exactamente $\frac{1}{2}k(k-1)$ flechas, pero sabemos que T es fuerte, entonces debe existir al menos una flecha que va de un vértice de $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ a otro vértice del conjunto $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_p\}$,



$$\frac{1}{2}k(k-1) \text{ flechas}$$

Figura 4.16

de esta manera en el torneo T , para todo $k < p$ se cumple $\sum_{i=1}^k s_i > \frac{1}{2} k(k - 1)$.

Ahora sea T un torneo cuya sucesión de grados satisfice (I) y (II).

Supongamos que T no es fuerte, entonces T contiene una componente fuerte $S \subseteq V(T)$ que representa el pozo de la condensación T^* . Del Teorema 12 vemos que para cada $v \in S$ y para cada $w \in V(T) \setminus S$, $d^+(v) \leq d^+(w)$. Esto es, los vértices de S son los vértices con menor ex-grado de todos los vértices en T .

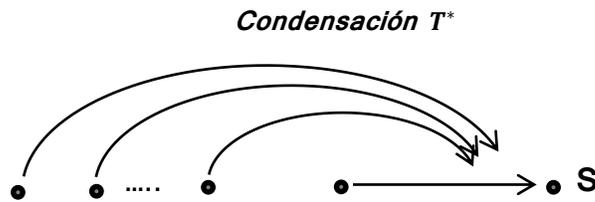
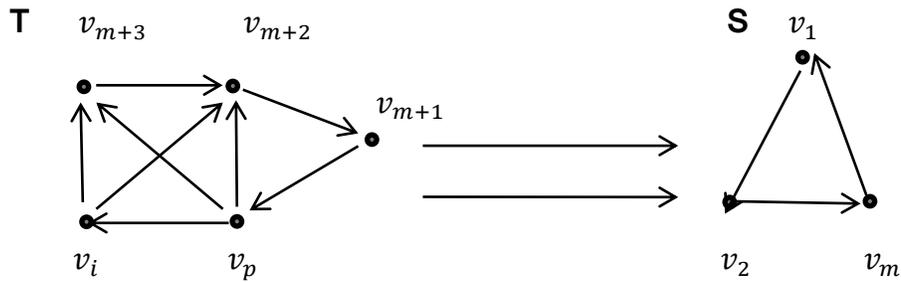


Figura 4.17

Sea $m < p$ el número de vértices en S y entonces $\sum_{i=1}^m s_i = \frac{1}{2} m(m - 1)$ ya que no hay una flecha que vaya de algún vértice en S hacia un vértice en T que no esta en S , así llegamos a una *contradicción* ya que por hipótesis tenemos que si $m < p$, entonces $\sum_{i=1}^m s_i > \frac{1}{2} m(m - 1)$. Así concluimos la demostración del teorema.

□

Capítulo 5

Torneos Transitivos Inevitables

Dado un torneo T con p vértices, podemos preguntarnos cuáles son los torneos que tienen como subtorneo el torneo T . ¿Habrá algún torneo que siempre aparezca como subtorneo de un torneo de p vértices? Esto es, ¿habrá subtorneos inevitables en los torneos de p vértices?

El siguiente teorema nos responde esta pregunta de manera afirmativa.

Teorema 15 [Erdős y Moser [2]]

Sea $k \geq 3$. Todo torneo T de orden 2^{k-1} contiene un torneo transitivo de orden k como subtorneo.

Demostración.

Probaremos este resultado por inducción sobre k .

Primero demostraremos que todo torneo de $2^2=4$ vértices contiene un torneo transitivo de orden 3.

Sea T un torneo de 4 vértices y sea $x \in V(T)$. Podemos ver que $d^+(x) \geq 2$ ó $d^-(x) \leq 2$.

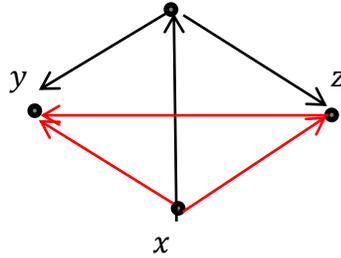


Figura 5.1

Supongamos que $d_T^+(x) \geq 2$ y que $y, z \in N^+(x)$. Entonces los vértices x, y, z inducen un torneo transitivo de orden 3. El caso en que $d_T^-(x) \geq 2$ es análogo. Así el primer paso de la inducción ha sido comprobado.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo número entero m con $3 \leq m \leq k$.

Sea T un torneo con $2^{(k+1)-1}$ vértices. Demostraremos que T contiene un torneo transitivo de orden $k+1$ como subtorneo.

Sea $x \in V(T)$. Sabemos que $d_T^+(x) + d_T^-(x) = 2^{(k+1)-1} - 1$, entonces $d_T^+(x) \geq 2^{k-1}$ ó $d_T^-(x) \geq 2^{k-1}$.

Supongamos que $d_T^+(x) \geq 2^{k-1}$. Entonces $T[N^+(x)]$ es un torneo de al menos 2^{k-1} vértices que por hipótesis de inducción contiene un torneo transitivo T' de orden k .

Entonces $T[x \cup V(T')]$ es un torneo transitivo de orden $k+1$.

Podemos observar que el caso $d^-(x) \geq 2^{k-1}$ es análogo.

□

Observemos que a cada torneo T le podemos asignar el número $f(T)$ definido como el mayor orden de un torneo transitivo que aparezca como subtorneo en T . De ésta manera, podemos decir que para cada entero $p \geq 3$,

$$v(p) = \min \{f(T) : T \text{ es un torneo de orden } p\}.$$

Es decir, $v(p)$ es el orden del torneo transitivo más grande que se puede encontrar en cualquier torneo de p vértices, o dicho en otras palabras, en cualquier torneo de p vértices existe un torneo transitivo de orden $v(p)$.

A la luz del teorema anterior vemos que si $p \geq 2^{k-1}$, entonces $v(p) \geq k$, pero ¿qué tan acertado es este número?

Hasta el momento de escribir esta tesis, lo que yo sé que se conoce del comportamiento de la función v es lo siguiente [ver 6, 7, 8, 9]:

Si $4 \leq n \leq 7$	entonces	$v(n) = 3.$
Si $8 \leq n \leq 13$	entonces	$v(n) = 4.$
Si $14 \leq n \leq 27$	entonces	$v(n) = 5.$
Si $28 \leq n$	entonces	$v(n) \geq 6.$
Si $55 \leq n$	entonces	$v(n) \geq 7.$

A continuación daremos un esbozo de las pruebas de que

Lema 5

- i)* Para $4 \leq n \leq 7$ $v(n) = 3.$
- ii)* Para $8 \leq n \leq 13$ $v(n) = 4.$

Demostración

- i)* Del Teorema 15 sabemos que todo torneo de 4 vértices contiene un torneo transitivo de orden 3. De ahí vemos que todo torneo de al menos 4 vértices contiene un torneo transitivo de orden 3. Esto es, para $n \geq 4$, $v(n) \geq 3$.

Ahora veremos que existe un torneo de orden 7 sin torneos transitivos de orden 4 con lo cual se probará que $v(7) < 4$.

Sea ST_7 el torneo donde $V(ST_7) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ y $\overrightarrow{ab} \in F(ST_7)$ si y sólo si $b - a \equiv 1, 2 \text{ ó } 4 \pmod{7}$.

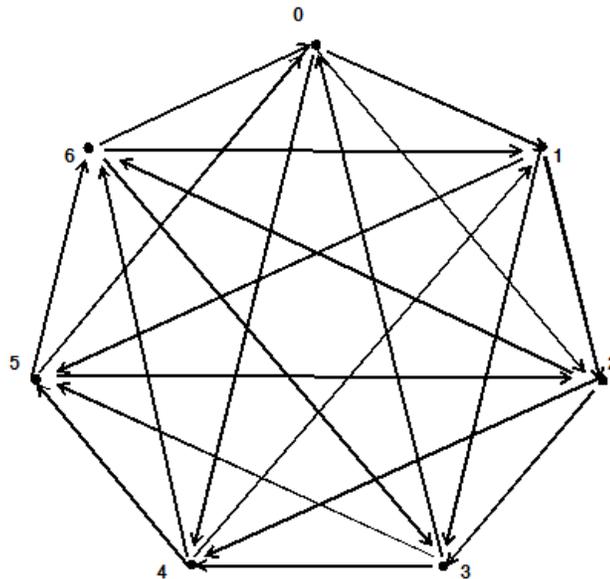


Figura 5.2

Supongamos que en ST_7 existe un torneo transitivo de orden 4 y supongamos que 0 es su fuente. Como $N^+(0) = \{1,2,4\}$ el torneo transitivo tendría como vértices al $\{0,1,2,4\}$ pero los vértices 1, 2, 4

inducen un triángulo cíclico contradiciendo que es un torneo transitivo.

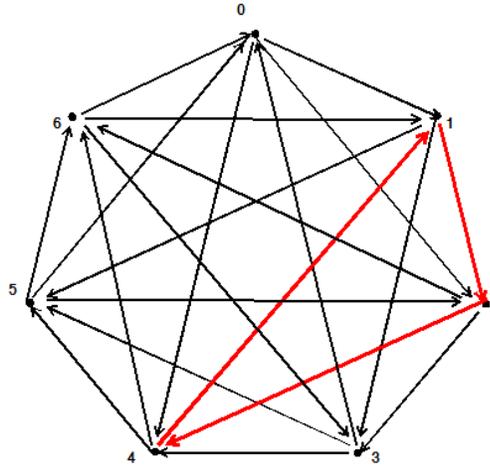


Figura 5.3

Se puede verificar de igual manera, que ningún otro vértice puede ser la fuente de un torneo transitivo de orden 4, así ST_7 no tiene torneos transitivos de 4 vértices. Así $v(7) < 4$ y como $v(7) \geq 3$ concluimos que $v(7) = 3$.

Nótese que al borrar cualquier conjunto de $r \geq 1$ vértices de ST_7 obtenemos un torneo de orden $7-r$ sin torneos transitivos de orden 4 y de ahí que si $n \leq 7$ entonces $v(n) < 4$, y por tanto para $4 \leq n \leq 7$, $v(n) = 3$.

- ii)* Del Teorema 15 sabemos que todo torneo de 8 vértices contiene un torneo transitivo de orden 4. De ahí vemos que todo torneo de al menos 8 vértices contiene un torneo transitivo de orden 4. Esto es, para $n \geq 8$, $v(n) \geq 4$.

Ahora veremos que existe un torneo de orden 13 sin torneos transitivos de orden 5 con lo cual se probará que $v(13) < 5$.

Sea ST_{13} el torneo donde $V(ST_{13}) = \{0,1,2,3,\dots,12\}$ y $\overrightarrow{ab} \in F(ST_{13})$ si y sólo si $b - a \equiv 1,2,3,5,6 \text{ ó } 9 \pmod{13}$.

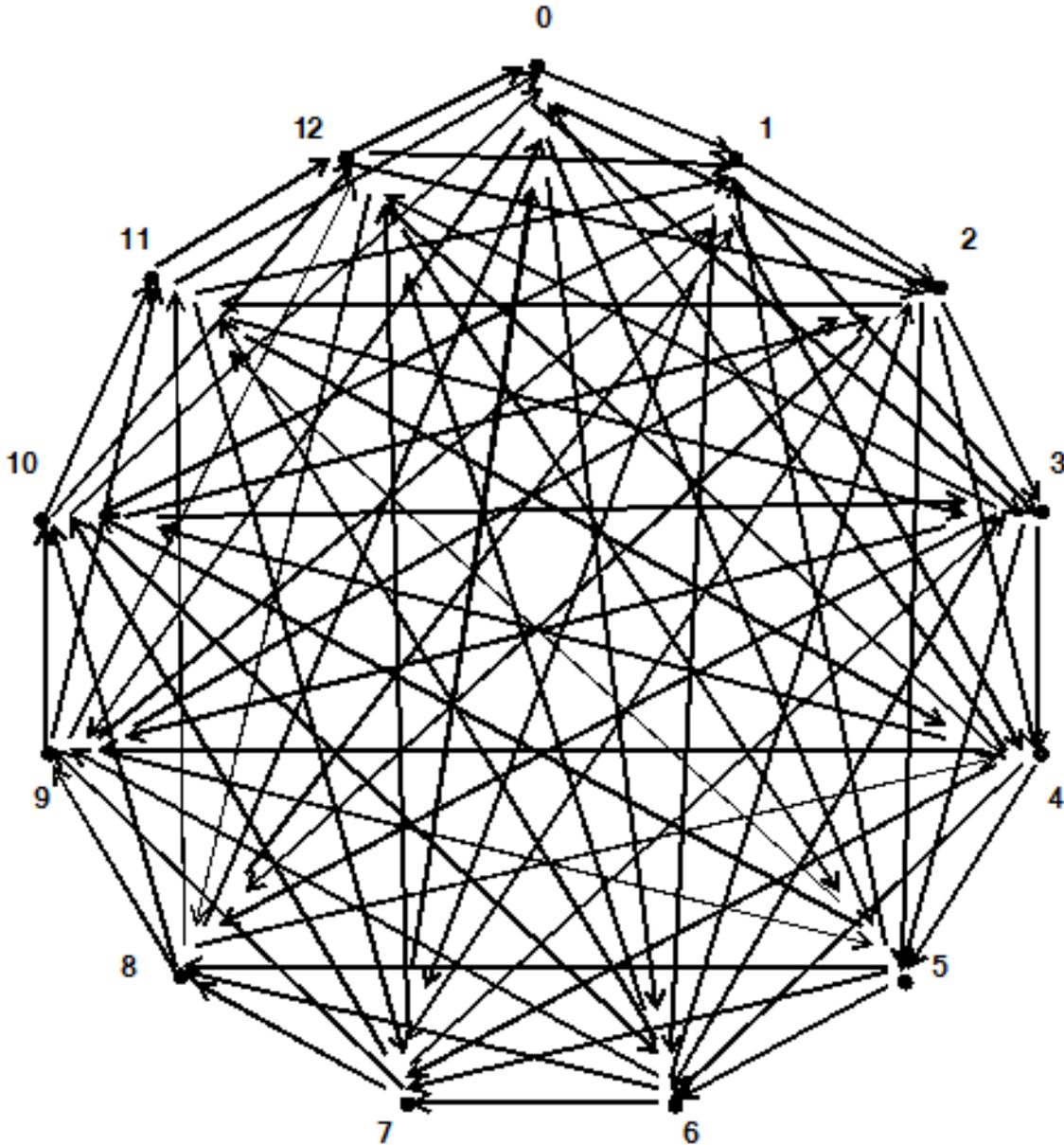


Figura 5.4

Supongamos que en ST_{13} existe un torneo transitivo de orden 5 y supongamos que 0 es su fuente. Como $N^+(0) = \{1,2,3,5,6,9\}$ en el torneo inducido por 1,2,3,5,6,9 debe contener un torneo transitivo de orden 4.

Sólo el 1, 3, y el 9 son posibles fuentes de un torneo transitivo de orden cuatro pero como podemos ver no son fuentes de ningún torneo de orden 4.

De manera análoga se puede verificar que ningún otro vértice puede ser la fuente de un torneo transitivo de orden 5, así ST_{13} no tiene torneos transitivos de 5 vértices. Así $v(13) < 5$ y como $v(13) \geq 4$ concluimos que $v(13) = 4$.

De manera análoga que en i) vemos que *para* $8 \leq n \leq 13$ $v(n) = 4$.

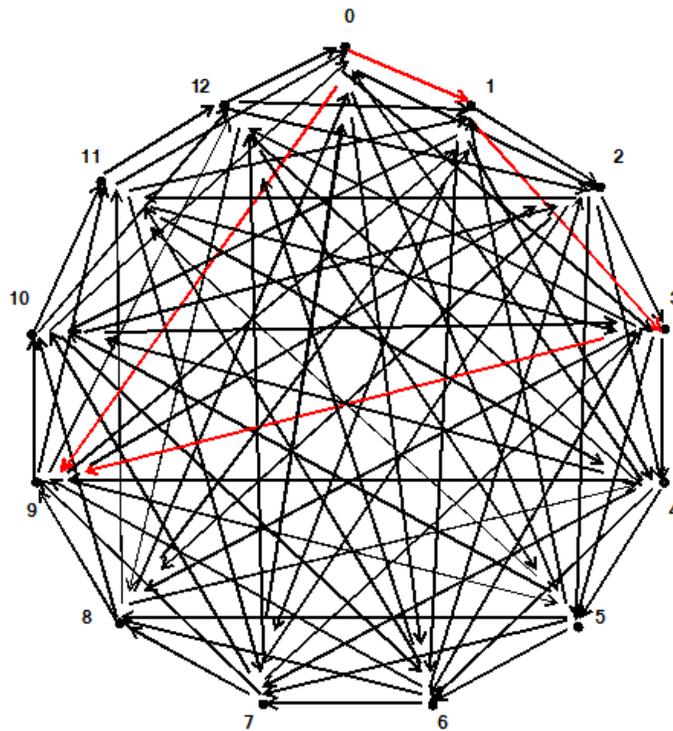


Figura 5.5



Conclusión

En el presente trabajo se muestran varias de las propiedades que cumplen las estructuras denominadas torneos Round Robin, que pueden ser útiles para el estudio del comportamiento de un conjunto de objetos o equipos que cumplan con las propiedades de torneo, que como ya habíamos mencionado, se puede presentar en competencias de mercado, entre especies, equipos o miembros de algún grupo específico de tal manera que podemos aplicar los teoremas para el análisis de alguna competencia.

Los Teoremas 4 y 15 nos muestran que ineludiblemente existen ciertas estructuras en cualquier torneo (trayectorias hamiltonianas y torneos transitivos de cierto orden). Estos teoremas nos dan la pauta para una serie de posibles estudios que permitirían ahondar aun más en el comportamiento de estas estructuras en los torneos. Una opción es el estudio en términos de los llamados problemas anti-Ramsey.

A grandes rasgos, los problemas anti-Ramsey se pueden pensar como la búsqueda, dada una estructura G y una serie de subestructuras H_1, H_2, \dots, H_p de G , del mínimo número de partes de una partición del conjunto de elementos de G que asegure que siempre habrá alguna de las subestructuras H_i tal que ninguna pareja de sus elementos este en una misma parte de la partición.

Así, si pensamos que los elementos de un torneo son sus flechas, y que una partición en k partes del conjunto de flechas es una coloración de las flechas con k colores, nos preguntaríamos por el mínimo número de colores en una coloración de las flechas de un torneo que nos asegure que siempre existe un torneo transitivo (de cierto orden) o una trayectoria (hamiltoniana o de cierto orden) del torneo tal que ninguna de sus flechas tienen el mismo color.

Bibliografía

- [1] Beineke, L. W.; Harary F., The maximum number of strong subtournaments, Canadian Math. Bull., 8(1965)491-498.
- [2] Erdős, P. Moser, L.: On the representation of directed graphs as unions of orderings. Publ. Math. Inst. Hungar Acad. Sci. 9, 125-132 (1964).
- [3] Harary F. and Moser L., The Theory of Round Robin Tournaments. The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 3(Mar., 1966), pp. 231-246.
- [4] Kendall M. G. and B. Babington Smith, On the method of paired comparisons, Biometrika, 31 (1940) 324-325.
- [5] Landau H. G., On dominance relation and the structure of animal societies: III. The condition for a score structure, Bull. Math. Biophysics, 15 (1953) 143-148.
- [6] Neumann - Lara, V.; A short proof of a theorem of Reid and Parker on tournaments. Graphs and Comb. 10, 363-366 (1994).
- [7] Rédei L., Ein kombinatorischer Satz, Acta Litterarum ac Scientiarum (Sectio Scientiarum Mathematicarum) Szeged, 1 (1934) 39-43.
- [8] Reid, K. B, Parker, E. T.; Disproof of a conjecture of Erdős and Moser on tournaments. J. Comb. Theory 9, 225-238 (1970).
- [9] Sánchez-Flores, A., On tournaments and their largest transitive subtournaments. Graphs and Comb. 10, 367-376 (1994).