UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La Razón Áurea: Aplicación y Motivación para el Estudio de las Matemáticas en el Bachillerato

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUAÍA

P R E S E N T A :

REMEDIOS SORIANO VELASCO

TUTORA:

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2012

INDICE

INTRODUCCIÓN

Aunque nos resistamos reconocerlo, las matemáticas, están siempre implícitas en nuestra vida cotidiana desde las más simples o comunes hasta las más complejas o abstractas, pues vivimos contando, ordenando, midiendo, aproximando, prediciendo, etcétera. Y en todo lo que nos rodea de alguna forma se encuentra la geometría.

Por experiencia sabemos que el gusto por las matemáticas en gran medida depende de quién y cómo nos las trasmita, y también la aplicación o el para qué nos va a servir en el futuro, a corto, mediano o largo plazo.

La iniciativa de la realización de este trabajo nace por el hecho de impartir clases a un grupo de matemáticas de sexto año, área IV. La mayoría de los alumnos elige esta área porque no quiere saber "mucho" de matemáticas. Así que el objetivo es que pueda ser un tema de apoyo para alumnos de bachillerato en general, puesto que la mayoría de ellos llega al nivel medio-superior con una gran apatía e incluso adversidad a la materia de matemáticas, sin importar el nivel. Por lo anterior, tratamos de mostrar de la forma más sencilla posible algunas construcciones de la razón áurea y cómo se encuentra inmiscuida en nuestra vida. Tratando que ellos puedan darse cuenta e ir descubriendo que un número tan "poco común" en realidad se puede encontrar en la geometría, en el cuerpo humano, en la naturaleza, en la arquitectura, etc.

En este caso solamente tocaremos una mínima parte de lo que es la razón áurea o división en media y extrema razón (divina proporción), que da lugar a una ecuación cuadrática cuya solución positiva es un número irracional cuyo valor es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6183$ ..., llamado también número de oro. Fue hasta el siglo XX que se representó con los siguientes símbolos Φ, ϕ y φ que es la letra griega fi, en honor al escultor griego Phidias (s.V a.C.). El nombre de número de oro se debe a Leonardo da Vinci.

Aquí se mostrarán algunas construcciones de la razón áurea, partiendo de segmentos, aproximaciones con calculadora, construcción de rectángulos áureos, hasta el pentágono regular llamado también pentágono áureo por la proporción que guardan las diagonales con sus cortes, así como los triángulos formados por estas diagonales donde sus lados están en proporción áurea. También se da un ejemplo de un pentágono y se muestra la construcción de la espiral áurea tanto del rectángulo como del triángulo.

En el desarrollo de este trabajo también mostramos cómo una tangente y cierta secante de una circunferencia guardan la razón áurea. De la misma manera se exponen los elementos de una parábola, elipse e hipérbola áureas.

Asimismo, veremos una relación que existe entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea, y cómo esta sucesión está implícita en la naturaleza y en la música.

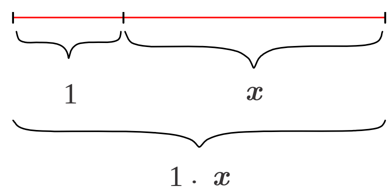
Para finalizar se presentan algunas aplicaciones de la razón áurea tanto en la arquitectura, pintura, fotografía y el cuerpo humano.

CAPÍTULO 1

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS Y APROXIMACIONES DE LA RAZÓN ÁUREA

CONSTRUCCIÓN DE LA RAZÓN ÁUREA POR DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

Una de las maneras en que se puede obtener la proporción áurea es dividir un segmento en dos partes (una mediana y otra pequeña) de manera que la razón entre la longitud del segmento mediano y la longitud del segmento pequeño sea igual a la razón entre el segmento mediano y el total del segmento. Si se considera que la parte pequeña mide un metro y el segmento mediano x unidades entonces la longitud total es de $x + 1$.



Expresando algebraicamente lo anterior, tenemos:

La razón entre el segmento pequeño y el segmento mediano

$$\frac{1}{x}.$$

La razón entre el segmento mediano y el segmento total

$$\frac{x}{1+x}.$$

Ahora igualando las dos razones, obtenemos:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x}.$$

Resolvemos la ecuación para x:

Multiplicamos ambos lados por x:

$$(x)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)(x)$$

$$1 = \frac{x^2}{1+x},$$

luego multiplicamos por $x + 1$:

$$(x+1)(1) = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)(x+1).$$

Obteniendo la ecuación:

$$x + 1 = x^2.$$

Restando $x + 1$ en ambos lados:

$$(x+1) - (1+x) = x^2 - (1+x).$$
$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, sus soluciones o raíces son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

en nuestro caso $a = 1,$ $b = -1$ y $c = -1,$ así

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}.$$

Esto nos da dos soluciones:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Con un valor aproximado de

$$x_1 \approx 1.618$$

y

$$x_2 \approx -0.618.$$

Donde la primera solución es la razón áurea o el número de oro denotado generalmente por la letra griega φ.

Con lo que

$$x_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Por otro lado el recíproco de φ es

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}},$$

racionalizando tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) &= \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} \\ &= \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &\approx 0.618 \ldots\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{\varphi} = -x_2.$$

Nota:

Algunas propiedades de φ son:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1$$

Vamos a denotar $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi'$.

APROXIMACIÓN A LA RAZÓN ÁUREA MEDIANTE UNA SECUENCIA DE OPERACIONES CON CALCULADORA

Es posible dar con la sección áurea mediante una secuencia de operaciones con una calculadora:

Tecleando

$$1 + 1$$

luego pulsando

$$\frac{1}{x}$$

después

$$+1 =$$

a continuación

$$\frac{1}{x}$$

de nuevo

$$+1 =$$

y así sucesivamente.

A continuación se puede observar los valores que se obtienen al realizar esta secuencia. Es importante hacer notar que el primer valor (2) de la columna de x, es el resultado de $1 + 1$, es decir x es el resultado de la última suma realizada.

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x} + 1$
2	0.5	1.5
1.5	0.666666667	1.666666667
1.666666667	0.6	1.6
1.6	0.625	1.625
1.625	0.615384615	1.615384615
1.615384615	0.619047619	1.619047619
1.619047619	0.617647059	1.617647059
1.617647059	0.618181818	1.618181818
1.618181818	0.617977528	1.617977528
1.617977528	0.618055556	1.618055556
1.618055556	0.618025751	1.618025751
1.618025751	0.618037135	1.618037135
1.618037135	0.618032787	1.618032787
1.618032787	0.618034448	1.618034448
1.618034448	0.618033813	1.618033813
1.618033813	0.618034056	1.618034056
1.618034056	0.618033963	1.618033963

El número que aparece en la pantalla deberá alternarse entre $1.618\ldots$ y $0.618\ldots$, una vez que se haya repetido las operaciones varias veces, se acerca cada vez más a la razón áurea. Equivalente a:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$$

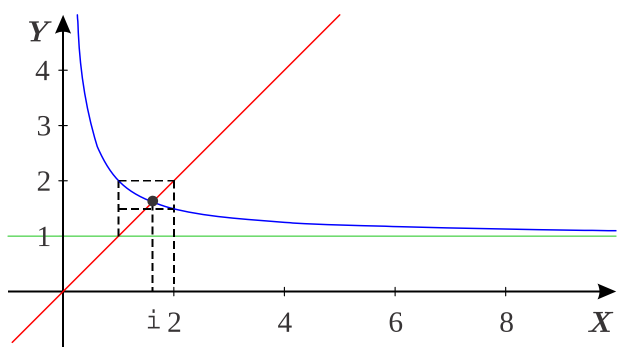
$$\varphi' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

Esto no es de extrañarse, lo que se está generando es una secesión recursiva de números positivos.

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + 1$$

Es convergente a un punto x^* que cumple $x^* = \frac{1}{x^*} + 1$, y es la ecuación de la página 4.

Gráficamente tendríamos:

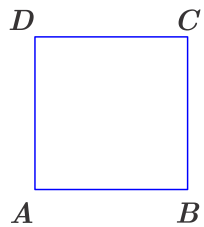


CONSTRUCCIÓN DEL RECTÁNGULO ÁUREO

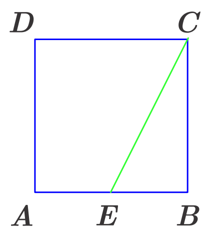
Es el más atractivo de los rectángulos, el cual se ha elegido muchas veces para un diseño que sea artístico y armonioso, es el rectángulo áureo.

Un rectángulo de oro se puede formar de la siguiente manera:

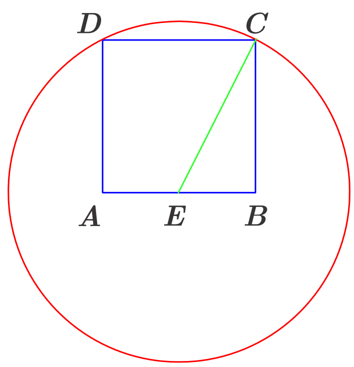
- Se dibuja un cuadrado $ABCD$ de lado dos unidades.



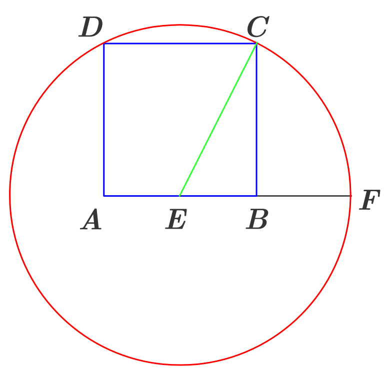
- Se localiza el punto medio E del lado inferior AB y se une el punto E con el punto C.



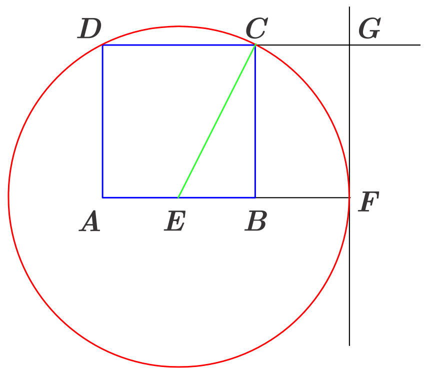
- Se traza una circunferencia con centro en E y de radio EC.



Se prolonga el lado AB hasta que interseque a la circunferencia, obteniendo así el lado mayor del rectángulo.



- Se traza una recta perpendicular a AF y que pasa por F. Se prolonga el lado DC hasta que corte a esta recta para así obtener los lados DG y FG.



Y por el teorema de Pitágoras calculamos la distancia EC

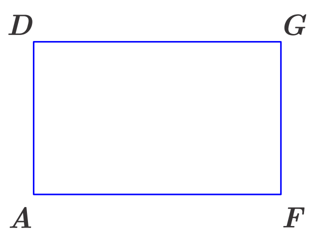
$$\begin{aligned} EC &= \sqrt{EB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{1 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

por lo que el lado mayor del rectángulo vale $1 + \sqrt{5}$.

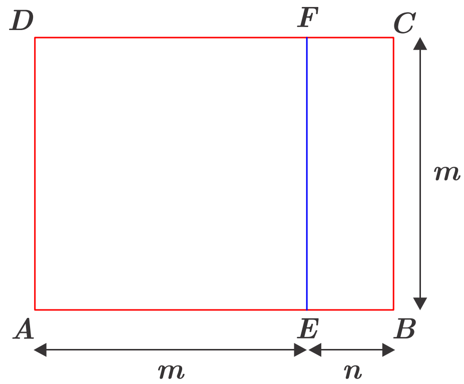
Por lo tanto, la proporción entre los dos lados del rectángulo es:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

De esta forma obtenemos un rectángulo áureo.



Una propiedad que caracteriza al rectángulo áureo, de lados m y $m + n$, es que si recortamos el cuadrado de lado m, el rectángulo que nos queda es semejante al original, en el sentido de que la proporción entre los lados es la misma.



Esto es

$$\frac{m+n}{m}=\frac{m}{n}$$

y llamamos a esta igualdad

$$r$$

es decir,

$$\frac{m+n}{m}=\frac{m}{n}=r.$$

Simplificando se tiene

$$1+\frac{n}{m}=\frac{m}{n}=r.$$

como

$$\frac{m}{n}=r$$

su recíproco es

$$\frac{n}{m}=\frac{1}{r},$$

de donde

$$1+\frac{1}{r}=r.$$

Resolviendo para r

$$(r)\left(1+\frac{1}{r}\right)=r(r)$$

$$r + 1 = r^2$$
$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Esta ecuación es la que se obtuvo en la página 4, por lo que:

$$\mathrm{r} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Obteniendo las dos siguientes soluciones

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

donde

$$r_1 = \varphi = 1.6180 \ldots$$
$$r_2 = -\frac{1}{\varphi} = -0.6180 \ldots$$

Entonces

$$\frac{1}{\varphi} = -r_2.$$

Esta propiedad, nos garantiza que el rectángulo que resulta de quitar el cuadrado es también un rectángulo áureo que se caracteriza por tener la razón de su lado mayor entre el lado menor igual a

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

En el primer ejemplo tenemos el rectángulo:

Para este, $m = 2$ y $n = (1 + \sqrt{5}) - 2$

Así,

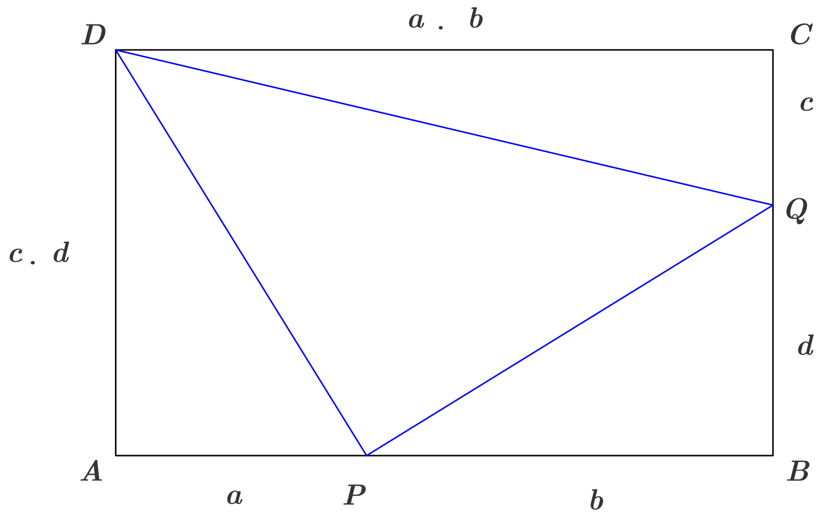
$$\frac{m + n}{m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

y

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

TRIÁNGULO INSCRITO

Inscribir un triángulo dentro de un rectángulo de manera que los tres triángulos formados exteriormente tengan la misma área.



Hay que determinar la posición de P y Q para que

$$\text{área}\,\triangle APD = \text{área}\,\triangle PBQ = \text{área}\,\triangle QCD$$

Llamamos $AP = a,\ PB = b,\ BQ = d$ y $QC = c$.

Como los triángulos tienen la misma área

$$\text{área}\ \triangle QCD = \frac{(a+b)c}{2}$$
$$\text{área}\ \triangle PBQ = \frac{bd}{2}$$
$$\text{área}\ \triangle APD = \frac{(c+d)a}{2},$$

de lo anterior se tiene

$$ac + bc = bd = ac + ad.$$

Entonces

$$bc = ad.$$

Por otro lado

$$bd = a(c+d)$$

$$a = \frac{bd}{c + d}$$

y

$$bc = ad$$
$$a = \frac{bc}{d}.$$

De donde

$$\frac{bd}{c + d} = \frac{bc}{d}$$
$$bd^2 = bc^2 + dbc$$
$$d^2 = c^2 + dc$$
$$d^2 - c^2 - dc = 0$$
$$\frac{d^2}{c^2} - \frac{d}{c} - 1 = 0$$
$$\left(\frac{d}{c}\right)^2 - \frac{d}{c} - 1 = 0.$$

La única solución positiva de la ecuación es:

$$\frac{d}{c} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Así

$$\frac{d}{c} = \varphi.$$

Como

$$bc = ad,$$

entonces

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \varphi.$$

De donde

$$b = \varphi a$$
$$d = \varphi c.$$

Luego P y Q deberán cumplir que dividen a BA y BC en la razón áurea.

Corolario: ¿Qué condición se necesita para que el triángulo $\triangle PQD$ sea isósceles con $DP = PQ$?

Como los triángulos $\triangle DAP$ y $\triangle PBQ$ son rectángulos entonces

$$(DP)^2 = (c + d)^2 + a^2$$

y

$$(PQ)^2 = b^2 + d^2.$$

tenemos que será necesario y suficiente que:

$$(DP)^2 = (PQ)^2,$$

como

$$d = \varphi c \text{ y } b = \varphi a$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&(c + \varphi c)^2 + a^2 = (\varphi c)^2 + (\varphi a)^2 \\
&c^2 + 2\varphi c^2 + \varphi^2 c^2 + a^2 = \varphi^2 c^2 + \varphi^2 a^2 \\
&c^2(1 + 2\varphi) = a^2(\varphi^2 - 1)
\end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{1 + 2\varphi}{\varphi^2 - 1}.$$

Como

$$\varphi^2 = \varphi + 1,$$

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1$$

y

$$\varphi^2 - 1 = \varphi,$$

por lo que,

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{\varphi^3}{\varphi} = \varphi^2.$$

De aquí

$$\frac{a}{c} = \varphi,$$

es decir

$$a = \varphi c.$$

Como $d = \varphi c$ y $a = \varphi c$ entonces $a = d$, de donde

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

es decir,

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \varphi.$$

Por lo tanto, sí el triángulo $\triangle DPQ$ es isósceles, se debe cumplir que $b = a\varphi$ y $d = c\varphi$, y como las áreas de los triángulos $\triangle QCD$ y $\triangle APD$ son iguales.

Como $d = c\varphi$ y $b = a\varphi$ tenemos que

$$\frac{(a+b)c}{2} = \frac{(c+d)a}{2}$$

Luego

$$\frac{(a+b)}{(c+d)} = \frac{a}{c} = \varphi.$$

Por lo que la razón entre los lados del rectángulo es φ, es decir, el rectángulo es áureo.

Por lo tanto, la condición para que el triángulo DPQ sea isósceles, es que el rectángulo $\triangle ABCD$ sea áureo.

Ejemplo: sí $AB = \varphi$ y $BC = 1$, entonces $a = \varphi'$, $b = 1$ y $d = \varphi'$

$$AB = a + b$$

y

$$a + b = \varphi.$$

Pero $b = a\varphi$, entonces

$$\begin{aligned} a + a\varphi &= \varphi \\ a(1+\varphi) &= \varphi \\ a &= \frac{\varphi}{1+\varphi} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\
&= \varphi'.
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
b &= \varphi - a \\
&= \varphi - (\varphi') \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\
&= \frac{2+\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Si

$$BC = 1$$

como

$$BC = c + d,$$

entonces

$$1 = c + d.$$

Pero $d = c\varphi$, de manera que

$$
\begin{aligned}
1 &= c + c\varphi \\
1 &= c(1+\varphi) \\
c &= \frac{1}{1+\varphi} \\
c &= \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
c &= \frac{2}{3+\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c &= \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)\\
c &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\\
c &= \varphi'^2.
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
1 &= \varphi'^2 + d\\
d &= 1 - \varphi'^2\\
d &= 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\\
d &= \frac{2-3+\sqrt{5}}{2}\\
d &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\
d &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\\
d &= \varphi'.
\end{aligned}
$$

Conociendo los valores anteriores se puede verificar que las áreas de los triángulos exteriores, son iguales:

Basta con demostrar que $c(a+b) = db = a(c+d)$, es decir, demostrar que:

$$\varphi'^2(\varphi'+1) = \varphi'(1) = \varphi'[\varphi'^2 + \varphi']$$

Sustituyendo los valores, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\varphi'^2(\varphi'+1) &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)\\
&= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\\
&= \frac{3\sqrt{5}+3-5-\sqrt{5}}{4}\\
&= \frac{2\sqrt{5}-2}{4}\\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\\
&= \varphi'.
\end{aligned}
$$

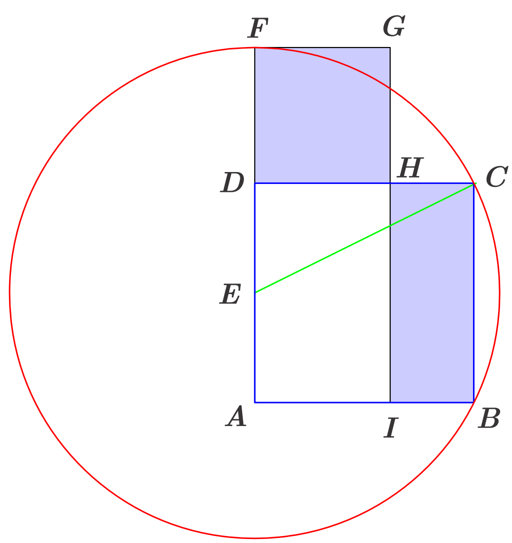
Además

$$\begin{aligned}\varphi'[\varphi'^2+\varphi'] &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}(1)\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\\ &= \varphi'.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que las áreas de los triángulos $\triangle DAP$, $\triangle PBQ$ y $\triangle QCD$ son iguales

TEOREMA DE EUCLIDES

Teorema II.11. Dividir un segmento de modo que el rectángulo comprendido por el segmento entero y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante.



1. Supongamos que el segmento dado es AB.
2. Construir sobre AB el cuadrado $ABCD$.
3. Localizar el punto medio E de AD.
4. Trazar el segmento que une E con C.
5. Trazar una semirrecta que pase por D y sea perpendicular a DC.
6. Construir una circunferencia con centro en E y de radio EC. Llamando F el punto de intersección de la recta perpendicular y la circunferencia.
7. Prolongar el lado AD hasta F.
8. Construir sobre DC el cuadrado $DHGF$ de lado DF. Llamando GH el lado opuesto a DF.
9. Prolongar HG hasta el segmento AB. Llamando I el punto de intersección con AB.

El punto I es el que divide al segmento AB en dos partes que cumplen: $(AB)(IB)=(AI)^2$, para justificar esto último vamos a comprobar que el área del rectángulo $IBCH$, es igual al área del cuadrado $DFGH$, es decir $(DH)^2=(CH)(BC)$.

Por un lado, como el triángulo DEC es rectángulo, entonces

$$(EC)^2=(DC)^2+(DE)^2,$$

Además sabemos que $DC=AB$ y $DE=\frac{AB}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}(EC)^2&=(DC)^2+(DE)^2\\(EC)^2&=(AB)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2\\(EC)^2&=(AB)^2+\frac{(AB)^2}{4}\\(EC)^2&=(AB)^2\left(1+\frac{1}{4}\right),\end{aligned}$$

de donde

$$EC=\sqrt{\frac{5}{4}(AB)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}(AB).$$

Como $EC=EF$ tenemos que

$$\begin{aligned}DH&=DF\\DH&=EF-ED\\DH&=EC-ED\\DH&=\frac{\sqrt{5}}{2}(AB)-\frac{AB}{2}\\DH&=(AB)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)\\DH&=\frac{(AB)}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).\end{aligned}$$

Por lo que

$$(DH)^2 = \frac{(AB)^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2$$
$$(DH)^2 = \frac{(AB)^2}{2}\left(3-\sqrt{5}\right).$$

Por otro lado,

$$HC = DC - DH$$
$$HC = AB - DF$$
$$HC = AB - \frac{AB}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$
$$HC = AB\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right)$$
$$HC = AB\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ahora

$$(HC)(BC) = AB\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(AB)$$
$$(HC)(BC) = (AB)^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$(HC)(BC) = \frac{(AB)^2}{2}\left(3-\sqrt{5}\right).$$

Por lo tanto,

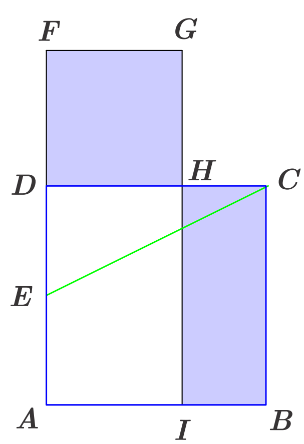
$$(DH)^2 = (HC)(BC)$$

Vemos que la razón áurea está escondida en esta construcción. Recordemos que:

$(AB)(IB) = (AI)^2$, lo que podemos rescribir como:

$$\frac{AB}{AI} = \frac{AI}{IB}$$

El segmento AB, se divide a su vez en dos segmentos AI e IB.



Llamando a la longitud AB, m la longitud de AI y n la longitud de IB.

La ecuación anterior se rescribe como:

$$\frac{m+n}{m} = \frac{m}{n} = r$$

Pero ya vimos anteriormente que $r = \varphi$, luego:

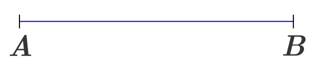
$$\frac{AB}{AI} = \frac{AI}{IB} = \varphi$$

CORTE ÁUREO

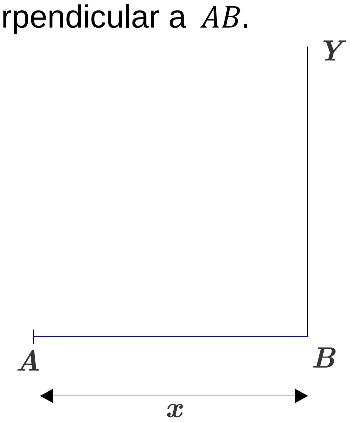
Definición. El corte áureo de un segmento es el punto que lo divide en dos partes desiguales, de manera que el trozo más corto sea, en proporción al mayor, igual que éste en proporción al total.

Esta definición se verifica a través de la siguiente construcción gráfica:

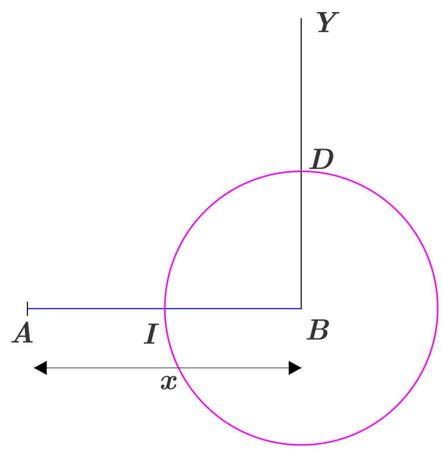
- Dado un segmento AB.



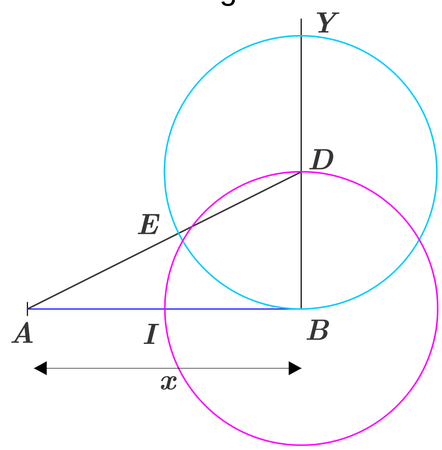
- Se traza una recta BY, perpendicular a AB.



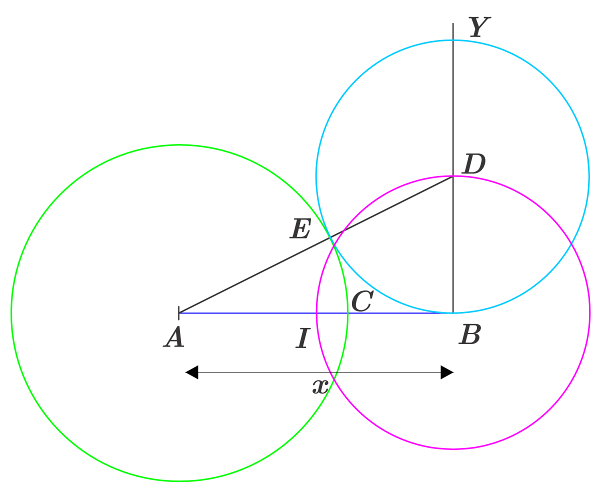
- Se localiza I el punto medio de AB y se traza un círculo con centro en B y radio IB. Llamamos D al punto de intersección del círculo con el segmento YB. Observamos que $BD = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$,



- Se trazan el segmento AD y una circunferencia con centro en D y radio $\frac{x}{2}$, obteniendo así el punto E sobre el segmento AD.

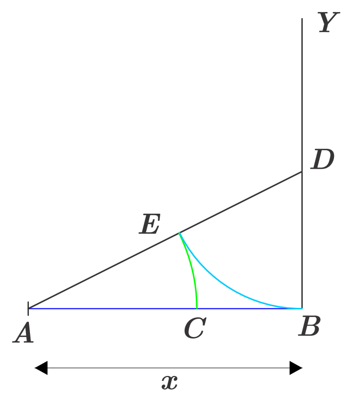


- Se traza una circunferencia con centro en A y de radio AE, y donde corta a AB es el punto C.



- De esta forma se obtiene el punto buscado, es decir, la proporción tal que:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$$



Para mostrar que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$$

se realiza lo siguiente:
Tomando $AC = a$, y $CB = 1$ entonces

$$\frac{a+1}{a} = \frac{a}{1}$$
$$1 + \frac{1}{a} = a,$$

multiplicando ambos lados por a, tenemos

$$a + 1 = a^2$$

Con lo cual se tiene una ecuación de segundo grado

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

resolviendo se obtiene que una de las soluciones es:

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

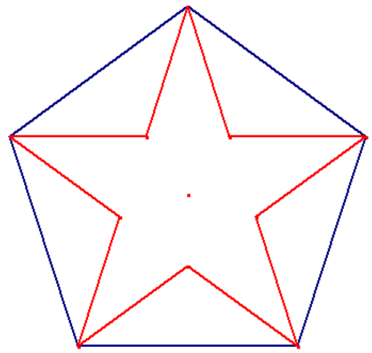
Por lo tanto el punto C hace que $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$ sea una proporción áurea, es decir, C es el punto del corte áureo.

CAPÍTULO 2

CONSTRUCCIÓN Y PROPIEDADES DEL PENTÁGONO ÁUREO O REGULAR

PENTÁGONO REGULAR

Consideremos una estrella de cinco picos inscrita en un *pentágono regular.*



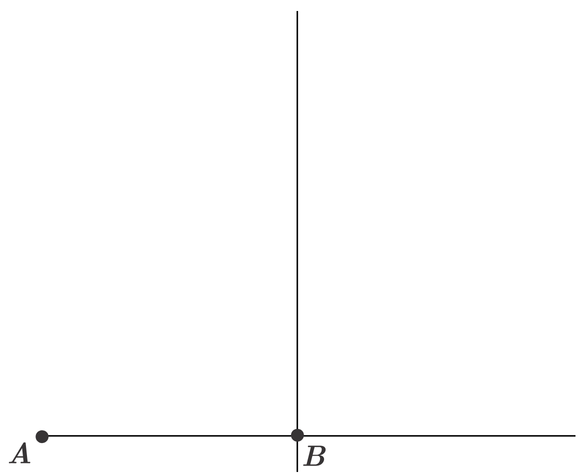
Primero se construirá el pentágono equiángular y equilátero con regla y compás, si se conoce uno de sus lados.

Hay muchos métodos para construir el pentágono, aquí sólo se presentará uno de ellos.

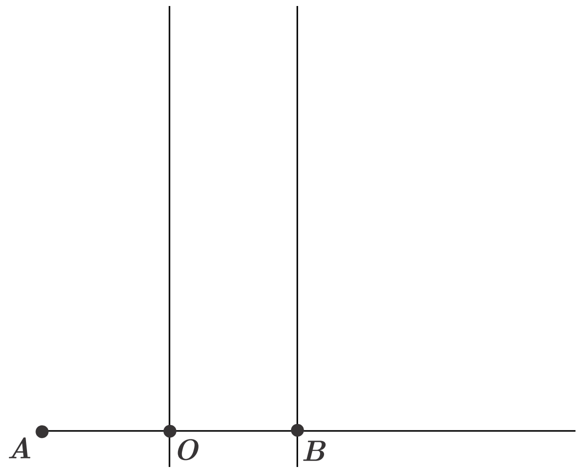
Los pasos son los siguientes:

1. Sea AB el lado del pentágono, situado sobre una semirrecta horizontal.

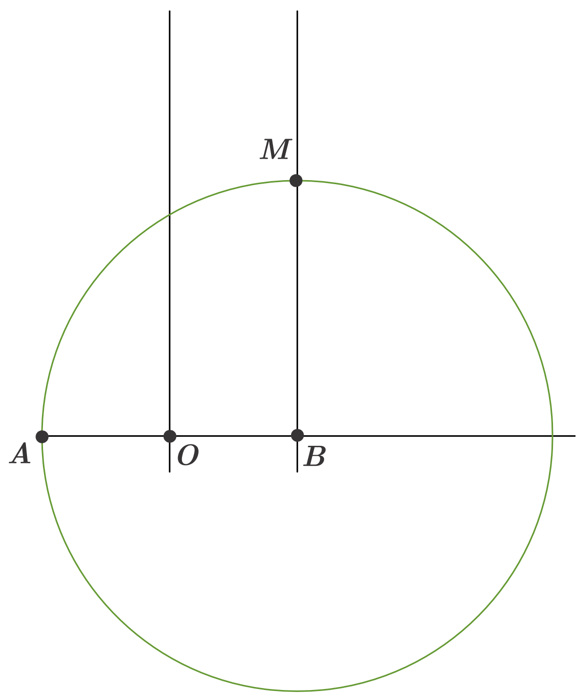
2. Se traza la recta perpendicular a AB por el punto B.



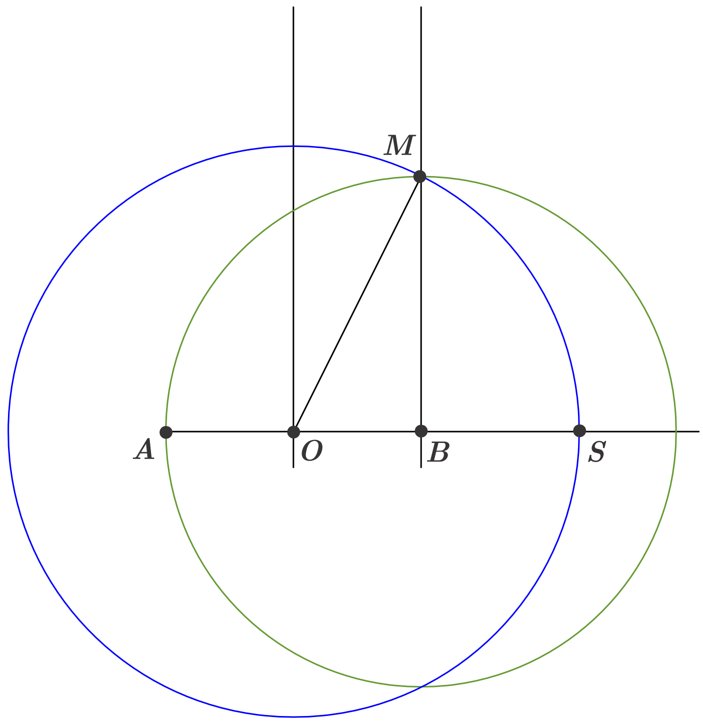
3. Se traza la mediatriz del segmento AB y se denota con O el punto de intersección de la mediatriz y el segmento.



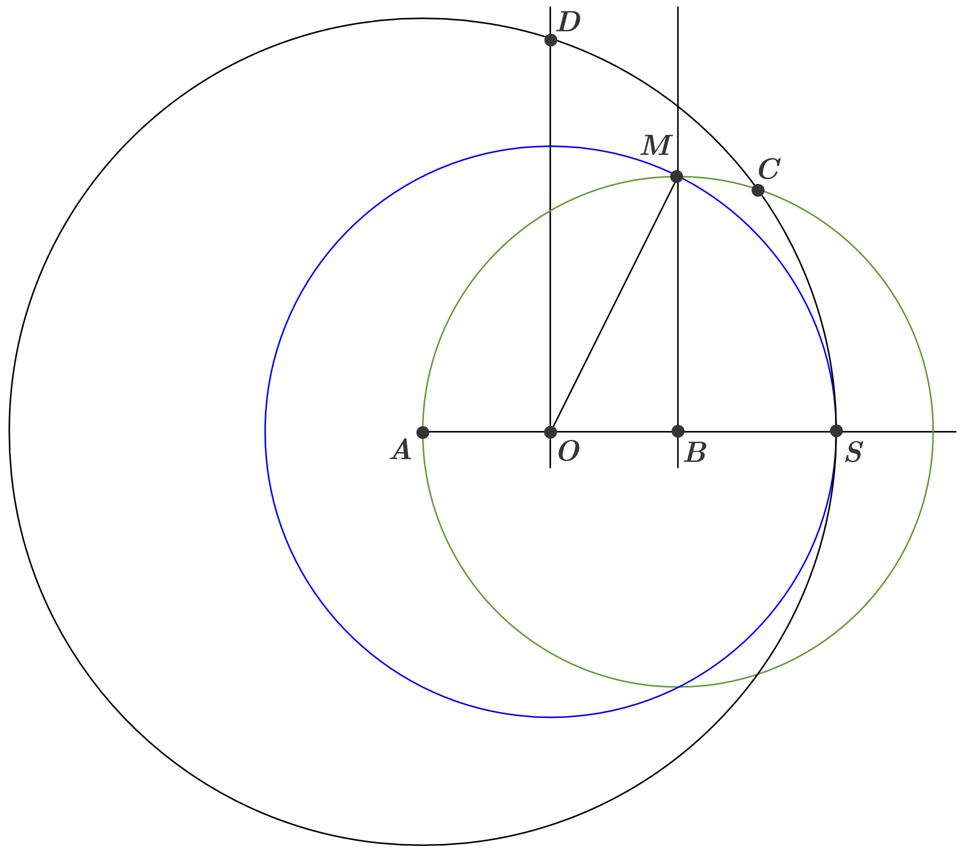
4. Se traza la circunferencia con centro en B y de radio AB, el punto M es donde esta circunferencia corta a la perpendicular a AB por B.



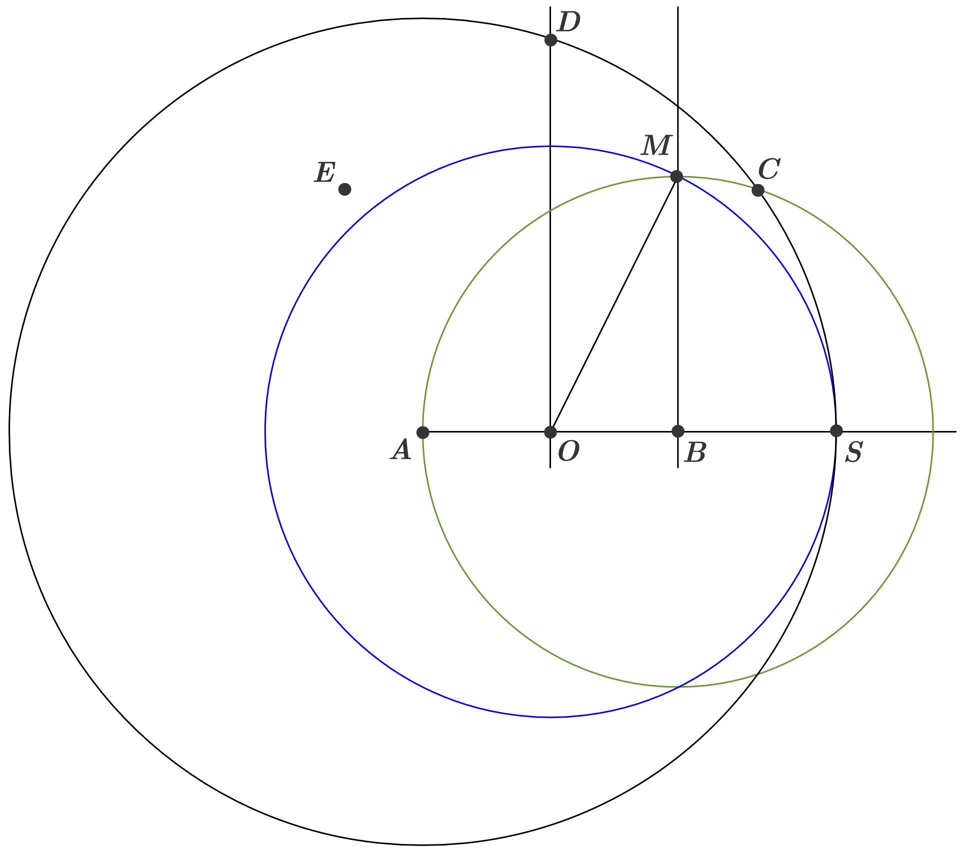
5. Con centro en O, se traza la circunferencia de radio OM. Sea S el punto donde esta circunferencia corta a la semirrecta AB, del lado de B.



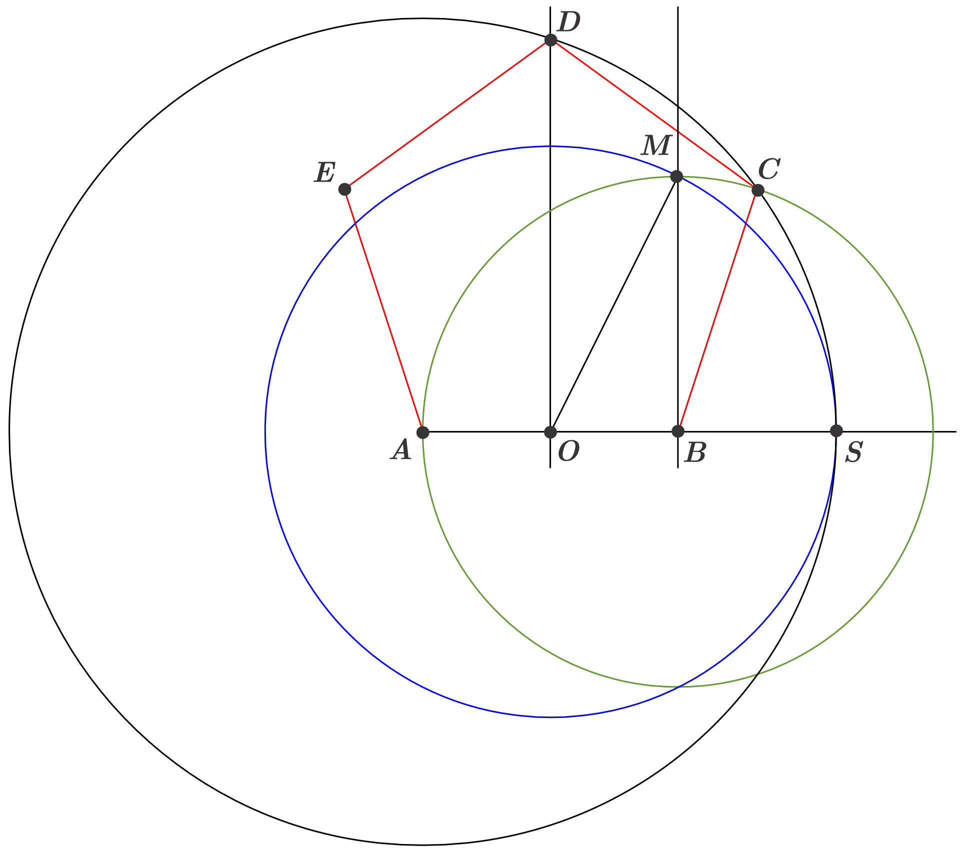
6. Se traza otra circunferencia de centro A y radio AS, obteniendo el punto C como corte con la circunferencia anterior, esta circunferencia corta en D a la mediatriz de AB.



7. Sea E el punto simétrico de C con respecto a la mediatriz de AB.



8. Ahora uniendo los puntos A, B, C y D se obtiene el pentágono regular (equilátero y equiángular).



ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS DEL PENTÁGONO

Una vez construido el pentágono, veamos dónde aparece la razón áurea.

Recordemos que:

Un polígono **regular** es aquel que tiene todos sus lados iguales.

Para calcular los ángulos interiores de un polígono regular se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{(n-2)(180°)}{n},$$

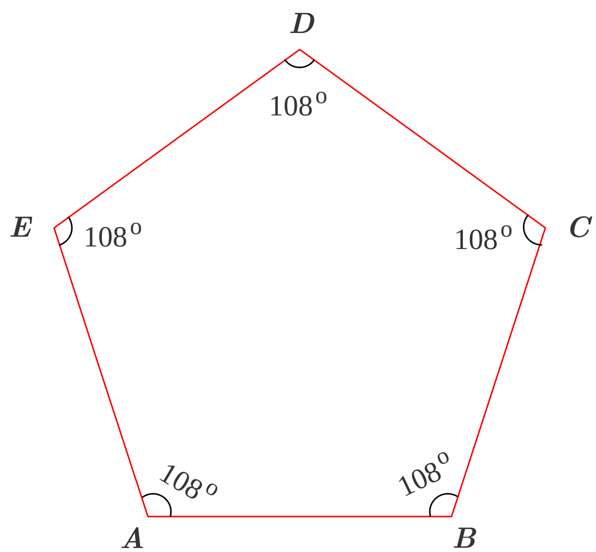
donde n representa el número de lados del polígono.

Con lo anterior podemos calcular los ángulos interiores del pentágono regular, y como tiene cinco lados la expresión es:

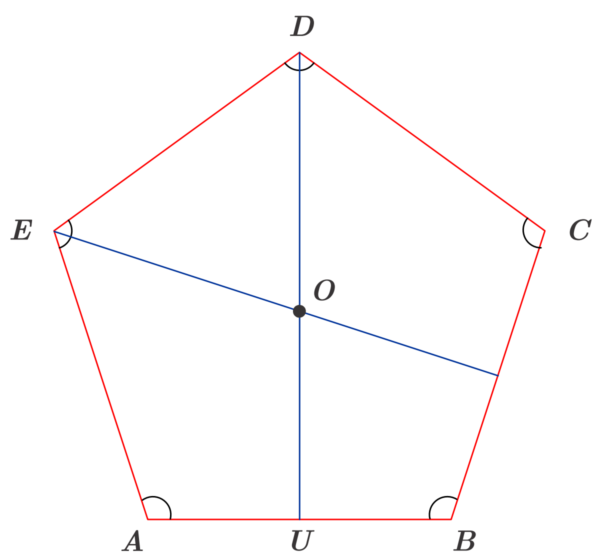
$$\alpha = \frac{(5-2)(180°)}{5}$$

$$= \frac{(3)(180°)}{5}$$
$$= \frac{540°}{5}$$
$$= 108°.$$

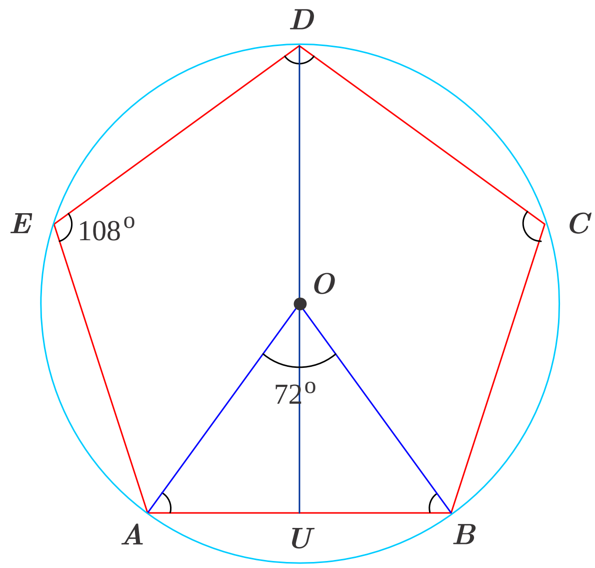
Así en el pentágono regular sus ángulos interiores miden cada uno $108°$.



Ahora encontramos el centro de pentágono. Para ello trazamos las mediatrices de dos de sus lados y localizamos el punto de intersección O de estas dos mediatrices.



Trazamos el círculo con centro en O y radio AO. Observamos que los cinco vértices el pentágono están sobre la circunferencia. Es decir, O es el centro del pentágono.



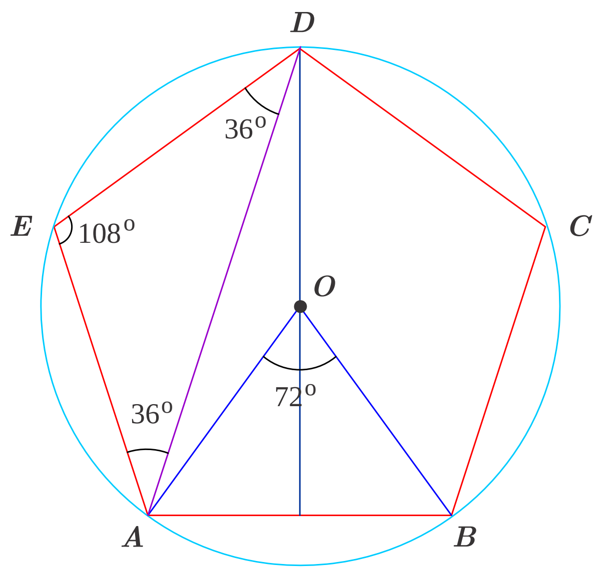
Dejamos la mediatriz UD, los radios AO y BO los cuales forman un ángulo central $\measuredangle AOB$.

El valor de un ángulo central es $\frac{360°}{n}$.

Así que la medida del ángulo AOB es:

$$\measuredangle AOB = \frac{360°}{5}$$
$$\measuredangle AOB = 72°.$$

A continuación se desglosará la estrella inscrita en el pentágono $ABCDE$ para analizar los triángulos isósceles que se van formando al ir trazando sus diagonales.



Trazamos la primera diagonal AD, formándose el triángulo $\triangle ADE$ el cual se puede asegurar que es un triángulo isósceles ya que dos de sus lados AE y ED son iguales por ser dos lados del pentágono.

Como el

$$\measuredangle DEA = 108°$$

y el triángulo ADE es isósceles esto significa que

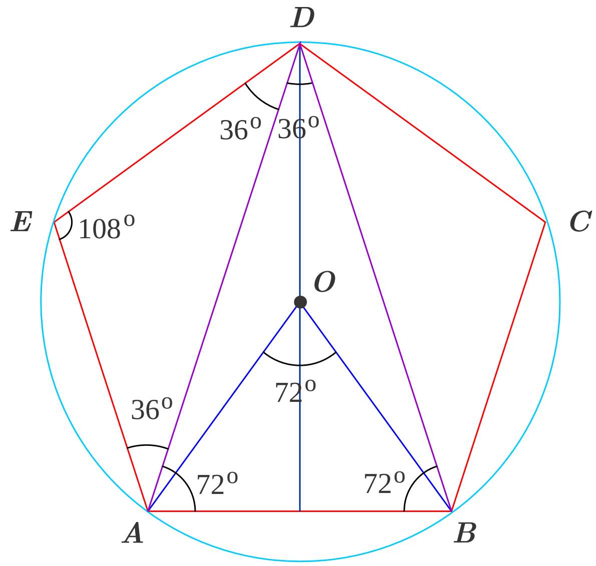
$$\measuredangle EAD = \measuredangle ADE.$$

Se sabe que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es $180°$, esto nos lleva a que

$$\begin{aligned} \measuredangle DEA + \measuredangle EAD + \measuredangle ADE &= 180° \\ 108° + 2\measuredangle ADE &= 180° \\ 2\measuredangle ADE &= 180° - 108° \\ \measuredangle ADE &= \frac{72°}{2} \\ \measuredangle ADE &= 36°, \end{aligned}$$

entonces los ángulos $\measuredangle EAD$ y $\measuredangle ADE$ miden $36°$.

También se obtiene el trapecio $ABCD$ que al igual que el triángulo es isósceles porque dos de sus lados AB y CD no paralelos son iguales (son lados del pentágono).



Trazamos la diagonal BD formando así tres triángulos: $\triangle ADE$, $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$.

Los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle BCD$ son isósceles por que dos de sus lados son también lados del pentágono.

Además los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle BCD$ son congruentes ya que tienen dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales.

Ya que por un lado $AE = ED = DC = CB$ pues son lados del pentágono.

Por otro lado el $\measuredangle DEA$ mide $108°$, así como el $\measuredangle BCD$ también mide $108°$.

Por lo que se puede asegurar que los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle BCD$ son congruentes:

$$\triangle\, ADE \cong \triangle BCD.$$

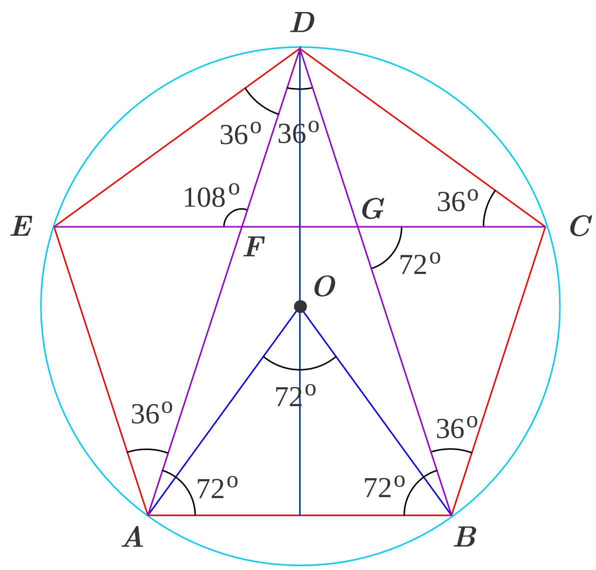
por el criterio de congruencia de Lado, Ángulo, Lado (LAL).

El triángulo $\triangle ABD$ también es isósceles ya que sus lados AD y BD son dos diagonales del pentágono regular, lo que significa que los lados AD y BD son iguales, o también de la congruencia anterior se tiene que $AD = BD$

Aquí también se puede ver que el $\measuredangle ADB = 36°$ por ser un ángulo inscrito y subtiende el mismo arco con el ángulo central que mide $72°$.

De aquí podemos deducir que los ángulos iguales $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle DBA$ miden $72°$.

Por lo que los ángulos $\measuredangle BDC$ y $\measuredangle CBD$ miden $36°$.



Trazamos la tercera diagonal CE obteniendo ahora seis triángulos más (EFD, FGD, GCD, AFE, BCG y ECD) y un trapecio $ABGF$.

Los ángulos $\measuredangle DFG$ y $\measuredangle DAB$ miden 72° cada uno por ser ángulos correspondientes y como los $\measuredangle DFG$ y $\measuredangle \mathrm{EFD}$ son suplementarios, entonces:

$$\begin{aligned} \measuredangle DFG + \measuredangle EFD &= 180° \\ 72° + \measuredangle EFD &= 180° \\ \measuredangle EFD &= 180° - 72° \\ \measuredangle EFD &= 108° \end{aligned}$$

Entonces los ángulos $\measuredangle EFD$ y $\measuredangle \mathrm{DGC}$ miden cada uno $108°$. Los lados ED y DC son iguales por ser lados del pentágono.

Por lo anterior se puede asegurar que los triángulos $\triangle EFD$ y $\triangle CDG$ son congruentes e isósceles.

Para el triángulo $\triangle FGD$:

Se puede asegurar que es isósceles ya que sus ángulos $\measuredangle DFG$ y $\measuredangle FGD$ son iguales, pues miden $72°$, o bien la congruencia anterior segura que $DF = GD$.

Para el triángulo BCG:

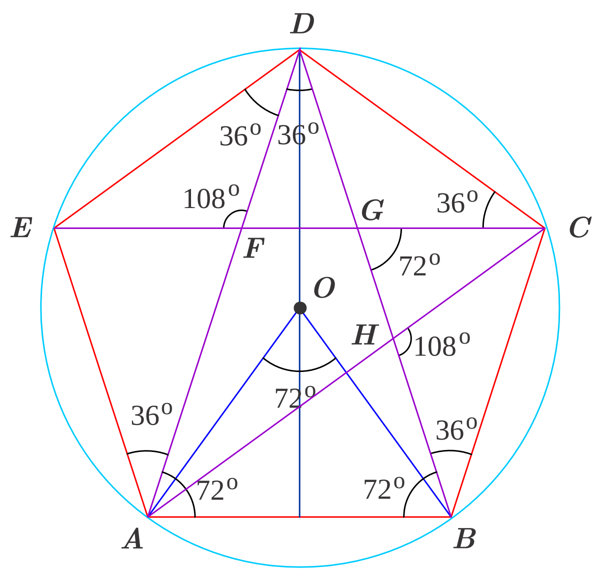
Si el ángulo $\measuredangle DGC$ mide$108°$, entonces el ángulo $\measuredangle BCG$ mide $72°$. El ángulo $\measuredangle BCG$ es igual a $\measuredangle BCD - \measuredangle GCD = 180° - 36° = 72°$. Y el ángulo $\measuredangle DGC$ mide36°. Entonces el triángulo BCG es isósceles.

Para el triángulo $\triangle AFE$:

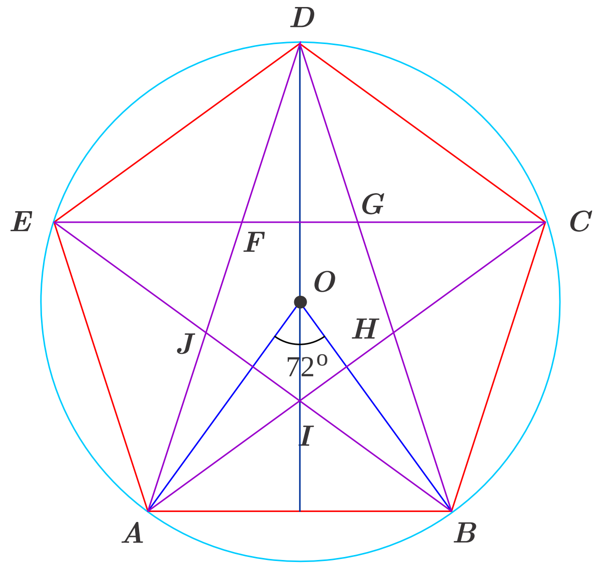
Como el ángulo $\measuredangle EFD$ mide $108°$, entonces el ángulo $\measuredangle AFE$ mide $72°$, con lo que se deduce que el ángulo $\measuredangle FEA$ mide también $72°$; con lo que se concluye que el triángulo $\triangle AFE$ es isósceles.

De manera análoga se puede seguir trabajando para mostrar que los otros triángulos también son isósceles.

El trapecio $ABGF$ también es isósceles, pues dos de sus lados no paralelos (AE y BC) son iguales.



Trazamos la cuarta diagonal (AC) y obtenemos los triángulos $\triangle ACE$, $\triangle ACF$, $\triangle AFE$, $\triangle ABC$, $\triangle BCH$, $\triangle HCG$ y $\triangle ABH$, el cuadrilátero $AHGF$ y el trapecio $AHGE$.

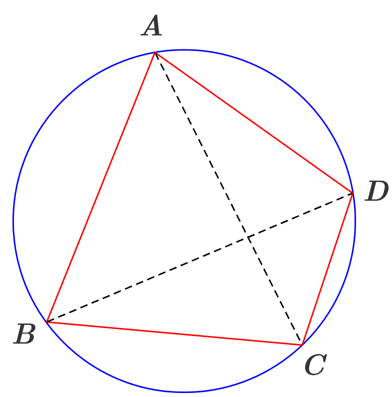


Al trazar la última o quinta diagonal (BE) se obtienen otros ocho triángulos $\triangle BHI$, $\triangle BHA$, $\triangle ABI$, $\triangle ABJ$, $\triangle AIJ$, $\triangle AJE$, $\triangle ABE$ y $A\triangle IE$ así como también el pentágono $FGHIJ$.

Cabe mencionar que en la construcción de todas las diagonales sólo hemos encontrado cinco tipos de triángulos, ya que los otros son semejantes a uno de estos cinco.

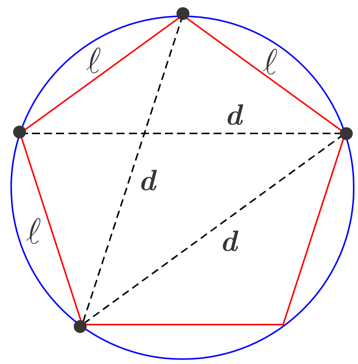
LA RAZÓN ÁUREA EN EL PENTÁGONO

Usaremos el teorema de Ptolomeo, que nos dice que: En un cuadrilátero cíclico $ABCD$ se cumple que el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos. Es decir: $AC * BD = AB * CD + BC * DA$.



Para el pentágono regular, que sabemos se inscribe en una circunferencia, se tiene que si el lado es l y la diagonal d, entonces:

$$d^2 = d * l + l^2$$



Luego

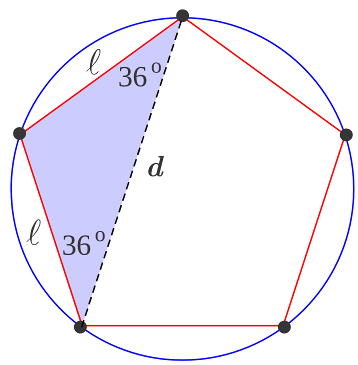
$$\left(\frac{d}{l}\right)^2 - \left(\frac{d}{l}\right) - 1 = 0$$

Por lo que

$$\frac{d}{l} = \varphi$$

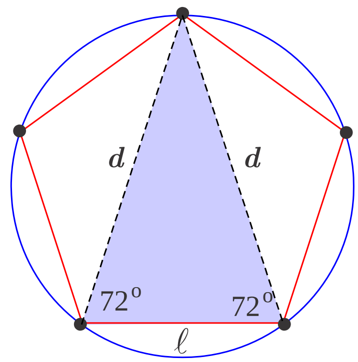
La razón de los lados en los triángulos isósceles que hay en el pentágono.

Caso 1.



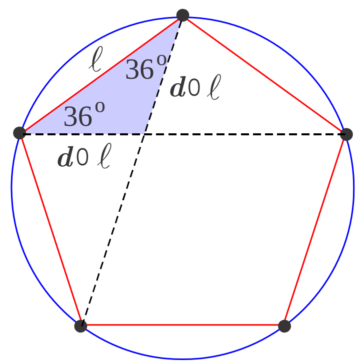
$$\frac{d}{l} = \varphi$$

Caso 2.



$$\frac{d}{l} = \varphi$$

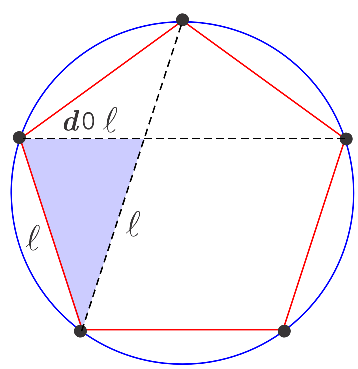
Caso 3.



$$\frac{l}{d-l} = \frac{d}{l} = \varphi$$

Esto es porque el triángulo es semejante al del caso 1, luego la razón de los lados correspondientes es la misma.

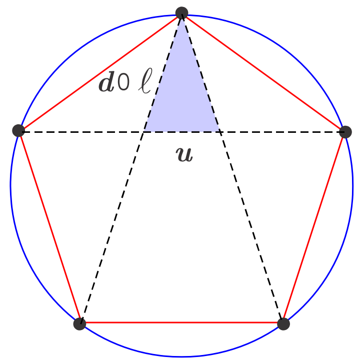
Caso 4.



$$\frac{l}{d-l} = \frac{d}{l} = \varphi$$

Este triángulo es semejante al del caso 2.

Caso 5.



$$u = d - (d - l) = 2l - d$$

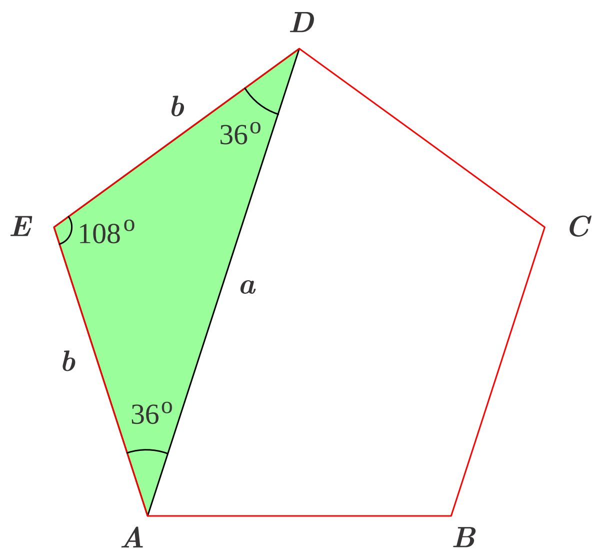
$$\frac{d-l}{u} = \frac{d-l}{2l-d} = \frac{d}{l} = \varphi$$

El triángulo es semejante al del caso 2.

También para determinar que los triángulos formados por las diagonales del pentágono guardan la razón áurea se utilizará la ley de los senos.

$$\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} = \frac{c}{\mathrm{sen}C}$$

Analizando el triángulo ADE:



Nombrando al lado ED como b, al lado AE, como b y al lado AD como a, de esta forma tenemos:

$$AD = a$$

$$ED = b$$

$$AE = b.$$

Realizando los cocientes:

$$\frac{a}{\text{sen}108°} = \frac{b}{\text{sen}36°} = \frac{b}{\text{sen}36°}.$$

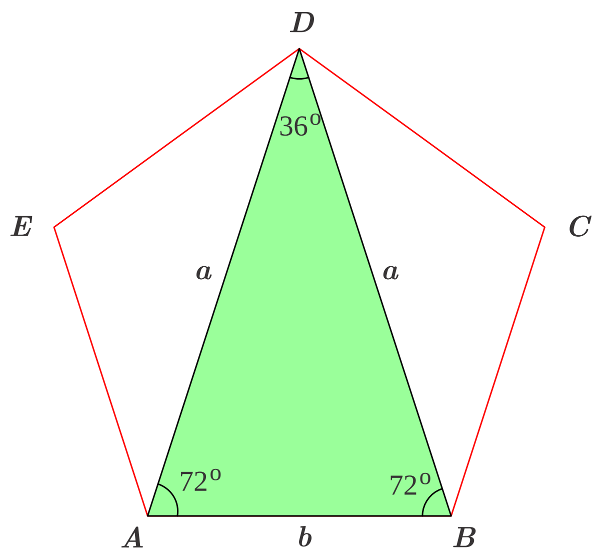
Tomando la igualdad

$$\frac{a}{\text{sen}108°} = \frac{b}{\text{sen}36°}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}36°}$$
$$\frac{a}{b} = 1.618 \ldots$$

Con lo cual se comprueba que la razón que guardan el lado mayor entre el lado menor es áurea.

Como el triángulo ADE es igual al triángulo BCD, entonces lo anterior se cumple también para este último.

Para el triángulo ABD:



Realizando el cociente para este triángulo.

Nombrando a los lados AD y BD como a y el lado AB como b.

$$AD = BD = a$$

$$AB = b.$$

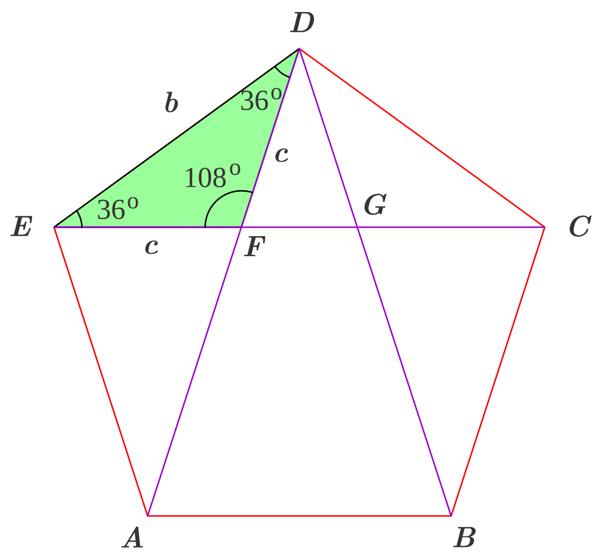
Tomando la igualdad:

$$\frac{a}{\text{sen}72°} = \frac{b}{\text{sen}36°},$$

se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}72°}{\text{sen}36°}$$
$$\frac{a}{b} \approx 1.6180 \ldots$$

Buscando la razón áurea para el triángulo EFD:



Partiendo ahora de la igualdad

$$\frac{b}{\mathrm{sen}108°} = \frac{c}{\mathrm{sen}36°}$$

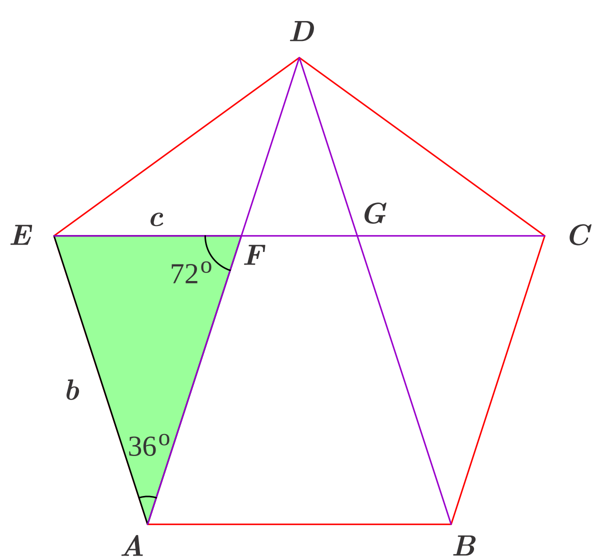
Se tiene

$$\frac{b}{c} = \frac{\mathrm{sen}108°}{\mathrm{sen}36°}$$

$$\frac{b}{c} \approx 1.6180 \ldots$$

Donde también se observa la razón áurea.

Para el triángulo AFE:



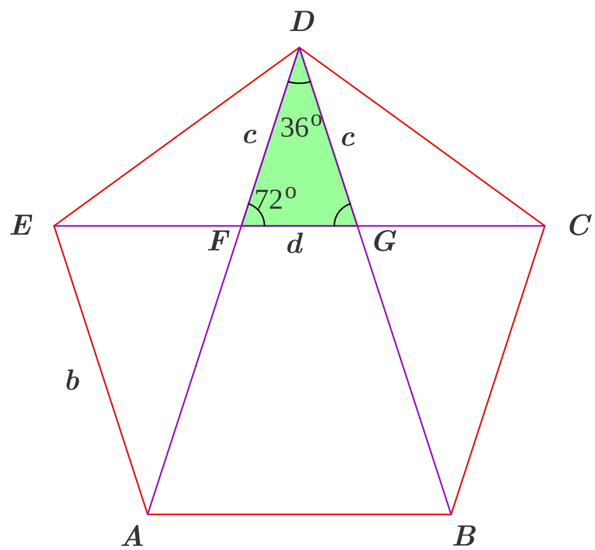
$$\frac{b}{\text{sen}72°} = \frac{c}{\text{sen}36°}$$

Se tiene

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen}72°}{\text{sen}36°}$$

$$\frac{b}{c} \approx 1.6180 \ldots$$

El siguiente triángulo a analizar es el FGD:



Los lados DF y DG son iguales y se denotan con c, y el lado FG como d, es decir,

$$DF = DG = c$$

y

$$FG = d.$$

Resolviendo la igualdad

$$\frac{c}{\text{sen}72°} = \frac{d}{\text{sen}36°}$$
$$\frac{c}{d} = \frac{\text{sen}72°}{\text{sen}36°}$$
$$\frac{c}{d} = 1.6180 \ldots$$

Obteniendo así la razón áurea.

Recordemos que en el pentágono sólo se encuentran estos cinco tipos de triángulos de distinto tamaño, cumpliendo que el cociente de su lado mayor entre su lado menor es $1.6180\ldots$

Por un lado encontramos que las igualdades siguientes cumplen:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=1.6180\ldots$$

Y por el otro si tomamos la primera proporción

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c},$$

sin pérdida de generalidad sea $b=1$ y tomando en cuenta que $c=a-b$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{b}{c}\\ \frac{a}{b}&=\frac{b}{a-b}\\ \frac{a}{1}&=\frac{1}{a-1}\\ \frac{a(a-1)}{1}&=1\\ a^2-a-1&=0.\end{aligned}$$

Donde una de las soluciones para a es $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\ldots$, esto es

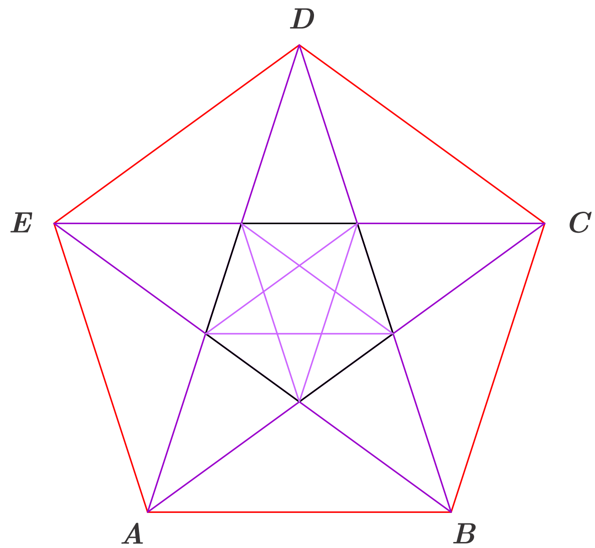
$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\ldots$$

Con esto se comprueba que los triángulos del pentágono regular son todos proporcionales y su proporción es áurea.

Cabe mencionar que si se realiza el cociente del lado menor entre el lado mayor la razón es $0.618\ldots$ que es el recíproco de la razón áurea

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi}&=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\ &=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\\ &=0.618\ldots\end{aligned}$$

Esta razón se mantiene, no obstante, que las diagonales vayan haciéndose cada vez más pequeñas, esto es, las diagonales de los pentágonos que se van formando hacia adentro.

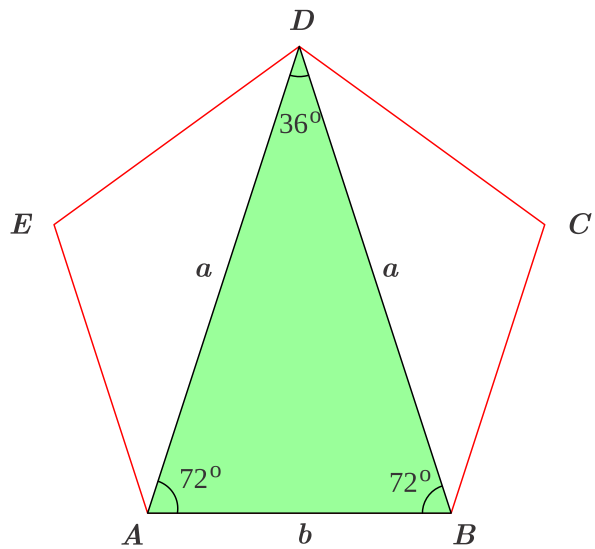


CAPÍTULO 3

CONSTRUCCIÓN DE ESPIRALES

ESPIRAL DEL TRIÁNGULO ÁUREO

Se tiene un pentágono regular del cual vamos a tomar un triángulo para trazar la espiral.

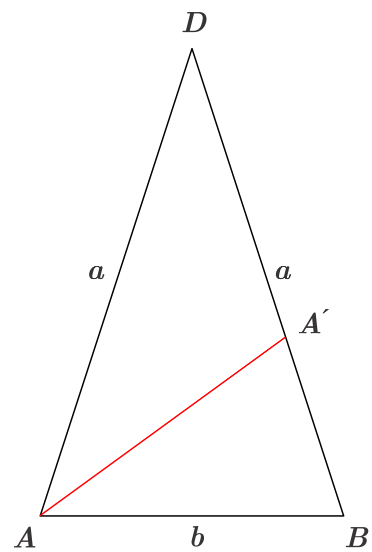


Se toma el triángulo isósceles ABD que cumple con que es un triángulo áureo; visto en el capítulo anterior.

Procedimiento para construir la espiral:

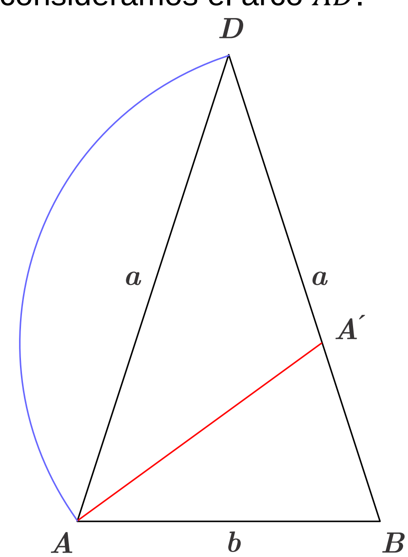
Se toma el triángulo ABD

1. Se traza la bisectriz del $\measuredangle DAB$ que corta al lado BD, llamando a este punto de intersección A'. Obteniendo un triángulo áureo ya que
$$\measuredangle A'AB = 36°$$
$$\measuredangle ABA' = 72°$$
$$\measuredangle BA'A = 72$$

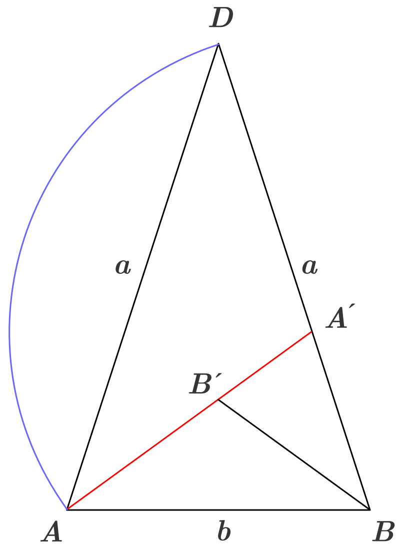


Por lo que el $\triangle ABA'$ es semejante al $\triangle ABD$ y por lo tanto es áureo.

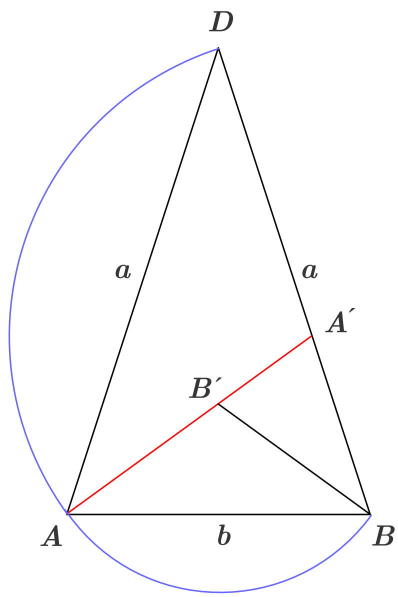
2. Se traza una circunferencia con centro en A' y de radio AA'.
3. De esta circunferencia consideramos el arco AD.



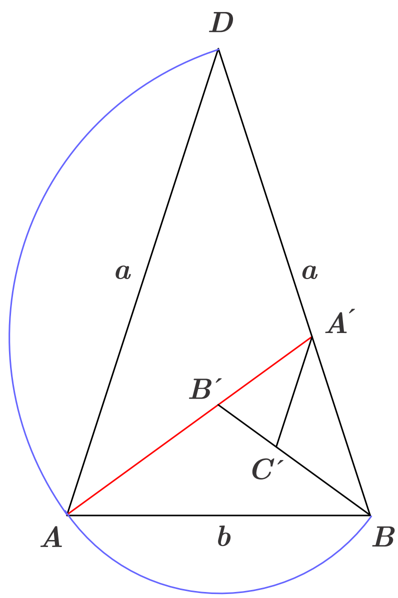
4. Se traza la bisectriz del $\measuredangle B$ que corta al segmento AA', a este punto se le llama B'. Obteniendo así otro triángulo áureo ya que conserva los mismos ángulos que los anteriores.



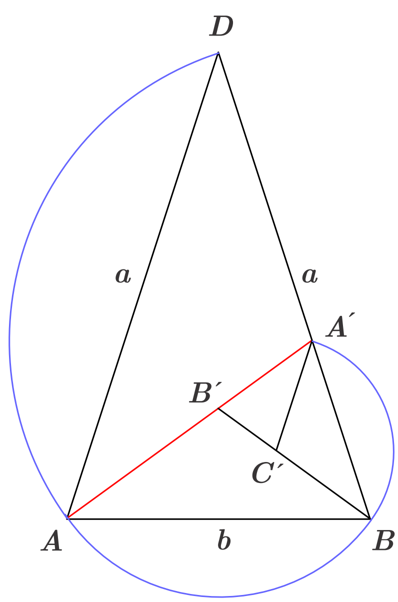
5. Se traza una circunferencia con centro en B' y de radio BB'.
6. De esta circunferencia consideramos el arco AB.



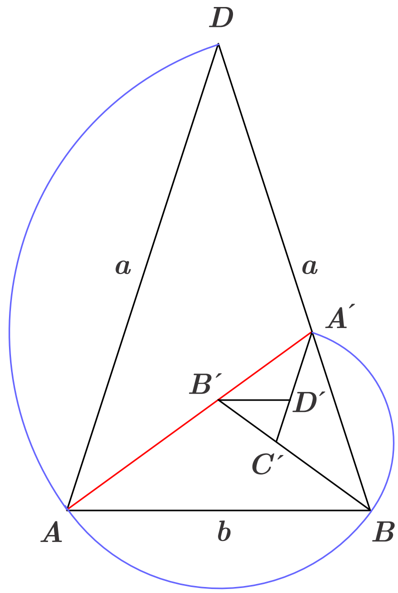
7. Se traza la bisectriz del $\measuredangle A'$ que corta al segmento BB', a este punto se le llama C'.



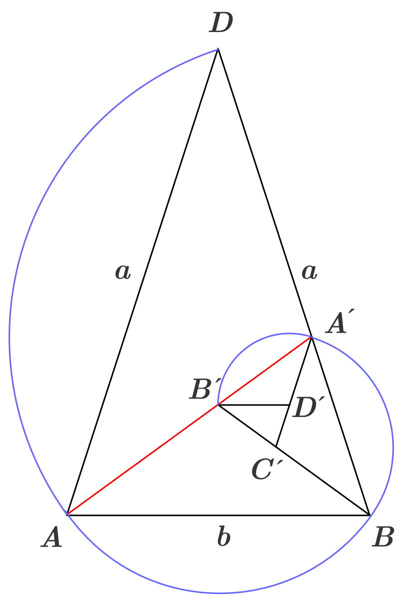
8. Se traza una circunferencia con centro en C' y de radio $C'A'$.
9. De esta circunferencia consideramos el arco BA'.



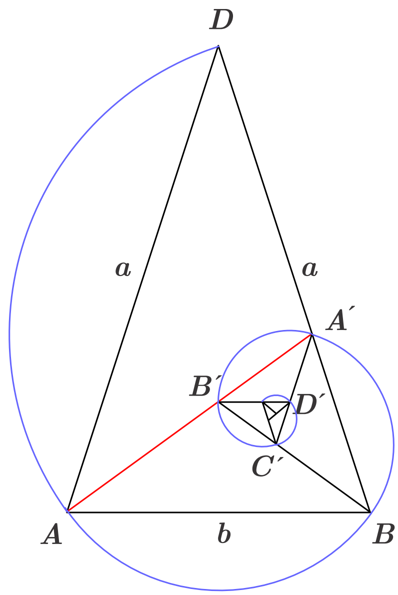
10. Se traza la bisectriz del $\measuredangle B'$ que corta al segmento $C'A'$, a este punto se le llama D'.



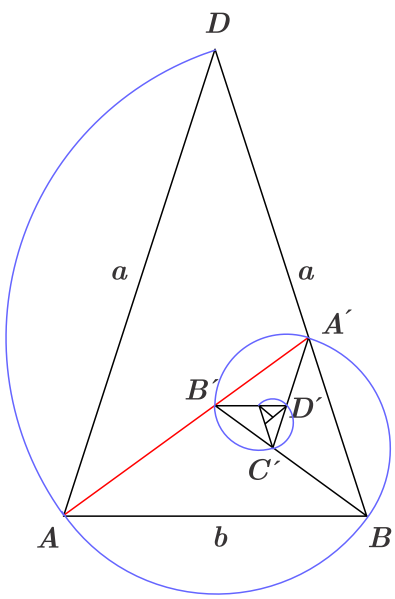
11. Se traza una circunferencia con centro en D' y de radio $D'B'$.
12. De esta circunferencia consideramos el arco $A'B'$.

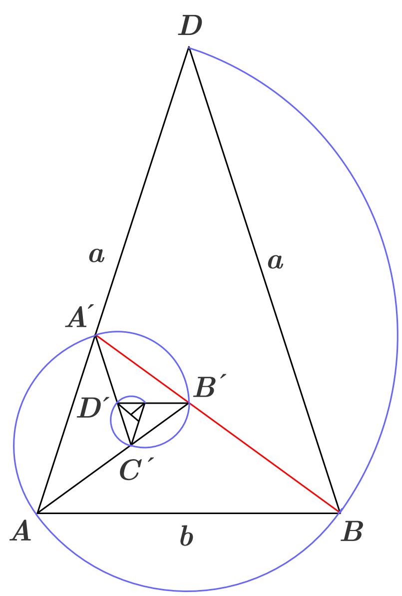


Se sigue así una sucesión infinita de triángulos áureos convergiendo al polo de una espiral que pasa por los vértices de los triángulos.



También se puede construir una espiral considerando la bisectriz del ángulo B.



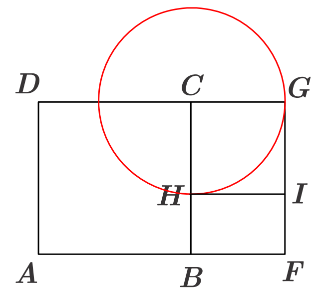


ESPIRAL DEL RECTÁNGULO ÁUREO

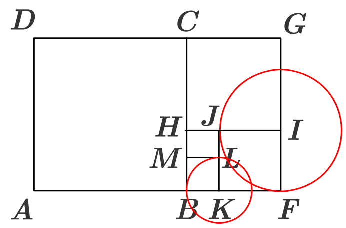
Con el rectángulo áureo podemos trazar el caracol o espiral, lo podemos ir construyendo hacia adentro y hacia afuera.

Primero se construirán los cuadrados y rectángulos hacia adentro:

1. Se traza una circunferencia con centro en C de radio CG. Con la cual se obtiene el punto H.
2. Por el punto H se traza una perpendicular a BC, de tal forma que se obtiene el punto I formando el cuadrado $IGCH$ y el rectángulo $BFIH$.



3. A partir del rectángulo $BFIH$, se traza una circunferencia con centro en I y de radio IF obteniendo el cuadrado $FIJK$ y el rectángulo $KJHB$.
4. Ahora del rectángulo $KJHB$ se traza una circunferencia con centro en K y de radio KB obteniendo el cuadrado $KLMB$ y el rectángulo $LJHM$.
5. Así sucesivamente tantas veces como sea posible.



Construcción hacia afuera:

Para este caso se van construyendo cuadrados de longitud igual al lado más grande del rectángulo.

1. Se traza una circunferencia con centro en A y radio AF.
2. Se traza una recta perpendicular a AF que pasa por el punto A.
3. Llamamos N al punto de intersección de la circunferencia y la recta. De esta forma se determina un lado del cuadrado.
4. Se traza una recta perpendicular a AN que pasa por el punto N y una recta paralela AN que pasa por F, se localiza el punto de intersección de estas dos rectas. El punto se denota como O.

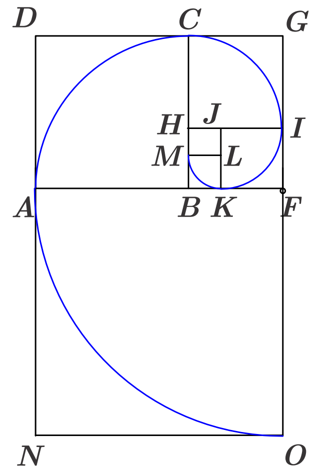
Así con este cuadrado $ANOF$ se obtiene otro rectángulo de oro $DNOG$.

Con los pasos similares a los anteriores se construye otro cuadrado de lado OG.

De esta forma se van construyendo cuadrados que dan como resultado rectángulos de oro.

Construyendo la espiral

Se pude empezar de adentro hacia afuera o viceversa. En este caso se empezará de adentro hacia afuera:



1. Tomamos el cuadrado $BKLM$, y se traza un arco con centro en L y radio LM.
2. Del cuadrado $KFIJ$, se traza otro arco con centro en J y radio JK.
3. Ahora del cuadrado $HIGC$, se traza el arco con centro en Hy radio HI.
4. Del cuadrado $ABCD$, se traza el arco con centro en B y radio BC.
5. Y así sucesivamente para cada siguiente cuadrado.

De esta manera se va formando la espiral del rectángulo de oro.

CAPÍTULO 4

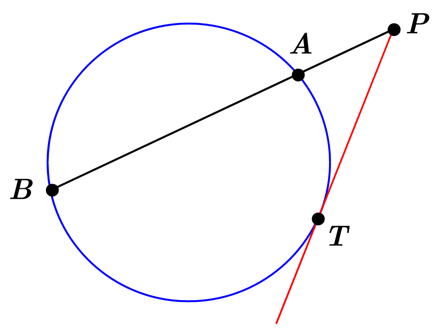
LA RAZÓN ÁUREA Y LAS CÓNICAS

LA PROPORCIÓN ÁUREA ENTRE LA SECANTE Y LA TANGENTE DE UNA CIRCUNFERENCIA.

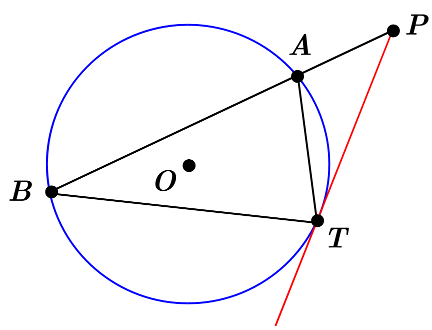
Lema:

Si desde un punto exterior P de una circunferencia se traza una secante corta en AB y una tangente PT, entonces la tangente PT es la media proporcional entre la secante PB y el segmento externo PA; es decir

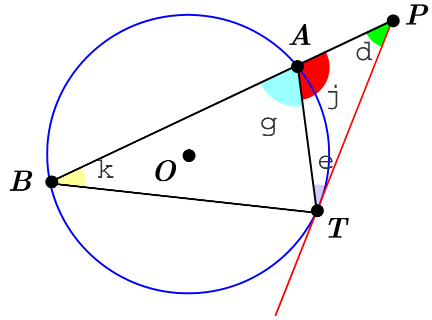
$$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA}$$



Para comprobarlo trazamos los segmentos AT y BT



Considerando los triángulos $\triangle PAT$ y $\triangle PTB$.



Renombrando los ángulos

$\alpha = \measuredangle TPA$, $\beta = \measuredangle ATP,\ \gamma = \measuredangle PAT$, $\delta = \measuredangle TAB$ y $\eta = \measuredangle PBT$.

δ abarca el arco BT.

Como el ángulo exterior es igual al arco mayor menos el arco menor:

$$\begin{aligned}\alpha &= arco\ BT - arcoTA \\ &= \delta - \eta\end{aligned}$$

Por un lado tenemos que

$$\alpha + \gamma + \beta = 180°$$

$$\delta - \eta + \gamma + \beta = 180°$$

Y por otro lado

$$\delta + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - \delta$$

así

$$\delta - \eta + 180° - \delta + \beta = 180°$$

$$\beta = \eta$$

Po lo tanto:

$$\measuredangle PBT = \measuredangle ATP.$$

Son iguales por que son $\frac{1}{2}\measuredangle AOT,$ donde O es el centro de la circunferencia. Esto sucede porque la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco que abarca, es decir, la mitad del ángulo correspondiente.

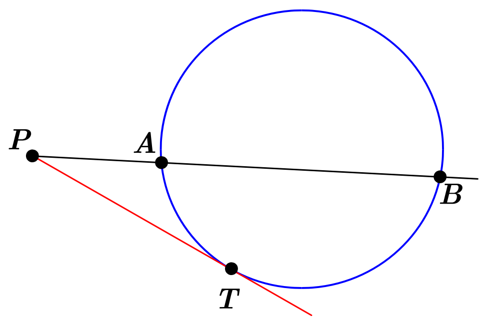
Entonces por el criterio AA los triángulos $\triangle PTB$ y $\triangle PAT$ son semejantes, de donde

$$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA}$$

Así PT es la media proporcional entre PA y PB.

Proposición 1:

Sea P un punto fuera de la circunferencia, una secante que corta a la circunferencia en A y B tal que la cuerda AB tiene la misma longitud que la tangente PT. Encontrar el valor numérico de la razón $\frac{PB}{AB}$.



Para encontrarlo vamos a utilizar el lema que nos dice: la tangente al cuadrado es igual al producto de toda la secante por el segmento exterior de la secante.

$$(PT)^2 = PB \cdot PA$$

Como

$$PT = AB,$$

Entonces

$$(AB)^2 = PA \cdot PB.$$

Pero $PA = PB - AB$. Entonces:

$$(AB)^2 = PB(PB - AB)$$

$$(AB)^2 = (PB)^2 - AB \cdot PB$$

De donde

$$(PB)^2 - AB \cdot PB - (AB)^2 = 0.$$

Dividiendo todo entre $(AB)^2$:

$$\frac{(PB)^2}{(AB)^2} - \frac{PB}{AB} - 1 = 0.$$

Haciendo

$$\frac{PB}{AB} = x,$$

tenemos

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

que sabemos tiene solución positiva:

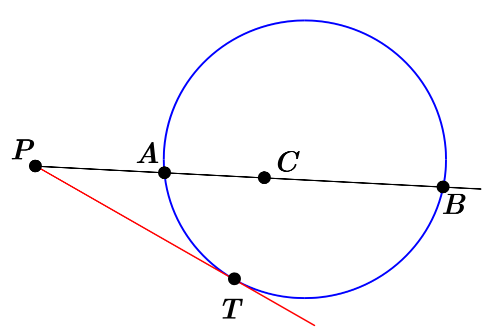
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{PB}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Proposición:

Sea P un punto fuera de una circunferencia, una secante por P corta a la circunferencia en A y B, de manera que la cuerda AB tiene la misma longitud que la tangente PT. Sea C un punto sobre PB de manera que $PC = PT$. Determinar la razón $\frac{CB}{AC}$:



Del ejercicio anterior tenemos que $\frac{PB}{AB} = \varphi$

También hemos visto que los triángulos $\triangle PTB$ y $\triangle PAT$ son semejantes por lo que

$$* \ \frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA} = \frac{PB - PT}{PT - PA} = \frac{PB - PC}{PC - PA} = \frac{CB}{AC}$$

$$\therefore \frac{CB}{AC} = \frac{PB}{PT} = \frac{PB}{AB} = \varphi.$$

*Esto se sigue de que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$$

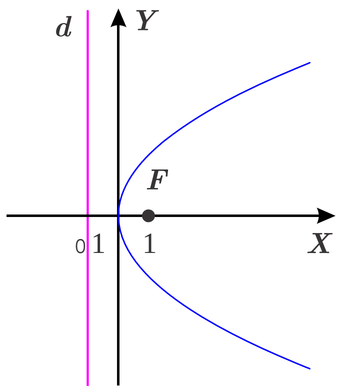
LA PARÁBOLA Y LA RAZÓN ÁUREA

Se tiene una parábola cuya ecuación es

$$y^2 = 4x$$

Entonces se trata de una parábola horizontal con vértice en el origen, parámetro $p = 1$, foco $F(1,0)$ y directriz con ecuación $x = -1$.

Sea $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, es decir, la razón áurea y $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.



- Localizamos el punto P en la parábola cuya abscisa es φ^2 y con ordenada positiva es decir, que cumple:

$$y^2 = 4\varphi^2, \qquad y > 0$$
$$|y| = 2\varphi$$

de donde

$$P(\varphi^2, 2\varphi)$$

- Calculamos la ecuación de la recta que pasa por $\mathrm{P}(\varphi^2, 2\varphi)$ y por $F(1,0)$:

$$y = \frac{2\varphi}{\varphi^2 - 1}(x - 1),$$

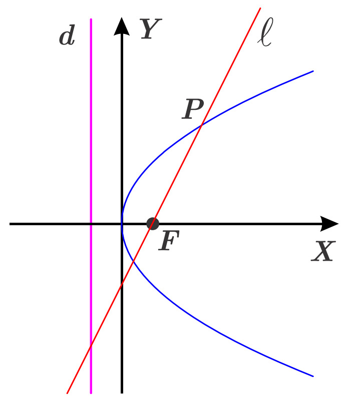
Simplificando la pendiente de esta recta, usando que

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\frac{2\varphi}{\varphi^2 - 1} = \frac{2\varphi}{\varphi} = 2$$

Así la ecuación de la recta l es:

$$y = 2(x - 1)$$



- Localizamos el punto de intersección A de la recta l con el eje Y, esto es resolver el sistema

$$y = 2(x - 1)$$
$$x = 0$$

de donde

$$y = -2$$

así

$$A(0, -2)$$

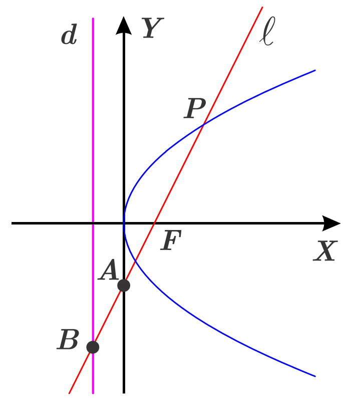
- Para determinar el punto de intersección B de la recta l con la directriz resolvemos el siguiente sistema

$$y = 2(x - 1)$$
$$x = -1$$

de manera que

$$y = 2(-1 - 1)$$
$$y = -4$$

de donde $B(-1, -4)$



- Para encontrar la otra intersección de la recta l con la parábola $y^2 = 4x$, resolvemos lo siguiente

$$y = 2\left(\frac{y^2}{4} - 1\right)$$
$$y = \frac{y^2}{2} - 2$$
$$0 = y^2 - 2y - 4$$

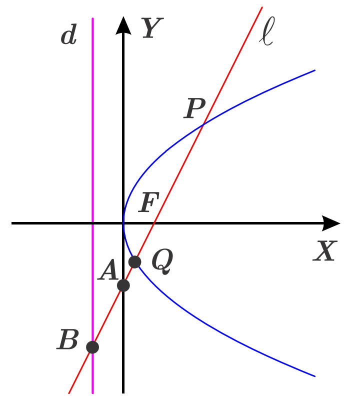
resolvemos para y

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-4)}}{2}$$
$$y = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$
$$y = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$
$$y = 1 \pm \sqrt{5}$$

es decir,

$$y = 1 + \sqrt{5} = 2\varphi \qquad \text{o} \qquad y = 1 - \sqrt{5} = 2\varphi',$$

Así el punto $Q\left(\varphi'^2, 2\varphi'\right)$ es el otro punto de intersección de la recta con la parábola.



- La distancia de $P(\varphi^2, -2\varphi)$ a $F(1,0)$:

$$d(P,F) = \sqrt{(\varphi^2-1)^2+(-2\varphi)^2}$$
$$= \sqrt{\varphi^4-2\varphi^2+1+4\varphi^2}$$
$$= \sqrt{(\varphi^2+1)^2}$$
$$= |\varphi^2+1|$$
$$= \varphi^2+1$$

como $\varphi^2 = \varphi + 1$, se tiene que:

$$(P,F) = \varphi + 1 + 1$$
$$= \varphi + 2$$

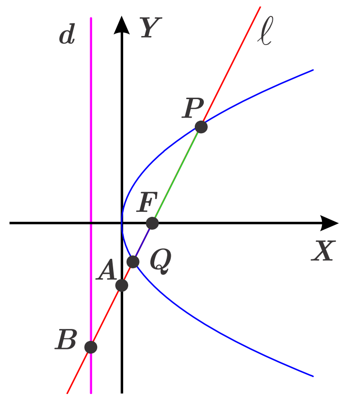
- La distancia de $Q\left(\varphi'^2, 2\varphi'\right)$ a $F(1,0)$ es:

$$d(Q,F) = \sqrt{\left(\varphi'^2-1\right)^2+(2\varphi')^2}$$
$$= \sqrt{\varphi'^4-2\varphi'^2+1+4\varphi'^2}$$
$$= \sqrt{\left(\varphi'^2+1\right)^2}$$
$$= \left|\varphi'^2+1\right|$$
$$= \varphi'^2+1,$$

como φ' también cumple que $(\varphi')^2 = \varphi'$ +1

por lo tanto

$$d(Q,F) = \varphi' + 2$$



Como φ y φ' son soluciones de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, se tiene que

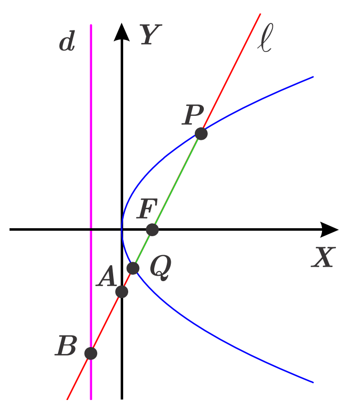
$$x^2 - x - 1 = (x - \varphi)(x - \varphi') = x^2 - (\varphi + \varphi') + \varphi\varphi' = 0$$

por lo que:

$$\varphi + \varphi' = 1$$
$$\varphi\varphi' = -1$$

- Usaremos lo anterior para encontrar la longitud de la cuerda PQ es:

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= d(P,F) + d(Q,F) \\ &= \varphi + 2 + \varphi' + 2 \\ &= \varphi + \varphi' + 4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

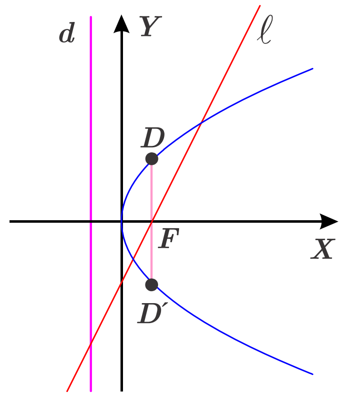


- Como el lado recto es el segmento que pasa por el foco $F(1,0)$ y es perpendicular al eje X, entonces los puntos de intersección de la parábola con el lado recto son:
  De $y^2 = 4p$:

$$y^2 = 4(1)$$

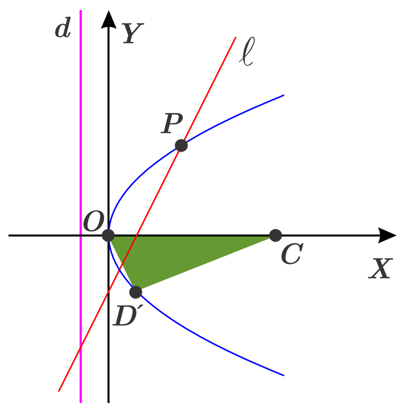
$$|y| = 2$$

Es decir, $D(1,2)$ y $D'(1,-2)$.



- Ahora veamos que los puntos $\mathrm{P}(\varphi^2, 2\varphi)$, $C(6,0)$, $O(0,0)$, $D'(1,-2)$ y $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$ son concíclicos.

  Para demostrarlo primero encontramos la circunferencia que pasa por $C(6,0)$, $O(0,0)$ y $D'(1,-2)$. Considerando el triángulo cuyos vértices son estos tres puntos:



  Construimos las mediatrices de dos de los lados del triángulo. Para ello localizamos los puntos medios de los lados OD' y CO:

  Punto medio de OD': $\left(\frac{0+1}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

  Punto medio de CO: $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3,0)$

  Calculamos las pendientes de los lados CO y OD' del triángulo:

  Pendiente OD': $m_1 = \frac{-2-0}{1-0} = -2$.

Pendiente de CO: $m_2 = \frac{-0-0}{0-6} = 0$.

Como la mediatriz es la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular él, entonces la mediatriz del lado OD' es la que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$:

Entonces su ecuación es:

$$y - (-1) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

La mediatriz del lado CO es la recta vertical que pasa por el punto $(3,0)$:

$$x = 3$$

Para encontrar el circuncentro, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las mediatrices:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$
$$x = 3$$

De donde

$$y = \frac{1}{2}(3) - \frac{5}{4}$$
$$y = \frac{1}{4}$$

Entonces el circuncentro es $E\left(3, \frac{1}{4}\right)$

Para determinar el radio, se calcula la distancia de $E\left(3, \frac{1}{4}\right)$ a cualquier vértice del triángulo, por ejemplo a $O(0,0)$:

$$r = \sqrt{(3-0)^2 + \left(\frac{1}{4} - 0\right)^2}$$
$$= \sqrt{9 + \frac{1}{16}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{145}$$

Así que la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{145}{16}$$

Ahora se verificará que los puntos $\mathrm{P}(\varphi^2, 2\varphi)$ y $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$ están en la circunferencia sustituyendo cada uno en la ecuación anterior:
Para el punto $\mathrm{P}(\varphi^2, 2\varphi)$:

$$(\varphi^2-3)^2+\left(2\varphi-\frac{1}{4}\right)^2=(\varphi-2)^2+\left(\frac{8\varphi-1}{4}\right)^2$$

$$=\frac{16(\varphi^2-4\varphi+4)+64\varphi^2-16\varphi+1}{16}$$

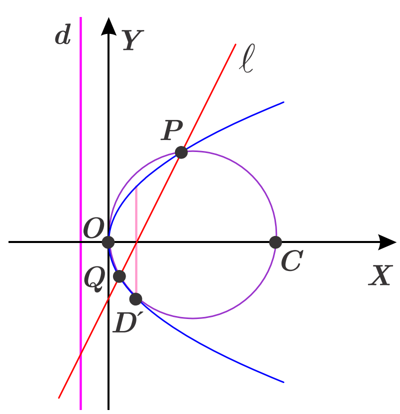
$$=\frac{80\varphi^2-80\varphi+65}{16}$$

$$=\frac{80+65}{16}$$

$$=\frac{145}{16}$$

Para el punto $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$; es análogo ya que ${\varphi'}^2=\varphi'+1$.

Por lo tanto, los puntos $P(\varphi^2, 2\varphi)$, $C(6,0)$, $O(0,0)$, $D'(1,-2)$ y $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$ son con cíclicos.



- La distancia de $P(\varphi^2, 2\varphi)$ a $B(-1,-4)$ es

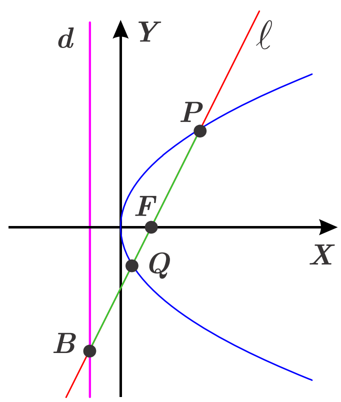
$$
\begin{aligned}
d(P,B) &= \sqrt{(\varphi^2+2)^2+(2\varphi+4)^2} \\
&= \sqrt{(\varphi+2)^2+4(\varphi+2)^2} \\
&= \sqrt{(\varphi+2)^2(1+4)} \\
&= \sqrt{5}(\varphi+2)
\end{aligned}
$$

Como $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Entonces:$\sqrt{5} = 2\varphi - 1$

Asi

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{5}(\varphi+2) \\
&= (2\varphi-1)(\varphi+2) \\
&= 2\varphi^2+3\varphi-2 \\
&= 2\varphi+2+3\varphi-2 \\
&= 5\varphi.
\end{aligned}
$$



Y la distancia $Q(\varphi'^2, 2\varphi')$ a $B(-1,-4)$ es:

Igual que antes sabemos que φ' también cumple $\varphi'^2 = \varphi' + 1$

Sólo que ahora

$$\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

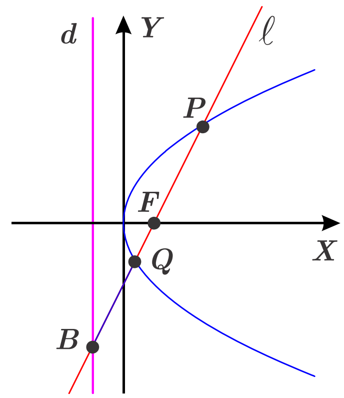
Por lo tanto

$$\sqrt{5} = 1 - 2\varphi'$$

Lo que lleva

$$
\begin{aligned}
d(Q,B) &= \sqrt{5}(\varphi'+2) \\
&= (1-2\varphi')(\varphi'+2)
\end{aligned}
$$

$$= -5\varphi'$$



- Calculamos las rectas que pasan por $P(\varphi^2, 2\varphi)$, y $D'(1,-2)$, y por $Q(\varphi'^2, 2\varphi')$ y $D(1,2)$:
  La recta que pasa por $P(\varphi^2, 2\varphi)$, y $D'(1,-2)$ es:

$$y + 2 = \frac{-2 - 2\varphi}{1 - \varphi^2}(x - 1)$$
$$y + 2 = \frac{2 + 2\varphi}{\varphi^2 - 1}(x - 1).$$

Simplificamos la pendiente

$$\frac{2 + 2\varphi}{\varphi^2 - 1} = \frac{2(1 + \varphi)}{(\varphi + 1)(\varphi - 1)}$$
$$= \frac{2}{(\varphi - 1)},$$

sustituimos a φ

$$= \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{5} - 1},$$

es decir,

$$y + 2 = \frac{2 + 2\varphi}{\varphi^2 - 1}(x - 1)$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{5}-1}(x-1) - 2.$$

Ahora la recta que pasa por $Q(\varphi'^2, 2\varphi')$ y $D(1,2)$ es:

$$y - 2 = \frac{2-2\varphi'}{1-\varphi'^2}(x-1).$$

Simplificamos la pendiente

$$\frac{2-2\varphi'}{1-\varphi'^2} = \frac{2(1-\varphi')}{(1+\varphi')(1-\varphi')}$$

$$= \frac{2}{1+\varphi'},$$

sustituyendo a φ'

$$= \frac{2}{1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{4}{3-\sqrt{5}}.$$

De donde

$$y - 2 = \frac{2-2\varphi'}{1-\varphi'^2}(x-1)$$
$$y = \frac{4}{3-\sqrt{5}}(x-1) + 2.$$

- ¿En dónde se cortan estas rectas?

$$y = \frac{4}{\sqrt{5}-1}(x-1) - 2$$
$$y = \frac{4}{3-\sqrt{5}}(x-1) + 2.$$

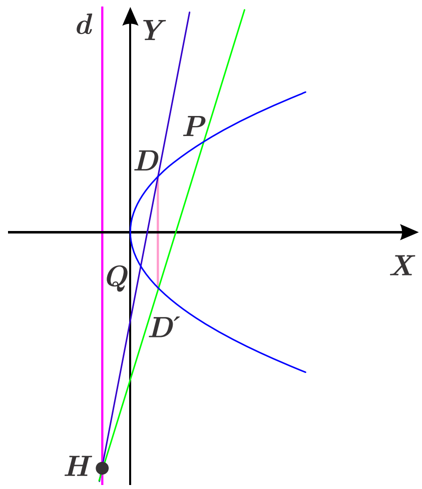
Resolviendo la igualdad para encontrar el valor de x

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1}(x-1)-2=\frac{4}{3-\sqrt{5}}(x-1)+2$$
$$x\left(\frac{4}{\sqrt{5}-1}\right)-x\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{\sqrt{5}-1}-\frac{4}{3-\sqrt{5}}+4$$
$$x4\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{3-\sqrt{5}}\right)=4\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{3-\sqrt{5}}+1\right)$$
$$x\left(\frac{(3-\sqrt{5})-(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})}\right)=\left(\frac{(3-\sqrt{5})-(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})}\right)$$
$$x\left((3-\sqrt{5})-(\sqrt{5}-1)\right)=\left((3-\sqrt{5})-(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})\right)$$
$$x(4-2\sqrt{5})=(-4+2\sqrt{5})$$
$$x=\frac{-(4-2\sqrt{5})}{4-2\sqrt{5}}$$
$$x=-1.$$

Sustituimos $x=-1$ para encontrar el valor de y

$$\begin{aligned}
y&=\frac{4}{\sqrt{5}-1}(-1-1)-2\\
&=\frac{4}{\sqrt{5}-1}(-2)-2\\
&=\frac{-8}{\sqrt{5}-1}-2\\
&=\frac{-8-2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1}\\
&=\frac{-6-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\\
&=\frac{(-6-2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\
&=\frac{-16-8\sqrt{5}}{4}\\
&=-4-2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Por lo que el punto de intersección es $H(-1,-4-2\sqrt{5})$. Se observa que este punto se encuentra sobre la directriz de la parábola.



- Las tangentes a la parábola en los puntos $P(\varphi^2, 2\varphi)$ y $Q\left(\varphi'^2, 2\varphi'\right)$.

Como el punto $P(\varphi^2, 2\varphi)$ se encuentra en la parte superior de la parábola, se considera la función

$$y^2 = 4x$$

la derivación implícita da que

$$2ydy = 4dx$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

entonces la pendiente de la recta tangente en el punto P es

$$\begin{aligned} m &= \frac{2}{2\varphi} \\ &= \frac{1}{\varphi} \\ &= -\varphi' \end{aligned}$$

ya que

$$\varphi\varphi' = -1.$$

Y la ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{aligned} y - 2\varphi &= -\varphi'(x - \varphi^2) \\ y &= -\varphi' x + \varphi'\varphi^2 + 2\varphi \\ y &= -\varphi' x - \varphi + 2\varphi, \end{aligned}$$

es decir,

$$y = -\varphi' x + \varphi.$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente en $Q(\varphi'^2, 2\varphi')$:
Igual que antes:

$$2ydy = 4dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

Por lo tanto

$$m = \frac{2}{2\varphi}$$
$$m = \frac{1}{\varphi'}$$
$$m = -\varphi.$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2\varphi' = -\varphi(x - \varphi'^2)$$
$$y = -\varphi x + \varphi\varphi'^2 + 2\varphi',$$

es decir,

$$y = -\varphi x + \varphi'.$$

- Para encontrar el punto donde se cortan estas dos tangentes, se resuelve el siguiente sistema

$$y = -\varphi' x + \varphi$$
$$y = -\varphi x + \varphi'.$$

Resolviendo la siguiente igualdad

$$-\varphi' x + \varphi = -\varphi x + \varphi'$$
$$-\varphi' x + \varphi x = \varphi' - \varphi$$
$$x(-\varphi' + \varphi) = \varphi' - \varphi$$
$$x(-\varphi' + \varphi) = \varphi' - \varphi$$
$$x = \frac{\varphi' - \varphi}{-\varphi' + \varphi}$$
$$x = \frac{-(-\varphi' + \varphi)}{-\varphi' + \varphi},$$

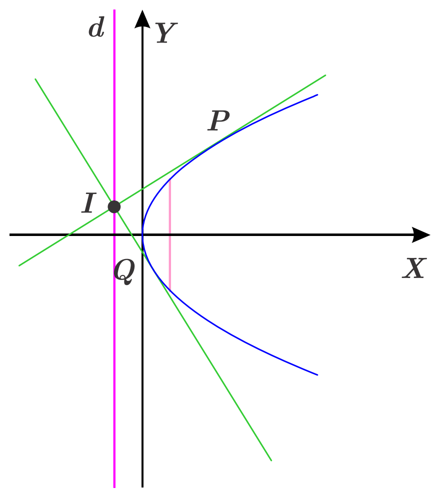
es decir,

$$x = -1.$$

Sustituimos en alguna de las ecuaciones

$$y = -\varphi' x + \varphi$$
$$y = \varphi' + \varphi$$
$$y = 1.$$

Así las rectas se cortan en el punto $I(-1,1)$, y este punto se encuentra en la directriz de la parábola.



- La ecuaciones de las rectas normales a los puntos $P(\varphi^2, 2\varphi)$ y $Q(\varphi'^2, 2\varphi')$.

  Como la pendiente de la recta tangente en $P(\varphi^2, 2\varphi)$ es $-\varphi'$ entonces la pendiente de la recta normal es

$$-\frac{1}{-\varphi'} = \frac{1}{\varphi'}$$

como $-1 = \varphi\varphi'$

$$-\frac{1}{-\varphi'} = \frac{1}{\varphi'} = -\varphi$$

y la ecuación es

$$\begin{aligned} y - 2\varphi &= -\varphi(x - \varphi^2) \\ &= -\varphi x + \varphi^3 + 2\varphi \\ &= -\varphi x + 4\varphi + 1. \end{aligned}$$

Esto es por que:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1 \\ \varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi \\ &= 2\varphi + 1 \end{aligned}$$

Como la pendiente de la recta tangente en $Q(\varphi'^2, 2\varphi')$ es $-\varphi$, entonces la pendiente de la recta normal es

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{-\varphi} &= \frac{1}{\varphi} \\
&= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} \\
&= -\varphi'
\end{aligned}
$$

y la ecuación es

$$
\begin{aligned}
y - 2\varphi' &= -\varphi'(x - \varphi'^2) \\
y &= -\varphi' x + \varphi'^3 + 2\varphi'.
\end{aligned}
$$

Para encontrar el punto de intersección de las rectas normales, resolvemos el sistema

$$
\begin{gathered}
y = -\varphi x + \varphi^3 + 2\varphi = -\varphi x + 4\varphi + 1 \\
y = -\varphi' x + \varphi'^3 + 2\varphi' = -\varphi' x + 4\varphi' + 1,
\end{gathered}
$$

resolviendo la siguiente igualdad

$$
\begin{gathered}
-\varphi x + 4\varphi + 1 = -\varphi' x + 4\varphi' + 1 \\
(\varphi' - \varphi)x = 4(\varphi' - \varphi) \\
x = 4\frac{(\varphi' - \varphi)}{(\varphi' - \varphi)}
\end{gathered}
$$

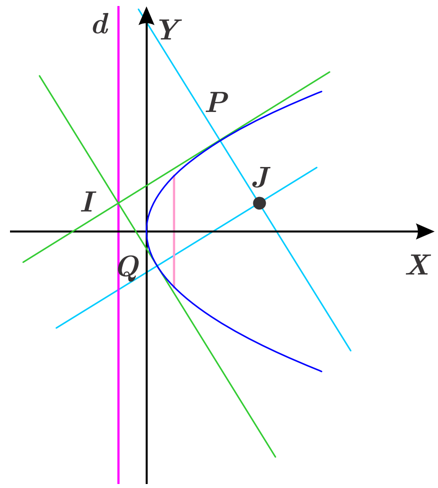
por lo tanto

$$x = 4.$$

Ahora calculamos el valor para y sustituyendo a x en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
y &= -\varphi x + 4\varphi + 1 \\
&= -\varphi(4) + 4\varphi + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

De donde $J(4,1)$ es el punto de intersección de las normales.



- La normal y la tangente en el punto P son perpendiculares. Lo mismo sucede con la tangente y la normal en el punto Q.
  La tangente en el punto P tiene ecuación

$$y = -\varphi' x + \varphi$$

y la tangente en el punto Q tiene ecuación

$$y = -\varphi x + \varphi'.$$

Como el producto de las pendientes es

$$(-\varphi')(-\varphi) = \varphi'\varphi = -1.$$

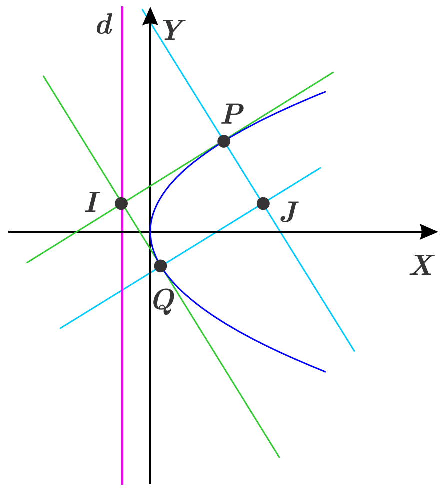
Entonces las rectas tangentes son perpendiculares.

Análogamente las rectas normales son

$$y = -\varphi x + \varphi^3 + 2\varphi$$
$$y = -\varphi' x + {\varphi'}^3 + 2\varphi'.$$

como el producto de sus pendientes es -1, así también son perpendiculares.

Las rectas tangentes y normales forman un rectángulo con vértices P, I, Q y J.



- La longitud de los lados del rectángulo $PIQJ$.
  La distancia de $J(4,1)$ a $P(\varphi^2, 2\varphi)$ es:

$$
\begin{aligned}
d(J,P) &= \sqrt{(4-\varphi^2)^2 + (1-2\varphi)^2} \\
&= \sqrt{\left(4-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^2 + \left(1-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(4-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(1-1-\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 5} \\
&= \sqrt{\frac{25-10\sqrt{5}+5+20}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{50-10\sqrt{5}}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{25-5\sqrt{5}}{2}} \\
&= \sqrt{5\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

La distancia de $I(-1,1)$ a $P(\varphi^2, 2\varphi)$ es:

$$
\begin{aligned}
d(I,P) &= \sqrt{(-1-\varphi^2)^2 + (1-2\varphi)^2} \\
&= \sqrt{\left(-1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^2 + \left(1-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(-1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(1-1-\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 5} \\
&= \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}+5+20}{4}} \\
&= \sqrt{5\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

así el producto de los lados es:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}\sqrt{5\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} &= 5\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} \\
&= 5\sqrt{\frac{20}{4}} \\
&= 5\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\varphi - \varphi' &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{2} \\
&= \sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Entonces el área del rectángulo es $5(\varphi - \varphi')$.

Otro resultado importante es la proporción que guardan las distancias entre los siguientes puntos:

- La razón de la distancia de $P(\varphi^2, 2\varphi)$ a $F(1,0)$, entre la distancia de $F(1,0)$ a $A(0,-2)$.

  La distancia de $P(\varphi^2, 2\varphi)$ a $F(1,0)$ es
  $$d(P,F) = \sqrt{(\varphi^2-1)^2+(2\varphi)^2} = \sqrt{(\varphi^2+1)^2}$$
  $$= \varphi^2+1.$$

  La distancia de $F(1,0)$ a $A(0,-2)$ es
  $$\begin{aligned} d(F,A) &= \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \\ &= \sqrt{1+4} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

  ahora realizando el cociente de $d(P,F)$ entre $d(F,A)$ para encontrar la razón
  $$\begin{aligned} \frac{d(P,F)}{d(F,A)} &= \frac{\varphi^2+1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi+2}{\varphi-\varphi'} \\ &= \frac{\varphi+2}{\varphi-\frac{1}{\varphi}} \\ &= \frac{\varphi(\varphi+2)}{\varphi^2+1} \\ &= \frac{\varphi(\varphi+2)}{\varphi+2'} \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

  Por lo tanto
  $$\frac{d(P,F)}{d(F,A)} = \varphi.$$

- La razón de la distancia de $F(1{,}0)$ a $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$, entre la distancia de $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$ a $A(0,-2)$.

La distancia de $F(1{,}0)$ a $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$ es

$$
\begin{aligned}
(Q,F) &= \sqrt{\left({\varphi'}^2-1\right)^2+(2\varphi')^2} \\
&= \sqrt{\left({\varphi'}^2+1\right)^2} \\
&= {\varphi'}^2+1 \\
&= \varphi'+2
\end{aligned}
$$

La distancia de $Q\left({\varphi'}^2, 2\varphi'\right)$ a $A(0,-2)$ es

$$
\begin{aligned}
(Q,A) &= \sqrt{\left({\varphi'}^2\right)^2+(2\varphi'+2)^2} \\
&= \sqrt{{\varphi'}^4+4{\varphi'}^2+8\varphi'+4} \\
&= \sqrt{{\varphi'}^4+4(\varphi'+1)^2} \\
&= \sqrt{{\varphi'}^4+4\varphi^2} \\
&= \sqrt{{\varphi'}^4(1+4)} \\
&= {\varphi'}^2\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Realizando el cociente de $\frac{(Q,F)}{(Q,A)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d(P,F)}{d(F,A)} &= \frac{\varphi'+2}{{\varphi'}^2\sqrt{5}} \\
&= \frac{\varphi'+2}{{\varphi'}^2(\varphi-\varphi')} \\
&= \frac{-\frac{1}{\varphi}+2}{\frac{1}{\varphi^2}\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(-\varphi + 2\varphi^2)\varphi}{\varphi^2 + 1}$$
$$= \frac{\varphi(\varphi^2 + \varphi + 1 - \varphi)}{\varphi^2 + 1}$$
$$= \varphi.$$

LA ELIPSE Y LA RAZÓN ÁUREA

Si se tiene una elipse cuya ecuación es

$$x^2 + \varphi^2 y^2 = \varphi^2.$$

Dividiendo todo entre φ^2,

$$\frac{x^2}{\varphi^2} + y^2 = 1 \ldots\ldots\ldots..(1)$$

Que es una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

que corresponde a una elipse con centro en el origen, es horizontal si $a > b$ y es vertical si $a < b$.

De (1) y de (2) se tiene que:

$$a^2 = \varphi^2,$$

de donde

$$a = \varphi$$

y

$$b = 1$$

Como

$$\varphi > 1,$$

Entonces la elipse en horizontal.

Ahora calculamos la excentricidad. Como

$$e = \frac{c}{a},$$

entonces tenemos que determinar c, para ello utilizamos:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

esto es

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 - b^2\\
c^2 &= a^2 - (1)^2\\
c^2 &= \varphi^2 - 1 = \varphi.
\end{aligned}
$$

Vamos trabajar con:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\varphi' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

y

$$\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

así que

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1\\
&= \frac{3+\sqrt{5}-2}{2}\\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
&= \varphi
\end{aligned}
$$

de donde

$$c = \sqrt{\varphi}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{c}{a}\\
&= \frac{\sqrt{\varphi}}{\varphi}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}.
\end{aligned}
$$

Calculamos la longitud de su lado recto, que está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} Lr &= \frac{2b^2}{a} \\ &= \frac{2(1)^2}{\varphi} \\ &= \frac{2}{\varphi} \\ &= 2\varphi'. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud del lado recto es: $2\varphi'$

Calculamos las directrices que tienen por ecuaciones

$$x = \frac{a^2}{c}$$

y

$$x = -\frac{a^2}{c}.$$

Para la primera se tiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi}} \\ &= \varphi^{\frac{3}{2}} \\ &= \varphi\sqrt{\varphi}, \end{aligned}$$

esto es

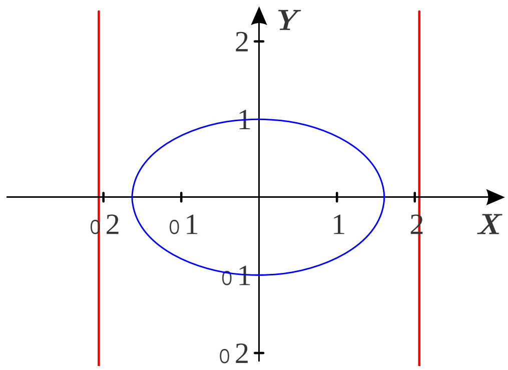
$$x = \varphi\sqrt{\varphi}.$$

Para la segunda se tiene

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi}} \\ &= -\varphi^{\frac{3}{2}} \\ &= -\varphi\sqrt{\varphi}, \end{aligned}$$

esto es

$$x = -\varphi\sqrt{\varphi}.$$

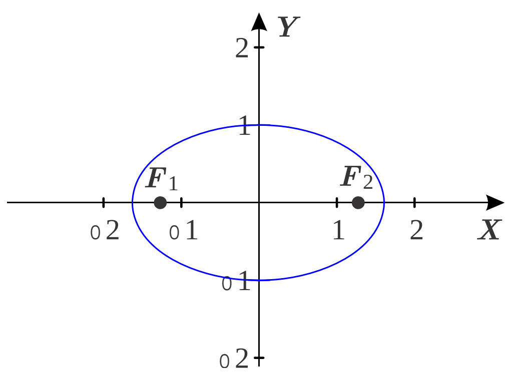


Los focos tienen las siguientes coordenadas

$$F_1(-c, 0) = F_1\left(-\sqrt{\varphi}, 0\right)$$
$$F_2(c, 0) = F_2\left(\sqrt{\varphi}, 0\right).$$

Las coordenadas de los vértices son

$$V_1(-a, 0) = V_1(-\varphi, 0)$$
$$V_2(a, 0) = V_2(\varphi, 0).$$



Ahora calculemos las coordenadas de los puntos extremos del lado recto

Encontremos primero el punto B_1 cuyas coordenadas son $B_1(c, y)$ donde $c = \sqrt{\varphi}$ es decir, $B_1(\sqrt{\varphi}\,, y)$. Para obtener y realizamos lo siguiente:

Partimos de la ecuación

$$\frac{c^2}{\varphi^2} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Donde hacemos $c^2 = \left(\sqrt{\varphi}\right)^2$

$$\frac{\left(\sqrt{\varphi}\right)^2}{\varphi^2} + \frac{y^2}{1} = 1$$
$$\frac{\varphi}{\varphi^2} + \frac{y^2}{1} = 1$$
$$\frac{1}{\varphi} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Despejando y

$$\begin{aligned} |y| &= \sqrt{1 - \frac{1}{\varphi}} \\ &= \sqrt{1 - \varphi'} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{5} + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \\ &= \sqrt{\varphi'^2} \\ &= \varphi'. \end{aligned}$$

Así

$$B_1\left(\sqrt{\varphi}\,, y\right) = B_1(\sqrt{\varphi}\,, \varphi')$$

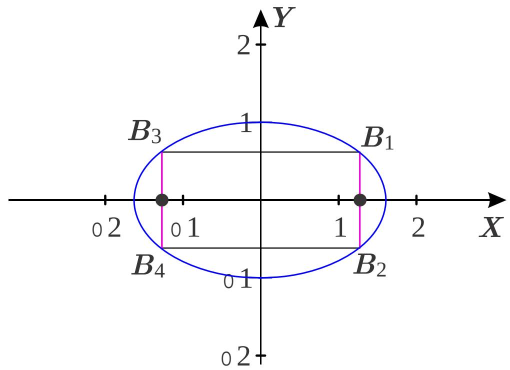
Tomando los simétricos del punto B_1 con respecto a loe ejes coordenados, se tiene:

$$B_2\left(\sqrt{\varphi}\,, y\right) = B_2\left(\sqrt{\varphi}\,, -\varphi'\right),$$

$$B_3\left(-\sqrt{\varphi}\,, y\right) = B_3(-\sqrt{\varphi}\,, \varphi')$$

Y tomando el simétrico de B_3 con respecto al eje Y, tenemos:

$$B_4\left(-\sqrt{\varphi}\,, y\right) = B_4\left(-\sqrt{\varphi}\,, -\varphi'\right).$$



Vamos a calcular el área del rectángulo inscrito formado por los extremos de los lados rectos.

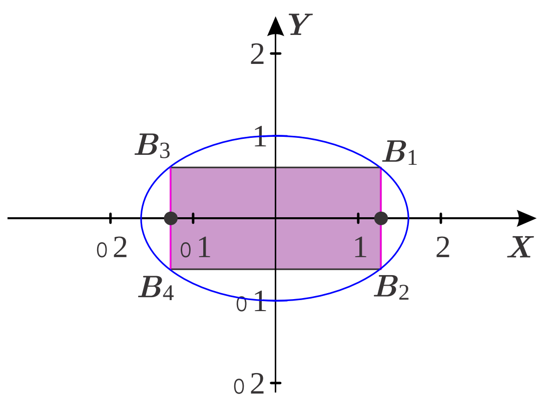
Ya conocemos la longitud del lado recto ($Lr = 2\varphi'$) que es la altura del rectángulo y la base está dada por $2c = 2\sqrt{\varphi}$.

Entonces

$$\begin{aligned} A &= (2c)(Lr) \\ &= (2\varphi')(2\sqrt{\varphi}) \\ &= 4\sqrt{(\varphi')^2\varphi} \\ &= 4\sqrt{\varphi'} \end{aligned}$$

ya que $\varphi\varphi' = 1$

Por lo tanto, el área es $A = 4\sqrt{\varphi'}$.



Proseguimos a calcular sus tangentes utilizando la siguiente ecuación:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Que es la ecuación de la recta tangente a la elipse horizontal en el punto (x_1, y_1).

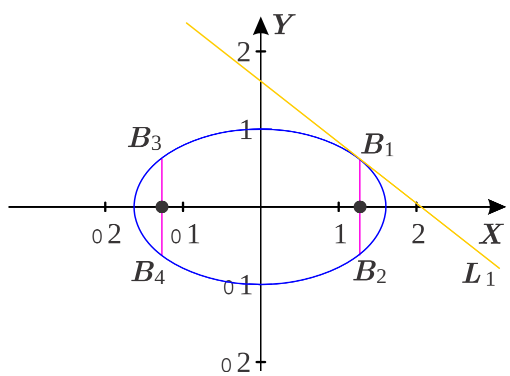
Tangente en el punto $B_1(\sqrt{\varphi}, \varphi')$:

$$\frac{\sqrt{\varphi}x}{\varphi^2} + \frac{\varphi' y}{1} = 1$$
$$\frac{x}{\varphi^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{\varphi} = 1$$
$$y = \varphi\left(1 - \frac{x}{\varphi^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$y = \varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}}.$$

Simplificando tenemos la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $B_1(\sqrt{\varphi}, \varphi')$

$$y = \varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \ldots\ldots L_1$$

La cual llamamos $L1$.



La recta tangente en el punto $B_2(\sqrt{\varphi}, -\varphi')$:

$$\frac{\sqrt{\varphi}x}{\varphi^2} + \frac{-\varphi' y}{1} = 1$$

$$y = -\varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \ldots\ldots L_2$$

La recta tangente en el punto $B_3(-\sqrt{\varphi}, \varphi')$:

$$\frac{-\sqrt{\varphi}x}{\varphi^2}+\frac{\varphi' y}{1}=1$$

de donde

$$y=\varphi+\frac{x}{\sqrt{\varphi}}\ldots\ldots L_3$$

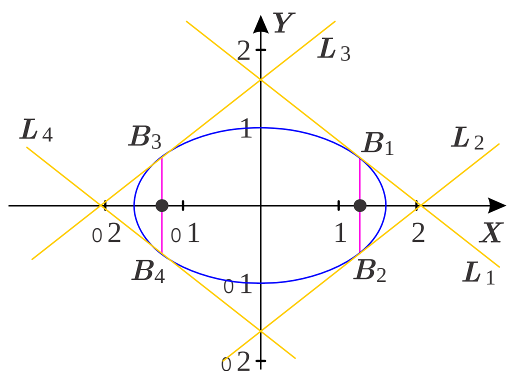
La recta tangente en el punto $B_4(-\sqrt{\varphi}\,,-\varphi')$:

$$\frac{-\sqrt{\varphi}x}{\varphi^2}+\frac{-\varphi' y}{1}=1$$

$$-\sqrt{\varphi}x-\varphi y=\varphi^2$$

$$y=\frac{\varphi^2+\sqrt{\varphi}x}{-\varphi}$$

$$y=-\varphi-\frac{x}{\sqrt{\varphi}}\ldots\ldots L_4$$



Ahora veamos las pendientes de las rectas:

Para L_1:

$$m_1=-\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}$$

Para L_4:

$$m_4=-\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}$$

Para L_2:

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

Para L_3:

$$m_3 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

Observamos que las pendientes m_1 y m_4 son iguales, así también las pendientes m_2 y m_3 son iguales. Entonces las rectas L_1y L_4, son paralelas, sucede lo mismo con L_2 yL_3 .

Por lo que podemos asegurar que el polígono formado por las tangentes es paralelogramo.

Ahora vamos a calcular su área:

Necesitamos conocer los puntos de intersección de las tangentes para conocer sus lados.

Punto de intersección de L_1 y L_2, para ello resolvemos el siguiente sistema:

$$y = \varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \dots \dots L_1$$

$$y = -\varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \dots \dots L_2$$

Igualando, tenemos:

$$\varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} = -\varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}}$$

$$2\varphi = \frac{2x}{\sqrt{\varphi}}$$

$$x = \varphi\sqrt{\varphi}.$$

Sustituyendo a x en L_1

$$y = \varphi - \frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\varphi}}$$
$$y = 0.$$

Por lo tanto el punto de intersección L_1 y L_2 es: $P_1\left(\varphi\sqrt{\varphi}, 0\right)$.

Calculamos el punto de intersección de L_1 y L_3, resolviendo el siguiente sistema:

$$y = \varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \dots\dots L_1$$

$$y = \varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \dots\dots L_3$$

Igualamos ambas ecuaciones, tenemos:

$$\varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} = \varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}}$$
$$0 = x.$$

Sustituimos $x = 0$ en L_3

$$y = \varphi + \frac{0}{\sqrt{\varphi}}$$
$$y = \varphi.$$

Por lo tanto el punto de intersección de L_1 y L_3 es $P_2(0, \varphi)$

Calculamos el punto de intersección de L_4 y L_3, resolviendo el siguiente sistema:

$$y = \varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \dots\dots L_3$$

$$y = -\varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \dots\dots L_4$$

Igualando, tenemos:

$$\varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}} = -\varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}}$$
$$2\varphi = -\frac{2x}{\sqrt{\varphi}}$$
$$x = -\varphi\sqrt{\varphi}.$$

Sustituimos en L_4

$$y = -\varphi - \frac{-\varphi\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\varphi}}$$
$$y = 0.$$

Así que el punto de intersección de L_4 y L_3 es $P_3\left(-\varphi\sqrt{\varphi}, 0\right)$

Calculamos el punto de intersección de L_4 y L_2, resolviendo el siguiente sistema

$$y = -\varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \ldots \ldots L_4$$

$$y = -\varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \ldots \ldots L_2$$

Igualando, tenemos

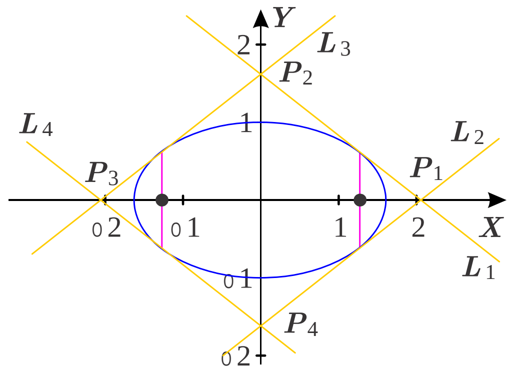
$$-\varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} = -\varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}}$$
$$x = 0.$$

Sustituimos en L_2

$$y = -\varphi + \frac{0}{\sqrt{\varphi}}$$
$$y = -\varphi.$$

Entonces el punto de intersección de L_4 y L_2 es $P_4(0, -\varphi)$

En el cuadrilátero P_1, P_2, P_3 y P_4 los lados $P_1P_2 \parallel P_3P_4$ ya que las rectas L_1 y L_4 tienen la misma pendiente



Tomemos la distancia de $D(P_4, P_1)$ como base. Como $P_4(0, -\varphi)$ y $P_1(\varphi\sqrt{\varphi}, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} D(P_4, P_1) &= \sqrt{\left(\varphi\sqrt{\varphi}\right)^2 + \varphi^2} \\ &= \sqrt{\varphi^3 + \varphi^2} \\ &= \sqrt{\varphi^2(\varphi + 1)} \\ &= \varphi\sqrt{\varphi^2}. \\ &= \varphi^2. \end{aligned}$$

La base del paralelogramo es $b = \varphi^2$.

Ahora calculemos la altura que va del punto P_2, a la rectaL_2 esta recta es paralela a L_4o perpendicular a L_2;

$$y = -\varphi - \frac{x}{\sqrt{\varphi}} \dots \dots L_4$$

Es decir, la pendiente de la perpendicular es $\sqrt{\varphi}$, y pasa por el punto $P_2(0, \varphi)$ por lo que su ecuación de L_5 es de la forma:

$$\begin{aligned} y - \varphi &= \sqrt{\varphi}(x - 0) \\ y &= \sqrt{\varphi}x + \varphi \dots \dots L_5. \end{aligned}$$

Ahora para obtener la altura a, realizamos la distancia de la recta L_2 al punto $P_2(0, \varphi)$, utilizamos la siguiente expresión:

$$D(L, P) = \frac{|Ax_1 + By_1 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Que es la distancia de cualquier punto $P(x_1, y_1)$ a una recta $L: Ax + By + C = 0$

En nuestro caso tenemos

$$y = -\varphi + \frac{x}{\sqrt{\varphi}},$$

es decir,

$$\frac{x}{\sqrt{\varphi}} - y - \varphi = 0.$$

Como

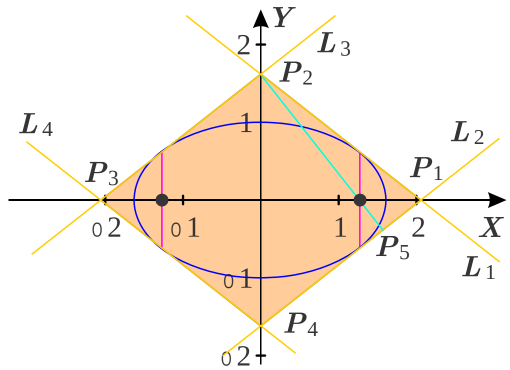
$$P_2(0, \varphi),$$

entonces

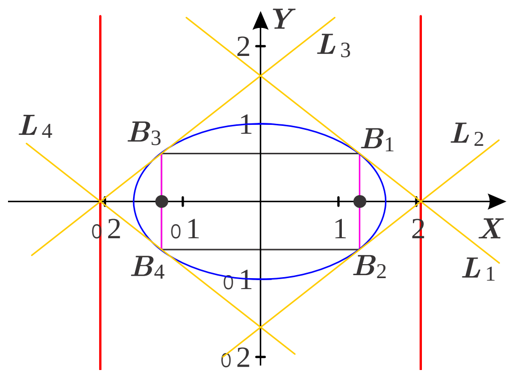
$$\begin{aligned} D(L_5, P_2) &= \frac{\left|\frac{0}{\sqrt{\varphi}} - \varphi - \varphi\right|}{\sqrt{\frac{1}{\varphi} + 1}} \\ &= \frac{|-2\varphi|}{\sqrt{\varphi}} \\ &= 2\sqrt{\varphi}. \end{aligned}$$

Por lo que $a = 2\sqrt{\varphi}$

$$\begin{aligned} A &= b \times a \\ A &= \varphi^2 \times 2\sqrt{\varphi} \\ A &= 2\varphi^2\sqrt{\varphi}. \end{aligned}$$



La figura con todos los datos es:



LA HIPÉRBOLA Y LA RAZÓN ÁUREA

Consideremos la hipérbola con centro en el origen cuya ecuación es:

$$x^2 - \varphi y^2 = \varphi,$$

es decir,

$$\frac{x^2}{\varphi} - y^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

que es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se puede deducir que

$$a^2 = \varphi$$

por lo que

$$a = \sqrt{\varphi}$$

y

$$b = 1.$$

De la relación

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

tenemos que

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = \varphi + 1$$
$$c = \sqrt{\varphi + 1}$$
$$c = \sqrt{\varphi^2}$$
$$c = \varphi,$$

entonces

$$e = \frac{c}{a}$$
$$e = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi}}$$

$$e = \sqrt{\varphi}.$$

En el desarrollo de la hipérbola vamos a considerar:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

y

$$\varphi' = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

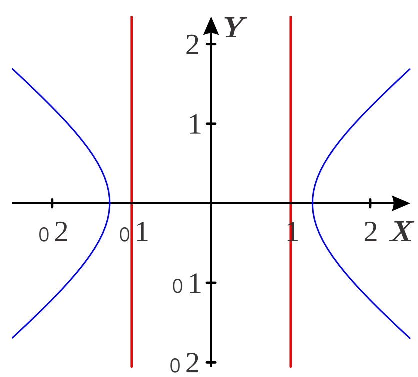
Calculamos las directrices:

Una está dada por:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a^2}{c} \\ &= -\frac{\varphi}{\varphi} \\ &= -1 \end{aligned}$$

y la otra es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2}{c} \\ &= \frac{\varphi}{\varphi} \\ &= 1. \end{aligned}$$



La longitud del lado recto es

$$Lr = \frac{2b^2}{a}$$

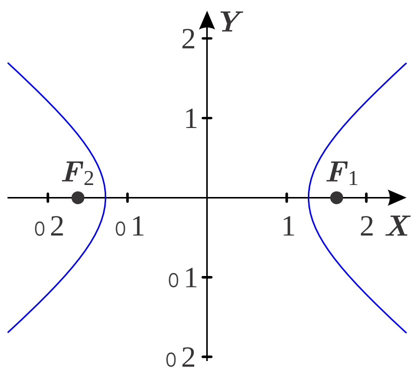
$$= \frac{2(1)^2}{\sqrt{\varphi}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\varphi}}.$$

Los vértices son:

$$V_1(-a, 0) = V_1\left(-\sqrt{\varphi}, 0\right)$$
$$V_2(a, 0) = V_2\left(\sqrt{\varphi}, 0\right).$$

Los focos son:

$$F_1(-c, 0) = F_1(-\varphi, 0)$$
$$F_2(c, 0) = F_2(\varphi, 0).$$



Calculamos los puntos de intersección de los lados rectos con sus ramas:

Partimos de que uno de los puntos de la hipérbola es: $B_1(c, y) = B_1(\varphi, y)$

Para esto resolvemos la siguiente ecuación:

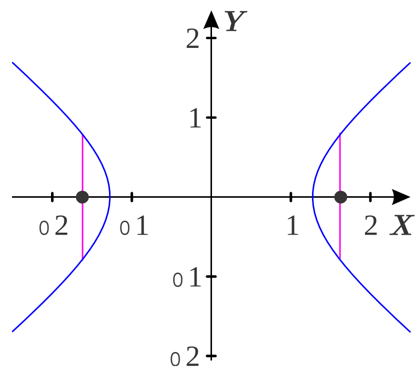
$$\frac{\varphi^2}{\varphi} - y^2 = 1$$
$$\varphi - y^2 = 1$$
$$y^2 = \varphi - 1$$
$$|y| = \sqrt{\varphi - 1}$$
$$|y| = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$
$$|y| = \sqrt{\varphi'}.$$

Por lo tanto el punto $B_1(\varphi, y)$ tiene coordenadas $\left(\varphi, \sqrt{\varphi'}\right)$ es decir,

$$B_1(\varphi, y) = B_1\left(\varphi, \sqrt{\varphi'}\right)$$

Como los otros puntos son simétricos se pueden deducir del primero, y son:

$$B_2(c, y) = B_2\left(\varphi, -\sqrt{\varphi'}\right)$$
$$B_3(-c, y) = B_3\left(-\varphi, \sqrt{\varphi'}\right)$$
$$B_4(-c, y) = B_4\left(-\varphi, -\sqrt{\varphi'}\right).$$

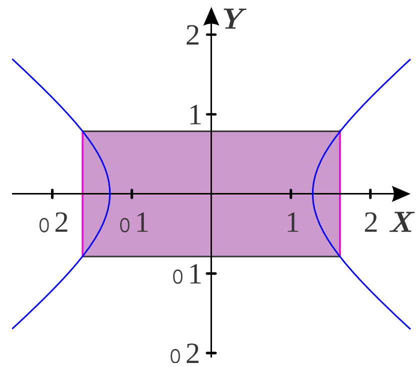


Ahora calculemos el área del rectángulo formado por los lados rectos y la longitud de la distancia entre los focos:

Esto es:

$$\begin{aligned} A &= 2c \times \frac{2}{\sqrt{\varphi}} \\ &= 2\varphi \times \frac{2}{\sqrt{\varphi}} \\ &= \frac{4\varphi}{\sqrt{\varphi}} \\ &= 4\sqrt{\varphi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el área del rectángulo es $A = 4\sqrt{\varphi}$.



Calculemos las rectas tangentes a la hipérbola en los puntos extremos de los lados rectos:

Utilizamos la ecuación:

$$\frac{x_1x}{\varphi}-\frac{y_1y}{1}=1$$

que es la ecuación de la recta tangente de la hipérbola horizontal en el punto $B_1(x_1,y_1)$:

Tangente en el punto $B_1\left(\varphi,\sqrt{\varphi'}\right)$

$$\frac{\varphi x}{\varphi}-\frac{\sqrt{\varphi'}y}{1}=1$$

$$y=\frac{x-1}{\sqrt{\varphi'}}\ldots\ldots L_1$$

Tangente en el punto $B_2\left(\varphi,-\sqrt{\varphi'}\right)$

$$\frac{\varphi x}{\varphi}+\frac{\sqrt{\varphi'}y}{1}=1$$

$$y=\frac{1-x}{\sqrt{\varphi'}}\ldots\ldots.L_2$$

Tangente en el punto $B_3\left(-\varphi,\sqrt{\varphi'}\right)$

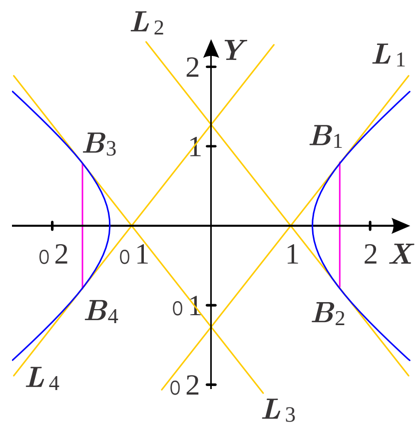
$$\frac{-\varphi x}{\varphi}-\frac{\sqrt{\varphi'}y}{1}=1$$

$$y = \frac{-x-1}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots L_3$$

Tangente en el punto $B_4\left(-\varphi, -\sqrt{\varphi'}\right)$:

$$\frac{-\varphi x}{\varphi} + \frac{\sqrt{\varphi'} y}{1} = 1$$

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots L_4$$



Localizamos el punto de intersección de L_1 y L_2:

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots L_1$$

$$y = \frac{1-x}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots . L_2$$

Igualamos las ecuaciones:

$$\frac{x-1}{\sqrt{\varphi'}} = \frac{1-x}{\sqrt{\varphi'}}$$

$$x - 1 = 1 - x$$

$$2x = 2$$

$$x = 1.$$

Sustituimos este valor en la ecuación L_1:

$$y = \frac{1-1}{\sqrt{\varphi'}}$$

$$y = 0,$$

así el punto de intersección es $P_1(1,0)$.

Encontramos el punto de intersección de L_4 y L_2:

$$y = \frac{1 - x}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots . L_2$$

$$y = \frac{1 + x}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots L_4$$

Igualamos las ecuaciones:

$$\frac{1 - x}{\sqrt{\varphi'}} = \frac{1 + x}{\sqrt{\varphi'}}$$
$$x = 0,$$

Sustituimos este valor en L_4:

$$y = \frac{1 + 0}{\sqrt{\varphi'}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi'}}$$

así el punto de intersección es $P_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)$.

Encontramos el punto de intersección de L_3 y L_4:

$$y = \frac{1 + x}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots L_4$$
$$y = \frac{-x - 1}{\sqrt{\varphi'}} \ldots \ldots L_3$$

Igualamos las ecuaciones:

$$\frac{1 + x}{\sqrt{\varphi'}} = \frac{-x - 1}{\sqrt{\varphi'}}$$
$$\frac{2x}{\sqrt{\varphi'}} = \frac{-2}{\sqrt{\varphi'}}$$
$$x = -1.$$

Sustituimos este valor en L_4:

$$y = \frac{1-1}{\sqrt{\varphi'}}$$
$$y = 0,$$

así el punto de intersección es $P_3(-1{,}0)$.

Por último, calculamos el punto de intersección de L_3 y L_1:

$$y = \frac{-x-1}{\sqrt{\varphi'}} \ldots\ldots L_3$$
$$y = \frac{x-1}{\sqrt{\varphi'}} \ldots\ldots L_1$$

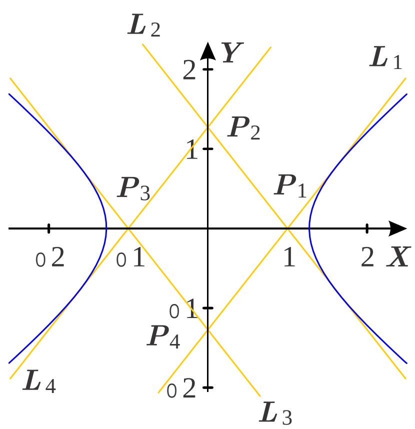
Igualamos las ecuaciones

$$\frac{-x-1}{\sqrt{\varphi'}} = \frac{x-1}{\sqrt{\varphi'}}$$
$$x = 0.$$

Sustituimos este valor en $L_{1:}$

$$y = \frac{0-1}{\sqrt{\varphi'}}$$
$$y = \frac{-1}{\sqrt{\varphi'}}$$

así el punto de intersección es $P_4\left(0, \frac{-1}{\sqrt{\varphi'}}\right)$.



Las pendientes de las rectas son:

Para L_1:

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

Para L_4:

$$m_4 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

Para L_2:

$$m_2 = -\frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

Para L_3:

$$m_3 = -\frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

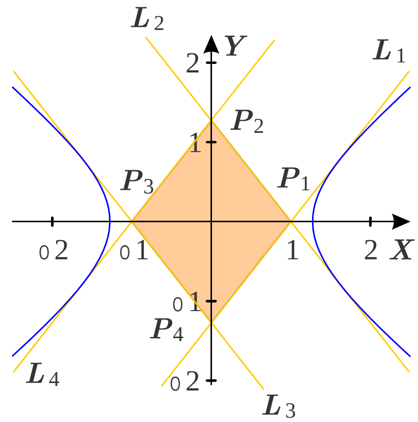
Observamos que las pendientes m_1 y m_4 son iguales, así también las pendientes m_2 y m_3 son iguales. Entonces las rectas L_1y L_4, son paralelas, esto sucede también con L_2 yL_3 .

Por lo que podemos asegurar que el polígono formado por los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 es un paralelogramo.

Calculamos el área del paralelogramo:

Como la figura está formada por 4 triángulos congruentes, entonces

$$\begin{aligned} A &= 4\left(\frac{bh}{2}\right) \\ &= 4\left(\frac{1\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\varphi}} \end{aligned}$$



Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = \frac{b}{a}x$$

y

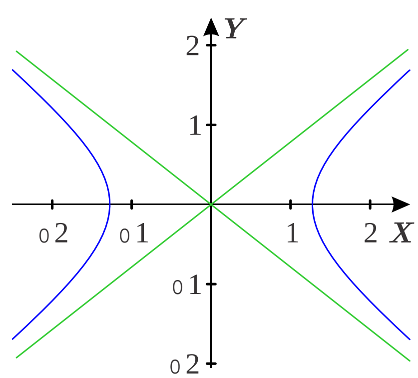
$$y = -\frac{b}{a}x.$$

Para

$$y = \frac{b}{a}x$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}x.$$

Para la otra asíntota, tenemos

$$y = -\frac{b}{a}x$$
$$y = -\frac{1}{\sqrt{\varphi}}x.$$



CAPÍTULO 5

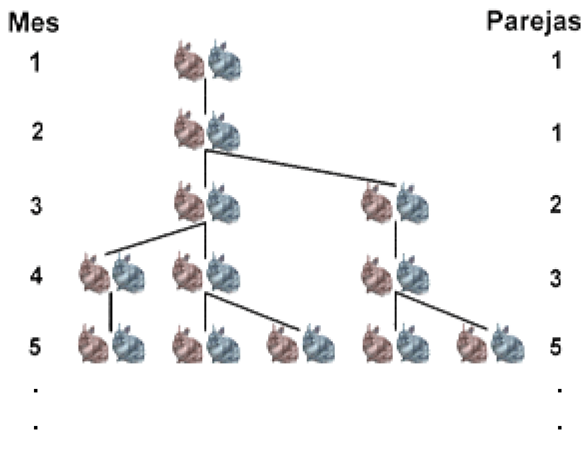
LA RAZÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA Y EN EL ARTE

FIBONACCI Y LA NATURALEZA

Leonardo de Pisa (1180-1250), más conocido como Fibonacci (que quiere decir “hijo de Bonaccio”), también es conocido por la sucesión de números que lleva su nombre, y que tiene su origen en el problema de reproducción de conejos.

El problema de los conejos es el siguiente:

Saber, ¿cuántos pares de conejos se criarán en un año si se comienza con una pareja y cada mes la hembra de cada pareja pare una nueva pareja que se vuelve fecunda a partir del segundo mes?



En la sucesión que se deriva de este problema, cada término después del primero se obtiene al sumar los dos números que lo preceden:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+1 &= 2 \\ 1+2 &= 3 \\ 2+3 &= 5 \\ 3+5 &= 8 \\ 5+8 &= 13 \\ 8+13 &= 21 \\ &\vdots \end{aligned}$$

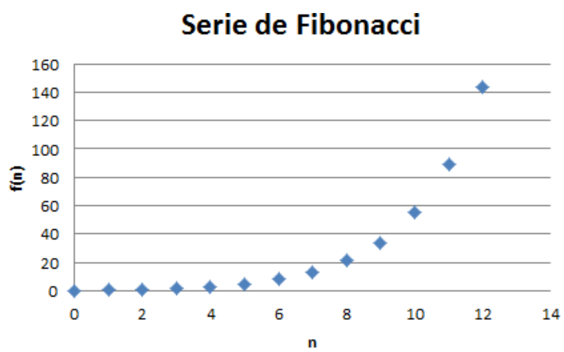
La sucesión es:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Que se puede expresar como una función $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$f(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ 1 \text{ si } n = 1 \\ f(n-2) + f(n-1) \text{ si } n > 1 \end{cases}$$

La gráfica de esta sucesión tiene la siguiente forma:



Regresando al problema, al cabo de un año se tendrán 144 pares de conejos.

La razón áurea aparece en las proporciones que resultan bellas al ojo humano así como en fenómenos naturales. Asimismo esta razón se presenta como el límite de la razón de los famosos números de Fibonacci..

Sorprendentemente, la razón de los números consecutivos de la sucesión tiende a la razón áurea. Las razones son:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \frac{233}{144}, \frac{377}{233} \cdots$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{5}{3} = 1.666 \ldots$$

$$\frac{8}{5} = 1.6$$

$$\frac{13}{8} = 1.625$$

$$\frac{21}{13} = 1.615 \ldots$$

$$\frac{34}{21} = 1.619 \ldots$$

$$\frac{55}{34} = 1.617 \ldots$$

$$\frac{89}{55} = 1.618 \ldots$$

$$\frac{144}{89} = 1.617 \ldots$$

$$\frac{233}{144} = 1.618 \ldots$$

$$\frac{377}{233} = 1.618 \ldots$$

$$\vdots$$

Estas razones se acercan cada vez más a

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

es decir, a la razón áurea.

Si se toman los recíprocos de la anterior tenemos:

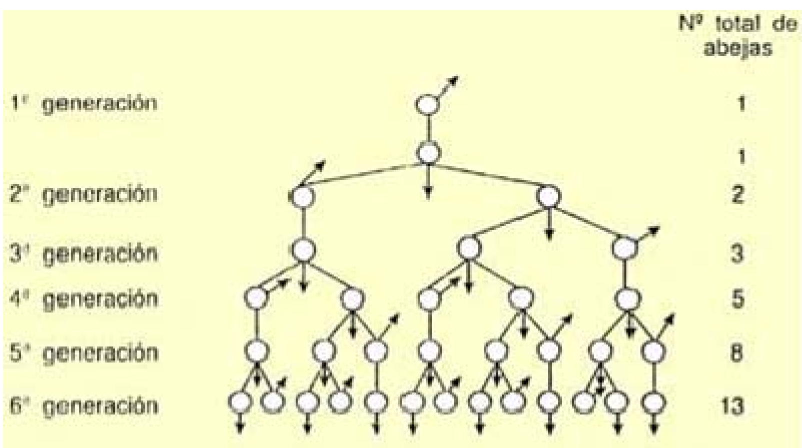
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233} \ldots$$

$$\frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{1}{2} = 0.5$$
$$\frac{2}{3} = 0.666 \ldots$$
$$\frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{5}{8} = 0.625$$
$$\frac{8}{13} = 0615 \ldots$$
$$\frac{13}{21} = 0.619 \ldots$$
$$\frac{21}{34} = 0.617 \ldots$$
$$\frac{34}{55} = 0.618 \ldots$$
$$\frac{55}{89} = 0.617 \ldots$$
$$\frac{89}{144} = 0.618 \ldots$$
$$\frac{144}{233} = 0.618 \ldots$$

Estos números se acercan más y más a

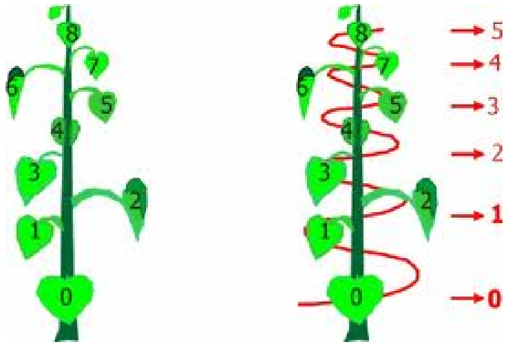
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$$

Así como en la reproducción de conejos, también sucede con las abejas, donde el número de descendientes en cada generación de una abeja macho o zángano, es uno de los términos de la sucesión de Fibonacci. Como se observa en el siguiente árbol genealógico de un zángano.



También podemos encontrar la sucesión de Fibonacci en las plantas.

En las hojas que crecen en las ramas están separadas por distancias que corresponden a una sucesión de Fibonacci:



La mayor parte de las flores tiene uno de siguientes números de pétalos: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ que son los números de Fibonacci.

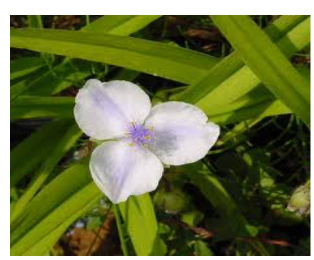
Entre las flores que tienen un pétalo son los alcatraces y las campanitas.

En las flores de dos pétalos, podemos encontrar los perritos,

Dentro de las de tres pétalos se encuentra la bugambilia o buganvilia.

Entre las que tienen cinco pétalos se encuentran los tulipanes, la flor de durazno y las petunias; a estas también se les llama flores pentámeras.

Las de ocho pétalos como la caléndula que es la flor amarilla.

En las flores de trece pétalos se tienen algunas margaritas.

En las de veintiún pétalos están las guerberas y margaritas.

Los números de Fibonacci aparecen también en los girasoles. Los pequeños flósculos (florecitas componentes de las flores compuestas) que se convierten en las semillas de la cabezuela del girasol se distribuyen en dos conjuntos de espirales: unas que giran en sentido de las manecillas del reloj y otras que lo hacen en sentido contrario. De las primeras suelen haber treinta y cuatro, y de las segundas cincuenta y cinco. A veces los números son cincuenta y cinco, y ochenta y nueve, y en ocasiones ochenta y nueve, y ciento cuarenta y cuatro. En todos los casos se trata de dos números de Fibonacci consecutivos cuya razón se aproxima a la razón áurea.

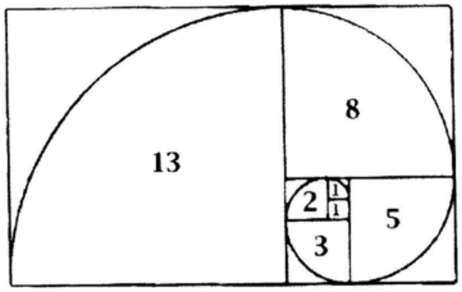
Cabe señalar que esto también sucede en algunos cactus.

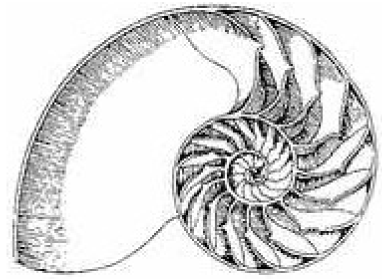
Stewart afirma en Nature's Numbers (Números de la naturaleza) que cuando se desarrollan las espirales en el girasol, los ángulos entre ellas son de 137.5 grados que es lo mismo que 360 grados multiplicado por uno menos la sección áurea (es decir, $360\times(1-0.618)$) y además las cantidades de espirales que giran en un sentido y en otro dan origen a dos números de Fibonacci sucesivos como se muestra en siguiente video

http://www.youtube.com/watch?v=VjXCRbysZAY&feature=share

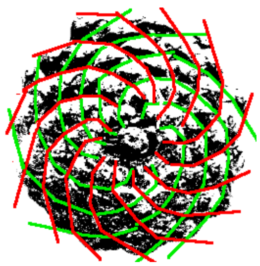
Si se traza un rectángulo cuya proporción entre sus lados es la razón áurea, se le podrá dividir en un cuadrado y en otro rectángulo semejante al primero. Luego el rectángulo pequeño podrá dividirse en un cuadrado y otro rectángulo de idénticas proporciones, y así sucesivamente. La espiral que pasa por los sucesivos vértices de la sucesión de cuadrados es igual a las que a menudo presentan las conchas de los moluscos.

Por ejemplo:





Es importante mencionar que las espirales se observan en otras plantas y en galaxias.



LA RAZÓN ÁUREA EN EL ARTE

En esta parte se mostrarán algunos ejemplos donde se puede observar la razón áurea; como en la arquitectura, la pintura, la fotografía y en el ser humano.

No existen indicios que demuestren la utilización consciente de la proporción áurea en la antigüedad, solo existen testimonios de razones simples como quebrados entre números enteros.

Al pasar de la historia, la noción de proporción ha estado ligada a las creaciones artísticas a través de la geometría.

La geometría nace empíricamente por la necesidad de resolver problemas de medida (longitudes, áreas, volumen…). A esto se añadió la necesidad de usar ciertas figuras, representaciones gráficas, esculturales y arquitectónicas.

Las razones que componen una obra artística deben estar relacionadas por medio de un sistema común llamado sistema de proporción que es un conjunto de relaciones en el que todos los elementos están conectados con una proporción matemática dada.

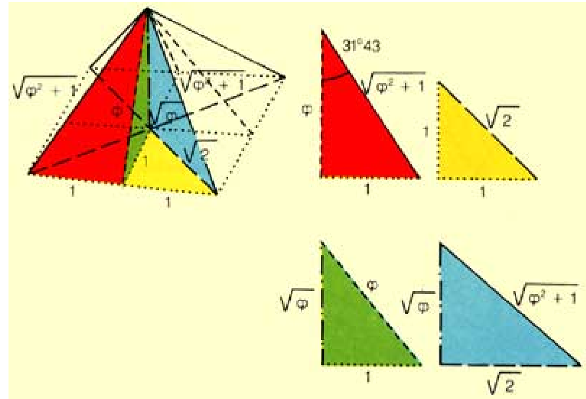
San Agustín, por ejemplo, señala: "*solo la belleza agrada; y dentro de la belleza las figuras; en las figuras las proporciones; y en las proporciones, los números*".

LA RAZÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA

Así también se puede encontrar que en la cultura egipcia la geometría aparece tanto en la resolución de problemas cotidianos como en la creación artística.

La pirámide de Gizeh

La pirámide de Gizeh, en realidad no es una sola pirámide, sino un conjunto de pirámides construidas 2600 años antes de Cristo. Dentro de este complejo se encuentra la pirámide de Keops que es la más grande. Según algunos investigadores, las dimensiones de la pirámide revelan conocimientos matemáticos avanzados para esa época, y entre estos la generación de triángulos áureos, como se muestra en la siguiente figura:



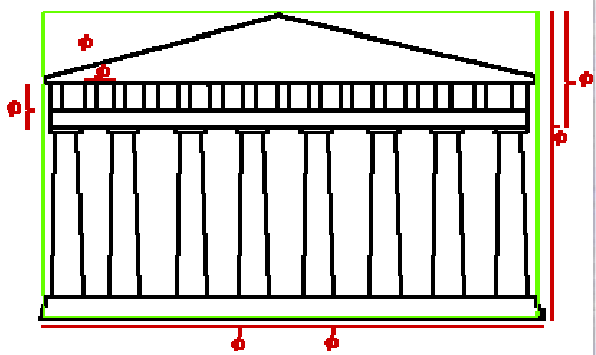
El Partenón

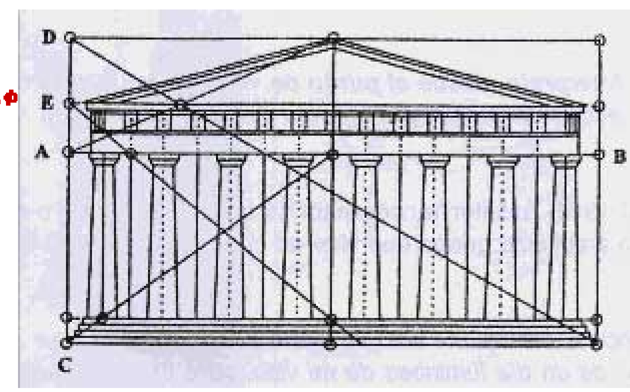
Para los griegos la geometría era una idea ligada al concepto de simetría.

Los griegos con su pensamiento racionalista y su tendencia a aritmetizar toda ciencia, aunado al conocimiento que tenían del trazado y propiedades geométricas de esta razón o proporción, hace muy posible su uso en fachadas de templos y otras construcciones donde se pueden detectar rectángulos áureos. El rectángulo y el pentágono áureo fueron considerados por ellos como las figuras geométricas más bellas y perfectas.

Los griegos construyeron el Partenón de Atenas en el siglo V antes de Cristo. El rectángulo que comprende la fachada delantera es un rectángulo áureo; es el monumento más grandioso de la Atenas de Pericles y refleja en la arquitectura el florecimiento, de las artes. En la construcción de este templo se cuidaron los detalles de manera que resultase agradable a toda vista.

"Todo el conjunto buscaba la máxima riqueza de líneas, utilizando para ello compensaciones ópticas dirigidas a aligerar el peso y percepción del edificio en el espacio: las columnas exteriores disminuyen su diámetro con la altura, muestran un ligero ensanchamiento de sus aristas aproximadamente a un tercio de su altura y se inclinan todas hacia el interior formando un ángulo cercano a un grado."





En la figura de la derecha se puede observar que $\frac{AB}{CD} = \varphi$, $\frac{AC}{AD} = \varphi$ y $\frac{DA}{EA} = \varphi$ cocientes que guardan la razón áurea.

Tumba de Mira

Otro de los monumentos donde se pude observar la proporción áurea, es en la Tumba rupestre de Mira (Asia Menor). Su construcción está basada en el pentágono áureo.

Los arquitectos han utilizado la proporción en la planeación de templos, rascacielos y edificios de todo tipo, como en el panteón de París. Donde también se pueden observar las siguientes relaciones:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CA} = \varphi$$

LA RAZÓN ÁUREA Y LA MÚSICA

A menudo escuchamos música sin estar conscientes de qué tan relacionada está con las matemáticas, pues muchas veces la escuchamos porque está de moda, por el mensaje que transmite o simplemente porque resulta agradable a nuestros oídos; ya que la música está compuesta por elementos de los cuales algunos son: melodía, armonía, ritmo, timbre, tiempo, velocidad e intensidad, etc.. Así Pitágoras (572 a. C.), junto con sus discípulos, mediante su estudio de la música descubrieron las leyes numéricas de la armonía (los intervalos: conjunto de tonos y semitonos que separan distintos sonidos). Ellos estudiaron los tonos de los sonidos producidos por las cuerdas de una lira y éste (sonido) variaba de acuerdo a la proporción de las cuerdas. Y si la proporción entre las cuerdas era áurea el ritmo y la melodía eran más placenteros.

W.Leibnitz (1646-1716): "La música es un ejercicio aritmético secreto y la persona que se entrega a ella no se da cuenta de que está manipulando números".

Clude Debussy (1862.1918) :"La música es la aritmética de los sonidos, como la óptica es la geometría de la luz".

La forma de presentar y combinar los elementos determina el estilo de la música, que ha sido diferente dependiendo de las épocas históricas.

La armonía puede hacer sonar más de un sonido a la vez.

El arte de encadenar las notas o acordes sucesivos en una frase o contorno melódico es la armonía.

La superposición de dos sonidos se llama intervalo; los intervalos empleados en música son tales que el número de vibraciones de dos sonidos están en una razón sencilla, por ejemplo cuando la razón es $\frac{1}{1}$ *es la superposición de uno o más sonidos que tienen el mismo número de vibraciones.*

Cuando la razón es $\frac{2}{1}$*, tenemos la octava (el número de vibraciones de una nota y su correspondiente a la octava más baja están en la razón de 2 a 1).*

Algunos intervalos que dan sonido agradable son:

$\frac{3}{2}$ la quinta	$\frac{6}{5}$ la tercia menor
$\frac{4}{3}$ la cuarta	$\frac{5}{3}$ la sexta menor
$\frac{5}{4}$ la tercia mayor	$\frac{8}{5}$ la sexta mayor

En cuanto a la estética los griegos hicieron una analogía entre la arquitectura y la música mezclando los términos equivalentes pertenecientes a cada una de ellas:

Música	Arquitectura
Intervalo (acorde consonante o disonante de dos notas)	**Razón** (de dos longitudes, superficies, etc.)
Acorde (combinación de dos o tres notas)	**Proporción** (igualdad entre dos razones)
Armonía	**Simetría**
Euritmia melódica (disposición y armonía entre sonidos)	Euritmia arquitectónica (disposición y armonía entre trazos o líneas)

El húngaro Béla Bartók es autor de una obra para cuerdas, percusiones y celesta, estructurado con base a conceptos matemáticos como son la simetría y la razón áurea.

El tema principal inicia con violonchelos exponiendo un tema que se repetirá a medida que se incorporan las violas y los violines, en una tonalidad de La. El volumen aumenta con cada repetición, estas repeticiones no son copias exactas.

Bartok también establece divisiones temporales de tipo matemático. El movimiento tiene una duración de $10'47''$. El clímax se alcanza en el tiempo $6'42''$, si se divide el tiempo total entre $6'42''$ se obtiene 1.603 ...., que es un número muy cercano a la razón áurea.

$$\frac{10.47}{6.42} = 1.603 \ldots$$

La proporción entre el desarrollo del tema y su introducción, en algunas sonatas para piano de Mozart, es cercana a la razón áurea.

Por ejemplo:

En la sonata N°1 para piano de Mozart:

El segundo tema armónico de la obra siempre es más extenso que el primero.

El primer movimiento subdividido en 38 y 62 compases, esto es:

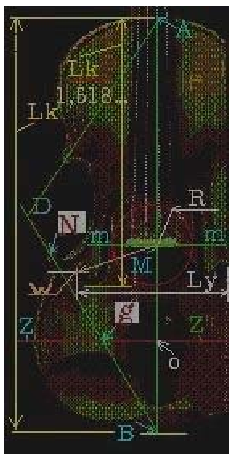
$$\frac{62}{38} = 1.631 \ldots$$

El segundo movimiento subdividido en 28 y 46compases:

$$\frac{28}{46} = 1.642 \ldots$$

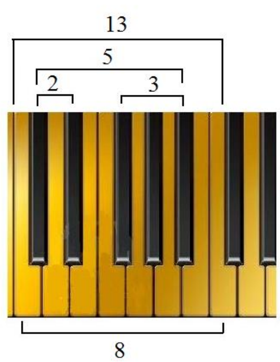
En los instrumentos musicales también se pude observar la razón áurea por ejemplo:

- En los violines la ubicación de las efes (los “oídos” u orificios en la tapa), se relacionan con el número áureo.

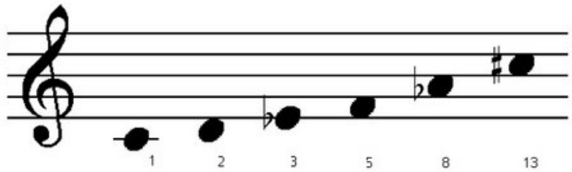


El piano, está constituido por siete octavas ordenadas de forma creciente de graves a agudas.

Así, seis números de la Sucesión de Fibonacci figuran en una octava del piano, la cual consiste en 13 teclas, 8 teclas blancas y 5 teclas negras, en grupos de 2 y 3.



Béla Bartók (1881-1945), desarrolló una escala musical basada en la sucesión de Fibonacci y la llamó escala de Fibonacci.



La música de las esferas

Los pitagóricos creían también que el movimiento de los planetas se podía reducir a relaciones numéricas y que los cuerpos que se movían en el espacio producían sonidos se concertaban para crear una música sublime, la música de las esferas, “inaudible para nosotros porque somos como el herrero y sus ayudantes, que han dejado de oír los ruidos que permanentemente los rodean ya que no los pueden contrastar con el silencio”. [10]

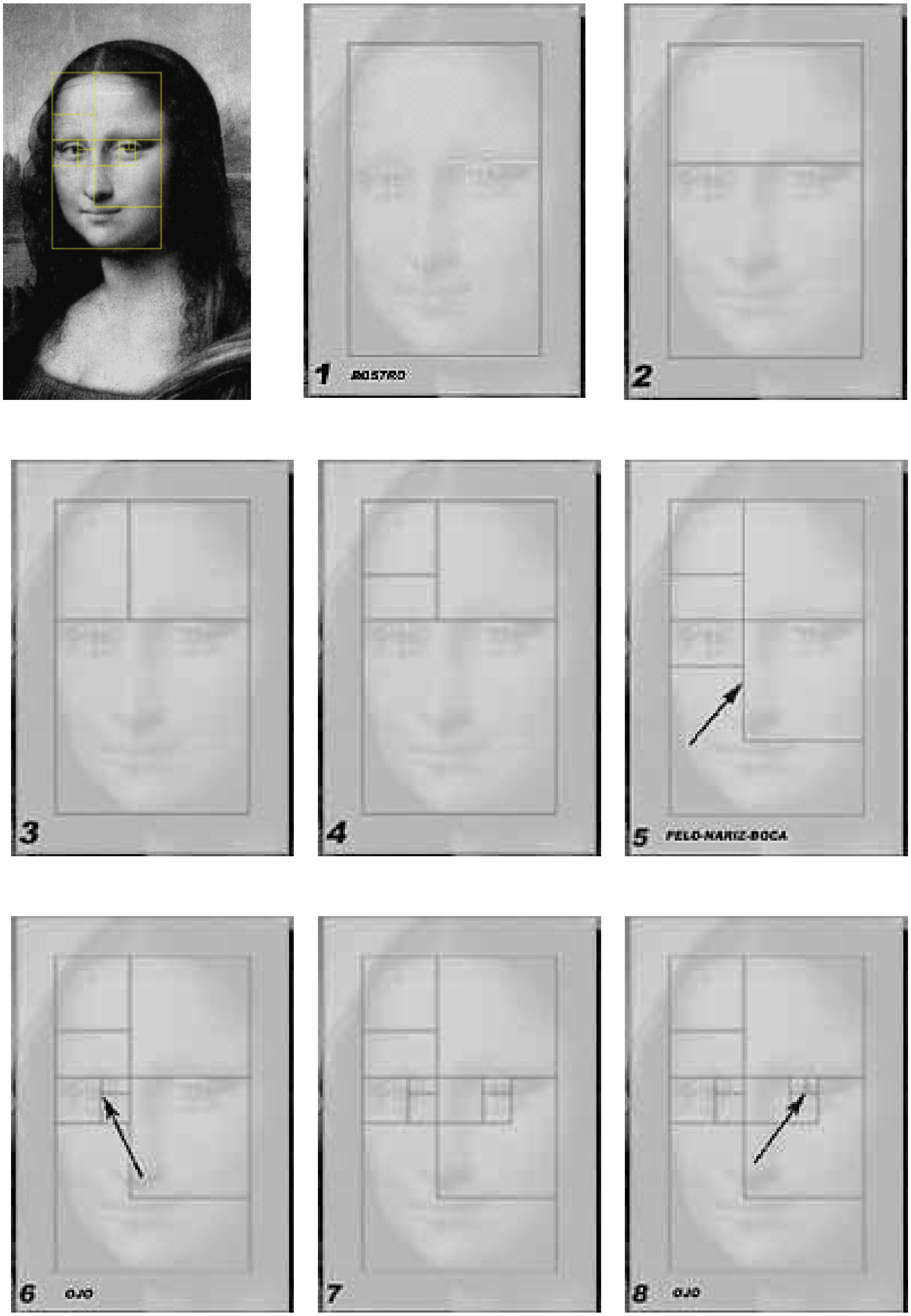
Kepler (1571-1630), estableció en su obra Harmonices Mundi, que las velocidades angulares de cada planeta producían sonidos. Un siglo después Newton (1642-1727), con el cálculo predijo la apariciones de cometas e incluso el descubrimiento de Neptuno y fortaleció la idea de que el universo manifiesta una gran armonía.

Así en esta búsqueda, recientemente el satélite TRACE (Transiton Region and Coronal Explorer) fue enviado al espacio en abril de 1998 por la NASA y ha encontrado evidencias de música originada en un cuerpo celeste. Con la ayuda de este satélite los científicos del southwest Resears Institute (SwRI) en un comunicado del 10 de diciembre de 2004 mencionan que han descubierto que la atmósfera del sol emite ondas sonoras 300 veces más graves que los tonos que pueda captar el oído humano.

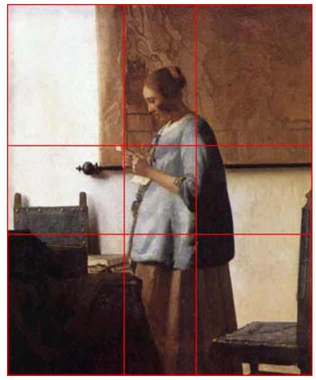
http://www.youtube.com/watch?v=bsrfAhox7EE&feature=endscreen

LA RAZÓN ÁUREA EN LA PINTURA Y EN LA FOTOGRAFÍA

Leonardo da Vinci utilizó también rectángulos áureos para plasmar el rostro de la Gioconda (Mona Lisa), como se observa en las siguientes figuras.

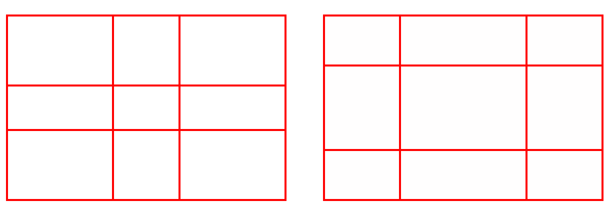


En el siguiente cuadro *"La carta" de Vermeer",* se observa el elemento principal en el cruce de las divisiones áureas.



El siguiente cuadro se refiere a una pintura de 60x60, acrílico sobre tela, de Nicolas Fontanilla. Es un mosaico de varios bastidores, todos en la proporción áurea.

En la fotografía existen dos esquemas más comunes de división áurea. En la primera son cuatro líneas, dos verticales y dos horizontales, trazándolas de tal manera que cada zona lateral es sección áurea del resto, y la zona central es sección áurea de cualquiera de las laterales. Y en la segunda es la llamada raíz de cinco, aquí cada zona lateral es sección áurea de la central. Esta división es ideal cuando se quiere despejar el centro de la foto.



Las siguientes fotografías son ejemplos de las divisiones anteriores.

LA RAZÓN ÁUREA EN EL CUERPO HUMANO

El hombre, al pasar de la historia siempre ha buscado un canon estético (*conjunto de características que una sociedad considera convencionalmente como bonito, atractivo o deseable, sea en una persona u objeto*) de las proporciones del cuerpo humano. Y esta búsqueda está hoy más que nunca a la orden del día.

Para mostrar que un rostro es armónico se puede realizar el siguiente análisis

Como se observa en este perfil está dividido de la siguiente manera:

La primera, es la altura del rostro (segmento AB)

La segunda, va de la comisura de los labios hasta el término del mentón (el segmento EB).

La tercera, va del término del mentón a la punta de la nariz (el segmento CB).

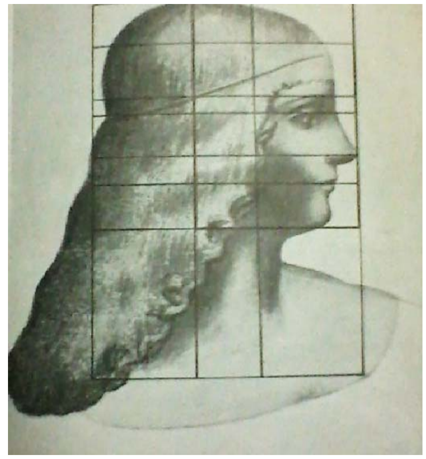
La cuarta, de la raíz de los cabellos hasta la punta de la nariz (segmento AC).

La quinta, distancia vertical del iris al mentón (segmento DB).

El rostro es armonioso si se cumplen las siguientes condiciones:

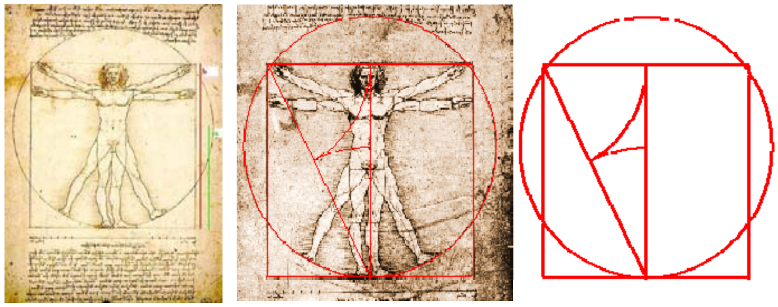
- $\frac{\text{La altura del rostro}}{\text{La raíz de los cabellos hasta la punta de la nariz}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \varphi$
- $\frac{\text{La altura del rostro}}{\text{distancia vertical del iris al mentón}} = \frac{\text{AB}}{\text{DB}} = \varphi$
- $\frac{\text{del término del mentón a la punta de la nariz}}{\text{va de la comisura de los labios hasta el término del mentón}} = \frac{\text{CB}}{\text{EB}} = \varphi$

Este análisis es similar al realizado por Leonardo da Vinci en el retrato de Isabel de Este

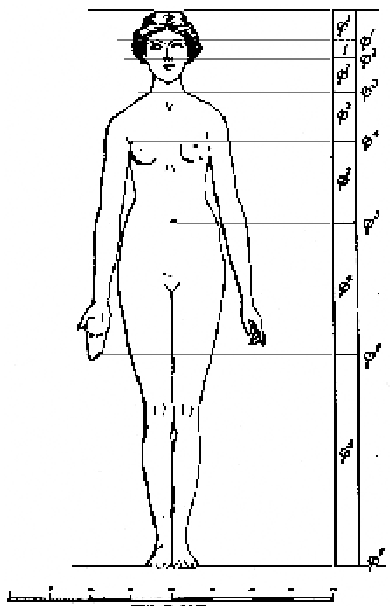
 

El perfil de Isabele de Este dibujado por Leonardo en la época en que su amigo Luca Paccioli, daba sus conferencias sobre la Divina Proporción en la corte del duque de Milam Ludovico el Moro (cuñado de Isabele).

Para el arquitecto romano Leonardo da Vinci, el ombligo de un ser humano ideal es el centro de la circunferencia que se traza alrededor del mismo de manera que sus piernas y brazos extendidos toquen la circunferencia. De la misa manera se puede construir un cuadrado cuyo lado sea la altura del ser humano, medida que coincide con la que se consigue entre la punta de los dedos de ambas manos si se extienden los brazos completamente en forma de cruz. Si se calcula la relación que existe el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia se obtiene la razón de áurea, como se muestra en la figura humana “Hombre Vitrubio” figura humana basadas en divisiones simples.



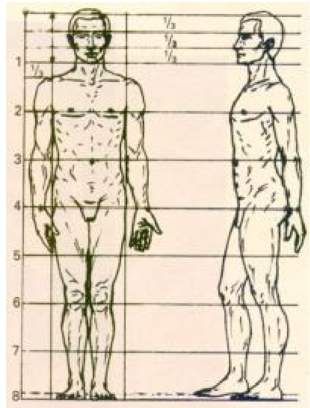
Sir Theodore Cook (s. XIX) describió una escala simple de divisiones áureas aplicable a la figura humana, como se muestra en la siguiente figura:



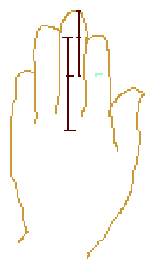
El alemán Zeysig en 1850, descubre que la razón áurea se encuentra en las proporciones del cuerpo humano, realizó medidas sobre miles de cuerpos y encontró que esta razón se encontraba en los cuerpos sanamente desarrollados.

Observó que las proporciones en el cuerpo masculino oscilan en torno a la siguiente razón medida (en pies), como se muestra en la siguiente figura:

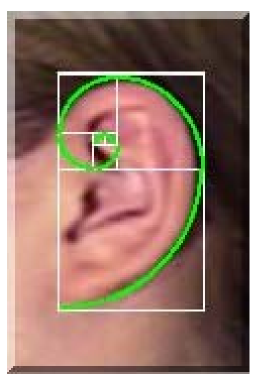
$$\frac{altura\ total\ (h)}{distancia\ vertical\ entre\ el\ ombligo\ y\ la\ planta\ de\ los\ pies(n)} = \frac{8}{5} = 1.6$$



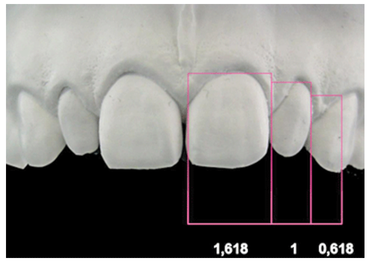
En la mano humana, la distancia entre las falanges y la longitud del dedo se encuentra la razón áurea.

La razón áurea también la podemos encontrar en otras partes del cuerpo como la oreja donde se puede observar la espiral, los dientes.



Según algunos investigadores en este campo han encontrado que en los dientes de una sonrisa “bonita”; si se considera el ancho del incisivo como el 100%, multiplicándolo por 0.618 o dividiéndolo por 1.618 se obtiene el ancho virtual del incisivo lateral y de la misma manera partiendo de este último se encuentra el valor del ancho visible del canino, como se muestra en la siguiente figura.



El instrumento que permite el análisis de estas proporciones y de otras partes del cuerpo, es el compás áureo, formado por tres puntas móviles, siendo que la de en medio marca siempre el punto áureo, determinando dos segmentos diferentes y que se encuentras en armonía.

Un cuento acerca de razón áurea y la belleza:

Me contó el calculista (Beremís) lo siguiente:

Hassan Muarique, capitán de la guardia, resolvió casarse con una joven llamada Zaira, hija del mercader Abul Lahabe, de Basora. No quería, sin embargo, arriesgarse a pedir a la jovencita en casamiento, sin asegurarse previamente de si ella era hermosa o estaba desprovista de encantos. Ya había recurrido a todos los artificios imaginables para descubrir el rostro de Zaira, pero sin resultado. No quiso, sin embargo, guiarse únicamente por las informaciones de mujeres que frecuentan los harenes y llevan información a los pretendientes sobre los atributos y dotes de las jóvenes casaderas, ya que esas casamenteras exageran las virtudes de las novias para engañar a los pretendientes ingenuos. Ante ese inconveniente, Hassan me ha pedido lo auxiliase a resolver el problema. ¿Cómo deberá hacer para asegurarse, antes del casamiento, de la belleza de su esposa?

Hallé original aquella consulta y le dije:

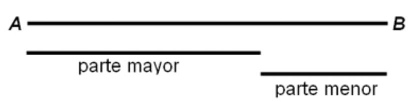
La Matemática dispone de recursos maravillosos. Con el auxilio de dicha ciencia puede el hombre calcular el peso de un camello, la altura de una torre o la belleza de una mujer. Y *como él me mirase con ojos espantados, aclaré: “Sí, con el auxilio de una relación geométrica, puede el matemático determinar si una joven es hermosa o fea, es decir, si sus formas son perfectas o no. Es enteramente innecesario, para el novio, ver el rostro de su futura esposa para prevenirse contra cualquier desilusión. Basta disponer de media docena de medidas y aplicar a ellas las “fórmulas matemáticas de belleza” ”.*

Exigí –prosiguió Beremís- que Hassan obtuviese ciertas medidas del rostro de Zaira. Esas medidas, tomadas en el interior del “harem” por una mujer casamentera fueron entregadas al pretendiente. Disponiendo de los datos del problema, apliqué las fórmulas, calculé las relaciones, y llegué matemáticamente al siguiente resultado: “La joven Zaira, hija del mercader ABul-Lahabe, es linda como una hurí (mujer de gran belleza que habita en el paraíso)”.

Es increíble –observé- que pueda el Álgebra llegar a ese resultado. ¿Es posible saber en qué consiste esa fórmula matemática de Belleza?

Nada más fácil –replicó Beremís-. Puedo explicar una relación curiosa, de un modo elemental y simple.

Dada cierta magnitud AB (representada en este caso por un segmento de recta), podemos dividirla al medio, o en dos partes desiguales. La división en dos partes desiguales puede ser hecha, es claro, de una infinidad de maneras diferentes.



Entre las divisiones de AB en partes desiguales, ¿habrá alguna preferible a las otras?

Sí –contesta el matemático-. Existe una manera “simpática” de dividir un todo en dos partes desiguales. Veamos en qué consiste esta forma de división.

Consideremos el segmento AB dividido en dos partes desiguales.

Admitamos que esas partes desiguales representen la siguiente relación:

Dividamos un segmento de 80 cm (por ejemplo) en dos partes midiendo, respectivamente, 49,4 cm y 30,6 cm Tenemos, entonces:

$$\frac{80}{49.4} \approx \frac{49.4}{30.6} \approx 1.618 \ldots$$

De ahí la proporción:

$$\frac{segmento\ total}{parte\ mayor} = \frac{parte\ mayor}{parte\ menor}$$

"El segmento total es a la parte mayor, como la parte mayor es a la parte menor."

Esa división corresponde a la forma simpática que pueden presentar las dos partes desiguales. Podemos formular la siguiente regla:

"Para que un todo dividido en dos partes desiguales parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe presentar entre la parte menor y la mayor la misma relación que entre ésta y el todo."

Esta notable división se llama división áurea o división en media y extrema razón.

En el rostro femenino "matemáticamente" hermoso, la línea C de los ojos divide a la medida total AB, en media y extrema razón.

Hasta hoy no se consiguió descubrir la razón de ser o "por qué" de esa belleza. Los matemáticos, que llevaran hasta muy lejos sus estudios y observaciones, exponen varios y curiosos ejemplos que constituyen elocuentes demostraciones para el principio de esa división que los romanos llamaban "divina proporción" o "división áurea".

Podemos llamarla también división en media y extrema razón.

Es fácil observar que el título puesto por el calígrafo en la primera página de una obra divide, en general, la medida total del libro en media y extrema razón.

Lo mismo sucede con la línea de los ojos, que divide, en las personas bien proporcionadas, la medida total del rostro en media y extrema razón. Se observa también la divina proporción en las partes en que las falanges dividen los dedos de la mano. La división en media y extrema razón se puede hallar también en la Música, en la Pintura, en la Escultura y en la Arquitectura.

En la división áurea la relación entre el todo y la parte mayor, es igual, más o menos, a:

$$\frac{809}{500} = 1.618$$

En las líneas principales del rostro femenino "matemáticamente hermoso" resulta constante aquella relación.

Obtenidas, pues, las medidas que me parecieron necesarias, apliqué la fórmula de la divina proporción a la joven Zaira, y verifiqué que su belleza se expresaba por el número: $\frac{808}{500} = 1.616$ *que difiere muy poco del valor que define la perfección.*

El valor de la relación $\frac{809}{500} = 1.618$ *es un número decimal* 1.618*. Beremís halló para la joven Zaira el número* 1.616 *que difiere en dos milésimos del resultado más aproximado antes indicado.*

Mediante ese resultado pude afirmar al apasionado Hassan que su novia era encantadora.

- ¿Y no temes equivocarte, amigo? –observé-. La belleza femenina resulta, a veces, de ciertos detalles que la Matemática no puede apreciar. ¡Cuántas veces el encanto de la mujer resulta de la manera de sonreír, del tono de voz, de cierta delicadeza de espíritu y de mil otros pequeñísimos detalles que, en ocasiones, para los enamorados, son todo!

Beremís no respondió. Bajó la cabeza y quedó en silencio, como si estuviese preocupado por nuevas y profundas meditaciones.

CONCLUSIONES

Cuán grande es el mundo de las matemáticas, que sin ellas no podríamos comprender muchas cosas de nuestro entorno.

A pesar de que la razón áurea no es un número entero, ha sido a través de la historia una herramienta útil que permitió realizar construcciones y obras de arte que fueron consideradas perfectas desde el punto de vista estético. Pues antes que los Pitagóricos la utilizaran en el pentágono áureo, la arquitectura y la música, ya los egipcios la habían utilizado en la construcción de algunas pirámides, por lo que al parecer su uso, al menos en el inicio, fue inconsciente.

Como vimos, existen varias maneras de construirla geométricamente o de aproximarse a ella mediante sucesiones.

En el caso del pentágono regular es posible encontrar más resultados igualmente interesantes.

Al realizar este trabajo pude darme cuenta que esta razón o número es extraordinario y a pesar de la poca importancia que se le da, puede encontrarse en una infinidad de situaciones.

Espero que este trabajo no solo cumpla con el objetivo de ser un material de apoyo sino que pueda ayudar a explorar las posibilidades la aplicación de las matemáticas más allá del aula.

Y puedo coincidir con Galileo, quien dijo que las matemáticas son el leguaje que Dios usó para crear al mundo.

BIBLIOGRFÍA

Amir D. Aczel, *El último Teorema de Fermat*, Fondo de Cultura Económica, México, 2005.

Borrás V. Eliseo, Moreno G. Pilar, Nomdedeu M. Xaro, Albalat S. Antoni, RITMOS *matemáticas e imágenes,* nivola Libros Ediciones, Epaña, 2002.

Courant Richard, Robbins Herbert, Stewart Ian, ¿Qué son las Matemáticas? *Conceptos y métodos fundamentales*. Fondo de Cultura Económica. México, 2002.

de Oteyza Elena, Lam Emma, Hernández Carlos, Carrillo Ángel, Ramírez Arturo, Geometría Analítica, Pearson Eduación de México S. A. de C. V. México, 2011.

Galdós L., Consultor Matemático, Aritmética, Cultural, S.A. España 1998.

Galilei, G. (1981). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias* (2ª Ed.). España: Editora Nacional. (Edición preparada por C. Solís y J. Sadaba)

Ghyka Matila C. El Número de Oro, I los ritmos. Edit. Poseidon, Barcelona, 1984.

Hidalgo Solís,L. *Mosaicos*, Temas de Matemáticas para Bachillerato. México, 2007.

Huntley, H.E. *The divine proportion*. Dover Publications, Canadá, 1970.

Malba Tahan, El hombre que calculaba, Edit. Limusa, S.A. de C.V., México, 2004.

Martínez del Sobral, M. *Geometría Mesoamericana*, Fondo de cultura económica, México, 2000.

Pacioli Luca, la divina proporción. Ediciones Akal, Madrid España, 1991.

Perero Mariano, Historia e Historias de Matemáticas, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994.

Roger Herz-Fischler, A Mathematical History of the Golden Number, Canada,1987, Wilfrid Laurier University Press.

Santos Balmori, *Áurea Mesura*, Universidad Nacional Autónoma de México, México 1986.

Stanley R. Clemens, Phares G. O´Daffer y Thomas J. Cooney, Geometría con Aplicaciones y soluciones de problemas. Addison-Wesley Iberoamericana.

Theodore A. Cook, The Curves of Life, Dover Publications, INC., New York.

MESOGRAFÍA:

Marzo de 2012

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/poligonos-regulares.htm

http://www.slideshare.net/guest29f6ed0/circunferencia213-ro-secundaria-1199198

http://phiyproporcionaurea.blogspot.com/

http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm#7

http://www.educacion.gob.es/exterior/ad/es/publicaciones/Aula_Abierta2_Musica.pdf

http://www.astrosound.org:

http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=2pbEarwdusc 260312

http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/aurea/html/conejos.html

http://www.educa.madrid.org/portal/c/portal/layout?p_l_id=34655.54

http://www.math.smith.edu/~phyllo

Mayo de 2012

http://www.librosmaravillosos.com/hombrecalculaba/capitulo24.html

http://www.thecamino.com.ar/geometriasagradaII.html

Julio de 2012

http://juegos-matematicos.blogspot.mx/2009/02/glosario-matematico-el-numero-de-oro.html

http://www.castor.es/rectangulos_aureos_gioconda.html

http://aodlcalculo1.blogspot.mx/

http://www.etereaestudios.com

http://www.actaodontologica.com/ediciones/2009/1/aplicacion_clinica_parametros_esteticos_odontologia_restauradora.asp

http://www.musinetwork.com/noticias/2012/05/07/una-realidad-aurea-sucesion-fibonacci/

http://www.skyscript.co.uk/kepler.html

http://www.swri.org/9what/releases/2004/Ultrasound.htm

http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit3/unit3.html

PÁGINAS DE VIDEOS

Febrero de 2012

http://www.youtube.com/watch?v=roE1zb35kPU

http://www.youtube.com/watch?v=S-2_n22i2Ek&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=cuXRTK2AxHw&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=vv1wUqOzZEE&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=fGAkCg6bLqE&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=Ie9hBuch2uk&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=FUwOrunXmXo&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=VjXCRbysZAY&feature=share

Marzo de 2012

Música

http://www.youtube.com/watch?v=e8pQDcF7VfM&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=bsrfAhox7EE&feature=endscreen

060712

http://www.youtube.com/watch?v=W_yZZVRZvl8

http://www.youtube.com.portubelleza.8K.com

http://www.bloganavazquez.com/tag/proporcion-aurea/