



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PRONÓSTICO DE VENTAS PARA PRODUCTOS  
DE CONSUMO MASIVO, MODELOS ARIMA

REPORTE DE TRABAJO  
PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

ANGÉLICA SUSANA MEJÍA DÁVILA



TUTOR  
ACT. JAIME VAZQUEZ ALAMILLA  
2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Jurado Asignado**

Propietario            Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

Propietario            Dra. Mayra Elizondo Cortés

Propietario Tutor     Act. Jaime Vazquez Alamilla

Suplente                Dra. Ruth Selene Fuentes García

Suplente                M. en C. Michell Rojas Romero

## Agradecimientos

Después de 12 años he regresado por que tengo una deuda pendiente y las deudas deben pagarse.

Les debo a muchos pero principalmente a mis padres Eulogio y Socorro que me apoyaron en mi carrera y me dieron libertad para disfrutarla. A mis hermanos que me acompañaron y animaron; Mauro, Gloria, Pepe, Jazmín y Jessica.

Mis hijas Miriam Sofía que nació cuando termine las materias y hoy tiene 12 años e Irene Guadalupe con 9 años, ¡gracias hijas! por que son mi inspiración. ¡Tienen el mundo por delante!

Mis sobrinos que empiezan su vida; Juan Carlos, Monserrat Stephania, Fernanda Lorena, Braulio Jacobo, Jesús Israel, Mariana Leslie, Daniel Azaariel, Jaqueline Iram, Axel Eduardo e Eulogio Issac. A mi sobrino Hugo Hiram que en paz descanse.

Por supuesto le debo mucho a mi país y a mi Universidad, estudiar en la UNAM fue una gran oportunidad, le agradezco profundamente porque me mostró el mundo académico pero no sólo eso, aquí hice a mis mejores amigos, aprendí a vivir, a compartir, a soñar, a luchar, a pensar, a sentir. Jugué Basquet ball al mejor nivel, conocí el cine independiente e internacional. No puedo dejar de lado a mis maestros que contribuyeron con sus conocimientos y experiencias en mi formación. Mis compañeros y amigos que siempre han estado presentes.

A mi tutor Jaime gracias por que fuimos compañeros y después tuviste paciencia para dirigir mi trabajo, te agradezco tu guía y tu dedicación.

A todos, les agradezco sinceramente haberme acompañado en esta gran experiencia.

# Índice

<b>Introducción</b> .....	5
<b>Capítulo 1. Cadena de suministro</b> .....	6
<b>1.1 Empresas con productos de consumo masivo</b> .....	6
<b>1.2 Administración de la cadena de suministro</b> .....	10
<b>1.3 Pronósticos de ventas</b> .....	11
<b>Capítulo 2. Series de tiempo</b> .....	13
<b>2.1. ¿Qué son las series de tiempo?</b> .....	13
<b>2.2. Estacionalidad de las Series</b> .....	18
<b>2.3. Función de autocorrelacion y función de autocorrelación parcial</b> .....	19
<b>2.4. Modelos ARIMA</b> .....	22
<b>2.4.1 Modelos autoregresivos AR(p)</b> .....	22
<b>2.4.2 Modelos de medias móviles MA(q).</b> .....	26
<b>2.4.3 Modelos ARMA(p,q)</b> .....	27
<b>2.4.4 Modelos ARIMA(p,d,q)</b> .....	28
<b>2.5 Estimación del orden p</b> .....	29
<b>2.6 Pruebas para verificar que el modelo es adecuado.</b> .....	30
<b>2.6.1 Pruebas para los parámetros <math>\phi_i</math> y <math>\theta_j</math></b> .....	30
<b>2.6.2 Pruebas para los residuales</b> .....	30
<b>Capítulo 3. Caso práctico</b> .....	33
<b>3.1. Planeación de demanda y operaciones</b> .....	33
<b>3.2. Diseño de la base de datos</b> .....	41
<b>3.3. Calculo del pronóstico semanal con ITSMW</b> .....	43
<b>3.3.1. Ingresar los datos</b> .....	45
<b>3.3.2 Encontrar un modelo ARMA(p,q) para la serie</b> .....	50
<b>Conclusiones</b> .....	56
<b>Bibliografía</b> .....	58

## Introducción

Las empresas buscan ser más competitivas y garantizar mayores márgenes de utilidad. Se ha comprobado que en donde más costos se generan, es en el volumen de inventarios con que cuentan y en la logística de todos sus materiales.

Por otro lado, las empresas buscan que sus productos se encuentren disponibles y al alcance de los consumidores en el momento justo.

Para cumplir con estos dos puntos, bajos costos y disponibilidad en el mercado, las empresas buscan tener una mejor planeación de sus procesos, pero ¿cómo saber cuántos productos debe producir y distribuir la semana que entra? ¿qué día y lugar deben estar disponibles? para responder a estas preguntas debemos saber cuántos productos se van a vender en la semana. Así, independientemente del método que utilicen para hacer su planeación de operaciones (ERP por sus siglas en inglés de *Enterprise Resource Planning*, Justo a Tiempo, etc.) la base de la planeación es un pronóstico de ventas.

El propósito de este proyecto es exponer cómo se desarrolló un pronóstico de ventas de corto plazo usando Modelos ARIMA, la empresa para la cual se hizo el proyecto, produce, distribuye y comercializa bebidas, es decir, refrescos, jugos, aguas y bebidas isotónicas. La empresa cuenta con 200 productos de los cuales el 80% tienen al menos dos años que se comercializan y el resto de los productos fueron lanzados al mercado en los dos últimos años. Las ventas de empresa crecieron contra año anterior más de 110% durante los últimos cinco años pero había muchas ventas perdidas debido a que el pronóstico no era preciso y se tenían en inventario productos que no se necesitaban y nos faltan productos que sí presentaban venta y no se podían entregar. Aunque en ese momento no se calculaba de forma cotidiana la exactitud del pronóstico variaba entre 70% y 80% dependiendo de la temporada. Por esta razón, el primer objetivo fue mejorar el pronóstico y disminuir las ventas perdidas por este concepto.

Aunque este proyecto es solamente un caso particular, los pronósticos y el concepto de cadena de suministro que se plantean en este trabajo se utilizan en muchas empresas que comercializan productos de consumo masivo, por esta razón, en el capítulo uno se define el tipo de empresas a las que se le puede aplicar este modelo y la forma en que realizan sus operaciones, se habla del concepto de cadena de suministro y de los puntos más importantes para la administración de la misma, se ve cómo se utiliza el pronóstico dentro de la cadena y las características que debe tener. En el capítulo dos se explica qué son las series de tiempo, como se comportan y la teoría de los modelos ARIMA, concluyendo en el capítulo tres con los puntos más importantes durante el diseño y la implantación del proyecto, explicamos como calcular los modelos ARIMA mediante el software ITSMW .

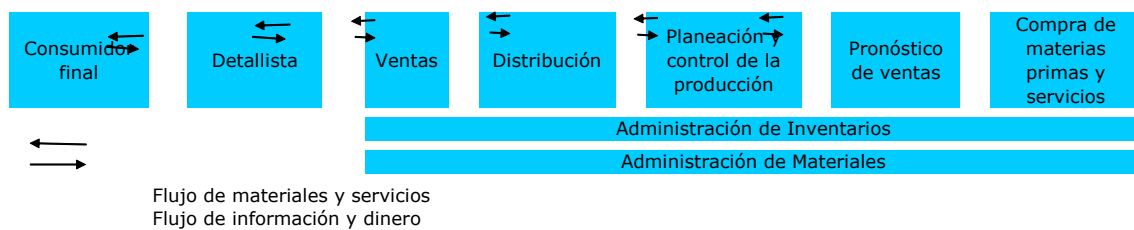
## Capítulo 1. Cadena de suministro

### 1.1 Empresas con productos de consumo masivo

Para efectos de este proyecto se habla de empresas que producen y comercializan productos de consumo masivo, tales como; refrescos, golosinas, bebidas, jabones, artículos de limpieza, libretas, etc.

Estas empresas hacen llegar sus productos a los clientes o consumidores finales a través de varios procesos, al conjunto de estos procesos se les conoce como cadena de suministro, cadena logística o cadena de valor.

Gráfica de la cadena de suministro



Fuente: Elaboración propia

Los eslabones de la cadena pueden variar dependiendo de cada empresa pero este es el modelo general y como se trata de productos de consumo masivo generalmente las empresas no lo venden directamente a los consumidores finales.

Existen muchas definiciones de cadena de suministro, aquí se dan dos:

1.- Es la secuencia de procesos que contribuyen a la creación y entrega de un producto o un servicio a un cliente final.

2.- Es el flujo de información y dinero desde el cliente/consumidor a través del productor hasta el proveedor y el flujo de bienes y servicios desde el proveedor a través del productor y hasta el cliente/consumidor.

En cada eslabón de la cadena se realizan actividades diferentes, a continuación se colocan algunas de ellas:

Tabla 1.1. Eslabones de la Cadena de Suministro.

<b>Eslabón</b>	<b>Actividades</b>
Compra de materias primas y servicios	-Adquirir los materiales y servicios que la empresa necesita para la elaboración y la administración de los productos.
Pronóstico de ventas	-Proporcionar una estimación de las ventas futuras de cada producto en cada centro de distribución.
Planeación y control de la producción	<p><b>Administración de materiales:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Definir características de empaque de cada material ya sean materias primas o productos semi-terminados.</li> <li>-Diseñar las condiciones óptimas de empaque</li> <li>-Administración de almacenes de materiales</li> </ul> <p><b>Producción:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Producir óptimamente los productos y garantizar la disponibilidad de cada uno.</li> <li>-Administrar los recursos y materiales para la producción.</li> </ul> <p><b>Administración de inventarios:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Definir las políticas de inventario para cada material a lo largo de la cadena.</li> </ul>
Distribución	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Distribución primaria, es la distribución que se realiza de las plantas productoras a los centros de distribución.</li> <li>-Distribución secundaria, es la que se realiza de los centros a los detallistas.</li> </ul>
Ventas	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Mantener comunicación con el cliente</li> <li>-Levantar y entregar pedidos</li> <li>-Generar información de ventas</li> </ul>
Detallista	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Compran productos al mayoreo a varios proveedores</li> <li>-Venden los productos al menudeo al consumidor final</li> </ul>
Consumidor final	-Adquiere el producto para su consumo.

Fuente: Elaboración propia

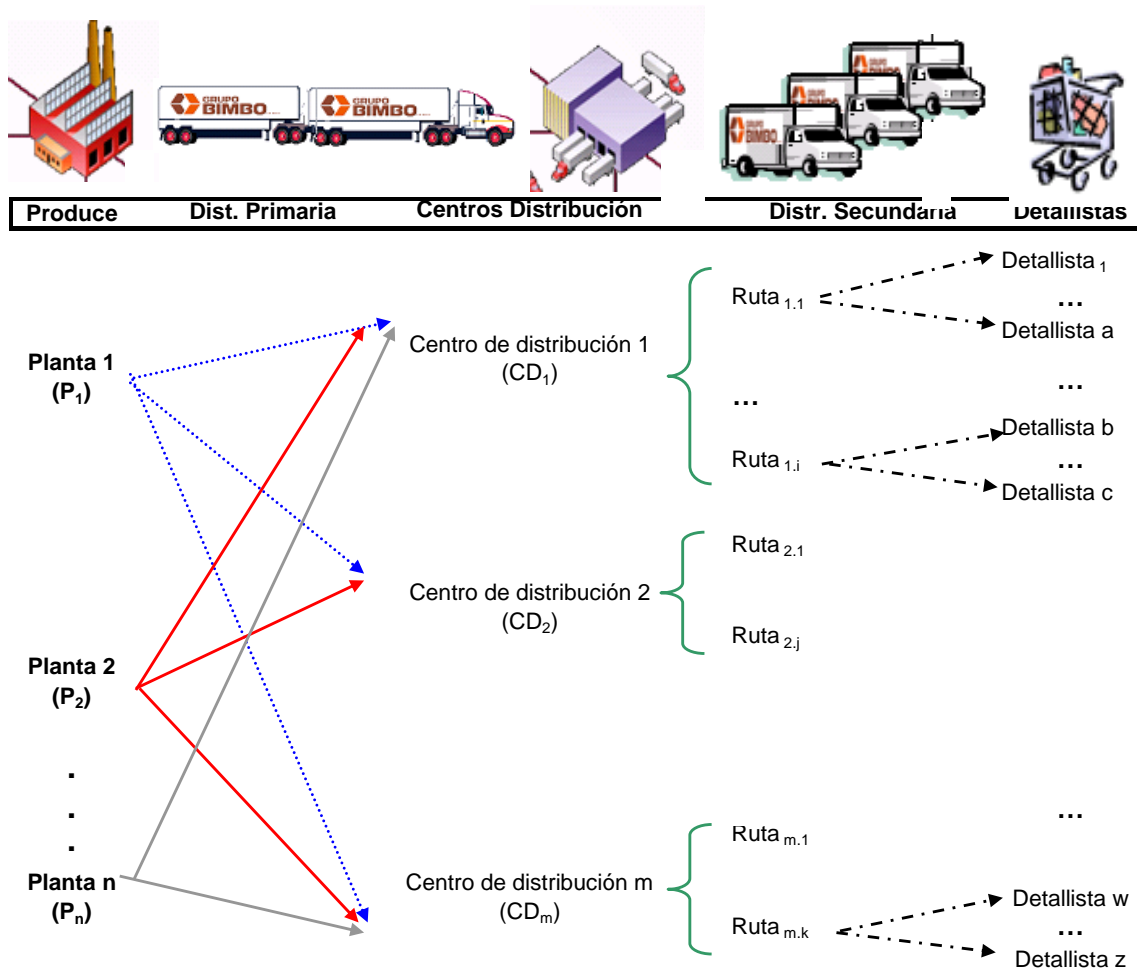
Dependiendo de la empresa y del producto que comercializa, cada empresa puede tener una o varias plantas de producción y varios centros de distribución (CD's). En la gráfica 1.2. se muestra un ejemplo.

Como son productos de consumo masivo las empresas generalmente no venden directamente al consumidor final, lo hacen a través de tiendas que venden al menudeo, a estas tiendas se les conoce como detallistas pues se dice que venden al detalle. De esta manera los detallistas son el penúltimo eslabón de la cadena de suministro.

Los detallistas se pueden clasificar de acuerdo a los productos que venden y a su volumen de venta en; estancos, abarrotes, misceláneas, tiendas de conveniencia o autoservicios, donde los estancos son los más pequeños y los autoservicios los más grandes y más variados.



Gráfica 1.2. Diagrama de una empresa de productos de consumo masivo.



Fuente: Elaboración propia.

El objetivo de la cadena de suministro es garantizar que cuando el consumidor final llegue a un detallista encuentre el producto disponible y lo compre, el éxito de un producto se puede medir de acuerdo a su disponibilidad en el mercado, ¿cuantos productos podemos encontrar en los lugares más remotos de nuestro país? Cuando un consumidor no encuentra el producto lo más probable es que adquiera un producto de la competencia y esto representa una venta perdida para la empresa.

Si se recorre la cadena de suministro hacia atrás vemos que el consumidor compra el producto para su consumo con un detallista, el detallista adquiere el producto de una ruta de reparto que lo visita cotidianamente. El vendedor de cada ruta y el detallista evalúan el inventario disponible en la tienda y levantan un pedido, el cual puede ser entregado en la misma visita o en la próxima dependiendo de la forma de operar de la empresa. Las frecuencias de visita y si el pedido se entrega de inmediato o en la próxima visita, depende de las características y del volumen del producto que se comercializa. Por ejemplo, la visita de las rutas de refresco, lácteos y frituras es diario o cada tercer día, mientras que las rutas de helados los visitan una vez a la semana o a la quincena.

La ruta visita a varios clientes levantando pedidos y entregando el producto comprometido a cada cliente. Posteriormente la ruta llega al centro de distribución (CD), entrega el producto sobrante si lo hay y liquida el producto vendido. Entrega su camión al personal de logística del centro de distribución y la recoge al día siguiente para hacer nuevamente su recorrido.

El centro de distribución recibe las rutas y carga las rutas con productos de acuerdo con las entregas del día siguiente. Para que esto se haga de manera efectiva debe contar con el producto suficiente para cargar todas las rutas. La distribución que se realiza de los centros de distribución a los clientes se conoce como distribución secundaria. Las rutas generalmente son camiones medianos, camionetas o incluso pequeños vehículos eléctricos.

El almacén de producto terminado recibe producto de la planta de producción o de otras empresas el cual envía a cada CD de acuerdo al plan de distribución, generalmente se realiza en unidades grandes como: trailers, fulls o tractocamiones. A esta distribución se le conoce como distribución primaria.

Las plantas producen los productos de acuerdo al plan de producción y lo entregan al almacén de producto terminado. En ocasiones las empresas no producen todos los productos que comercializan sino que los compran a otra empresa, los productos se pueden recibir en cada CD o en los almacenes de producto terminado según acuerden las dos empresas.

Los proveedores entregan a las plantas los insumos de materiales y servicios necesarios para producir cada producto, los proveedores conforman el primer eslabón de la cadena.

Cada eslabón es importante y debe interactuar con los demás eslabones, los proveedores y la empresa deben acordar precios, tiempo de entrega, condiciones de entrega y de pago y deben estar de acuerdo para garantizar el abasto de materias primas, también debe tener una buena relación con los detallistas, esto incluye una política de precios, apoyo publicitario, incluso le proporciona exhibidores, enfriadores, mesas, sillas, capacitación, etc.

De acuerdo con información de AcNielsen en el país existen 1.35 millones de detallistas y el 80% de los detallistas son Abarrotes y Misceláneas, en general tenemos muchos clientes con volúmenes pequeños de venta que están dispersos por todo el territorio nacional y algunos clientes medianos y grandes (Tiendas de conveniencia, Autoservicios) concentrados en las grandes ciudades. En otros países como Argentina o Estados Unidos las ventas están concentradas en los autoservicios y por lo tanto se tienen pocos clientes con grandes volúmenes de venta. En México el reto es llegar al mayor número de detallistas de manera rentable.

## 1.2 Administración de la cadena de suministro

Ahora que se sabe que la cadena de suministro es la secuencia de proveedores que contribuyen a la creación y entrega de un producto o un servicio a un cliente final, se darán algunas definiciones más:

**Administración de la cadena de suministro**, busca administrar de forma efectiva y al menor costo posible los flujos, movimientos, inventarios de producto terminado e información relativa a los mismos, desde un lugar de origen a un lugar de destino para satisfacer las necesidades del cliente.

La cadena de suministro de una empresa se integra por diferentes departamentos que planean y ejecutan las actividades desde la compra de materiales hasta la entrega de productos al cliente, así la cadena incluye actividades asociadas con los inventarios, adquisición de materiales, almacenamiento, producción, distribución y entrega a clientes. Las actividades son planificadas, ejecutadas y monitoreadas de acuerdo con las reglas de la empresa y deben satisfacer el nivel de servicio al cliente establecido, así como los objetivos fijados.

**Logística**, es la administración del almacenamiento y flujo de mercancías, servicios e información a través de una organización. Se divide principalmente en tres áreas, administración de materiales, sistema de flujo de materiales y distribución.

**Administración de materiales**, organiza el suministro y recepción de materias primas o productos semi-terminados para su uso posterior.

**Sistema de flujo de materiales**, planifica la fabricación de productos terminados para que estén disponibles.

**Distribución**, entrega los productos terminados al cliente, aquí se incluye la distribución primaria y distribución secundaria.

El objetivo de la logística es generar el producto adecuado, en las cantidades precisas, en el momento exacto y con un costo mínimo. Para lograrlo requiere de varios pasos logísticos; Pronóstico de la demanda, selección de proveedores, pedido de materiales, administración de inventarios, planeación de la producción, envío y entrega de productos y del intercambio de información.

Para poder administrar la cadena es necesario conocer al consumidor, conocer el producto, comprender el proceso de producción y entender el flujo de información.

Del consumidor debemos saber su nivel de ingresos, en dónde y en que condiciones vive, qué edad tiene, cuáles son sus intereses, si pueden agruparse, qué porcentaje de ventas representa cada grupo, que esperan del producto, etc. Del producto necesitamos saber donde se producen, qué porcentaje de venta representa cada uno, cuál su ciclo de vida, qué otros productos existen en el mercado que compiten con nuestro producto.

Debemos conocer el proceso de producción, entender el flujo de procesos, es decir, cómo funcionan las líneas de producción, cuáles son los lotes de producción, cómo se produce y la secuencia de producción.

Para integrar los procesos de la cadena debemos identificar qué información es necesaria para la toma de decisiones en cada eslabón de la cadena, es decir, comprender el flujo de información,

La cadena será más eficaz en la medida en que se conozcan y entiendan cada uno de estos puntos. Para medir el desempeño de la cadena se necesita una visión global que nos diga los costos totales y el valor de cada proceso, para esto se crean indicadores que se monitorean periódicamente, los indicadores pueden medir la efectividad, la eficiencia, la productividad y el beneficio. El principal indicador debe ser la atención al cliente ya que es el objetivo principal de la cadena.

La efectividad, mide el cumplimiento de cada proceso en las condiciones correctas y el tiempo correcto. La eficiencia mide el rendimiento de los materiales y generalmente se mide como el número de materiales óptimo entre los materiales utilizados. La productividad mide el número de productos generados entre el número de materiales utilizados y el beneficio es el producto generado entre el costo generado.

### **1.3 Pronósticos de ventas**

El pronóstico de ventas es la base para poder planear el desarrollo de la empresa. Existen tres tipos de pronósticos y cada uno es creado con un fin diferente.

Pronósticos de largo plazo, sirven para hacer la planeación estratégica de la empresa, deben ser generales y con un horizonte de planeación de por lo menos 5 años, sirven para definir qué inversiones deben hacerse, por ejemplo: si deben construir una nueva planta, construir más centros de distribución, invertir en camiones, qué tipo de personal deben desarrollar, etc. generalmente estos pronósticos son mensuales o trimestrales y las estimaciones se hacen tomando en cuenta variables macroeconómicas como: producto interno bruto, crecimiento poblacional, inflación estimada, desempleo abierto, etc. Los presupuestos anuales se basan en este pronóstico.

Pronósticos de mediano plazo, sirven para la planeación anual para fijar objetivos para cada departamento de la empresa, el horizonte de planeación es de un año y estima las ventas mensuales de cada producto.

Pronósticos de corto plazo, sirven para planear las actividades de cada eslabón de la cadena de suministro, el horizonte de planeación es de una semana y el detalle debe ser completo, es decir, determina el pronóstico de venta para cada producto en cada centro de distribución para cada día de la semana.

Aunque cada pronóstico tiene un fin diferente y características diferentes, todos deben contribuir al cumplimiento de la planeación estratégica, pero existe una diferencia importante entre los pronósticos, el de largo y mediano plazo deben estar enfocados a lograr las ventas establecidas en el plan estratégico, este es el objetivo y la razón de ser del departamento de Marketing y/o Ventas, el pronóstico de corto plazo sirve para garantizar la disponibilidad de los productos en los centros de distribución y lograrlo con el menor costo posible, éste es el objetivo de logística.

Así, el pronóstico de corto plazo es independiente de los dos anteriores y como su horizonte de planeación es muy corto, no intervienen variables macroeconómicas o demográficas, están basados solamente en las ventas históricas, lo que es importante considerar son las actividades que el departamento de Marketing tenga programado realizar, también es importante considerar las actividades que realizan los competidores, ya que, afectan directamente a la venta de cada producto, usualmente estas actividades son:

1. Incrementos de precio ( o anuncio de aumentos)
2. Descuentos de precio
3. Aumento de precio de los competidores
4. Huelga
5. Huelga de los competidores
6. Promociones
7. Falta de producto
8. Lanzamiento de nuevos productos
9. Condiciones climáticas excepcionales

Se debe llevar un registro de estas actividades para identificar estos patrones y descartarlos del comportamiento normal de la venta, también sirven para estudiar el efecto que ocasionan en la venta y poder ajustar el pronóstico cuando la actividad va a volver a ocurrir.

Entonces, el pronóstico de corto plazo estima las ventas semanales de un producto basado en su venta histórica y posteriormente se ajusta el pronóstico en caso de que este planeada alguna de las actividades listadas en el párrafo anterior.

Puede ocurrir que el producto tenga tiempo de comercializarse o no, es decir, hay productos que tienen pocas semanas de historia ya que se lanzaron recientemente al mercado y hay productos que tienen muchas semanas de historia, prácticamente se dividen en dos; los productos maduros; que tienen al menos 60 semanas de venta y los productos nuevos que tienen menos de 60 semanas. Para los productos maduros se puede hacer un pronóstico con series de tiempo, para los nuevos necesitamos otras técnicas debido a que no se cuenta con la información suficiente para una serie de tiempo, estas técnicas generalmente son promedios móviles o regresión lineal.

En el siguiente capítulo veremos la teoría que se ha desarrollado sobre series de tiempo y en el capítulo tres aplicaremos la teoría para generar un pronóstico de ventas.

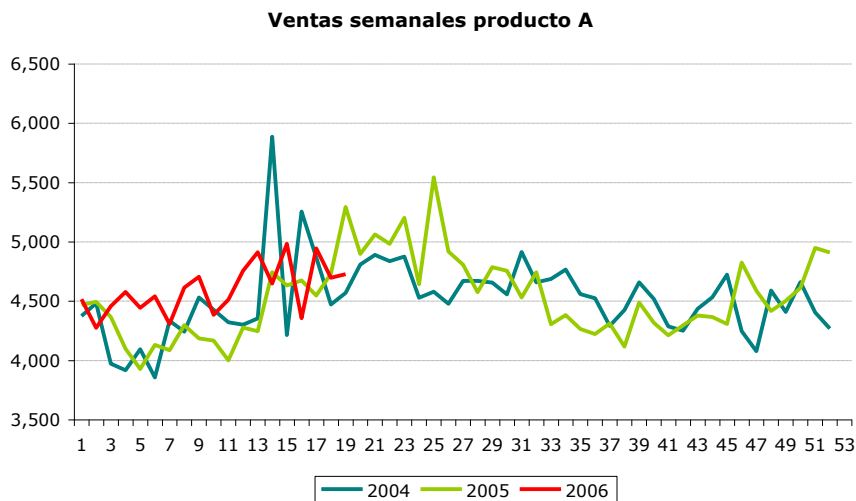
## Capítulo 2. Series de tiempo

### 2.1. ¿Qué son las series de tiempo?

Una serie de tiempo  $X_t$  es un conjunto de observaciones  $x(t)$ , que ocurre en un tiempo específico  $t$ ,  $X_t = \{x(t), t \in T_0\}$ , las series de tiempo pueden ser discretas o continuas dependiendo si el conjunto  $T_0$  es discreto o continuo.

Para comprender mejor qué es una serie se darán algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.1.** La gráfica muestra el volumen de ventas semanales de un cierto producto “A”.



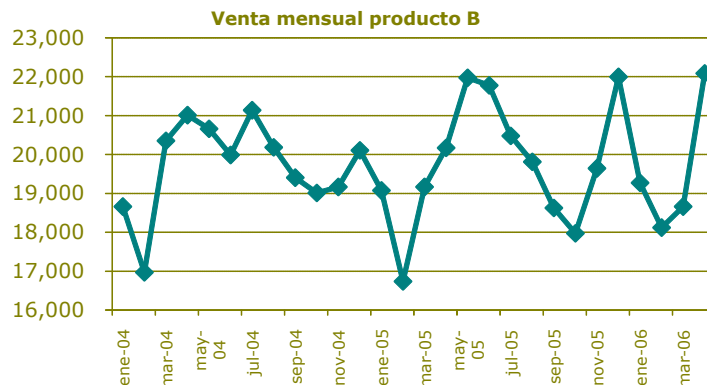
Estadísticas semanales del producto A.

	2004	2005	2006
Media	4,518	4,531	4,598
DesvEst	331	345	209
n	52	52	19
Crecimiento		0.3%	1.5%

## Ejemplo 2.2. Ventas mensuales del producto B.

### Venta mensual del producto B

Mes	Venta
ene-04	18,657
feb-04	16,967
mar-04	20,352
abr-04	21,009
may-04	20,661
jun-04	19,984
jul-04	21,133
ago-04	20,181
sep-04	19,402
oct-04	19,011
nov-04	19,163
dic-04	20,108
ene-05	19,072
feb-05	16,735
mar-05	19,162
abr-05	20,171
may-05	21,972
jun-05	21,778
jul-05	20,478
ago-05	19,811
sep-05	18,626
oct-05	17,973
nov-05	19,640
dic-05	21,991
ene-06	19,269
feb-06	18,117
mar-06	18,655
abr-06	22,083



### Estadísticas mensuales del producto B.

	2004	2005	2006
Media	19,719	19,784	19,531
DesvEst	1,168	1,626	1,765
n	12	12	4
Crecimiento		0.3%	-1.3%

Según el enfoque clásico, las series de tiempo pueden presentar algunos comportamientos como son: Tendencia, Estacionalidad y Aleatoriedad.

Sea  $X_t$  una serie de tiempo entonces se puede escribir de la siguiente forma:

$$X_t = T(t) + C(t) + R(t)$$

donde:

$T(t)$  es el componente de tendencia

$C(t)$  es el componente estacional

$R(t)$  es el efecto aleatorio

Por ejemplo, cuando las ventas de un producto crecen a través del tiempo, este incremento se conoce como tendencia y si las ventas del producto varían dependiendo de la época del año y este comportamiento se repite cada año entonces tiene un comportamiento estacional, por ejemplo, los refrescos incrementan su venta en verano y en navidad. Por último el efecto aleatorio no se puede explicar como los dos anteriores, simplemente varía de forma aleatoria, donde los valores pertenecen a una distribución normal con media cero y desviación estándar positiva.

Algunas veces se puede suponer que el modelo en lugar de ser aditivo puede ser multiplicativo, es decir,  $X(t) = T(t) * C(t) * R(t)$ , depende del tipo de serie.

Se le llama **Suavizamiento** al proceso de transformar una serie en otra nueva que sea equivalente a la original pero que no tenga tendencia o estacionalidad, éstas son algunas técnicas utilizadas para suavizar una serie.

**a).- Promedios Móviles**, es el método más simple donde se selecciona un número de datos N y se obtiene la media permitiendo que los promedios se mueva conforme se observan los nuevos datos. Con este método podemos eliminar la componente estacional de la serie y de esta forma la transformamos en una serie que tiene solamente dos componentes, la tendencia y el efecto aleatorio.

**Definición.** Sea  $X_t = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  una serie, el modelo de promedios móviles de orden n es:

$$MA(n) = \{Y_t \mid Y_t = [X_t + X_{t+1} + \dots + X_{t+n-1}] / n, t=1, 2, \dots, m-n+1\}$$

Así tenemos:

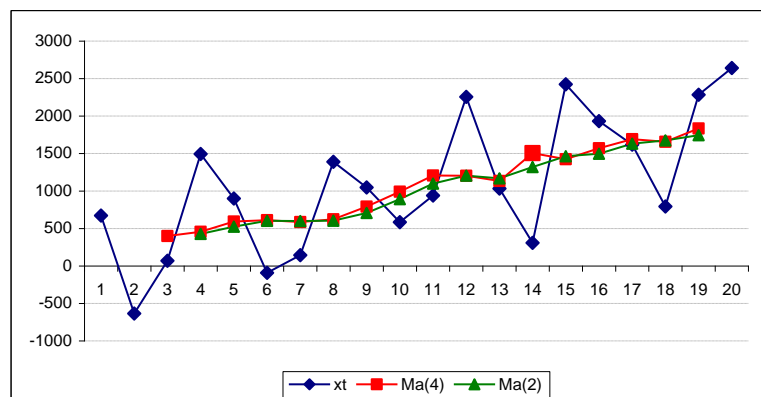
$$MA(2) = \{Y_t \mid Y_t = (X_t + X_{t+1}) / 2, t=1, 2, \dots, m-1\}$$

$$MA(3) = \{Y_t \mid Y_t = (X_t + X_{t+1} + X_{t+2}) / 3, t=1, 2, \dots, m-2\}$$

En el ejemplo 2.3 se muestra una serie  $X_t$  que tiene un ciclo de 4 periodos, se calcula la serie  $MA(4)$ , es decir, los promedios móviles de orden 4 y a partir de esta nueva serie calculamos  $MA(2)$ . De esta forma las tres series son equivalentes, mantienen la misma tendencia pero en las dos últimas eliminamos la estacionalidad.

**Ejemplo 2.3.** Promedios móviles de orden 2 y 4 de una serie de tiempo.

t	Xt	MA (4)	MA (2)
1	672.0		
2	(635.4)		
3	69.7	400.0	
4	1,493.8	456.8	428.4
5	899.3	592.6	524.7
6	(92.4)	611.3	601.9
7	144.4	585.2	598.2
8	1,389.7	622.3	603.7
9	1,047.5	791.6	706.9
10	584.8	990.5	891.1
11	940.1	1,207.1	1,098.8
12	2,255.9	1,203.4	1,205.2
13	1,032.7	1,134.4	1,168.9
14	308.8	1,505.4	1,319.9
15	2,424.2	1,424.4	1,464.9
16	1,931.8	1,570.8	1,497.6
17	1,618.4	1,691.9	1,631.3
18	793.1	1,656.7	1,674.3
19	2,283.5	1,834.2	1,745.5
20	2,641.8		





**b) Suavizamiento exponencial**, se basa en la idea de que es posible calcular una nueva serie a partir de un promedio anterior y del último dato observado.

Sea  $X_t = \{ X_1, X_2, \dots \}$  una serie se puede suavizar exponencialmente y obtener la serie  $Y_t = \{ Y_1, Y_2, \dots \}$  donde:

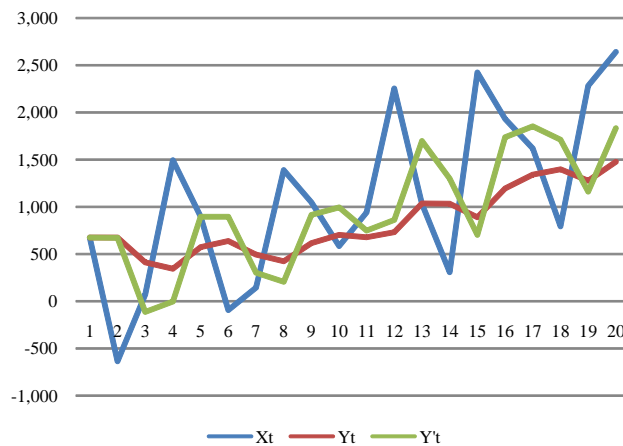
$$Y_t = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha) Y_{t-1} \quad \text{donde } 0 \leq \alpha \leq 1$$

**Ejemplo 2.4.** Siguiendo con los datos del ejemplo anterior haremos dos suavizamientos exponenciales la serie  $Y_t$  obtenida tomando  $\alpha=0.2$  y  $Y'_t$  obtenida tomando  $\alpha=0.6$

t	$X_t$	$Y_t$	$Y'_t$
1	672.0	675.0	675.0
2	635.4	674.4	673.2
3	69.7	412.4	112.0
4	1,493.8	343.9	3.0
5	899.3	573.9	895.1
6	92.4	639.0	897.6
7	144.4	492.7	303.6
8	1,389.7	423.0	208.1
9	1,047.5	616.4	917.1
10	584.8	702.6	995.3
11	940.1	679.0	749.0
12	2,255.9	731.2	863.7
13	1,032.7	1,036.2	1,699.0
14	308.8	1,035.5	1,299.2
15	2,424.2	890.1	705.0
16	1,931.8	1,197.0	1,736.5
17	1,618.4	1,343.9	1,853.7
18	793.1	1,398.8	1,712.5
19	2,283.5	1,277.7	1,160.9
20	2,641.8	1,478.8	1,834.4

donde:  $Y_t = 0.2 * X_{t-1} + 0.8 * Y_{t-1}$   
 $Y'_t = 0.6 * X_{t-1} + 0.4 * Y_{t-1}$

Suavizamiento exponencial de  $X_t$



$\alpha$  es la proporción del peso que se da al último valor de la serie  $X_t$  contra el peso del promedio anterior, es decir, mientras más grande es el valor de  $\alpha$ , más nos acercamos al último valor de la serie  $X_t$ . Si  $\alpha=1$  entonces  $Y_{t+1}$  es igual a  $X_t$ , es decir, la nueva serie es igual a la original solamente recorrida una unidad de tiempo.

**c) Diferencia**, cuando se tiene una serie de datos que crece o decrece pero que tiene comportamientos repetidos en determinados lapsos, se puede utilizar esta técnica.

Sea  $Z_t$  una serie y  $W_t$  una nueva serie obtenida a partir de la primera serie de la siguiente forma:

$$W_t = Z_t - Z_{t-1} \quad t = 2, 3, \dots, n$$

$W_t$  es la primera diferencia de la serie  $Z_t$ . En el ejemplo 2.5 se tiene una serie y su primera diferencia.

Si después de la primera diferencia la serie no es estacionaria podemos hacer una segunda diferencia.

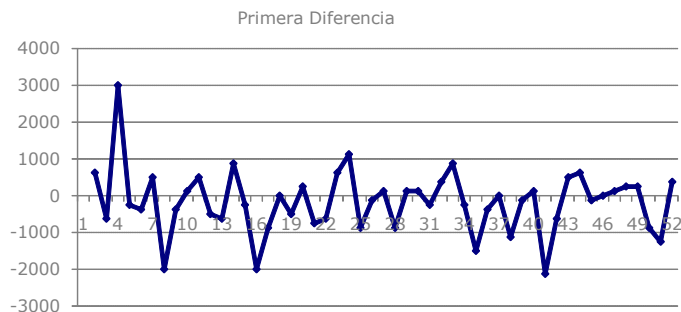
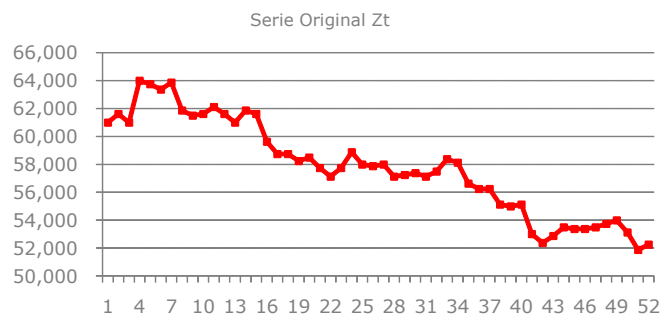
$$Y_t = W_t - W_{t-1} = (Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-1} - Z_{t-2}) \quad t = 3, 4, \dots, n$$

De manera sucesiva podemos seguir haciendo diferencias.

**Ejemplo 2.5.** Gráfica de la primera diferencia de la serie  $Z_t$ , cuyos valores se muestran en la siguiente tabla.

**Serie Original  $Z_t$**

Semana	Venta	Semana	Venta
1	61,000	27	58,000
2	61,625	28	57,125
3	61,000	29	57,250
4	64,000	30	57,375
5	63,750	31	57,125
6	63,375	32	57,500
7	63,875	33	58,375
8	61,875	34	58,125
9	61,500	35	56,625
10	61,625	36	56,250
11	62,125	37	56,250
12	61,625	38	55,125
13	61,000	39	55,000
14	61,875	40	55,125
15	61,625	41	53,000
16	59,625	42	52,375
17	58,750	43	52,875
18	58,750	44	53,500
19	58,250	45	53,375
20	58,500	46	53,375
21	57,750	47	53,500
22	57,125	48	53,750
23	57,750	49	54,000
24	58,875	50	53,125
25	58,000	51	51,875
26	57,875	52	52,250

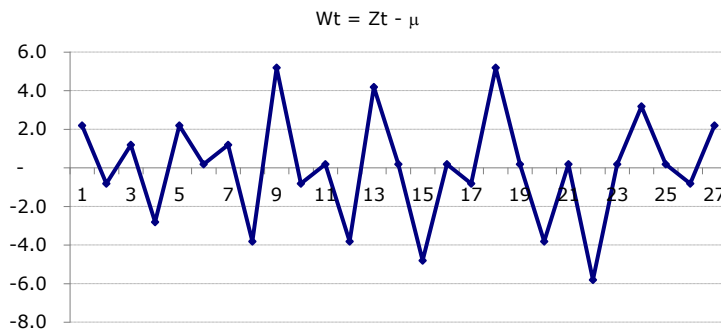


**d).- Desviaciones de la media,** cuando la media de la serie es contante se puede definir una nueva serie, sea  $\mu$  la media de la serie  $Z_t$ :

$$W_t = Z_t - \mu \quad t = 1, 2, \dots, n$$

**Ejemplo 2.6:** Gráfica de la serie  $Z_t$  cuyos valores se muestran en la tabla y gráfica de la serie  $W_t = Z_t - \mu$

Semana	$Z_t$	$W_t = Z_t - \mu$
1	102	2.2
2	99	-0.8
3	101	1.2
4	97	-2.8
5	102	2.2
6	100	0.2
7	101	1.2
8	96	-3.8
9	105	5.2
10	99	-0.8
11	100	0.2
12	96	-3.8
13	104	4.2
14	100	0.2
15	95	-4.8
16	100	0.2
17	99	-0.8
18	105	5.2
19	100	0.2
20	96	-3.8
21	100	0.2
22	94	-5.8
23	100	0.2
24	103	3.2
25	100	0.2
26	99	-0.8
27	102	2.2



## 2.2. Estacionalidad de las Series

Las series se pueden comportar de diferentes formas a través del tiempo, puede que se presente una tendencia, estacionalidad o no tener una forma definida. Las series pueden ser estacionarias o pueden transformarse para obtener una nueva serie que es equivalente a la original y que sea estacionaria.

**Estacionalidad**, se dice que una serie es estacionaria cuando el valor de su media, varianza y covarianza no varían sistemáticamente en el tiempo.



Para formalizar se dan algunas definiciones.

**Definición.** Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias  $\{X(t), t \in T\}$  definida en un espacio probabilístico  $(\Omega, F, P)$ .

**Definición.** Si  $\{X_t, t \in T\}$  es un proceso en el cual la  $\text{Var}(X_t)$  es finita para cada  $t \in T$  entonces la **función de autocovarianza**  $\varphi_x(\cdot, \cdot)$  de  $\{X_t\}$  está definida por

$$\varphi_x(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - E X_r)(X_s - E X_s)] \quad r, s \in T$$

**Definición.** La serie de tiempo  $X_t$  con  $t \in Z$  y  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  se dice que es **estacionaria** si:

- i)  $E(|X_t|^2)$  es finito para toda  $t \in Z$
- ii)  $E(X_t) = \mu$  para toda  $t \in Z$
- iii)  $\varphi_x(r, s) = \varphi_x(r+t, s+t)$  para toda  $r, s, t \in Z$

Si  $X_t$  es estacionaria entonces  $\varphi_x(r, s) = \varphi_x(r-s, 0)$  para cualesquiera  $r, s$  por lo tanto se puede simplificar y escribir únicamente  $\varphi_x(h) = \varphi_x(h, 0) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$  para toda  $t \in T$ .

**Definición.** Un proceso estocástico es **estrictamente estacionario** si para cualquier conjunto  $(t_1, \dots, t_k)$  y  $s$  entero, el vector de variables  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$  tiene la misma función de distribución de probabilidad conjunta que el vector  $(Y_{t_1+s}, \dots, Y_{t_k+s})$

### 2.3. Función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial

La función de autocorrelación (acf) y la función de autocorrelación parcial (pacf) son medidas estadísticas que permiten medir la relación que existe entre los datos de la serie.

Si  $X_t$  es estacionaria entonces su función de autocovarianza  $\varphi_x(r, s) = \varphi_x(r-s, 0)$  para cualesquiera  $r, s$  por lo tanto se puede simplificar y escribir únicamente  $\varphi_x(h) = \varphi_x(h, 0) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$  para toda  $t \in T$ .

**Definición.** La **función de autocorrelación (acf)** de una serie estacionaria  $X_t$  está definida como:

$$\gamma_x(r, s) = \varphi_x(h) / \varphi_x(0) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) \quad r, s \in T$$

La autocorrelación nos indica la asociación entre valores de la misma variable en diferentes periodos de tiempo, es decir,  $\gamma_1$  nos indica como influye una observación en la siguiente,  $X_t$  como influye en  $X_{t+1}$ .  $\gamma_2$  nos indica como influye  $X_t$  en  $X_{t+2}$  en general  $\gamma_n$  nos indica como influye  $X_t$  en  $X_{t+n}$ .

Si  $\gamma_1$  es significativa implica que  $X_1$  influye en  $X_2$  y  $X_2$  influye en  $X_3$  entonces  $X_1$  influye en  $X_3$  pero como se puede saber si  $X_1$  influye en  $X_3$  sin influir en  $X_2$ . Para esto sirve la función de autocorrelación parcial

**Definición.** La **función de autocorrelación parcial (pacf)** de una serie estacionaria  $X_t$  está definida como:

$$\alpha(1) = \text{Corr} ( X_2, X_1 )$$

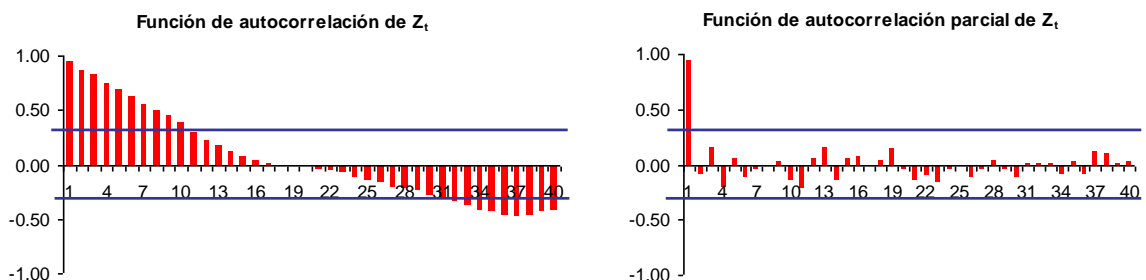
Para  $k \geq 2$

$$\alpha(k) = \text{Corr} ( Z_t, Z_{t+k} \mid Z_{t+1}, \dots, Z_{t+k-1} )$$

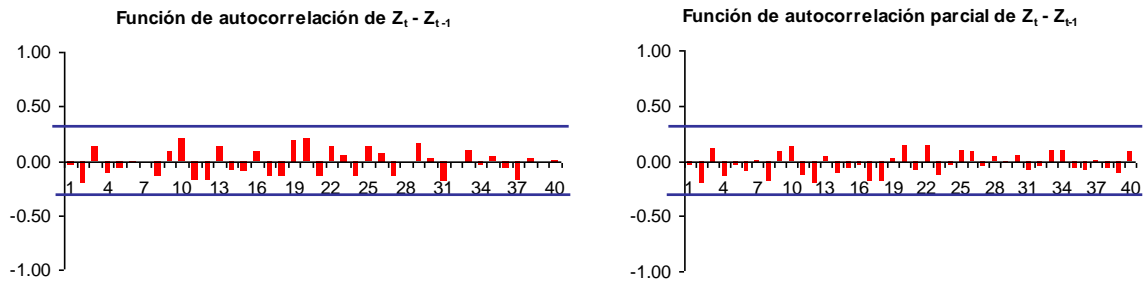
Y se obtiene con la división de los determinantes de la fórmula:

$$\alpha(k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \gamma_x(1) & \gamma_x(2) & \dots & \gamma_x(k-2) & \gamma_x(1) \\ \gamma_x(1) & 1 & \gamma_x(1) & \dots & \gamma_x(k-3) & \gamma_x(2) \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \gamma_x(k-1) & \gamma_x(k-2) & \gamma_x(k-3) & \dots & \gamma_x(1) & \gamma_x(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \gamma_x(1) & \gamma_x(2) & \dots & \gamma_x(k-2) & \gamma_x(k-1) \\ \gamma_x(1) & 1 & \gamma_x(1) & \dots & \gamma_x(k-3) & \gamma_x(k-2) \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \gamma_x(k-1) & \gamma_x(k-2) & \gamma_x(k-3) & \dots & \gamma_x(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

La función pacf proporciona la relación directa existente entre observaciones separadas por  $k$  retardos  $Z_t$  y  $Z_{t+k}$ , sin la afectación de las observaciones intermedias  $Z_{t+1}, \dots, Z_{t+k-1}$ , tomando los datos del ejemplo 2.5 se puede graficar su función de autocorrelación (acf) y autocorrelación parcial (pacf).



También se pueden hacer las gráficas de acf y pacf para la primera diferencia de  $Z_t$ .



Como se puede ver en este ejemplo con la primera diferencia se obtiene una serie estacionaria. Para decidir si las autocorrelaciones son significativamente iguales a cero o no se utiliza la siguiente prueba; dado que las autocorrelaciones se distribuyen normalmente con media cero y varianza estimada:

$$1/N \left[ 1 + 2 \sum_1^q \gamma_x(k)^2 \right]$$

La probabilidad de que una variable que se distribuye normalmente con media y varianza conocidas caiga entre los límites  $\mu \pm (1.96)\alpha$  es 0.95. Entonces  $\gamma_x(k)$  debe caer fuera de los límites

$$\pm [ 1.96 / N^{1/2} ] \left[ 1 + 2 \sum_1^q \gamma_x(k)^2 \right]^{1/2}$$

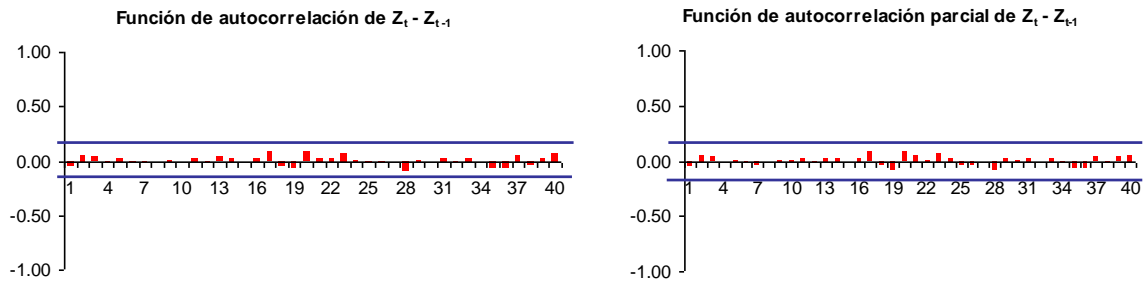
Para que sea significativamente distinta de cero, si cae dentro de los límites entonces la autocorrelación es igual a cero. De la misma forma la prueba de significancia de las autocorrelaciones parciales es que caiga dentro de los límites definidos por:

$$\pm 1.96 / N^{1/2}$$

Si las pacf caen dentro de los límites entonces son iguales a cero y si caen fuera son significativamente diferentes de cero. En las gráficas de las funciones acf y pacf que se muestran se colocan los límites anteriores y se grafican con las líneas azules.

Ahora, se define una serie muy importante se conoce como Ruido Blanco, es una serie estacionaria en la que ninguna observación influye en las siguientes, es decir, las componentes tendencia y la estacionalidad son cero, es solamente aleatoria. También se le conoce como “proceso puro”.

Ejemplo de las funciones de autocorrelación (acf) y autocorrelación parcial (pacf) para una serie de ruido blanco:



En los años setenta George Box y Gwilym Jenkins propusieron los modelos ARIMA, sin embargo no alcanzaron gran popularidad debido a las dificultades que existían para ponerlos en práctica. Actualmente, con el avance de las computadoras estos modelos han alcanzado gran popularidad.

Box y Jenkins desarrollaron modelos estadísticos que tienen en cuenta la dependencia existente entre los datos, cada observación es modelada en función de los valores históricos de la serie, a estos modelos se les conoce como ARIMA (Autoregressive Integrate Moving Average). Estos modelos tienen solamente en cuenta los datos históricos, ignoran información de variables causales, utilizan la última venta como valor inicial, permiten examinar el modelo más adecuado, analiza errores recientes de pronósticos para seleccionar el ajuste apropiado, es el método que más información extrae. Para aplicar este modelo la serie debe ser estacionaria.

Una forma fácil de hacer una serie estacionaria es por medio de diferenciaciones, tomando la primera diferencia de una serie se puede eliminar una tendencia que evoluciona lentamente en el tiempo, tomando diferencias mayores a uno podemos eliminar la estacionalidad, si la estacionalidad se repite cada  $s$  periodos entonces  $Y_t = X_t - X_{t-s}$  elimina este ciclo.

## 2.4. Modelos ARIMA

Note que el objetivo de modelar una serie es pronosticar sus valores futuros, si la serie es estacionaria se puede modelar si no lo es, podemos transformarla en una segunda serie equivalente a la original que sea estacionaria, modelar la nueva serie y después volver a transformarla en la serie original de esta forma siempre se puede calcular el pronóstico.

Existen tres modelos básicos; Modelos autoregresivos AR, modelos de promedios móviles MA y modelos mixtos ARMA.

### 2.4.1 Modelos autoregresivos AR(p)

Describe una clase particular de proceso en que las observaciones en un momento dado son predecibles a partir de las observaciones históricas del proceso más un término de error aleatorio, es decir, las observaciones dependen linealmente de las observaciones anteriores, en general un modelo ARIMA(p,0,0) o AR(p) se escribe:

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t$$

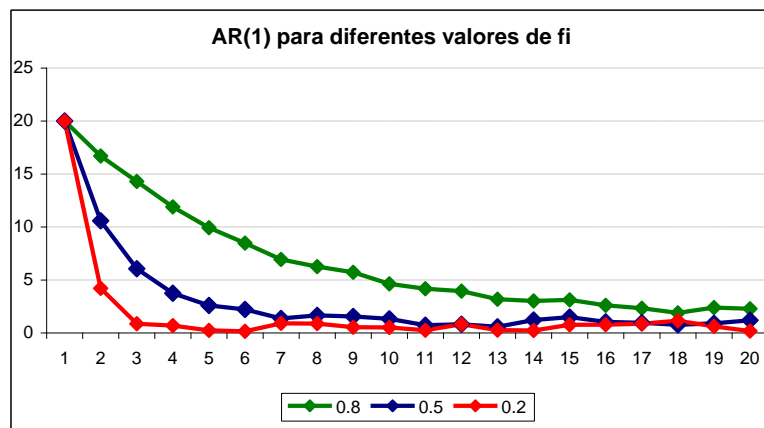
Donde  $Z_t$  tiene una distribución normal con media 0 y varianza finita para toda  $t$  equivalentemente se puede decir que  $Z_t$  es ruido blanco y  $C$  es cualquier constante.

El caso más simple es ARIMA(1,0,0) o AR(1), donde cada observación depende de la observación anterior:

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + Z_t$$

Sea  $X_t$  una serie AR(1) con  $C$  igual a cero, este es un ejemplo para diferentes valores de  $\phi_1$ .

t	$\phi_1 = 0.8$	$\phi_1 = 0.5$	$\phi_1 = 0.2$
1	20.00	20.00	20.00
2	16.69	10.58	4.21
3	14.30	6.06	0.87
4	11.89	3.74	0.69
5	9.93	2.59	0.24
6	8.48	2.22	0.15
7	6.93	1.37	0.90
8	6.26	1.66	0.88
9	5.72	1.56	0.54
10	4.63	1.33	0.51
11	4.17	0.73	0.25
12	3.94	0.82	0.82
13	3.18	0.57	0.26
14	3.01	1.22	0.23
15	3.12	1.49	0.77
16	2.60	1.04	0.78
17	2.33	0.95	0.86
18	1.89	0.76	1.15
19	2.40	0.90	0.62
20	2.28	1.19	0.17





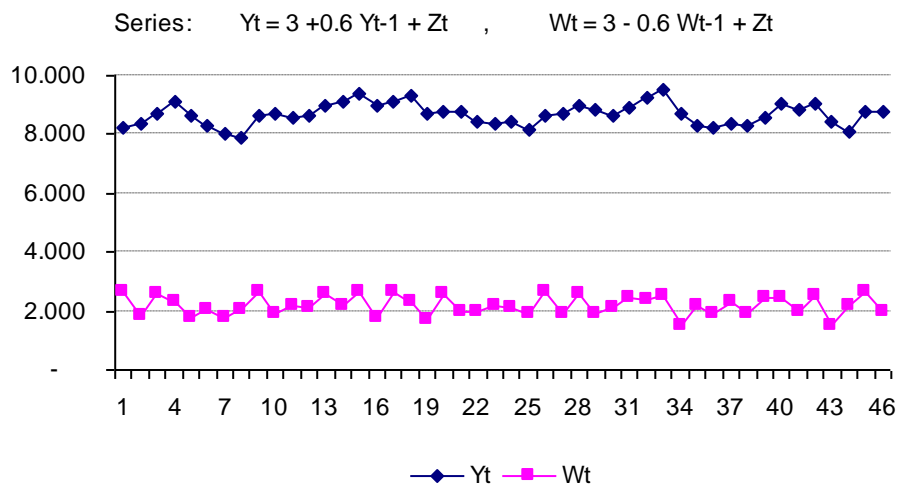
Los modelos AR(1) tienen las siguientes características:

- El proceso AR(1) es estacionario si  $|\phi_1| < 1$
- Si  $|\phi_1| > 1$  el proceso es explosivo
- La media del proceso es igual a  $C / (1 + \phi_1)$
- La varianza del proceso es igual a  $Var(Z_t)^2 / (1 + \phi_1^2)$
- Si  $\phi_1$  es positivo la acf decrece positivamente y la pacf presentará únicamente la primera barra significativa y será positiva.
- Si  $\phi_1$  es negativo la acf decrece de forma alternada y la pacf presentará únicamente la primera barra significativa y será negativa.

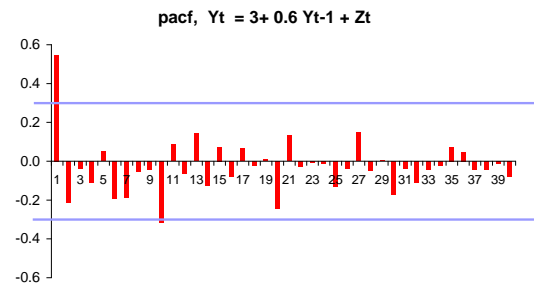
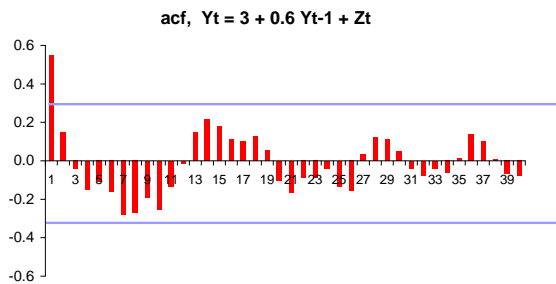
Analizando el ejemplo de las siguiente gráficas para las series AR(1) con  $\phi_1$  positivo y  $\phi_1$  negativo.

Sean  $Y_t = 3 + 0.6 Y_{t-1} + Z_t$

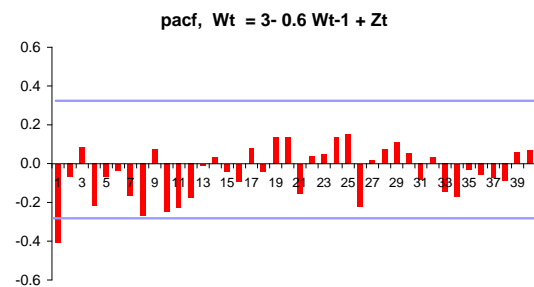
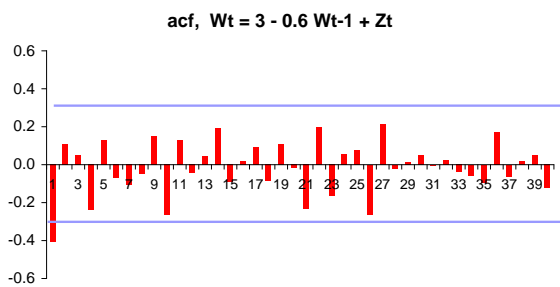
$W_t = 3 - 0.6 W_{t-1} + Z_t$



Las funciones acf y pacf para  $Y_t = 3 + 0.6 Y_{t-1} + Z_t$ :

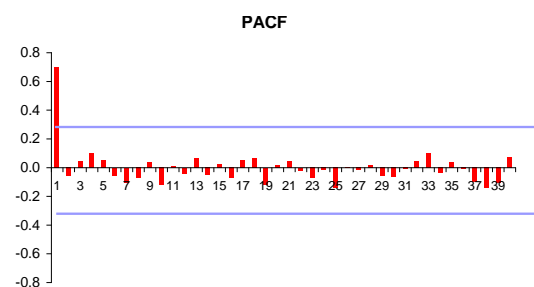
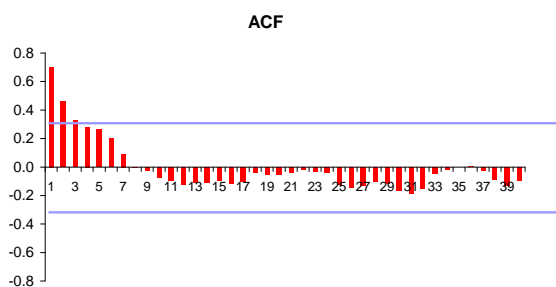


Las funciones acf y pacf para  $W_t = 3 - 0.6 Y_{t-1} + Z_t$ :

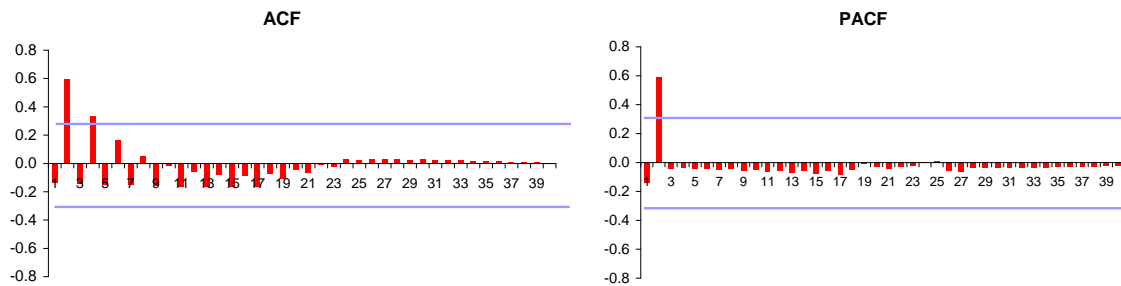


En una serie AR(2), la función de autocorrelación es más compleja y admite varias posibilidades pero para la acf y pacf serán significativas las dos primeras barras o por lo menos la segunda barra.

Funciones acf y pacf para  $Y_t = 3 + 0.6 Y_{t-1} + 0.1 Y_{t-2} + Z_t$



Funciones acf y pacf para  $W_t = 3 - 0.6 W_{t-1} - 0.8 W_{t-2} + Z_t$



En general para los modelos AR(p) la acf va decreciendo y todas o algunas de las primeras p-1 barras serán significativas, la barra p será significativa. La pacf tendrá a lo más las primeras p barras significativas, esto lo sabemos por la forma en que esta definida la función acf.

Una característica de los modelos AR es que tiene larga memoria, es decir, la pacf decrece lentamente.

## 2.4.2 Modelos de promedios móviles MA(q).

En este modelo el pronóstico puede calcularse a partir de las componentes aleatorias anteriores, se conoce como modelo ARIMA(0,0,q) o MA(q) se escribe:

$$Y_t = \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

Donde  $Z_{t-1}$  se distribuye normalmente con media cero y varianza finita.

Como  $1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2$  es finito, un proceso de promedios móviles finito siempre es estacionario.

Los modelos MA(q) tienen una función acf que se corta después de de un determinado rezago  $k=q$ . La función pacf decae rápidamente hacia cero pero con distintos patrones.

En particular para el modelo de promedios móviles de primer orden MA(1), la variable  $Y_t$  depende de un solo error previo, es decir:

$$Y_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

La función de autocorrelación para este modelo es:

$$\gamma_x(k) = \begin{cases} -\theta_1 / (1 + \theta_1^2) & \text{Si } k=1 \\ 0 & \text{Si } k>1 \end{cases}$$

La función pacf está dada por:

$$\alpha(k) = \frac{-\theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}} \quad \text{para } k \geq 1$$

Lo cual implica que la pacf decae geométricamente hacia cero conforme aumenta k. Si  $\theta_1$  es positivo las acf decaerán con valores negativos. Si  $\theta_1$  es negativo entonces las acf serán positivas cuando k sea impar y negativas cuando k sea par, lo cual hará que la pacf disminuya alternando valores positivos y negativos. Si  $\theta_1$  es cercano a +-1, la función acf decaerá lentamente pero si  $\theta_1$  es cercano a cero acf decae rápidamente.

### 2.4.3 Modelos ARMA(p,q)

Este modelo permite describir una serie como una función lineal de datos históricos y de errores debidos al azar.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q} + Z_t$$

Donde  $Z_i$  se distribuye normalmente con media cero y varianza finita.

El modelo ARMA(1,1) se puede escribir a través de la siguiente fórmula:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 Z_{t-1} + Z_t$$

Para que el proceso sea estacionario debe cumplirse que  $|\phi_1| < 1$ . La función acf está definida de la siguiente forma:

$$\gamma_x(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k=0 \\ [(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)] / [1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1] & \text{para } k=1 \\ \phi_1 \gamma_x(k-1) & \text{para } k \geq 2 \end{cases}$$

En general las funciones acf y pacf decaen exponencialmente hacia cero pero toman distintos patrones dependiendo de los signos y los valores de  $\phi_1$  y  $\theta_1$ .

#### 2.4.4 Modelos ARIMA(p,d,q)

Inicialmente debemos obtener una serie estacionaria y la función Box-Cox nos sirve cuando la varianza de la serie crece o decrece con el tiempo, es decir, la serie no es estrictamente estacionaria. En particular para datos positivos con desviación estándar creciente se puede estabilizar la serie escogiendo  $\lambda=0$  y para datos con desviación estándar decreciente se puede escoger  $0 < \lambda \leq 1.5$  en la siguiente función:

$$f(y) = \begin{cases} (y^\lambda - 1)/\lambda & 0 < \lambda \leq 1.5 \\ LN(y) & \lambda = 0 \end{cases}$$

En la práctica esta función es de gran ayuda y la podemos utilizar antes de remover la tendencia y la estacionalidad de una serie ya que nos garantiza que la varianza de la serie es constante.

Si se detecta que la media no es estacionaria entonces la diferenciación es la mejor herramienta. Las diferencias regulares se aplican a la serie original y se obtiene una serie equivalente a la original pero con media estacionaria. Sea  $Y_t$  la serie original y sacamos la primera diferencia entonces la nueva serie  $W_t$  es:

$$W_t = Y_t - Y_{t-1} \text{ para } t \geq 2$$

Se puede obtener una tercera serie  $Z_t$  diferenciando  $W_t$  nuevamente y entonces.

$$Z_t = W_t - W_{t-1} = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \text{ para } t \geq 3$$

Se puede seguir haciendo diferencias hasta que la serie tenga media constante entonces se dice que  $d$  es el número de veces que se repite la diferencia, es decir, para la serie  $W_t$   $d=1$  y para la serie  $Z_t$   $d=2$ . Una vez que la serie es estacionaria se puede escoger un modelo ARMA para la nueva serie estacionaria. Este nuevo modelo es llamado modelo autoregresivo integrado de promedios móviles de grado  $(p,d,q)$  o simplemente ARIMA( $p,d,q$ ).

## 2.5 Estimación del orden $p$

Desafortunadamente no existe una forma fácil de identificar el orden para el modelo de una serie por lo cual se han desarrollado varias técnicas para tratar de encontrar parámetros que nos permitan una estimación aceptable.

Para calcular el orden de un modelo AR( $p$ )

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t$$

Se utilizan las ecuaciones de Yule-Walker, las cuales proporcionan el orden máximo del modelo que mejor se ajusta a los datos y con esto se sabe que cualquier  $\phi_{p+i}$  donde  $i$  es entero positivo será igual a cero.

## 2.6 Pruebas para verificar que el modelo es adecuado.

### 2.6.1 Pruebas para los parámetros $\phi_i$ y $\theta_j$

Una vez que se han estimado los parámetros  $\phi_i$  y  $\theta_j$  se debe revisar el modelo para asegurarse que se cumplan que la serie sea estacionaria, invertible y que los parámetros  $\phi_i$  y  $\theta_j$  sean significativamente diferentes de cero para toda  $i$  y  $j$ . Un parámetro es significativamente diferente de cero si  $\phi_i < -1.96 * (\text{error estándar estimado})$  y  $1.96 * (\text{error estándar estimado}) > \phi_i$ .

El error estándar estimado depende del modelo ajustado y si el parámetro es significativamente diferente de cero debe incluirse en el modelo de otra forma no se incluye. En la práctica muchas veces no se cuenta con las observaciones necesarias para esta prueba y generalmente los parámetros se consideran significativos si el valor absoluto de su valor crítico es mayor de 1.

Cuando se tienen varios modelos es necesaria una forma de escoger el mejor modelo, se puede utilizar el siguiente criterio.

#### Akaike's Information Criterion (AICC).

Esta estadística sirve para medir la bondad de ajuste del modelo para un conjunto de observaciones fijas. Se tienen dos modelos para una misma serie se debe escoger el que tenga menor valor de la estadística AICC. Sean  $p$ ,  $q$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ , y  $\sigma^2$  definimos

$$AICC(\phi, \theta, \sigma^2) = -2 \ln L(\phi, \theta, \sigma^2) + [ 2(p+q+1) n / (n-p-q-2) ]$$

### 2.6.2 Pruebas para los residuales

Para verificar que el modelo sea bueno se analizan los residuales del modelo ajustado, tenemos el modelo:

$$Y_t = C + \phi_l Y_{t-1} + Z_t$$

Entonces el residual del modelo es  $Z_t$  y debe cumplir que sea un proceso de ruido blanco, es decir, deben ser independientemente con distribución normal con media cero y desviación estándar finita y conocida. Por lo tanto al graficar las funciones acf y pacf de los residuales éstas deben ser significativamente iguales a cero.

Para demostrar que los residuales tienen un comportamiento aleatorio existen varias pruebas. Lo primero que deben cumplir es que las funciones acf y pacf de los residuales deben ser significativamente iguales a cero para todo h.

### **Prueba Ljung-Box Portmanteau.**

La prueba de Ljung-Box Portmanteau, esta prueba considera a los residuales en conjunto en lugar de forma individual, la estadística utilizada es:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \rho_w^2(k) / (n-k)$$

donde  $\rho_w(k)$  es la autocorrelación de los residuales en el tiempo k para h fijo. Si los datos en efecto fueron generados por un modelo ARMA(p,q) para una n grande, Q tendrá una distribución ji-cuadrada ( $\chi^2_{h-p-q}$ ) con h-p-q grados de libertad. Por lo tanto rechazamos la hipótesis de que sea un buen modelo si  $Q > \chi^2_{h-p-q}(1-\alpha)$  para un nivel de confianza  $\alpha$ .

Está prueba frecuentemente aprueba modelos que son malos por esta razón se deben hacer más pruebas para verificar que de verdad sea un buen modelo.

### **Prueba Mcleod-Li Portmanteau.**

Esta prueba se utiliza para probar si los residuales forman un proceso con distribución normal, independientes e idénticamente distribuidos. Esta basada en la prueba de Ljung-Box que solamente reemplaza la autocorrelación de los residuales  $\rho_w(h)$  por la autocorrelación del cuadrado de los residuales  $\rho_{ww}(h)$ . De esta forma rechaza la hipótesis de que los residuales pertenecen a una distribución normal independiente e idénticamente distribuido si  $Q^* > \chi^2_{h-p-q}(1-\alpha)$  para un nivel de confianza  $1-\alpha$ .

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^h \rho_{ww}^2(k) / (n-k)$$

### **Prueba basada en los puntos de inflexión.**

Se sabe que la estadística T de una sucesión independiente e idénticamente distribuida es asintótica a una distribución normal con media  $\mu_T = 2(n-2)/3$  y varianza  $\sigma_T^2 = (16n-29)/90$ .



Por lo tanto si se calcula la estadística T para los residuales se puede rechazar la hipótesis de que son independientes e idénticamente distribuidos si:

$$|T - \mu_T| / \sigma_T > \Phi_{1-\alpha/2}$$

Donde  $\Phi_{1-\alpha/2}$  es el cuantil  $1-\alpha/2$  de la distribución normal estándar.

### **Prueba de la diferencias de signos.**

Se sabe que si la serie  $W_t$  es independiente e idénticamente distribuida entonces S tiene una distribución asintótica normal con media  $\mu_S = \frac{1}{2}(n-1)$  y varianza  $\sigma_S^2 = (n+1)/12$

Por lo tanto si S el número de veces que la serie diferenciada de los residuales;  $W_t - W_{t-1}$  es positiva. Se puede rechazar la hipótesis de que los residuales son observaciones independientes e idénticamente distribuidas si:

$$|S - \mu_S| / \sigma_S > \Phi_{1-\alpha/2}$$

### **Prueba Rank**

Esta prueba sirve para detectar si existe alguna tendencia lineal en los residuales. Sea P el numero de pares ordenados (i,j) tales que  $W_j > W_i$  y  $j > i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Si los residuales son independientes e idénticamente distribuidos la media de P es  $\mu_P = \frac{1}{4}n(n-1)$  la varianza de P es  $\sigma_P^2 = n(n-1)(2n+5)/8$  y P tiene distribución asintótica normal.

Por lo tanto la hipótesis de que los residuales son independientes e idénticamente distribuidos se rechaza si:

$$|P - \mu_P| / \sigma_P > \Phi_{1-\alpha/2}$$

### **El mínimo AICC de un modelo autoregresivo**

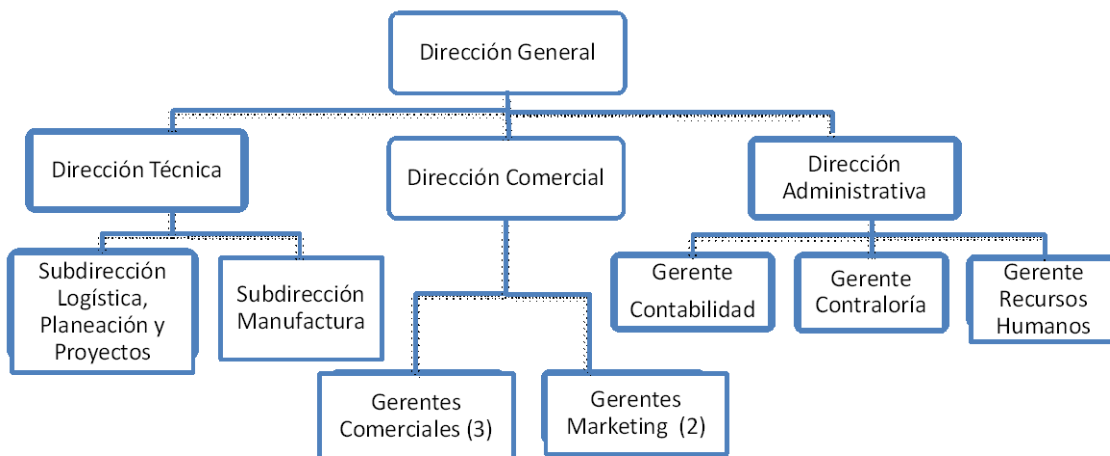
Si los residuales son independientes e idénticamente distribuidos con una distribución normal entonces el mínimo AICC para un modelo autoregresivo de los residuales debe tener orden  $p=0$ .

## Capítulo 3. Caso práctico

### 3.1. Planeación de demanda y operaciones

El proyecto se desarrolló para una embotelladora; empresa con más de cincuenta años de presencia en el mercado, se dedica a la producción y comercialización de refrescos, jugos y agua purificada, la empresa cuenta con cuatro plantas de producción y diecinueve centros de distribución. El proyecto dio inicio con una prueba piloto en Toluca durante 2002 y después de un año se decidió implementarlo en toda la organización.

En la empresa se tiene el siguiente organigrama:

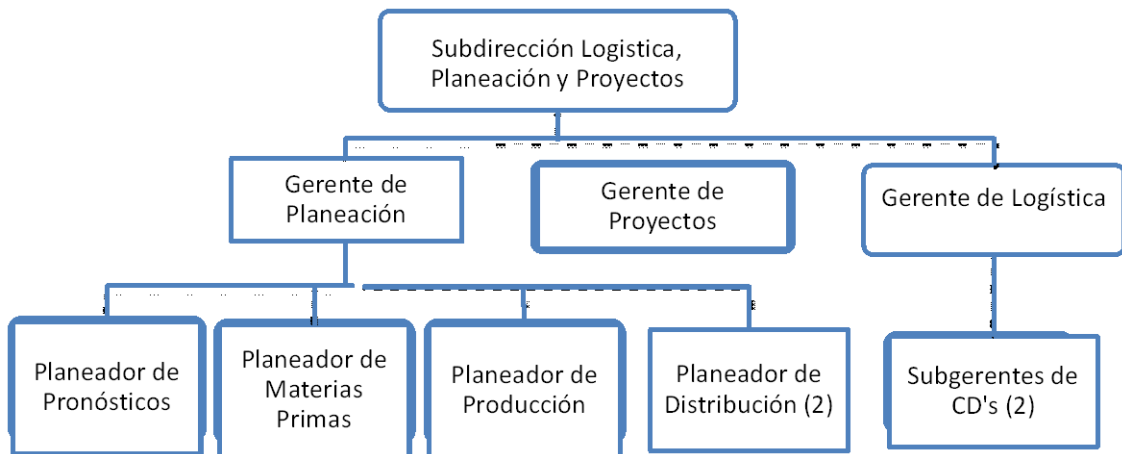


La dirección técnica es la responsable de producir los productos y colocarlos en los centros de distribución, esto lo hace a través de dos subdirecciones que tienen las siguientes responsabilidades.

La subdirección de manufactura; administra las cuatro plantas de producción y es responsable de producir y mantener las plantas en buen estado, cumplir con las normas de calidad, normas gubernamentales y demás reglamentos, esta conformada por al menos 1,000 trabajadores.

La subdirección de logística, planeación y proyectos; en la parte logística es responsable de administrar los almacenes de producto terminado, realizar la distribución primaria y

administrar los centros de distribución. En la parte de planeación es responsable de elaborar el pronóstico de ventas, elaborar el programa de materias primas, el programa de producción, el programa de compra de producto, el programa de distribución primaria y es responsable de mantener la relación con los demás grupos embotelladores. En la parte de proyectos debe identificar, optimizar e implementar mejoras a los procesos. A continuación esta parte del organigrama de la subdirección de logística, planeación y proyectos:



La cadena de suministro es administrada a través de la gerencia de planeación que es la encargada de elaborar el pronóstico de ventas, el programa de compras de materias primas, el programa de producción, el programa de distribución primaria para que la dirección de manufactura se encargue de ejecutar los programas, es decir, manufactura debe comprar, producir y distribuir lo que fue definido por planeación en cada uno de los programas. Una vez que el producto llega a los centros de distribución el área de logística administra el inventario y debe atender los pedidos de ventas. Todo lo anterior esta a cargo de la Dirección Técnica. A partir de que las rutas salen de los centros de distribución es responsabilidad de la dirección comercial entregar el producto a los detallistas

Proveedores	Plantas	Centros de Distribución	Rutas de reparto	Detallistas	Consumidores
Envase Tapa	Planta Toluca Refresco	12 CD's Toluca	750 rutas en Toluca	53mil detallistas	4,675,485
	Planta Toluca Agua				
Concentrado Azúcar CO2	Planta Cuernavaca Refresco	4 CD's Cuernavaca	200 rutas en Cuernavaca	12mil detallistas	1,452,614
	Planta Cuernavaca Agua	3 CD's Altamirano	62 rutas en Altamirano	3.6mil detallistas	568,415

Áreas de soporte; Recursos humanos, Soporte de Tecnología de Información, Administración

Existen otras áreas que no participan directamente en la cadena de suministro y se les llama áreas de soporte, como son recursos humanos, soporte de tecnologías de información y traslado de valores, entre otras.

Se atienden tres grandes mercados y cada uno tiene características muy particulares.

Toluca es una zona industrial con alto crecimiento poblacional, por lo tanto es un mercado en crecimiento. En esta zona se concentran el 60% de las ventas de la empresa, el clima es frío y sus principales consumidores son los pobladores de la zona que consumen refresco en la comida y por esta razón las presentaciones familiares (mayores a 2 litros) son la que más se venden.

Cuernavaca es una zona turística y tiene poca industria, por lo tanto es un mercado estable. En esta zona se concentran el 30% de las ventas de la empresa, el clima es cálido y sus principales consumidores son turistas seguidos por la gente de la región que consumen refrescos en lugares públicos; restaurantes, cines, balnearios, etc. Las presentaciones que más se venden son tamaños personales en vidrio.

Altamirano es una zona agrícola con clima caliente, en algunas temporadas rebasa los 40° centígrados y un alto porcentaje de su población masculina emigra a Estados Unidos. Sus principales consumidores son los pobladores de la zona que viven alejados en rancherías, debido a la distancias solamente se venden refrescos NO retornables y principalmente presentaciones personales, es de vital importancia que el refresco esté frío al momento de consumirlo.

A grandes rasgos así es actualmente la empresa, antes del proyecto cada planta y cada mercado se administraban de forma independiente, el proyecto empezó con la creación de la gerencia de planeación donde su principal responsabilidad es garantizar el abasto del producto, es decir, que cada que una ruta solicite producto para la venta éste se encuentre disponible en el centro de distribución, el centro de planeación le debe indicar a cada eslabón de la cadena qué actividad debe realizar y en cuánto tiempo. El centro está dividido en cuatro áreas:

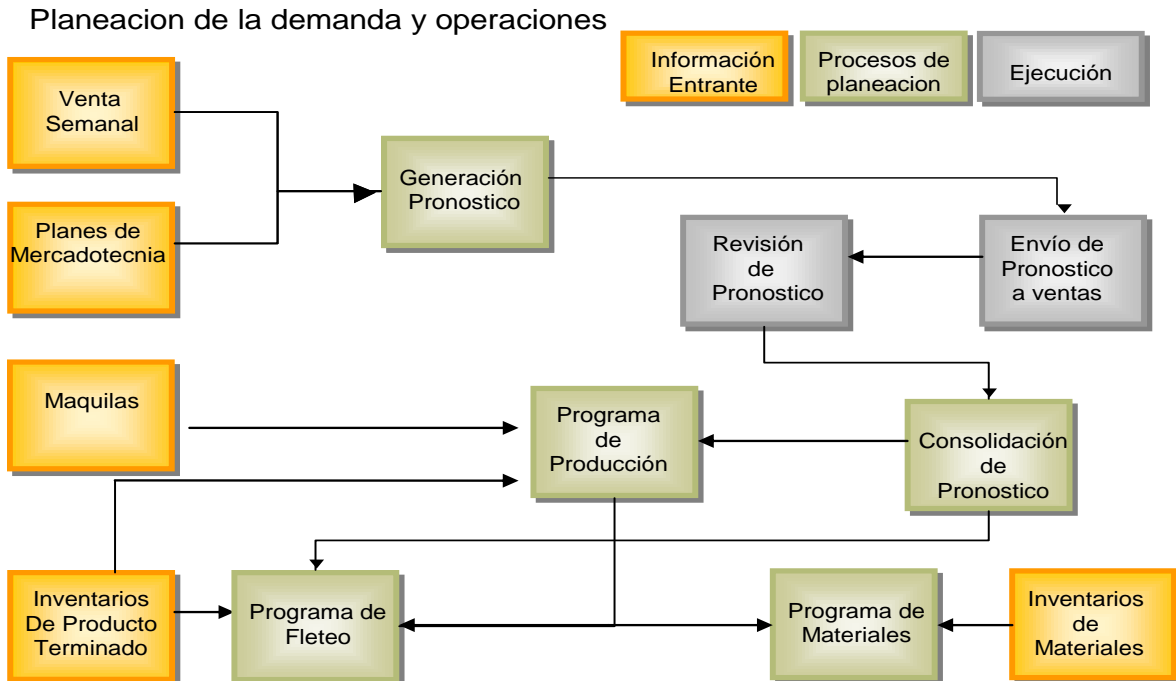
**Pronósticos:** Área encargada de analizar las ventas históricas, generar un pronóstico estadístico y agregar al pronóstico los planes de mercadotecnia (lanzamientos, promociones, cambios de precios, etc.), ventas revisa el pronóstico, lo ajusta y da su visto bueno, a este último pronóstico se le conoce como pronóstico colaborativo. El pronóstico colaborativo se entrega a las demás áreas del centro de planeación.

**Producción:** Área encargada de planear la producción o compra de producto terminado de manera que tenga en inventario el producto pronosticado. Entrega el programa detallado de producción para cada planta.

**Materias Primas:** Área encargada de programar la compra de materias primas, debe garantizar la disponibilidad de materia prima para el efectivo cumplimiento del programa de producción. Entrega el programa de compra de materias primas a cada almacén de cada planta.

**Distribución primaria:** Área encargada de programar la distribución primaria considerando los inventarios de producto terminado y la producción programada. Entrega el programa de distribución primaria.

Posteriormente los gerentes de cada planta y el gerente logístico de los centros de distribución deben cumplir con los programas generados por el centro de planeación.



Al inicio del proyecto se tenían 60 productos que se vendían en la mayoría de los CD's actualmente se manejan 220 productos. Los productos son refrescos y agua que se venden al detallista por cajas, cada caja puede tener 4,6,9,12 o 24 botellas, las presentaciones más comunes son: 355ml, 600ml, 1 lt, 2 lt o 2.5lt, el envase puede ser retornable o no retornable en Pet, Lata, Vidrio o Tetrapack.

Las ventas en los centros de distribución varían dependiendo de su ubicación y del número de rutas que atiende cada centro. Los centros atienden rutas de lunes a sábado. En general los centros se dividen en dos grupos.

El grupo uno está formado por doce centros ubicados en Toluca y sus alrededores con un clima frío la mayor parte del año y con una población en constante crecimiento, los productos que más se venden son los que se consumen dentro del hogar y en las presentaciones familiares, las ventas son bajas en temporada de lluvias y hay dos temporadas de ventas altas al año en verano debido al calor, en diciembre debido a la temporada navideña. Respecto a la venta por día es muy estable con un ligero incremento los fines de semana.

El grupo dos está formado por seis centros ubicados en Cuernavaca y Ciudad Altamirano donde el clima es cálido la mayor parte del año y con bajo crecimiento poblacional, su principal actividad económica es el turismo por lo tanto recibe visitantes los fines de semana y los días festivos. Los productos que más se venden son los de consumo personal y generalmente se consumen en restaurantes, cines y lugares públicos, las ventas se incrementan de manera considerable en semana santa, navidad, puentes laborales, etc. Respecto a la venta por día, los viernes, sábados y lunes son los días que más se vende.

Para seleccionar un modelo se analizaron los siguientes puntos:

**Punto 1. El horizonte para realizar el pronóstico**, se dan dos definiciones sku y combo.

Sku (Stock Kepping Unit) es la unidad mínima de almacenamiento, es decir son los productos tal como se venden a los detallistas, en este caso particular son cajas. Así una caja de refresco de naranja con 12 botellas no retornables de 600ml en envase de pet es un sku y una caja del mismo refresco pero con 4 botellas de 2lt en envase no retornable de pet es otro sku.

Con el fin de unificar los nombres de los sku's se utilizan abreviaturas en el siguiente orden:

Sabor, Contenido Neto, Envase, Retornabilidad, Botellas

Ejemplo de nombres de Sku's:

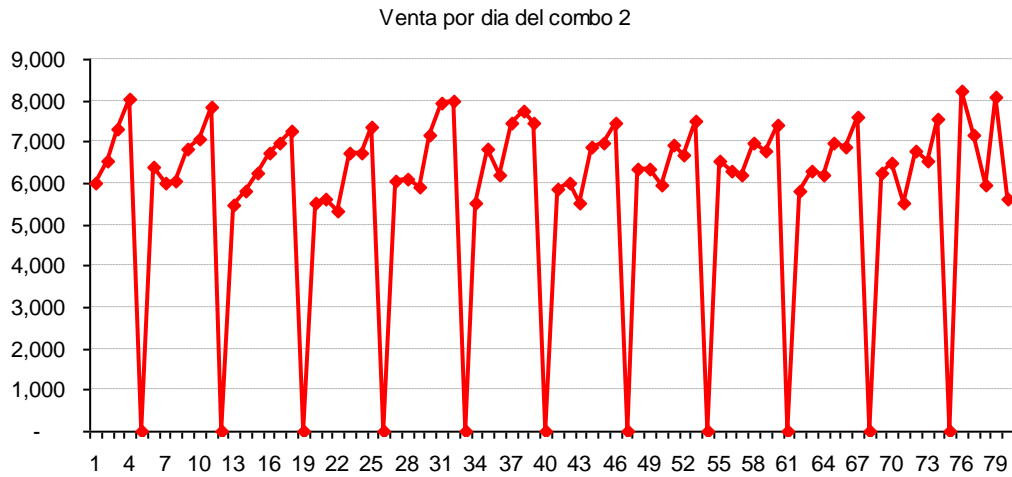
Nar600mlPetNR(12) = Caja de 12 botellas de refresco de naranja 600ml en pet no retornable.

Nar2ltPetNR(4) = Caja de 4 botellas de refresco de naranja de 2lt en Pet no retornable.

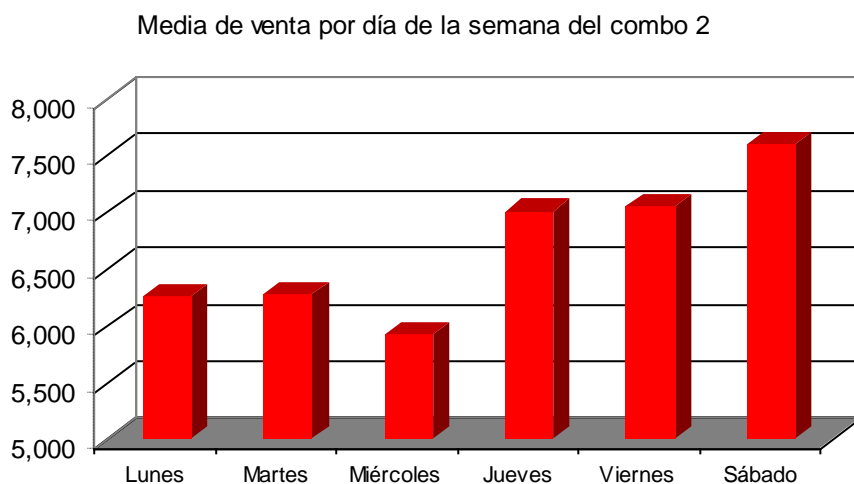
Lim355mlVdrRet(24) = Caja de 24 botellas de refresco de limón en vidrio retornable.

Se llama Combo a la combinación de sku y CD, es decir, la Nar600mlPetNR(12)-CD1 es un combo y cuando se habla de inventarios o ventas de este combo se sabe exactamente de qué producto están hablando y en qué centro.

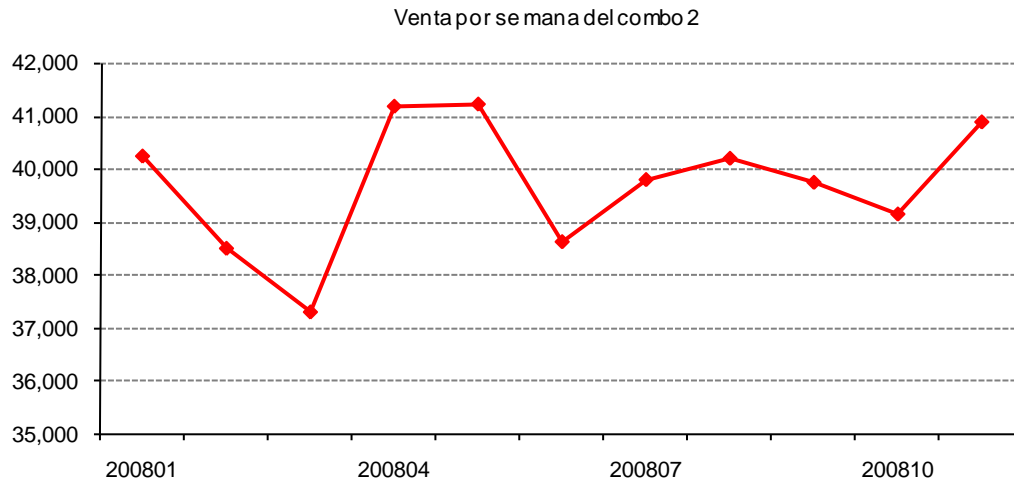
Al comienzo del proyecto se consiguieron las ventas históricas diarias de cada combo y se vio que trabajar con ventas por día sería muy complicado por las variaciones que presentaba, en la gráfica está la venta de 81 días para un combo cada domingo la venta, es cero, entonces se decidió tomar como datos las ventas semanales y hacer un pronóstico por semana para posteriormente detallarlo por día.



Después de todo, la venta por día tenía un comportamiento regular para cada combo, por ejemplo para el combo de la gráfica anterior, se toma el promedio para cada día de la semana y se obtienen las siguientes ventas por día:



La gráfica para la venta del combo 2 pero agrupada por semana se simplifica y queda de la siguiente forma:



Una vez que se obtuvieron las ventas semanales de cada combo de los últimos dos años, se decidió que el horizonte de planeación será de 3 semanas, es decir, se contará con un pronóstico para las 3 semanas siguientes. Cada semana volvemos a pronosticar y tenemos nuevamente tres semanas de pronóstico.

Se decidió que se debían pronosticar 3 semanas ya que el mayor lead time es el de la tapa y con la venta pronosticada de las tres semanas siguientes podemos definir cuántas tapas debemos comprar.

Materias primas	Lead Time
Envase	6 días
Tapa	15 a 17 días
Concentrado	2 días
Azúcar	2 días
CO2	1 día

Con este horizonte de planeación se deben calcular 3,740 pronósticos que corresponden a la venta semanal de cada combo (tenemos 220 sku's y 19 CD's). De esta forma, al final se obtiene un pronóstico semanal para cada combo.



**Punto 2. La disponibilidad de los datos.** Es muy importante saber si contamos con ventas históricas, cuántos datos tenemos y qué tan confiables son. Al inicio del proyecto se buscó los últimos dos años de ventas de cada combo. Para cada combo hicimos una hoja de cálculo que nos permitiera hacer una revisión rápida de las ventas históricas.

Se identificó cuáles combos tenían por lo menos 60 semanas de historia y que serían los candidatos a ser pronosticados a través de modelos ARIMA y en cuales se debía utilizar otras técnicas. También se identificaron comportamientos atípicos y se investigaron con el personal de mercadotecnia por qué se dieron estos comportamientos. Cuando se encontró una causa definida se sustituyó por valores estimados para mantener el comportamiento correcto de la serie.

**Punto 3. La exactitud requerida.** Es necesario saber que tan acertado debe ser el pronóstico. En este caso dividimos los combos en tres clases ABC, esta clasificación es muy utilizada en manejo de inventarios, los combos A son los más importantes y conforman el 80% de las ventas, los combos B conforman el 15% de las ventas y los C son los que menos venden y son el 5% de las ventas.

La exactitud la medimos con la siguiente fórmula:

$$\text{Exactitud} = \text{Valor absoluto } [( \text{Venta combo} - \text{Pronóstico Combo})] / ( \text{Venta Combo})$$

Se estableció que para los combos A la exactitud debe ser mayor a 95% para los B mayor a 90% y para los C mayor a 70%. La exactitud en general debe ser mínimo de 90%.

**Punto 4. La disponibilidad de personal calificado.** Este punto es importante ya que si queremos utilizar modelos muy sofisticados debe existir personal capacitado para hacerlo. Para los planeadores se buscaron profesionistas con estudios de actuaría o ingenieros industriales, se completó el perfil con una inducción a todas las áreas logísticas, cursos sobre cadena de suministro, cursos de pronósticos de ventas, visitas a los clientes, visitas a otras empresas que ya utilizaban pronósticos, etc. En el perfil de planeadores se incluyó que sean buenos administradores del tiempo, establezcan prioridades y sepan trabajar bajo presión.

### 3.2 Diseño de la base de datos

Lo primero que se decidió fue hacer pronósticos sobre ventas semanales. Al principio nos dimos cuenta que tratar de calcular series de tiempo de ventas diarias sería muy complicado y que había que revisar muchos datos, ya que si bien regularmente se trabajaba de lunes a sábado, en ocasiones se trabajó domingo o había un día festivo no laborable entre semana.

El área de sistemas diseñó una base de datos con la siguiente estructura y donde cada lunes se agregaría una nueva columna con los datos de la semana que acaba de terminar. Las semanas se identificaron con el formato “aaaass”, la venta semanal considera las ventas iniciando el lunes y terminando el domingo, la primera semana de cada año es la semana que incluye el 1 de enero, por ejemplo

La semana 200501 empezó el lunes 27 de diciembre de 2004 y termino el domingo 2 de enero de 2005.

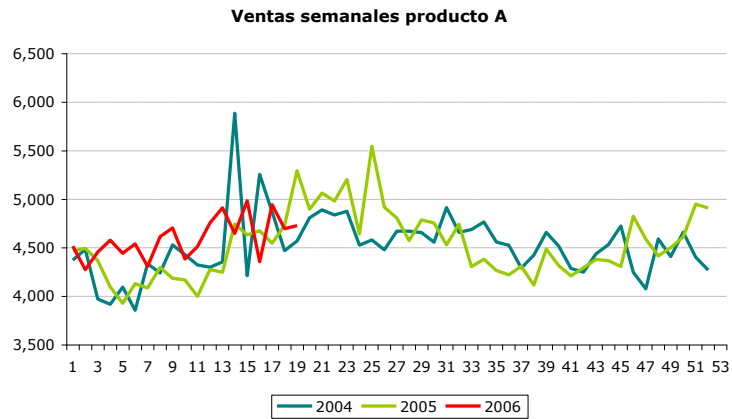
La semana 200502 fue del 3 al 9 de enero de 2005. Cada año puede tener 51, 52 o 53 semanas.

Para cada pronóstico que se debía calcular se elaboró una hoja de Excel, que contenía los siguientes datos:

- 1.- Ventas históricas semanales
- 2.- Gráfica de las ventas semanales
- 3.- Método actual para el cálculo del pronóstico
- 4.- Estadísticas descriptivas
- 5.- Pronóstico para las siguientes semanas
- 6.- Pronóstico anterior y su exactitud obtenida
- 7.- Registro de observaciones, cambios de precios, promociones u otros

### Ejemplo 3.2.1, la historia de venta semanal del producto A

Venta			
Sem	2004	2005	2006
1	4,374	4,469	4,517
2	4,483	4,494	4,275
3	3,972	4,367	4,457
4	3,918	4,098	4,578
5	4,095	3,929	4,444
6	3,857	4,131	4,542
7	4,335	4,086	4,308
8	4,242	4,298	4,614
9	4,531	4,186	4,705
10	4,428	4,169	4,384
11	4,323	4,001	4,513
12	4,301	4,278	4,757
13	4,354	4,247	4,913
14	5,886	4,745	4,649
15	4,214	4,633	4,984
16	5,256	4,676	4,357
17	4,870	4,548	4,945
18	4,472	4,733	4,698
19	4,570	5,294	4,729
20	4,809	4,898	
21	4,891	5,063	
22	4,838	4,983	
23	4,876	5,203	
24	4,529	4,642	
25	4,580	5,545	
26	4,479	4,918	
27	4,671	4,806	
28	4,671	4,575	
29	4,656	4,787	
30	4,558	4,757	
31	4,914	4,531	
32	4,660	4,744	
33	4,688	4,306	
34	4,768	4,383	
35	4,560	4,266	
36	4,526	4,223	
37	4,291	4,312	
38	4,425	4,117	
39	4,659	4,489	
40	4,518	4,318	
41	4,288	4,212	
42	4,250	4,295	
43	4,437	4,380	
44	4,533	4,367	
45	4,725	4,308	
46	4,248	4,826	
47	4,078	4,589	
48	4,591	4,417	
49	4,410	4,502	
50	4,662	4,612	
51	4,404	4,950	
52	4,270	4,911	



Estadísticas semanales del producto A.

	2004	2005	2006
Media	4,518	4,531	4,598
DesvEst	331	345	209
n	52	52	19
Crecimiento		0.3%	1.5%

Posteriormente se clasificaron los productos en los siguientes grupos:

**Productos maduros.** Productos que tenían suficiente historia para ser pronosticados a través de una serie de tiempo, generalmente en este grupo están los productos A y la mayoría de los B.

**Productos nuevos.** Productos que no tenían suficiente historia (menos de un año), como estos se habían lanzado al mercado recientemente, se analizó a partir de dónde se deben tomar datos y se calculó un pronóstico a través de promedios móviles.

Generalmente cuando un producto se lanza al mercado, la publicidad y la promoción que se le da hace que sus ventas sean altas, el consumidor hace su primera compra inducido por la promoción y dependiendo de la aceptación del producto, hace una recompra y se puede volver consumidor habitual del producto o no. Las primeras dos semanas de ventas son las más altas y van disminuyendo su volumen, más o menos a partir de la sexta semana toma su volumen definitivo.

Ejemplo de venta de un producto que lleva 20 semanas en el mercado:



Para el cálculo del pronóstico se eliminaron los datos de las primeras semanas y solamente se dejaron los datos de cuando la venta se estabilizó.

**Productos maduros atípicos.** Productos que contaban con suficientes datos históricos pero que su comportamiento no mostraba ninguna tendencia o estacionalidad más bien tenían un comportamiento errático. Se investigó las causa de la variación y se concluyó que debía a que hubo un cambio drástico en la estrategia de venta del producto, es decir, cambiaron drásticamente el precio, desapareció la competencia, o algún otra cosa que solamente se presenta una vez, por lo cual la historia no representa su comportamiento de venta, entonces se debe depurar la historia de venta y después clasificarlo en alguna de las dos categorías anteriores.

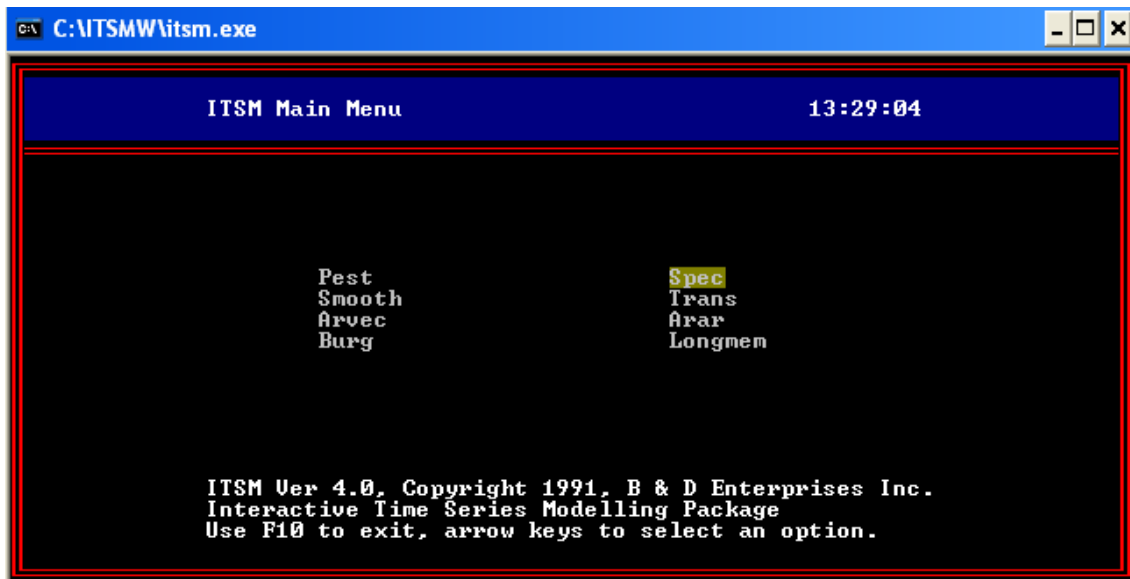
Evaluamos dos programas que nos podían ayudar a calcular Series de Tiempo, fueron SPSS y ITSMW, decidimos utilizar el último por que era más amigable con los archivos txt generados desde Excel y nos permitía transferir fácilmente archivos desde y hacia excel.

### 3.3. Cálculo del pronóstico semanal con ITSMW

Para los productos maduros se calculó una serie de tiempo por medio del programa PEST, que es un programa para modelar, analizar y pronosticar series de tiempo univariadas, este programa forma parte del paquete ITSMW, Interactive Time Series

Modelling, programa de Brockwell, Meter J, Davis, Richard A. y J. V. Mandarino. El cual se incluye en el libro de Brockwell publicado en 1991.

Pantalla de inicio del programa ITSMW



ITSMW contiene otros programas con diferentes aplicaciones.

PEST es un programa para modelar, analizar y pronosticar series de tiempo univariadas. El nombre es la abreviación de Parameter Estimation.

SPEC es un programa para estimación espectral no-paramétrica tanto para series de tiempo univariadas como bivariadas.

SMOOTH permite aplicar promedios móviles simétricos, exponenciales o factores de suavizamiento para un conjunto de datos.

TRANS sirve para calcular y graficar correlaciones cruzadas de dos series de tiempo con igual longitud y para ajustar funciones de modelos que representen las relaciones entre las dos series.

ARVEC usa las ecuaciones de Yule-Walter para encontrar vectores de modelos autoregresivos para series de tiempo multivariadas con más de 6 componentes y selecciona automáticamente un orden por el criterio de AICC.

BURG usa el algoritmo de Burg para ajustar modelos autoregresivos para series de tiempo multivariadas y selecciona automáticamente un orden por el criterio de AICC.

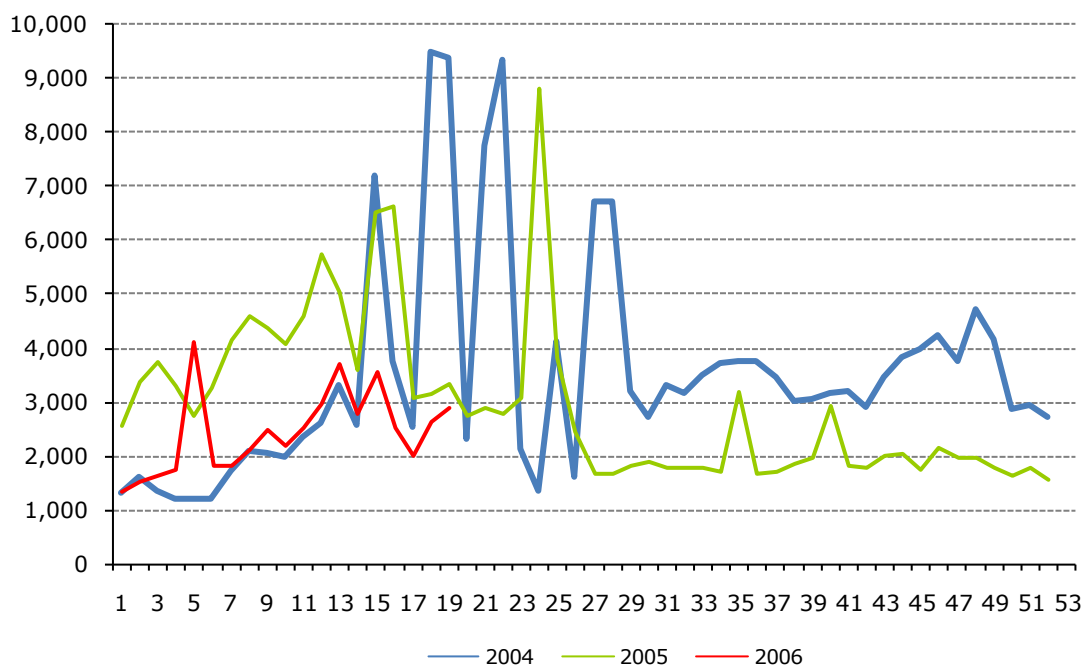
ARAR esta basado en las técnicas de pronósticos ARARMA de Newton y Parzen para conjuntos de datos univariados y con memoria corta.

LONGMEN utiliza la simulación de datos para una fracción específica de integración de modelos ARMA con media cero. También se puede utilizar para modelar y

pronosticar series a través de la maximización de aproximaciones Whittle y con verosimilitud Gaussiana.

### 3.3.1. Ingresar los datos

Lo primero que necesitamos es crear el archivo con las ventas históricas y debe tener extensión Lim355vr.dat y solamente incluye las ventas semanales en forma consecutiva, como ejemplo la venta de Lim355mlVdrRet(24):



Estadísticas de Lim 355mlVdrRet(24)

	2004	2005	2006
Media	3,531	2,950	2,436
DesvEst	2,060	1,517	765
n	52	52	19
Crecimiento		-16.5%	-17.4%

Venta de Lim355mlVdrRet(24)

Sem	2004	2005	2006
1	1,312	2,548	1,333
2	1,619	3,366	1,514
3	1,339	3,719	1,647
4	1,209	3,298	1,736
5	1,226	2,717	4,108
6	1,216	3,245	1,819
7	1,744	4,154	1,832
8	2,095	4,584	2,121
9	2,050	4,346	2,485
10	1,993	4,049	2,181
11	2,340	4,572	2,510
12	2,613	5,730	2,952
13	3,299	5,017	3,713
14	2,567	3,583	2,786
15	7,193	6,511	3,537
16	3,762	6,614	2,504
17	2,526	3,052	2,015
18	9,481	3,151	2,612
19	9,373	3,322	2,883
20	2,321	2,734	
21	7,742	2,878	
22	9,324	2,758	
23	2,143	3,073	
24	1,342	8,798	
25	4,130	3,808	
26	1,626	2,425	
27	6,702	1,642	
28	6,702	1,657	
29	3,185	1,801	
30	2,717	1,883	
31	3,318	1,759	
32	3,151	1,774	
33	3,482	1,753	
34	3,720	1,709	
35	3,759	3,184	
36	3,767	1,655	
37	3,449	1,692	
38	3,015	1,848	
39	3,060	1,955	
40	3,180	2,933	
41	3,207	1,824	
42	2,900	1,761	
43	3,467	1,990	
44	3,838	2,013	
45	3,977	1,740	
46	4,221	2,140	
47	3,763	1,972	
48	4,730	1,947	
49	4,173	1,753	
50	2,871	1,637	
51	2,938	1,771	
52	2,732	1,549	

En el Menú Principal Programa Pest, se incluyen las siguientes opciones:

**Menú principal:**

- D**ata entry; statistics; transformations
- E**ntry of an ARMA(p,q) model
- M**odel ACF/PACF, ARIMA Infinity Representations
- S**pectral density of MODEL on  $(-\pi, \pi)$
- G**eneration of simulated data
- C**urrent model and date file status
- E**xit from PEST

Escogemos la primera opción tecleando la letra D y nos envía al menú de datos:

**Menú de datos:**

1. Load new data set
2. Plot the data; find mean and variance
3. Plot sample ACF/PACF of current data file
4. File sample ACF/PACF of current data file
5. Box-Cox transformation [NOT after 6,7,8]

---

For Classical Decomposition use 6 and/or 7-  
For Differencing use 8.

- 
6. Remove seasonal component [NOT after 7,8,9]
  7. Remove polynomial trend [NOT after 8 or 9]
  8. Difference current data [NOT after 6,7 or 9]
  10. **F**ile the current data set
  11. **R**eturn to main menu

Con la opción 1 se selecciona el archivo con el que se desea trabajar, confirmando el archivo seleccionado nos despliega el número de observaciones contenidas en el archivo, las tres primeros valores y el último, esto es para verificar que se ha escogido el archivo correcto.

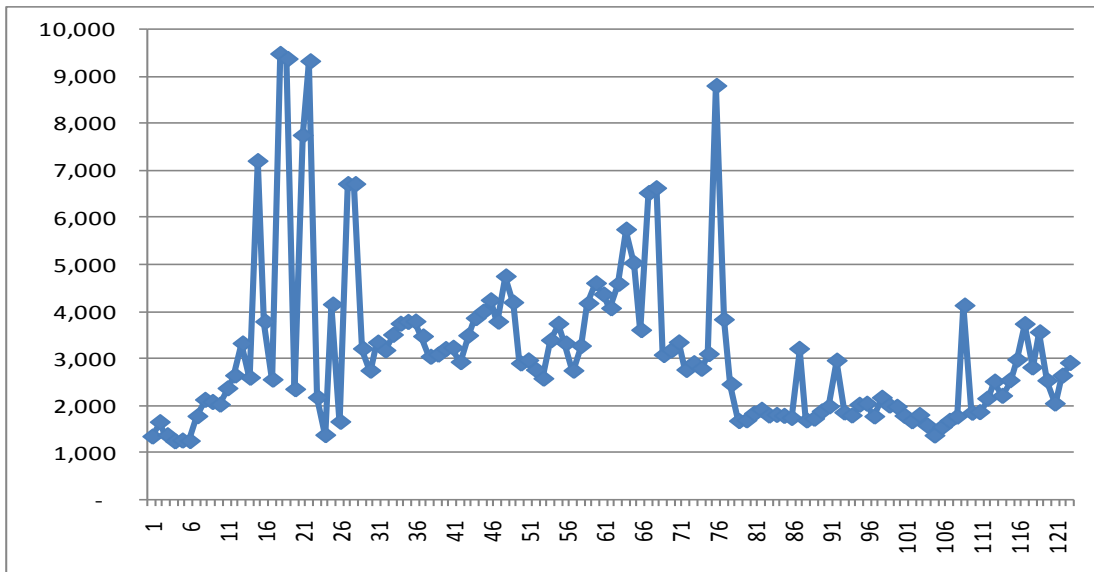
Total observations = 123  
Check the first three and last data points:  
1312 1619 1339 2883

Como ya se dijo, el primer paso para el análisis de una serie es graficarla. Con la opción 2 del menú de datos el programa grafica el histograma, la serie de tiempo y muestra las siguientes estadísticas:

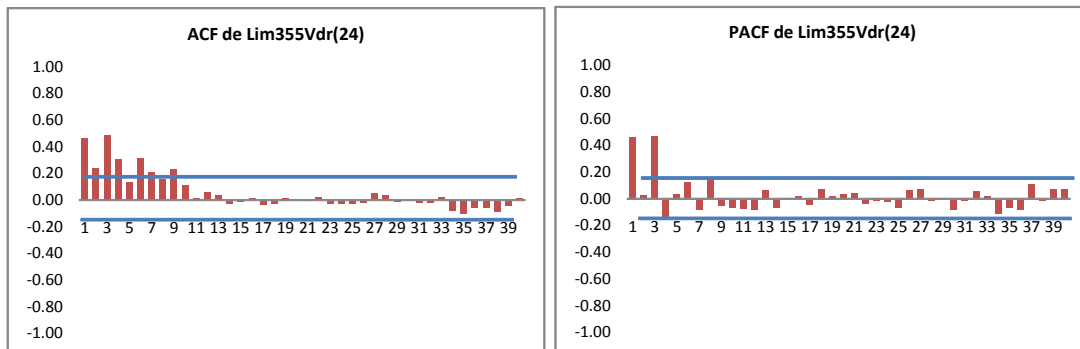
Max. Frecuency =	26 in [0.75;1)
Media =	3,116.2
Std. Dev =	1,719.0
C.Skewness =	1.8874



Gráfica de las observaciones Lim355mlVdr(24)



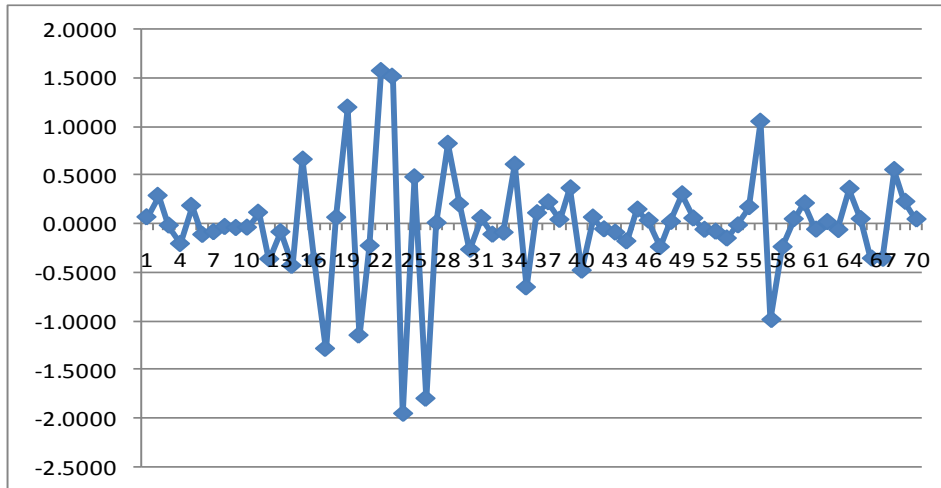
Con la opción 3 del menú de datos, la cual nos proporciona los valores de las funciones acf y pacf para  $1 \leq h \leq 40$ , graficamos las funciones para la serie Lim355mlVdr(24):



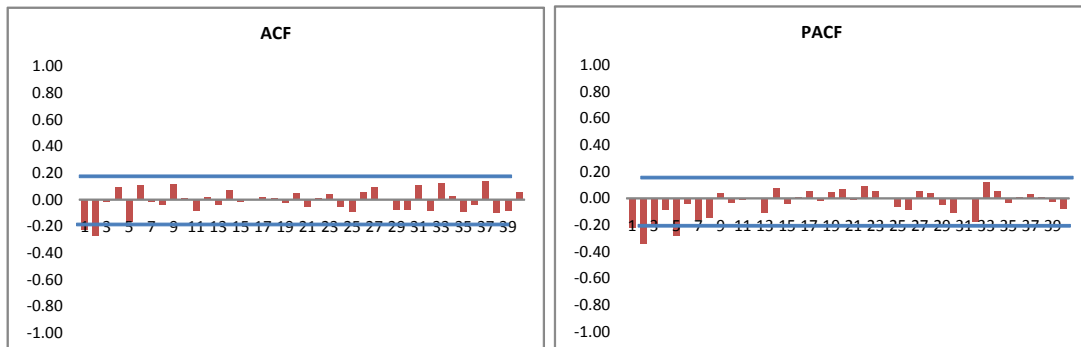
Si la serie no es estacionaria entonces se puede transformar en una serie estacionaria. Utilizando la función Box-Cox para asegurarse que la desviación estándar de la serie sea constante, utilizando la opción 5 del menú de datos se aplica la función y se escoge  $\lambda=0$ , ahora tenemos una serie equivalente a la original pero más suave.

Para remover los componentes de estacionalidad o tendencia, dado que los datos son semanales y el comportamiento de ventas se repite cada año con la opción 8 del menú de datos se selecciona una diferenciación con  $h=52$ , se verifica si la nueva serie es estacionaria, como no es estacionaria se escoge nuevamente la opción 8 para una segunda diferenciación con  $h=1$ . Y se obtiene una nueva serie con las siguientes funciones acf y pacf.

Serie estacionaria obtenida a través de la función Box-Cox y dos diferenciaciones:



Funciones acf y pacf:



Por último, solamente falta que la media de la serie sea igual a cero, para lograr esto le restamos la media a nuestros datos y esto lo podemos hacer con la opción 9 del menú de datos. Una vez realizados estos pasos contamos con una serie equivalente a la serie original pero es estrictamente estacionaria y podemos iniciar la búsqueda de nuestros parámetros p,q.

### 3.3.2 Encontrar un modelo ARMA(p,q) para la serie

Lo primero es analizar las funciones de autocorrelación acf y de autocorrelación parcial pacf. Se puede ver que para la función acf son significativos  $h=1$  y  $2$  mientras que para pacf son significativos  $h=1, 2$  y  $5$ .

Cuando no se cuenta con ninguna idea del orden  $p$  y  $q$  para el modelo, se puede utilizar la opción Preliminar parameter estimation del menú principal y si se selecciona el valor de  $-1$  y el proceso de estimación de Yule-Walker nos proporciona el modelo autoregresivo con el menor AICC. Para el ejercicio, calcula el modelo AR(5) con los valores  $\phi_i$ ;  $-0.407$ ,  $-0.499$ ,  $-0.354$ ,  $-0.190$ ,  $-0.278$  y para verificar si son significativamente diferentes de cero nos proporciona el error estándar para cada parámetro:  $-1.81$ ,  $-2.07$ ,  $-1.39$ ,  $-0.793$ ,  $-1.23$ .

Entonces el modelo AR sugerido por PEST es:

$$Y_t = -0.407 Y_{t-1} - 0.499 Y_{t-2} - 0.354 Y_{t-3} - 0.19 Y_{t-4} - 0.278 Y_{t-5}$$

El estadístico AICC es de  $113.1613$  se puede ir refinando el modelo y lo primero es quitar los parámetros que no son significativos para el modelo, es decir, se eliminan los parámetros para los que el error estándar está en el intervalo  $(-1;1)$ , por lo tanto quitamos  $\phi_4 = -0.19$ . Para hacerlo una vez que nos despliega los resultados nos da las siguientes opciones:

- R**eturn
- T**ry another model
- S**ore model in file

Se selecciona la primera opción para regresar al menú principal y escogemos la opción Current model and data file status y despliega la información de todos los pasos que hemos hecho hasta el momento:

The datafile is LIM355VR.DAT    Total data points = 70  
Box-Cox transformation applied with lambda = 0.00

Difference	lag
1	52
2	1

The subtracted mean is  $-0.0115$

White noise variance =  $0.240755$   
AICC =         $113.16$

<Press any key to continue>

Ahora despliega el siguiente menú:

- R**eturn
- F**ile the model
- E**nter new model
- A**lter the white noise variance
- C**hange a coefficient

Se selecciona la última opción y se captura el número del coeficiente que se desea hacer cero, en este caso 4 y por cuál valor se desea cambiar, en este caso es cero. Ahora el modelo es:

$$Y_t = -0.407 Y_{t-1} - 0.499 Y_{t-2} - 0.354 Y_{t-3} - 0.278 Y_{t-5}$$

En el menú principal y se selecciona la opción ARMA parameter estimation y despliega el siguiente menú:

- H**elp
- L**ikelihood of Model (no optimization)
- O**ptimize with current settings
- N**ew Accuracy Parameter
- S**et the Maximum No. of Iterations
- C**onstrain Optimized Coefficients (e.g. for Multiplicative Model)
- A**lter Convergence Criterion for th(n,j)
- M**ethod of Estimation
- R**eturn to Main Menu

Se selecciona la opción Optimize with current settings y despliega:

White noise variance =	0.250096	
FPE STATISTIC =	0.280411	
BIC STATISTIC =	112.3763	
-2 ln(LIKELIHOOD) =	102.3243	
AICC STATISTIC =	113.2618	LAST = 113.1613

En éste ejemplo fue contraproducente quitar el coeficiente es mejor dejar el modelo con los 5 coeficientes y éste es el mejor modelo autoregresivo que se ajusta a esta serie.

Entonces regresamos al modelo original y obtenemos las siguientes estadísticas:

White noise variance =	0.240771
FPE STATISTIC =	0.277813
BIC STATISTIC =	111.9937
-2 ln(LIKELIHOOD) =	99.81771
AICC STATISTIC =	113.1510

Despliega el menú de resultados:

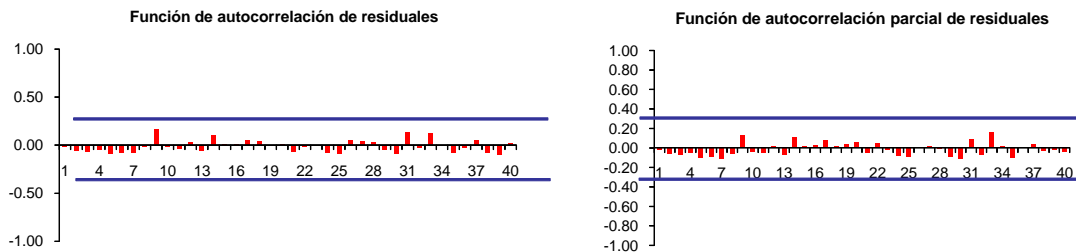
- F**ile and Analyse the Residuals
- P**redict Future Data (and Return to Main Menu)
- C**ontinue with Parameter Optimization
- S**tandard Errors of Estimated Coefficients
- M**atrix of Correlations of Coefficient Estimators
- R**eturn to Main Menu

Se selecciona la segunda opción y despliega el menú de residuales:

- F**ile residuals
- P**lot rescaled residuals
- A**CF / PACF of residuals
- F**ile ACF / PACF of residuals
- T**ests of randomness of residuals
- R**eturn to display of estimation results

Con la primera opción grafica el histograma, la media = 0.02419, la desviación estándar = 0.99971 y la gráfica de los residuales.

La segunda opción despliega los valores y las graficas de las funciones de acf y pacf para los residuales, las cuales cumplen con ser ruido blanco.



Con la tercera opción se puede bajar a un archivo los valores de las gráficas anteriores.

Con la cuarta opción despliega los resultados de las pruebas de los residuales:

#### RANDOMNESS TEST STATISTICS

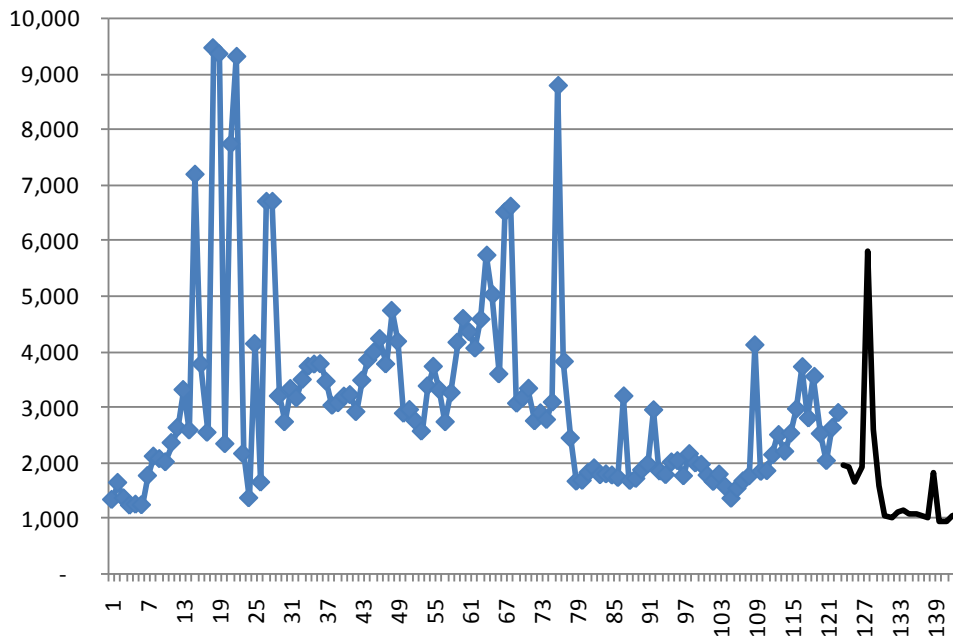
---

LJUNG-BOX PORTM	=	8.30 CHISQR(20)
MCLEOD-LI PORTM	=	45.93 CHISQR(20)
TURNING POINTS	=	43 ANORMAL (45.33 , 3.48**2)
DIFFERENCE-SIGN	=	36 ANORMAL (34.50 , 2.43**2)
RANK TEST	=	1,308 ANORMAL (1,207.50 , 295.88**2)

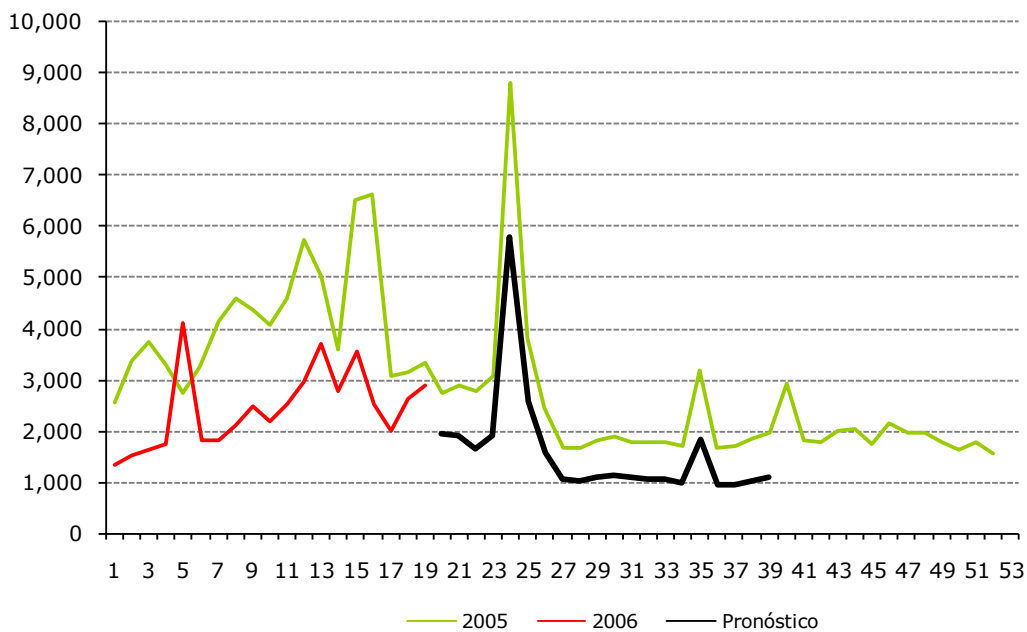
ORDER OF MIN AICC YW MODEL FOR RESIDUALS = 0

En el ejemplo se puede ver que la única prueba que no se cumple es la segunda pero todas las demás confirman que los residuales son independientes e idénticamente distribuidos y además son ruido blanco, por lo tanto, se concluye que el modelo cumple con los requisitos para ser un buen modelo. Regresando al menú de resultados, se puede calcular el pronóstico para la serie seleccionando la opción Predict Future Data (and Return to Main Menu), calcula el pronóstico de la serie actual y posteriormente va invirtiendo las funciones que realizamos para obtener el pronóstico de la serie original.

Ventas históricas de Lim355mlVdr(24) (en azul) y pronóstico para las próximas 20 semanas (en negro).



Si los mismos datos se grafican para cada semana por año se obtiene la siguiente gráfica, donde la serie verde son las ventas semanales reales de 2005, los rojos son las ventas reales de 2006 y en negro es el pronóstico para las siguientes 20 semanas.



Se puede ver que para la semana 200624 y para la semana 200635 se pronostica una venta más alta por que sigue el comportamiento de 2005, la venta adicional en la semana 200624 corresponde a la venta de semana santa y la venta adicional de la semana 200635 corresponde a la venta del 15 de septiembre por lo tanto es correcto el pronóstico.



## Conclusiones

Con este proyecto se resolvió un problema real, con el cual ya se había trabajado dos años sin encontrar una solución adecuada. Una vez que se consolidó el proyecto y el departamento de planeación empezó a trabajar se presentó resistencia al cambio en algunas áreas de la empresa pero cuando se lograron los primeros resultados se convencieron y se integraron a la nueva forma de trabajo.

Se logró integrar la cadena de suministro a través de una planeación basada en pronósticos estadísticos. Se logró una exactitud de todos los pronósticos mayor al 90%.

Se disminuyó 40% del inventario de materias primas, resolviendo con esto el problema que falta de espacio de los almacenes y disminuyendo las mermas por caducidad y maltrato.

Se disminuyó 50% el inventario de producto terminado, logrando que los productos lleguen más rápido a los detallistas y por consecuencia el consumidor obtenga productos más frescos.

Se optimizó el personal necesario para administrar cada una de las operaciones al concentrarla en un centro de planeación que requirió solamente de 6 personas.

Se especializaron algunas líneas de producción, es decir, antes del proyecto había productos que se producían en varias plantas, ahora solamente se producen en donde es más barato el costo de la producción y de la distribución primaria. En consecuencia, se redujo el costo de producción al lograr lotes de producción más largos. Aumentó la capacidad de producción de cada línea, lo cual permitió vender más productos a otros grupos embotelladores incrementando el ingreso por maquilas en más del 500%.

El más importante de todos los beneficios obtenidos fue que se mejoró el nivel de servicio al detallista del 98% al 99.8%, es decir, antes del proyecto no se entregaban al detallista en promedio 2% de su pedido actualmente se entrega el 99.8% de los pedidos completos y en tiempo.

Actualmente se están creando departamentos de planeación o de demanda en varias empresas, donde están utilizando series de tiempo para calcular pronósticos. Por ejemplo: Coca-Cola, Pepsi, Bimbo, Unilever, Procter&Gamble, Tayson, incluso empresas textiles como Calvin Klein y Zara los están utilizando de forma exitosa. En algunos casos empezaron calculando sus pronósticos en hojas de Excel o de forma muy parecida a como se explicó en este trabajo.

Hay algunas empresas que están desarrollando o comprando software para facilitar el cálculo de pronósticos, incluso SAP que es un software que las grandes empresas utilizan para administrar todos sus procesos ya desarrolló un módulo llamado APO

(Advanced Planner and Optimizer) que sirve específicamente para calcular pronósticos de corto plazo.

Actualmente Bimbo divide el territorio mexicano en cinco regiones que se administran de forma independiente y cada región cuenta con un centro de planeación, pero espera optimizar sus operaciones formando un único centro de planeación a nivel nacional, es decir, planear desde un mismo lugar la operación de 42 plantas y la distribución primaria de todo México.

Lo siguiente es hacer modelos para pronósticos de nuevos productos e incluir variables publicitarias, económicas y demográficas, ya que estos productos dependen más de cuanto se invierta en publicidad, las condiciones económicas para poder determinar el volumen que podrán vender.

## Bibliografía

Brockwell, Peter J. y Davis, Richard A. (1991), "Times Series: Theory and Methods". Springer-Verlag.

Brockwell, Peter J. y Davis, Richard A. (2002), "Introduction to time series and forecasting", New York: Springer.

Carol L., Davis (2001), "Participant Guide, Supply Chain" The Educational Society for Resource Management.

Chatfield, Christopher (2003), "The Analysis of Time Series: An Introduction" Chapman&Hall, London.

Chatfield, Christopher. (2001), "Time-Series Forecasting". Chapman&Hall/CRC.

Hanke, John E. y Reitsch, Artur G. (1998), "Business Forecasting". Prentice-Hall.

Janacek, Gareth ( 2001), "Practical Time Series". New York: Oxford University.

Makridakis, Spyros y Wheelwright Steven A (1989), "Manual de Técnicas de Pronósticos". Diaz de Santos.

Makridakis, Spyros y Wheelwright Steven A (2000), "Métodos de Pronósticos". Limusa

Mills, Terence C. (2003), "Modelling trends and cycles in economic time series". Palgrave Macmillan.

Pankratz, Alan (1983), Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models, "Concepts and Cases".

Wei, William W.S. (1990), "Time series analysis: Univariate and multivariate methods". Addison-wesley.