UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis de Mortalidad del Sector Bancario Mexicano, Jubilados

REPORTE DE TRABAJO PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

Fernando Antonio Fernández Rodríguez

DIRECTOR DE TESIS:

Act. Carlos Fernando Lozano Nathal

2010

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
   Fernández
   Rodríguez
   Fernando Antonio
   56 61 42 55
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   302613465

2. Datos del Tutor
   Act.
   Carlos Fernando
   Lozano
   Nathal

3. Datos del Sinodal 1
   Act.
   Francisco Fernando
   Morales
   Castro

4. Datos del Sinodal 2
   Act.
   Abraham Ernesto
   Hernández
   Pacheco

5. Datos del Sinodal 3
   Act.
   Víctor Manuel
   García
   Guerrero

6. Datos del Sinodal 4
   Mat.
   Víctor Manuel
   García
   Vilchis

7. Datos del Trabajo Escrito
   Análisis de Mortalidad del Sector Bancario Mexicano, Jubilados
   29 p
   2010

Agradecimientos

No pretendo que estas líneas me sean suficientes para expresar la gratitud que tengo a tantas personas.

Quisiera empezar por agradecer a mi familia, ellos que me apoyan y aman incondicionalmente. Ellos a quienes considero la mejor familia del mundo, que saben siempre ponerte de buenas, pero también han sabido presionarme cuando es necesario y dejarme solo cuando lo es. Los amo a todos, este trabajo es para ustedes. En especial, quisiera agradecer a mi padre, quien siempre me ha presionado y apoyado para ser mejor como persona en todos los aspectos. A mi hermana, quien ha estado conmigo todo este tiempo, platicándome, regañándome, pero siempre pensando lo mejor para mí. Y a mi madre, quien ya no está conmigo, pero me vigila desde el cielo y a quien siempre tengo presente, extrañándola, pero amándola siempre.

A mis amigos, ellos que me han sabido apoyar, aconsejar, que en todo momento están ahí en mis mejores y peores momentos. Ellos que siempre saben cómo ponerme de buenas, cómo alegrarme mis días; que me buscan cuando saben que no estoy bien. Ustedes son la familia que yo escogí y quiero que sepan que siempre estaré ahí para apoyarlos en lo que necesiten.

A mis maestros, quienes durante mi vida escolar me han dado lecciones, tanto académicas como de vida, que fueron las que me han llevado hasta aquí en mi desarrollo profesional. En especial, quisiera hacer mención de Carlos, mi tutor en este proyecto, quien supo regañarme, corregirme y llevar esto a buen término. Asimismo, quisiera agradecer a mis sinodales por el tiempo y comentarios dedicados a este trabajo, que fueron fundamentales para su conclusión exitosa.

A mis compañeros de trabajo, quienes fueron mis maestros en el desarrollo profesional, a todos quisiera agradecerles porque me he llevado lecciones muy importantes en mi vida, y en cuanto a mi desarrollo profesional. El simple hecho de convivir con ustedes, dentro y fuera de la oficina, me han ayudado a ser quien soy, y estas lecciones las llevaré en mi desarrollo profesional en un futuro.

Finalmente, quisiera agradecer a Dios por poner en mi camino a tan buenas personas, todos los días doy gracias de haber podido conocerlos, y seguir teniendo esta oportunidad.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Las hipótesis a utilizar en una valuación actuarial son un elemento clave para la determinación de los pasivos laborales. El desarrollo de las hipótesis actuariales debe de ser establecido basándose en la experiencia conocida y las expectativas a futuro. Una combinación de análisis matemático y de método científico es utilizada para la determinación de dichas hipótesis. A pesar de que no se espera que las hipótesis repliquen en su totalidad la experiencia de la empresa, se espera que la varianza en los supuestos sea muy pequeña.

Las hipótesis a considerar son las siguientes

1. Probabilidad de que los empleados se separen de la empresa
2. Probabilidad de que los empleados o jubilados fallezcan
3. Probabilidad de que los empleados activos se invaliden
4. La edad a la que se espera los empleados se jubilen.

La intención de los actuarios al seleccionar las hipótesis, es que cada una represente el mejor estimado de las expectativas de la empresa, relacionándose con la experiencia conocida y la planeación a corto y mediano plazo.

Este estudio comprende el análisis de la mortalidad de la población jubilada del sector bancario comparando los supuestos utilizados para el cálculo del pasivo dentro de cada banco, utilizando información de dicha población de los años 2006 a 2009. Fue desarrollado para uno de los bancos que conforman la población estudiada, sin embargo, por motivos de confidencialidad, no se presentan los nombres de los bancos ni se refiere a uno en particular el resultado de este estudio, sino a la totalidad de los bancos. A cada banco se le asignó un número y así se presenta la información.

Capítulo 2

Antecedentes

La tabla de mortalidad o también llamada tabla de vida, es un modelo o esquema teórico que permite medir las probabilidades de vida y de muerte de una población en función de la edad. Dado que la medición de la mortalidad está involucrada en la mayoría de los estudios demográficos, la tabla de mortalidad permite efectuar diversas aplicaciones en una gran variedad de temas, entre los cuales destacan: la estimación del nivel y tendencia de la mortalidad, evaluación de programas de salud, estudios de fecundidad, migración y crecimiento, así como en los sistemas previsionales y de seguros.

Dada la importancia del supuesto de la mortalidad en la determinación del pasivo del personal jubilado, en el presente estudio lo analizaremos. Las tablas de mortalidad a considerar son las siguientes:

EMSSA 1997 (Experiencia Mexicana del Seguro Social 1997).- Fue publicada en marzo de 1997 por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, y se establece como la tabla a utilizar en el cálculo de seguros y pensiones en México, ya que fue creada utilizando información de la población mexicana; es por esto que refleja la mortalidad de la población mexicana basado en experiencia.

Tabla de Mortalidad México 2000.- Tabla publicada en junio de 2000, creada por un equipo formado por miembros de la AMIS (Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros) y la AMA (Asociación Mexicana de Actuarios). Utiliza experiencia de las compañías aseguradoras para estudiar la mortalidad en esa población. Tiene como antecedente la tabla Experiencia Mexicana 82-89 (por esto, no la consideraremos en el presente estudio).

GAM 83 (Group Annuity Mortality).- Tabla de mortalidad de población estadounidense, creada por la Sociedad de Actuarios estadounidense (SOA, por sus siglas en inglés). Fue publicada en 1983 por dicha sociedad, considerando información de dicha población abarcando los años de 1976-1981. Se considera una mejor versión de la tabla GAM 71, cuyo uso fue muy popular y aceptado en dicho país durante los años anteriores a la publicación de la actual. El objetivo de realizar esta tabla fue reflejar la mejora en la esperanza de vida de la población con respecto a la tabla anterior.

UP 84 (Non-Insured Pension Mortality).- Tabla publicada en 1975 por actuarios de The Wyatt Company (posteriormente Watson Wyatt Worldwide y actualmente Towers Watson), sugería usar una diferencia de -5 años para el sexo femenino (el resto de las tablas mencionadas presentan la mortalidad diferenciada por sexo), consideraba su uso hasta 1984 en Estados Unidos.

EMSSA 2009 (Experiencia Mexicana del Seguro Social 2009).- Tabla publicada en agosto de 2009 por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, su uso aún no se generaliza en las valuaciones actuariales en ningún sector, razón por la cual se utiliza también la versión anterior para el presente informe.

En la siguiente tabla, presentamos las tablas que utilizan las diferentes instituciones del Sector Bancario en México, así como algunas tasas representativas.

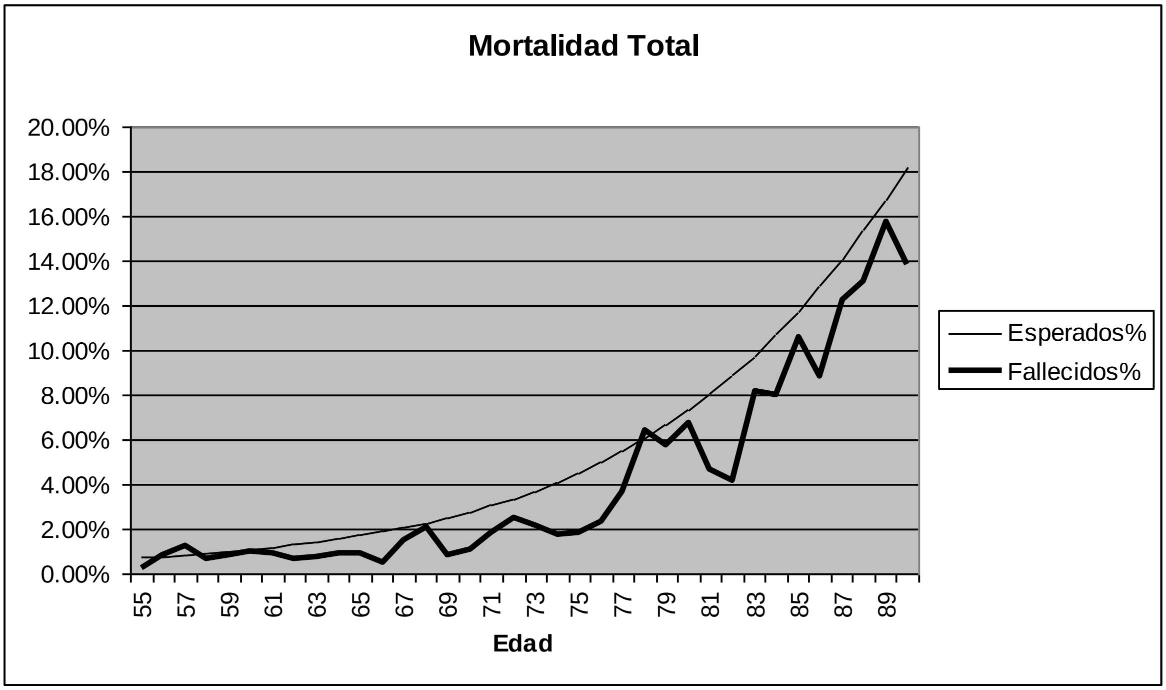
Sector Bancario Mexicano

Tasas Representativas de Mortalidad

	Banco 1 y Banco 2		Banco 3		Banco 4		Banco 5	Banco 6
Tabla	EMSSAH97	EMSSAM97	EMSSAH97*	EMSSAM97*	GAM94	GAM94	GAM83	UP84
Edad	**Hombres**	**Mujeres**	**Hombres**	**Mujeres**	**Hombres**	**Mujeres**	**Unisex**	**Unisex**
20	0.63	0.19	0.55	0.17	0.51	0.28	0.38	1.31
30	1.41	0.33	1.36	0.32	0.80	0.35	0.61	1.11
40	2.61	0.85	2.47	0.80	1.07	0.71	1.24	2.13
50	4.89	2.54	4.31	2.24	2.58	1.43	3.91	5.62
60	10.85	6.72	9.69	6.00	7.98	4.44	9.16	14.16
70	27.65	17.87	24.87	16.08	23.73	13.73	27.53	34.74
80	73.41	47.72	68.42	44.48	62.03	39.40	74.07	81.26

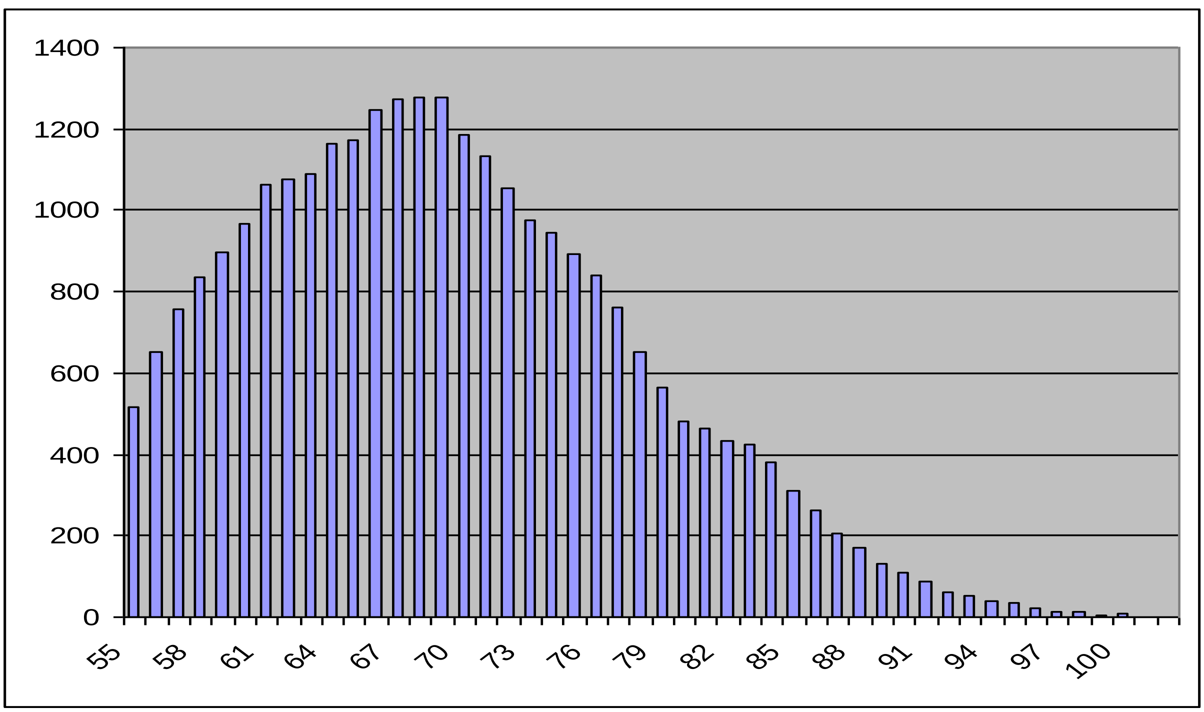
La tabla anterior presenta la situación de la existencia de diferencias marcadas entre todas las tablas (especialmente las que no distinguen la mortalidad por sexo), por lo que en este estudio se busca observar lo que indica la experiencia al respecto.

Adicionalmente, en la siguiente gráfica se presenta el comportamiento actual de la relación entre fallecimientos reales desde la edad 55 del total de la población del sector y los fallecimientos esperados con la tabla EMSSA97, que es la tabla más utilizada en el sector. Esta comparación es una de las razones por las cuales se requirió el presente estudio, puesto que la gráfica parece indicar que la mortalidad es menor a lo que se estima en el establecimiento de los pasivos.

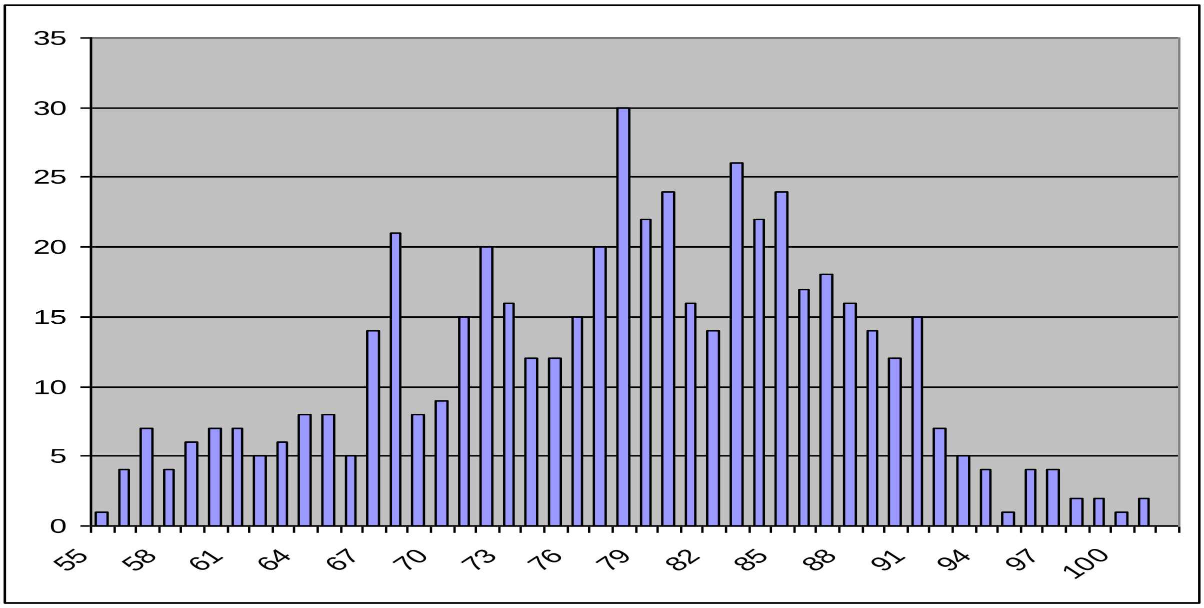


Finalmente, a continuación se presentan las gráficas que contienen la distribución de la población a utilizar.

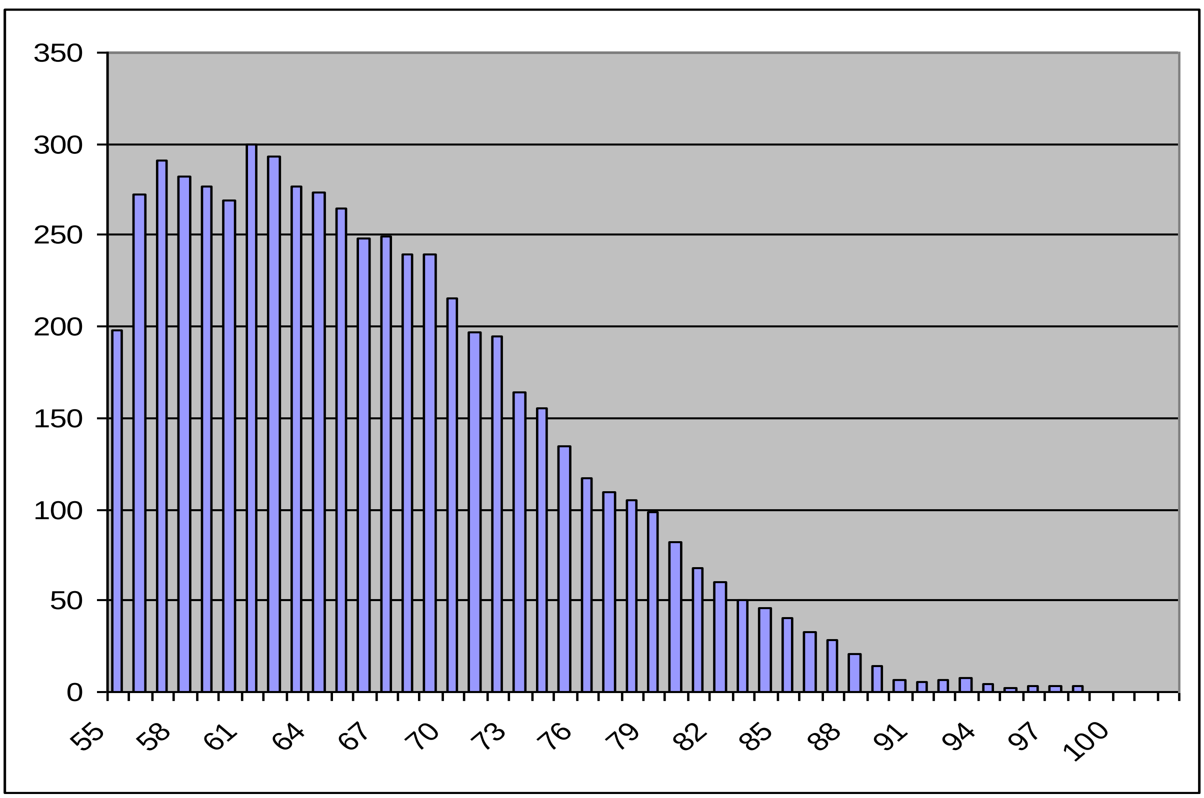
<u>Número de Jubilados – Sexo Masculino</u>



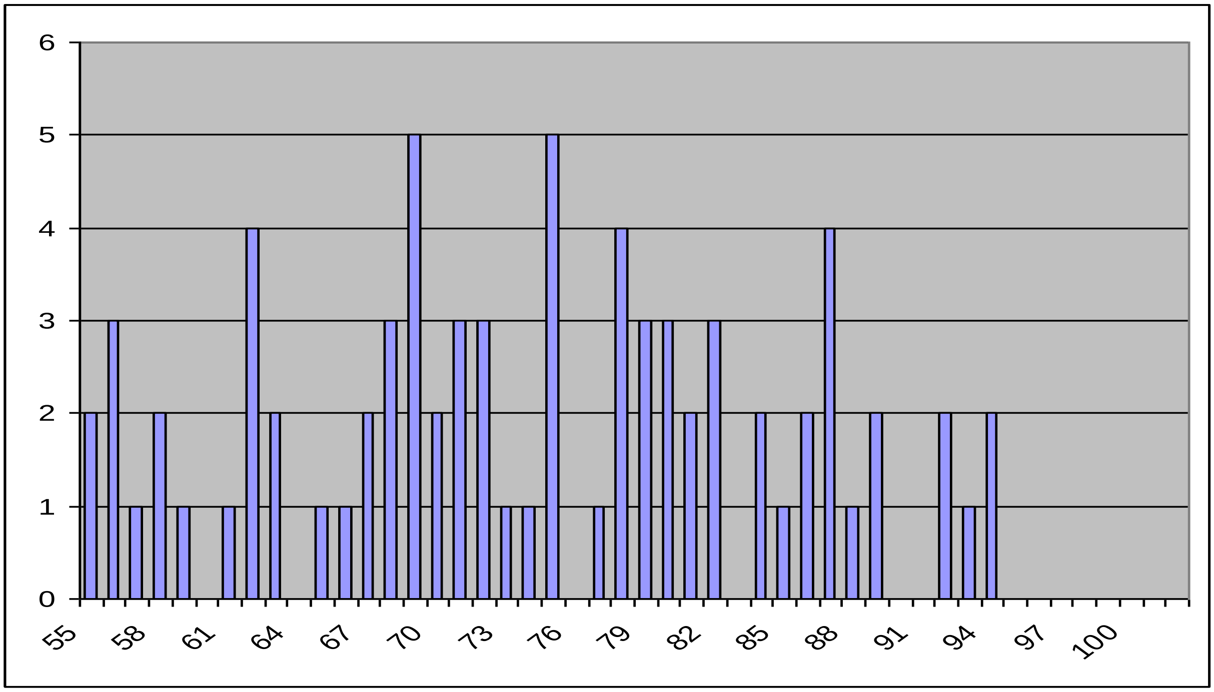
Fallecimientos por Edad - Sexo Masculino



Número de Jubilados - Sexo Femenino



Fallecimientos por Edad – Sexo Femenino



Para comprobar que este cambio percibido en la mortalidad no sea cuestión de azar, se llevó a cabo una prueba de hipótesis que nos permite comprobar que no fue el caso. El desarrollo de la misma se encuentra en el Anexo A.

Capítulo 3.

Metodología

El modelo Gompertz-Makeham implica que la serie l_x se comporta de acuerdo a la siguiente igualdad:

$$l(i^0) = ka^i b^{d^i} w^{i^2}$$

Donde:

$l(i^0)$ es el número de personas vivas que se tienen observadas a partir de la construcción de la tabla de mortalidad.

k,a,b,d y w son las variables que se quieren encontrar.

Se aplica logaritmo natural a la igualdad de la siguiente manera:

$$\ln\left(l(i^0)\right) = \ln(k) + i\ln(k) + d^i \ln(b) + i^2 \ln(w)$$

Utilizando el método de grupos no superpuestos, el cual consiste en tomar cinco grupos de observaciones de igual tamaño (m), con el fin de que las observaciones no se traslapen, se define:

Primer Grupo

$$S_0 = \sum_{i=1}^{m} [\ln\left(l(i]^0)\right) = \sum_{i=1}^{m} \ln(k) + i\ln(a) + d^i \ln(b) + i^2 \ln(w)$$

$$S_0 = m\ln(k) + \ln(a)\sum_{i=1}^{m} i + \ln(b)\sum_{i=1}^{m} d^i + \ln(w)\sum_{i=1}^{m} i^2$$

$$S_0 = m\ln(k) + \frac{m(m+1)}{2}\ln(a) + \frac{d-d^{m+1}}{1-d}\ln(b) + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\ln(w)$$

Recordando que:

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d^{i} = \frac{d - d^{m+1}}{1-d}$$

$$\sum_{i=1}^{m} i^{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Segundo grupo

$$\mathbf{S_1} = \sum_{i=m+1}^{2m} [\ln(l(i]^{0})) = \sum_{i=m+1}^{2m} \ln(k) + i\ln(a) + d^{i}\ln(b) + i^{2}\ln(w)$$

$$S_1 = m\ln(k) + \ln(a)\sum_{i=m+1}^{2m} i + \ln(b)\sum_{i=m+1}^{2m} d^{i} + \ln(w)\sum_{i=m+1}^{2m} i^{2}$$

$$S_1 = m\ln(k) + \left(m^{2} + \frac{m(m+1)}{2}\right)\ln(a) + \frac{d^{m}(d - d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + \frac{14m^{3} + 9m^{2} + m}{6}\ln(w)$$

Tercer grupo

$$\mathbf{S_2} = \sum_{i=2m+1}^{3m} [\ln(l(i]^{0})) = \sum_{i=2m+1}^{3m} \ln(k) + i\ln(a) + d^{i}\ln(b) + i^{2}\ln(w)$$

$$S_2 = m\ln(k) + \ln(a)\sum_{i=2m+1}^{3m} i + \ln(b)\sum_{i=2m+1}^{3m} d^{i} + \ln(w)\sum_{i=2m+1}^{3m} i^{2}$$

$$S_2 = m\ln(k) + \left(2m^{2} + \frac{m(m+1)}{2}\right)\ln(a) + \frac{d^{2m}(d - d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + \frac{38m^{3} + 15m^{2} + m}{6}\ln(w)$$

Cuarto grupo

$$\mathbf{S_3} = \sum_{i=3m+1}^{4m} [\ln(l(i]^{0})) = \sum_{i=3m+1}^{4m} \ln(k) + i\ln(a) + d^{i}\ln(b) + i^{2}\ln(w)$$

$$S_3 = m\ln(k) + \ln(a)\sum_{i=3m+1}^{4m} i + \ln(b)\sum_{i=3m+1}^{4m} d^{i} + \ln(w)\sum_{i=3m+1}^{4m} i^{2}$$

$$S_3 = m\ln(k) + \left(3m^{2} + \frac{m(m+1)}{2}\right)\ln(a) + \frac{d^{3m}(d - d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + \frac{74m^{3} + 21m^{2} + m}{6}\ln(w)$$

Quinto grupo

$$\mathbf{S_4} = \sum_{i=4m+1}^{5m} [\ln(l(i)]^0)) = \sum_{i=4m+1}^{5m} \ln(k) + i\ln(a) + d^i\ln(b) + i^2\ln(w)$$

$$S_4 = m\ln(k) + \ln(a)\sum_{i=4m+1}^{5m} i + \ln(b)\sum_{i=4m+1}^{5m} d^i + \ln(w)\sum_{i=4m+1}^{5m} i^2$$

$$S_4 = m\ln(k) + \left(4m^2 + \frac{m(m+1)}{2}\right)\ln(a) + \frac{d^{4m}(d-d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + \frac{122m^3 + 27m^2 + m}{6}\ln(w)$$

Procediendo con el método, se realizan las diferencias de estas sumas S_0, S_1, S_2, S_3 y S_4

Primeras diferencias

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0$$

$$\Delta S_0 = m^2\ln(a) + \frac{(d^m-1)(d-d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + (2m^3+m^2)\ln(w)$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1$$

$$\Delta S_1 = m^2\ln(a) + \frac{d^m(d^m-1)(d-d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + (4m^3+m^2)\ln(w)$$

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2$$

$$\Delta S_2 = m^2\ln(a) + \frac{d^{2m}(d^m-1)(d-d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + (6m^3+m^2)\ln(w)$$

$$\Delta S_3 = S_4 - S_3$$

$$\Delta S_3 = m^2\ln(a) + \frac{d^{3m}(d^m-1)(d-d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + (8m^3+m^2)\ln(w)$$

Segundas Diferencias

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0$$

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m-1)^2(d-d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + (2m^3)\ln(w)$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1$$

$$\Delta^2 S_1 = \frac{d^m(d^m-1)^2(d-d^{m+1})}{1-d}\ln(b) + (2m^3)\ln(w)$$

$$\Delta^2 S_2 = \Delta S_3 - \Delta S_2$$

$$\Delta^2 S_2 = \frac{d^{2m}(d^m - 1)^2(d - d^{m+1})}{1 - d}\ln(b) + (2m^3)\ln(w)$$

<u>Terceras Diferencias</u>

$$\Delta^3 S_0 = \Delta^2 S_1 - \Delta^2 S_0$$

$$\Delta^3 S_0 = \frac{(d^m - 1)^3(d - d^{m+1})}{1 - d}\ln(b)$$

$$\Delta^3 S_1 = \Delta^2 S_2 - \Delta^2 S_1$$

$$\Delta^3 S_1 = \frac{d^m(d^m - 1)^3(d - d^{m+1})}{1 - d}\ln(b)$$

A partir de las terceras diferencias, se utiliza un cociente para encontrar la variable d.

$$\frac{\Delta^3 S_1}{\Delta^3 S_0} = \frac{d^m(d^m - 1)^3(d - d^{m+1})(1 - d)\ln(b)}{(d^m - 1)^3(d - d^{m+1})(1 - d)\ln(b)}$$

El desarrollo del cociente resulta en:

$$\frac{\Delta^3 S_1}{\Delta^3 S_0} = d^m$$

Y despejando d, se obtiene:

$$d = \left[\frac{\Delta^3 S_1}{\Delta^3 S_0}\right]^{\frac{1}{m}}$$

Se procede ahora a obtener el valor de b a partir de las terceras diferencias.

$$\Delta^3 S_0 = \frac{(d^m - 1)^3(d - d^{m+1})}{1 - d}\ln(b)$$

$$b = exp\left[\frac{(1 - d)\Delta^3 S_0}{(d^m - 1)^3(d - d^{m+1})}\right]$$

Se encuentra w a partir de las segundas diferencias

$$\Delta^2 S_0 = \frac{(d^m - 1)^2(d - d^{m+1})}{1 - d}\ln(b) + (2m^3)\ln(w)$$

$$w = exp\left[\frac{1}{2m^3}\left(\Delta^2 S_0 - \left[\frac{(d^m - 1)^2(d - d^{m+1})}{1 - \mathbf{d}}\ln(b)\right]\right)\right]$$

A partir de las primeras diferencias, se encuentra la variable a.

$$\Delta S_0 = m^2 \ln(a) + \frac{(d^m - 1)(d - d^{m+1})}{1 - d}\ln(b) + (2m^3 + m^2)\ln(w)$$

$$a = exp\left[\frac{1}{m^2}\left(\Delta S_0 - \left[\frac{(d^m - 1)(d - d^{m+1})}{1 - d}\ln(b)\right] - [(2m^3 + m^2)\ln(w)]\right)\right]$$

Únicamente resta conocer el valor de la variable k, para esto, se utiliza el método de mínimos cuadrados.

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(l(i^0) - \widehat{l(i)}\right)^2}{5m}$$

$$D = \frac{1}{5m}\sum_{i=1}^{m}\left(l(i^0) - kv(i)\right)^2$$

Donde:

$$\widehat{l(i)} = kv(i)$$

Y

$$v(i) = a^i b^{d^i} w^{i^2}$$

Derivando D respecto de k

$$\frac{\partial D}{\partial k} = \frac{2}{5m}\sum_{i=1}^{5m}\left(l[(i]^0) - kv(i)\right)\left(-v(i)\right)$$

Igualando a cero

$$\frac{\partial D}{\partial k} = -\sum_{i=1}^{5m}[l(i^0)(\square]v(i)) + \sum_{i=1}^{5m}k\left(v(i)\right)^2 = 0$$

Despejando k

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{5m}[l(i^0)(\square]v(i))}{\sum_{i=1}^{5m}\left(v(i)\right)^2}$$

Conociendo las cinco variables, se sustituyen en $l(i^0) = ka^i b^{d^i} w^{i^2}$ y se obtiene la primera estimación de los datos observados:

$$\widehat{l(i^0)} = ka^i b^{d^i} w^{i^2}$$

Al obtener esta estimación, no se puede decir que sea la más aproximada a los datos, por lo que se emplea un método iterativo para obtener una mejor aproximación.

Método Iterativo

Debido a que tras la aplicación de la función Gompertz-Makeham ampliada no se obtienen resultados tan precisos, se procede a aplicar un método iterativo para tener estimaciones que reflejen mejor el comportamiento de los datos.

Tomando la función ampliada $Y(\mathbf{i}) = ka^{i}b^{d^{i}}w^{i^{2}}$, se obtiene el logaritmo natural:

$$\mathbf{ln}(Y(i)) = \mathbf{ln}(k) + \ iln(a) + d^{i}\,\mathbf{ln}(b) + i^{2}\,\mathbf{ln}(w)$$

Derivando respecto a cada una de las variables, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\frac{\delta \ln(Y(i))}{\delta(Y(i))} = \frac{1}{Y(i)}\delta Y(i)$$

$$\frac{\delta \ln(a)}{\delta a} = \frac{i}{a}\delta a$$

$$\frac{\delta d^{i}\ln(b)}{\delta b} = \frac{\delta d^{i}}{\delta d}\delta \ln(b) + \frac{\delta d^{i}}{\delta b}\delta \ln(b) = \frac{\delta d^{i}}{\delta d}\delta \ln(b) + \frac{\delta d^{i}}{\delta b}\delta \mathbf{b}$$

$$\frac{\delta \ln(b)}{\delta b} = id^{i}\ln(b)\frac{\delta d}{d} + d^{i}\frac{\delta b}{b}$$

$$\frac{\delta i^{2}\ln(w)}{\delta w} = \frac{i^{2}}{w}\delta w$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación, se obtiene:

$$\frac{\mathbf{1}}{Y(i)}\delta Y(i) = \frac{\delta k}{k} + i\frac{\delta a}{a} + d^{i}\frac{\delta b}{b} + id^{i}\frac{\delta d}{d} + i^{2}\frac{\delta w}{w}$$

Se pasa Y(i) multiplicando al lado derecho de la ecuación:

$$\delta Y(i) = \frac{Y(i)\delta k}{k} + \frac{iY(i)\delta a}{a} + \frac{d^{i}Y(i)\delta b}{b} + \frac{id^{i}Y(i)\delta d}{d} + \frac{i^{2}Y(i)\delta w}{w}$$

Renombrando los elementos de la ecuación:

$$i_{1} = \delta Y(i) \qquad c_{2} = \frac{\delta k}{k}$$

$$i_{2} = Y(i) \qquad c_{3} = \frac{\delta a}{a}$$

$$i_{3} = iY(i) \qquad c_{4} = \frac{\delta b}{b}$$

$$i_{4} = d^{i}Y(i) \qquad c_{5} = \frac{\ln(b)\ \delta k}{k}$$

$$i_5 = id^iY(i) \qquad c_6 = \frac{\delta w}{w}$$

$$i_6 = i^2Y(i)$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$i_1 = c_2 i_2 + c_3 i_3 + c_4 i_4 + c_5 i_5 + c_6 i_6$$

Las i_x son conocidas, pero las c_j no, por lo que se expresa todo en términos de las c_j de manera matricial.

$i_5 i_3$

$$\begin{vmatrix} \sum i_2 i_2 \\ \sum i_3 i_2 \\ \sum i_4 i_2 \\ \sum i_5 i_2 \\ \sum i_6 i_2 \end{vmatrix} = G$$

$$\begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{vmatrix} = C$$

$$C = A^{-1}G$$

Obtenidos los valores de las c_j, se procede a obtener los nuevos valores de la función Gompertz-Makeham:

$$k_1 = k(1 + c_2)$$

$$a_1 = a(1 + c_3)$$

$$b_1 = b(1 + c_4)$$

$$d_1 = d\left(1 + \frac{c_5}{\ln(b)}\right)$$

$$w_1 = w(1 + c_6)$$

Sustituyendo estas variables en la función se obtiene la segunda estimación de los datos. Este método se utiliza indefinidamente hasta encontrar una estimación satisfactoria. Cada vez que se utilice, se deben usar las diferencias de la estimación anterior.

El indicador que muestra cuando se acerca la estimación a los datos observados es el coeficiente de correlación. Cuando la diferencia del coeficiente entre una estimación y otra converge, ya se tiene una aproximación considerada adecuada debido a que se puede mejorar únicamente en proporciones muy pequeñas, lo que es señal de que ya se pueden detener las iteraciones.

Capítulo 4

Desarrollo

Una vez contando con los datos observados, descritos con anterioridad, y con la metodología detallada anteriormente, se procede a aplicar la misma.

Se empieza por obtener la serie l_x de los datos observados, de los cuales se tiene la q_x. Algunos datos significativos se presentan en la siguiente tabla (la tabla completa se presenta en el Anexo):

Edad	q_x Masculino	l_x Masculino	q_x Femenino	l_x Femenino
55	0.0024876	100,000	0.0134228	100,000
60	0.0096685	96,271	0.0000000	95,318
65	0.0089385	92,389	0.0052083	92,312
70	0.0105263	87,128	0.0119048	86,447
75	0.0182371	79,226	0.0515464	80,621
80	0.0677966	64,569	0.0483871	68,926
85	0.1076233	46,561	0.0344828	55,546
90	0.1395349	24,449	0.0000000	28,591
95	0.0416667	10,189	0.0000000	8,169
100	1.0000000	1,479	1.0000000	8,169

Posteriormente, se obtiene el ln de la serie lx (la tabla completa se presenta en el Anexo):

Edad	l_x Masculino	$\ln(l_x)$ Masculino	l_x Femenino	$\ln(l_x)$ Femenino
55	100,000		100,000	
56	99,751	11.5104348	98,658	11.4994117
60	96,271	11.4749177	95,318	11.4649727
65	92,389	11.4337630	92,312	11.4329334
70	87,128	11.3751312	86,447	11.3672812
75	79,226	11.2800587	80,621	11.2975098
80	64,569	11.0754840	68,926	11.1407906
85	46,561	10.7485273	55,546	10.9249582
90	24,449	10.1043610	28,591	10.2608468
95	10,189	9.2290328	8,169	9.0080838
100	1,479	7.2994036	8,169	9.0080838

Ahora, se lleva a cabo la división por grupos para aplicar el método de los grupos superpuestos. Se toman grupos de 9 edades cada uno, y se lleva a cabo la suma de $\ln(l_x)$ de cada uno.

Edad	Grupo	Masculino	Femenino
56-64	S_0	103.2759130	103.1997861
65-73	S_1	102.4724326	102.4631143
74-82	S_2	100.4483753	100.7909259
83-91	S_3	94.4012805	96.2650815
92-100	S_4	78.9748127	83.8659626

Posteriormente, se procede al cálculo de las diferencias.

Grupo	Masculino	Femenino
S_0	103.2759130	103.1997861
S_1	102.4724326	102.4631143
S_2	100.4483753	100.7909259
S_3	94.4012805	96.2650815
S_4	78.9748127	83.8659626

	Masculino	Femenino
ΔS_0	-0.8034804	-0.7366718
ΔS_1	-2.0240573	-1.6721884
ΔS_2	-6.0470948	-4.5258444
ΔS_3	-15.4264678	-12.3991189

	Masculino	Femenino
$\Delta^2 S_0$	-1.2205769	-0.9355166
$\Delta^2 S_1$	-4.0230375	-2.8536560
$\Delta^2 S_2$	-9.3793730	-7.8732745

	Masculino	Femenino
$\Delta^3 S_0$	-2.8024606	-1.9181394
$\Delta^3 S_1$	-5.3563355	-5.0196185

Ahora, de acuerdo a lo desarrollado en la sección de metodología, se obtienen las variables d, b, w, a y k.

	Masculino	Femenino
d	1.074629	1.112810
b	0.754126	0.971953
w	1.001273	1.000172
a	1.007602	0.996700
k	134,471	101,625

Ya contando con estas variables, se procede a obtener la serie l_x estimada 1 (tabla completa se presenta en el Anexo).

Edad	Masculino	Femenino
55	100,000	100,000
60	93,798	96,798
65	82,285	96,318
70	66,910	95,558
75	48,802	93,962
80	30,457	89,937
85	15,203	79,358
90	5,510	54,768
95	1,262	17,994
100	150	628

Se obtienen coeficientes de correlación entre la lx observada y la lx estimada 1 de 0.8839 y 0.9082 para hombres y mujeres, respectivamente.

Ahora, se procede a aplicar el método iterativo para obtener la siguiente estimación, en la cual se espera que se describan mejor los datos.

Para esto, se tienen que obtener las variables partiendo de los valores de lx estimada 1, y utilizando el desarrollo detallado en la sección de metodología, los resultados se obtienen de la siguiente manera (se detalla el desarrollo para el sexo masculino):

$$C = A^{-1}G$$

$$\begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{vmatrix} = C$$

A=

1.E+11	**1.E+12**	**3.E+11**	**4.E+12**	**2.E+13**
1.E+12	**2.E+13**	**4.E+12**	**7.E+13**	**3.E+14**
3.E+11	**4.E+12**	**9.E+11**	**2.E+13**	**7.E+13**
4.E+12	**7.E+13**	**2.E+13**	**4.E+14**	**2.E+15**
2.E+13	**3.E+14**	**7.E+13**	**2.E+15**	**6.E+15**

A^{-1}=

3.E-07	**2.E-08**	**-3.E-07**	**5.E-09**	**7.E-10**
2.E-08	**8.E-10**	**-2.E-08**	**3.E-10**	**3.E-11**
-3.E-07	**-2.E-08**	**3.E-07**	**-5.E-09**	**-7.E-10**
5.E-09	**3.E-10**	**-5.E-09**	**9.E-11**	**1.E-11**
7.E-10	**3.E-11**	**-7.E-10**	**1.E-11**	**1.E-12**

G=

5.E+09
7.E+10
2.E+10
3.E+11
1.E+12

Con estos datos, se obtienen las variables:

k_1= 131151.60

a_1= 1.0076

b_1 = 0.7541

d_1 = 1.0746

w_1 = 1.0012

Aplicando estas variables al modelo, se obtiene la serie l_x estimada 2, la cual se presenta a continuación (tabla completa se presenta en el Anexo).

Edad	Masculino	Femenino
55	100,000	100,000
60	93,840	95,935
65	89,988	92,607
70	85,241	87,222
75	77,181	79,675
80	63,724	69,329
85	44,845	54,421
90	24,419	32,696
95	8,956	9,151
100	1,814	266

Se obtienen los coeficientes de correlación entre las series estimadas y la serie observada, y se comparan entre ellos, cuando la diferencia entre una iteración y otra sea casi nula, se concluye que ya se cuenta con una representación adecuada de los datos observados (solo se puede mejorar en proporciones muy pequeñas, que se consideran inmateriales para los propósitos de este estudio).

En este caso, los coeficientes son:

Masculino	**l_x estimada**	**l_x estimada 1**	**l_x estimada 2**
Coeficiente	0.883930715	0.999477664	0.999477664
Diferencia	N/A	0.115546949	0.00000000

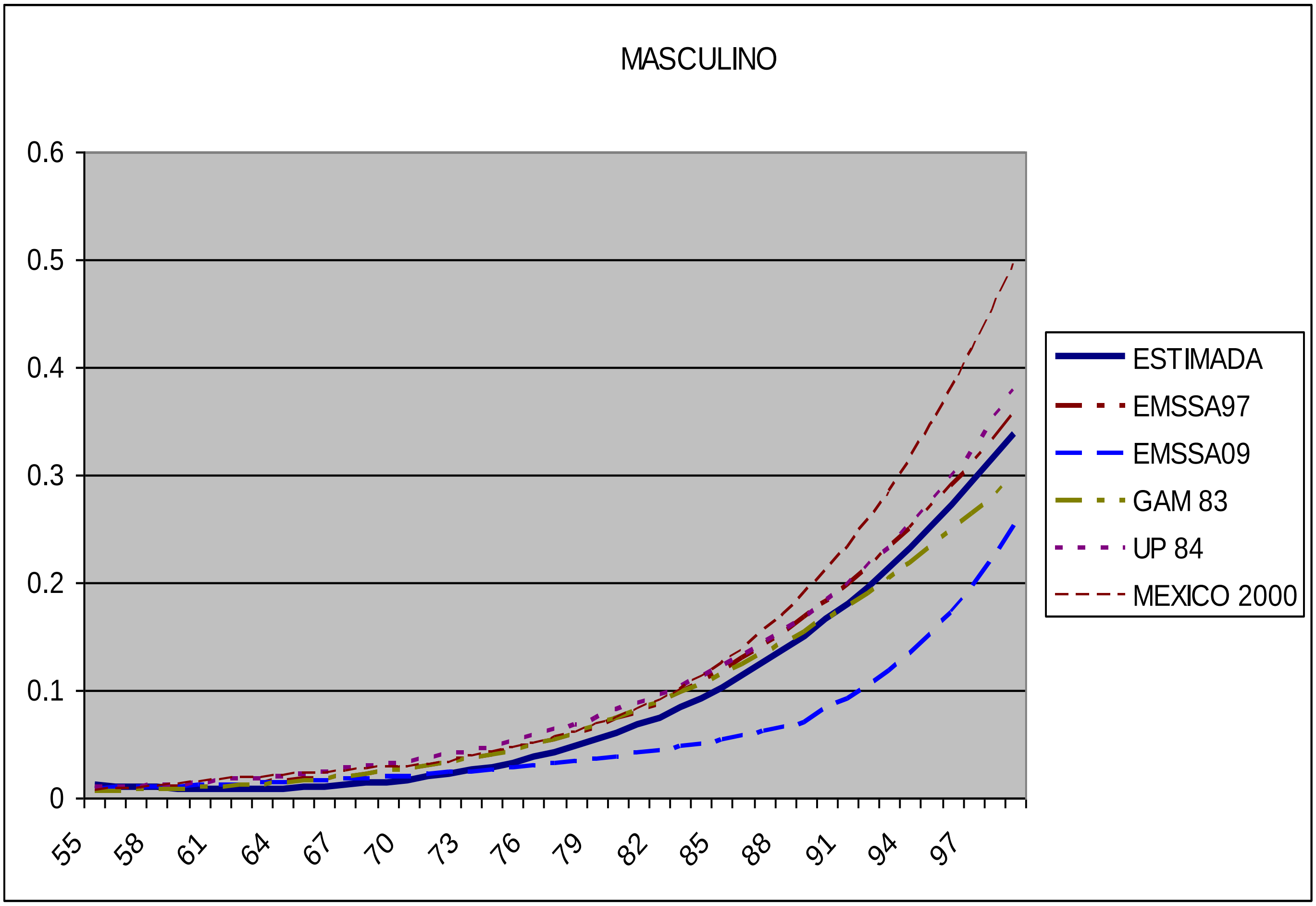
Femenino	**l_x estimada**	**l_x estimada 1**	**l_x estimada 2**
Coeficiente	0.9082017	0.99606164	0.99606164
Diferencia	N/A	0.08785994	0.00000000

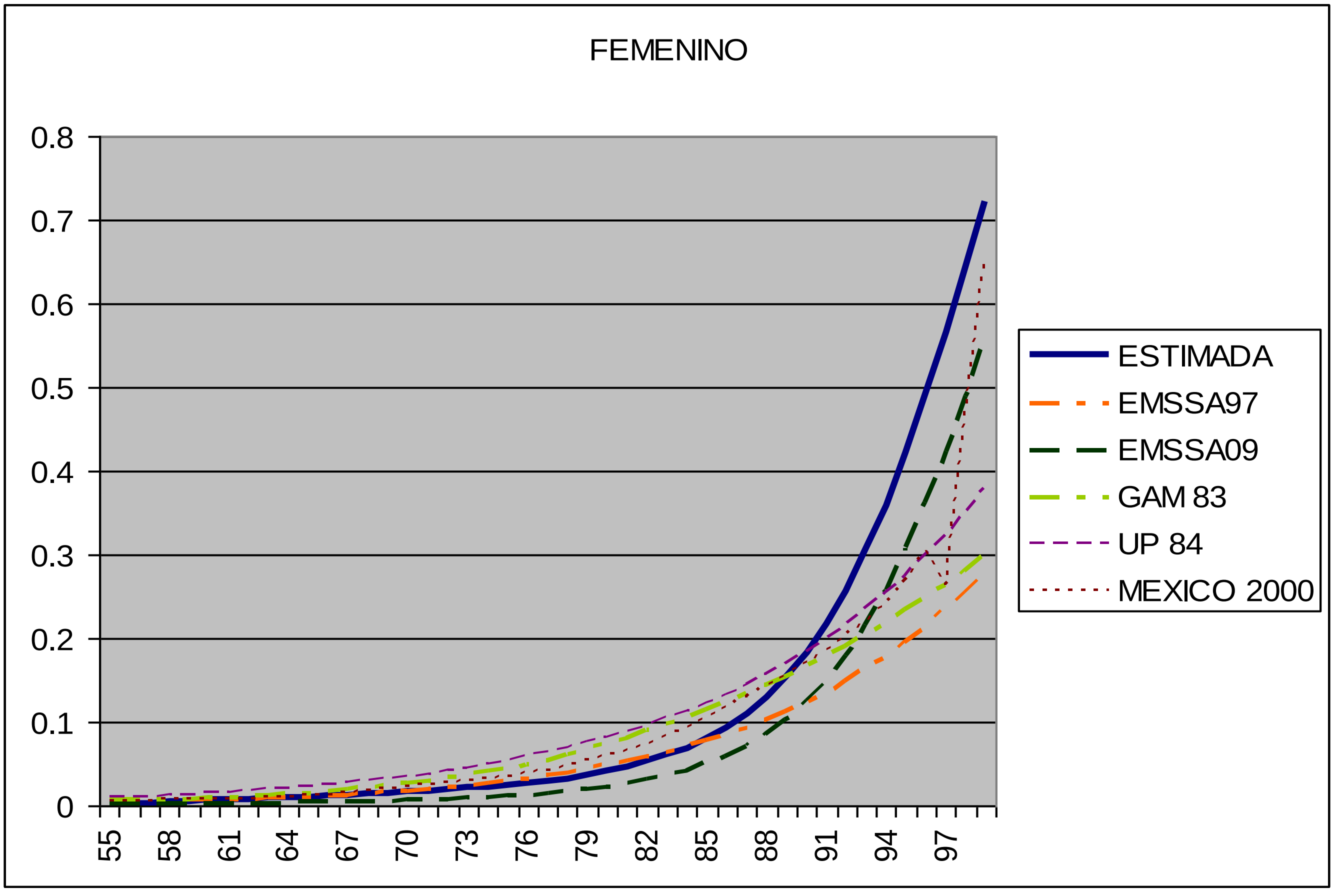
Por lo tanto, podemos concluir que la serie l_x estimada 2 en ambos casos es una representación suficientemente adecuada para estos efectos de los datos observados, ya que observamos convergencia entre los datos.

Capítulo 5.

Resultados

Al haber obtenido una estimación adecuada de los datos, se procede a observar el comportamiento de la q_x obtenida a partir de la l_x estimada. A continuación, se presentan las gráficas de esta estimación, comparada contra las demás tablas comunes en el mercado.





Finalmente, se compara la esperanza de vida a edad 55 de cada tabla para hacer la comparación final.

	Masculino	**Femenino**
EMSSA 09	28.24	32.88
Estimada	**27.40**	**28.55**
GAM 83	24.87	24.87
EMSSA 97	24.39	28.35
MEXICO 2000	23.53	26.58
UP 84	22.79	22.79

En esta tabla, ordenada de manera descendiente, se puede observar que para el caso del sexo masculino, la esperanza de vida de la tabla estimada se desarrolla entre la presentada por la tabla GAM 83 y la EMSSA 09 para el sexo masculino y entre la EMSSA 97 y la EMSSA 09 para el sexo femenino. Si bien, para el sexo masculino, se observa un cambio en el cual, la esperanza de vida se acerca a la presentada por la tabla EMSSA 09, para el sexo femenino, esta esperanza sigue muy cercana a la EMSSA 97.

Capítulo 6.

Conclusiones

Los resultados muestran la validez de hacer este estudio debido a que el movimiento del comportamiento de las q_x resultantes del desarrollo se encuentra entre la tabla EMSSA 97 y la EMSSA 09, situación que indica que si bien los datos se van acercando a aquellos presentados por la EMSSA 09, aún conservan algo del comportamiento de la EMSSA 97. Esto en el caso del sexo masculino.

Para el caso del sexo femenino, la poca información con la que se cuenta hasta el momento, genera que el comportamiento sea peculiar en las últimas edades de la tabla, muestra una mortalidad mayor a las demás tablas en estas edades. En las primeras edades de la tabla, el comportamiento es similar al de la tabla del sexo masculino (desarrollo entre las EMSSA 97 y 09). Se estima que con actualizaciones de este estudio, al incluir más información, los bancos podrán obtener mejores estimaciones del comportamiento de su mortalidad.

Como resultado de este estudio, al momento de hacer una valuación actuarial para este sector, se sugiere utilizar la tabla resultado de este estudio para el sexo masculino como tabla de mortalidad después del retiro. De esta manera, se tendrán resultados obtenidos del comportamiento específico de la población estudiada, lo cual resultará en una mejor estimación del valor de los pasivos de la empresa. Para el sexo femenino, al ser una población significativamente menor, y al observar el comportamiento resultado de este estudio, se sugiere continuar utilizando la tabla EMSSA97.

Es importante mencionar también que este es un estudio que se debe de tener en constante actualización (probablemente no de manera anual, más si quinquenalmente, por ejemplo), de manera que se pueda analizar si el comportamiento de la mortalidad en la población alcanza a aquel publicado en la EMSSA 09, o si se confirma que el comportamiento de este sector de la población varía en relación al de la población utilizada para la creación de esa tabla.

Bibliografía

Mina Valdés, Alejandro. Estimación de los fenómenos demográficos. Publicaciones del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM. 2003.

Mina Valdés, Alejandro. Ley de Mortalidad Mexicana. Revista Estudios Demográficos y Urbanos. 2003.

Ramos Bueno, Adriana. Tesis “El Ajuste de Funciones de Supervivencia en Tablas de Mortalidad Mexicanas”. Universidad Nacional Autónoma de México. 2009.

Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt. Actuarial Mathematics. The Society of Actuaries. 1986.

Fellers, William W., Jackson, Paul H.. Non-Insured Pension Mortality The UP-1984 Table”. The Wyatt Company. 1975.

Comité de Mortalidad A.M.A.-A.M.I.S., Tabla de Mortalidad México 2000. A.M.A., A.M.I.S. 2000.

Circular S-22.2. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. 1997

Circular S-22.2. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. 2009

Committee on Annuities. Development of the 1983 Group Annuity Mortality Table. Transactions of Society of Actuaries 1983.

Página web. www.soa.org

Anexos

<u>Prueba de Hipótesis</u>

Esta prueba se llevó a cabo para comprobar que las diferencias mostradas entre la mortalidad esperada y la real no son producto del azar.

H_o: Las diferencias son producto del azar, el comportamiento es acorde a los esperados por la tabla EMSSA97.

H_1: Las diferencias no se deben al azar.

Por lo tanto, al observar estas diferencias, se obtiene la comparación entre las muertes esperadas (frecuencia esperada) y las muertes reales (frecuencia observada). A esto le hacemos la siguiente relación:

Edad	**Reales**	**Esperados**	**$(Obs\text{-}Esp)^2/Esp$**
55-59	32	29.2007305	0.268346355
60-64	43	63.837715	6.801784279
65-69	69	116.210578	19.17930988
70-74	82	147.519251	29.09974306
75-79	117	160.449352	11.76599469
80-84	118	156.355085	9.408792311
85-89	103	111.622045	0.665994401
90-94	49	56.7334199	1.054154393
95-99	13	18.7102203	1.742716842
Total	**626**	**860.638397**	**79.98683622**

Y sabemos, por tablas de probabilidades, que $X^2_{8(.05)} = 15.51$.

Por lo tanto, 79.99 es mayor que 15.51, y rechazo la hipótesis.

Con esto, podemos confirmar que las diferencias observadas no son cuestión de azar.

Datos Observados

Edad	q_x Masculino	l_x Masculino	q_x Femenino	l_x Femenino
55	0.0024876	100,000	0.0134228	100,000
56	0.0078585	99,751	0.0142180	98,658
57	0.0122164	98,967	0.0048544	97,255
58	0.0066556	97,758	0.0103093	96,783
59	0.0086207	97,108	0.0048780	95,785
60	0.0096685	96,271	0.0000000	95,318
61	0.0087719	95,340	0.0046296	95,318
62	0.0064599	94,503	0.0181818	94,877
63	0.0072029	93,893	0.0090090	93,152
64	0.0088790	93,217	0.0000000	92,312
65	0.0089385	92,389	0.0052083	92,312
66	0.0053022	91,563	0.0050000	91,832
67	0.0146905	91,078	0.0101010	91,372
68	0.0207715	89,740	0.0169492	90,449
69	0.0085106	87,876	0.0277778	88,916
70	0.0105263	87,128	0.0119048	86,447
71	0.0181818	86,211	0.0196078	85,417
72	0.0256739	84,643	0.0215827	83,743
73	0.0222841	82,470	0.0076336	81,935
74	0.0174419	80,632	0.0084746	81,310
75	0.0182371	79,226	0.0515464	80,621
76	0.0235479	77,781	0.0000000	76,465
77	0.0374532	75,949	0.0117647	76,465
78	0.0639659	73,105	0.0476190	75,565
79	0.0564103	68,429	0.0422535	71,967
80	0.0677966	64,569	0.0483871	68,926
81	0.0469208	60,191	0.0408163	65,591
82	0.0416667	57,367	0.0666667	62,914
83	0.0800000	54,977	0.0000000	58,720
84	0.0794224	50,578	0.0540541	58,720
85	0.1076233	46,561	0.0344828	55,546
86	0.0909091	41,550	0.0769231	53,630
87	0.1224490	37,773	0.1818182	49,505
88	0.1333333	33,148	0.0588235	40,504
89	0.1489362	28,728	0.2500000	38,121
90	0.1395349	24,449	0.0000000	28,591
91	0.2343750	21,038	0.0000000	28,591
92	0.1627907	16,107	0.3333333	28,591
93	0.1282051	13,485	0.1428571	19,061
94	0.1333333	11,756	0.5000000	16,338
95	0.0416667	10,189	0.0000000	8,169
96	0.3636364	9,764	0.0000000	8,169
97	0.4444444	6,214	0.0000000	8,169
98	0.2857143	3,452	0.0000000	8,169
99	0.4000000	2,466	0.0000000	8,169
100	1.0000000	1,479	1.0000000	8,169

ln de datos observados

Edad	l_x Masculino	ln(l_x) Masculino	l_x Femenino	ln(l_x) Femenino
55	100,000		100,000	
56	99,751	11.5104348	98,658	11.4994117
57	98,967	11.5025452	97,255	11.4850917
58	97,758	11.4902536	96,783	11.4802255
59	97,108	11.4835758	95,785	11.4698627
60	96,271	11.4749177	95,318	11.4649727
61	95,340	11.4652021	95,318	11.4649727
62	94,503	11.4563915	94,877	11.4603324
63	93,893	11.4499106	93,152	11.4419832
64	93,217	11.4426817	92,312	11.4329334
65	92,389	11.4337630	92,312	11.4329334
66	91,563	11.4247842	91,832	11.4277114
67	91,078	11.4194679	91,372	11.4226989
68	89,740	11.4046685	90,449	11.4125465
69	87,876	11.3836782	88,916	11.3954521
70	87,128	11.3751312	86,447	11.3672812
71	86,211	11.3645490	85,417	11.3553050
72	84,643	11.3461999	83,743	11.3355024
73	82,470	11.3201906	81,935	11.3136833
74	80,632	11.2976545	81,310	11.3060205
75	79,226	11.2800587	80,621	11.2975098
76	77,781	11.2616533	76,465	11.2445874
77	75,949	11.2378237	76,465	11.2445874
78	73,105	11.1996511	75,565	11.2327529
79	68,429	11.1335478	71,967	11.1839628
80	64,569	11.0754840	68,926	11.1407906
81	60,191	11.0052797	65,591	11.0911936
82	57,367	10.9572224	62,914	11.0495209
83	54,977	10.9146628	58,720	10.9805281
84	50,578	10.8312812	58,720	10.9805281
85	46,561	10.7485273	55,546	10.9249582
86	41,550	10.6346603	53,630	10.8898669
87	37,773	10.5393501	49,505	10.8098242
88	33,148	10.4087299	40,504	10.6091535
89	28,728	10.2656291	38,121	10.5485289
90	24,449	10.1043610	28,591	10.2608468
91	21,038	9.9540787	28,591	10.2608468
92	16,107	9.6870160	28,591	10.2608468
93	13,485	9.5093348	19,061	9.8553817
94	11,756	9.3721337	16,338	9.7012310
95	10,189	9.2290328	8,169	9.0080838
96	9,764	9.1864732	8,169	9.0080838
97	6,214	8.7344881	8,169	9.0080838
98	3,452	8.1467014	8,169	9.0080838
99	2,466	7.8102292	8,169	9.0080838
100	1,479	7.2994036	8,169	9.0080838

Serie l_x estimada 1

Edad	Masculino	Femenino
55	100,000	100,000
56	99,403	97,112
57	98,805	97,036
58	97,288	96,959
59	95,620	96,880
60	93,798	96,798
61	91,818	96,713
62	89,677	96,623
63	87,375	96,529
64	84,910	96,428
65	82,285	96,318
66	79,501	96,199
67	76,565	96,066
68	73,481	95,918
69	70,259	95,750
70	66,910	95,558
71	63,447	95,335
72	59,885	95,074
73	56,243	94,767
74	52,541	94,400
75	48,802	93,962
76	45,049	93,434
77	41,311	92,796
78	37,614	92,022
79	33,986	91,081
80	30,457	89,937
81	27,054	88,545
82	23,804	86,854
83	20,731	84,805
84	17,858	82,330
85	15,203	79,358
86	12,780	75,814
87	10,598	71,626
88	8,660	66,737
89	6,966	61,114
90	5,510	54,768
91	4,280	47,776
92	3,260	40,299
93	2,432	32,596
94	1,773	25,022
95	1,262	17,994
96	875	11,929
97	590	7,144
98	386	3,770
99	245	1,698
100	150	628

Series l_x estimada 2

	Masculino	Femenino
Edad	**lx estimada 2**	**lx estimada 2**
55	100,000	100,000
56	97,704	97,083
57	96,612	96,924
58	95,613	96,679
59	94,694	96,349
60	93,840	95,935
61	93,035	95,436
62	92,263	94,853
63	91,510	94,187
64	90,757	93,438
65	89,988	92,607
66	89,184	91,694
67	88,328	90,700
68	87,398	89,623
69	86,376	88,464
70	85,241	87,222
71	83,973	85,895
72	82,552	84,480
73	80,958	82,976
74	79,173	81,376
75	77,181	79,675
76	74,966	77,866
77	72,517	75,940
78	69,828	73,885
79	66,896	71,686
80	63,724	69,329
81	60,321	66,793
82	56,704	64,058
83	52,896	61,100
84	48,930	57,896
85	44,845	54,421
86	40,687	50,656
87	36,507	46,590
88	32,364	42,222
89	28,314	37,575
90	24,419	32,696
91	20,733	27,669
92	17,307	22,622
93	14,183	17,721
94	11,393	13,162
95	8,956	9,151
96	6,877	5,860
97	5,147	3,387
98	3,749	1,723
99	2,650	748
100	1,814	266