UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MANUAL DE ACTIVIDADES LÚDICAS PARA ÁLGEBRA DE BACHILLERATO

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

OLGA MAYTÉ VÁZQUEZ CANTÚ

TUTORA
M. en C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2010

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1.- Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta	1.- Datos del alumno Vázquez Cantú Olga Mayté 59 35 14 76 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 9150530-5
2.- Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	2.- Datos del tutor M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
3.- Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	3.- Datos del sinodal 1 Dra. Diana Avella Alaminos
4.- Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	4.- Datos del sinodal 2 M. en C. Emma Lam Osnaya
5.- Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	5.- Datos del sinodal 3 Mat. Laura Pastrana Ramírez
6.- Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	6.- Datos del sinodal 4 Dr. Fernando Brambila Paz
7.- Datos del trabajo escrito Título Número de páginas Año	7.- Datos del trabajo escrito Manual de actividades lúdicas para algebra de bachillerato 134 p 2010

Agradecimientos:

A Dios:
Por darme la oportunidad de
vivir este momento tan
importante de mi vida.

A la memoria de mis padres:
Que desafortunadamente,
no pudieron compartir conmigo este momento,
pero que gracias a su ejemplo y cariño que
me dieron, hoy son el resultado de mi
formación personal y profesional.

A mi familia:
José Luis, y mis hijos Juan, Tania y Diana
que con su apoyo, tolerancia y comprensión,
me ayudaron a seguir adelante y me dieron
fuerza para culminar este trabajo.

A mi tutora:
M. en C. Elena de Oteyza.
Por su tiempo, dedicación,
conocimientos y apoyo que
me brindo, para finalizar una etapa
más de mi vida profesional.

ÍNDICE

CAPÍTULO 6

CAPÍTULO 7

CAPÍTULO 8

ÍNDICE

CAPÍTULO 1
ARITMÉTICA

Tema: Números naturales
Propiedades orden y comparación

Los números naturales son los que nos sirven para contar.

El conjunto de todos ellos se denota por $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4,\ldots\}$$

Propiedades de los números naturales:

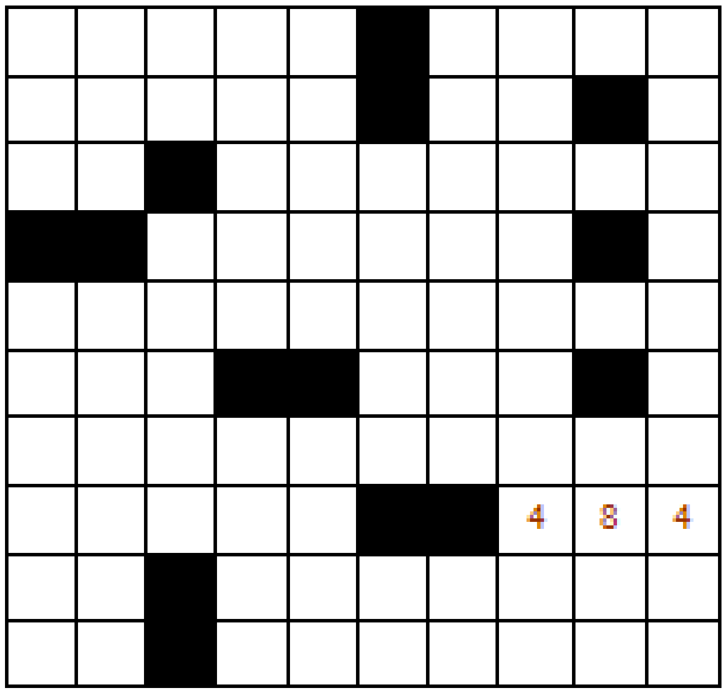
- Cada número natural tiene un sucesor.
- Cada número natural, excepto el uno tiene un antecesor.
- Los números naturales tienen un primer elemento, pero no tienen un último elemento.

Si se comparan dos números naturales cualesquiera m y n solo es posible una de las tres relaciones siguientes (ley de tricotomía).

- $m = n$
- $m > n$
- $m < n$.

Actividad

Las siguientes cifras son ejemplos de números naturales, colócalos todos en la cuadrícula. Se ha insertado uno en la posición correcta para que empieces.



3 dígitos

248
387
~~484~~
872

5 dígitos

38469
42978
45863
66301
87367
97856

7 dígitos

1643241
3834017
4200757
6845640

10 dígitos

3601282427
3873460235
7321646253
8479385417

4 dígitos

3614
3845
4362
6328

6 dígitos

388500
405951
743402

Tema: Números naturales
Orden o jerarquía de operaciones

Jerarquía. Es el orden en el que debemos resolver las operaciones matemáticas.

Cuando una expresión no tiene paréntesis tenemos que respetar la siguiente regla para resolverla:

- Calcular primero de izquierda a derecha y en orden todas las potencias y raíces.
- Después efectuar de izquierda a derecha y en orden todas las multiplicaciones y divisiones.
- Por último efectuar de izquierda a derecha y en orden todas las sumas y restas.

Ejemplo: $30 - 5 \times 4 + 4^3 = 30 - 5 \times 4 + 64$

$= 30 - 20 + 64$

$= 10 + 64$

$= 74.$

Si no aplicas la jerarquía de las operaciones, la expresión anterior puede dar como resultado:

$30 - 5 \times 4 + 4^3 = 25 \times 4 + 64$

$= 100 + 64$

$= 164$ lo cual es incorrecto.

Si la expresión incluye uno o varios signos de agrupación, estos indican el orden en que debemos de resolver las operaciones unidas por dichos signos. Si existe un signo de agrupación dentro de otro, siempre debemos de resolver primero el que está “mas adentro”.

Los signos de agrupación que usaremos son:

Paréntesis
Corchetes
Llaves

Ejemplos:

- Simplificar $5\left[12+4\ \ 7-2\ \right]-15.$

$$5\left[12+4\ \ 7-2\ \right]-15=5\left[12+4\ \ 5\ \right]-15$$
$$=5\ \ 12+20\ \ -15$$
$$=5\ \ 32\ \ -15$$
$$=160-15$$
$$=145.$$

- Simplificar $6\sqrt{25+24}+8\ \ 28-5(8-3)\ .$

$$\begin{aligned}
6\sqrt{25+24}+8\ \ 28-5(8-3)\ &= 6\sqrt{49}+8\ \ 28-5(5)\\
&= 6\ \ 7\ \ +8(28-25)\\
&= 42+8\ \ 3\\
&= 42+24\\
&= 66.
\end{aligned}$$

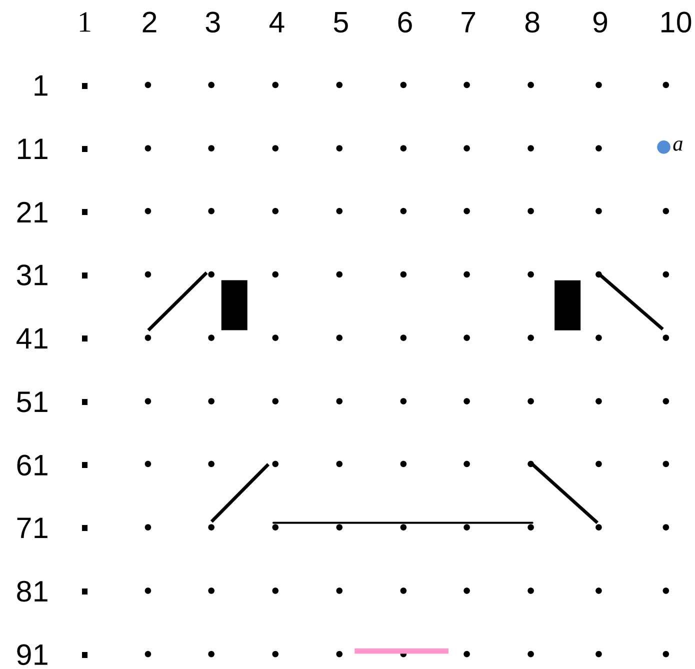
- Simplificar $8\left[\ 12-5\quad 21\div 7\ \ +(7+2(6-3))\right].$

$$\begin{aligned}
8\left[\ 12-5\quad 21\div 7\ \ +(7+2(6-3))\right] &= 8\left[\ 12-5\quad 21\div 7\ \ +(7+2(3))\right]\\
&= 8\left[\ 12-5\quad 21\div 7\ \ +(7+6)\right]\\
&= 8\left[\ 7\quad 3\ \ +(13)\right]\\
&= 8\ \ 21+13\\
&= 8\ \ 34\\
&= 272.
\end{aligned}$$

Actividad

Simplifica las siguientes expresiones, y localiza los resultados en el diagrama, que al unirlos por medio de rectas obtendrás una figura.

¡Descúbrela!



$a)$ $12+2\times 5-2=20$

$b)$ $\sqrt{100}\times 3+21\div 3=$

$c)$ $5+2^3\times 3+6\times 3=$

$d)$ $4\times 2+35\times 2=$

$e)$ $5+10^2-\left(\sqrt{81}+5\times 2\right)=$

$f)$ $5+3\times 33-56\div 8=$

$g)$ $28-5\times 3+5^2+6\times 10=$

$i)$ $7\times 7+8\times 5=$

$j)$ $4+5(3+12)=$

$k)$ $2[(4+2)(20\div 5)+(8+3)]=$

$l)$ $3[(25\div 5)+3(14\div 2)]-28=$

$m)$ $3(100\div 4)-7\times 4=$

$n)$ $8+3\times 10=$

$ñ)$ $7\times 7-20\div 2=$

$o)$ $2\{3+[5(2)-3]\}=$

$p)$ $[(20\div 5)+3]+5(2+2)=$

$q)$ $5+5\times 4=$

$r)$ $5(15-12)-3(7-6)=$

$s)$ $(4+3)(9-4)=$

$t)$ $5\times(5+4)=$

$u)$ $4+7\times 5+50\div 2+\sqrt{100}=$

$v)$ $2[35+4(8-5)]-8=$

$w)$ $7\times 15-10=$

$x)$ $8\times 3+2\times 35=$

$y)$ $164\div 2+1=$

$z)$ $9\sqrt{81}-8=$

$aa)$ $15+5(8+3)-8=$

$ab)$ • $2+5(15-7)=$

$ac)$ $4[8-4(2)]+7(28-22)+3=$

$ad)$ $4\sqrt{(32-7)}+7(28-26)=$

$ae)$ $1+4[32-4(3+3)]=$

$af)$ $2[5+(3+2)]-8=$

Tema: Números enteros
Adición y sustracción

El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$ y es $\mathbb{Z} = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$

Formalmente, el valor absoluto de un número entero a está definido por:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Observación: por definición el valor absoluto de a siempre será mayor o igual que cero, y nunca negativo.

Adición de números enteros:

Regla 1: (+) + (+) = (+)

Números positivos más números positivos es igual a números positivos.

Ejemplo:

- (+5) + (+ 4) + (+ 8) = + 17 o 17 (cuando el signo del número es positivo podemos omitirlo).

Regla 2: (–) + (–) = (–)

Números negativos más números negativos es igual a números negativos.

Ejemplo:

- $-3 + -8 + -11 = -22.$

Regla 3: (+) + (–) o (–) + (+)

Se restan los valores absolutos de los números: el menor del mayor y el signo queda determinado por el sumando que tenga el mayor valor absoluto.

Ejemplos:

- $(-6)+(4)=-2$ (se restan los números $6-4=2$ y se pone el signo del número con mayor valor absoluto, en este caso es $-$)
- $(12)+(-18)=-6$ (se restan los números $18-12=6$ y se pone el signo del número con mayor valor absoluto, en este caso es $-$)
- $(-3)+(7)=4$ (se restan los números $7-3=4$ y se pone el signo del número con mayor valor absoluto, en este caso es +).

Sustracción de números enteros:

Dados dos números enteros a y b, la diferencia $a-b$ se define como:

$$a - b = a + \ -b$$

Ejemplos:

- $20 \ - \ 12 \ = 20 - 12 = 8$ (El signo negativo cambia el signo del 12 quedando una resta de $20 - 12 = 8$).

- $-5 \ - \ -6 \ = -5 + 6 = 1$ (El signo negativo cambia el signo del -6 quedando una resta de 6 **–** 5 = 1).

- $10 \ - \ -7 \ = 10 + 7 = 17$ (El signo negativo cambia el signo del -7 quedando una suma de 10+7= 17).

- $-7 \ - \ 5 \ = -7 - 5 = -12$ (El signo negativo cambia el signo del 5 quedando $-7 - 5 = -12$ los cuales se suman y se coloca el signo **–**).

Actividad

Resuelve las siguientes operaciones con números enteros, y con esos resultados encuentra el camino para resolver el laberinto.

a) $(+5)+(+3)=8$

b) $(-8)+(-5)=$

c) $(-3)+(+9)=$

d) $(-2)+(-15)=$

e) $(-1)+(+11)=$

f) $(-5)+(-5)=$

g) $(-5)+(+5-3)+(2+1)=$

h) $(-5-3)+(+11-4)=$

i) $(7-2)-(+3)=$

j) $(-8)-(-3-2)+4-(9-5)=$

k) $-30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7)=$

l) $4+(-2+1)+5- \ -3-(1-2)+4 \ +1-2=$

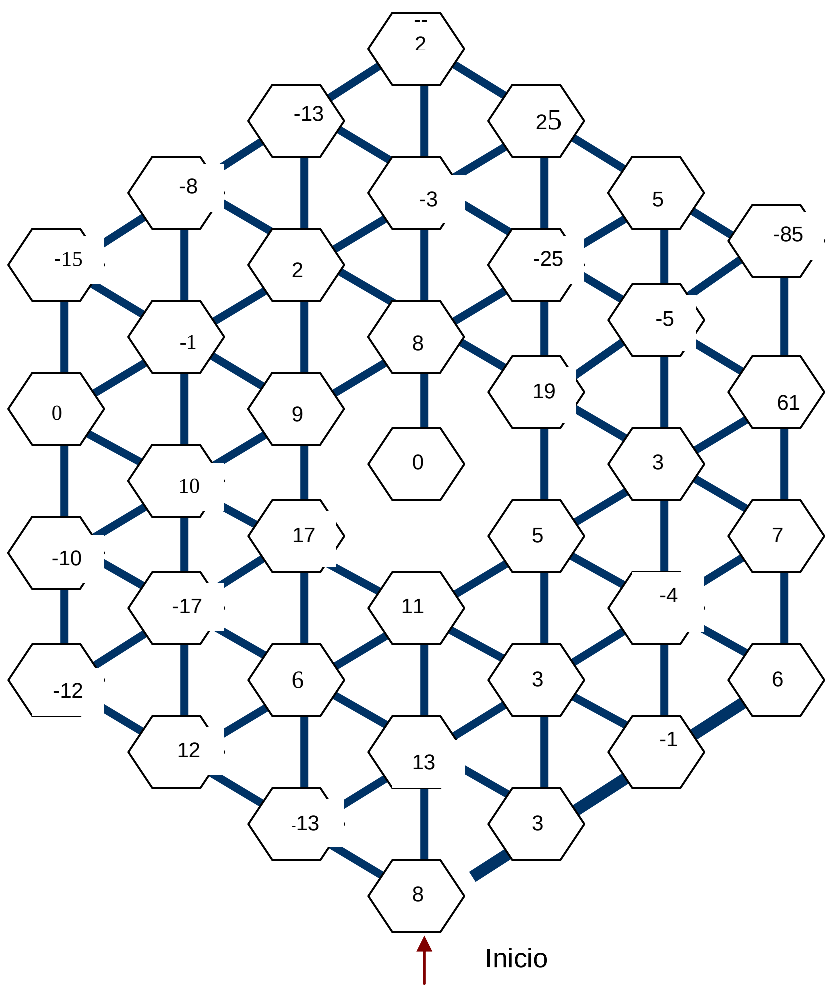
m) $-19+((-4)-8)+(-13)-(-12)+4-57=$

n) $3- \ -2+1-(4-5-7) \ -2+ \ -3-(5-6-1)+2 \ =$

ñ) $8+(-2)-(-10)-2+5=$

o) $(3-8)+(-5-2)-(-9+1)-(-7-5)=$

p) $- \ 12+(-3) \ -(-4)-5+6-(-4)=$



Tema: Números enteros
Multiplicación y división

Al multiplicar o dividir dos números del mismo signo el resultado es positivo.

$$+ \quad + = +$$
$$- \quad - = +$$
$$+ \div + = +$$
$$- \div - = +$$

Ejemplos:

Multiplicación	**División**
$9 \quad 5 = 45.$	$18 \div 3 = 6.$
$-7 \quad -4 = 28.$	$-15 \div -5 = 3.$

Al multiplicar o dividir dos números de signo diferente el resultado es negativo.

$$+ \quad - = -$$
$$- \quad + = -$$
$$+ \div - = -$$
$$- \div + = -$$

Ejemplos:

Multiplicación	**División**
$9 \quad -8 = -72.$	$32 \div -4 = -8.$
$-3 \quad 4 = -12$	$-45 \div 5 = -9$

Al multiplicar varios números se pueden contar el número de signos negativos para determinar si el resultado será positivo o negativo.

- Si la cantidad de números negativos es par $\rightarrow$ el resultado es positivo.
- Si la cantidad de números negativos es impar $\rightarrow$ el resultado es negativo.

Ejemplos:

$-2 \quad 3 \quad -4 \quad -1 \quad 5 \quad -3 = 360 \rightarrow$ (4 números negativos, es par, por lo tanto el resultado es positivo).

$3 \quad -5 \ (-4)(-1) = -60 \rightarrow$ (3 números negativos, es impar, por lo tanto el resultado es negativo).

Actividad

Cuadros mágicos

Completa los siguientes cuadros mágicos, es decir, si multiplicas los números de cada fila, cada columna y los de cada diagonal, se obtenga siempre el mismo producto.

a) Su producto = –200

5	–2		
		1	10
2		2	
	–1		–5

b) Encuentra el producto y completa el cuadro.

	4		3
–6		–2	–1
		2	–6
	1		–2

Actividad.

Resumen de operaciones

Material: El siguiente juego consta de 72 tarjetas con una expresión numérica cuyo resultado esté en el tablero, un tablero con los resultados de dichas expresiones y fichas de colores (de 20 a 40 por jugador).
Jugadores: de 2 a 4.
Preparación: Cada jugador elegirá el color de las fichas con las que jugará.
Todas las tarjetas se ponen boca abajo a un costado del tablero.
Juego: Por turno cada jugador saca una tarjeta y la muestra a los demás. El que encuentre primero el resultado correcto coloca una de sus fichas en el tablero sobre el resultado.
El ganador será el jugador que colocó más fichas de su color.

Tablero: Dimensiones reales: 25 cm largo por 20 cm. de ancho.

TABLERO DE OPERACIONES

25	-55	80	-49	42	-40	225	12	144
-324	-22	36	-9	-21	-10	56	-50	-6
-3	81	-7	-27	45	64	-18	196	35
169	200	-30	20	5	-100	121	4	63
140	33	-88	-99	-110	-28	1	-150	60
-250	-11	130	-26	270	160	-2	-32	23
72	-15	69	-8	400	-77	-300	-48	280
90	24	70	-16	44	0	-26	-180	14

Tarjetas: Dimensiones reales : 6 cm de largo por 4 cm de ancho.

(-5)(-5)	**(-11)(-4-7)**	**-90 -9**	**7 (8-19)**	**(162)(-2)**	**-2000 / -10**
-30+10-30	**-49 / 7**	**-100-10**	**(-9+3)(25+25)**	**¨-11-11**	**-20+60-5**
(-40)(-2)	**(-3)3**	**4(-50)-25**	**8 * 6**	**-20+56**	**-30+20+30**
(-7)(7)	**(-7)(-5) +10**	**-7 / -7**	**7 (40)**	**(-81 /9) +3**	**-15 / (-3)**
44+(-2)	**8 (6-(-2))**	**-30(5)**	**-10+100**	**¨-6-7-8**	**4 (- 20-5)**
(-5)(8)	**6 (6 -9)**	**120 / 2**	**-16+40**	**¨-5-3-2**	**(-11)8+7**
(-15)2	**(-14)2**	**(-25) (10)**	**(6+1)(-20+30)**	**(-6)+62**	**2(6(-4))+0**
¨ -8 +20	**(-6)(-5) +5**	**-7-4**	**(-8) (2)**	**-50+23**	**(-7) (-9)**
(-12)(-12)	**-1+170**	**100-40+70**	**22 + 22**	**(10)(20)-**	**-60+200**
-20- 6	**(-90)(3)(-1)**	**120-30+70**	**-30 -2**	**-64 /8**	**-27+50**
9(-4+12)	**3 (7-(-4))**	**-30 +15**	**-1 -1**	**(3+8)(-4-4)**	**9(4-(-3))+6**
8-11	**20 * 20**	**(-7)(-2)**	**-9 (20)(+1)**	**-12-14**	**-8 + 8**

Tema: Números racionales
Conceptos básicos

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$, es el conjunto de todos los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{3}{4}, \quad -5 = -\frac{5}{1}, \quad 2\frac{4}{9} = \frac{22}{9}, \quad 0.5 = \frac{1}{2}.$$

Los números racionales puedes escribirlos como fracciones donde a es el numerador y b es el denominador.

Las fracciones comunes se clasifican en:

- Fracción propia: $a < b$.
- Fracción impropia $a > b$.

Las fracciones impropias las podemos convertir en números mixtos, los cuales están formados por una parte entera y otra fraccionaria.

Ejemplos: $\frac{3}{4}$ fracción propia 3 < 4

$\frac{5}{2}$ fracción impropia 5 > 2

$2\frac{3}{5}$ número mixto, donde 2 es la parte entera y $\frac{3}{5}$ la parte fraccionaria.

Simplificación de fracciones

Un número racional está escrito en su mínima expresión o es irreducible cuando no existe ningún factor común al numerador y denominador, es decir, que son primos entre sí.

Al reducir una fracción a su mínima expresión decimos que la estamos simplificando, para lo cual dividimos el numerador y el denominador entre un mismo número.

Ejemplos:

- Simplificar $\frac{48}{54}$.

$$\frac{48}{54} \overset{\div 2}{=} \frac{24}{27} \overset{\div 3}{=} \frac{8}{9}$$ fracción irreducible.

- Simplificar $\dfrac{75}{60}$.

$$\frac{75}{60} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{25}{20} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{5}{4}$$ fracción irreducible.

Tema: Números racionales
Fracciones equivalentes

Las siguientes cantidades son equivalentes $\frac{16}{32}, \frac{4}{8}, \frac{1}{2},$ es decir, representan el mismo valor.

Una de las formas para obtener fracciones equivalentes a otra, se multiplica el numerador y el denominador por un mismo número entero distinto de cero.

Ejemplo:

$$\overbrace{\frac{5}{4} = \frac{15}{12}}^{\times 3}\ \text{(denominador} \times 3\text{)} \qquad \therefore \ \frac{15}{12} \text{ es una fracción equivalente a } \frac{5}{4}.$$

Para saber si dos fracciones son iguales o equivalentes podemos realizar los productos cruzados.
En general, si tenemos las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ entonces, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si, $ad = bc$.

Ejemplos:

- Comprobar si las fracciones $\frac{12}{15}$ y $\frac{32}{40}$ son iguales.

  Para lo cual multiplicamos $\frac{12}{15} \times \frac{32}{40}$

  $12 \times 40 = 480$ y $15 \times 32 = 480$ como son iguales, $\Rightarrow \frac{12}{15} = \frac{32}{40}$.

- Comprobar si las fracciones $\frac{6}{10}$ y $\frac{4}{12}$ son iguales.

  Para lo cual multiplicamos $\frac{6}{10} \times \frac{4}{12}$

  $6 \times 12 = 72$ y $10 \times 4 = 40$ como son diferentes, $\Rightarrow \frac{6}{10} \neq \frac{4}{12}$.

Conversión de una fracción impropia en un número mixto.

Para realizar esta conversión es necesario dividir el numerador entre el denominador. El cociente es la cantidad de enteros y el residuo formará la parte fraccionaria.

Ejemplo:

- Convertir $\frac{13}{5}$ en número mixto.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5\overline{)13} \\ 3 \end{array}$$

Enteros

Residuo

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Conversión de un número mixto en fracción impropia

Un número mixto se convierte en fracción impropia transformando los enteros en una fracción, convirtiendo el entero a fracción y sumarlo a la parte fraccionaria.

Ejemplo:

- Convertir $5\frac{3}{4}$ en fracción impropia.

  Esta fracción la podemos expresar como $5+\frac{3}{4}$.

  Convirtiendo los enteros en cuartos tenemos:

  $$5+\frac{3}{4}=\frac{20}{4}+\frac{3}{4}=\frac{23}{4}.$$

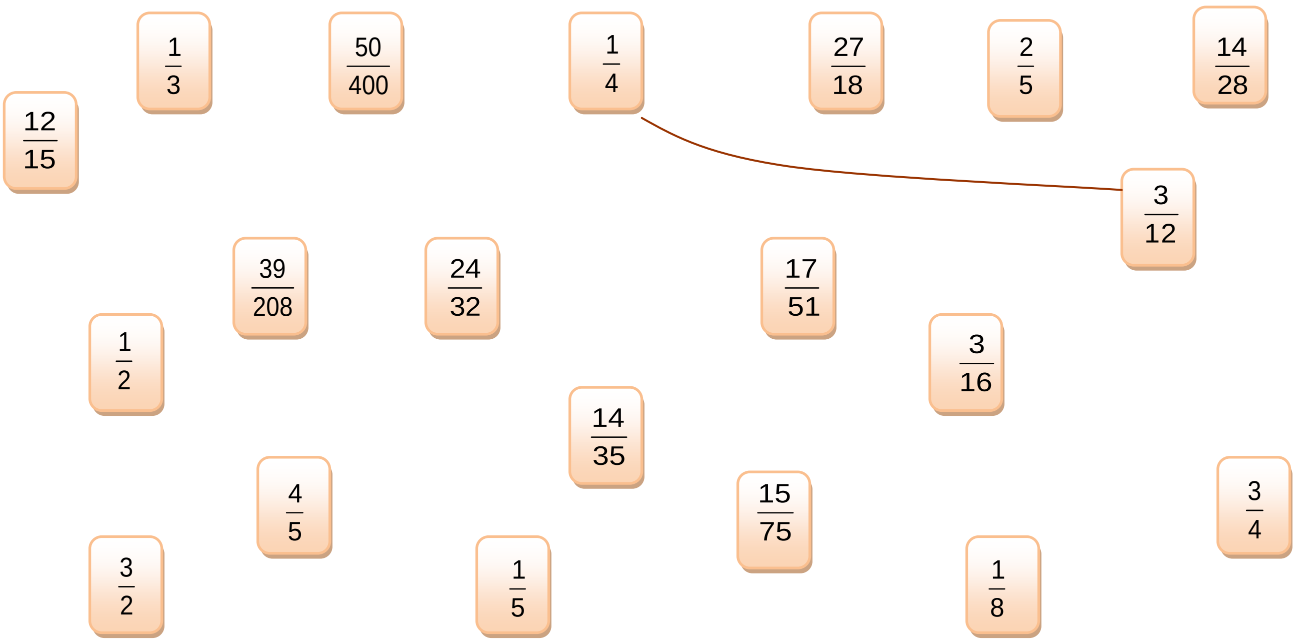
  Una forma abreviada de hacer esto es la siguiente:

  $$5\frac{3}{4}=\frac{5\times 4+3}{4}=\frac{23}{4}.$$

Actividad

Tripas de gato de fracciones

Une con una línea las fracciones que son equivalentes sin cruzar una línea con otra.



Actividad

Determina si los números de cada casilla son iguales, si es así colorea la casilla de color azul.

$\frac{2}{5}$ y $\frac{14}{35}$	$\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{15}$	$2\frac{4}{16}$ y $\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$ y $\frac{8}{30}$	$\frac{75}{15}$ y $\frac{10}{3}$
$\frac{10}{7}$ y $\frac{30}{20}$	$\frac{4}{12}$ y $\frac{5}{15}$	$\frac{24}{3}$ y 9	$4\frac{1}{4}$ y $\frac{68}{30}$	$\frac{1}{6}$ y $\frac{8}{30}$
$2\frac{1}{4}$ y $\frac{8}{3}$	$\frac{12}{5}$ y $\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{14}$	$1\frac{1}{5}$ y $\frac{60}{50}$	$\frac{22}{8}$ y $2\frac{3}{4}$
$\frac{19}{9}$ y $1\frac{9}{9}$	$\frac{4}{5}$ y $\frac{28}{35}$	$\frac{5}{6}$ y $\frac{15}{12}$	$1\frac{3}{5}$ y $\frac{16}{10}$	$\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{12}$
$2\frac{1}{4}$ y $\frac{8}{4}$	$\frac{63}{18}$ y $3\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{7}$ y $\frac{36}{30}$	$1\frac{1}{4}$ y $\frac{12}{8}$	$\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$

Tema: Números racionales
De fracción a expresión decimal y viceversa.

De fracción a decimal

Cualquier número racional puede ser escrito en forma decimal.

Una expresión decimal está definida de la forma:

$$\pm\ n.x_1x_2x_3...$$

donde n es un número natural y x_1, x_2, x_3...son dígitos.

Ejemplos de expresiones decimales:

0.258, 1.25802, 4.0000…, $-$3.454545…,

Para escribir un número racional en expresión decimal, sólo se efectúa la división correspondiente.

Ejemplo:

- Escribir la expresión decimal de $\frac{8}{5}$.

Efectuando la división

$$\begin{array}{r|l} & 1.6 \\ 5 & 8 \\ & 30 \\ & 0 \end{array}$$

Entonces $\frac{8}{5}=1.6$

- Escribir la expresión decimal de $\frac{5}{12}$.

Efectuando la división

$$\begin{array}{r|l} & 0.4166 \\ 12 & 50 \\ & 20 \\ & \ 80 \\ & \ \ 80 \\ & \ \ \ 8 \end{array}$$

Entonces $\frac{5}{12}=0.4166...$

Este es un ejemplo de expresión decimal periódica, porque se repite el 6 indefinidamente, para indicar esta idea se coloca una barra sobre el dígito o los dígitos que se repiten, así: $\frac{5}{12} = 0.4166... = 0.41\overline{6}$.

Las fracciones como ;

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ cuyo periodo inicia inmediatamente después del punto decimal se les llama "periódicas puras".

Las fracciones como:

$\frac{5}{12} = 0.4\overline{16}$ cuyo periodo inicia después de una parte no periódica reciben el nombre de "periódicas mixtas".

De expresión decimal a fracción.

Transformación de un decimal con expresión finita a fracción.

Para transformar el número decimal a fracción decimal se utilizan **potencias de diez** (10, 100, 1,000, etc.). Se colocan tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

Ejemplos:

$$0.\overbrace{25}^{2\text{ lugares}} = \underbrace{\frac{25}{100} = \frac{1}{4}}_{\text{simplificando}},$$

$$2.\overbrace{8}^{1\text{ lugar}} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5},$$

$$3.\overbrace{425}^{3\text{ lugares}} = \frac{3425}{1000} = \frac{685}{200} = \frac{137}{40}.$$

Transformación de decimal con expresión infinita periódico o semi-periódico a fracción.

1) El **numerador** de la fracción se obtiene, colocando la parte no periódica seguida de un período, menos la parte no periódica

2) El **denominador** de la fracción se obtiene colocando tantos **9** como cifras tenga el período y tantos **0** como cifras tenga el anteperíodo (números antes del período). Como siempre, el resultado se expresa como fracción irreducible (no se puede simplificar más) o como número mixto.

Ejemplos:

- $5.\overline{23} = \frac{523-5}{99} = \frac{518}{99}.$
- $2.3\overline{56} = \frac{2356-23}{990} = \frac{2333}{990}.$
- $0.\overline{21} = \frac{21-0}{99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$
- $0.45\overline{28} = \frac{4528}{9900}.$
- $0.\overline{8} = \frac{8}{9}.$

Actividad **Memorama de fracciones**

Material: 30 tarjetas de fracciones, 15 rojas con fracciones y 15 azules con expresiones decimales
Objetivo: Encontrar la mayor cantidad de pares de tarjetas que coincidan, es decir, un número en forma de fracción con su expresión decimal.
Jugadores: de 2 a 4.
Preparación: Recorta y acomoda las tarjetas boca abajo en una superficie plana.
Forma 5 filas de 6 tarjetas cada una.
Los jugadores se turnan, dando vueltas a dos tarjetas cualesquiera (una azul y una roja). Se deberá dar vuelta por completo para que todos los jugadores puedan verlas y dar tiempo para que realicen sus conversiones.
El jugador que encuentre un par se lo queda y sigue el turno de otro jugador.
El juego termina hasta que hayan encontrado todos los pares.
El ganador será el jugador con más pares de tarjetas.

Dimensiones reales de tarjetas: 6 cm x 5 cm.

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{5}$	$4\frac{6}{12}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{7}{10}$
$.\overline{45}$	0.5	0.25	0.125	0.4	$0.\overline{21}$
3.25	$0.\overline{3}$	0.75	0.7	$\frac{5}{11}$	0.8
4.5	1.8	$3\frac{1}{4}$	$\frac{27}{15}$	0.1875	$0.\overline{6}$

Tema: Números racionales
Operaciones

Suma de racionales

Si las fracciones a sumar tienen el mismo denominador, sólo se suman los numeradores y se pone el mismo denominador.

Ejemplos:

- $\frac{3}{4}+\frac{8}{4}=\frac{11}{4}.$
- $\frac{5}{7}+\left(-\frac{9}{7}\right)=-\frac{4}{7}.$

Si los denominadores son distintos, primero obtenemos un denominador común; este proceso requiere de multiplicar las fracciones de la siguiente forma:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Ejemplos:

- $\frac{3}{9}+\frac{8}{7}=\frac{21+72}{63}=\frac{93}{63}=\frac{31}{21}.$
- $\frac{2}{3}+\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{10-12}{15}=-\frac{2}{15}.$

También podemos utilizar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

- $\frac{7}{8}+\frac{6}{12}=\frac{21+12}{\underset{\uparrow}{24}}=\frac{33}{24}=\frac{11}{8}.$

  m.c.m.

24 ÷ 8 = 3, (3)(7)=21

24 ÷ 12 = 2, (2)(6) = 12

Cálculo del mínimo común múltiplo (m.c.m)

8, 12	÷
	2
4, 6	2
2, 3	2
1, 3	3
1	

∴ m.c.m.= (2)(2)(2)(3)= 24

Multiplicación de racionales.

Para multiplicar dos o más fracciones, se multiplican los numeradores, obteniendo así el numerador de la fracción, después multiplicamos los denominadores, para obtener el denominador de la fracción.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{7}\times\frac{-3}{8}==\underbrace{\frac{4\quad -3}{7\quad 8}=\frac{1\quad -3}{7\quad 2}}_{\text{simplificando }\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}=-\frac{3}{14}.$$

División de racionales.

Las divisiones con números racionales se pueden efectuar siguiendo varios procesos, pero existen dos que son los que más se aplican.

Para el primer procedimiento tenemos que saber que dos números racionales son recíprocos si su producto es 1.

Por ejemplo:

$\frac{7}{4}$ y $\frac{4}{7}$ son recíprocos, ya que $\frac{7}{4}\times\frac{4}{7}=1.$

En general el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

Entonces para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera por el recíproco de la segunda.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Ejemplo:

- $\frac{2}{9}\div\underbrace{\frac{5}{7}=\frac{2}{9}\times\frac{7}{5}}_{\text{recíproco}}=\frac{14}{45}.$

Otra forma de resolver la división es por el método de cruz el cual consiste en multiplicar de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

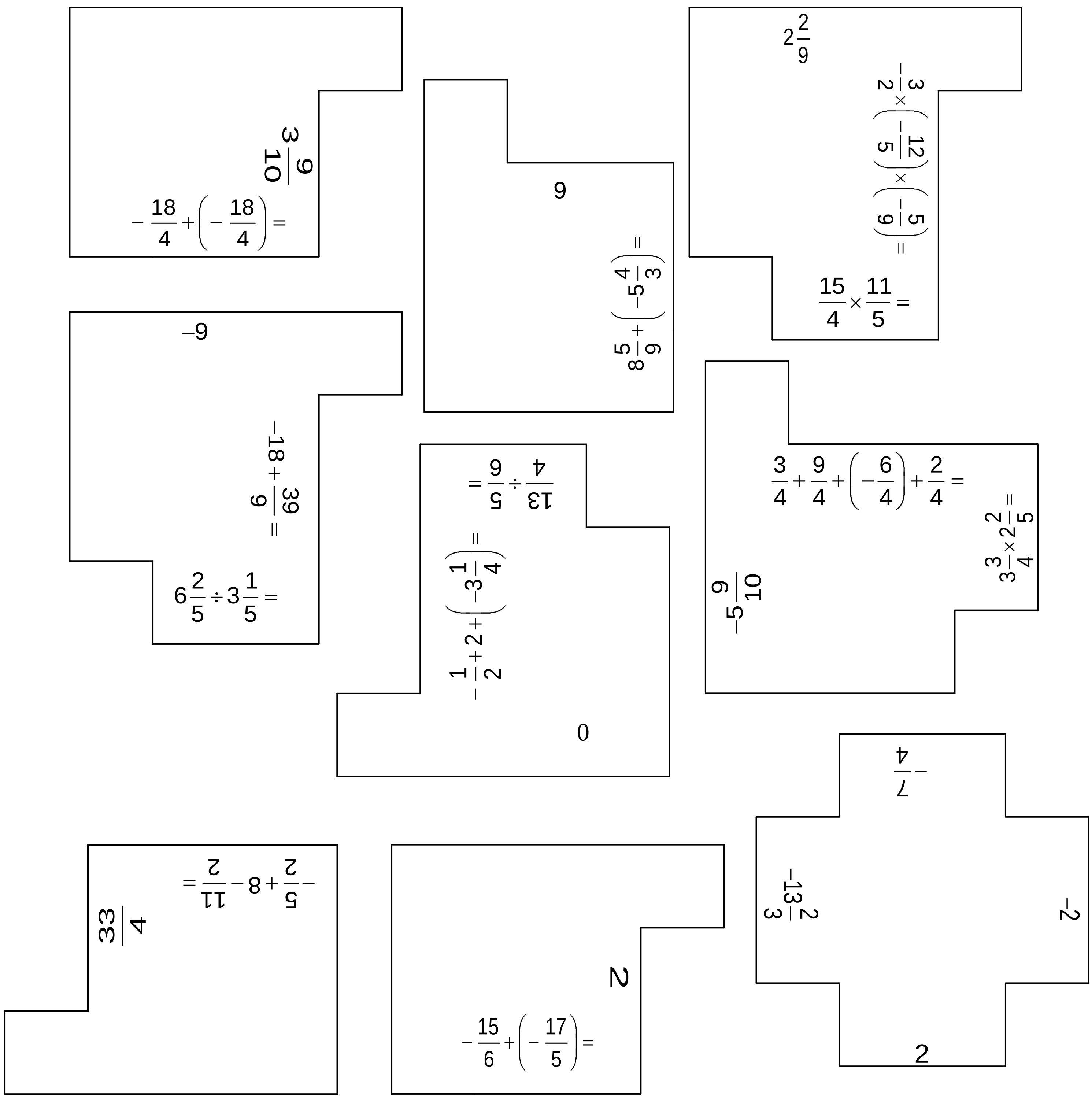
Ejemplo:

- $\frac{2}{9}\div\frac{5}{7}=\frac{(2)(7)}{(9)(5)}=\frac{14}{45}.$

Actividad.

Rompecabezas

Recorta las siguientes piezas y arma el rompecabezas resolviendo las operaciones de fracciones para ir uniéndolas con sus resultados.



Tema: Números reales.
Leyes de los exponentes.

La potencia es el resultado que se obtiene al multiplicar por sí mismo un número llamado base, tantas veces como lo indique otro número llamado exponente.

Ejemplo:

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \; = \underset{\text{base}}{3}^{\overset{\text{exponente}}{4}} = 81 \rightarrow \text{potencia}$$

En general:

$$a^n = \underbrace{a \quad a \quad a \; ... \; a}_{n \text{ veces}}, \text{ si } n > 0$$

Si $a \neq 0$ podemos definir a^n para $n \leq 0$

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Las siguientes propiedades se aplican para la multiplicación y la división y para poder hacerlo se necesita que:

- Las bases a y b sean números reales.
- Los exponentes m y n sean números enteros.

Propiedad	Ejemplos
1.- Bases iguales elevadas a exponentes diferentes.	
$a^n a^m = a^{m+n}$	$8^2 \cdot 8^5 = 8^{2+5} = 8^7$
2.- Base elevada a un exponente y todo esto elevado a otro exponente.	
$\left(a^{\,n} \right)^m = a^{nm}$	$\left(6^{\,5} \right)^2 = 6^{10}$.
3.- Bases diferentes que se multiplican, elevadas a un mismo exponente.	
$ab\ ^{m} = a^m b^m$	$7 \cdot 4\ ^{3} = 7^3 \cdot 4^3$
4.- Fracción elevada a un exponente.	
$\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$	$\left(\frac{3}{5} \right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$.
5.- Bases iguales que se dividen, pero cada una elevada a su propio exponente.	
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2} = 4^1 = 4$. $\quad \frac{6^4}{6^9} = 6^{4-9} = 6^{-5} = \frac{1}{6^5}$.

Ejemplos:

- Simplificar $\left(-5x^3\right)^2$.

Solución:

$$\left(-5x^3\right)^2 = \left(-5\right)^2\left(x^3\right)^2$$
$$= 25x^6$$

Entonces $\left(-5x^3\right)^2 = 25x^6$.

- Simplificar $\left(4x^4\right)\left(5x^3\right)^5$.

Solución:

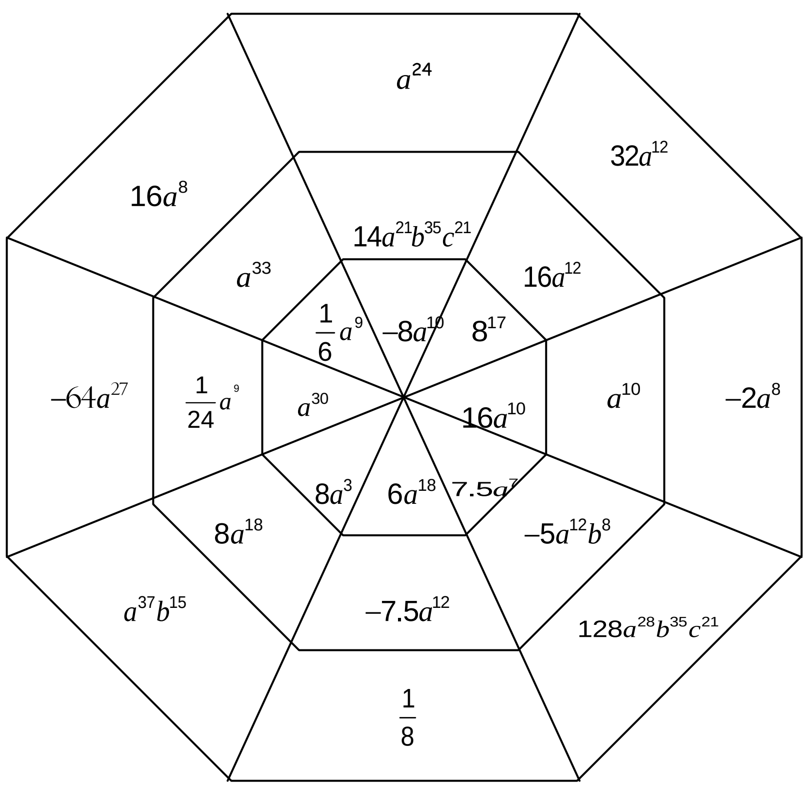
$$\left(4x^4\right)\left(5x^3\right)^5 = \left(4x^4\right)\left(5\right)^5\left(x^3\right)^5$$
$$= \left(4x^4\right)\left(3125\right)\left(x^{15}\right)$$
$$= 12{,}500x^{19}$$

Entonces $\left(4x^4\right)\left(5x^3\right)^5 = 12{,}500x^{19}$.

Actividad

Simplifica las siguientes expresiones y encuentra el resultado en la figura de abajo coloreando del color indicado.

- $(a^4)^6 =$ verde
- $-7.5\left(a^3\right)^4 =$ amarillo
- $\left(-4a^5\right)^2 =$ verde
- $\left(2ab^5\left(ac\right)^3\right)^7 =$ verde
- $-5\left(a^3b^2\right)^4 =$ amarillo
- $8a^2\left(2a^5\right)^2 =$ amarillo
- $\left(2a^6\right)^3 =$ amarillo
- $a^{32}\left(a^4\right)^6 =$ verde
- $\left(ab^2\right)^3\left(a^7b^2\right)^2\left(a^4b\right)^5 =$ verde
- $\left(-2a^2\right)^4 =$ verde
- $-2\left(a^2\right)^4 =$ verde
- $\left(-4a^9\right)^3 =$ amarillo
- $\left(\frac{6}{3}a\right)^3 =$ amarillo
- $\left(4a^6\right)\left(-2a^3\right)^2 =$ amarillo
- $\frac{1}{3}(a)^6\left(\frac{1}{2}a\right)^3 =$ amarillo
- $\frac{8^8}{8^9} =$ verde



Tema: Los números reales.
Razones y proporciones.

Razón : Se llama así al resultado de comparar dos cantidades, la primera de ellas llamada antecedente y la segunda llamada consecuente. Cuando esta comparación la realizamos por medio de un cociente, a la razón se llama razón geométrica.

A las razones geométricas las representaremos en forma fraccionaria, de la siguiente manera:

$$\frac{\text{antecedente}}{\text{consecuente}}$$

Por ejemplo, si tenemos la razón de 7 es a 4, el antecedente será 7 y el consecuente será 4. Nuestra razón quedará: $\frac{7}{4}$, pero también la podemos escribir como $7 \div 4$ o $7 : 4$.

Ejemplo:

Expresar la razón entre 5 m y 250 cm.

* Convertimos las cantidades a la misma unidad.

5 m= 500 cm

La razón quedaría

$$\frac{500\ cm}{250\ cm} = \frac{500}{250} = \frac{2}{1} \qquad \therefore \text{ la la razón es } 2 : 1$$

Proporción: Las llamamos así cuando tenemos una pareja de razones que son iguales.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{con } a, b, c \text{ y } d \text{ son números enteros, } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0.$$

La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se escribe también de la forma $a : b :: c : d$ y se lee siempre: a es a b como c es a d.

Ejemplo:

- Si pagamos $98.00 por 5 cuadernos de dibujo, y queremos saber cuánto pagaríamos por 7 cuadernos. ¿Qué debemos hacer?

Solución: Podemos plantear la proporción, llamando a x al costo de los 7 cuadernos.

$98 : 5 :: x : 7.$ en fracción $\frac{98}{5} = \frac{x}{7}$.

Resolviendo: $$\frac{98 \times 7}{5} = x$$

$$\frac{686}{5} = x$$

$$137.20 = x$$

$\therefore$ 7 cuadernos cuestan $137.20

Porcentajes

Un porcentaje es una forma de expresar un número como una fracción de 100 (por ciento, significa "de cada 100"). Es a menudo denotado utilizando el signo de porcentaje %.

Un porcentaje se puede escribir de tres formas:

a) Con el símbolo: 40%.

b) En forma de fracción: $\frac{40}{100}$.

c) O como decimal: 0.40.

Ejemplos:

- Encontrar el 75% de 900.

Multiplicamos 0.75 x 900 = 675

Entonces el 75% de 900 es 675.

- ¿Qué porcentaje de 780 representa 195?

Llamamos x al porcentaje que deseamos encontrar y escribimos las razones de la siguiente forma:

$$\frac{195}{780} = \frac{x}{100}$$

Resolviendo:

$$\frac{195 \times 100}{780} = x$$

$$25 = x$$

Entonces 195 representa el 25% de 780.

- ¿De que número es 240 el 80%?

Llamamos x al número que representa el total o el 100% y escribimos la razón.

$$\frac{240}{x} = \frac{80}{100}$$

Realizamos las siguientes operaciones para encontrar el valor de x,

$$x = \frac{240 \times 100}{80}$$

$$x = 300$$

Entonces 240 es el 80% de 300.

- Si un trabajo lo terminamos en 50 minutos y hasta el momento, llevamos solo 9 minutos del trabajo, ¿qué porcentaje llevamos?

  Llamamos x al porcentaje buscado.

  $$\frac{9}{50} = \frac{x}{100}$$

  $$\frac{9 \times 100}{50} = x$$

  $$18 = x$$

  Entonces el porcentaje que llevamos es el 18%.

- Un colegio en el año 2007 tuvo una matrícula de 400 alumnos, y en el año 2008 aumento a 460. ¿En qué porcentaje se incremento la matrícula?

  Para resolverlo restamos 460-400 para saber la cantidad de alumnos que aumentaron, en este caso son 60.

  Llamamos x al porcentaje buscado

  $$\frac{60}{400} = \frac{x}{100}$$

  Realizamos las operaciones para obtener el valor de x

  $$\frac{60 \times 100}{400} = x$$

  $$15 = x$$

  Entonces el porcentaje en que se incremento la matricula es del 15%.

Actividad

Trivia de aritmética

Material: Tablero, fichas de colores, un dado, tarjetas de cuatro colores con preguntas.

Color	Categoría
Rosa	Números naturales
Verde	Números enteros
Azul	Números racionales
Amarillo	Números reales

Objetivo: Ser el primer jugador en llegar exactamente al centro del tablero, respondiendo correctamente a las preguntas.

Jugadores: 2 a 4

Preparación: Cada jugador toma una ficha y la coloca en la casilla de inicio de una de las esquinas.
Toman las tarjetas, las separan por color y las colocan en el tablero.
Tiran el dado para decidir quien empezará a jugar.
Empieza el jugador con la puntuación más alta.

Desarrollo del juego: Tira el dado.
Tienes que avanzar el número completo de casillas que sacaste en el dado.
Uno de los otros jugadores toma la primera tarjeta de la baraja que tiene el mismo color de la casilla donde cayó tu ficha.
El jugador que lee la pregunta no debe de enseñar la tarjeta a los demás jugadores.

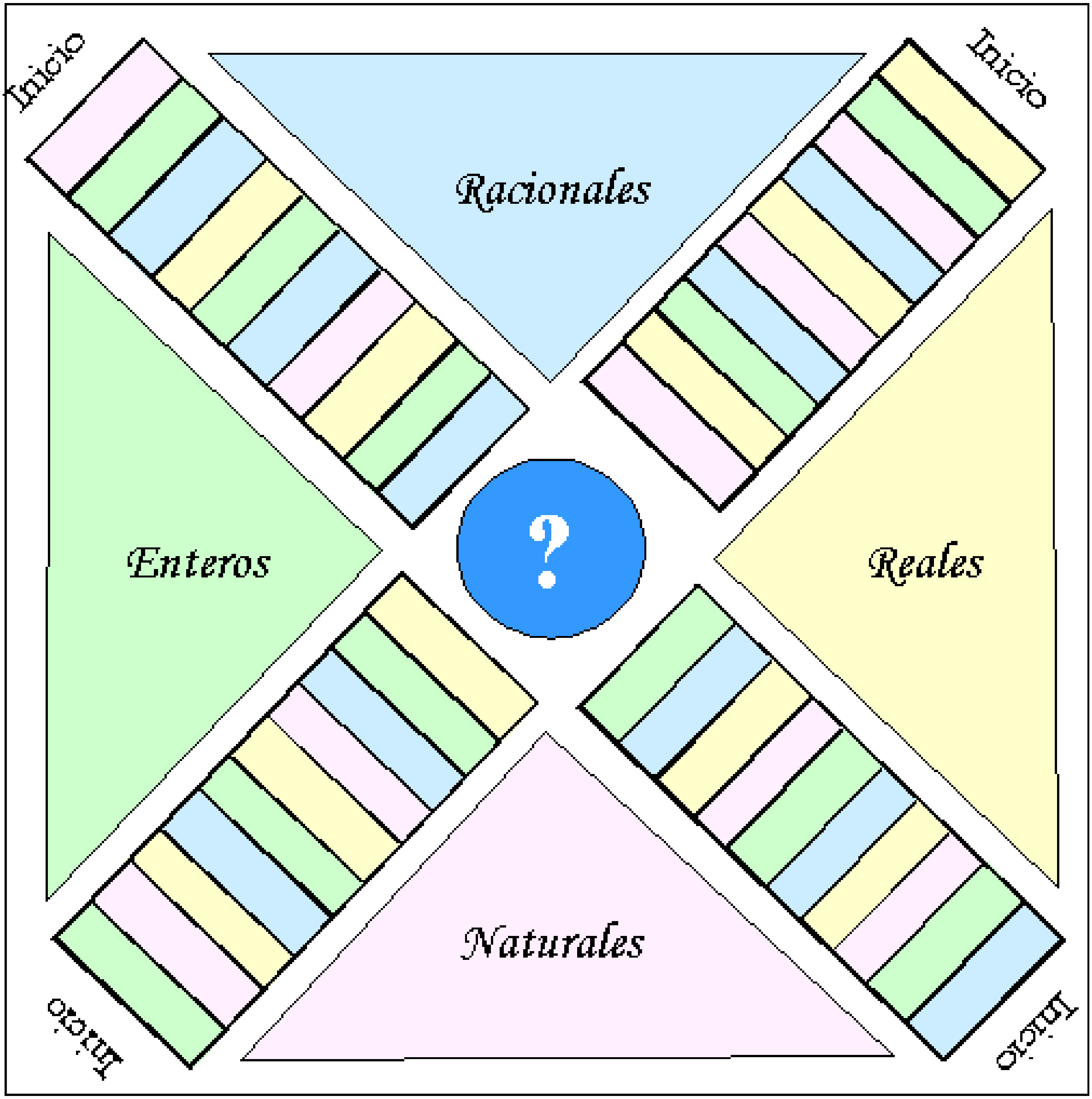
Para poder permanecer en esa casilla tendrás que contestar la pregunta correctamente, si no es así regresarás a la casilla de inicio.

Si la tarjeta que te ha salido es un comodín obtienes inmediatamente tu lugar en la casilla que caíste.

Ganador: Debes de llegar a la casilla central, con una tirada exacta del dado. Si pasas de largo, sigue jugando hasta que caigas en el centro del tablero con el número exacto.

Cuando llegues a la casilla central tendrás que responder una pregunta de la categoría que tu elijas, si fallas deberás de poner tu ficha en la casilla de inicio.
Si aciertas la pregunta habrás ganado el juego.

Tablero:



Inicio
Inicio
Racionales
Enteros
?
Reales
Naturales
Inicio
Inicio

Definición de número natural y ¿Cuál es el conjunto de los números naturales?

Son aquellos que nos sirven para contar.

$\mathbb{N}$= 1,2,3…

¿Qué significa jerarquía de las operaciones?

Es el orden en que debemos de resolver las operaciones matemáticas.

Simplifica la siguiente expresión.

$55 - 7 \times 6 + 3^3$.

40

COMODIN

Simplifica la siguiente expresión.

$\sqrt{144} \times 3 + 18 \div 3$

42

Simplifica la siguiente expresión.

$2[\ 8 + 7 \quad 81 \div 3 \ - (45 + 3)]$.

714

Simplifica la siguiente expresión.

9 [12 + 4(11-6)] -15.

273

Simplifica la siguiente expresión.

$4[\ 125 \div 5 \ - 3 \ 14 \div 2 \ ] - 8$.

8

Simplifica la siguiente expresión.

$\sqrt{64} + 7 \times 8 - 50 \div 2 + 5^3$

164

Simplifica la siguiente expresión.

$4+7\times6-56\div2+\sqrt{121}$

29

¿Con que letra se representa el conjunto de los números enteros?

$\mathbb{Z}$

¿Cuál es el conjunto de los números enteros?

$\mathbb{Z} = \ldots-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots$

Resuelve la siguiente operación:

$(-8)-(12-25)+(-8+1)=$

-2

Resuelve la siguiente operación:

$- \; -9+(-3) \; -(-12)-9+6-(-7) =$

28

Resuelve la siguiente operación:

$- \; -2-(1-8) \; -2+ \; -3-(5-11)-7 \; =$

-11

Resuelve la siguiente operación:

$-15+8-(-4)+1-(-3)+(-9)$

-8

¿Cuáles son las formas de representar un porcentaje?

En porcentaje, en fracción y decimal.

Simplifica la siguiente expresión

$5^2\cdot5^8=$

5^{10}

Encuentra el
12.5% de 60

7.5

Simplifica la
siguiente expresión

$\left(9^{6}\right)^{3} =$

9^{18}

Simplifica la
siguiente expresión

$\frac{3^{6}}{3^{8}} =$

$3^{-2} = \frac{1}{3^{2}}$

Dos ángulos están en
razón 6 a 7. Si el
menor mide 30º,
¿Cuánto mide el otro?

35º

Dos números están
en razón de $\frac{4}{5}$. Si el
menor de ellos es
252, ¿cuál es el otro?

315

Encuentra el 15% de
220.

33

¿Qué porcentaje de
560 representa 168?

30%

De que número es
180 el 40 %

450

Simplifica la
siguiente fracción

$\frac{75}{60}$

$\frac{5}{4}$

Simplifica la siguiente fracción

$$\frac{24}{32}$$

$$\frac{3}{4}$$

Convierte a expresión decimal la siguiente fracción.

$$\frac{4}{5}$$

0.8

Escribe el siguiente número en forma de fracción

0.125

$$\frac{1}{8}$$

Resuelve la siguiente operación:

(-7+1)(-20+30)=

−60

Resuelve la siguiente operación:

-9(4-(-3))+6=

−57

Resuelve la siguiente operación:

-20÷5+4 (3- 8)=

−24

COMODIN

Resuelve la siguiente operación

$$\frac{2}{3}+\left(-\frac{8}{5}\right)=$$

$$-\frac{14}{15}$$

Resuelve la siguiente operación

$$\frac{6}{7}\times\frac{-8}{9}=$$

$$-\frac{16}{21}$$

¿Cuáles son los números racionales?

Es el conjunto de todos los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Escribe el siguiente número en forma de fracción

$0.\overline{45}$

$\frac{5}{11}$

¿Son las siguientes fracciones equivalentes?

$\frac{22}{8}$ y $2\frac{3}{4}$

Si son equivalentes

Resuelve la siguiente operación

$\frac{3}{9} + \frac{8}{6} =$

$\frac{5}{3}$

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Tema: Introducción al álgebra

El lenguaje algebraico nace en la civilización musulmana en el período de Al–Juarismi, al cual se le considera el padre del álgebra. El lenguaje algebraico consta principalmente de números, letras de alfabeto y algunos vocablos griegos. La principal función del lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética.

Por ejemplo: si queremos sumar dos números cualesquiera basta con decir $a + b$; donde la letra a indique que es un número cualquiera de la numeración que conocemos, b de la misma manera que a significa un número cualquiera de la numeración.

También el lenguaje algebraico ayuda a mantener relaciones generales para razonamiento de problemas a los que se puede enfrentar cualquier ser humano en la vida cotidiana.

Para poder manejar el lenguaje algebraico es necesario comprender lo siguiente:

- Las letras se emplean para representar toda clase de cantidades.

Expresión algebraica: Es la combinación de números, variables y operaciones.

Ejemplos:

$$a, \quad 2x+4y, \quad -9x^3, \quad \frac{4(3x+5)}{z}.$$

El lenguaje algebraico

Los siguientes ejemplos, son algunas de las situaciones más comunes que involucran los problemas de matemáticas con lenguaje algebraico; cualquier razonamiento extra o formulación de operaciones con este lenguaje se basa estrictamente en estas definiciones:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
La suma de dos números	$a+b$
La resta de un número menos otro	$m-n$
El producto de dos números	ab
El cociente de dos números	$\frac{p}{q}$
El cubo de la mitad de un número	$\left(\frac{a}{2}\right)^3$
Un número m´ás 40	$x+40$
El triple de un número más el cuadrado de otro	$3x+y^2$
La raíz cuadrada de un número	$\sqrt{x}$

Actividad Lotería

Material: 25 tarjetas con un enunciado en lenguaje común cada una.

4 tableros de 4 x 3 con expresiones algebraicas y fichas para seleccionar las casillas.

Jugadores: Un moderador y 2 a 4 jugadores.

Preparación: Recortar y revolver las tarjetas. Entregar un tablero a cada jugador y fichas para marcar casillas.

El moderador del juego canta uno a uno los mensajes.

Cada mensaje leído corresponde a un único número que se registra en el tablero.

El jugador que complete primero su tablero será el ganador.

El triple de un número más el doble de otro.	El cuadrado de un número.	La cuarta parte de la suma de dos números.	Un número disminuido en 10.	El cociente de dos números es 10.
El cociente de 10 entre un número.	Cuatro tercios de un número.	El producto de un número por la suma de otros dos.	El cociente de la suma de dos números entre su diferencia.	El cuadrado de un número menos el cubo de la suma de otros dos.
El producto de la suma de dos números por su diferencia.	Un tercio de un número.	La mitad de un número, más la tercera parte de otro.	Cinco séptimos de x.	Un quinto de un número es 7.

Uno entre el doble de x.	Cinco veces el cuadrado de un número.	El triple producto del cuadrado de un número por otro.	Seis veces un número disminuido en 5 es 10.	El producto de dos números enteros consecutivos.
La mitad de un número.	El cuadrado de un número disminuido en 5.	La quinta parte de la diferencia de dos números es 20.	El cociente de dos números es 20.	El doble de la suma de dos números

$\frac{4n}{3}$	$\frac{x+y}{x-y}$	z^2
$n-10$	$5x^2$	$\frac{n}{3}$
$\frac{5x}{7}$	$3x+2y$	$\frac{x}{y}=20$
$3a^2b$	$(a+b)(a-b)$	$\frac{x}{y}=10$

$\frac{10}{n}$	$\frac{x+y}{x-y}$	$x^2-(y+z)^3$
$\frac{y}{5}=7$	$n-10$	$\frac{1}{2x}$
$\frac{x+y}{4}$	$x(y+z)$	$3x+2y$
$\frac{a-b}{5}=20$	$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$	$\frac{4n}{3}$

x^2-5	$\frac{x+y}{x-y}$	$\frac{1}{2x}$
$2(a+b)$	$3a^2b$	$\frac{4n}{3}$
$6t-5=10$	$0.5t$	$\frac{x}{y}=20$
$3x+2y$	z^2	$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$

$x^2-(y+z)^3$	$\frac{5x}{7}$	$n(n+1)$
$0.5t$	$(a+b)(a-b)$	$\frac{10}{n}$
$\frac{x}{y}=20$	$\frac{1}{2x}$	$5x^2$
$\frac{a-b}{5}=20$	$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$	$6t-5=10$

Tema: Valor numérico de una expresión algebraica.

Para encontrar el valor de una expresión algebraica, sólo se necesita reemplazar cada variable por un número para obtener su valor numérico.

Ejemplos:

El área de un triángulo está dada por la siguiente expresión: $A = \dfrac{b \times h}{2}$,

donde A es el área, b es la base y h es su altura.

- Evaluar cuando $b = 8$ y $h = 12$

$$\begin{aligned} A &= \frac{8 \times 12}{2} \\ &= 8 \times 6 \\ &= 48. \end{aligned}$$

- Evaluar la expresión $-3(x+1)+4x$, cuando $x = 2$.

$$\begin{aligned} -3(x+1)+4x &= -3(2+1)+4(2) \\ &= -9+8 \\ &= -1. \end{aligned}$$

- Evaluar $5x+3y$, cuando $x = -1$ y $y = 5$.

$$\begin{aligned} 5x+3y &= 5(-1)+3(5) \\ &= -5+15 \\ &= 10. \end{aligned}$$

- Evaluar x^2-6x+9, cuando $x = -\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} x^2-6x+9 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)+9 \\ &= \frac{1}{4}+3+9 \\ &= \frac{1}{4}+12 \\ &= \frac{49}{4}. \end{aligned}$$

Actividad.

Cuadro mágico

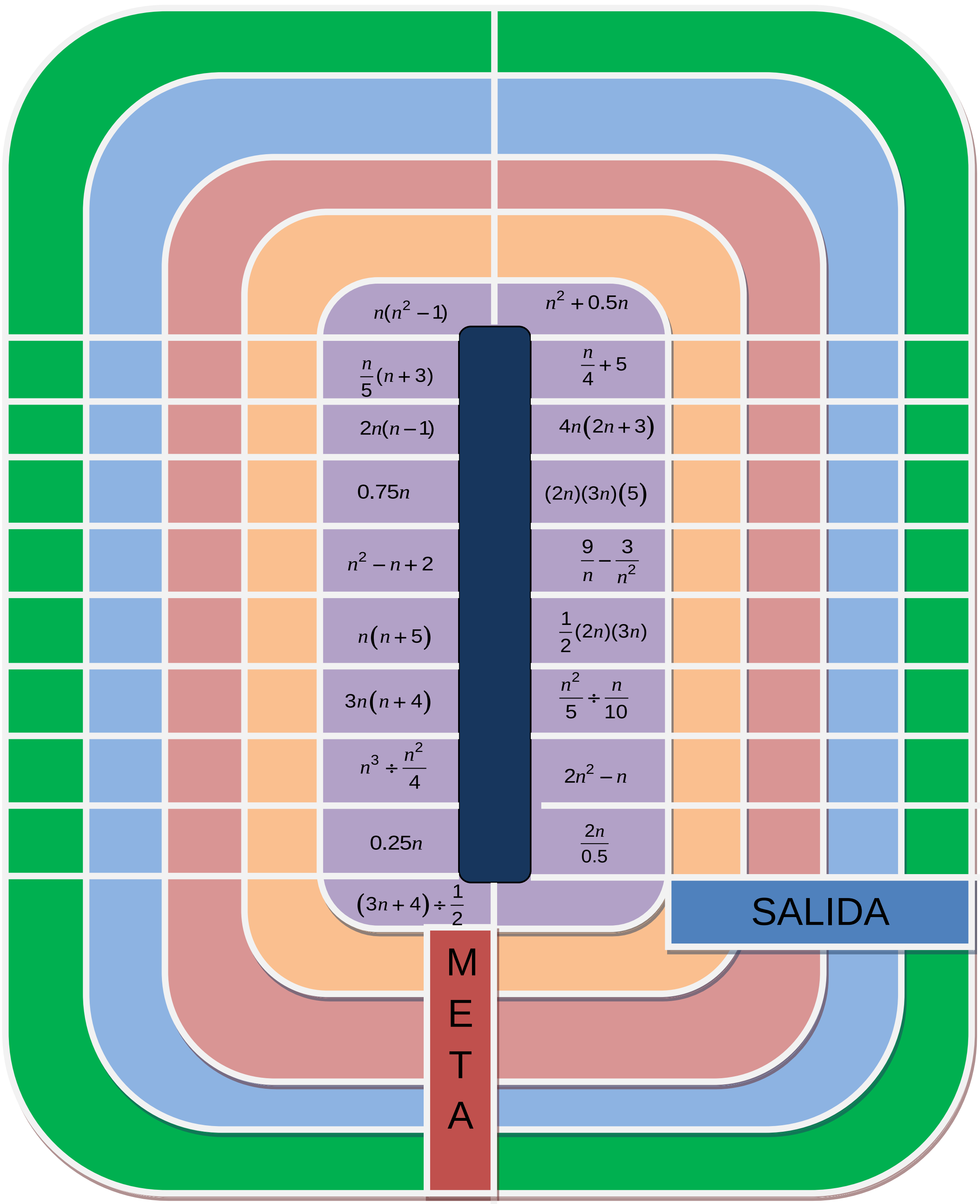
En el esquema de abajo sustituye las literales a, b, c, d, e y f por números enteros de una cifra, para obtener los resultados indicados.

a	+	b	–	8	= 4
×		×		×	
c	+	6	–	d	= 8
÷		÷		–	
e	×	2	–	f	= 7
= 6		= 9		= 11	

Actividad

“Carrera de obstáculos”

Material: Tablero, fichas, un dado.
Jugadores: 2,3 ó 4
Preparación: Cada jugador escoge el color de su ficha y la colocan en el recuadro de salida.
Desarrollo del juego: Cada jugador lanza el dado por turno, el número que caiga en el dado serán las casillas que tiene que avanzar y al mismo tiempo será el valor que tienen que sustituir en la expresión algebraica correspondiente a la casilla. Si lo hace correctamente, se queda en esa casilla, si no, retroceder dos casillas.
Gana el primero que llegue a la meta.



Tema: Reducción de términos semejantes

Primero definiremos algunas palabras clave para entender el tema:

Reducir o simplificar: Es hacer más sencilla una operación o una expresión.

Término algebraico: Cada uno de los sumandos de una expresión algebraica.

Ejemplos:

$5a^2b+7a\rightarrow$ tiene 2 términos que son $5a^2b$ y $7a$.

$2(x^3+3)-5x+7\rightarrow$ tiene tres téminos que son $2(x^3+3)$, $-5x$ y 7.

Términos semejantes: Que contienen las mismas variables con los mismos exponentes, aunque su coeficiente sea distinto.

Ejemplos:

Términos semejantes $\rightarrow 7x^2yz,\ -5x^2yz,\ \dfrac{2}{3}x^2yz.$ (mismas variables con los mismos exponentes).

Términos no semejantes $\rightarrow 4a^3b,\ 4a^2b,\ 2ab^3.$ (mismas variables diferentes exponentes).

Términos no semejantes $\rightarrow 5x^3y,\ -4ax,\ 9z$ (diferentes variables).

En la siguiente expresión identificar cuáles son términos semejantes.

- $4\underbrace{x^2y+3x^2}_{semejantes}y+5x-6xy^2$
- $-2\underbrace{a^3b^2+7ab+4a^3b^2}_{semejantes}+5\underbrace{a^2b^3+7a+4a^2}_{semejantes}b^3$

Ejemplos:

Simplifica: $4a^2+3a-6a-9a^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}4a^2+3a-6a-9a^2&=(4-9)a^2+(3-6)a\\&=-5a^2-3a.\end{aligned}$$

Simplifica: $6x+7y-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{2}y.$

Solución:

$$\begin{aligned}6x+7y-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}y&=\left(6-\frac{5}{4}\right)x+\left(7+\frac{1}{2}\right)y\\&=\frac{19}{4}x+\frac{15}{2}y.\end{aligned}$$

Actividad.

Sopa de letras

Simplifica las siguientes expresiones y encierra los resultados en la sopa de letras y números

- $3x^2+6y-5x^2+8y-10y=-2x^2+4y$
- $5x^2y^2-6x^2y^2+5xy-5xy=$
- $4m+6n-5m+8n-10m=$
- $\frac{3}{4}m-\frac{5}{2}n+\frac{8}{2}m-\frac{6}{3}n=$
- $x^2y^2-xy^2+xy^2-x^2y^2=$
- $3.6m+8.2n-5.2m-10.2n=$
- $3x+6y-8x-10y-10y+8x+6y=$
- $-5x^2y-6xy^2+8x^2y+10xy^2=$
- $5a+6b-6a-8b-3a-b=$
- $\frac{15}{3}x^2-\frac{10}{2}y-\frac{18}{3}x^2+\frac{20}{4}y=$
- $-5ab-8ba+6ab-7ba=$
- $3xm-5x^2-6m-8x^2+6m+3xm=$
- $10ab-6a+6a-24ab+5=$
- $7x+6y-5x-10y-8x+3y=$
- $7.8n-5.6n+3m-1.5m=$
- $-20m+9m-8n-12n=$
- $8xy^2+5x^2y-9xy^2-8x^2y=$
- $8y+5x-6y-11x=$
- $2a^2b-6ab^2+8ab^2-10a^2b=$
- $3x+6y-3x-5y=$
- $4(x+2y)-9(2x-7y)-11=$
- $-[-5(6x-2y)+x]+y=$
- $[-2(3a-9b)-(-5a+7b)]-2a-6b=$
- $-7(5x^2-2xy)-8y^2+3xy=$
- $-4c-[-3(1-8c)-(9-c)]=$

$-x^2$	$+2$	$-6x^2$	$29x$	$-9y$	$2a$	$-14ab$	$+5$	$-2xm$	$6xm$
$-35x^2$	$+y$	$-\frac{9}{2}n$	$-6y$	$+8b$	$-8x$	$+5a$	$+4$	$-13x^2$	-8
$+17xy$	$\frac{19}{4}m$	$+\frac{3}{4}n$	$-4a$	$-3b$	-1	$-x^2y^2$	$+7$	$-11m$	$-11x^2$
$-8y^2$	-3	$+4x^2$	$+2n$	$1.5m$	$+14m$	$-7x^2$	$+7m$	$-20n$	$+3n$
$-xy^2$	$-3x^2y$	$-4a$	$+2b$	-3	$+2.2n$	$+6a$	$-14x$	$+71y$	-11
$+3$	$-4x$	$-3a$	$+5b$	y	$1.8m$	$+14n$	$2m$	$-3y$	$-1.6m$
$+2m$	$+5n$	$-2x^2$	$-2y$	$+5$	$2m$	$-11m$	n	$6x$	$-2n$
$-8a^2b$	$-6a$	$+3n$	$+4y$	$3x^2y$	$+4xy^2$	$4ab^2$	$6y$	$3x$	$-4y$
$+2ab^2$	$+4b$	$+3a$	$-6y$	$+2$	$+9$	$+2y$	-9	$+6x$	$-8y$
$-a$	$-8b^2$	0	$-29c$	$+12$	$-9x$	$-6x$	$-y$	$-15y$	$+2a$

CAPÍTULO 3

ECUACIONES LINEALES

Tema: Ecuaciones lineales.

- Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Las expresiones que están de cada lado de la igualdad se llaman miembros de la ecuación.

$$\underbrace{5x+3}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{22}_{\text{segundo miembro}}$$

- Una ecuación con una o más literales es una igualdad que sólo se cumple con determinados valores de las literales o incógnitas.

- El valor de la incógnita que satisface la ecuación se llama *raíz de la ecuación.*

$$5x + 12 = 22$$

La igualdad sólo es verdadera para $x = 2$.

- Las ecuaciones de primer grado o lineales sólo tienen una raíz.

Resolver una ecuación, significa encontrar los valores numéricos que al sustituirlos en lugar de las variables hacen cierta la igualdad.

Para encontrar el valor de la variable, necesitamos despejarla, es decir dejarla sola en un lado de la ecuación.

Ejemplos:

- **Resolver la ecuación:** $y-5=11$

  Procedimiento:

  $y=11+5$ (El 5 "pasa" sumando)

  $y=16$ (reducción de términos)

  Solución:

  $y=16.$

- **Resolver la ecuación:** $a+\frac{3}{5}=2$

  Procedimiento:

  $a=2-\frac{3}{5}$ (El $\frac{3}{5}$ "pasa" restando)

  $a=\frac{10-3}{5}=\frac{7}{5}$ (reducción de términos)

  Solución:

  $a=\frac{7}{5}.$

- **Resolver la ecuación:** $4x + 6 = 34$

Procedimiento:

$4x = 34 - 6$ (El 6 “pasa” restando)

$4\,x = 28$ (reducción de términos)

$x = \frac{28}{4}$ (despejando x, el 4 “pasa” dividiendo)

Solución:

$x = 7$.

- **Resolver la ecuación:** $5t + 6 = 2t - 9$

Procedimiento:

$5t - 2t = -9 - 6$

$3t = -15$ (reducción de términos)

$t = -\frac{15}{3}$ (despejando t)

Solución:
$t = -5$.

- **Resolver la ecuación:**
$\frac{1}{3}x - 8 = -12$.

Procedimiento:

$\frac{1}{3}x = -12 + 8$ (El 8 “pasa” sumando)

$\frac{1}{3}x = -4$ (reducción de términos)

$x = -4(3)$ (despejando x, el 3 “pasa” multiplicando)

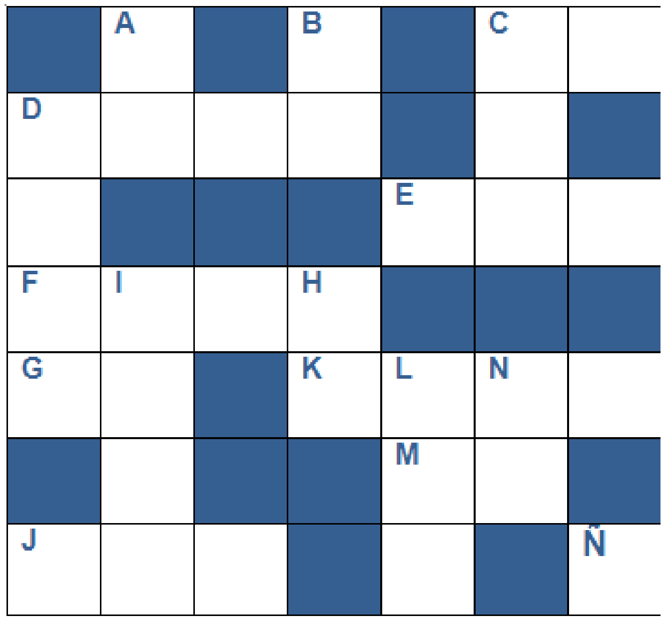
Solución:

$x = -12$.

Actividad

Crucigrama

Completa el siguiente crucigrama resolviendo las ecuaciones de primer grado.



Verticales

A) $3x+8=38$

B) $\frac{x}{5}=16$

C) $2x+8=440$

D) $\frac{x-8}{3}=421$

H) $9x+9=900$

I) $\frac{1}{4}x-2=250$

L) $\frac{x}{3}-11=x-233$

N) $x+5=2x-80$

Horizontales

C) $7x-4=171$

D) $8x-920=7080$

E) $\frac{1}{2}x+8=88$

F) $5x=35745$

G) $5x+3x-2x+6=66$

J) $\frac{5}{2}x+40=500$

K) $\frac{x}{9}-43=1000$

M) $\frac{x}{7}-5=0$

Ñ) $5x-4x+3x+8=8$

Tema: Desigualdades

Una desigualdad en la que aparecen variables también se llama inecuación.

Resolver una desigualdad algebraica significa encontrar los valores numéricos, que cuando sustituyen a las variables, las hacen ciertas.

Para manipular desigualdades algebraicas utilizamos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, así como las de orden:

$$a < b,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$$
$$a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc$$
$$a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

Consecuencias de las propiedades de orden.

- Si $a - b < c$, entonces $a < c + b$.
- Si $a + b < c$, entonces $a < c - b$.
- Si $ab < c$, y $b > 0$ entonces $a < \frac{c}{b}$.
- Si $\frac{a}{b} < c$, y $b > 0$ entonces $a < cb$.
- Si $ab < c$, y $b < 0$ entonces $a > \frac{c}{b}$.
- Si $\frac{a}{b} < c$, y $b < 0$ entonces $a > cb$.

Ejemplos:

- Resolver $2x - 6 > 8$.

$2x > 8 + 6$ (el 6 "pasa" sumando)

$2x > 14$ (simplificando)

$x > \frac{14}{2}$ (el 2 "pasa" dividiendo, sin cambiar el sentido de la desigualdad por ser mayor que cero)

$x > 7$ (simplificando)

de donde $x \in (7, \infty)$.

- Resolver $5-4x>7$.

$$
\begin{aligned}
5-4x &> 7 \\
-4x &> 7-5 \quad \text{(El 5 se "pasa" restando)} \\
-4x &> 2 \quad \text{(Simplificando)} \\
x &< \frac{2}{-4} \quad \text{(el } -4 \text{ "pasa" dividiendo, cambiando el sentido de} \\
&\quad \text{la desigualdad por ser menor que cero)} \\
x &< -\frac{1}{2} \quad \text{(Simplificando)}
\end{aligned}
$$

de donde $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$.

- Resolver $3t-6 \le 2(4t-7)$.

$$
\begin{aligned}
3t-6 &\le 2(4t-7) \\
3t-6 &\le 8t-14 \\
3t-8t &\le -14+6 \\
-5t &\le -8 \\
t &\ge \frac{-8}{-5} \\
t &\ge \frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

de donde $t \in \left[\frac{8}{5}, \infty\right)$.

- Resolver $-\frac{y}{7}+8<9$.

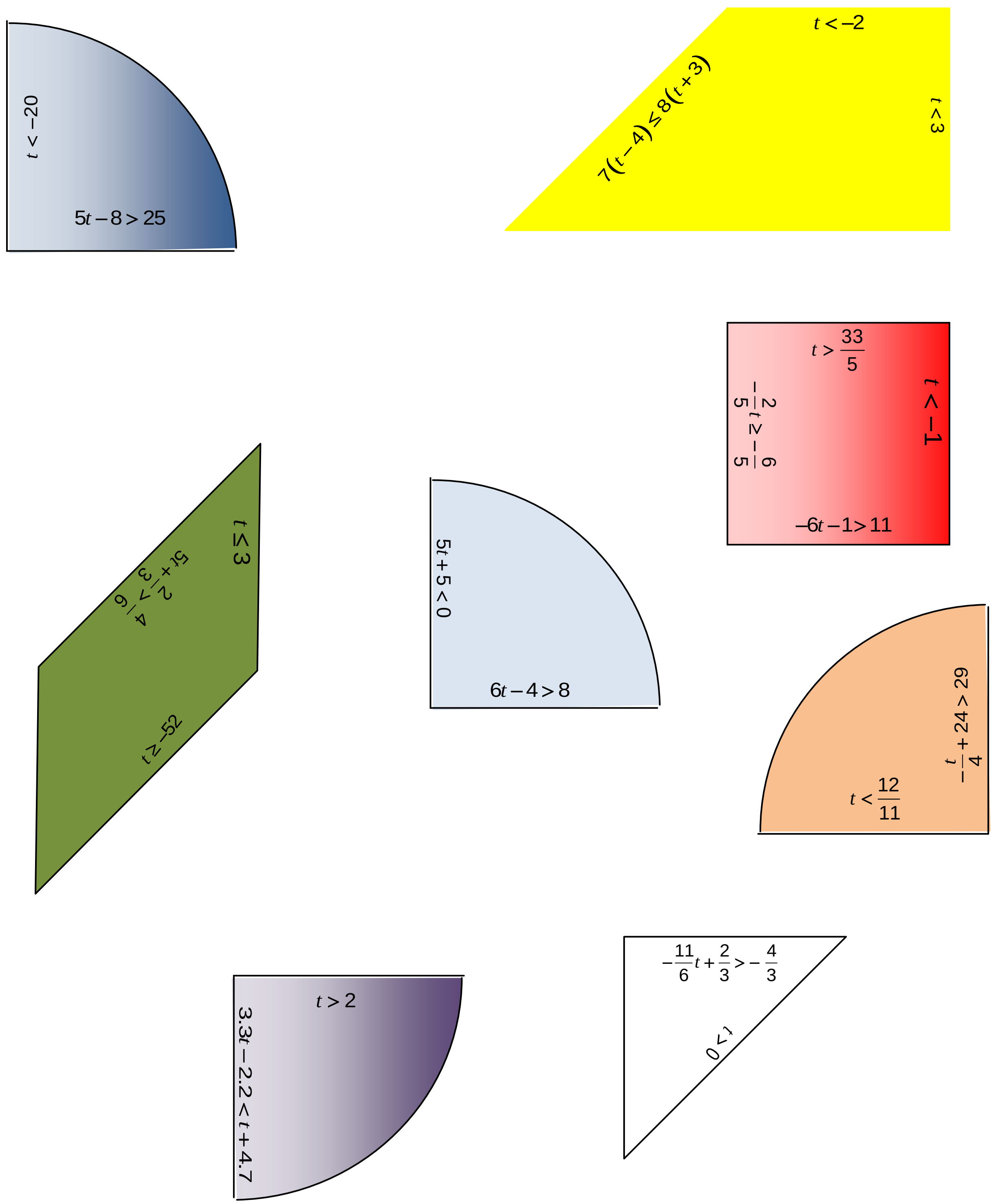
$$
\begin{aligned}
-\frac{y}{7}+8 &< 9 \\
-\frac{y}{7} &< 9-8 \\
-\frac{y}{7} &< 1 \\
y &> 1(-7) \\
y &> -7
\end{aligned}
$$

de donde $y \in (-7, \infty)$.

Nota: De preferencia pon la variable del lado que quede con coeficiente positivo, para no tenerle que cambiar el sentido a la desigualdad.

Actividad

Recorta las 8 piezas, y une los lados de manera que coincida cada desigualdad con su solución. ¿Qué figura se obtiene?



CAPÍTULO 4

POLINOMIOS

Tema: Polinomios

Los polinomios son expresiones algebraicas formadas por una o más variables. El polinomio de un sólo término se denomina monomio.

Ejemplos de monomios: $-6x,\ a,\ 8,\ 0.58z^4,\ -2ab^2c,\ \frac{1}{3}x^4y^3z.$

Los monomios están formados por dos partes, la parte numérica la cual llamaremos coeficiente y las variables.

$$\underbrace{-2}_{\text{coeficiente}}\ \overbrace{xy^2}^{\text{variables}}$$

Monomios	Coeficiente	variables
$-5x^2$	-5	x^2
a^3	1	a^3
$\frac{1}{3}x^4y^3z$	$\frac{1}{3}$	x^4y^3z
$2.25w^3z^5$	2.25	w^3z^5
3	3	No hay

Algunos polinomios reciben nombres especiales de acuerdo al número de términos que tienen:

No. De términos	Nombre	Ejemplo
Uno	Monomio	$-4x^3y^5$
Dos	Binomio	$2m+5n^3$
Tres	Trinomio	$-x+4xy^4-8$
Dos o más	Polinomio	$8a^6b^3+5ab+3a-15b$

Tema: polinomios

Producto de monomios

- Se multiplican los coeficientes aplicando las leyes de los signos.
- Al multiplicar potencias de bases iguales se suman sus exponentes.
- Si hay potencias que no se repiten, se escriben como están.

Ejemplos:

- Simplificar $\left(-xy^2\right)\left(4yz\right)$.

$$\left(-xy^2\right)\left(4yz\right)=\left(-1\right)\left(4\right)xy^{2+1}z$$
$$=-4xy^3z$$

- Simplificar $\left(\frac{2}{5}ab^3c^4\right)\left(\frac{4}{7}a^3bc\right)$.

$$\left(\frac{2}{5}ab^3c^4\right)\left(\frac{4}{7}a^3bc\right)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{7}\right)a^{1+3}b^{3+1}c^{4+1}$$
$$=\frac{8}{35}a^4b^4c^5.$$

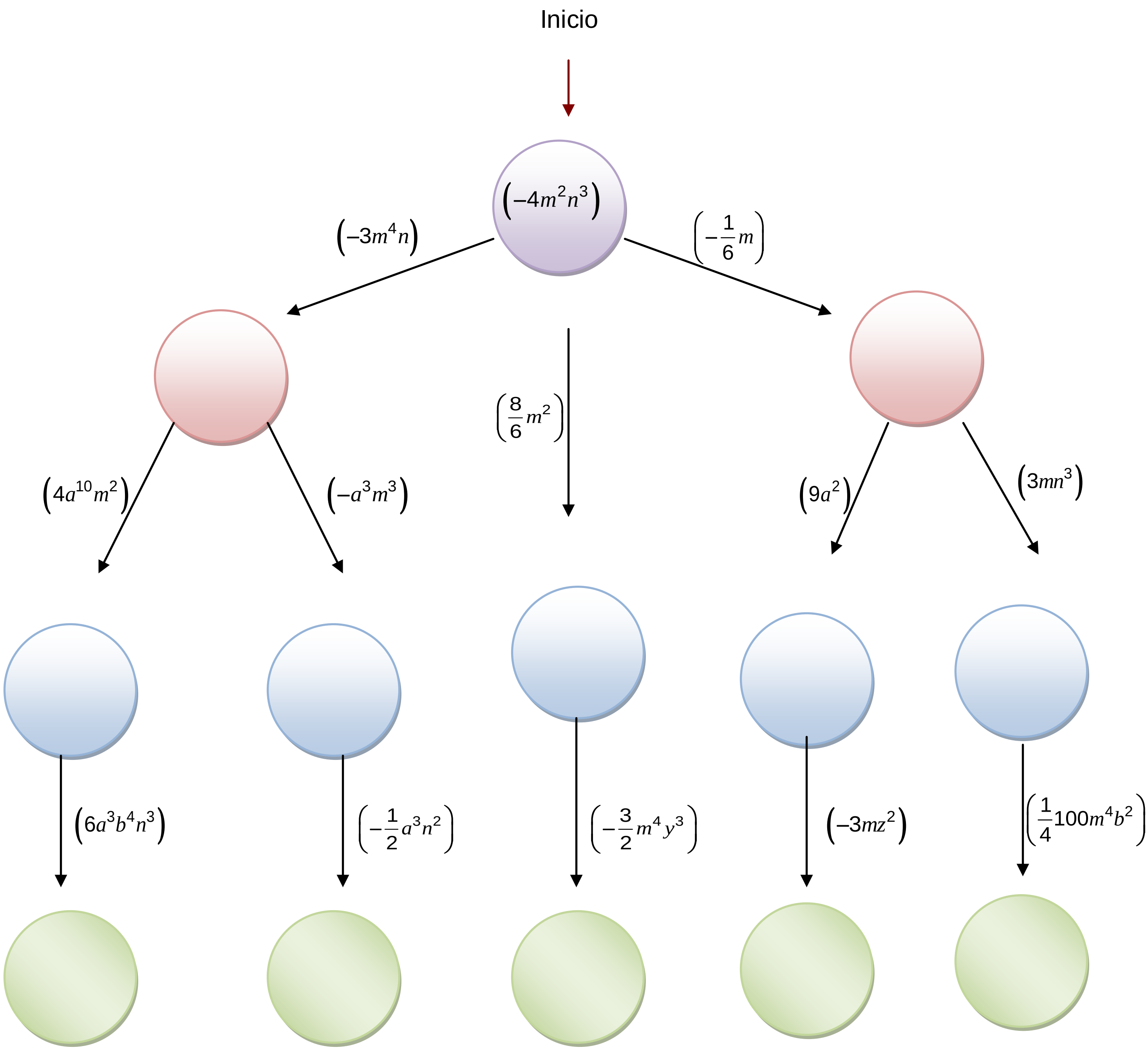
- Simplificar $\left(6x^5y\right)\left(-5x^4\right)\left(-x^2y^6\right)$.

$$\left(6x^5y\right)\left(-5x^4\right)\left(-x^2y^6\right)=(6)(-5)(-1)x^{5+4+2}y^{1+6}$$
$$=30x^{11}y^7.$$

Actividad

Organigrama

Escribe las expresiones que faltan en los círculos, efectuando las multiplicaciones que se indican.



División de monomios

Para cualquier número real $b \neq 0$ y cualesquiera números enteros positivos m y n:

- Si $m > n$, entonces: $\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$.

- Si $m < n$, entonces: $\dfrac{b^m}{b^n} = \dfrac{1}{b^{n-m}}$.

- Si $m = n$, entonces: $\dfrac{b^m}{b^n} = 1$.

Propiedad de la cancelación en la división.

Para cualesquiera números reales a, b y c, tales que $b \neq 0$, $c \neq 0$,

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplos:

- Simplificar $\dfrac{24x^7}{8x^4}$.

$$\frac{24x^7}{8x^4} = 3x^{7-4}$$
$$= 3x^3.$$

- Simplificar $\dfrac{x^5}{x^8}$.

$$\frac{x^5}{x^8} = \frac{1}{x^{8-5}}$$
$$= \frac{1}{x^3}.$$

- Simplificar $\dfrac{6a^2b^4}{18ab^2}$.

$$\frac{6a^2b^4}{18ab^2} = \frac{6}{18}a^{2-1}b^{4-2}$$
$$= \frac{1}{3}ab^2.$$

- Simplificar $\dfrac{12x^3\cancel{y}^2z}{3x\cancel{y}^2z^4}$.

$$\frac{12x^3y^2z}{3xy^2z^4} = 4\,\frac{x^{3-1}}{z^{4-1}}$$

$$= 4\,\frac{x^2}{z^3}.$$

Actividad.

Tiras con tablero

Material: Tablero, fichas de colores, tiras con expresiones algebraicas.
Objetivo: Resolver divisiones con polinomios.
Jugadores: dos.
Juego: Cada jugador, en su turno, elige una expresión de la tira rosa y otro de la tira azul y los tiene que dividir en ese orden. Si lo hace correctamente coloca una de sus fichas en el resultado correspondiente en el tablero y juega el otro jugador.
Si no lo resuelve correctamente, o si el resultado corresponde a una casilla ocupada, pasa.
El juego se termina cuando el tablero está lleno.
Gana el jugador que ponga más fichas en el tablero.

$8x^{10}y^5z^6$	$48x^6z^9$	$-2x^7y^4z^5$	$-3x^4y^2(2xy^3)^2$	$32w^4x^{10}y^6$

$-2x^4y^6$	$8x^2y^8$	$2x^5z^3$	$(-2xy^3z)^2$	$12x^8y$

Tablero:

$\frac{12x^4z^7}{y^6}$	$\frac{8w^4x^8}{z^2}$	$4x^5y^5z^3$	$-\frac{x^5z^5}{4y^4}$	$-\frac{3x^4y^2}{z^2}$
$\frac{6x^4z^9}{y^8}$	$-\frac{3x^4}{2}$	$-\frac{x^5z^3}{2y^2}$	$\frac{4z^9}{x^2y}$	$24xz^6$
$\frac{x^8z^6}{y^3}$	$\frac{8}{3}w^4x^2y^5$	$\frac{16w^4x^5y^6}{z^3}$	$-\frac{4x^6z^6}{y}$	$-16w^4x^6$
$\frac{x^3z^5}{y^2}$	$6x^2y^2$	$\frac{2x^8z^4}{y}$	$-\frac{6xy^8}{z^3}$	$-x^2y^4z^2$
$-\frac{y^7}{x^2}$	$-\frac{24x^2z^9}{y^6}$	$-\frac{y^3z^5}{6x}$	$\frac{4w^4x^8}{y^2}$	$\frac{2x^2y^4z^6}{3}$

Tema: polinomios

Suma y resta de polinomios

Suma

Para sumar dos o más polinomios en forma vertical, se alinean los términos semejantes y después se simplifican.

Ejemplos:

- Sumar $3x^2 - 8xy + y^2$ con $-4xy + 6x^2 - 3y^2$.

Solución:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 8xy + y^2 \\ \underline{6x^2 - 4xy - 3y^2} \\ 9x^2 - 12xy - 2y^2 \end{array}$$

- Sumar $-7a^2m + 6am^2 - m^3;\ a^3 - 4am^2 + m^3;\ -4a^3 + 4a^2m - 3.$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrr} & -7a^2m & +6am^2 & \cancel{-m^3} & \\ a^3 & & -4am^2 & \cancel{+m^3} & \\ -4a^3 & +4a^2m & & & -3 \\ \hline -3a^3 & -3a^2m & +2am^2 & & -3 \end{array}$$

Resta de polinomios

Para restar dos polinomios escribimos el primer polinomio tal y como está y al segundo le cambiamos cada uno de sus signos, es decir, ponemos su opuesto, alineamos los términos semejantes y después simplificamos.

Ejemplo:

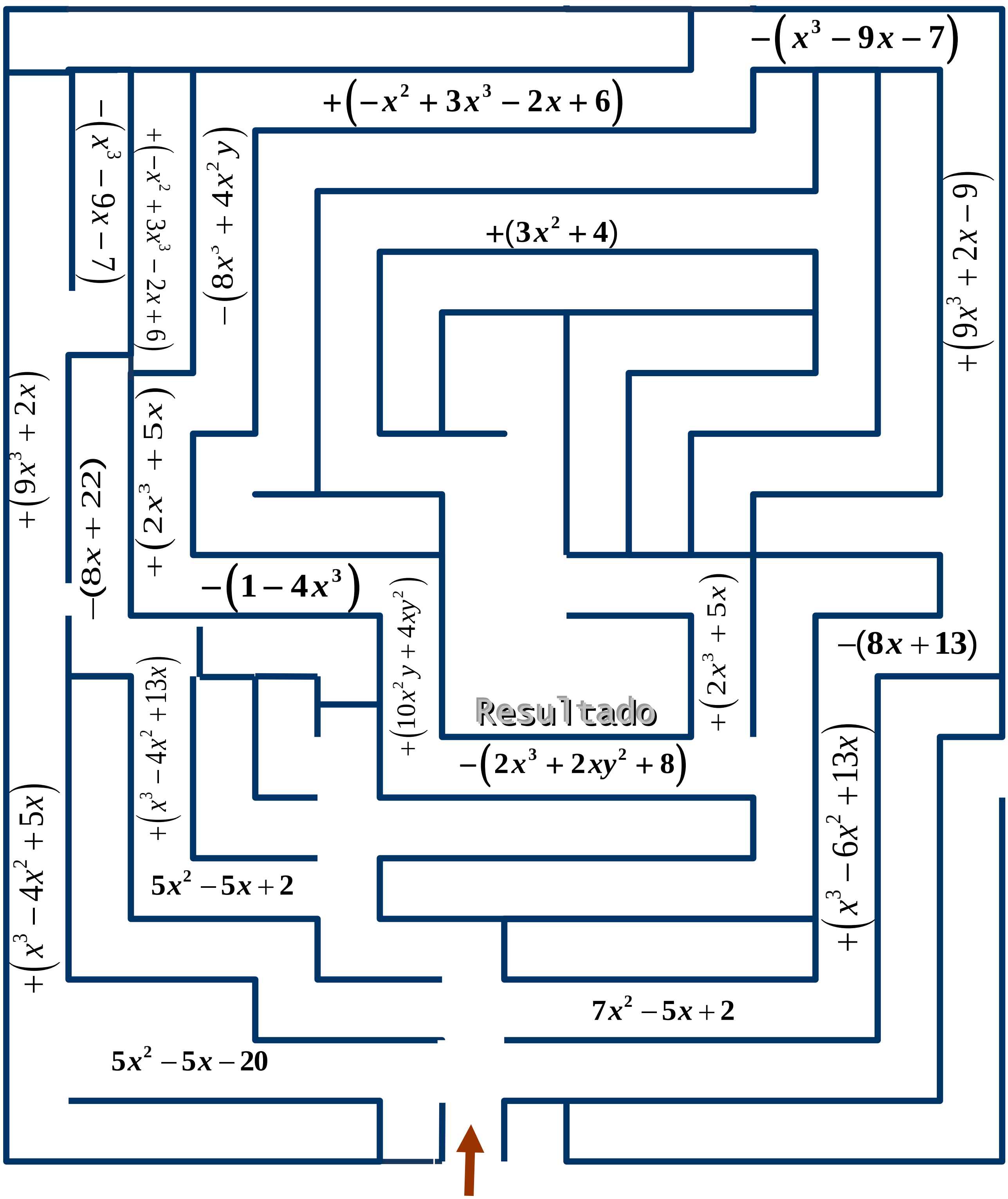
- Restar $2m^3 - 9n^3 + m^2n - 8mn^2$ menos $14mn^2 - 21m^2n + 5m^3 - 18$.

Solución:

$$\begin{array}{l} \left(2m^3 - 9n^3 + \quad m^2n - \quad 8mn^2\right) \\ -\left(5m^3 \qquad\quad - 21m^2n + 14mn^2 - 18\right) \xrightarrow{opuesto} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2m^3 - 9n^3 + \quad m^2n - \quad 8mn^2 \\ \underline{-5m^3 \qquad\quad + 21m^2n - 14mn^2 + 18} \\ -3m^3 - 9n^3 + 22m^2n - 22mn^2 + 18. \end{array}$$

Actividad.

Escoge un camino para llegar al centro del laberinto, resolviendo las operaciones de suma o resta que se te indican y colocando en el centro el resultado final.



Tema: polinomios

Producto de un monomio por un polinomio.

Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplo:

- Simplificar $-8x^2\left(9x^2+2x-3\right)$.

  Solución:

$$-8x^2\left(9x^2+2x-3\right)=-8x^2\left(9x^2\right)-8x^2\left(2x\right)-8x^2\left(-3\right)$$

$$=-72x^4-16x^3+24x^2.$$

  También lo podemos resolver en forma vertical:

$$\begin{array}{r} 9x^2+2x-3 \\ \times \qquad -8x^2 \\ \hline -72x^4-16x^3+24x^2. \end{array}$$

- Simplificar $4ab^4\left(-7a^3+2ab-\frac{3}{5}b^2+8\right)$.

$$4ab^4\left(-7a^3+2ab-\frac{3}{5}b^2+8\right)=4ab^4\left(-7a^3\right)+4ab^4\left(2ab\right)+4ab^4\left(-\frac{3}{5}b^2\right)+4ab^4\left(8\right)$$

$$=-28a^4b^4+8a^2b^5-\frac{12}{5}ab^6+32ab^4.$$

- Simplificar $3x^2y\left(5x+2y\right)-4x\left(x^2y-5\right)$.

$$3x^2y\left(5x+2y\right)-4x\left(x^2y-5\right)=15x^3y+6x^2y^2-4x^3y+20x$$

$$=\left(15-4\right)x^3y+6x^2y^2+20x$$

$$=11x^3y+6x^2y^2+20x.$$

Actividad

Unión de puntos

Resuelve los siguientes productos de monomios por polinomios y localiza los resultados en el recuadro de la página siguiente, anota en los círculos los números que tienen asociados, para que con ese orden traces líneas para formar un dibujo.

- 8 $2a(4-2a)=8a-4a^2$
- 38 $-5(6a^2-7)=-30a^2+35$
- ○ $(8-10a)3a=$
- ○ $4a^4b^5c(a^2c-5ab+7b^2)=$
- ○ $-10a^2b(2a+b-2)=$
- ○ $6a^2(5a^2b+7ab^2-5b^2)=$
- ○ $a(5a+b^2-1)=$
- ○ $-3a(a^2-ab^2)=$
- ○ $-a(b^2+5a+1)=$
- ○ $-\frac{3}{2}a(20a+10)=$
- ○ $-\frac{5}{2}ab\left(\frac{4}{5}a+ab+2\right)=$
- ○ $2a(4-2a)=$
- ○ $-5(6a^2-7)=$
- ○ $(8-10a)3a=$
- ○ $4a^4b^5c(a^2c-5ab+7b^2)=$
- ○ $-10a^2b(2a+b-2)=$
- ○ $6a^2(5a^2b+7ab^2-5b^2)=$
- ○ $a(5a+b^2-1)=$
- ○ $-3a(a^2-ab^2)=$
- ○ $-a(b^2+5a+1)=$
- ○ $-\frac{3}{2}a(20a+10)=$
- ○ $-\frac{5}{2}ab\left(\frac{4}{5}a+ab+2\right)=$

○ $$\begin{array}{r} a^3b+7ab-5 \\ \times \quad 8ab \\ \hline \end{array}$$

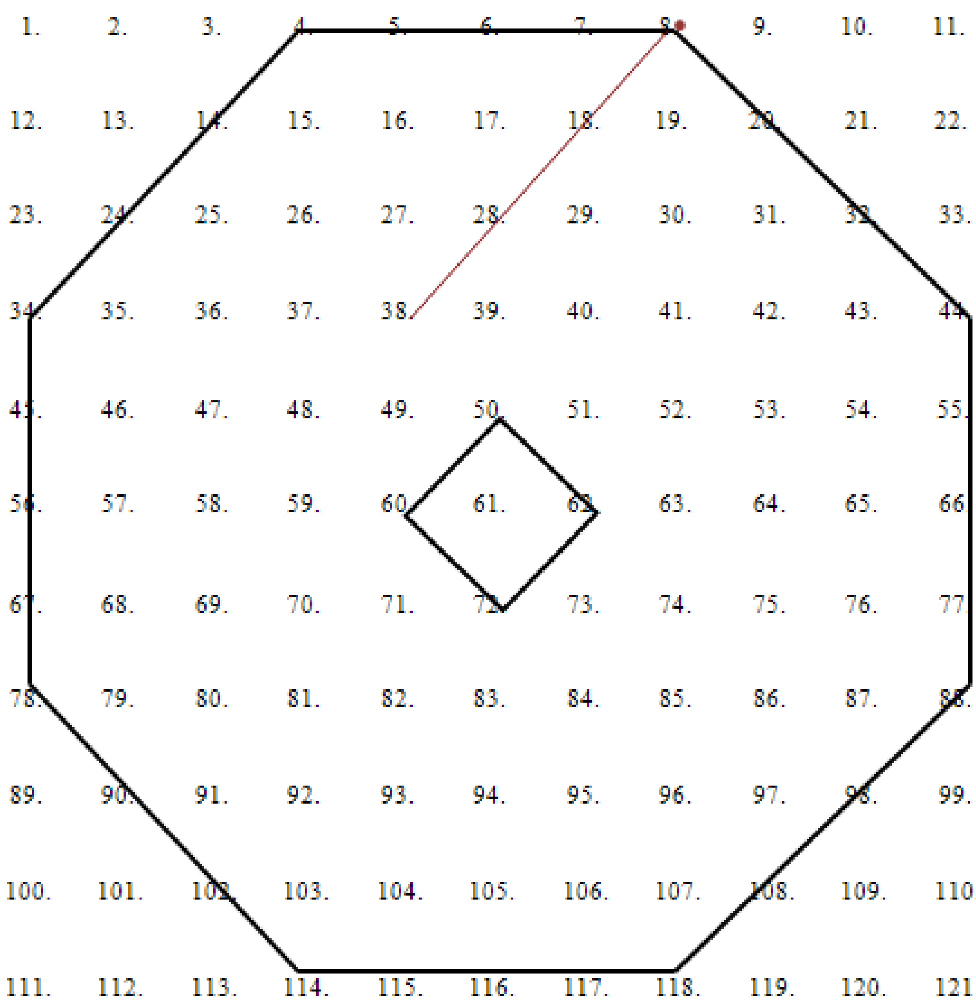
○ $$\begin{array}{r} 2a+b+2 \\ \times \quad 10a^2b \\ \hline \end{array}$$

○ $$\begin{array}{r} 5-8b^3+5c^2 \\ \times \quad 3a^5bc \\ \hline \end{array}$$

○ $$\begin{array}{r} 8-11b^3+8c^2 \\ \times \quad -3a^5bc \\ \hline \end{array}$$

○ $$\begin{array}{r} 8-4a \\ \times \quad a \\ \hline \end{array}$$

- $-4a^2-56a-15 \rightarrow$ 72
- $-4ac-16abc-8ab^4c \rightarrow$ 114
- $24a-30a^2 \rightarrow$ 50
- $15a^2b^2+6a^2b^5-3a^2b^2c \rightarrow$ 81
- $-4a^3b-22a^2b^2 \rightarrow$ 52
- $5a^2-a+ab^2 \rightarrow$ 34
- $\cancel{8a-4a^2 \rightarrow 8}$
- $15a^5bc-24a^5b^4c+15a^5bc^3 \rightarrow$ 44
- $-ab^2-5a^2-a \rightarrow$ 60
- $4a^6b^5c^2-20a^5b^6c+28a^4b^7c \rightarrow$ 40
- $-12a^3b+94a^2b^2-50b^2 \rightarrow$ 82
- $9a^3-4a^2-12ab \rightarrow$ 85
- $-30a^2-15a \rightarrow$ 48
- $30a^4b+42a^3b^2-30a^2b^2 \rightarrow$ 37
- $30a^2-28a-4 \rightarrow$ 84
- $-24a^5bc+33a^5b^4c-24a^5bc^3 \rightarrow$ 41
- $8a-4a^2 \rightarrow$ 8
- $8a^4b^2+56a^2b^2-40ab \rightarrow$ 62
- $-a^4-30a^2 \rightarrow$ 118
- $20a^3b+10a^2b^2+20a^2b \rightarrow$ 74
- $-20a^3b-10a^2b^2+20a^2b \rightarrow$ 4
- $-\cancel{30a^2+35 \rightarrow 38}$
- $-11a^4b^3c^2+14a^5b^4c^2+6a \rightarrow$ 88
- $-3a^3+3a^2b^2 \rightarrow$ 70
- $-2a^2b-\frac{5}{2}a^2b^2-5ab \rightarrow$ 78



Tema: polinomios

División de un polinomio entre un monomio.

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, y el resultado se representa de la siguiente manera:

Ejemplos:

- Calcular $6x^3+16x^2-4x$ entre $2x$

Solución:

$$\frac{6x^3+16x^2-4x}{2x}=\frac{6x^3}{2x}+\frac{16x^2}{2x}-\frac{4x}{2x}=3x^2+8x-2.$$

En estas divisiones el polinomio es el dividendo, el monomio es el divisor y el resultado es el cociente.

$$\text{Dividendo}\rightarrow\frac{3a^3-2a}{a}=\frac{3a^3}{a}-\frac{2a}{a}=3a^2-2\leftarrow\text{cociente}$$

Divisor

Ejemplo:

- Calcular $3xy^2+9x^2y^3-12x^3y^4$ entre $-xy^2$

$$\frac{3xy^2+9x^2y^3-12x^3y^4}{-xy^2}=\frac{3xy^2}{-xy^2}+\frac{9x^2y^3}{-xy^2}-\frac{12x^3y^4}{-xy^2}=-3-9xy+12x^2y^2$$

- Calcular $\left(\frac{5}{4}x^4y^2-\frac{7}{3}x^3y\right)\div\left(\frac{2}{3}xy\right)$.

$$\left(\frac{5}{4}x^4y^2-\frac{7}{3}x^3y\right)\div\left(\frac{2}{3}xy\right)=\frac{\frac{5}{4}x^4y^2}{\frac{2}{3}xy}-\frac{\frac{7}{3}x^3y}{\frac{2}{3}xy}$$

$$=\frac{15}{8}x^{4-1}y^{2-1}-\frac{7}{2}x^{3-1}y^{1-1}$$

$$=\frac{15}{8}x^3y-\frac{7}{2}x^2.$$

Actividad

Gato

Material: Tablero, 25 tarjetas con expresiones algebraicas, 13 fichas rojas, 13 fichas azules.

Jugadores: 2.

Objetivo: Formar una serie de tres fichas de un color, ya sea horizontal, vertical o diagonal.

Preparación: Se colocan las tarjetas boca abajo y cada jugador va tomando una por turno.

Juego: Los jugadores deben de simplificar la expresión algebraica de la tarjeta que toman y buscar su resultado en el tablero, colocando una ficha si es correcto el resultado.

El jugador que logre colocar tres de sus fichas en secuencia diagonal, vertical u horizontal, será el ganador.

$\frac{a^2-ab}{a}$	$\frac{3x^2y^3-5a^2x^2}{3x^2}$	$\frac{3a^2-5ab^2}{-2a}$
$\frac{x^3-4x^2+x}{x}$	$\frac{4x^8-10x^6-5x^4}{2x^3}$	$\frac{6m^3-8m^2n}{2m}$
$\frac{6a^8b^8-3a^6b^6}{3a^2b^2}$	$\frac{x^4-5x^3-10x^2}{-5x}$	$\frac{-4m^3n^4+10m^2n^3}{-2mn}$

$$\frac{12p^5q^3r^2 - 6p^3q^4r^3}{-3p^2q^3r}$$

$$\frac{-4x^5y^3z^2 + 64x^4y^2}{-4x^3y^2}$$

$$\frac{3x^2y^3 - 9x^2}{3x^2}$$

$$\frac{3a^2b^3 - 6ab^4 + 9}{9a^2b^3}$$

$$\frac{150x^3z^4 + 100x^4z^3 - 50x^2z^3}{-50x^2z^3}$$

$$\frac{200m^3n^2 - 300m}{25m}$$

$$\frac{8a^2 - 16ab^2}{-2ab}$$

$$\frac{a^2b^3 + 6ab^4 - 9a^2b^3}{3a^2b^3}$$

$$\frac{6m^3n^4 - 15m^2n^3}{-3mn}$$

$$\frac{6m^3 + 8m^2n}{2m}$$

$$\frac{10x^4 + 5x^3 - 20x^2}{-5x^2}$$

$$\frac{24p^8q^3r^2 - 6p^3q^4r^3}{-6p^5q^3r}$$

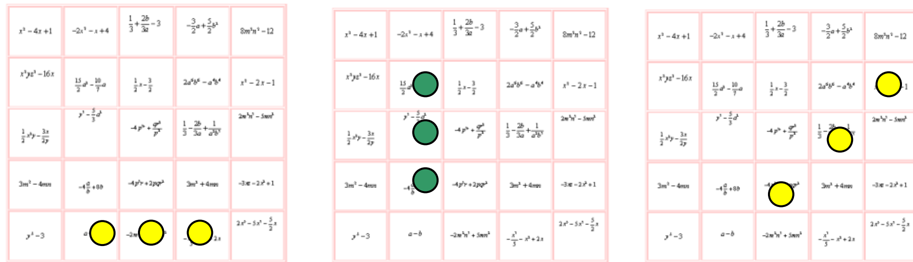
$$\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x\right) \div \left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\frac{7x^3 - 14x^2 - 7x}{7x}$$

$$\left(\frac{3}{2}a^3 - \frac{2}{7}a^2\right) \div \left(\frac{1}{5}a\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4y^3-\frac{3}{4}x^3y\right)\div\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)$$

Ejemplo:



x^2-4x+1	$-2x^2-x+4$	$\frac{1}{3}+\frac{2b}{a}-3$	$-\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}b^2$	$8m^2n^2-12$
x^2yz^2-16x	$\frac{15}{2}a^2-\frac{10}{7}a$	$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$	$2a^6b^6-a^4b^4$	x^2-2x-1
$\frac{1}{2}x^2y-\frac{3x}{2y}$	$y^3-\frac{5}{3}a^2$	$-4p^3r+\frac{qr^2}{p^2}$	$\frac{1}{3}-\frac{2b}{3a}+\frac{1}{a^2b^3}$	$2m^2n^3-5mn^2$
$3m^2-4mn$	$-4\frac{a}{b}+8b$	$-4p^3r+2pqr^2$	$3m^2+4mn$	$-3xz-2x^2+1$
y^3-3	$a-b$	$-2m^2n^3+5mn^2$	$-\frac{x^3}{5}+x^2+2x$	$2x^5-5x^3-\frac{5}{2}x$

Tema: polinomios

Producto polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término de un polinomio por el otro polinomio, teniendo en cuenta las leyes de los signos y reduciendo los términos semejantes.

Para facilitar las operaciones es conveniente escribir los polinomios en orden ya sea descendente o ascendiente con relación a alguna variable.

Ejemplo:

- Multiplicar $\left(-3a^2+8a-5\right)\left(\ 7a-4\right)$.

Solución:

$$\begin{array}{r} -3a^2+8a-5 \\ \times \quad 7a-4 \\ \hline -21a^3+56a^2-35a \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} -3a^2 & +8a & -5 & \\ \times & & 7a-4 & \\ \hline -21a^3 & +56a^2 & -35a & \\ & 12a^2 & -32a & +20 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} -3a^2 & +8a & -5 & \\ \times & & 7a-4 & \\ \hline -21a^3 & +56a^2 & -35a & \\ & 12a^2 & -32a & +20 \\ \hline -21a^3 & +68a^2 & -67a & +20. \end{array}$$

- Multiplicar $\left(4y^4-5y^3\right)\left(3y^2+8y\right)$.

$$\begin{array}{rrr} & 4y^4 & -5y^3 \\ \times & 3y^2 & +8y \\ \hline 12y^6 & -15y^5 & \\ & 32y^5 & -40y^4 \\ \hline 12y^6 & +17y^5 & -40y^4 \end{array}$$

- Multiplicar $\left(8m^2n-4n^2+2mn\right)\left(3mn+7m^2n-6n^2\right)$.

Solución:

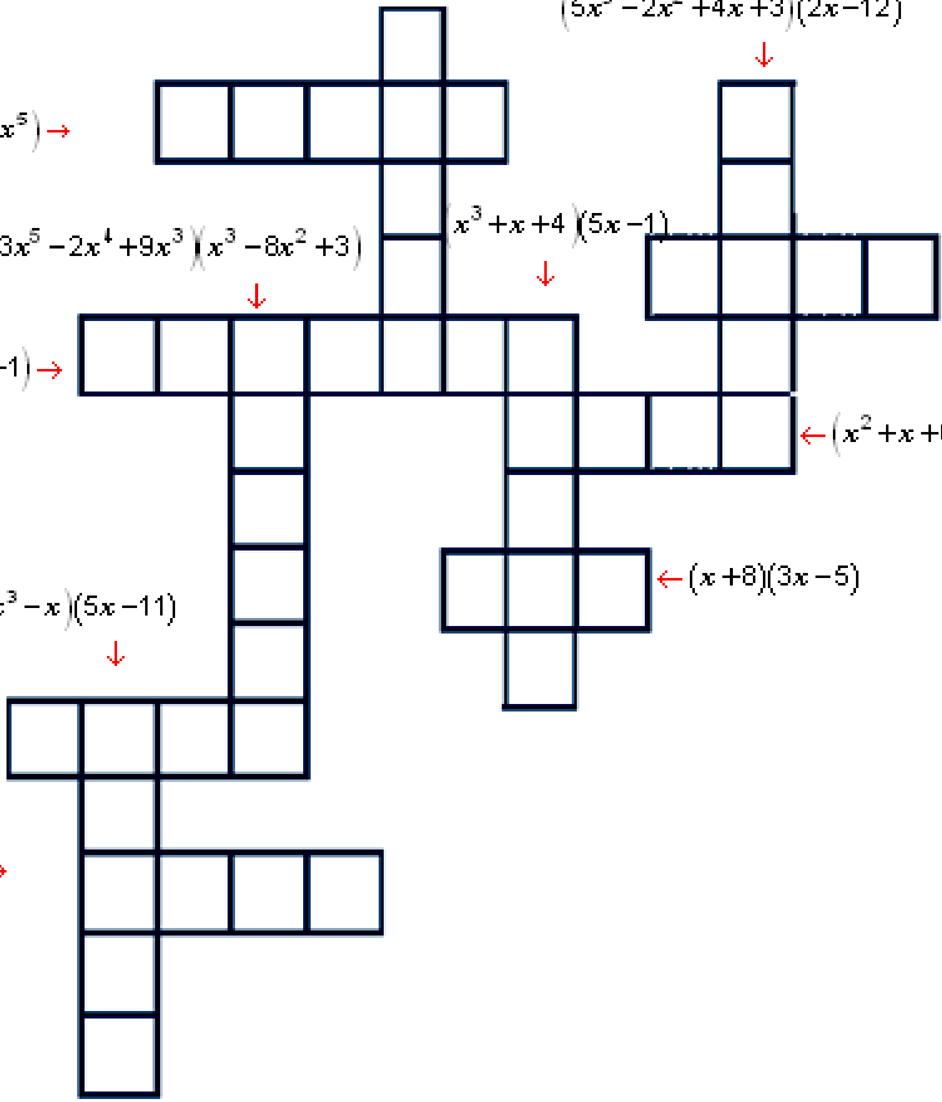
Ordenando en forma descendente con relación a m

$$\begin{array}{r} 8m^2n+2mn\ -4n^2 \\ \times \quad 7m^2n+3mn-6n^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & 8m^2n & +2mn & -4n^2 & \\ \times & 7m^2n & +3mn & +6n^2 & \\ \hline 56m^4n^2 & +14m^3n^2 & -28m^2n^3 & & \\ & 24m^3n^2 & & +6m^2n^2 & -12mn^3 \\ & & 48m^2n^3 & & +12mn^3 -24n^4 \\ \hline 56m^4n^2 & +38m^3n^2 & +20m^2n^3 & +6m^2n^2 & -24n^4. \end{array}$$

Actividad Crucigrama

Resuelve los siguientes productos de polinomios, ordénalos en forma descendente con respecto al exponente de la variable y escribe el resultado de cada uno donde se indica para resolver el crucigrama.



$(-x^5+2x^4-8x^3)(3x^5-9x^4-x^3)$ $\downarrow$

$(5x^3-2x^2+4x+3)(2x-12)$ $\downarrow$

$(-6x^6-5x^4-5x^3)(5x^6-8x^5) \rightarrow$

$(3x^5-2x^4+9x^3)(x^3-8x^2+3)$ $\downarrow$

$(x^3+x+4)(5x-1)$ $\downarrow$

$\leftarrow (9x^2-2x-11)(2x+4)$

$(x^7-8x^6+3x^5-5x^4)(x^3-1) \rightarrow$

$\leftarrow (x^2+x+6)(-x-6)$

$\leftarrow (x+8)(3x-5)$

$(x^4+8x^3-x)(5x-11)$ $\downarrow$

$(x^4+2x^3-3x^2)(7x^2-9x) \rightarrow$

$(44x^2-7x+9)(7-2x) \rightarrow$

Tema: polinomios

División de polinomios

$$\begin{array}{r|l} & \text{cociente} \\ \hline \text{divisor} & \text{dividendo} \\ & \text{residuo} \end{array}$$

Reglas para dividir dos polinomios.

- Ordenar los dos polinomios de forma descendente respecto al grado de la variable.
- Para obtener el primer término del cociente, dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor
- Multiplicamos este primer término del cociente por todo el divisor y se resta algebraicamente del dividendo.
- El residuo obtenido se trata como un nuevo dividendo y se divide entre el primer término del divisor, con lo que se obtiene el segundo término del cociente.
- Se procede de manera similar hasta obtener un residuo cero o de grado menor que el del divisor.
- Puedes comprobar el resultado multiplicando el cociente x el divisor + el residuo = dividendo.

Ejemplo:

Dividir $4x+3x^2-8$ entre $x-2$.

1.- Ordenamos los polinomios en forma descendente con respecto a *x:*

$$x-2\overline{\left)3x^2+4x-8\right.}$$

2.- Dividimos $3x^2 \div x$, obteniendo como resultado **$3x$**:

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x-2 & 3x^2+4x-8 \end{array}$$

3.- Multiplicamos $(3x)(x-2)$ y lo restamos al dividendo, $(3x)(x-2)=3x^2-6x$, como lo tenemos que restar cambiamos los signos obteniendo $-3x^2+6x$:

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x-2 & \cancel{3x^2}+4x-8 \\ & \underline{-3x^2+6x} \\ & 0 \quad +10x-8 \end{array}$$

4.- Se divide el primer término del residuo el cual es $10x$ entre el primer término del divisor x, $10x \div x = 10$ este será el segundo término del cociente.

$$\begin{array}{r|l} & 3x+10 \\ \hline x-2 & \cancel{3x^2}+4x-8 \\ & \underline{-3x^2+6x} \\ & 0 \quad +10x-8 \end{array}$$

5.- Multiplicamos $10(x-2)=10x-20$ y lo restamos:

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x+10 \\
x-2 & 3x^2+4x-8 \\
 & -3x^2+6x \\
\hline
 & 0\quad +10x-8 \\
 & -10x+20 \\
\hline
 & 0\quad +12
\end{array}$$

El residuo es de menor grado que el divisor (x-2); por lo que el proceso termina.

$$\therefore \left(4x+3x^2-8\right) \div (x-2) = 3x+10+\frac{12}{x-2}.$$

Actividad. Crucigrama

Completa el siguiente crucigrama resolviendo las divisiones de polinomios que se indican.

A	B				C		
			D				
		E				H	
		J		F			I
K				G			
			L			M	

VERTICALES

A) $\left(13x^2+x^3+43x+24\right)\div(x+8)=$

B) $\left(-x^3+13x^2-46x+30\right)\div\left(x^2-8x+6\right)=$

C) $\left(3y^5+27y^3+4y^2+36\right)\div\left(y^2+9\right)=$

E) $\left(x^6-x^5-5x^4+2x^3\right)\div(x+2)=$

F) $\left(11x^2-2x^3-5x-30\right)\div(x-3)=$

H) $\left(x^6-9x^5+8x^4\right)\div(x-8)=$

I) $\left(x^4-4x^3-5x^2+x-5\right)\div(x-5)=$

K) $\left(x^7-3x^5+2x^3-6x\right)\div\left(x^2-3\right)=$

HORIZONTALES

A) $\left(2x^3-4x-2\right)\div(2x+2)=$

C) $\left(3y^5+5y^2-12y+10\right)\div\left(y^2+2\right)=$

D) $\left(18y^3-40y^2-34y-24\right)\div(2y-6)=$

J) $\left(-3x^5+8x^4-7x^3+2x^2\right)\div(x-1)=$

K) $\left(x^6+3x^5-27x^4+7x^3\right)\div(x+7)=$

G) $\left(5x^3-x^2+20x-4\right)\div\left(x^2+4\right)=$

L) $\left(m^3+10m^2-5m-50\right)\div\left(m^2-5\right)=$

M) $\left(3a^2+2a-1\right)\div(3a-1)=$

CAPÍTULO 5

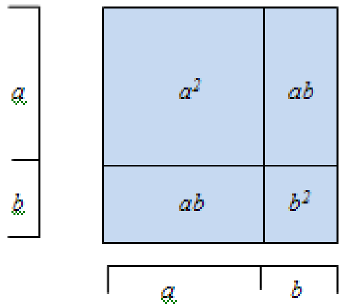
PRODUCTOS NOTABLES

Tema: Productos notables
Binomios al cuadrado

Productos notables: Es el nombre que reciben aquellos productos que pueden calcularse a través de fórmulas establecidas.

Cuadrado de una suma $\quad a+b\ ^{2}$

Este binomio al cuadrado lo podemos representar geométricamente como el área de un cuadrado cuya longitud de sus lados es de $a + b$.



Para calcular el área del cuadrado, multiplicamos las longitudes de sus lados, es decir, $a+b \quad a+b$, o también podemos sumar las áreas de las figuras internas:

$$a+b \quad a+b \ = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$$

Al realizar directamente la multiplicación obtenemos:

$$\begin{array}{r} a \ + b \\ \times \ a \ + b \\ \hline a^2 \ + ab \quad\quad \\ ab \ + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Al elevar un binomio al cuadrado obtenemos un trinomio formado por:

$\underbrace{\text{El cuadrado del primer término}}_{a^2}$ $\underbrace{\textbf{\textit{más}} \text{ el doble producto del primero por el segundo,}}_{+2ab}$ $\underbrace{\text{más el cuadrado del segundo término.}}_{+b^2}$

Ejemplos:

- Desarrollar

$$\begin{array}{cc} 5x + & 4\ ^{2}. \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

primer término segundo término

$$5x+4\ ^2 = \ 5x\ ^2 + 2\ 5x \quad 4 \ + \ 4\ ^2$$
$$= 25x^2+40x+16.$$

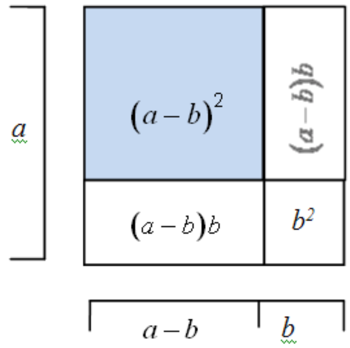
- Desarrollar $\quad 2a^2b+b^3\ ^{2}$.

$$2a^2b+b^3\ ^2 = \ 2a^2b\ ^2 + 2\ a^2b \quad b^3 \ + \ b^3\ ^2$$
$$= 4a^4b^2+2a^2b^4+b^6.$$

Tema: Productos notables
Binomios al cuadrado

Cuadrado de una diferencia $(a-b)^2$

Geométricamente lo podemos representar como el área de un cuadrado cuyos lados miden $a-b$.



La obtenemos calculando el área del cuadrado de lado a menos las áreas de los rectángulos cuyos lados son $(a-b)$ y b menos el área del cuadrado de lado b.

Es decir,

$$a^2-2(a-b)b-b^2=a^2-2ab+2b^2-b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

Al realizar directamente la multiplicación obtenemos:

$$\begin{array}{r} a \; - b \\ \times\; a \; - b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

En este caso obtenemos un trinomio formado por:

$\underbrace{\text{El cuadrado del primer término,}}_{a^2}$ $\underbrace{\textbf{\textit{menos}} \text{ el doble producto del primero por el segundo,}}_{-2ab}$ $\underbrace{\text{más el cuadrado del segundo término.}}_{+b^2}$

Ejemplos:

- Desarrolla $(2y-5)^2$.

$$(2y-5)^2=(2y)^2-2(2y)(5)+(5)^2$$
$$=4y^2-20y+25.$$

- Desarrolla $(8a^3b-3b^3)^2$.

$$(8a^3b-3b^3)^2=(8a^3b)^2-2(8a^3b)(3b^3)+(3b^3)^2$$
$$=64a^6b^2-48a^3b^4+9b^6.$$

Fórmulas para resolver binomios al cuadrado.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Actividad.

Memorama de binomios al cuadrado

Material: 30 tarjetas, 15 rojas con binomios al cuadrado y 15 azules con las expresiones correspondientes desarrolladas (trinomio).
Objetivo: Encontrar la mayor cantidad de pares de tarjetas que coincidan, es decir, un binomio al cuadrado (tarjetas rojas), con su expresión desarrollada (tarjetas azules).
Jugadores: de 2 a 4
Preparación: Recorta y acomoda las tarjetas boca abajo en una superficie plana.
Forma 6 filas de 5 tarjetas cada una.
Los jugadores se turnan, dando vueltas a dos tarjetas, primero una roja y luego una azul. Se deberá dar vuelta por completo para que todos los jugadores puedan verlas y dar tiempo para que desarrollen el binomio al cuadrado.
El jugador que encuentre un par se lo queda y sigue el turno de otro jugador.
El juego termina hasta que hayan encontrado todos los pares.
El ganador será el jugador con más pares de tarjetas.

Dimensiones reales de tarjetas: 6 cm x 5 cm.

$9+x \;^{2}$	$\left(\frac{9}{4}x-2\right)^{2}$	$x-9 \;^{2}$	$6x+4 \;^{2}$
$-\;6x-4 \;^{2}$	$\left(x-\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\left(\frac{x}{3}-1\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}\right)^{2}$
$-8+5y \;^{2}$	$5y+8 \;^{2}$	$5y-4 \;^{2}$	$8x-4 \;^{2}$

$2x^2 - 5y^2$

$3x^3y + 5y^2$

$3xy - 5y^2$

$x^2 + 18x + 81$

$9x^2y^2 - 30xy^2 + 25y^2$

$\frac{81}{16}x^2 - 9x + 4$

$9x^6y^2 + 30x^3y^2 + 25y^2$

$x^2 - 18x + 81$

$4x^4 - 20x^2y + 25y^2$

$36x^2 + 48x + 16$

$-36x^2 + 48x - 16$

$64x^2 - 64x + 16$

$\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$

$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

$25y^2 - 40y + 16$

$\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{4}{9}$

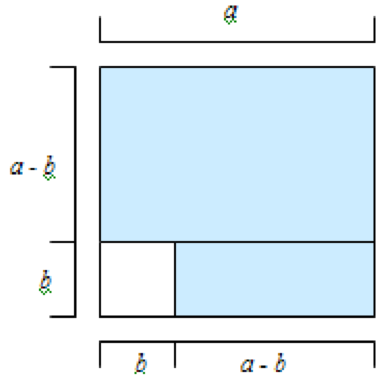
$25y^2 - 80y + 64$

$25y^2 + 80y + 64$

Tema: Productos notables
Binomios conjugados

Los binomios conjugados los podemos definir como el producto de una suma por una diferencia: $a+b \quad a-b$.

Geométricamente lo podemos representar como el área de la parte sombreada de la siguiente figura:



Para calcular esta área sombreada, podemos sumar el área del rectángulo con lados $a-b$ y a con el área del rectángulo de lados $a-b$ y b.

Obteniendo: $a \;\; a-b \;+ b \;\; a-b$. Factorizando resulta $a+b \quad a-b$. Otra forma de calcular esta área es el área del cuadrado grande, menos el área del cuadrado chico, es decir: a^2-b^2.

Al realizar directamente la multiplicación obtenemos:

$$\begin{array}{rrr} & a & +\,b \\ \times & a & -\,b \\ \hline & a^2 & +\,ab \\ & & -\,ab \quad -b^2 \\ \hline & a^2 & \quad -b^2. \end{array}$$

Por lo tanto, podemos escribir: $\boxed{a+b \quad a-b \;=a^2-b^2.}$

Ejemplos:

- Desarrollar $3a+4 \quad 3a-4$.

$$\begin{aligned} 3a+4 \quad 3a-4 \;&=\; 3a^{\;2} -\; 4^{\;2} \\ &= 9a^2-16 \end{aligned}$$

Desarrollar $\left(-3a^2+\dfrac{3}{7}\right)\left(-3a^2-\dfrac{3}{7}\right)$.

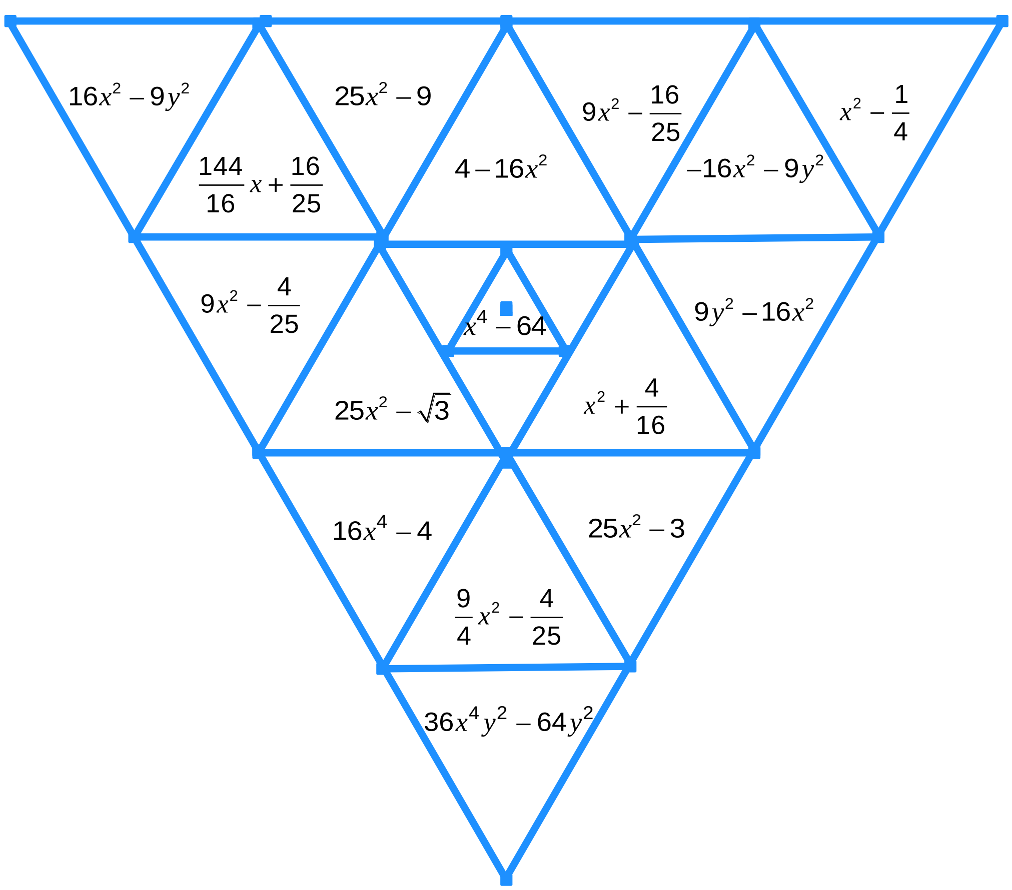
$$\begin{aligned} \left(-3a^2+\frac{3}{7}\right)\left(-3a^2-\frac{3}{7}\right) &= \; -3a^2 \;{}^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 \\ &= 9a^4-\frac{9}{49}. \end{aligned}$$

Actividad

Colorea el triángulo

Desarrolla los siguientes binomios conjugados, localiza los resultados en la figura de abajo y colorea del color que se indica.

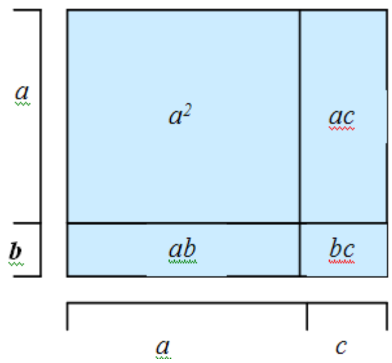
- $x^2+8 \quad x^2-8 \ =$ rojo
- $\left(x+\frac{2}{4}\right)\left(x-\frac{2}{4}\right)=$ amarillo
- $5x-\sqrt{3} \quad 5x+\sqrt{3} \ =$ amarillo
- $4x^2-2 \quad 4x^2+2 \ =$ amarillo
- $5x+3 \quad 5x-3 \ =$ verde
- $\left(3x+\frac{2}{5}\right)\left(3x-\frac{2}{5}\right)=$ verde
- $\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{5}\right)=$ amarillo
- $\left(\frac{12}{4}x-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{4}x+\frac{4}{5}\right)=$ verde
- $6x^2y+8y \quad 6x^2y-8y \ =$ verde
- $-4x+3y \quad 4x+3y \ =$ verde
- $4x-3y \quad 4x+3y \ =$ amarillo
- $2+4x \quad 2-4x \ =$ amarillo



Tema: Productos notables

Binomios con término común

Los binomios con término común se definen como el producto de $(a+b)(a+c)$.
Geométricamente los podemos representar como el área de la siguiente figura:



Para calcular el área del cuadrado, multiplicamos las longitudes de sus lados, es decir, $(a+b)(a+c)$, o también podemos sumar las áreas de las figuras internas.

Es decir: $$(a+b)(a+c)=a^2+ab+ac+bc=a^2+(b+c)a+bc$$

Al realizar directamente la multiplicación obtenemos:

$$\begin{array}{r} a \ +b \\ \times\ a \ +c \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ +ac+bc \\ \hline a^2+ab+ac+bc=a^2+(b+c)a+bc. \end{array}$$

Por lo tanto podemos escribir: $$\boxed{(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc.}$$

Ejemplos:

- Desarrollar $(a+4)(a+9)$.
$$\begin{aligned}(a+4)(a+9)&=a^2+(4+9)a+(4)(9)\\&=a^2+13a+36.\end{aligned}$$
- Desarrollar $(9x-9)(9x+5)$.
$$\begin{aligned}(9x-9)(9x+5)&=(9x)^2+9x(-9+5)+(-9)(5)\\&=81x^2-36x-45\end{aligned}$$
- Desarrollar $\left(6m-\frac{7}{5}\right)\left(6m-\frac{2}{9}\right)$.
$$\begin{aligned}\left(6m-\frac{7}{5}\right)\left(6m-\frac{2}{9}\right)&=(6m)^2+6m\left(-\frac{7}{5}+\left(-\frac{2}{9}\right)\right)+\left(-\frac{7}{5}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)\\&=36m^2+6m\left(-\frac{73}{45}\right)+\frac{14}{45}\\&=36m^2-\frac{146}{15}m+\frac{14}{45}.\end{aligned}$$

Actividad

Encuentra el código

Relaciona las dos columnas, anotando en el paréntesis el número que corresponda a la respuesta correcta.

1.	$x+8 \quad x-3$	L	$9x^2 - x - \frac{2}{3}$
2.	$2x+6 \quad 2x+3$	O	$x^2 - 5x - 24$
3.	$x+7 \quad x+8$	S	$4x^2 - 14x + 12$
4.	$x+9 \quad x+3$	T	$9x^2 + 3x + \frac{2}{9}$
5.	$x+3 \quad x-8$	M	$x^2 + 5x - 24$
6.	$2x-4 \quad 2x-3$	A	$x^2 - 12x - 108$
7.	$\left(3x+\frac{1}{3}\right)\left(3x+\frac{2}{3}\right)$	E	$x^2 + 15x + 56$
8.	$\left(3x-\frac{5}{4}\right)\left(3x+\frac{9}{4}\right)$	D	$x^2 + 12x + 27$
9.	$\left(3x+\frac{2}{3}\right) \quad 3x-1$	I	$9x^2 - 3x - \frac{45}{16}$
10.	$(x-18)(x+6)$	H ( )	$4x^2 + 18x + 18$

¿Sabes quién fue el primer científico y matemático en asegurar que la luna brillaba por el reflejo del sol y también considerado el primero de los siete sabios griegos?

Escribe sobre las líneas del código la letra que corresponde a la respuesta obtenida en el paréntesis y lo sabrás.

CODIGO

___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___
7	2	10	9	3	6	4	3	1	8	9	3	7	5

Tema: Productos notables
Binomios al cubo

Los podemos dividir en dos casos:

$$(a+b)^3 \rightarrow \text{El cubo de una suma}$$

$$(a-b)^3 \rightarrow \text{El cubo de una diferencia.}$$

Desarrollando el cubo de una suma:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Para obtener el desarrollo del cubo de una diferencia, podemos utilizar el resultado anterior:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3\\ &= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir las siguientes identidades:

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}}$$

Ejemplos:

- Desarrolla $(5a+4b)^3$.

  Utilizando la primera identidad tenemos:

  $$\begin{aligned}(5a+4b)^3 &= (5a)^3+3(5a)^2(4b)+3(5a)(4b)^2+(4b)^3\\ &=125a^3+300a^2b+240ab^2+64b^3.\end{aligned}$$

- Desarrolla $(9x-7y)^3$.

  Utilizando la segunda identidad:

  $$\begin{aligned}(9x-7y)^3 &= (9x)^3-3(9x)^2(7y)+3(9x)(7y)^2-(7y)^3\\ &=729x^3-1701x^2y+1323xy^2-343y^3.\end{aligned}$$

- Desarrolla $\left(\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right)^3$.

  $$\begin{aligned}\left(\frac{m}{4}+\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(\frac{m}{4}\right)^3+3\left(\frac{m}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{m}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\\ &=\frac{m^3}{64}+\frac{3m^2}{32}+\frac{3m}{16}+\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Actividad.

Sopa de letras

Desarrolla los siguientes binomios al cubo y encierra los resultados en la sopa de letras y números.

- $2m+1\ ^{3} = 8m^{3}+12m^{2}+6m+1$
- $5y-2\ ^{3} =$
- $4n+3\ ^{3} =$
- $n-4\ ^{3} =$
- $2y-8\ ^{3} =$
- $8n+9\ ^{3} =$
- $1+n\ ^{3} =$
- $3y+7\ ^{3} =$
- $5a-8\ ^{3} =$
- $6n+9\ ^{3} =$

$8m^3$	$8m^3$	$+1944n$	-8	$-64n^3$	$-144n^2$	$+108$	$+9$
$512n^3$	$+12m^2$	$+60y$	$+1728n^2$	1	$+3n$	$+3n^2$	$+n^3$
$+729$	$-150y^2$	$+6m$	$64n^3$	$+144n^2$	$+108n$	$+27$	$-12n^2$
$125y^3$	$8y^3$	$6y^3$	$+1$	$125a^3$	n^3	$-12n$	$+48n$
$-60a^2$	$+21$	$-96y^2$	$+343$	$-600a^2$	$+12n$	$512n^3$	-64
$+96a$	$+63y$	$+441y$	$+384y$	$+960a$	$-48n$	$+1728n^2$	$+n^2$
$+512$	$+189y^2$	$+24$	$+54n^2$	-512	$+64$	$+1944n$	$+n$
$27y^3$	$9y^3$	$18n^3$	$216n^3$	$+972n^2$	$+1458n$	$+729$	$+3$

CAPÍTULO 6

FACTORIZACIÓN

Tema: Factorización
Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como el producto de polinomios y de grado menor o igual que el polinomio original.

Para lo cual primero explicaremos cómo calcular el *máximo común divisor* (MCD) de monomios, el cual consiste en encontrar el MCD de los coeficientes y multiplicarlo por las mínimas potencias de las variables que aparecen en los polinomios.

Ejemplos:

- Calcular el MCD de $15a^2b^4$ y $12a^3b$.

  Encontramos el MCD de los coeficientes 15 y 12 es **3** (es el número más grande que divide exactamente a 15 y a 12).

  Buscamos las variables comunes en ambos polinomios en este caso son a y b.

  Las mínimas potencias de a^2b^4 y a^3b son a^2 y b.

  $\therefore$ El MCD de $15a^2b^4$ y $12a^3b$ es $3a^2b$.

- Calcular el MCD de $32x^2y^3z$, $40x^5y^2$, $56y^4z^3$.

  Encontramos el MCD de los coeficientes 32,40 y 56 es **8.**

  Buscamos las variables comunes en los polinomios en este caso es y

  La mínima potencia de y^3, y^2, y^4 es y^2.

  $\therefore$ El MCD de $32x^2y^3z$, $40x^5y^2$, $56y^4z^3$ es $8y^2$.

Para factorizar un polinomio tenemos que calcular el MCD de sus términos:

Ejemplos:

- Factorizar el polinomio: $56a^4b^5+14a^3b^5c^2-77a^3b^3$.

  Calculando el MCD de $56a^4b^5$, $14a^3b^5c^2$ y $77a^3b^3$ obtenemos $7a^3b^3$.

  Entonces podemos escribir $56a^4b^5+14a^3b^5c^2-77a^3b^3 = 7a^3b^3\ \ 8ab^2+2b^2c^2-11$.

- Factorizar el polinomio: $36x^4y^5z^2-72y^3z+12x^3y^2z^3+48x^3y^2z^4$.

  Calculando el MCD de $36x^4y^5z^2, 72y^3z, 12x^3y^2z^3$ y $48x^3y^2z^4$ obtenemos $12y^2z$

  Entonces podemos escribir:

  $36x^4y^5z^2-72y^3z+12x^3y^2z^3+48x^3y^2z^4 = 12y^2z\ \ 3x^4y^3z-6y+x^3z^2+4x^3z^3$.

Actividad

Encontrar parejas

Recorta las piezas y une cada polinomio (piezas en color azul) con su factorización (piezas en color rosa) correspondiente.

$9a^3 + 6a^2 - 12a$

$3a^3 - 15a^2 - 12$

$x^4 - 16x^2 + 4x$

$21a^5b^2 - 35a^4b^6 - 49a^3b^3$

$6a^2 + 12a - 18$

$4x^4 - 16x^3 + 16x^2$

$56a^5b^3 - 16a^4b^2 + 72a^3b$

$3a^2b - 5a^2b^4 - 7ab$

$35a^3b^2 + 10a^2b^3 + 45a^5b^2$

$14a^3b + 4ab^2 + 18a^2b^3$

$4x^2(x^2 - 4x + 4)$

$3a(3a^2 + 2a - 4)$

$6(a^2 + 2a - 3)$

$3(a^3 - 5a^2 - 4)$

$x(x^3 - 16x + 4)$

$7a^3b^2(3a^2 - 5ab^4 - 7b)$

$8a^3b(7a^2b^2 - 2ab + 9)$

$2ab(7a^2 + 2b + 9ab^2)$

$ab(3a - 5ab^3 - 7)$

$5a^2b^2(7a + 2b + 9a^3)$

Tema: Factorización
Factorización por agrupación

Para este tipo de factorización es importante recordar la propiedad distributiva: $ac+bc=(a+b)c$, donde a,b y c pueden representar cualesquiera expresiones algebraicas.

Y c lo identificamos como el término común en el polinomio.

Ejemplos:

- Factorizar $x(m+5)-y(m+5)$.

  Localizamos el término común: $(m+5)$

  Aplicando la propiedad distributiva tenemos: $x(m+5)-y(m+5)=(x-y)(m+5)$.

- Factorizar $am-an+bm-bn$.

  Localizamos el término común: en este caso, el polinomio no tiene ningún término común, entonces agrupamos los términos que tienen factores comunes:

$$\begin{aligned} am-an+bm-bn &= (am-an)+(bm-bn) \\ &= a(m-n)+b(m-n) \end{aligned}$$

  Aplicando la propiedad distributiva tenemos: $a(m-n)+b(m-n)=(a+b)(m-n)$

$$\therefore\ am-an+bm-bn=(a+b)(m-n).$$

- Factorizar $9a(b^4-8)+7b^2(8-b^4)$.

  Localizamos el término común: como $(8-b^4)$ y (b^4-8) son opuestos, necesitamos cambiar los signos de alguno de ellos para poder utilizarlos como término común, para lograr esto factorizamos -1 en uno de ellos.

$$\begin{aligned} 9a(b^4-8)+7b^2(8-b^4) &= 9a(b^4-8)+(-1)7b^2(-8+b^4) \\ &= 9a(b^4-8)-7b^2(b^4-8) \end{aligned}$$

  Aplicando la propiedad distributiva tenemos: $9a(b^4-8)-7b^2(b^4-8)=(9a-7b^2)(b^4-8)$

$$\therefore 9a(b^4-8)+7b^2(8-b^4)=(9a-7b^2)(b^4-8).$$

- Factorizar $5a^2-3ax+10a-6x$.

  Localizamos el término común: en este caso, el polinomio no tiene ningún término común, entonces agrupamos los términos que tienen factores comunes:

$$5a^2 - 3ax + 10a - 6x = \overbrace{\left(5a^2 + 10a\right)}^{\substack{\text{Factor común } a \\ \text{y divisibilidad} \div 5}} + \overbrace{\left(-3ax - 6x\right)}^{\substack{\text{Factor común } x \\ \text{y divisibilidad} \div 3}}$$

$$= 5a\left(a+2\right) - 3x\left(a+2\right)$$

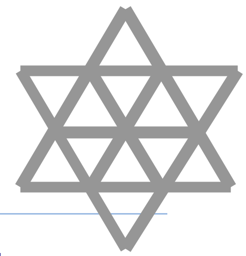
Aplicando la propiedad distributiva tenemos: $5a\left(a+2\right) - 3x\left(a+2\right) = \left(5a-3x\right)\left(a+2\right)$

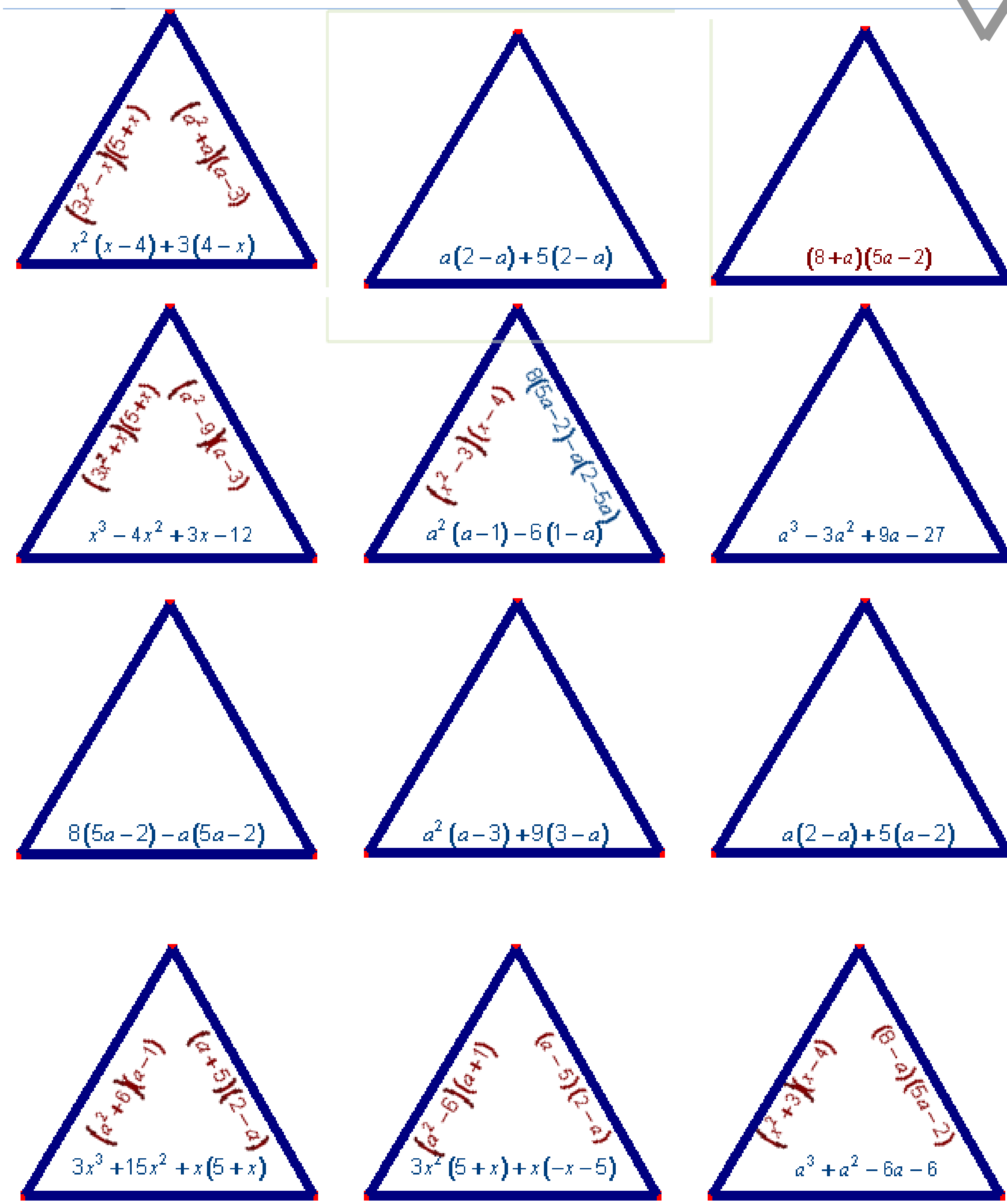
$$\therefore\ 5a^2 - 3ax + 10a - 6x = \left(5a - 3x\right)\left(a+2\right).$$

Actividad.

Rompecabezas

Recorta las siguientes piezas y arma el rompecabezas, factorizando los polinomios que están de color azul, para ir uniéndolos con sus resultados (color rojo).





Tema: Factorización

Factorización de trinomios: $x^2 + bx + c$

Recordando los productos notables, podemos ver que el producto de binomios con término común: $x+b \quad x+c$ es igual a un trinomio de la forma, $x^2 + x \;\; b+c \;\; + bc$.

Utilizando lo anterior podemos factorizar los siguientes trinomios.

Ejemplos:

- Factorizar el trinomio $x^2 + 12x + 35$.

Para expresarlo como el producto de dos binomios $x^2 + 12x + 35 = \;\; x+b \quad x+c$, tenemos que encontrar dos números b y c tales que su producto sea 35 y la suma de ellos sea 12. Como ambas cantidades son positivas, los números que buscamos tienen que ser positivos.

Estos números son 7 y 5, dado que (7) (5) = 35 y 7+5 = 12.

Entonces podemos escribir $x^2 + 12x + 35 = \;\; x+7 \quad x+5$.

- Factorizar el trinomio $x^2 - 7x + 12$.

Lo escribimos como producto de dos binomios $x^2 - 7x + 12 = \;\; x+b \quad x+c$

Su producto debe ser 12

Su suma debe ser -7

Como el producto es positivo y la suma es negativa, ambos números buscados deben de ser negativos.

Los números buscados son -3 y -4, dado que (-3) (-4) = 12 y (-3) + (-4) = -7.

Entonces podemos escribir $x^2 - 7x + 12 = \;\; x-3 \quad x-4$.

- Factorizar el trinomio $x^2 + 4x - 32$.

Lo escribimos como producto de dos binomios $x^2 + 4x - 32 = \;\; x+b \quad x+c$

Su producto debe ser -32

Su suma debe ser +4

Como el producto es negativo y la suma es positiva, los números buscados deben de tener signos contrarios, y como +4 es positivo, el número positivo debe de tener el mayor valor absoluto .

Los números buscados son +8 y -4, dado que (8) (-4) = -32 y (8) + (-4) = +4.

Entonces podemos escribir $x^2 + 4x - 32 = \;\; x+8 \quad x-4$.

Diferencia de cuadrados

Recordando el producto de binomios conjugados, nos da como resultado una diferencia de cuadrados: $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

Entonces para factorizar una diferencia de cuadrados nos debe de dar como resultado el producto de binomios conjugados.

Ejemplos:

- Factorizar $9y^2-25$.

Verificamos que sea una diferencia, si es así, reconocemos que $9y^2$ y 25 son cuadrados, es decir, que los podemos escribir:

$$9y^2=(3y)^2$$

$$25=(5)^2$$

Entonces $9y^2-25=(3y+5)(3y-5)$.

Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Al desarrollar el binomio al cuadrado $(x+b)^2$ da como resultado $x^2+2bx+b^2$, a este trinomio lo llamamos trinomio cuadrado perfecto.

Entonces al factorizar un trinomio cuadrado perfecto nos da como resultado un binomio al cuadrado.

Ejemplo:

- Factorizar $x^2-8x+16$.

  Utilizando el método anterior:

  Lo escribimos como producto de dos binomios $x^2-8x+16=(x+a)(x+b)$

  Su producto debe ser 16.

  Su suma debe ser -8.

  Los números buscados son -4 y -4, dado que (-4) (-4) = 16 y (-4) + (-4) = -8.

  Entonces podemos escribir $x^2-8x+16=(x-4)(x-4)=(x-4)^2$.

Otra forma de factorizarlo es la siguiente; en primer lugar identificar si es un trinomio cuadrado perfecto:

Ejemplo:

- Determinar si $x^2+20x+100$ es un trinomio cuadrado perfecto, si es así factorizarlo.

  Para que este trinomio sea cuadrado perfecto se tiene que expresar como:

$$x^2+20x+100=x^2+2bx+b^2$$

  donde b es un número real.

  En este caso b^2=100=(10)^2, entonces b puede ser 10.

  Verificamos si 2b = 20 , 2(10) = 20.

  Entonces comprobamos que este trinomio si es un cuadrado perfecto y lo podemos factorizar como:

$$x^2+20x+100=(x+b)^2= x+10^{\ 2}$$

- Determinar si x^2-6x+9 es un trinomio cuadrado perfecto, si es así factorizarlo:

  Para que este trinomio sea cuadrado perfecto se tiene que expresar como:

$$x^2-6x+9=x^2+2bx+b^2$$

  donde b es un número real.

  En este caso b^2 = 9 = (3)^2, entonces b puede ser 3.

  Verificamos si 2b = 6 , 2(3) = 6.

  Entonces comprobamos que este trinomio si es un cuadrado perfecto y lo podemos factorizar como: $x^2-6x+9=(x-b)^2= x-3^{\ 2}$.

Actividad

Dominó

Material: Un dado, 28 fichas rectangulares.

Cada ficha está dividida en dos espacios del mismo tamaño, en cada uno de los cuales aparece un producto notable o su desarrollo.

Jugadores: 2, 3, 4 o bien por parejas.

Preparación: Todas las fichas se ponen boca abajo y se revuelven. Cada jugador recibe 7 fichas. Si en la partida hay menos de 4 jugadores las fichas restantes se guardan en el “pozo”, es decir, se apartan en un montón boca abajo.

Desarrollo del juego: Inicia la ronda el jugador que al lanzar un dado saque el número más grande. A partir de ese momento los jugadores realizaran su jugada, por turnos, siguiendo el orden inverso a las manecillas del reloj.

En su turno, cada jugador debe colocar una de sus fichas en uno de los dos extremos abiertos, de tal forma que el producto notable de una ficha coincida con su desarrollo en otra ficha. Los dobles o “mulas” se colocan en forma transversal para facilitar su localización.

Una vez que el jugador ha colocado la ficha en su lugar, su turno termina y pasa al siguiente jugador.

Si un jugador no puede colocar una sus fichas debe “robar” una nueva pieza del pozo (si quedan) o “pasar” el turno al siguiente jugador.

Ganador: La ronda continúa con los jugadores colocando sus fichas, el juego termina cuando un jugador coloca su última ficha en la mesa, declarándose ganador.

$(x+5)^2$	x^2-49	$x^2+10x+25$	$x^2+10x+16$	$y^2-12y+36$
$(x+7)(x-7)$	$(x+8)(x+2)$	$(y-6)^2$	$(2y+6)(2y-6)$	$(3x+5)(3x-5)$

$4y^2-36$	$9x^2-25$	$(x+9)(x-9)$	$x^2+6x-16$	x^2+6x+9
$(x+9)^2$	$(x+8)(x-2)$	$x^2-8x+16$	$(x+3)^2$	$(x-10)(x+10)$

$x^2 - 100$	$x^2 - 9x + 14$	$(x-1)(x-1)$	$x^2 + 18x + 81$	$x^2 - 1$
$(x-7)(x-2)$	$(x-1)^2$	$x^2 - 2x + 1$	$(x+1)(x-1)$	$(x-9)(x+9)$

$x^2 - 2x + 1$	$(x^2 - 81)$	$25y^2 - 16$	$25y^2 - 16$	$x^2 - 9$
$(5y-4)(5y+4)$	$(x+8)^2$	$(5y-4)(5y+4)$	$(x+3)(x-3)$	$(x-3)(x-2)$

$x^2 + 16x + 64$	$x^2 - 10x + 24$	$x^2 - 5x + 6$	$x^2 - x - 6$	$x^2 - 11x + 30$
$(x-6)(x-4)$	$(x-3)(x+2)$	$(x+6)^2$	$(x-6)(x-5)$	$(x+11)^2$

$(x-4)^2$	$x^2 + 22x + 121$	$x^2 - 81$
$x^2 + 12x + 36$	$(x+9)(x-9)$	$(x+9)(x-9)$

CAPÍTULO 7

SISTEMAS DE ECUACIONES

Tema: Sistemas de ecuaciones 2×2

Método de sustitución

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables realizamos lo siguiente:

- Despejamos una de las variables de alguna de las ecuaciones.
- Sustituimos en la otra ecuación la expresión encontrada y resolvemos para encontrar el valor de la variable que corresponde.
- Sustituimos este valor en la ecuación del primer paso y resolvemos para obtener el valor de la otra variable.
- Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

Ejemplo:

- Resolver el sistema $\begin{array}{l} 9m+3n=-48 \\ 4m-6n=-58 \end{array}$

Solución:

- Despejamos n de la primera ecuación.

$$n=\frac{-48-9m}{3}$$
$$n=-16-3m$$

- Sustituimos el valor de n en la segunda ecuación:

$$4m-6(-16-3m)=-58$$

Resolvemos para m,

$$\begin{aligned} 4m-6(-16-3m)&=-58 \\ 4m+96+18m&=-58 \\ 22m&=-58-96 \\ m&=\frac{-154}{22} \\ m&=-7 \end{aligned}$$

- Sustituimos el valor de m en la ecuación del primer paso para encontrar el valor de n:

$$\begin{aligned} n&=-16-3(-7) \\ n&=-16+21 \\ n&=5 \end{aligned}$$

$\therefore$ La solución es $m=-7$, $n=5$

- Comprobación: Sustituimos los valores obtenidos en las ecuaciones originales:

Ecuación 1: $9m+3n=9(-7)+3(5)=-63+15=-48$ ☑

Ecuación 2: $4m-6n=4(-7)-6(5)=-28-30=-58$ ☑

Tema: Sistemas de ecuaciones 2×2

Método de suma y resta o reducción

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables realizamos lo siguiente:

- Multiplicamos las ecuaciones por números que hagan que, en ambas ecuaciones, los coeficientes de una de las variables, sean iguales excepto quizás por el signo.
- Sumamos o restamos las ecuaciones resultantes para eliminar esa variable.
- Resolvemos la ecuación obtenida para la variable que quedó.
- Sustituimos este valor para cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.
- Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

Ejemplo:

- Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3a-2b&=11\\ a+4b&=6 \end{aligned}$$

Solución:

- Multiplicamos por 2 la primera ecuación para que el coeficiente de la b sea igual, excepto por el signo.

$$\begin{aligned} 6a-4b&=22\\ a+4b&=6 \end{aligned}$$

- Sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 6a-4b=22\\ \underline{a+4b=\ \ 6}\\ 7a\qquad =28 \end{array}$$

Resolvemos para a,

$$a=4$$

- Sustituimos el valor de a en la primera ecuación para encontrar el valor de b:

$$\begin{aligned} 3(4)-2b&=11\\ 12-2b&=11\\ -2b&=11-12\\ -2b&=-1\\ b&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ La solución es $a=4$, $b=\frac{1}{2}$

- Comprobación: Sustituimos los valores obtenidos en las ecuaciones originales:

Ecuación 1: $3a-2b=3(4)-2\left(\frac{1}{2}\right)=12-1=11$ ☑

Ecuación 2: $a+4b=(4)+4\left(\frac{1}{2}\right)=4+2=6$ ☑

Tema: Sistemas de ecuaciones 2×2
Método de igualación

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables realizamos lo siguiente:

- Despejar una de las variables de ambas ecuaciones.
- Igualamos las ecuaciones resultantes y resolvemos para la variable que queda.
- Sustituimos el valor de esta variable en alguna de las ecuaciones obtenidas en el primer paso y resolvemos para la otra variable.
- Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

Ejemplo:

- Resolver el sistema $$\begin{aligned} 3x-2y&=-5\\ -2x+8y&=50 \end{aligned}$$

Solución:

- Despejamos la variable x en ambas ecuaciones:

$$x=\frac{2y-5}{3}$$
$$x=\frac{50-8y}{-2}.$$

- Igualamos las dos ecuaciones:

$$\frac{2y-5}{3}=\frac{50-8y}{-2}$$

Resolvemos para y,

$$\begin{aligned} \frac{2y-5}{3}&=\frac{50-8y}{-2}\\ -2(2y-5)&=3(50-8y)\\ -4y+10&=150-24y\\ 24y-4y&=150-10\\ 20y&=140\\ y&=7. \end{aligned}$$

- Sustituimos el valor de y en la primera ecuación para encontrar el valor de x:

$$x=\frac{2(7)-5}{3}=\frac{14-5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$\therefore$ La solución es $y=7$, $x=3$

- Comprobación: Sustituimos los valores obtenidos en las ecuaciones originales:

Ecuación 1: $3x-2y=3(3)-2(7)=9-14=-5$ ☑

Ecuación 2: $-2x+8y=-2(3)+8(7)=-6+56=50$ ☑

Tema: Sistemas de ecuaciones 2x2
Método de determinantes

Si al producto ad restamos el producto cb, obtenemos la expresión ad-cb.

Utilizando símbolos lo podemos representar como $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ el cual se llama *determinante.*

Para calcular el determinante, efectuamos los productos indicados por la flechas, asignando a la flecha hacia abajo un signo positivo y la flecha hacia arriba un signo negativo y efectuamos la operación.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables realizamos lo siguiente:

Dado el siguiente sistema
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

- Formamos el primer determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

- El valor de x va estar dado de la siguiente forma.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- Y el valor de y es:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

Para recordar más fácilmente la solución, en ambas variables el denominador es el determinante del sistema, y el numerador en la expresión correspondiente a cada variable es el determinante obtenido al sustituir, en la columna de la variable, los términos independientes.

Ejemplo:

- Resolver el sistema
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 13 \\ 8x - 5y &= -5. \end{aligned}$$

Solución:

- Calculamos el determinante del sistema.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = 3(-5) - 8(-4) = -15 + 32 = 17.$$

- El valor de x lo calculamos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{13(-5)-(-5)(-4)}{17} = \frac{-65-20}{17} = -5.$$

- El valor de y lo calculamos:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{3(-5)-(8)(13)}{17} = \frac{-15-104}{17} = -7.$$

- Comprobación: Sustituimos los valores obtenidos en las ecuaciones originales:

Ecuación 1: $3x-4y = 3(-5)-4(-7) = -15+28 = 13$ ☑

Ecuación 2: $8x-5y = 8(-5)-5(-7) = -40+35 = -5$ ☑

Actividad.

Unión de piezas

Recorta las piezas y une cada sistema de ecuaciones (piezas en color amarillo), con su solución (piezas en color morado) correspondiente.

$7x - 4y = 5$
$9x + 8y = 13.$

$x = 3$
$y = 1$

$9x + 16y = 7$
$4y - 3x = 0.$

$x = 1$
$y = 3$

$3x + 5y = 7$
$2x - y = -4.$

$x = 1$
$y = \frac{1}{2}$

$4x + 5y = 5$
$-4x - 10y = -7.$

$x = 1$
$y = 1$

$5x - 2y = 13$
$x + 3y = 6.$

$x = -1$
$y = 2$

$11x - 9y - 2 = 0$
$13x - 15y = -2.$

$6x - 5y = -9$
$4x + 3y = 13.$

$x = \frac{3}{4}$
$y = \frac{2}{5}$

$2x + 5y = -4$
$10x - 3y = 36.$

$x = 3$
$y = -2$

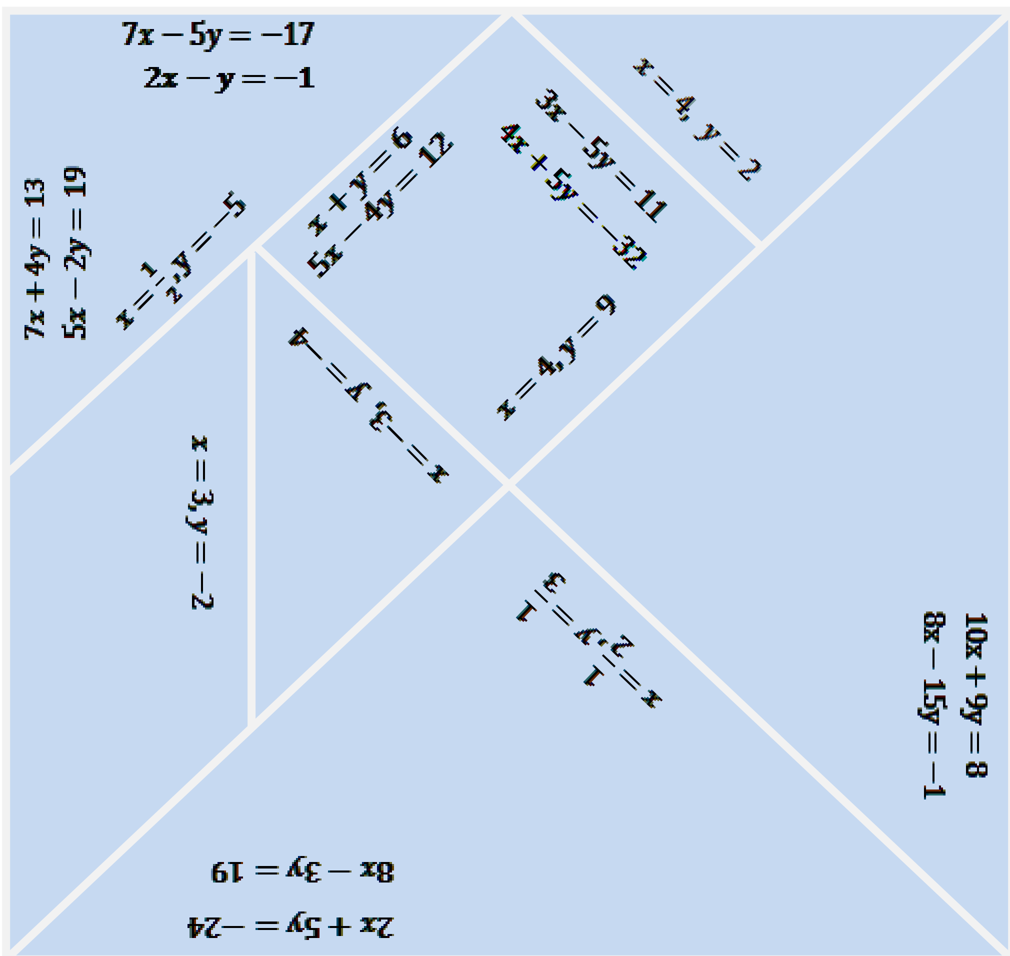
$6x + 10y = 14$
$2x - y = -4.$

$x = \frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{4}$

Actividad.

“Tangram”

Recorta las 7 piezas, y une los lados de manera que coincida cada sistema de ecuaciones con su solución. ¿Qué figura se obtiene?



Actividad:

Material: Un tablero con resultados, 5 fichas rojas, 5 fichas negras.

Jugadores: 2 ó 4.

Preparación del juego: Acomodar las fichas en el lugar que se indica en el tablero.

Desarrollo del juego: Las fichas rojas corresponden al jugador A; las fichas negras, al B.
Cada jugador puede ir resolviendo los sistemas de ecuaciones durante el juego por el método que elija. Se juega por turno. En cada jugada se pasa una ficha a una casilla vacía adyacente, ya se horizontal, vertical o diagonalmente, o se salta sobre una ficha adyacente hasta la casilla vacía que haya junto a ésta. Se pueden dar varios saltos sucesivos con la misma jugada. Se puede también saltar por encima de las fichas del otro jugador. Las fichas saltadas no se retiran.

Gana el primero en colocar sus fichas en la fila opuesta, acomodando cada sistema de ecuaciones con su resultado correspondiente.

FICHAS ROJAS

$a = 42$ $b = 0$	$a = -11$ $b = 5$	$a = 1$ $b = -5$	$a = -3$ $b = -5$	$a = -4$ $b = -3$
$x = 0$ $y = 7$	$x = 11$ $y = 3$	$x = 4$ $y = -3$	$x = 4$ $y = -5$	$x = 5$ $y = 1$

FICHAS NEGRAS

$$\begin{cases} 2x - y = 19 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 6y = 11 \\ 5x - 15y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 14 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 15y = 56 \\ x + y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 5b = 13 \\ 3a + 6b = -30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 6b = -3 \\ 3a + 8b = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 42 \\ -2a - b = -84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -11 \\ 11a - 2b = -38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 3b = 17 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$$

CAPÍTULO 8

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Tema: Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es aquella, que una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2.

Por ejemplo: $6x^2+9x+8=0$

Las raíces de una ecuación de segundo grado son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación.

Por ejemplo, las raíces de la ecuación $x^2+5x-24=0$ son $x_1=3$ y $x_2=-8$, ambos valores satisfacen esta ecuación, es decir al sustituir cada valor de la ecuación, da como resultado cero.

$$(3)^2+5(3)-24=9+15-24=24-24=0$$

$$(-8)^2+5(-8)-24=64-40-24=64-64=0$$

Resolver una ecuación de segundo grado significa hallar las raíces de la ecuación.

Existen varios métodos para resolver una ecuación de segundo grado, en este apartado daremos un ejemplo de algunos de ellos.

MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS.

Este método consiste en transformar un binomio de la forma x^2+cx para que sea un trinomio cuadrado perfecto.

El cual lo escribiremos como:

$$x^2+cx+\left(\frac{c}{2}\right)^2=\left(x+\frac{c}{2}\right)^2$$

Ejemplo:

- Resolver la ecuación $x^2+6x+5=0$

➨ Solución:

Buscamos un número que complete x^2+6x como trinomio cuadrado perfecto. Ese número es

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2=(3)^2=9$$

Entonces la ecuación quedaría:

$x^2+6x+9+5=0+9$ (se suma el 9 en ambos lados de la ecuación)

$x^2+6x+9=9-5$

$(x+3)^2 = 9-5$ (factorizando el trinomio)

$(x+3)^2 = 4$

$|x+3| = \sqrt{4}$ (sacando raíz de ambos lados).

$x+3=2$ y $-(x+3)=2$

Las soluciones son:

$x_1 = -1$ $x_2 = -5$

- Comprobación:

Sustituyendo $x_1 = -1$ en la ecuación original,

$$\begin{aligned} x^2+6x+5 &= (-1)^2+6(-1)+5 \\ &= 1-6+5 \\ &= 6-6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_2 = -5$ en la ecuación original,

$$\begin{aligned} x^2+6x+5 &= (-5)^2+6(-5)+5 \\ &= 25-30+5 \\ &= 30-30 \\ &= 0. \end{aligned}$$

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$, podemos utilizar la siguiente expresión la cual se llama solución de la ecuación general de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A la expresión b^2-4ac se le llama discriminante.

Si $b^2-4ac<0$, la ecuación no tiene solución en los números reales.

Si $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene 2 soluciones.

Si $b^2-4ac=0$, la ecuación tiene una solución.

Ejemplos:

- Resolver la ecuación $3x^2 - 5x + 2 = 0$ por la fórmula general.

  Primero identificamos quien es $a, b,$ y $c.$ $ax^2 + bx + c = 0$

  $a = 3$
  $b = -5$
  $c = 2$

  Sustituyendo en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

  Obtenemos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6}$$

Entonces:

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = 1. \qquad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

- Resolver la ecuación $x^2 + x + 3 = 0$ por la fórmula general.

  Identificando:

  $a = 1$
  $b = 1$
  $c = 3$

  Sustituyendo en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

  Obtenemos:

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}.$$

Como el discriminante es igual a -11, no podemos extraer raíz cuadrada; entonces la ecuación $x^2 + x + 3 = 0$ no tiene solución en los números reales.

DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES :

Este método se utiliza generalmente cuando el trinomio sea fácil de factorizar, si no utilizamos otro método.

Para resolver una ecuación de segundo grado por este método se siguen los siguientes pasos:

- Simplificar la ecuación es decir ponerla de la forma $x^2 + mx + n$.
- Se factoriza el trinomio.
- Se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes.

Ejemplos:

- Resolver $x^2 + 7x = 18$ por descomposición de factores.

- Simplificar la ecuación, es decir, ponerla de la forma $x^2 + mx + n$.

$$x^2 + 7x = 18$$
$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

- Factorizar el trinomio.

Es decir, buscar dos números que multiplicados te den -18 y que sumados den 7.

$$(x+9)(x-2) = 0$$

- Se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$x + 9 = 0,$ se tiene que $x = -9$
$x - 2 = 0,$ se tiene que $x = 2.$

$\therefore x_1 = -9$ y $x_2 = 2$ son las raíces de la ecuación.

- Resolver $2x^2 - 2x - 24 = 0$ por descomposición de factores

- Simplificar la ecuación, es decir, ponerla de la forma $x^2 + mx + n$.

$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$x^2 - x - 12 = 0 \qquad (\text{Dividiendo entre } 2)$$

- Factorizar el trinomio.

Es decir, buscar dos números que multiplicados te den -12 y que sumados den -1

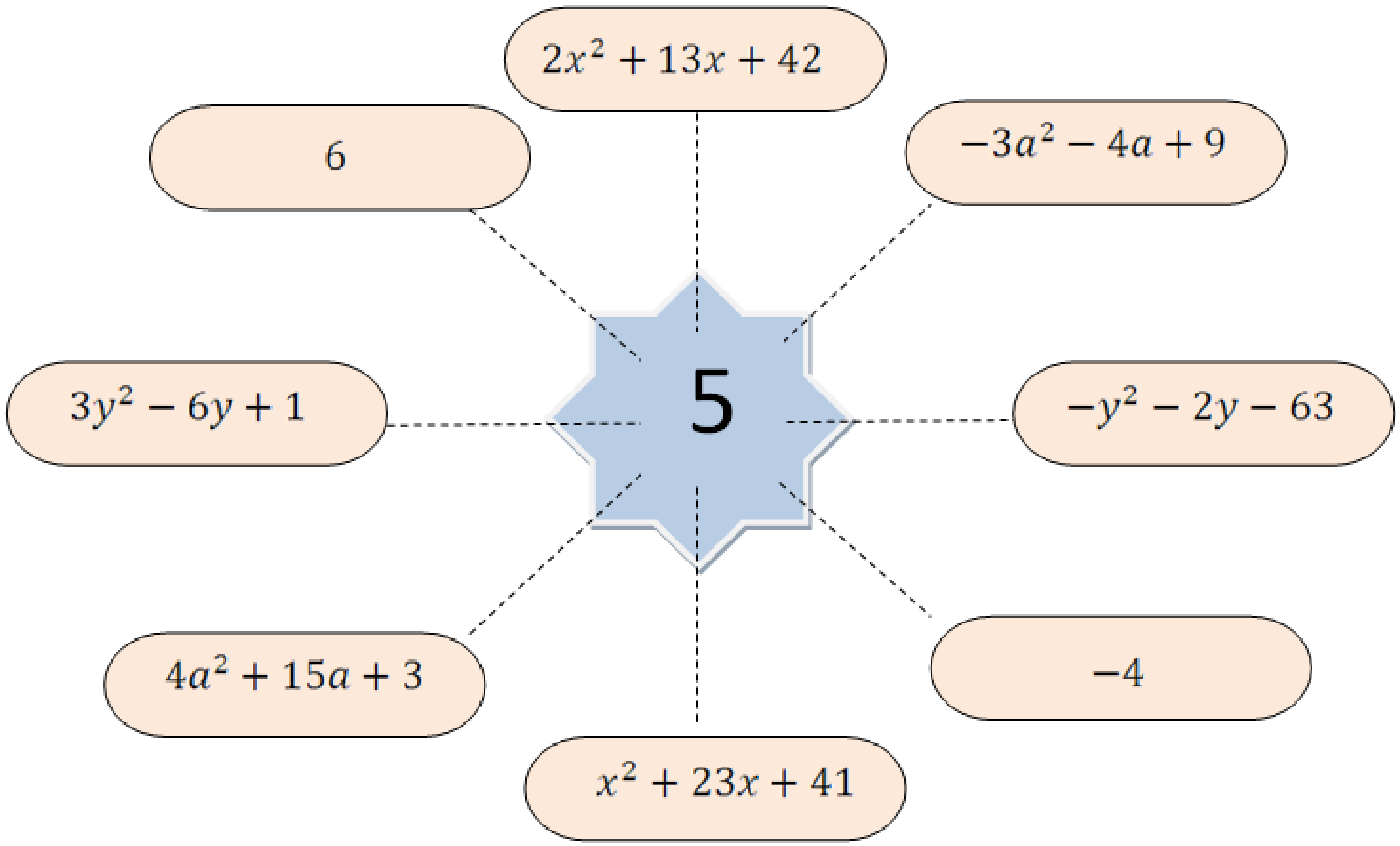
$$(x+3)(x-4) = 0$$

- Se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$x + 3 = 0,$ se tiene que $x = -3$
$x - 4 = 0,$ se tiene que $x = 4.$

Actividad

Simplifica las siguientes expresiones, y resuelve las ecuaciones de segundo grado resultantes para que la suma de cada diagonal de la estrella de el mismo resultado. Es decir encuentra el valor de cada incógnita para que cada eje de la estrella tenga el mismo valor.



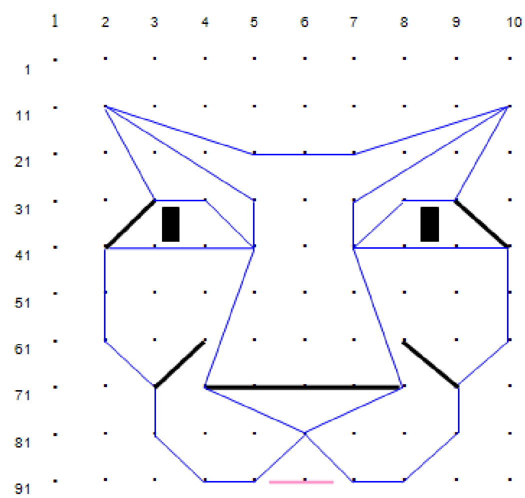
CAPÍTULO 9

SOLUCIÓN DE EJERCICIOS

Actividad de la página 3

3	8	4	6	9		6	3	2	8
8	7	3	6	7		8	6		4
7	2		3	8	3	4	0	1	7
		4	0	5	9	5	1		9
7	3	2	1	6	4	6	2	5	3
4	8	9			2	4	8		8
3	8	7	3	4	6	0	2	3	5
4	5	8	6	3			4	8	4
0	0		1	6	4	3	2	4	1
2	0		4	2	0	0	7	5	7

Actividad de la página 6

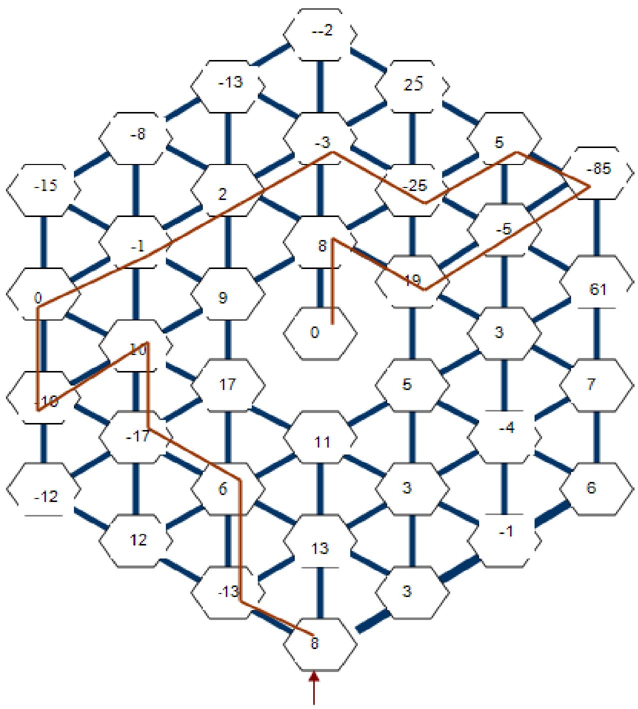


- $12+2\times5-2=20$
- $\sqrt{100}\times3+21\div3=37$
- $5+2^3\times3+6\times3=47$
- $4\times2+35\times2=78$
- $5+10^2-(\sqrt{81}+5\times2)=86$
- $5+3\times33-56\div8=97$
- $28-5\times3+5^2+6\times10=98$
- $7\times7+8\times5=89$
- $4+5(3+12)=79$
- $2[(4+2)(20\div5)+(8+3)]=70$
- $3[(25\div5)+3(14\div2)]-28=50$
- $3(100\div4)-7\times4=47$
- $8+3\times10=38$
- $7\times7-20\div2=39$
- $2\{3+[5(2)-3]\}=20$
- $[(20\div5)+3]+5(2+2)=27$
- $5+5\times4=25$
- $5(15-12)-3(7-6)=12$
- $(4+3)(9-4)=35$
- $5\times(5+4)=45$
- $4+7x5+50\div2+\sqrt{100}=74$
- $2[35+4(8-5)]-8=86$
- $7\times15-10=95$
- $8\times3+2\times35=94$
- $164\div2+1=83$
- $9\sqrt{81}-8=73$
- $15+5(8+3)-8=62$
- $2+5(15-7)=42$
- $4[8-4(2)]+7(28-22)+3=45$
- $4\sqrt{(32-7)}+7(28-26)=34$
- $1+4[32-4(3+3)]=33$
- $2[5+(3+2)]-8=12$

Actividad de la página 9

- $(+5)+(+3)=8$
- $(-8)+(-5)=-13$
- $(-3)+(+9)=6$
- $(-2)+(-15)=-17$
- $(-1)+(+11)=10$
- $(-5)+(-5)=-10$
- $(-5)+(+5-3)+(2+1)=0$
- $(-5-3)+(+11-4)=-1$
- $(7-2)-(+3)=2$
- $(-8)-(-3-2)+4-(9-5)=-3$

- $-30+8-(-5)+1-5-(-3)+(-7)=-25$
- $4+(-2+1)+5- \ -3-(1-2)+4 \ +1-2=5$
- $-19+((-4)-8)+(-13)-(-12)+4-57=-85$
- $3- \ -2+1-(4-5-7) \ -2+ \ -3-(5-6-1)+2 \ =-5$
- $8+(-2)-(-10)-2+5=19$
- $(3-8)+(-5-2)-(-9+1)-(-7-5)=8$
- $- \ 12+(-3) \ -(-4)-5+6-(-4)=0$

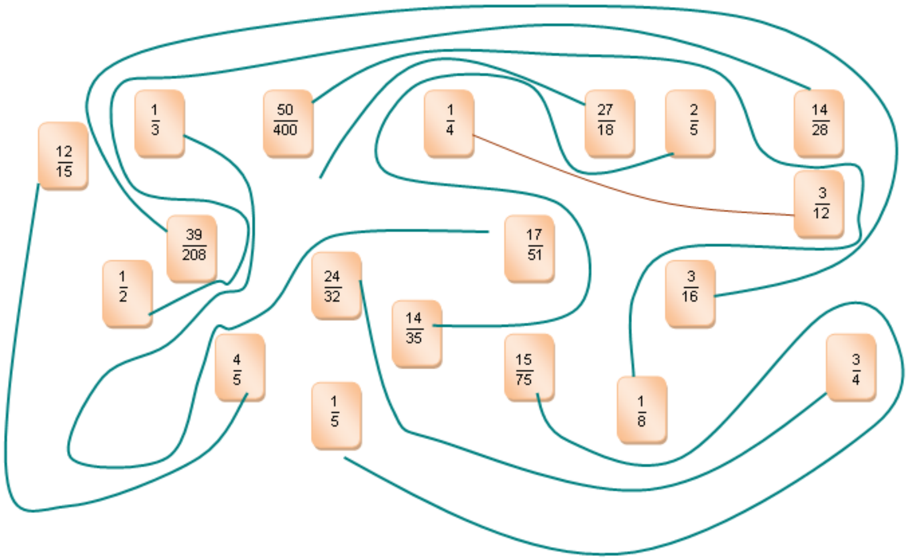


Actividad de la página 11

5	-2	10	2
-5	4	1	10
2	-25	2	2
4	-1	-10	-5

3	4	-1	3
-6	3	-2	-1
-1	-3	2	-6
-2	1	-9	-2

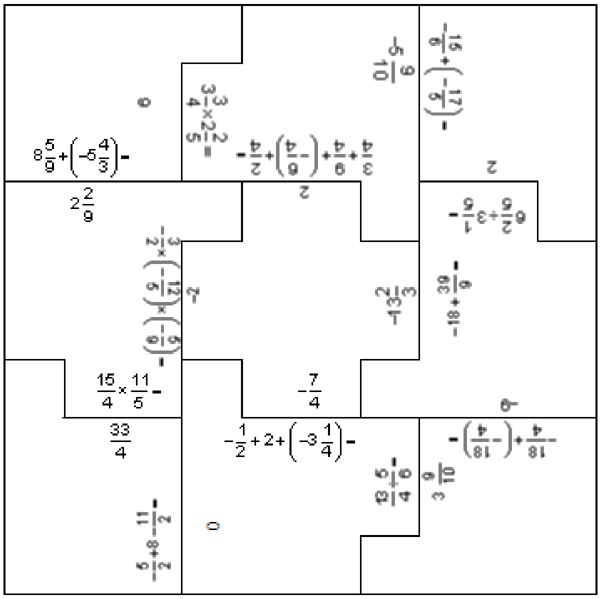
Actividad de la página 16



Actividad de la página 19

$\frac{2}{5}$ y $\frac{14}{35}$	$\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{15}$	$2\frac{4}{16}$ y $\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$ y $\frac{8}{30}$	$\frac{75}{15}$ y $\frac{10}{3}$
$\frac{10}{7}$ y $\frac{30}{20}$	$\frac{4}{12}$ y $\frac{5}{15}$	$\frac{24}{3}$ y 9	$4\frac{1}{4}$ y $\frac{68}{30}$	$\frac{1}{6}$ y $\frac{8}{30}$
$2\frac{1}{4}$ y $\frac{8}{3}$	$\frac{12}{5}$ y $\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{14}$	$1\frac{1}{5}$ y $\frac{60}{50}$	$\frac{22}{8}$ y $2\frac{3}{4}$
$\frac{19}{9}$ y $1\frac{9}{9}$	$\frac{4}{5}$ y $\frac{28}{35}$	$\frac{5}{6}$ y $\frac{15}{12}$	$1\frac{3}{5}$ y $\frac{16}{10}$	$\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{12}$
$2\frac{1}{4}$ y $\frac{8}{4}$	$\frac{63}{18}$ y $3\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{7}$ y $\frac{36}{30}$	$1\frac{1}{4}$ y $\frac{12}{8}$	$\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$

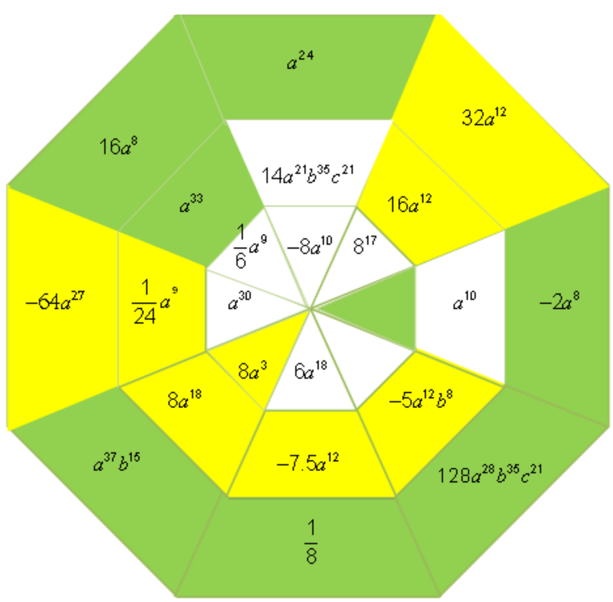
Actividad de la página 25



- $-\frac{18}{4}+\left(-\frac{18}{4}\right)=-9$
- $6\frac{2}{5}\div 3\frac{1}{5}=2$
- $-\frac{15}{6}+\left(-\frac{17}{5}\right)=-5\frac{9}{10}$
- $\frac{15}{4}\times\frac{11}{5}=\frac{33}{4}$
- $-\frac{5}{2}+8-\frac{11}{2}=0$
- $-\frac{1}{2}+2+\left(-3\frac{1}{4}\right)=-\frac{7}{4}$
- $\frac{13}{4}\div\frac{5}{6}=3\frac{9}{10}$
- $3\frac{3}{4}\times 2\frac{2}{5}=9$
- $8\frac{5}{9}+\left(-5\frac{4}{3}\right)=2\frac{2}{9}$
- $-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{12}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{9}\right)=-2$
- $\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+\left(-\frac{6}{4}\right)+\frac{2}{4}=2$
- $-18+\frac{39}{9}=-13\frac{2}{3}$

Actividad de la página 28

- $(a^4)^6=a^{24}$ verde
- $-7.5(a^3)^4=-7.5a^{12}$ amarillo
- $(-4a^5)^2=16a^{10}$ verde
- $\left(2ab^5(ac)^3\right)^7=128a^{28}b^{35}c^{21}$ verde
- $-5(a^3b^2)^4=-5a^{12}b^8$ amarillo
- $8a^2(2a^5)^2=32a^{12}$ amarillo
- $(2a^6)^3=8a^{18}$ amarillo
- $a^{3^2}\left(a^4\right)^6=a^{33}$ verde
- $\left(ab^2\right)^3\left(a^7b^2\right)^2\left(a^4b\right)^5=a^{37}b^{15}$ verde
- $\left(-2a^2\right)^4=16a^8$ verde
- $-2\left(a^2\right)^4=-2a^8$ verde
- $\left(-4a^9\right)^3=-64a^{27}$ amarillo
- $\left(\frac{6}{3}a\right)^3=8a^3$ amarillo
- $\left(4a^6\right)\left(-2a^3\right)^2=16a^{12}$ amarillo
- $\frac{1}{3}(a)^6\left(\frac{1}{2}a\right)^3=\frac{1}{24}a^9$ amarillo
- $\frac{8^8}{8^9}=\frac{1}{8}$ verde



Actividad de la página 45

9	+	3	_	8	= 4
x		x		x	
4	+	6	_	2	= 8
÷		÷		–	
6	x	2	_	5	= 7
= 6		= 9		= 11	

Actividad de la página 48

- $3x^2+6y-5x^2+8y-10y=-2x^2+4y$
- $5x^2y^2-6x^2y^2+5xy-5xy=-x^2y^2$
- $4m+6n-5m+8n-10m=-11m+14n$
- $\frac{3}{4}m-\frac{5}{2}n+\frac{8}{2}m-\frac{6}{3}n=\frac{19}{4}m-\frac{9}{2}n$
- $x^2y^2-xy^2+xy^2-x^2y^2=0$
- $3.6m+8.2n-5.2m-10.2n=-1.6m-2n$
- $3x+6y-8x-10y-10y+8x+6y=3x-8y$
- $-5x^2y-6xy^2+8x^2y+10xy^2=3x^2y+4xy^2$
- $5a+6b-6a-8b-3a-b=-4a-3b$
- $\frac{15}{3}x^2-\frac{10}{2}y-\frac{18}{3}x^2+\frac{20}{4}y=-x^2$
- $-5ab-8ba+6ab-7ba=-14ab$
- $3xm-5x^2-6m-8x^2+6m+3xm=6xm-13x^2$
- $10ab-6a+6a-24ab+5=-14ab+5$
- $7x+6y-5x-10y-8x+3y=-6x-y$
- $7.8n-5.6n+3m-1.5m=1.5m+2.2n$
- $-20m+9m-8n-12n=-11m-20n$
- $8xy^2+5x^2y-9xy^2-8x^2y=-xy^2-3x^2y$
- $8y+5x-6y-11x=-6x+2y$
- $2a^2b-6ab^2+8ab^2-10a^2b=-8a^2b+2b^2$
- $3x+6y-3x-5y=y$
- $4(x+2y)-9(2x-7y)-11=-14x+71y-11$
- $-[-5(6x-2y)+x]+y=29x-9y$
- $[-2(3a-9b)-(-5a+7b)]-2a-6b=-3a+5b$
- $-7(5x^2-2xy)-8y^2+3xy=-35x^2+17xy-8y^2$
- $-4c-[-3(1-8c)-(9-c)]=-29c+12$

$-x^2$	$+2$	$-6x^2$	$29x$	$-9y$	$2a$	$-14ab$	$+5$	$-2xm$	$6xm$
$-35x^2$	$+y$	$-\frac{9}{2}n$	$-6y$	$+8b$	$-8c$	$+5a$	$+4$	$-13x^2$	-8
$+17xy$	$\frac{19}{4}m$	$+\frac{3}{4}n$	$-4a$	$-3b$	-1	$-x^2y^2$	$+7$	$-11m$	$-11x^2$
$-8y^2$	-3	$+4x^2$	$+2n$	$1.5m$	$+14m$	$-7x^2$	$+7m$	$-20n$	$+3n$
$-xy^2$	$-3x^2y$	$-4a$	$+2b$	-3	$+2.2n$	$+6a$	$-14x$	$+71y$	-11
$+3$	$-4x$	$-3a$	$+5b$	y	$1.8m$	$+14n$	$2m$	$-3y$	$-1.6m$
$+2m$	$+5n$	$-2x^2$	$-2y$	$+5$	$2m$	$-11m$	n	$6x$	$-2n$
$-8a^2b$	$-6a$	$+3c$	$+4y$	$3x^2y$	$+4xy^2$	$4ab^2$	$6y$	$3x$	$-4y$
$+2ab^2$	$+4b$	$+3a$	$-6y$	$+2$	$+9$	$+2y$	-9	$+6x$	$-8y$
$-a$	$-8b^2$	0	$-29c$	$+12$	$-9x$	$-6x$	$-y$	$-15y$	$+2a$

Actividad de la página 52

	A 1		B 8		C 2	5
D 1	0	0	0		1	
2				E 1	6	0
F 7	I 1	4	H 9			
G 1	0		K 9	L 3	N 8	7
	0			M 3	5	
J 1	8	4		3		Ñ 0

Verticales

A) $3x+8=38 \quad x=10$

B) $\frac{x}{5}=16 \quad x=80$

C) $2x+8=440 \quad x=216$

D) $\frac{x-8}{3}=421 \quad x=1271$

H) $9x+9=900 \quad x=99$

I) $\frac{1}{4}x-2=250 \quad x=1008$

L) $\frac{x}{3}-11=x-233 \quad x=333$

N) $x+5=2x-80 \quad x=85$

Horizontales

C) $7x-4=171 \quad x=25$

D) $8x-920=7080 \quad x=1000$

E) $\frac{1}{2}x+8=88 \quad x=160$

F) $5x=35745 \quad x=7149$

G) $5x+3x-2x+6=66 \quad x=10$

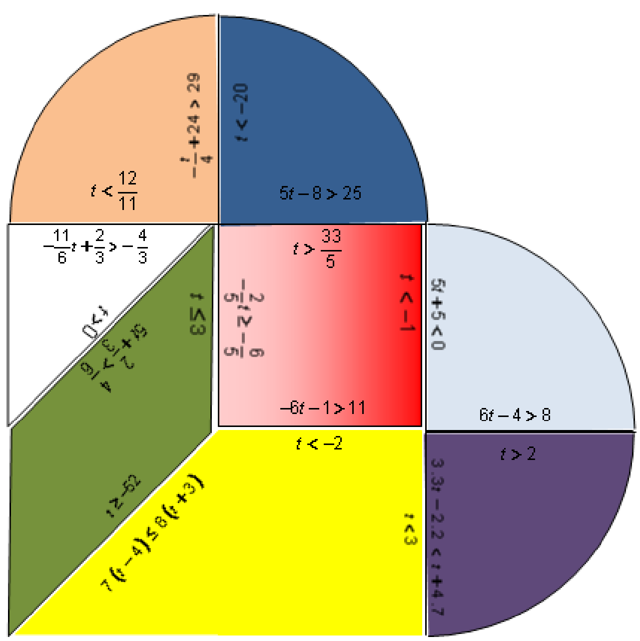
J) $\frac{5}{2}x+40=500 \quad x=184$

K) $\frac{x}{9}-43=1000 \quad x=9387$

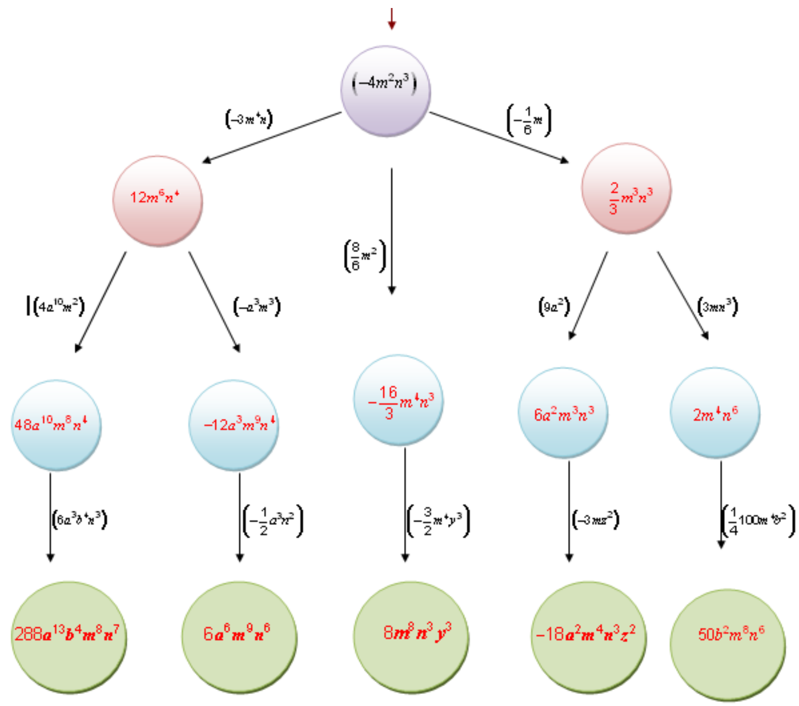
M) $\frac{x}{7}-5=0 \quad x=35$

Ñ) $5x-4x+3x+8=8 \quad x=0$

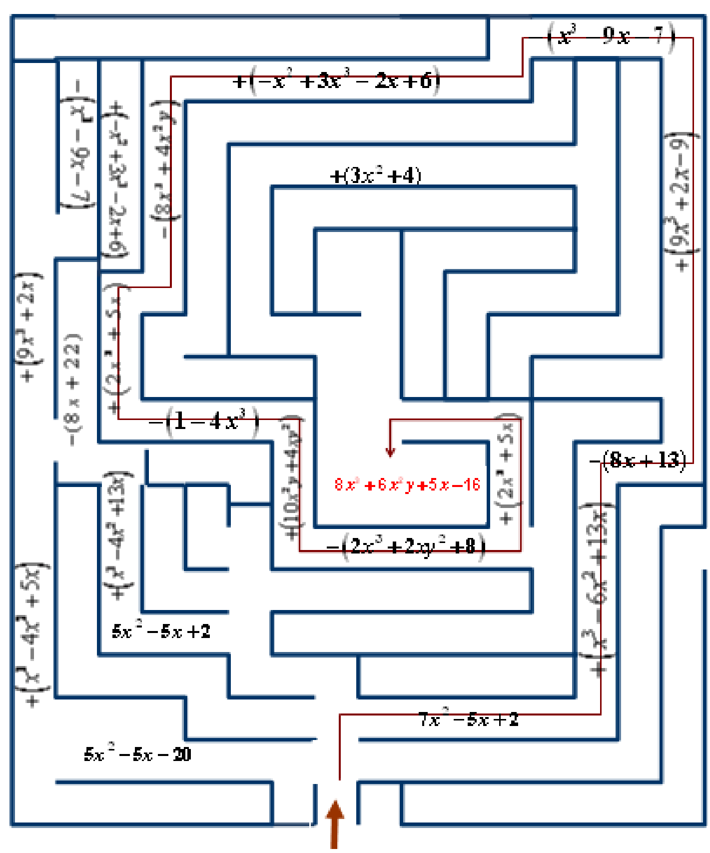
Actividad de la página 55



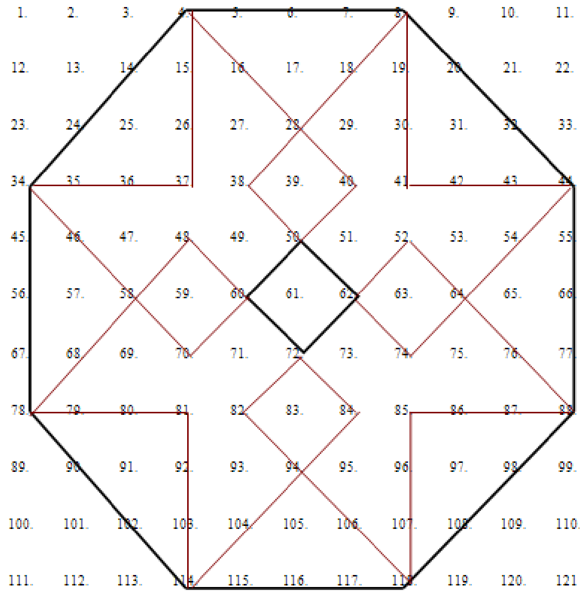
Actividad de la página 59



Actividad de la página 64



Actividad de la página 66



8. $2a(4-2a)=$
38. $-5(6a^{2}-7)=$
50. $(8-10a)3a=$
40. $4a^{4}b^{2}c(a^{2}c-5ab+7b^{2})=$
4. $-10a^{2}b(2a+b-2)=$
37. $6a^{2}(5a^{2}b+7ab^{2}-5b^{2})=$
34. $a(5a+b^{2}-1)=$
70. $-3a(a^{2}-ab^{2})=$
60. $-a(b^{2}+5a+1)=$
48. $-\frac{3}{2}a(20a+10)=$
78. $-\frac{5}{2}ab\left(\frac{4}{5}a+ab+2\right)=$

81. $3ab^{2}(5a+2ab^{2}-ac)=$
114. $-4ac(4b+2b^{4}+1)=$
84. $15a(2a-2)+2(a-2)=$
72. $3(a^{2}-5)-7a(a+8)=$
82. $-12a^{2}b(a-7b)+10b^{2}(a^{2}-5)=$
118. $\frac{5}{4}a^{2}\left(4a^{4}+\frac{16}{5}a^{2}-\frac{4}{5}a\right)-a^{2}(5a^{2}+4a^{4}+30)=$
85. $a^{2}(9a+8)-12a(b+a)=$
88. $-7a^{2}b^{2}c^{2}(4-2b)+a(17a^{4}b^{2}c^{2}+6)=$
52. $-6a^{2}b(2a+7b)+4a^{2}b(2a+5b)=$

Resuelve las siguientes multiplicaciones en forma vertical.

62.
$$\begin{array}{r} a^{2}b+7ab-5 \\ \times \quad 8ab \\ \hline \end{array}$$

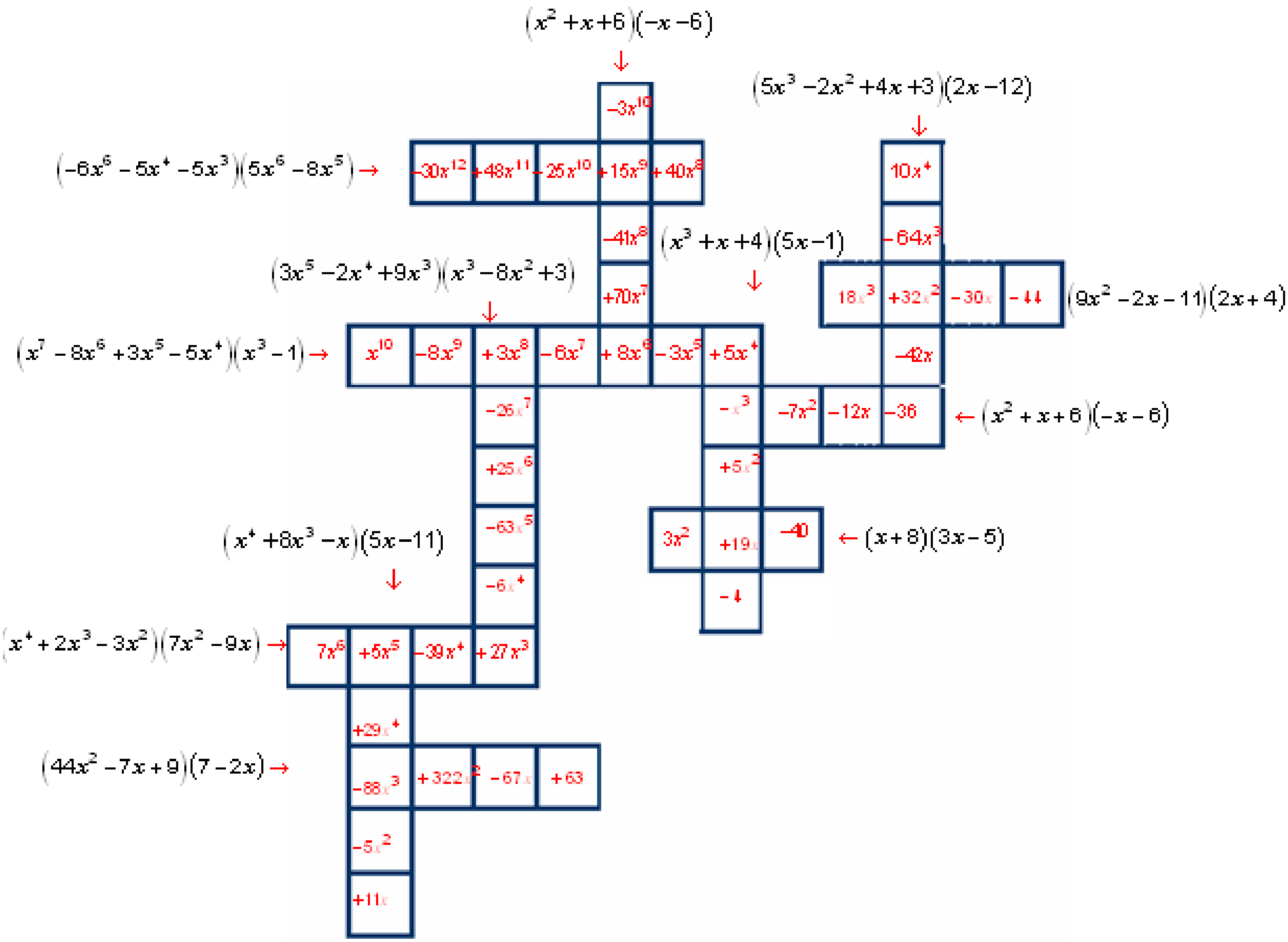
74.
$$\begin{array}{r} 2a+b+2 \\ \times \quad 10a^{2}b \\ \hline \end{array}$$

44.
$$\begin{array}{r} 5-8b^{2}+5c^{2} \\ \times \quad 3a^{2}bc \\ \hline \end{array}$$

41.
$$\begin{array}{r} 8-1b^{2}+8c^{2} \\ \times \quad -3a^{2}bc \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} 8-4a \\ \times \quad a \\ \hline \end{array}$$

Actividad de la página 73



Actividad de la página 76

A x^2	B $-x$	-1			C $3y^3$	$-6y$	$+5$
$+5x$	$+5$		D $9y^2$	$+7y$	$+4$		
$+3$		E x^5				H x^5	
		J $-3x^4$	$+5x^3$	F $-2x^2$		$-x^4$	I $+x^3$
K x^5	$-4x^4$	$+x^3$		G $+5x$	-1		$+x^2$
$+2x$			L m	$+10$		M a	$+1$

VERTICALES

A) $\left(13x^2+x^3+43x+24\right)\div(x+8)=$

x^2+5x+3

B) $\left(-x^3+13x^2-46x+30\right)\div\left(x^2-8x+6\right)=$

$-x+5$

C) $\left(3y^5+27y^3+4y^2+36\right)\div\left(y^2+9\right)=$

$3y^3+4$

E) $\left(x^6-x^5-5x^4+2x^3\right)\div(x+2)=$

$x^5-3x^4+x^3$

F) $\left(11x^2-2x^3-5x-30\right)\div(x-3)=$

$-2x^2+5x+10$

H) $\left(x^6-9x^5+8x^4\right)\div(x-8)=$

x^5-x^4

I) $\left(x^4-4x^3-5x^2+x-5\right)\div(x-5)=$

x^3+x^2+1

K) $\left(x^7-3x^5+2x^3-6x\right)\div\left(x^2-3\right)=$

x^5+2x

HORIZONTALES

A) $\left(2x^3-4x-2\right)\div(2x+2)=$

x^2-x-1

C) $\left(3y^5+5y^2-12y+10\right)\div\left(y^2+2\right)=$

$3y^3-6y+5$

D) $\left(18y^3-40y^2-34y-24\right)\div(2y-6)=$

$9y^2+7y+4$

J) $\left(-3x^5+8x^4-7x^3+2x^2\right)\div(x-1)=$

$-3x^4+5x^3-2x^2$

K) $\left(x^6+3x^5-27x^4+7x^3\right)\div(x+7)=$

$x^5-4x^4+x^3$

G) $\left(5x^3-x^2+20x-4\right)\div\left(x^2+4\right)=$

$5x-1$

L) $\left(m^3+10m^2-5m-50\right)\div\left(m^2-5\right)=$

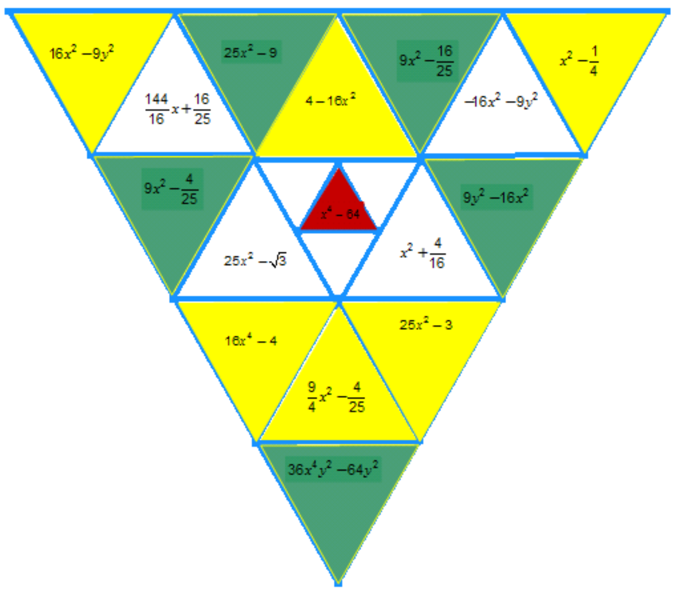
$m+10$

M) $\left(3a^2+2a-1\right)\div(3a-1)=$

$a+1$

Actividad de la página 83

- $(x^2+8)(x^2-8)=x^4-64$ rojo
- $\left(x+\frac{2}{4}\right)\left(x-\frac{2}{4}\right)=x^2-\frac{1}{4}$ amarillo
- $(5x-\sqrt{3})(5x+\sqrt{3})=25x^2-3$ amarillo
- $(4x^2-2)(4x^2+2)=16x^4-4$ amarillo
- $(5x+3)(5x-3)=25x^2-9$ verde
- $\left(3x+\frac{2}{5}\right)\left(3x-\frac{2}{5}\right)=9x^2-\frac{4}{25}$ verde
- $\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{4}x^2-\frac{4}{25}$ amarillo
- $\left(\frac{12}{4}x-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{4}x+\frac{4}{5}\right)=9x^2-\frac{16}{25}$ verde
- $(6x^2y+8y)(6x^2y-8y)=36x^4y^2-64y^2$ verde
- $(-4x+3y)(4x+3y)=9y^2-16x^2$ verde
- $(4x-3y)(4x+3y)=16x^2-9y^2$ amarillo
- $(2+4x)(2-4x)=4-16y^2$ amarillo



Actividad de la página 85

1.	$(x+8)(x-3)$	L	(9)	$9x^2-x-\frac{2}{3}$
2.	$(2x+6)(2x+3)$	O	(5)	$x^2-5x-24$
3.	$(x+7)(x+8)$	S	(6)	$4x^2-14x+12$
4.	$(x+9)(x+3)$	T	(7)	$9x^2+3x+\frac{2}{9}$
5.	$(x+3)(x-8)$	M	(1)	$x^2+5x-24$
6.	$(2x-4)(2x-3)$	A	(10)	$x^2-12x-108$
7.	$\left(3x+\frac{1}{3}\right)\left(3x+\frac{2}{3}\right)$	E	(3)	$x^2+15x+56$
8.	$\left(3x-\frac{5}{4}\right)\left(3x+\frac{9}{4}\right)$	D	(4)	$x^2+12x+27$
9.	$\left(3x+\frac{2}{3}\right)(3x-1)$	I	(8)	$9x^2-3x-\frac{45}{16}$
10.	$(x-18)(x+6)$	H	(2)	$4x^2+18x+18$

CODIGO

T	H	A	L	E	S	D	E	M	I	L	E	T	O
7	2	10	9	3	6	4	3	1	8	9	3	7	5

Actividad de la página 87

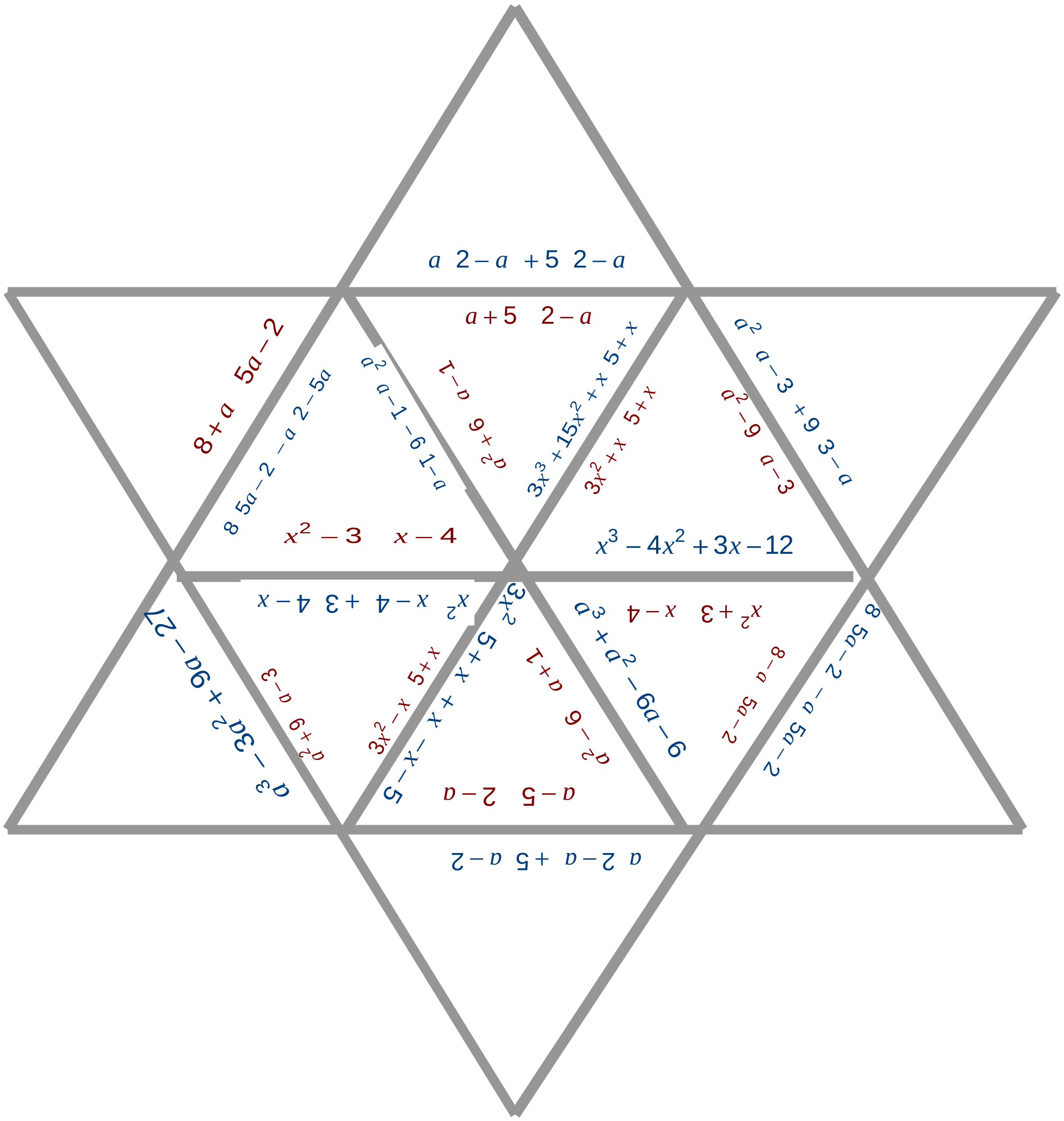
$8m^3$	$8m^3$	$+1944n$	-8	$-64n^3$	$-144n^2$	$+108$	$+9$
$512n^3$	$+12m^2$	$+60y$	$+1728n^2$	1	$+3n$	$+3n^2$	$+n^3$
$+729$	$-150y^2$	$+6m$	$64n^3$	$+144n^2$	$+108n$	$+27$	$-12n^2$
$125y^3$	$8y^3$	$6y^3$	$+1$	$125a^3$	n^3	$-12n$	$+48n$
$-60a^2$	$+21$	$-96y^2$	$+343$	$-600a^2$	$+12n$	$512n^3$	-64
$+96a$	$+63y$	$+441y$	$+384y$	$+960a$	$-48n$	$+1728n^2$	$+n^2$
$+512$	$+189y^2$	$+24$	$+54n^2$	-512	$+64$	$+1944n$	$+n$
$27y^3$	$9y^3$	$18n^3$	$216n^3$	$+972n^2$	$+1458n$	$+729$	$+3$

- $(2m+1)^3 = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1$
- $(5y-2)^3 = 125y^3 - 150y^2 + 60y - 8$
- $(4n+3)^3 = 64n^3 + 144n^2 + 108n + 27$
- $(n-4)^3 = n^3 - 12n^2 + 48n - 64$
- $(2y-8)^3 = 8y^3 - 96y^2 + 384y - 512$
- $(8n+9)^3 = 512n^3 + 1728n^2 + 1944n + 729$
- $(1+n)^3 = 1 + 3n + 3n^2 + n^3$
- $(3y+7)^3 = 27y^3 + 189y^2 + 441y + 343$
- $(5a-8)^3 = 125a^3 - 600a^2 + 960a - 512$
- $(6n+9)^3 = 216n^3 + 972n^2 + 1458n + 729.$

Actividad de la página 90

$x^4 - 16x^2 + 4x$	$x(x^3 - 16x + 4)$	$6a^2 + 12a - 18$	$6(a^2 + 2a - 3)$
$9a^3 + 6a^2 - 12a$	$3a(3a^2 + 2a - 4)$	$4x^4 - 16x^3 + 16x^2$	$4x^2(x^2 - 4x + 4)$
$3a^3 - 15a^2 - 12$	$3(a^3 - 5a^2 - 4)$	$3a^2b - 5a^2b^4 - 7ab$	$ab(3a - 5ab^3 - 7)$
$14a^3b + 4ab^2 + 18a^2b^3$	$2ab(7a^2 + 2b + 9ab^2)$	$35a^3b^2 + 10a^2b^3 + 45a^5b^2$	$5a^2b^2(7a + 2b + 9a^3)$
$56a^5b^3 - 16a^4b^2 + 72a^3b$	$8a^3b(7a^2b^2 - 2ab + 9)$	$21a^5b^2 - 35a^4b^6 - 49a^3b^3$	$7a^3b^2(3a^2 - 5ab^4 - 7b)$

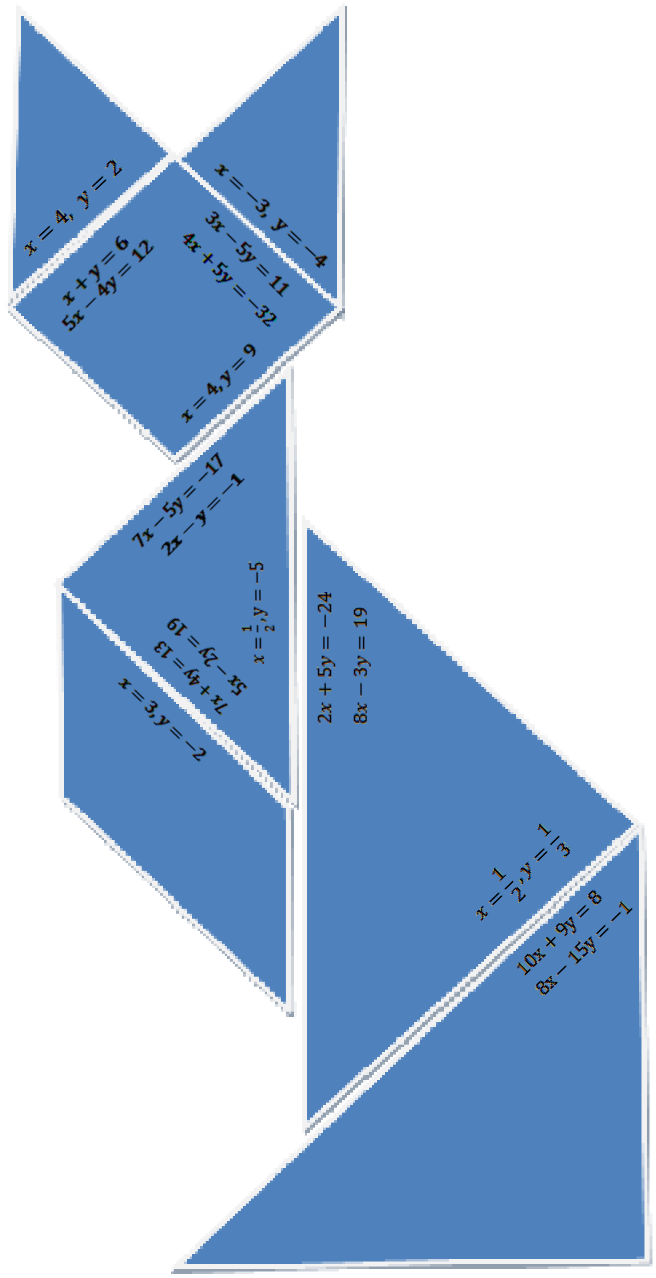
Actividad de la página 93



Actividad de la página 105

Sistema	Solución	
$7x-4y=5$ $9x+8y=13.$	$x=1$ $y=\frac{1}{2}$	
$9x+16y=7$ $4y-3x=0.$	$x=\frac{1}{3}$ $y=\frac{1}{4}$	
$3x+5y=7$ $2x-y=-4.$	$x=-1$ $y=2$	$6x+10y=14$ $2x-y=-4.$
$4x+5y=5$ $-4x-10y=-7.$	$x=\frac{3}{4}$ $y=\frac{2}{5}$	
$5x-2y=13$ $x+3y=6.$	$x=3$ $y=1$	
$6x-5y=-9$ $4x+3y=13.$	$x=1$ $y=3$	
$2x+5y=-4$ $10x-3y=36.$	$x=3$ $y=-2$	
$11x-9y-2=0$ $13x-15y=-2.$	$x=1$ $y=1$	

Actividad de la página 106



CONCLUSIONES

Los juegos han ayudado al docente para motivar sus clases, hacerlas más interesantes y dinámicas. El juego contribuye al desarrollo de habilidades y competencias de los individuos involucrados en los procesos de aprendizaje y logra una atmósfera creativa en una comunión de objetivos.

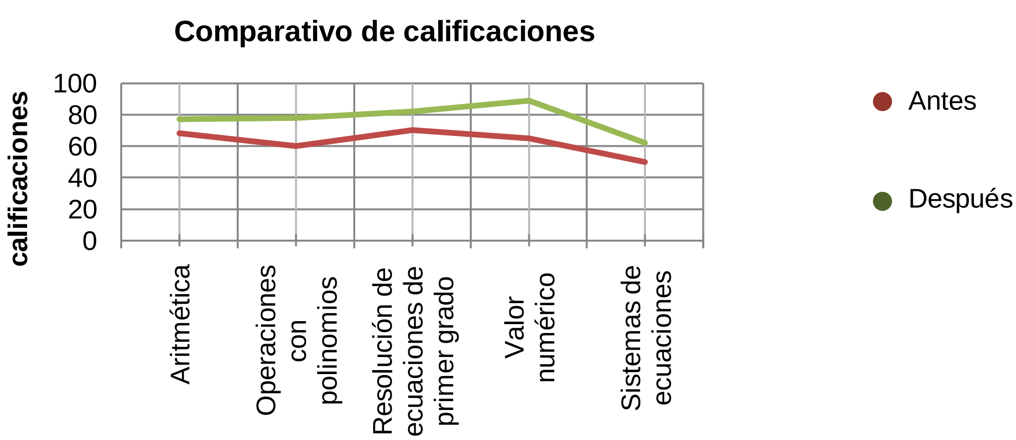
Por eso decidí recopilar y en muchos otros casos adaptar diferentes juegos para que pudieran ser aplicados en la enseñanza del álgebra. Debido a la sencillez con que se explican y se trabaja con los temas, algunas de las actividades de este trabajo se han aplicado a alumnos de tercero de secundaria, obteniendo buenos resultados ya que sus comentarios y reacciones fueron positivas, mostrando gran interés en las mismas. El total de alumnos de este grado fue de 34, con calificaciones bajas, los cuales realizaron comentarios como los siguientes:

- " ¿Ya se terminó la hora?"
- "jamás había entendido como se resolvían las ecuaciones de primer grado y ahora ya entendí",

- El profesor le preguntaba ¿Te diste cuenta de cuántos ejercicios realizaste? El alumno respondía: No sé, como 15.

  Pero en realidad había actividades de más de 30 ejercicios.

También se ha reflejado un incremento en su aprovechamiento. Para evaluarlo se realizaron exámenes antes de incluir las actividades aquí propuestas y después de ellas.



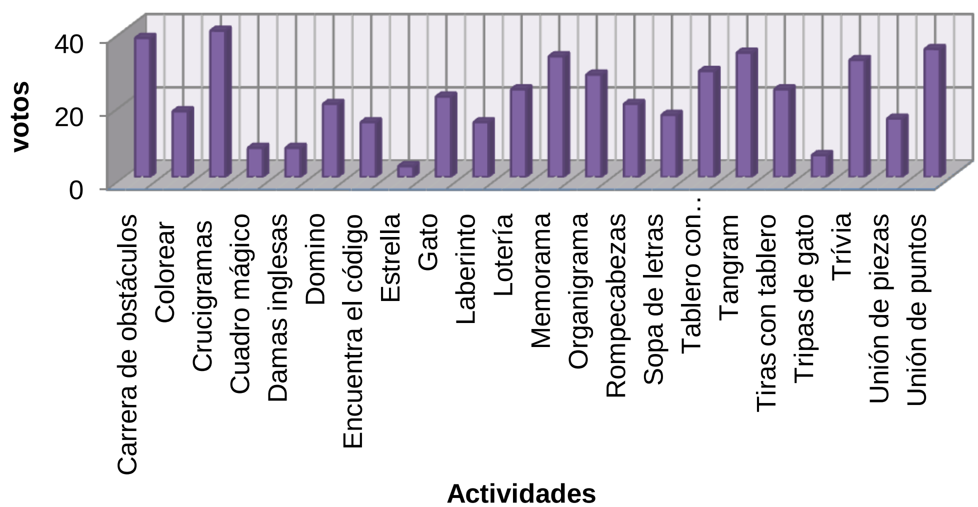
Los alumnos a los que se les ha aplicado, han realizado una mayor cantidad de ejercicios, a diferencia de cuando el profesor anotaba los ejercicios en el pizarrón o dejaba resolver páginas de algún libro, reforzando aún más, sus conocimientos adquiridos.

Estas actividades se han empleado como cierre de tema o como una forma de repaso para presentar exámenes.

Se ha logrado también la integración de alumnos que no participaban y se ha fomentando el trabajo en equipo. Dichos equipos se formaron de dos o hasta cuatro integrantes dependiendo de la actividad y bajo la supervisión del profesor.

Se realizaron algunas modificaciones en algunas de las actividades por observaciones de los alumnos, en particular, en agregar color en algunas que no se había incluido, aumentar de tamaño algunas tarjetas, disminuir la dificultad en algunos juegos para que no se tardaran tanto en resolver cada ejercicio, como por ejemplo, en la carrera de obstáculos.

Haciendo una encuesta entre los alumnos de bachillerato se obtuvieron los siguientes resultados sobre la preferencia de las actividades que se realizaron:



De acuerdo a la gráfica anterior, los juegos mejor aceptados fueron:

Crucigramas

Carreras de obstáculos

Unión de puntos

Tangram

Memorama

Trivia aritmética y

Tablero con operaciones.

Es importante señalar que los alumnos que participaron en las actividades se divirtieron y también aprendieron.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso F. et al, *Ideas y actividades para enseñar álgebra,* Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis 1991.

Baldor, Aurelio, *Álgebra*, Publicaciones Cultural, México, 1977.

Baldor, Aurelio, *Aritmética*, Publicaciones Cultural, México, 1988.

Fernández J., Rodríguez M., *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental,* Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis 1991.

García Juárez Marco Antonio, *Matemáticas para preuniversitarios,* Editorial Esfinge 2009.

Gardner M., *Mathematical carnaval*, Penguin books, 1979.

Gutiérrez Yavé, *Acertijos matemáticos*, Editores mexicanos unidos 2005.

Johnson Hansen, Peterson et al, *Activities in mathematics*, Scott Foresman.

López Rueda Gonzalo, *Aritmética y Álgebra*, Esfinge 2005.

Meirovitz, P.Jacobs, *Desafíe a su inteligencia*, Ediciones Roca 1985.

Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, *Álgebra*, Pearson Educación de México 2003.

Sada García, *Matemáticas I Aritmética y álgebra*, DGETI Fondo de Cultura Económica 2002.

Scherzer, *Aprendizaje de alto rendimiento*, Juegos matemáticos.

Socas M. et al, *Iniciación al Álgebra,* Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis 1991

SITIOS DE INTERNET

http://www.platea.pntic.mec.es
Problemas de cuadros mágicos.

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/lugares/mate2l.htm
Adivina números, enseñaza de las matemáticas.

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/taller/juegos/juegos.htm
Taller de juegos.

http://orientacionandujar.wordpress.com/fichas-mejorar-atencion
Fichas para la mejora de la atención.

http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/matrecreativa/juegosnumericos/enunciados.html
Juegos numéricos.

http://www.sectormatematica.cl/educbasica.htm
Sector matemática. Educación básica.

http://sauce.pntic.mec.es/ebac0003/
Laboratorio de matemáticas.

http://www.catedu.es/catalogo/docs/00337_fracciones.doc#Unidad3
Juegos educativos.

http://www.cuadernosdigitalesvindel.com/index.php
Juegos educativos.

http://alicia.buquet.googlepages.com/rompecabezas.jpg
Rompecabezas.

http://www.mundijuegos.com/
Juegos de mesa.

http://jaxgames.com/sequence-numbers.htm
Juego sequence.

http://www.profesorenlinea.c