



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÓPULAS DE RACIMO

TESINA
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
EDGAR NAVA PINEDA

TUTOR:
M. EN C. LAURA NAYELI LILJEHULT LEÓN



2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del Alumno

Nava

Pineda

Edgar

55 94 06 30

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de ciencias

Actuaría

305203683

2.Datos del tutor

M. en C.

Laura Nayeli

Liljehult

León

3.Datos del sinodal 1

Dr.

Yuri

Salazar

Flores

4.Datos del sinodal 2

Dra.

Ruth Selene

Fuentes

García

5.Datos del sinodal 3

Dr.

Gerardo

Rubio

Hernández

6.Datos del sinodal 4

Mat.

Ricardo

Hoyos

Argüelles

7.Datos del trabajo escrito

Cópulas de Racimo

84 p.

2016

Índice general

Introducción	5
1. n-Cópulas	7
1.1. Funciones n -crecientes	7
1.2. Funciones de distribución y cópulas	13
1.3. Cópulas y Variables Aleatorias	24
1.4. Cópulas Arquimedianas	29
1.4.1. Familia Ali Mikhail Haq	33
1.4.2. Familia Gumbel	34
1.4.3. Familia Clayton	34
1.4.4. Familia Frank	34
2. Cópulas de Racimo	35
2.1. Descomposición de funciones de distribución multivariadas en cópulas bivariadas	35
2.2. Racimos	37
2.3. Independencia condicional y la descomposición en cópulas bivariadas	40
2.4. Simulación	41
2.4.1. Simulación de un D-racimo para 3 variables	43
2.4.2. Simulación de un D-racimo para 4 variables	43
2.5. Ajuste para D-racimo	44
3. D-racimo para portafolio de acciones	47
3.1. Selección de la descomposición	49
3.2. Ajuste D -racimo	49
3.3. Simulación	53
Conclusiones	57
Apéndices	58
A.	61
A.1. Tau de Kendall	61
A.2. Coeficiente de dependencia en colas	61
A.3. Cópulas Elípticas	62

A.3.1. Cópula Gaussiana	63
A.3.2. Cópula t	63
A.4. Funciones h	63
A.4.1. Cópula Gaussiana	63
A.4.2. Cópula t	64
A.4.3. Cópula clayton	64
A.5. Estimación de parámetros	65
A.6. Estadístico Kolmogorov- Smirnov	65
A.7. Código SAS: Estadísticos de orden , gráficos y distribución empírica	66
A.8. Código SAS: Tau de Kendall, coeficientes de dependencia en colas y gráficos de dispersión	67
A.9. Código SAS: Uso de funciones en portafolio de cuatro acciones y datos simulados	69
A.10. Código R: Selección de cópula y estimación de parámetros	72
A.11. Código R: Funciones para calcular el estadístico de prueba T_n	73
A.12. Código R: Cálculo de observaciones condicionales , funciones h y h inversa .	75
A.13. Código R: Simulación D-racimo	77
A.14. Código R: Ajuste y simulación D-racimo para portafolio de cuatro variables .	78

Introducción

La dependencia de variables aleatorias es un concepto que la probabilidad ha estudiado por muchos años. Uno de los principales intereses era el de establecer una relación entre el comportamiento conjunto y el marginal de un grupo de variables aleatorias. Abe Sklar demostró que las funciones de distribución marginales se relacionan con la función de distribución conjunta mediante una familia especial de funciones llamadas cópulas. A partir de esto las cópulas tomaron importancia en el campo de la estadística, pues son una herramienta útil cuando es de interés el estudio de las estructuras de dependencia, además de ser una herramienta poderosa para modelar, ya que la estructura de dependencia es independiente al comportamiento marginal de los datos.

En la actualidad la investigación sobre la teoría de las cópulas ha permitido definir una gran variedad de éstas. Bedford, Cooke y Joe [2, 3, 9] desarrollaron las cópulas de racimo, las cuales surgen de descomponer una función de densidad conjunta en un producto de funciones de densidad condicionales y de asociar una cópula bivariada a cada factor de la descomposición.

En este orden de ideas el presente trabajo tiene como objetivo explicar cómo las cópulas de racimo facilitan modelar estructuras de dependencia complejas para datos multivariados.

Para el logro de este objetivo este documento se divide en tres capítulos, donde en el primer capítulo '*n*-cópulas' se define el concepto de cópula, se estudian sus propiedades básicas, así como las llamadas cópulas arquimedianas. Posteriormente en el segundo capítulo 'Cópulas de racimo' se detalla su construcción y un algoritmo de simulación para éstas. Finalmente el tercer capítulo 'D-racimo para portafolio de acciones' muestra cómo se utilizan las cópulas de racimo en la práctica, para ello se utilizó la información de los log-rendimientos de un portafolio de cuatro acciones y se ajustó una cópula de racimo a estos datos.

Capítulo 1

n -Cópulas

En la actualidad las Cópulas han tomado mucha importancia en la práctica actuarial, principalmente cuando se requiere modelar eventos multivariados con cierta estructura de dependencia, ya que a diferencia de las funciones de distribución conjuntas, las cópulas tienen explícita dicha estructura. De aquí que se requiera conocer a profundidad sus características y propiedades. A lo largo de este capítulo definiremos lo que es un cópula y veremos algunas de sus propiedades.

Schweizer y Sklar [15], desarrollaron los conceptos necesarios para definir formalmente el concepto de Cópula, como detallaremos a continuación.

1.1. Funciones n -crecientes

Para familiarizarnos con la notación que de aquí en adelante usaremos:

Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tendrá que $\overline{\mathbb{R}}^n = \overline{\mathbb{R}} \times \dots \times \overline{\mathbb{R}}$ y $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, además diremos que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ cuando $a_k \leq b_k$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$. Cuando $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ diremos que $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ es una n -caja. Los vértices de la n -caja los denotaremos por $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, donde cada c_k con $k \in \{1, \dots, n\}$ es a_k o b_k . Y por último denotaremos a $\mathbf{I}^n = \mathbf{I} \times \dots \times \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} = [0, 1]$.

A continuación generalizaremos el concepto de función creciente para varias dimensiones y estudiaremos las características de esta definición. Para hacer esto necesitaremos el concepto de 'Volumen' de una función.

Definición 1.1.1 (H -Volumen). Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $H : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$, sea $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ una n -caja, tal que todos sus vértices pertenecen al

dominio de H ($DomH$). El H -volumen de B se define como:

$$V_H(B) = \sum_{\mathbf{c}} hsgn(\mathbf{c})H(\mathbf{c}). \quad (1.1.1)$$

La suma es sobre todos los vértices \mathbf{c} de B , y la función $hsgn(\mathbf{c})$ esta dada por:

$$hsgn(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } c_k = a_k \text{ un número par de } k' \text{ s.} \\ -1 & \text{Si } c_k = a_k \text{ un número impar de } k' \text{ s.} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Ejemplo 1.1.2. Sea $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$. Entonces el H -volumen de B es,

$$V_H(B) = H(x_2, y_2, z_2) - H(x_1, y_2, z_2) - H(x_2, y_1, z_2) - H(x_2, y_2, z_1) \\ + H(x_1, y_1, z_2) + H(x_1, y_2, z_1) + H(x_2, y_1, z_1) - H(x_1, y_1, z_1).$$

La definición del volumen de una función es de gran utilidad para poder definir una familia particular de funciones llamadas n -crecientes.

Definición 1.1.3 (n -creciente). Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $H : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que H es n -creciente si y sólo si $V_H(B) \geq 0$ para toda $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, tal que todos sus vértices pertenecen al $DomH$.

Que una función H sea n -creciente no implica que H sea no decreciente entrada a entrada, la proposición inversa tampoco es válida como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.4. Sea H una función dada por $H(x, y) = \max(x, y)$, $x, y \in \mathbf{I}$, esta función es no decreciente entrada a entrada, sin embargo

$$V_H(\mathbf{IXI}) = \max(1, 1) - \max(1, 0) - \max(0, 1) + \max(0, 0) = -1,$$

por lo que H no es 2-creciente.

Por otro lado si definimos a F tal que $F(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$ y $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
V_F(B) &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \\
&= (2x_2 - 1)(2y_2 - 1) - (2x_1 - 1)(2y_2 - 1) - (2x_2 - 1)(2y_1 - 1) + (2x_1 - 1)(2y_1 - 1) \\
&= (2y_2 - 1)[(2x_2 - 1) - (2x_1 - 1)] - (2y_1 - 1)[(2x_2 - 1) - (2x_1 - 1)] \\
&= 2(2y_2 - 1)[x_2 - x_1] - 2(2y_1 - 1)[x_2 - x_1] \\
&= 4[x_2 - x_1][y_2 - y_1],
\end{aligned}$$

por lo que F es 2-creciente. En cambio si hacemos $F(x, 1/4)$, esta resulta ser decreciente y si hacemos $F(1/4, y)$, también es decreciente.

Existen funciones para las cuales el hecho de ser n -creciente implica ser no decreciente entrada a entrada. Daremos condiciones suficientes para que una función n -creciente sea no decreciente entrada a entrada.

Definición 1.1.5 (Fija). Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $H : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ n -creciente. Se dice que la función H es fija si y sólo si existe $o_k = \inf\{x \mid x \in S_k\} \in S_k$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$ y cumple que $H(x_1, \dots, x_n) = 0$ para toda $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ tal que $x_k = o_k$ para al menos una $k \in \{1, \dots, n\}$.

Resulta que las funciones que cumplen la propiedad de ser fijas, también cumplen que son no decrecientes entrada a entrada, como probaremos con el siguiente lema.

Lema 1.1.6. Sea H una función n -creciente y fija. Entonces H es no decreciente entrada a entrada en el sentido que si

$$(x_1, \dots, x_{m-1}, s, x_{m+1}, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n) \in \text{Dom}H$$

con $s < t$. Entonces

$$H(x_1, \dots, x_{m-1}, s, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq H(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Demostración. Sabemos que $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_n$ y que $a_k = \inf\{x \mid x \in S_k\}$, para toda $k \in \{1, \dots, n\}$. Sea $B = [(a_1, \dots, a_{m-1}, s, a_{m+1}, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n)]$. Como H es n -creciente sabemos que $V_H(B) \geq 0$, y como H es fija, $H(\mathbf{c}) = 0$ para todos los vértices que cumplan que $c_k = a_k$ para al menos una $k \in \{1, \dots, n\}$, por lo que los únicos vértices de B que no cumplen esta condición son $(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n)$ y $(x_1, \dots, x_{m-1}, s, x_{m+1}, \dots, x_n)$, de modo que la Definición 1.1.1 se reduce a:

$$0 \leq V_H(B) = H(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n) - H(x_1, \dots, x_{m-1}, s, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Sabemos que $hsgn(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n) = 1$, pues el v3rtice no coincide en ninguna entrada con el v3rtice $(a_1, \dots, a_{m-1}, s, a_{m+1}, \dots, a_n)$, y $hsgn(x_1, \dots, x_{m-1}, s, x_{m+1}, \dots, x_n) = -1$, pues el v3rtice coincide en la m -3sima entrada con $(a_1, \dots, a_{m-1}, s, a_{m+1}, \dots, a_n)$. Se sigue que $H(x_1, \dots, x_{m-1}, s, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq H(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n)$. \square

A continuaci3n definiremos el concepto de funci3n marginal que depende de la existencia de elementos m3ximos en el dominio de la funci3n.

Definici3n 1.1.7 (Marginales). *Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vac3os de $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $H : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que existe $e_k = \max\{x \mid x \in S_k\}$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces decimos que H tiene marginales. Las marginales unidimensionales de H son funciones H_k dadas por:*

$$\begin{aligned} \text{Dom}H_k &= S_k \text{ para toda } k \in \{1, \dots, n\}. \\ H_k(x) &= H(e_1, \dots, e_{k-1}, x, e_{k+1}, \dots, e_n) \quad \text{para toda } x \in \text{Dom}H_k. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Lema 1.1.8. *Sea H una funci3n n -creciente, fija y con marginales. Entonces, las marginales H_k de H son no decrecientes.*

Adem3s si $(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n) \in \text{Dom}H$, entonces:

$$0 \leq H(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq H_k(t). \quad (1.1.4)$$

Demostraci3n. Del Lema 1.1.6 se sigue que H es no decreciente entrada a entrada por lo que $H_k(t) = H(e_1, \dots, e_{m-1}, t, e_{m+1}, \dots, e_n)$ es no decreciente. Y como $x_k \leq e_k$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$ se sigue que $H(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq H_k(t)$.

Consideremos que $B = [(a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n)]$ con $a_k = \inf\{x \mid x \in S_k\}$, para toda $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces el H-volumen de B es $0 \leq V_H(B) = H(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n)$, por lo que

$$0 \leq H(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq H_k(t). \quad \square$$

Lema 1.1.9. *Sea H n -creciente, fija y con marginales. Para toda $k \in \{1, \dots, n\}$, sean $(x_1, \dots, x_{k-1}, s, x_{k+1}, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \text{Dom}H$ tales que $s < t$. Entonces*

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) - H(x_1, \dots, x_{k-1}, s, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq H_k(t) - H_k(s). \quad (1.1.5)$$

Demostración. Haremos una demostración por casos:
(Caso $n = 2$)

Sean $B_1 = [s, t] \times [x_2, e_2]$ y $B_2 = [x_1, e_1] \times [s, t]$ de la Definición del H -volumen se tiene que:

$$V_H(B_1) = H(t, e_2) - H(s, e_2) - H(t, x_2) + H(s, x_2) \geq 0$$

$$V_H(B_2) = H(e_1, t) - H(e_1, s) - H(x_1, t) + H(x_1, s) \geq 0$$

De aquí se sigue lo siguiente:

$$H_1(t) - H_1(s) \geq H(t, x_2) - H(s, x_2)$$

$$H_2(t) - H_2(s) \geq H(x_1, t) - H(x_1, s).$$

(Caso $n > 2$)

Definimos las siguientes n -cajas:

$$B_1 = [(x_1, a_2, \dots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \dots, a_n), (e_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)]$$

$$B_2 = [(a_1, x_2, \dots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \dots, a_n), (e_1, e_2, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)]$$

\vdots

$$B_{n-1} = [(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \dots, x_n), (e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, t, e_{k+1}, \dots, e_n)]$$

De modo que ,

$$B_1 = [x_1, e_1] \times [a_2, x_2] \times \cdots \times [a_{k-1}, x_{k-1}] \times [s, t] \times [a_{k+1}, x_{k+1}] \times \cdots \times [a_n, x_n]$$

$$B_2 = [a_1, e_1] \times [x_2, e_2] \times \cdots \times [a_{k-1}, x_{k-1}] \times [s, t] \times [a_{k+1}, x_{k+1}] \times \cdots \times [a_n, x_n]$$

\vdots

$$B_{n-1} = [a_1, e_1] \times [a_2, e_2] \times \cdots \times [a_{k-1}, e_{k-1}] \times [s, t] \times [a_{k+1}, e_{k+1}] \times \cdots \times [x_n, e_n]$$

Observamos que los únicos vértices de las cajas B_i que cumplen que todas sus entradas son distintas de a_k son, $(e_1, \dots, e_i, \dots, t, \dots, x_n)$, $(e_1, \dots, e_i, \dots, s, \dots, x_n)$, $(e_1, \dots, x_i, \dots, t, \dots, x_n)$ y $(e_1, \dots, x_i, \dots, s, \dots, x_n)$.

Como H es n -creciente, $V_H(B_i) \geq 0$ para toda $i \in \{1, \dots, n-1\}$, de aquí se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} V_H(B_i) \geq 0. \quad (1.1.6)$$

Como H es fija, para toda $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $H(\mathbf{c}) = 0$ si alguna de las entradas del vértice

\mathbf{c} es igual a a_k para al menos una $k \in \{1, \dots, n\}$, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} V_H(B_i) &= H(e_1, \dots, e_i, \dots, t, \dots, x_n) - H(e_1, \dots, e_i, \dots, s, \dots, x_n) \\ &\quad - H(e_1, \dots, x_i, \dots, t, \dots, x_n) + H(e_1, \dots, x_i, \dots, s, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$hsgn(e_1, \dots, e_i, \dots, t, \dots, x_n) = 1 \quad (1.1.7)$$

$$hsgn(e_1, \dots, e_i, \dots, s, \dots, x_n) = -1 \quad (1.1.8)$$

$$hsgn(e_1, \dots, x_i, \dots, t, \dots, x_n) = -1 \quad (1.1.9)$$

$$hsgn(e_1, \dots, x_i, \dots, s, \dots, x_n) = 1 \quad (1.1.10)$$

Pues el vértice $(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, s, \dots, a_n)$ no coincide en ninguna entrada con el primer vértice, coincide únicamente en la k -ésima entrada con el segundo vértice, únicamente en la i -ésima entrada con el tercer vértice y en la i -ésima y k -ésima entrada con el cuarto vértice.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1.1.6), nos queda una suma telescópica, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} V_H(B_i) &= H(e_1, \dots, e_{k-1}, t, e_{k+1}, \dots, e_n) - H(e_1, \dots, e_{k-1}, s, e_{k+1}, \dots, e_n) \\ &\quad - H(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) + H(x_1, \dots, x_{k-1}, s, x_{k+1}, \dots, x_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) - H(x_1, \dots, x_{k-1}, s, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq H_k(t) - H_k(s).$$

□

Lema 1.1.10. *Sea H n -creciente, fija y con marginales, sea $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \text{Dom}H$, entonces:*

$$|H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{i=1}^n |H_i(x_i) - H_i(y_i)|. \quad (1.1.11)$$

Demostración. Usando los lemas 1.1.8, 1.1.9 y la desigualdad del triángulo se tiene que

$$\begin{aligned}
|H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| &\leq |H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, x_2, \dots, x_n)| + |H(y_1, x_2, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\
&\leq |H_1(x_1) - H_1(y_1)| + |H(y_1, x_2, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\
&\leq |H_1(x_1) - H_1(y_1)| + |H(y_1, x_2, \dots, x_n) - H(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n)| \\
&\quad + |H(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\
&\leq \sum_{i=1}^2 |H_i(x_i) - H_i(y_i)| + |H(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\
&\quad \vdots \\
&\leq \sum_{i=1}^n |H_i(x_i) - H_i(y_i)|.
\end{aligned}$$

□

1.2. Funciones de distribución y cópulas

En esta sección definiremos los conceptos de función de distribución conjunta, n -subcópula y n -cópula, veremos como se relacionan estos conceptos con el célebre teorema de Sklar.

Definición 1.2.1 (Función de distribución conjunta). *Sea $n \geq 2$. Una función de distribución conjunta es una función H que satisface las siguientes condiciones:*

- I. $DomH = \overline{\mathbb{R}}^n$;
- II. H es n -creciente y fija;
- III. $H(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Si una función cumple estas condiciones, diremos que es una función de distribución conjunta n -dimensional, o sólo distribución conjunta.

Definición 1.2.2 (n -subcópula). *Sea $n \geq 2$. Una n -subcópula es una función C' que satisface las siguientes condiciones:*

- I. $DomC' = S_1 \times \dots \times S_n$ tal que $S_k \subseteq \mathbf{I}$ y $0, 1 \in S_k$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$.
- II. C' es n -creciente y fija.
- III. Para toda $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \leq n$, la marginal C'_k de C' satisface:

$$C'_k(u) = u \quad \text{para toda } u \in S_k. \quad (1.2.1)$$

Definición 1.2.3 (*n*-cópula). Una *n*-cópula C es una *n*-subcópula cuyo dominio es \mathbf{I}^n .

De las definiciones anteriores podemos observar que ambas funciones, distribución conjunta y cópula, tienen características muy similares. Dichas características nos serán de gran utilidad para relacionar de manera formal estos dos conceptos.

Ejemplo 1.2.4. Sea $M^2 : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$, tal que $M^2(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$. Entonces M^2 es una *n*-cópula.

- I. $\text{Dom}M^2 = \mathbf{I}^2$.
- II. Si $x_1 = 0$, entonces $M^2(0, x_2) = 0$.
- III. Si $x_2 = 0$, entonces $M^2(x_1, 0) = 0$.
- IV. $M_1^2(x) = \min(x, 1) = x$ y $M_2^2(y) = \min(1, y) = y$
- V. Sea $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ una 2-caja, se tiene que:

$$V_{M^2}(B) = \min(b_1, b_2) - \min(a_1, b_2) - \min(a_2, b_1) + \min(a_1, a_2)$$

Caso 1. $a_1 < a_2$

$$\begin{aligned} V_{M^2}(B) &= \min(b_1, b_2) - \min(a_2, b_1) = \begin{cases} 0 & \text{Si } b_1 < a_2 \\ \min(b_1, b_2) - a_2 & \text{Si } b_1 \geq a_2 \end{cases} \\ &= \max\{\min(b_1, b_2) - a_2, 0\}. \end{aligned}$$

El máximo se explica ya que cuando $b_1 < a_2$ la diferencia $\min(b_1, b_2) - a_2 = b_1 - a_2$ es negativa, por lo que siempre toma el valor máximo entre $\min(b_1, b_2) - a_2$ y 0.

Caso 2. $a_2 \leq a_1$

$$\begin{aligned} V_{M^2}(B) &= \min(b_1, b_2) - \min(a_1, b_2) = \begin{cases} 0 & \text{Si } b_2 < a_1 \\ \min(b_1, b_2) - a_1 & \text{Si } b_2 \geq a_1 \end{cases} \\ &= \max\{\min(b_1, b_2) - a_1, 0\}. \end{aligned}$$

El máximo se explica de forma análoga al caso 1.

Observamos que en todos los casos se cumple que,

$$V_{M^2}(B) = \max\{\min(b_1, b_2) - \max(a_1, a_2), 0\} \geq 0.$$

Entonces por I, II, III, IV y V concluimos que M^n es una n -Cópula. Esta cópula es conocida como la cota superior de Fréchet-Hoeffding.

Ejemplo 1.2.5. Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^2$ y

$$W^2(\mathbf{u}) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0),$$

Definida de esta forma W^2 , es una cópula. Por definición el $\text{Dom}W^2 = \mathbf{I}^2$, además

$$W^2(0, u_2) = \max(u_2 - 1, 0) = 0 = \max(u_1 - 1, 0) = W^2(u_1, 0),$$

$$W^2(1, u_2) = \max(u_2, 0) = u_2,$$

$$W^2(u_1, 1) = \max(u_1, 0) = u_1.$$

Sea $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \in \mathbf{I}^2$ una 2-caja, entonces,

$$V_{W^2}(B) = \max(b_2 + b_1 - 1, 0) - \max(b_2 + a_1 - 1, 0) - \max(a_2 + b_1 - 1, 0) + \max(a_2 + a_1 - 1, 0).$$

Caso 1.- $b_2 + b_1 - 1 > 0$

Si $a_2 + a_1 - 1 > 0$, entonces todos los vértices cumplen que $c_1 + c_2 - 1 > 0$, por lo que

$$V_{W^2}(B) = (b_2 + b_1 - 1) - (b_2 + a_1 - 1) - (a_2 + b_1 - 1) + (a_2 + a_1 - 1) = 0$$

Si $a_2 + a_1 - 1 \leq 0$, tenemos los siguientes casos:

$$(a) V_{W^2}(B) = (b_2 + b_1 - 1) - (b_2 + a_1 - 1) - (a_2 + b_1 - 1) = 1 - a_1 - a_2 \geq 0.$$

$$(b) V_{W^2}(B) = (b_2 + b_1 - 1) - (b_2 + a_1 - 1) = b_1 - a_1 > 0.$$

$$(c) V_{W^2}(B) = (b_2 + b_1 - 1) - (a_2 + b_1 - 1) = b_2 - a_2 > 0.$$

Caso 2.- $b_2 + b_1 - 1 \leq 0$

En este caso todos los vértices cumplen que $c_1 + c_2 - 1 \leq 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} V_{W^2}(B) &= \max(b_2 + b_1 - 1, 0) - \max(b_2 + a_1 - 1, 0) - \max(a_2 + b_1 - 1, 0) + \max(a_2 + a_1 - 1, 0) \\ &= 0 - 0 - 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Hemos probado que W^2 cumple con las condiciones para ser cópula. Esta cópula es conocida como la cota inferior de Fréchet-Hoeffding.

Lema 1.2.6. Una n -subcópula C' es uniformemente continua en su dominio y para toda $\mathbf{x} \in \text{Dom}C'$ se cumple:

$$0 \leq C'(\mathbf{x}) \leq \text{Mín}(x_1, \dots, x_n). \quad (1.2.2)$$

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Dom}C'$ tal que $\sum_{k=1}^n |x_k - y_k| < \varepsilon$, con x_k, y_k no necesariamente distintos. Luego del Lema 1.1.10 y de la ecuación (1.2.1) se obtiene,

$$|C'(\mathbf{x}) - C'(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^n |C'_k(x_k) - C'_k(y_k)| = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| < \varepsilon.$$

Es decir, C' es uniformemente continua en su dominio. Luego del Lema 1.1.8 se tiene que,

$$0 \leq C(\mathbf{x}) \leq C_k(x_k) = x_k \text{ para toda } k \in \{1, \dots, n\}$$

Entonces

$$0 \leq C(\mathbf{x}) \leq \text{Mín}(x_1, \dots, x_n).$$

□

El siguiente resultado es necesario para la construcción de las cópulas de racimo, este nos asegura la existencia de las derivadas parciales de una 2-cópula.

Teorema 1.2.7. *Sea C una 2-cópula. Para toda x_i en \mathbf{I} con $i = 1, 2$, la derivada parcial $\partial C(\mathbf{x})/\partial x_i$ existe para casi toda x_j con $j \neq i$, y para $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, se cumple que:*

$$0 \leq \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_i} \leq 1 \text{ con } i = 1, 2. \quad (1.2.3)$$

Las derivadas parciales están definidas y son funciones no decrecientes casi en todos lados en \mathbf{I} .

Para una prueba de este resultado ver Nelsen [2006].

Además de ser derivables, bajo ciertas condiciones las cópulas cumplen con una propiedad adicional, sus derivadas cruzadas son iguales, esto es:

Teorema 1.2.8. *Sea C una 2-Cópula. Si $\partial C(\mathbf{x})/\partial x_2$ y $\partial^2 C(\mathbf{x})/\partial x_1 \partial x_2$ son continuas en \mathbf{I}^2 y la derivada parcial $\partial C(\mathbf{x})/\partial x_1$ existe para toda $x_1 \in (0, 1)$ cuando $x_2 = 0$, entonces $\partial C(\mathbf{x})/\partial x_1$ y $\partial^2 C(\mathbf{x})/\partial x_2 \partial x_1$ existen en $(0, 1)^2$ y $\partial^2 C(\mathbf{x})/\partial x_2 \partial x_1 = \partial^2 C(\mathbf{x})/\partial x_1 \partial x_2$.*

Para una demostración de este resultado ver Seely [1961].

El siguiente concepto es esencial para poder describir la relación básica que guardan las funciones de distribución conjunta y las n -cópulas, una vez definido estaremos en posición de enunciar el Teorema de Sklar.

Definición 1.2.9 (Cuasi-inversa). *Sea H una función de distribución. Entonces una cuasi-inversa de H es cualquier función H^* con dominio en \mathbf{I} tal que:*

I. Si $t \in \text{Ran}H$, entonces $H^*(t)$ es cualquier número $x \in \mathbb{R}$ tal que $H(x) = t$, es decir,

$$H(H^*(t)) = t \quad \text{para toda } t \in \text{Ran}H.$$

II. Si $t \notin \text{Ran}H$, Entonces

$$H^*(t) = \inf\{x | H(x) \geq t\}.$$

Si H es estrictamente creciente, tiene una única cuasi-inversa que coincide con la inversa usual denotada por H^{-1} .

Ahora estamos en posición de enunciar el Teorma de Sklar.

Teorema 1.2.10 (Teorema de Sklar). *Sea H una función de distribución conjunta n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n . Entonces existe una única n -subcópula C' con $\text{Dom}C' = \text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$ tal que,*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C'(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad \text{para toda } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \quad (1.2.4)$$

La n -subcópula está dada por,

$$C'(y_1, \dots, y_n) = H(F_1^*(y_1), \dots, F_n^*(y_n)) \quad \text{para toda } (y_1, \dots, y_n) \in \text{Dom}C'. \quad (1.2.5)$$

Dónde F_k^* representa una cuasi inversa de F_k . Si las funciones F_1, \dots, F_n son todas continuas en \mathbb{R} , entonces C' es una n -Cópula.

De igual forma, si definimos H como en la expresión (1.2.4), F_1, \dots, F_n son funciones de distribución y C' es cualquier subcópula cuyo dominio contiene a $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$, entonces H resulta ser una función de distribución conjunta n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n .

Demostración. Supongamos que H es una función de distribución conjunta, con marginales F_1, \dots, F_n . Se sigue del Lema 1.1.10 que si $F_1(x_1) = F_1(y_1), \dots, F_n(x_n) = F_n(y_n)$ con $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq |H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^n |F_k(x_k) - F_k(y_k)| = 0$$

Por lo tanto $H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{y})$.

Es decir, el valor $H(\mathbf{x})$ depende únicamente de los valores $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$. Esto es lo mismo que decir que existe una única función C' con $\text{Dom}C' = \text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$ tal que $H(x_1, \dots, x_n) = C'(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$. Ahora veamos que en efecto C' es una n -subcópula,

i. Sabemos que $0, 1 \in \text{Ran}F_k \subseteq \mathbf{I}$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces $\text{Dom}C' = \text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n \subseteq \mathbf{I}^n$ por ser F_k función de distribución.

ii. Como $H(x_1, \dots, x_n) = C'(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, se sigue que si $x_k = -\infty$, entonces

$$0 = H(x_1, \dots, -\infty, \dots, x_n) = C'(F_1(x_1), \dots, F_k(-\infty), \dots, F_n(x_n)) = C'(F_1(x_1), \dots, 0, \dots, F_n(x_n)), \quad (1.2.6)$$

por ser H y F_k funciones de distribución. Por lo tanto C' es fija.

Sea $B' = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, usando que H es n creciente se cumple

$$V_{C'}(B') = \sum_{\mathbf{c}} \text{hsgn}(\mathbf{c}) C'(\mathbf{c}) = \sum_{\mathbf{c}} \text{hsgn}(\mathbf{c}) H(F_1^*(c_1), \dots, F_n^*(c_n)) = V_H(B) \geq 0,$$

dónde $B = [F_1^*(a_1), F_1^*(b_1)] \times \dots \times [F_n^*(a_n), F_n^*(b_n)]$ es una n -caja, pues las funciones F_i^* son no decrecientes por lo que si $a_i \leq b_i$ se cumple que $F_i^*(a_i) \leq F_i^*(b_i)$. Por lo tanto C' es n -creciente.

iii. Sea $k \leq n$ y sea C'_k la marginal de C' , como $\text{Dom}C'_k = \text{Ran}F_k$, para toda $u \in \text{Dom}C'_k$ existe $x_k \in \mathbb{R}$ tal que $F_k(x_k) = u$. Entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} C'_k(u) &= C'(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) \\ &= C'(F_1(\infty), \dots, F_{k-1}(\infty), F_k(x_k), F_{k+1}(\infty), \dots, F_n(\infty)) \\ &= H(\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty) = F_k(x_k) = u. \end{aligned}$$

De i, ii y iii se sigue que C' es una n -subcópula.

Para la segunda parte de la demostración sabemos que $F_k(F_k^*(y_k)) = y_k$ para toda $y_k \in \text{Ran}F_k$, de donde haciendo uso de la ecuación (1.2.4) se obtiene,

$$\begin{aligned} H(F_1^*(y_1), \dots, F_n^*(y_n)) &= C'(F_1(F_1^*(y_1)), \dots, F_n(F_n^*(y_n))) \\ &= C'(y_1, \dots, y_n) \quad \text{para toda } (y_1, \dots, y_n) \in \text{Dom}C'. \end{aligned}$$

Si F_k es continua para toda $k = 1, \dots, n$ se tiene que $\text{Dom}C' = \mathbf{I}^n$, en tal caso C' es una n -cópula.

Para el regreso se tiene que si F_1, \dots, F_n son funciones de distribución, y C' es cualquier n -subcópula con $\text{Dom}C' \supseteq \text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$ y definimos a $H(\mathbf{x}) = C'(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, entonces se cumple que

1. $\text{Dom}H = \mathbb{R}^n$, pues el $\text{Dom}F_k = \mathbb{R}$ para toda k .

2. Si $x_k = -\infty$ para alguna $k = 1, \dots, n$. Entonces

$$0 = C'(F_1(x_1), \dots, 0, \dots, F_n(x_n)) = H(x_1, \dots, -\infty, \dots, x_n).$$

Sea $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y usando que C' es n -creciente ,entonces

$$V_H(B) = \sum_{\mathbf{c}} hsgn(\mathbf{c})H(\mathbf{c}) = \sum_{\mathbf{c}} hsgn(\mathbf{c})C'(F_1(c_1), \dots, F_n(c_n)) = V_{C'}(B') \geq 0,$$

con $B' = [F_1(a_1), F_1(b_1)] \times \dots \times [F_n(a_n), F_n(b_n)]$ una n -caja , pues F_i es una función no decreciente por lo que si $a_1 \leq b_1$ se cumple que $F_i(a_1) \leq F_i(b_1)$.Por lo tanto H es fija y n -creciente.

$$3. H(\infty, \dots, \infty) = C'(F_1(\infty), \dots, F_n(\infty)) = C'(1, \dots, 1) = 1.$$

$$4. H_k(x) = H(\infty, \dots, x, \dots, \infty) = C'(F_1(\infty), \dots, F_k(x), \dots, F_n(\infty)) = C'_k(F_k(x)) = F_k(x).$$

de 1,2,3 y 4 se tiene que H es una función de distribución con marginales F_1, \dots, F_n .

□

Teorema 1.2.11. *Sea H una función de distribución con marginales F_1, \dots, F_n . Entonces existe una n -cópula C tal que,*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad \text{para toda } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad (1.2.7)$$

la cópula C no es necesariamente única.

La demostración de este teorema se sigue directamente del célebre teorema de Sklar y del teorema de extensión, el cual detallaremos a continuación para el caso $n = 2$, este caso nos ayudará a entender como se construye la prueba para dimensiones superiores.

Teorema 1.2.12. *Toda 2-subcópula se puede extender a una 2-cópula, es decir, dada una 2-subcópula C' existe una 2-cópula C tal que*

$$C(x, y) = C'(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in \text{Dom}C'.$$

Demostración. Sea $\text{Dom}C' = S_1 \times S_2$, gracias a la continuidad uniforme de las subcópulas y la propiedad de que la subcópula es no decreciente entrada a entrada, podemos extender a C' por continuidad a una función C'' tal que $\text{Dom}C'' = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, dónde \bar{S}_1 y \bar{S}_2 son la cerradura de S_1 y S_2 . Sabemos que para todo $(x, y) \in \text{Dom}C''$, existen sucesiones convergentes y crecientes $\{x_n\} \rightarrow x$ y $\{y_n\} \rightarrow y$, tales que $x_n \in S_1$, $y_n \in S_2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que se define $C''(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} C'(x_n, y_n)$. Entonces C'' cumple que

$$1. \text{Dom}C'' = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2, \bar{S}_1, \bar{S}_2 \subseteq \mathbf{I} \text{ y como } 0, 1 \in S_k \text{ } k = 1, 2, \text{ entonces } 0, 1 \in \bar{S}_k.$$

II. Sea $x \in \bar{S}_1$, entonces $C''(x, 0) = \lim_{x_n \rightarrow x} C'(x_n, 0) = 0$. Análogamente observamos que $C'''(0, y) = y$, $C'''(1, y) = y$, $C'''(x, 1) = x$.

III. Sea $B = [a'_1, b'_1] \times [a'_2, b'_2]$ una 2-caja y sean $\{a_n^1\} \rightarrow a'_1, \{a_n^2\} \rightarrow a'_2, \{b_n^1\} \rightarrow b'_1$ y $\{b_n^2\} \rightarrow b'_2$, sucesiones convergentes y crecientes. Entonces,

$$\begin{aligned} V_{C''}(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_{C'}([a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{C'(b_n^1, b_n^2) + C'(a_n^1, a_n^2) - C'(b_n^1, a_n^2) - C'(a_n^1, b_n^2)\} \\ &= C'(b'_1, b'_2) + C'(a'_1, a'_2) - C'(b'_1, a'_2) - C'(a'_1, b'_2) \\ &= V_{C'}([a'_1, b'_1] \times [a'_2, b'_2]) \geq 0. \end{aligned}$$

IV. Si $(x, y) \in \text{Dom}C'$,

$$C'''(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} C'(x_n, y_n) = C'(x, y).$$

por lo que C''' es una subcópula que extiende a C' . Si el $\text{Dom}C''' = \mathbf{I}^2$ entonces habremos terminado, en otro caso extenderemos a la nueva subcópula C''' a una función C con dominio \mathbf{I}^2 . Sea (a, b) cualquier punto en \mathbf{I}^2 , sean a_1 y a_2 tales que $a_1 = \max\{x \in \bar{S}_1 | x \leq a\}$ y $a_2 = \min\{x \in \bar{S}_1 | x \geq a\}$ y sea b_1 y b_2 tales que $b_1 = \max\{y \in \bar{S}_2 | y \leq b\}$ y $b_2 = \min\{y \in \bar{S}_2 | y \geq b\}$. Notemos que si $a \in \bar{S}_1$ entonces $a_1 = a = a_2$, y si $b \in \bar{S}_2$, entonces $b_1 = b = b_2$. Ahora definamos

$$\lambda_1 = \begin{cases} (a - a_1)/(a_2 - a_1), & \text{si } a_1 < a_2, \\ 1, & \text{si } a_1 = a_2; \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} (b - b_1)/(b_2 - b_1), & \text{si } b_1 < b_2, \\ 1, & \text{si } b_1 = b_2; \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} C(a, b) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'''(a_2, b_2). \end{aligned}$$

Definida de esta forma C cumple las siguientes propiedades,

I. El $\text{Dom}C = \mathbf{I}^2$ por construcción.

II. Si $(a, b) \in \text{Dom}C'''$ entonces, $\lambda_1 = 1$ y $\mu_1 = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} C(a, b) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'''(a_2, b_2) \\ &= C'''(a_2, b_2) = C'''(a, b). \end{aligned}$$

III. Sea $a \in \mathbf{I}$, entonces

$$C(a, 0) = (1 - \lambda_1)C'''(a_1, 0) + \lambda_1C'''(a_2, 0) = 0,$$

análogamente observamos que $C(0, b) = 0$, $C(a, 1) = a$ y $C(1, b) = b$.

IV. Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbf{I}^2$ tal que $c \geq a$ y $d \geq b$ y sean $c_1, c_2, d_1, d_2, \lambda_2, \mu_2$ relacionados a c y d de igual forma que $a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \mu_1$ están relacionados con a y b . La demostración de esta propiedad se hace por casos, se mostrará a detalle uno de los casos, los demás se demuestran en forma similar.

Supongamos que existe un punto en \bar{S}_1 estrictamente entre a y c , pero no existe ningún punto en \bar{S}_2 entre b y d , tendríamos que $a < a_2 \leq c_1 < c$, $b_1 = d_1$ y $b_2 = d_2$, entonces calculando el volumen de $B = [a, c] \times [b, d]$ obtendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_C(B) &= C(c, d) - C(a, d) - C(c, b) + C(a, b) \\ &= [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_2)C'''(c_1, d_1) + (1 - \lambda_2)\mu_2C'''(c_1, d_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_2)C'''(c_2, d_1) + \lambda_2\mu_2C'''(c_2, d_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C'''(a_1, d_1) + (1 - \lambda_1)\mu_2C'''(a_1, d_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_2)C'''(a_2, d_1) + \lambda_1\mu_2C'''(a_2, d_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C'''(c_1, b_1) + (1 - \lambda_2)\mu_1C'''(c_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_1)C'''(c_2, b_1) + \lambda_2\mu_2C'''(c_2, b_2)] \\ &\quad + [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'''(a_2, b_2)] \\ &= [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_2)C'''(c_1, b_1) + (1 - \lambda_2)\mu_2C'''(c_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_2)C'''(c_2, b_1) + \lambda_2\mu_2C'''(c_2, b_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C'''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_2C'''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_2)C'''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_2C'''(a_2, b_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C'''(c_1, b_1) + (1 - \lambda_2)\mu_1C'''(c_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_1)C'''(c_2, b_1) + \lambda_2\mu_2C'''(c_2, b_2)] \\ &\quad + [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'''(a_2, b_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \lambda_2)C'''(c_1, b_1)[\mu_1 - \mu_2] + (1 - \lambda_2)C'''(c_1, b_2)[\mu_2 - \mu_1] \\
&+ \lambda_2C'''(c_2, b_1)[\mu_1 - \mu_2] + \lambda_2C'''(c_2, b_2)[\mu_2 - \mu_1] \\
&+ (1 - \lambda_1)C'''(a_1, b_1)[\mu_2 - \mu_1] + (1 - \lambda_1)C'''(a_1, b_2)[\mu_1 - \mu_2] \\
&+ \lambda_1C'''(a_2, b_1)[\mu_2 - \mu_1] + \lambda_1C'''(a_2, b_2)[\mu_1 - \mu_2] \\
&= [\mu_2 - \mu_1]\{(1 - \lambda_2)C'''(c_1, b_2) - (1 - \lambda_2)C'''(c_1, b_1) \\
&- \lambda_2C'''(c_2, b_1) + \lambda_2C'''(c_2, b_2)\} \\
&+ [\mu_2 - \mu_1]\{(1 - \lambda_1)C'''(a_1, b_1) - (1 - \lambda_1)C'''(a_1, b_2) \\
&- \lambda_1C'''(a_2, b_2) + \lambda_1C'''(a_2, b_1)\} \\
&= [\mu_2 - \mu_1]\{\lambda_2(C'''(c_1, b_1) + C'''(c_2, b_2) - C'''(c_1, b_2) - C'''(c_2, b_1)) \\
&- \lambda_1(C'''(a_1, b_1) + C'''(a_2, b_2) - C'''(a_1, b_2) - C'''(a_2, b_1))\} \\
&+ [\mu_2 - \mu_1]\{C'''(c_1, b_2) + C'''(a_1, b_1) - C'''(c_1, b_1) - C'''(a_1, b_2)\} \\
&= [\mu_2 - \mu_1]\{\lambda_2V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) + V_{C''}([a_1, c_1] \times [b_1, b_2]) \\
&- \lambda_1V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])\}.
\end{aligned}$$

La diferencia que se encuentra entre $\{\cdot\}$ es positiva pues ,

$$\begin{aligned}
V_{C''}([a_1, c_1] \times [b_1, b_2]) - V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) &= C'''(c_1, b_2) + C'''(a_1, b_1) \\
&- C'''(c_1, b_1) - C'''(a_1, b_2) \\
&- C'''(a_2, b_2) - C'''(a_1, b_1) \\
&+ C'''(a_2, b_1) + C'''(a_1, b_2) \\
&= C'''(c_1, b_2) + C'''(a_2, b_1) \\
&- C'''(a_2, b_2) - C'''(c_1, b_1) \\
&= V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) \geq 0,
\end{aligned}$$

por lo que $V_{C''}([a_1, c_1] \times [b_1, b_2]) \geq V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$ y como $\lambda_1 \leq 1$ se tiene que $V_{C''}([a_1, c_1] \times [b_1, b_2]) \geq \lambda_1 V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$. Por otro lado sabemos que $\mu_2 \geq \mu_1$, pues $d \geq b$ y $b_i = d_i$, $i = 1, 2$. Por lo que podemos afirmar que $V_C(B) \geq 0$.

Los otros casos son cuando no existe un punto en \bar{S}_1 entre a y c ni un punto en \bar{S}_2 entre b y d , cuando no existe un punto en \bar{S}_1 estrictamente entre a y c , pero existe un punto en \bar{S}_2 entre b y d , y cuando existe al menos un punto en \bar{S}_1 entre a y c y al menos un punto \bar{S}_2 entre b y d . La prueba para estos casos es análoga a la del caso mostrado anteriormente. De esta forma hemos probado que toda 2-subcópula puede ser extendida a una 2-cópula.

□

A continuación explicaremos el proceso para la demostración general con $n > 2$, la prueba es muy similar sin embargo el número de casos aumenta y el álgebra se complica.

Primeramente extenderemos a C' a una subcópula C'' , con las mismas características que en el caso $n = 2$, de modo que $\overline{DomC'} = DomC''$ es decir el dominio de C'' es la cerradura del dominio de C' . Si resulta que $DomC'' = \mathbf{I}^2$, la prueba termina, en otro caso sea $\mathbf{x} \in \mathbf{I}^n$ y definamos:

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} (x_i - x_{i_1})/(x_{i_2} - x_{i_1}), & \text{si } x_{i_1} < x_{i_2}, \\ 1, & \text{si } x_{i_1} = x_{i_2}; \end{cases} \quad \text{para toda } i \in \{1, \dots, n\}$$

Recordemos que $DomC'' = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ y $x_{i_1}, x_{i_2} \in \bar{S}_i$ los elementos máximo y mínimo de \bar{S}_i que satisfacen $x_{i_1} \leq x_i \leq x_{i_2}$. Definimos a $\lambda_i^*(\mathbf{x})$ que puede tomar el valor de $\lambda_i(\mathbf{x})$ si la subcópula C'' tiene como i -ésima entrada a x_{i_2} ó $(1 - \lambda_i(\mathbf{x}))$ si la subcópula C'' tiene como i -ésima entrada a x_{i_1} .

Sabemos que para todo punto $\mathbf{x} \in \mathbf{I}^n$, $\mathbf{x} \in B = [x_{1_1}, x_{1_2}] \times \dots \times [x_{n_1}, x_{n_2}]$, bajo estas observaciones definimos la función C de la siguiente forma:

$$C(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{c} \in \zeta} \left\{ \prod_{j=1}^n \lambda_j^*(\mathbf{x}) \right\} C''(\mathbf{c}), \quad (1.2.8)$$

dónde ζ representa el conjunto de vértices de la n -caja B .

Análogamente al caso $n = 2$, se puede probar que esta nueva función C resulta ser una n -cópula que extiende a la n -subcópula C' .

Este último resultado nos dice que toda subcópula C' se puede extender a una n -cópula C de tal forma que $DomC' \subseteq DomC$, sin embargo en el conjunto $\mathbf{I}^n \setminus DomC'$ la cópula C podría no ser única.

Ejemplo 1.2.13. Sea C' definida como, $C'(0, 1) = C'(1, 0) = C'(0, 0) = 0$ y $C'(1, 1) = 1$. Entonces C' es una subcópula, ya que por construcción satisface que $DomC' = S_1 \times S_2 \subset \mathbf{I}^2$, $0, 1 \in S_k$ con $k = 1, 2$, y $V_{C'}([0, 1] \times [0, 1]) = C'(1, 1) - C'(1, 0) - C'(0, 1) + C'(0, 0) = 1 \geq 0$. Como $[0, 1] \times [0, 1]$ es el único rectángulo posible se concluye que C' es una subcópula.

Usando la cópula del teorema anterior se tiene que,

$$\begin{aligned} C(a, b) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'(a_2, b_2) \\ &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'(0, 0) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'(0, 1) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'(1, 0) + \lambda_1\mu_1C'(1, 1) = \lambda_1\mu_1 = ab. \end{aligned}$$

Sin embargo cualquier otra cópula es una extensión de C' .

Ejemplo 1.2.14. *Supongamos que se tienen $X, Y \sim \text{Normal}(0, 1)$, variables aleatorias, deseamos obtener una distribución conjunta con marginales normales estándar, que no sea la Normal bivariada. El teorema de Sklar nos facilita el encontrar esta función, de modo que cualquier cópula satisface nuestras condiciones, excepto la definida por,*

$$C(x, y) = N_\rho(\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(y)),$$

dónde N_ρ es la función de distribución conjunta de una normal bivariada y Φ es la función de distribución de una normal estándar.

Este ejemplo nos abrió una nueva discusión, como sabemos todo vector aleatorio tiene asociado y queda completamente determinado por una función de distribución, de modo que como se muestra en el ejemplo anterior, podemos asociar una cópula a la función de distribución de un vector aleatorio.

1.3. Cópulas y Variables Aleatorias

En esta sección ocuparemos todos los resultados previos y los aplicaremos a las funciones conocidas como variables aleatorias, que como bien sabemos, toda variable aleatoria queda determinada por una única función de distribución .

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, entonces la función H definida como

$$H(\mathbf{x}) = P\{\omega \in \Omega | X_1(\omega) < x_1, \dots, X_n(\omega) < x_n\}$$

es la función de distribución conjunta de X_1, \dots, X_n .

Como consecuencia inmediata del Teorema de Sklar y del Teorema 1.2.11 enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1. *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad, con respectivas funciones de distribución F_1, \dots, F_n y función de distribución conjunta H . Entonces existe una n -cópula C tal que*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad \text{para toda } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \quad (1.3.1)$$

Si todas las funciones F_m con $m = 1, \dots, n$ son continuas, la n -cópula es única.

A esta cópula se la llamará la cópula de X_1, \dots, X_n y se denotará como C_{X_1, \dots, X_n} cuando así se requiera.

El Teorema de Sklar nos da la opción de cambiar el estudio de las funciones de distribución, por el estudio de las cópulas, las cuales exhiben, a simple vista, la estructura de dependencia

entre las variables aleatorias.

A continuación veremos un resultado de utilidad para el estudio del concepto de independencia de variables aleatorias.

Teorema 1.3.2. *Sea $n \geq 2$ y sean X_1, \dots, X_n v.a. continuas. Entonces X_1, \dots, X_n son independientes si y solo si la única n -cópula de X_1, \dots, X_n es $\prod^n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$.*

Demostración. Sabemos que X_1, \dots, X_n son independientes si y sólo si

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) * \dots * F_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

Sólo falta probar que $C = \Pi^n$ es la única cópula de X_1, \dots, X_n . Sabemos que el $Dom \Pi^n = \mathbf{I}^n$, que Π^n es Fija en 0 y que sus Marginales son,

$$C_k(x) = \Pi_k^n(x) = x.$$

Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Dom \Pi^n$, probaremos por inducción que el H -volumen es no negativo, es decir que:

$$V_{\Pi^n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \sum hsgn(\mathbf{c}) \prod_{i=1}^n c_i = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) \geq 0.$$

Demostremos para $k = 2$:

$$V_{\Pi^2}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = b_1 b_2 - b_1 a_2 - b_2 a_1 + a_2 a_1 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \geq 0.$$

Este valor es positivo ya que $b_i > a_i$ con $i = 1, 2$.

Supongamos que se cumple para $k = n$, es decir que :

$$V_{\Pi^n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) \geq 0. \tag{1.3.2}$$

Ahora demostremos que se sigue cumpliendo para $k = n + 1$:

Sea $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{+1} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Usando la ecuación (1.3.2) podemos obtener que:

$$\begin{aligned}
0 \leq (b_{n+1} - a_{n+1})V_{\Pi^n}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) &= (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)(b_{n+1} - a_{n+1}) \\
&= (b_{n+1} - a_{n+1}) \sum_{\mathbf{c}} hsgn(\mathbf{c}) \prod_{i=1}^n c_i \\
&= b_{n+1} \sum_{\mathbf{c}} hsgn(\mathbf{c}) \prod_{i=1}^n c_i + a_{n+1} \sum_{\mathbf{c}} -hsgn(\mathbf{c}) \prod_{i=1}^n c_i \\
&= \sum_{\mathbf{c}} hsgn(\mathbf{c}) \prod_{i=1}^n c_i b_{n+1} + \sum_{\mathbf{c}} -hsgn(\mathbf{c}) \prod_{i=1}^n c_i a_{n+1} \\
&= \sum_{\mathbf{c}} hsgn(\mathbf{c}) \Pi^{n+1}(c_1, \dots, c_n, b_{n+1}) + \sum_{\mathbf{c}} -hsgn(\mathbf{c}) \Pi^{n+1}(c_1, \dots, c_n, a_{n+1}) \\
&= \sum_{\mathbf{c}_{+1}} hsgn(\mathbf{c}_{+1}) \Pi^{n+1}(c_1, \dots, c_{n+1}) = V_{\Pi^{n+1}}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{+1}),
\end{aligned}$$

dónde $\mathbf{c}_{+1} = (c_1, \dots, c_{n+1})$ son los vértices de la $(n+1)$ -caja $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{+1}$. Por lo tanto se cumple que el H -volumen de Π^n es no negativo.

Por lo tanto X_1, \dots, X_n son independientes si y sólo si la única cópula de X_1, \dots, X_n es Π^n \square

Una de las virtudes de este resultado es que nos da condiciones necesarias y suficientes, para determinar cuando las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes.

En adelante trabajaremos únicamente con variables aleatorias absolutamente continuas.

Teorema 1.3.3. *Sea $n \geq 2$ y sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias en $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ espacio de probabilidad, con funciones de distribución continuas F_1, \dots, F_n , función de distribución conjunta H y cópula C . Sean $\alpha_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $m = 1, \dots, n$ funciones estrictamente crecientes. Entonces $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$ son variables aleatorias en $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ con funciones de distribución continuas y cópula C . Es decir C es invariante ante transformaciones estrictamente crecientes de X_1, \dots, X_n .*

Demostración. Como α_m es estrictamente creciente, α_m^* coincide con la inversa usual, por lo que α_m^* es estrictamente creciente. Entonces se tiene que

$$F_{\alpha_m(X_m)}(x) = P(\alpha_m(X_m) \leq x) = P(\alpha_m^*(\alpha_m(X_m)) \leq \alpha_m^*(x)) = P(X_m \leq \alpha_m^*(x)) = F_m(\alpha_m^*(x))$$

y dado que F_m es continua se sigue que F_{α_m} también lo es. Como C es la cópula de X_1, \dots, X_n podemos calcular lo siguiente,

$$\begin{aligned}
C(u_1, \dots, u_n) &= H(F_1^*(u_1), \dots, F_n^*(u_n)) \\
&= P(X_1 \leq F_1^*(u_1), \dots, X_n \leq F_n^*(u_n)) \\
&= P(F_1(\alpha_1^*(\alpha_1(X_1))) \leq u_1, \dots, F_n(\alpha_n^*(\alpha_n(X_n))) \leq u_n) \\
&= P(F_{\alpha_1(X_1)}(\alpha_1(X_1)) \leq u_1, \dots, F_{\alpha_n(X_n)}(\alpha_n(X_n)) \leq u_n) \\
&= P(\alpha_1(X_1) \leq F_{\alpha_1(X_1)}^*(u_1), \dots, \alpha_n(X_n) \leq F_{\alpha_n(X_n)}^*(u_n))
\end{aligned}$$

es decir C es cópula de $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$. □

El último resultado es importante, pues nos ayuda a comprender un poco más sobre la dependencia de variables aleatorias, y nos indica que con transformaciones estrictamente crecientes la estructura de dependencia se mantiene.

A continuación veremos que sucede con funciones estrictamente decrecientes para el caso particular $n = 2$.

Teorema 1.3.4. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias continuas con cópula C_{X_1, X_2} . Sean α_k funciones estrictamente monótonas en el $\text{Ran}X_k$ con $k = 1, 2$.

I. Si α_1 , es estrictamente creciente y α_2 estrictamente decreciente , entonces

$$C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) = u_1 - C_{X_1, X_2}(u_1, 1 - u_2). \quad (1.3.3)$$

II. Si α_2 , es estrictamente creciente y α_1 estrictamente decreciente , entonces

$$C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) = u_2 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2). \quad (1.3.4)$$

III. Si α_1, α_2 son estrictamente decrecientes , entonces

$$C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2) \quad (1.3.5)$$

Demostración. Probaremos el inciso III , los incisos restante se prueban de forma análoga.

Sabemos que $\alpha_k^*(\alpha(x_k)) = x_k$ con $k = 1, 2$, por ser α_k estrictamente decrecientes, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
F_{\alpha(X_k)}(x_k) &= P[\alpha(X_k) \leq x_k] \\
&= P[\alpha_k^*(\alpha_k(X_k)) \geq \alpha_k^*(x_k)] \\
&= 1 - P[X_k < \alpha_k^*(x_k)] = 1 - F_{X_k}(\alpha_k^*(x_k)), \text{ con } k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
C_{X_1, X_2}(v_1, v_2) &= H(F_{X_1}^*(v_1), F_{X_2}^*(v_2)) \\
&= P[F_{X_1}(X_1) \leq v_1, F_{X_2}(X_2) \leq v_2] \\
&= P[F_{X_1}(\alpha_1^*(\alpha_1(X_1))) \leq v_1, F_{X_2}(\alpha_2^*(\alpha_2(X_2))) \leq v_2] \\
&= P[1 - F_{\alpha_1(X_1)}(\alpha_1(X_1)) \leq v_1, 1 - F_{\alpha_2(X_2)}(\alpha_2(X_2)) \leq v_2] \\
&= P[1 - v_1 \leq F_{\alpha_1(X_1)}(\alpha_1(X_1)), 1 - v_2 \leq F_{\alpha_2(X_2)}(\alpha_2(X_2))] \\
&= 1 - P[F_{\alpha_1(X_1)}(\alpha_1(X_1)) \leq 1 - v_1] - P[F_{\alpha_2(X_2)}(\alpha_2(X_2)) \leq 1 - v_2] \\
&\quad + P[F_{\alpha_1(X_1)}(\alpha_1(X_1)) \leq 1 - v_1, F_{\alpha_2(X_2)}(\alpha_2(X_2)) \leq 1 - v_2] \\
&= 1 - (1 - v_1) - (1 - v_2) + C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(1 - v_1, 1 - v_2).
\end{aligned}$$

Ya que $P[F_{\alpha_i(X_i)}(\alpha_i(X_i)) \leq x] = x$, pues $F_{\alpha_i(X_i)}(\alpha_i(X_i))$ es una v.a. uniforme en \mathbf{I} .

Despejando a $C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}$ y haciendo $u_i = 1 - v_i$ con $i = 1, 2$, obtenemos que,

$$C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2), \quad (1.3.6)$$

lo que prueba el inciso III.

El resto de los incisos se prueban similarmente. □

Los últimos resultados son importantes pues nos dan de forma explícita la cópula de las variables aleatorias con una transformación particular.

Por la naturaleza del presente trabajo, en lo que resta sólo serán necesarios los resultados para cópulas bivariadas.

Se dice que un vector aleatorio (X_1, X_2) es absolutamente continuo si existe una función $f_{X_1, X_2} > 0$, tal que

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1, X_2}(u_1, u_2) du_2 du_1.$$

A esta función se le conoce como la densidad del vector aleatorio (X_1, X_2) . Existen vectores aleatorios que no son absolutamente continuos, como veremos a continuación.

Ejemplo 1.3.5. Consideremos la siguiente función de distribución conjunta,

$$F_{X, Y}(x, y) = x \mathbf{1}_{\{0 < x < 1, y \geq x\}} + y \mathbf{1}_{\{0 < y < 1, y < x\}} + \mathbf{1}_{\{x \geq 1, y \geq 1\}}.$$

Esta función de distribución es resultado del experimento de seleccionar al azar un punto sobre la recta con pendiente 1 en el cuadrado unitario, esta región la llamaremos D . Luego la probabilidad de que el punto seleccionado esté contenido en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es igual a la longitud del segmento $A \cap D$ entre la longitud del segmento D [8].

Por lo que si F fuera absolutamente continua se tendría que,

$$1 = P[(X, Y) \in D] = \iint_D f_{X,Y}(x, y) dx dy = 0,$$

puesto que el área de D es 0. Por lo tanto la función de distribución conjunta F no es absolutamente continua.

Como ya hemos visto existe una fuerte relación entre las funciones de distribución conjuntas y las cópulas, de modo que es intuitivo pensar que las propiedades de las funciones de distribución conjuntas estén fuertemente relacionados con las propiedades de las cópulas. A continuación veremos como relacionar el concepto de absolutamente continuo con las cópulas.

Definición 1.3.6. Sea C una cópula, se define el componente absolutamente continuo como,

$$A_C(u_1, u_2) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} C(s_1, s_2) ds_2 ds_1$$

Toda cópula se puede escribir de la forma [14]:

$$C(u_1, u_2) = A_C(u_1, u_2) + S_C(u_1, u_2),$$

dónde A_C es el componente absolutamente continuo de la cópula y

$$S_C(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) - A_C(u_1, u_2).$$

El teorema 1.2.8 nos asegura que las derivadas parciales de C están bien definidas, por consecuencia A_C está bien definida. Si $C \equiv A_C$ se dice que C es absolutamente continua, si $C \equiv S_C$ se dice que C es singular, en cualquier otro caso se dice que C tiene componente absolutamente continuo y componente singular.

1.4. Cópulas Arquimedianas

En esta sección estudiaremos a la clase de cópulas arquimedianas, este tipo de cópulas son importantes en la práctica, pues pueden describir una gran variedad de estructuras de dependencia, además de tener una sencilla construcción.

Definición 1.4.1. Sea $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente, tal que $\varphi(1) = 0$. La pseudo-inversa de φ es la función $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow \mathbf{I}$, dada por,

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Observamos que $\varphi^{[-1]}$ es continua y no creciente en $[0, \infty]$, y estrictamente decreciente en $[0, \varphi(0)]$. Además $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ en \mathbf{I} , y

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Y finalmente si $\varphi(0) = \infty$, entonces $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

A continuación veremos unos resultados sobre este tipo de funciones para posteriormente caracterizar a las cópulas Arquimedianas.

Lema 1.4.2. Sea $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente, tal que $\varphi(1) = 0$ y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa de φ . Sea $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ dada por,

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (1.4.2)$$

Entonces C es fija con marginales u y v .

Demostración. La función C cumple que,

$$C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0 = \varphi^{[-1]}(\varphi(0) + \varphi(v)) = C(0, v),$$

$$C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u,$$

$$\text{y } C(1, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(1) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v)) = v.$$

□

Lema 1.4.3. Sea $\varphi, \varphi^{[-1]}$ y C como en el Lema 1.4.2. Entonces C es 2-creciente si y sólo si para toda $v \in \mathbf{I}$, con $u_1 \leq u_2$,

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1. \quad (1.4.3)$$

Demostración. Sea $v \in \mathbf{I}$. Ya que la expresión (1.4.3) es equivalente a

$$V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) = C(u_2, 1) - C(u_1, 1) - C(u_2, v) + C(u_1, v) = u_2 - u_1 - C(u_2, v) + C(u_1, v) \geq 0,$$

esta se cumple siempre que C sea 2-creciente.

Ahora supongamos que C satisface la expresión (1.4.3). Sean $v_1, v_2 \in \mathbf{I}$ tales que $v_1 \leq v_2$, y notemos que $C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$. Como C es continua, ya que φ y $\varphi^{[-1]}$ lo

son, existe una $t \in \mathbf{I}$ tal que $C(t, v_2) = v_1$, o $\varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1)$. También

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)), \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)), \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2))) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2))) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t), \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2), \end{aligned}$$

por lo tanto C es 2-creciente. □

El siguiente resultado nos dará una caracterización de las cópulas Arquimedianas en términos de una función φ .

Teorema 1.4.4. *Sea $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente, tal que $\varphi(1) = 0$ y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa de φ . Sea $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ dada por,*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Entonces C es una cópula si y sólo si φ es convexa.

Demostración. Gracias al lema 1.4.2 sabemos que C es fija y con marginales, es decir cumple las condiciones de frontera para ser una cópula y gracias al lema anterior sólo debemos probar que la expresión (1.4.3) se cumple si y sólo si φ es convexa. Notemos que φ es convexa si y sólo si $\varphi^{[-1]}$ es convexa. Observemos que (1.4.3) es equivalente a

$$u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v))$$

con $u_1 \leq u_2$, de forma que si $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$, y $c = \varphi(v)$, entonces (1.4.3) será equivalente a

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c), \quad (1.4.4)$$

con $a \geq b$ y $c \geq 0$. Ahora supongamos que (1.4.3) se cumple, es decir, φ satisface (1.4.4). Sean $s, t \in [0, \infty]$, tal que $0 \leq s < t$. Si $a = (s + t)/2$, $b = s$, y $c = (t - s)/2$, se tiene que

$$\varphi^{[-1]} \left(\frac{s + t}{2} \right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}. \quad (1.4.5)$$

Es decir, $\varphi^{[-1]}$ es medio-convexa [14], y ya que $\varphi^{[-1]}$ es continua, se sigue que $\varphi^{[-1]}$ es convexa.

Ahora supongamos que $\varphi^{[-1]}$ es convexa. Sean $a, b, c \in \mathbf{I}$ fijos, tales que $a \geq b$ y $c \geq 0$; y sea $\gamma = \frac{a-b}{a-b+c}$. Entonces $a = (1 - \gamma)b + \gamma(a + c)$ y $b + c = \gamma b + (1 - \gamma)(a + c)$, y también

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a + c)$$

y

$$\varphi^{[-1]}(b+c) \leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c).$$

Sumando estas expresiones obtenemos

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b+c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a+c),$$

con lo que termina la prueba. □

Estos resultados nos dan todos los elementos necesarios para poder definir a las cópulas Arquimedianas:

Definición 1.4.5 (Cópulas Arquimedianas). *Sea $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente y convexa tal que $\varphi(1) = 0$. Sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa de φ y $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ dada por,*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

A las cópulas de esta forma se les llama cópulas Arquimedianas. La función φ es llamado el generador de la cópula. Si $\varphi(0) = \infty$, decimos que φ es un generador estricto. En este caso a C se le conoce como cópula Arquimediana estricta.

A continuación veremos algunas de las propiedades de este tipo de cópulas.

Teorema 1.4.6. *Sea C una cópula Arquimediana con generador φ . Entonces*

- I. *C es simétrica. Es decir $C(u, v) = C(v, u)$ para toda $u, v \in \mathbf{I}$.*
- II. *C es asociativa. Es decir $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para toda $u, v, w \in \mathbf{I}$.*

Demostración. Probaremos I.

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) = C(v, u).$$

Ahora probaremos el punto II.

Caso 1 ($\varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) \leq \varphi(0)$).

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) = C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

Caso 2 ($\varphi(u) + \varphi(v) > \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$).

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(0) + \varphi(w)) = 0 \\ C(u, C(v, w)) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0. \end{aligned}$$

Caso 3 ($\varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$).

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + [\varphi(v) + \varphi(w)]) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(u, C(v, w)) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0. \end{aligned}$$

Caso 4 ($\varphi(u) + \varphi(v) > \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) \leq \varphi(0)$).

El caso 4 se prueba análogo al caso 3, con lo que queda probado el resultado. □

La propiedad de asociatividad de las cópulas Arquimedianas radica en las características del generador, por este motivo no todas las cópulas tienen esta propiedad.

A continuación mostraremos algunas de las familias de cópulas Arquimedianas más representativas, así como algunas de sus propiedades.

1.4.1. Familia Ali Mikhail Haq

Sea $\varphi(t) = Ln[\frac{1 - \theta(1 - t)}{t}]$, con $\theta \in [-1, 1]$.

Sabemos que φ es continua, $\varphi(1) = 0$ y como $\varphi'(t) = \frac{\theta - 1}{t(1 - \theta(1 - t))}$, φ es estrictamente decreciente en \mathbf{I} . También se tiene que $\varphi''(t) \geq 0$, es decir φ es convexa. Y $\varphi(0) = \infty$, es decir es un generador estricto. Entonces la cópula se expresa de la siguiente forma,

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}. \quad (1.4.6)$$

Si $\theta = 0$ obtenemos la cópula producto, y si $\theta = 1$ se tiene que $C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$. A esta familia de cópulas se le conoce como Familia Ali Mikhail Haq.

1.4.2. Familia Gumbel

Sea $\varphi(t) = (-Ln t)^\theta$, con $\theta \geq 1$.

Sabemos que φ es continua, $\varphi(1) = 0$ y como $\varphi'(t) = \frac{-\theta(-Ln t)^{\theta-1}}{t}$, φ es estrictamente decreciente en **I**. También se tiene que $\varphi''(t) \geq 0$, es decir φ es convexa. Y $\varphi(0) = \infty$, es decir es un generador estricto. Entonces la cópula se expresa de la siguiente forma,

$$C_\theta(u, v) = \exp\{-[(-Ln u)^\theta + (-Ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\}. \quad (1.4.7)$$

Se puede observar que $C_1 = \Pi^2$ y $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M^2$. A esta familia se le conoce como Familia Gumbel.

1.4.3. Familia Clayton

Sea $\varphi(t) = \frac{(t^{-\theta} - 1)}{\theta}$, con $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$.

Sabemos que φ es continua, $\varphi(1) = 0$ y como $\varphi'(t) = -t^{-(\theta+1)}$, φ es estrictamente decreciente en **I**. También se tiene que $\varphi''(t) \geq 0$, es decir φ es convexa. Y $\varphi(0) \neq \infty$, es decir no es un generador estricto. Entonces la cópula se expresa de la siguiente forma,

$$C_\theta(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0). \quad (1.4.8)$$

Para $\theta > 0$ la expresión anterior se simplifica,

$$C_\theta(u, v) = [u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (1.4.9)$$

Se observa que $C_{-1} = W^2$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi^2$ y $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M^2$. Esta familia de cópulas es conocida como la familia Clayton.

1.4.4. Familia Frank

Sea $\varphi(t) = -Ln(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1})$, con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sabemos que φ es continua, $\varphi(1) = 0$ y como $\varphi'(t) = \frac{\theta}{1 - e^{\theta t}}$, φ es estrictamente decreciente en **I**. También se tiene que $\varphi''(t) \geq 0$, es decir φ es convexa. Y $\varphi(0) \neq \infty$, es decir no es un generador estricto. Entonces la cópula se expresa de la siguiente forma,

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} Ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right). \quad (1.4.10)$$

Las cópulas de esta familia son cópulas arquimedianas estrictas y se observar que, $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_\theta = W^2$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi^2$ y $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M^2$. Esta familia de cópulas es conocida como la familia Frank.

Capítulo 2

Cóputas de Racimo

Las cóputas de racimo son un método para la construcción de modelos de dependencia multivariados. La metodología se basa en la descomposición de una función de densidad multivariada en un 'racimo' de 2-cóputas ajustadas a las variables originales y sus funciones de distribución condicionales. A lo largo de este capítulo detallaremos la metodología de construcción de este tipo de modelos.

2.1. Descomposición de funciones de distribución multivariadas en cóputas bivariadas

Si consideramos n variables aleatorias $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ con función de densidad conjunta $f(x_1, \dots, x_n)$, esta función de densidad puede ser factorizada como,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_n)f(x_{n-1}|x_n)f(x_{n-2}|x_{n-1}, x_n) \cdots f(x_1|x_2, \dots, x_n), \quad (2.1.1)$$

esta descomposición es única, salvo por el orden de las variables.

Este resultado nos dice que las funciones de distribución contienen información marginal de cada variable y de su estructura de dependencia.

Consideremos una función de distribución absolutamente continua F con marginales continuas y estrictamente crecientes F_1, \dots, F_n y función de densidad conjunta f , como consecuencia del teorema de Sklar se tiene que

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1,2,\dots,n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))f_1(x_1) \cdots f_n(x_n), \quad (2.1.2)$$

dónde $c_{1,2,\dots,n}(\cdot)$ se le conoce como la densidad de la cóputa C y se define como

$$c_{1,2,\dots,n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n). \quad (2.1.3)$$

El caso bivariado se simplifica a ,

$$f(x_1, x_2) = c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2), \quad (2.1.4)$$

dónde $c_{1,2}(\cdot, \cdot)$ es la cópula que ajusta a las variables transformadas $F_1(X_1)$ y $F_2(X_2)$. Para una densidad condicional se sigue,

$$f(x_1|x_2) = c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1), \quad (2.1.5)$$

para la misma cópula.

De la ecuación (2.1.1), podemos descomponer el segundo factor como la cópula ,

$$f(x_{n-1}|x_n) = c_{(n-1),n}(F_{n-1}(x_{n-1}), F_n(x_n))f_{n-1}(x_{n-1}). \quad (2.1.6)$$

Joe [9] fue el primero en desarrollar una construcción de funciones de distribución multivariada basada en cópulas bivariadas, los siguientes son algunos de sus resultados.

Para tres variables aleatorias tendríamos que,

$$f(x_1|x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2|x_3)}{f(x_2|x_3)} \quad (2.1.7)$$

$$= \frac{c_{1,2|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3))f(x_1|x_3)f(x_2|x_3)}{f(x_2|x_3)} \quad (2.1.8)$$

$$= c_{1,2|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3))f(x_1|x_3), \quad (2.1.9)$$

para la cópula $C_{1,2|3}$ apropiada, es decir la cópula de las variables $F_{1|3}(X_1|X_3)$ y $F_{2|3}(X_2|X_3)$. Una descomposición alternativa sería,

$$f(x_1|x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_3|x_2)}{f(x_3|x_2)} \quad (2.1.10)$$

$$= \frac{c_{1,3|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2))f(x_1|x_2)f(x_3|x_2)}{f(x_3|x_2)} \quad (2.1.11)$$

$$= c_{1,3|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2))f(x_1|x_2), \quad (2.1.12)$$

dónde $c_{1,3|2} \neq c_{1,2|3}$. Si descomponemos el último factor de la expresión anterior, se tiene que

$$f(x_1|x_2, x_3) = c_{1,3|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2))f(x_1|x_2) \quad (2.1.13)$$

$$= c_{1,3|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2))c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1). \quad (2.1.14)$$

Con esto queda ejemplificado que cada factor de la expresión (2.1.1), puede expresarse como una cópula multiplicada por una densidad marginal.

En general,

$$f(x|\mathbf{v}) = c_{x,v_j|\mathbf{v}-j}(F(x|\mathbf{v}-j), F(v_j|\mathbf{v}-j))f(x|\mathbf{v}-j), \quad (2.1.15)$$

dónde \mathbf{v} es un vector d -dimensional, v_j es un componente arbitrario de \mathbf{v} y $\mathbf{v}-j$ es el vector formado al excluir el componente v_j . En conclusión una función de densidad conjunta puede expresarse como producto de cópulas bivariadas cuyos argumentos son funciones de distribución condicionales.

La construcción con cópulas bivariadas involucra funciones marginales de distribución condicional de la forma $F(x|\mathbf{v})$. Para todo j es posible probar que ,

$$F(x|\mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x,v_j|\mathbf{v}}(F(x|\mathbf{v}-j), F(v_j|\mathbf{v}-j))}{\partial F(v_j|\mathbf{v}-j)}, \quad (2.1.16)$$

dónde $C_{x,v_j|\mathbf{v}}$ es una cópula bivariada [9] . Para el caso particular dónde $\mathbf{v} = v$, se tiene que,

$$F(x|v) = \frac{\partial C_{x,v}(F_X(x), F_V(v))}{\partial v}, \quad (2.1.17)$$

En lo que resta del capítulo usaremos la función $h(x, v, \theta)$ para representar esta función de distribución condicional cuando x y v son uniformes, es decir $f(x) = f(v) = 1, F(x) = x$ y $F(v) = v$, entonces

$$h(x, v, \theta) = F(x|v) = \frac{\partial C_{x,v}(x, v, \theta)}{\partial v}, \quad (2.1.18)$$

dónde θ representa el conjunto de parámetros de la cópula $C_{x,v}$. Y sea $h^{-1}(u, v, \theta)$ la inversa de la función $h(x, v, \theta)$ con respecto de x , es decir la inversa de la función de distribución condicional $F(x|v)$. Esta función da como resultado una observación condicional de la v.a. $X|V$, es decir un valor de la v.a. X que depende de V . En este trabajo usaremos únicamente cópulas simétricas en el sentido que $C(u, v) = C(v, u)$, por lo que al intercambiar los argumentos en la función h , cambiara la variable con respecto a quien se deriva , mientras que la cópula asociada será la misma.

2.2. Racimos

Para distribuciones de dimensión $n \geq 2$, existen muchas posibles descomposiciones en cópulas bivariadas. Para ayudar a organizar la construcción de dicha descomposición , Bedford y Cooke [2] [3] , definieron un modelo de construcción gráfico llamado racimo regular. En este trabajo nos concentraremos en un caso particular de los racimos regulares conocido como D -racimo, desarrollado por Kurowicka y Cooke [11]. Este modelo gráfico nos da un camino específico para la descomposición de la función de densidad. Dicha especificación esta dada por un conjunto de árboles anidados. La figura 2.2.1 muestra un D -racimo que consiste de cuatro árboles $T_j, j = 1, 2, 3, 4$. El árbol T_j tiene $6 - j$ nodos y $5 - j$ aristas. A cada arista le corresponde la densidad de una cópula bivariada , por ejemplo a la arista 25|34 le

corresponde la densidad $c_{25|34}$. La descomposición total queda completamente determinada con la selección del primer árbol. Los nodos del árbol T_j sólo son necesarios para definir las etiquetas del árbol T_{j+1} . Como se observa en la figura 2.2.1, dos aristas en T_j se convierten en nodos en T_{j+1} , y son relacionados por una arista, sólo en caso de que las aristas en T_j tengan un nodo en común. El árbol nos ayuda a identificar las distintas descomposiciones de cópulas bivariadas.

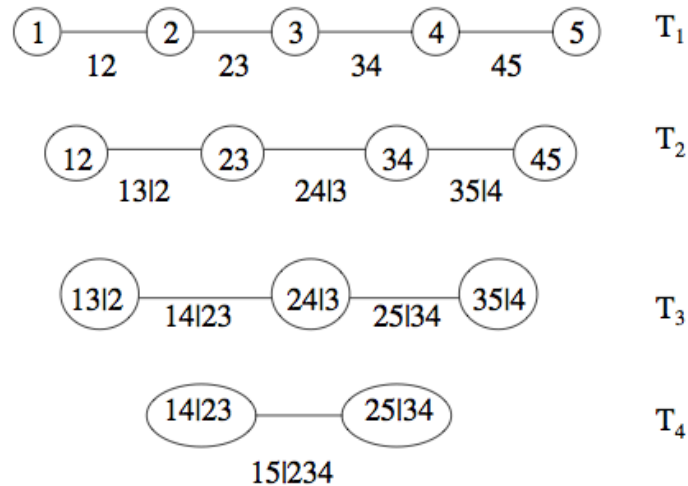


Figura 2.2.1: D -racimo de 5 variables , 4 árboles y 10 aristas.

La función de densidad conjunta para un D -racimo esta dada por ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i,i+j|i+1, \dots, i+j-1}(F(x_i|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}), F(x_{i+j}|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1})), \quad (2.2.1)$$

dónde el índice j representa los árboles , mientras que i las aristas de cada árbol.

En un D -racimo , ningún nodo esta conectado por más de dos aristas. Otro tipo de racimos regulares , dónde esto si sucede , son los racimos canónicos, estos no forman parte de este trabajo, sin embargo se ejemplifican en la Figura 2.2.2.

Descomposición para tres variables

La expresión general de un D -racimo con tres variables es,

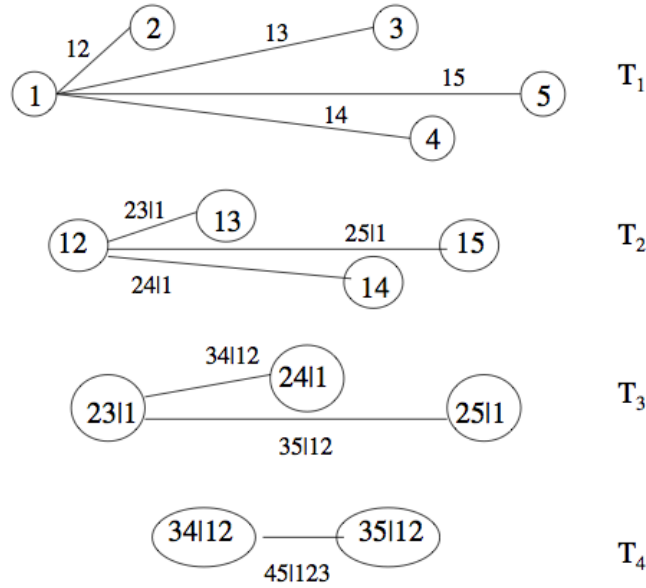


Figura 2.2.2: Racimo canónico de 5 variables , 4 árboles y 10 aristas.

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1)f(x_2)f(x_3) \\
 &\cdot c_{1,2}(F(x_1), F(x_2))c_{2,3}(F(x_2), F(x_3)) \\
 &\cdot c_{13|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)).
 \end{aligned}$$

Existen seis formas de permutar las tres variables , sin embargo sólo tres nos dan descomposiciones diferentes; estas descomposiciones resultan ser D -racimos.

Descomposición para cuatro variables

La estructura de un D -racimo de 4 variables se expresa como,

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) \\
 &\cdot c_{1,2}(F(x_1), F(x_2))c_{2,3}(F(x_2), F(x_3))c_{3,4}(F(x_3), F(x_4)) \\
 &\cdot c_{13|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))c_{24|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)) \\
 &\cdot c_{14|23}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)).
 \end{aligned}$$

En total, existen doce descomposiciones diferentes en D -racimos.

Descomposición para cinco variables

La estructura de un D -racimo de 5 variables se expresa como,

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5) \\
 &\cdot c_{1,2}(F(x_1), F(x_2))c_{2,3}(F(x_2), F(x_3))c_{3,4}(F(x_3), F(x_4))c_{4,5}(F(x_4), F(x_5)) \\
 &\cdot c_{13|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))c_{24|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3))c_{35|4}(F(x_3|x_4), F(x_5|x_4)) \\
 &\cdot c_{14|23}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3))c_{25|34}(F(x_2|x_3, x_4), F(x_5|x_3, x_4)) \\
 &\cdot c_{15|234}(F(x_1|X_2, x_3, x_4), F(x_5|X_2, x_3, x_4))
 \end{aligned}$$

En total, hay sesenta diferentes D -racimos.

Descomposición para n variables

En el caso de los D -racimos, existen $n!$ formas de ordenar nuestras variables en el primer árbol. Sin embargo la mitad de esas combinaciones nos dan descomposiciones iguales. De modo que sólo existen $\frac{n!}{2}$ formas distintas de descomposición de D -racimos.

2.3. Independencia condicional y la descomposición en cópulas bivariadas

Si asumimos independencia condicional, se pueden reducir los niveles de la descomposición, y por tanto simplificar su construcción. Consideremos el caso de tres variables con la descomposición D -racimo. Si asumimos que X_1 y X_3 son independientes dado X_2 , se tendría que $c_{13|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)) = 1$. Por lo que la función de densidad quedaría expresada como,

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)c_{1,2}(F(x_1), F(x_2))c_{2,3}(F(x_2), F(x_3)). \quad (2.3.1)$$

En general, para cualquier vector de variables \mathbf{V} y dos variables X, Y , se tiene que X y Y son condicionalmente independientes dado \mathbf{V} si y sólo si,

$$c_{XY|\mathbf{V}}(F_{X|\mathbf{V}}(x|v), F_{Y|\mathbf{V}}(y|v)) = 1. \quad (2.3.2)$$

El modelo se simplifica únicamente cuando la factorización inicial de la función de densidad conjunta se beneficia de la independencia condicional. Por ejemplo si usamos la descomposición $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2|x_1, x_3)f(x_1|x_3)f(x_3)$ cuando X_1 y X_3 son condicionalmente independientes dado X_2 , todas las cópulas de la descomposición serán requeridas.

Si el supuesto de independencia condicional se hace para simplificar el modelo, habrá que determinar el impacto de este supuesto. Una forma de medir el impacto es tomando la diferencia entre la cópula de la descomposición y uno, es decir $c_{XY|\mathbf{V}}(F_{X|\mathbf{V}}(x|v), F_{Y|\mathbf{V}}(y|v)) - 1$ ¹.

2.4. Simulación

En esta sección profundizaremos en el algoritmo de simulación para los D -racimos y la implementación del mismo. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad asumiremos que las marginales de la distribución de interés son uniformes.

Primero detallaremos el algoritmo general para simular variables aleatorias uniformes con dependencia.

Algoritmo 2.4.1. *Algoritmo de simulación para variables aleatorias dependientes*

► Simular ω_i , con $i = 1, \dots, n$ variables aleatorias independientes uniformes $[0, 1]$.

► Igualar

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_1 \\ x_2 &= F_{2|1}^{-1}(\omega_2|x_1) \\ x_3 &= F_{3|1,2}^{-1}(\omega_3|x_1, x_2) \\ &\dots = \dots \\ x_n &= F_{n|1,2,\dots,n-1}^{-1}(\omega_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Para determinar $F(x_j|x_1, x_2, \dots, x_{j-1})$ para cada j , usamos la definición de la función h (2.1.18) y la relación con la distribución condicional (2.1.16), recursivamente. La v_j de la ecuación (2.1.16) será x_1 , es decir,

$$F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}) = \frac{\partial C_{j,1|2,\dots,j-1}(F(x_j|x_2, \dots, x_{j-1}), F(x_1|x_2, \dots, x_{j-1}))}{\partial F(x_1|x_2, \dots, x_{j-1})}. \quad (2.4.1)$$

El algoritmo anterior nos da una forma de simular un D -racimo de forma recursiva, para esto usaremos las siguientes matrices que contienen la información de las distribuciones condicionales de la descomposición,

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \\ & F(x_2|x_1) & F(x_3|x_2) & F(x_4|x_3) & \dots \\ & & F(x_3|x_2, x_1) & F(x_4|x_3, x_2) & \dots \\ & & & F(x_4|x_3, x_2, x_1) & \dots \\ & & & & \dots \end{pmatrix},$$

¹Ver apéndice A.6.

información de distribuciones condicionales auxiliares para la simulación,

$$V^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots \\ & F(x_1|x_2) & F(x_2|x_3) & F(x_3|x_4) & \cdots \\ & & F(x_1|x_2, x_3) & F(x_2|x_3, x_4) & \cdots \\ & & & F(x_1|x_4, x_3, x_2) & \cdots \\ & & & & \cdots \end{pmatrix},$$

y una matriz con los parámetros de las cópulas de la descomposición,

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{12} & \theta_{23} & \theta_{34} & \cdots \\ & \theta_{13|2} & \theta_{24|3} & \cdots \\ & & \theta_{14|23} & \cdots \\ & & & \cdots \end{pmatrix}.$$

Observamos que las matrices definidas de esta forma son matrices cuadradas, V y V^2 son matrices de $d \times d$, mientras que Θ es de $d-1 \times d-1$, dónde d es la dimensión de la cópula de racimo.

A continuación detallaremos el algoritmo escrito como lenguaje de programación.

Algoritmo 2.4.2. *Algoritmo de simulación para un D-racimo*

I. *Simular $\omega_i \sim U[0, 1]$, $i = 1, \dots, n$.*

II. *Ejecutar el siguiente código para la matriz de parámetros Θ .*

```

for(i in 2 : d)
  Vi,i = ωi
  for(k in (i - 1) : 1)
    Vk,i = h-1(Vk+1,i, Vk,i-12, Θk,i-1)
    if(i < d)
      Vk+1,i2 = h(Vk,i-12, Vk,i2, Θk,i-1)
    end if
  end for
V1,i2 = V1,i
end for

```

Observemos que el algoritmo está escrito con notación matricial, por ejemplo cuando se hace referencia a $\Theta_{1,1}$ el valor asociado a esa referencia es θ_{12} , es decir al parámetro de la cópula 1 en el árbol 1.

A continuación mostraremos los pasos necesarios para simular un D -racimo de tres y cuatro variables.

2.4.1. Simulación de un D -racimo para 3 variables

Simulamos ω_i con $i = 1, 2, 3$ variables aleatorias uniformes $[0, 1]$ independientes. Luego ,

$$x_1 = \omega_1.$$

Se sigue que ,

$$F(x_2|x_1) = h(x_2, x_1, \theta_{12}).$$

De modo que ,

$$x_2 = h^{-1}(\omega_2, x_1, \theta_{12}),$$

con h^{-1} la inversa de la función de distribución condicional $F(\cdot|x_1)$.

Finalmente,

$$F(x_3|x_1, x_2) = h(F(x_3|x_1), F(x_2, x_1), \theta_{23|1}) = h(h(x_3, x_1, \theta_{13}), h(x_2, x_1, \theta_{12}), \theta_{23|1}),$$

por lo que,

$$\begin{aligned} h(h(x_3, x_1, \theta_{13}), h(x_2, x_1, \theta_{12}), \theta_{23|1}) &= \omega_3, \\ h(x_3, x_1, \theta_{13}) &= h^{-1}(\omega_3, h(x_2, x_1, \theta_{12}), \theta_{23|1}), \\ x_3 &= h^{-1}(h^{-1}(\omega_3, h(x_2, x_1, \theta_{12}), \theta_{23|1}), x_1, \theta_{13}). \end{aligned}$$

2.4.2. Simulación de un D -racimo para 4 variables

Simulamos ω_i con $i = 1, 2, 3, 4$ variables aleatorias uniformes $[0, 1]$ independientes. Luego ,

$$x_1 = \omega_1.$$

Se sigue que ,

$$F(x_2|x_1) = h(x_2, x_1, \theta_{12}).$$

De modo que ,

$$x_2 = h^{-1}(\omega_2, x_1, \theta_{12}).$$

Luego,

$$F(x_3|x_1, x_2) = h(F(x_3|x_2), F(x_1|x_2), \theta_{13|2}) = h(h(x_3, x_2, \theta_{23}), h(x_1, x_2, \theta_{12}), \theta_{13|2}),$$

por lo que,

$$\begin{aligned} h(h(x_3, x_2, \theta_{23}), h(x_1, x_2, \theta_{12}), \theta_{13|2}) &= \omega_3, \\ h(x_3, x_2, \theta_{23}) &= h^{-1}(\omega_3, h(x_1, x_2, \theta_{12}), \theta_{13|2}), \\ x_3 &= h^{-1}(h^{-1}(\omega_3, h(x_1, x_2, \theta_{12}), \theta_{13|2}), x_2, \theta_{23}). \end{aligned}$$

Por último ,

$$\begin{aligned} F(x_4|x_1, x_2, x_3) &= h(F(x_4|x_2, x_3), F(x_1|x_2, x_3), \theta_{14|23}) \\ &= h[h\{h(x_4, x_3, \theta_{34}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{24|3}\}, \\ &\quad h\{h(x_1, x_2, \theta_{12}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{13|2}\}, \theta_{14|23}], \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} h[h\{h(x_4, x_3, \theta_{34}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{24|3}\}, h\{h(x_1, x_2, \theta_{12}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{13|2}\}, \theta_{14|23}] &= \omega_4, \\ h\{h(x_4, x_3, \theta_{34}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{24|3}\} &= h^{-1}[\omega_4, h\{h(x_1, x_2, \theta_{12}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{13|2}\}, \theta_{14|23}], \\ h(x_4, x_3, \theta_{34}) &= h^{-1}\{h^{-1}[\omega_4, h\{h(x_1, x_2, \theta_{12}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{13|2}\}, \theta_{14|23}], h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{24|3}\} \\ x_4 &= h^{-1}(h^{-1}\{h^{-1}[\omega_4, h\{h(x_1, x_2, \theta_{12}), h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{13|2}\}, \theta_{14|23}], h(x_3, x_2, \theta_{23}), \theta_{24|3}\}, x_3, \theta_{34}). \end{aligned}$$

2.5. Ajuste para D-racimo

En lo que resta del capítulo describiremos el proceso para ajustar un D -racimo a datos reales. Para esto debemos considerar:

- (a) La selección de la descomposición.
- (b) La selección de las cópulas.
- (c) La estimación de los parámetros de las cópulas.

La selección de la descomposición depende del problema que se esté abordando. Nostros en particular nos interesa la descomposición con las variables de mayor asociación. Para determinar el nivel de asociación usaremos la tau de Kendall², así seleccionaremos a los pares con mayor tau hasta definir una descomposición. Una vez seleccionada la descomposición reordenaremos y renombraremos las variables para que nos quede el primer árbol de la descomposición ordenado (Figura 2.2.1).

En particular en este trabajo seleccionaremos la cópula de un catálogo específico³, por lo que estimaremos los parámetros de las cópulas de ese catálogo para cada factor de la descomposición, esto lo haremos por el método de máxima verosimilitud, y posteriormente se

²Ver apéndice A.1

³Ver apéndice A.4

seleccionara la cópula que tenga el menor valor en el estadístico de prueba Kolmogorv-Smirnov ⁴, el cual mide qué tan diferente es la cópula empírica con la ajustada, por lo que al elegir la cópula con menor valor en dicho estadístico, estaríamos eligiendo la cópula con mayor similitud a la cópula empírica. De esta forma obtendremos las cópulas asociadas a la descomposición y sus respectivos parámetros.

⁴Ver apéndice A.6

Capítulo 3

D-racimo para portafolio de acciones

En este capítulo veremos como ajustar un D -racimo a un portafolio de cuatro acciones, con el propósito de replicar su estructura de dependencia . Al final compararemos los niveles de asociación entre los datos originales con los niveles de asociación de datos simulados con la cópula ajustada.

Para el estudio seleccionamos un conjunto de cuatro acciones, CEMEXCPO,GRUMA B, KIMBER A, MEXCHEM , que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores . Se analizarán los log-rendimientos diarios de las acciones y se les ajustará una cópula con la metodología estudiada en el capítulo anterior, el catálogo de cópulas que usaremos será gaussiana , t y clayton. Se contempló un horizonte de tiempo de enero 2010 a octubre 2015.

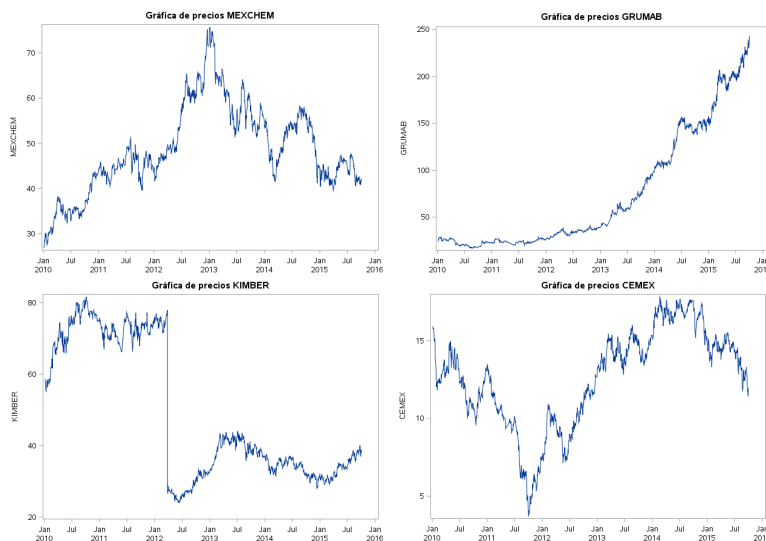


Figura 3.0.1: Series históricas de los precios de las acciones.

En las figuras (3.0.1) y (3.0.2) observaremos las series históricas de los precios y los log rendimientos, mientras que en la figura (3.0.3) los diagramas de dispersión de las distribuciones

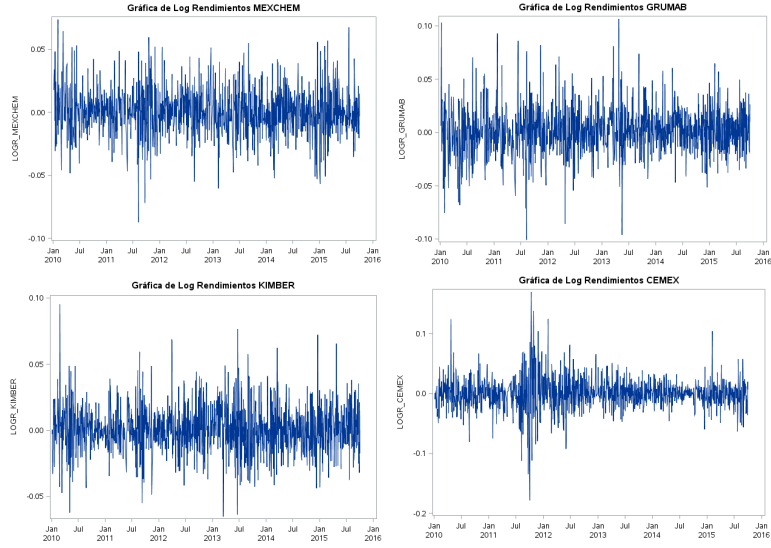


Figura 3.0.2: Series históricas de los log rendimientos de las acciones.

Tabla 3.1: Coeficientes de dependencia en colas

X-Y	λ_{uu}	λ_{ul}	λ_{lu}	λ_{ll}
Cemex - Gruma	0.162	-	0.065	0.178
Cemex - Kimber	0.146	-	0.016	0.129
Cemex - Mexchem	0.291	-	-	0.210
Gruma - Kimber	0.129	0.032	0.032	0.178
Gruma - Mexchem	0.146	0.065	0.016	0.194
Kimber - Mexchem	0.097	0.049	0.049	0.178

Tabla 3.2: Tau de Kendall por pares

X-Y	Tau
Cemex-Mexchem	0.242
Mexchem-Kimber	0.178
Cemex-Gruma	0.165
Mexchem-Gruma	0.16
Cemex-Kimber	0.143
Kimber-Gruma	0.116

empíricas de los log-rendimientos , en la tabla (3.1) , podremos ver el resumen de los coeficientes de dependencia en colas con un cuantil de 0.95¹ y en la tabla (3.2) un resumen con los distintos valores de tau.

¹Ver apéndice A.2

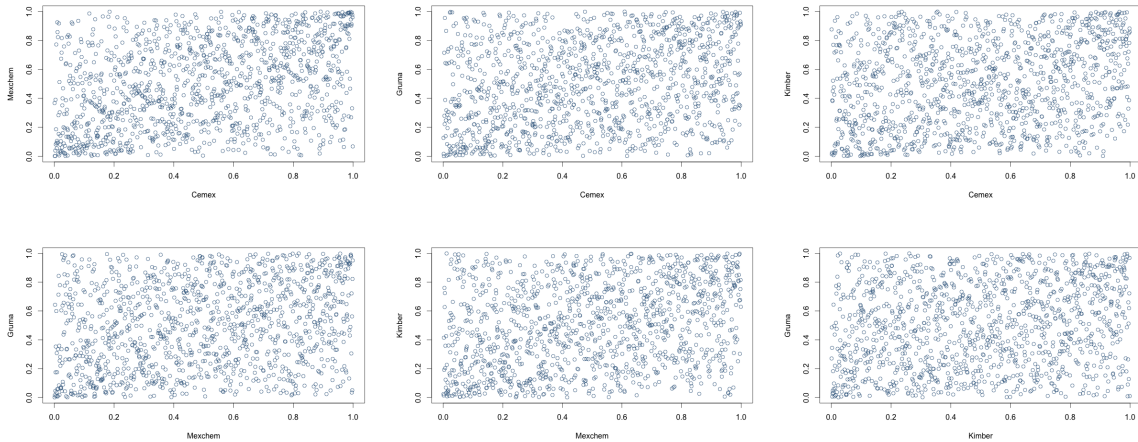


Figura 3.0.3: Log-rendimientos de las acciones por pares

3.1. Selección de la descomposición

En esta sección elegiremos la descomposición por nivel de asociación, que mediremos con la tau de Kendall, de modo que asociaremos los pares que mayor valor de tau tengan.

Como se puede observar en la tabla (3.2), los pares con mayor tau son Cemex-Mexchem, Mexchem-Kimber, Cemex-Gruma, por lo que el primer árbol del D -racimo queda definido como, Gruma(G)-Cemex(C)-Mexchem(M)-Kimber(K). Definido el primer árbol queda determinada por completo la estructura del D -racimo, como observamos en la figura (3.1.1).

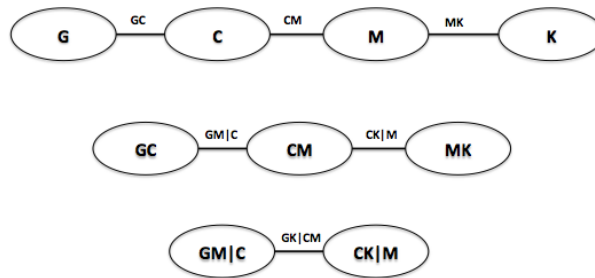


Figura 3.1.1: Estructura D -racimo seleccionada

3.2. Ajuste D -racimo

Una vez seleccionado el primer árbol podemos comenzar con el algoritmo para el ajuste de un D -racimo.

Antes de comenzar a ajustar el D -racimo a nuestros datos, es necesario hacer una transformación de los log-rendimientos. Esta consiste en transformar los log-rendimientos a su función de distribución empírica, esto con el fin de llevar nuestros datos al intervalo $[0, 1]$. La figura (3.2.1) muestra la transformación mencionada.

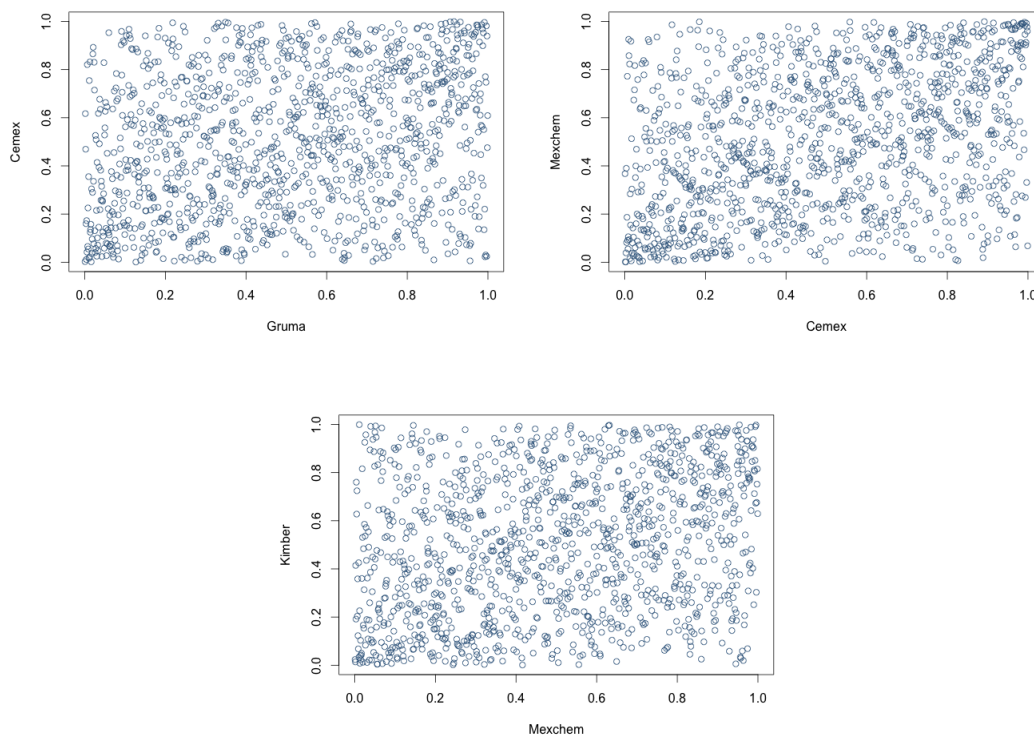


Figura 3.2.1: Transformación a función de distribución empírica del árbol 1

Una vez transformados los datos, podemos comenzar el proceso de ajuste. Primeramente estimaremos los parámetros por el método de pseudo log-verosimilitud² y calcularemos el estadístico de prueba Kolmogorov-Smirnov (T_n) para el catálogo de cópulas que elegimos. Una vez realizados los cálculos mencionados, seleccionaremos la cópula y su estimación con el valor mínimo para el estadístico T_n . La tabla (3.3) nos muestra la selección realizada, la estimación de parámetros y el valor del T_n .

Seleccionadas las cópulas para los nodos del primer árbol; es necesario hacer una transformación para obtener los datos con los que se ajustará en el segundo árbol. Para esta transformación utilizamos la función h a fin de obtener las observaciones condicionales. La fi-

²Ver apéndice A.5

Tabla 3.3: Ajuste primer árbol

X-Y	Cópula	Parámetros	Tn
Gruma - Cemex	Clayton	$\theta = 0.323$	32.577
Cemex - Mexchem	t	$\rho = 0.375$, $v = 6.481$	28.779
Mexchem - Kimber	t	$\rho = 0.272$, $v = 8.603$	32.262

gura (3.2.2) muestra las observaciones para el segundo árbol.

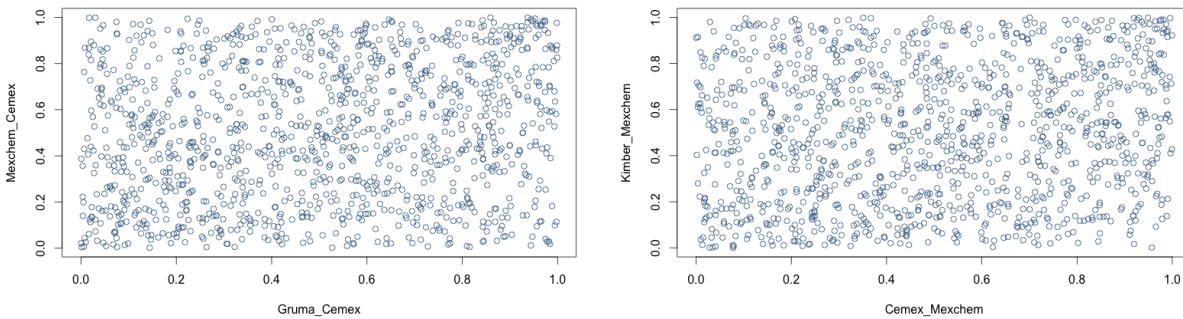


Figura 3.2.2: Transformación de datos para obtener observaciones de árbol 2.

La tabla(3.4) muestra las cópulas seleccionadas, parámetros estimados y el estadístico T_n para las observaciones del segundo árbol.

Tabla 3.4: Ajuste segundo árbol

X -Y / Z	Cópula	Parámetros	Tn
Gruma - Mexchem / Cemex	Gaussiana	$\rho = 0.171$	32.818
Cemex - Kimber / Mexchem	Clayton	$\theta = 0.134$	34.153

Repitiendo el mismo proceso para el tercer árbol, la figura(3.2.3) nos muestra las observaciones para el tercer árbol, mientras que la tabla (3.5) nos muestra la cópula seleccionada y sus respectivos parámetros.

En resumen las cópulas ajustadas a la descomposición quedan de la siguiente forma.

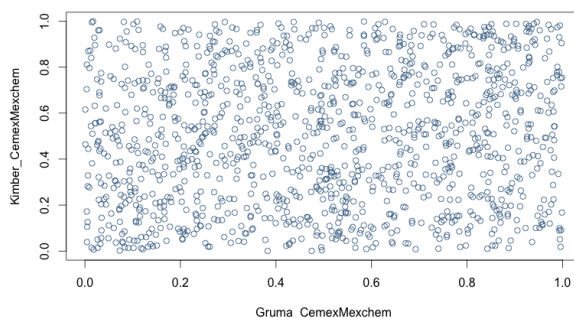


Figura 3.2.3: Observaciones para árbol 3

Tabla 3.5: Ajuste tercer árbol

X-Y / W-Z	Cópula	Parámetros	Tn
Gruma-Kimber / Cemex-Mexchem	Clayton	$\theta = 0.113$	31.947

$$\begin{pmatrix} Clayton & t & t \\ & Gaussiana & Clayton \\ & & Clayton \end{pmatrix},$$

y la matriz de parámetros

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta = 0.323 ; & \rho = 0.375, v = 6.481 ; & \rho = 0.272, v = 8.603 \\ & \rho = 0.171 ; & \theta = 0.134 \\ & & \theta = 0.113 \end{pmatrix}.$$

En resumen el algoritmo de ajuste es el siguiente.

- I. Transformamos los log-rendimientos a su función de distribución empírica.
- II. Ajustamos una cópula bivariada a las parejas del árbol 1.
- III. Transformamos las observaciones originales a sus respectivas observaciones condicionales, que están determinadas por las cópulas seleccionadas en el paso I.
- IV. Repetimos el paso II y III en el siguiente árbol con las nuevas observaciones.
- V. Repetimos los pasos II, III y IV para todos los árboles de la descomposición.

3.3. Simulación

Una vez estimados los parámetros de la cópula simulamos una muestra de igual tamaño. Esto lo haremos implementando el algoritmo de simulación visto en la sección 2.4 del capítulo anterior³.

En la figura(3.3.1) compararemos los datos originales vs los datos simulados, como se puede observar tienen un aspecto muy similar.

Para tener más evidencia de que el ajuste fue bueno, calcularemos la tau de Kendall y los coeficientes de dependencia en colas para los datos simulados y los compararemos con los valores de los datos originales. En las tablas (3.6) y (3.7) encontraremos los valores obtenidos.

Tabla 3.6: Tau de Kendall vs Tau de Kendall simulada por pares

X-Y	Tau Original	Tau Simulada	Variación relativa
Cemex-Mexchem	0.242	0.239	-0.012
Mexchem-Kimber	0.178	0.19	0.067
Cemex-Gruma	0.165	0.138	-0.163
Mexchem-Gruma	0.16	0.13	-0.187
Cemex-Kimber	0.143	0.124	-0.132
Kimber-Gruma	0.116	0.123	0.060

En la tabla (3.6) podremos encontrar la variación relativa de la tau de la muestra simulada contra la tau original, ésta nos dará información del cambio porcentual entre la tau original y la simulada; como se puede observar en todos los casos la variación es pequeña, por lo que no podemos asegurar que las tau sean estadísticamente distintas.

En la tabla (3.7) podremos encontrar los coeficientes de dependencia en colas para los datos simulados y su respectiva tasa de variación con relación a los datos originales. Se puede observar que los coeficiente de dependencia en colas no se replican en forma satisfactoria, pues hay casos en los que no se puede calcular las tasa de variación⁴ y en el resto la tasa de variación es grande.

Si bien para las tau de Kendall obtuvimos una buena réplica, hay que trabajar más a detalle para obtener resultados igual de favorables para los coeficientes de dependencia en colas; esto se puede hacer aumentando el catálogo de cópulas, contemplando a los coeficientes de

³Ver apéndice A.4

⁴Casos con NA.

Tabla 3.7: Coeficientes de dependencia en colas y tasa de variación

X-Y	λ_{uu}	λ_{ul}	λ_{lu}	λ_{ll}	TV_{uu}	TV_{ul}	TV_{lu}	TV_{ll}
Cemex - Gruma	0.065	-	0.016	0.243	-0.60	NA	-0.75	0.36
Cemex - Kimber	0.113	0.016	-	0.178	-0.22	NA	-1.00	0.37
Cemex - Mexchem	0.210	0.016	0.032	0.129	-0.28	NA	NA	-0.38
Gruma - Kimber	0.129	0.032	0.016	0.146	-	-	-0.50	-0.18
Gruma - Mexchem	0.097	0.016	0.032	0.162	-0.33	-0.75	1.00	-0.17
Kimber - Mexchem	0.129	0.032	0.032	0.097	0.33	-0.33	-0.33	-0.45

dependencia en colas en la selección de la descomposición, entre otras opciones.

Una vez ajustado el D-racimo a nuestro portafolio de acciones podemos analizar nuestros datos aplicando diversos modelos, por ejemplo, calcular la pérdida esperada de nuestro portafolio (VaR) que con el ajuste de la cópula nos dará un resultado más preciso ó para estimar el rendimiento del portafolio, entre otros.

Los *D*-racimos son una buena propuesta para replicar estructuras de dependencia complejas de datos multivariados. Como vimos el proceso de modelación no representa mayor complejidad y opera para cópulas de dimensión grande, es muy intuitivo en su construcción, lo que hace sencilla su aplicación y explicación, además de darnos un buen ajuste para nuestros datos.

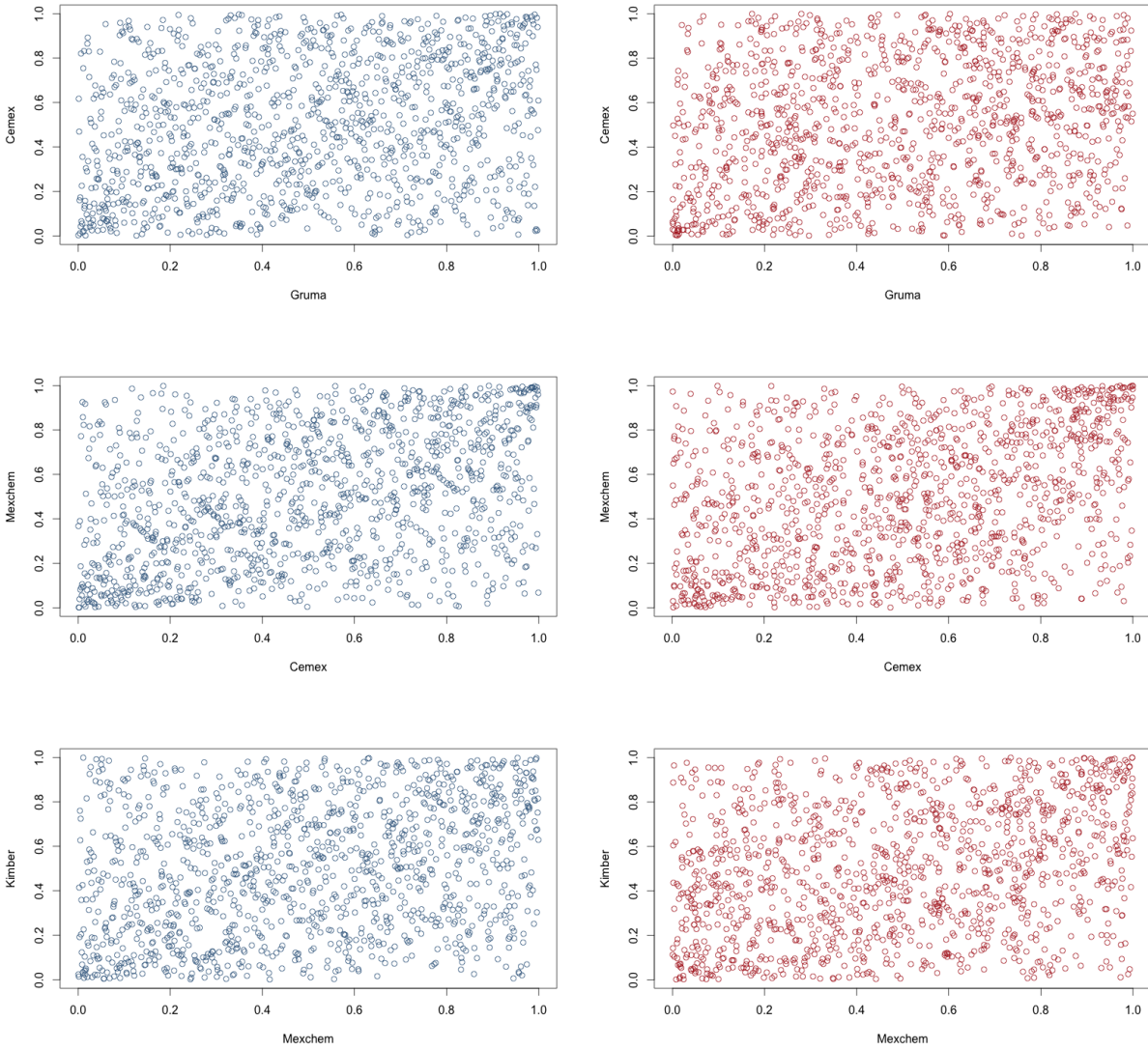


Figura 3.3.1: *D*-racimo observado vs *D*-racimo simulado

Conclusiones

Como vimos a lo largo del presente trabajo, las cópulas son una herramienta muy útil para analizar estructuras de dependencia complejas entre dos o más variables. En particular las cópulas de racimo nos proporcionan un método par utilizar los modelos bivariados en dimensiones superiores.

Basados en el artículo de Aas, Czado, Frigessi y Bakken [1], hemos mostrado cómo las cópulas de racimo son una buena herramienta para modelar estructuras de dependencia para datos multivariados. Desarrollamos un algoritmo para el ajuste de una descomposición en cópulas bivariadas, el cual jerarquizamos de acuerdo al nivel de asociación entre las variables, haciendo así más intuitivo el análisis de la información; pues el estudio siempre se hace en pares y está condicionado por nuestras conclusiones previas.

Asimismo, mostramos un algoritmo de simulación para los D -racimo que nos fue de utilidad para comprobar el buen ajuste de nuestro modelo. Éste también puede ser de utilidad cuando se dificulta la obtención de información de un fenómeno, pues esto permite replicar la estructura de los datos y el estudio de sus propiedades, prescindiendo de información adicional.

El uso de cópulas para el estudio de datos multivariados se ha venido popularizando, lo cual hace evidente la necesidad de modelos más robustos para trabajar con grandes cantidades de información. Las cópulas de racimo son nuestra propuesta para analizar este tipo de información; sin embargo, su uso dependerá de las necesidades propias del problema.

Apéndices

Apéndice A

A.1. Tau de Kendall

La Tau de Kendall es una medida de asociación, está definida en términos de la función de concordancia.

El uso de la Tau de Kendall tiene ventajas sobre el uso de la correlación lineal. La correlación lineal alcanza un valor de ± 1 únicamente en casos de dependencia lineal y cuando alcanza un valor de 0 no implica independencia, esto contrasta con las propiedades de la Tau de Kendall. Por otro lado, como veremos a continuación la Tau de Kendall es una medida que no depende del comportamiento marginal, únicamente depende de la cópula asociada.

Definición A.1.1. Sean (X, Y) y (X', Y') vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, con función de distribución H , definimos la Tau de Kendall como,

$$\tau(X, Y) = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0]. \quad (\text{A.1.1})$$

De esta forma podemos ver que la Tau de Kendall no es nada más que la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia de dos vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos.

Teorema A.1.2. Sea (X, Y) un vector de variables aleatorias continuas con cópula C . Entonces la Tau de Kendall para (X, Y) esta dada por,

$$\tau(X, Y) = Q(C, C) = 4 \iint_{\mathcal{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (\text{A.1.2})$$

La doble integral de arriba, es el valor esperado de la variable aleatoria $C(U, V)$, donde $U, V \sim U(0, 1)$ con distribución conjunta C , es decir $\tau(X, Y) = 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1$.

A.2. Coeficiente de dependencia en colas

La dependencia en colas es un concepto importante en la estadística multivariada, se refiere a una estructura de dependencia que se presenta en las colas de las distribuciones.

A continuación presentaremos la versión teórica y empírica de los coeficientes de dependencia en colas que nos ayudarán a medir el nivel de asociación [16].

Teórica

$$\lambda_{UU} = \lim_{q \rightarrow 1^-} P[Y > q | X > q] = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q}, \quad (\text{A.2.1})$$

$$\lambda_{UL} = \lim_{q \rightarrow 1^-} P[Y < 1 - q | X > q] = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - q + C(q, 1 - q)}{1 - q}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\lambda_{LL} = \lim_{q \rightarrow 1^-} P[Y < 1 - q | X < 1 - q] = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{C(1 - q, 1 - q)}{1 - q}, \quad (\text{A.2.3})$$

$$\lambda_{LU} = \lim_{q \rightarrow 1^-} P[Y > q | X < 1 - q] = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - q + C(1 - q, q)}{1 - q}, \quad (\text{A.2.4})$$

dónde $C(\cdot)$ es la cópula asociada al vector aleatorio (X, Y) , con X y Y uniformes $(0,1)$.

Como se puede observar estos coeficientes no dependen del comportamiento marginal del vector, si no que sólo dependen de la cópula asociada al mismo.

Empírica

$$\lambda_{UU}(q, n) = \frac{1}{n(1 - q)} \sum_{i \leq n} \mathbf{1}_{(x_i > x_{[nq]:n}, y_i > y_{[nq]:n})}, \quad (\text{A.2.5})$$

$$\lambda_{UL}(q, n) = \frac{1}{n(1 - q)} \sum_{i \leq n} \mathbf{1}_{(x_i > x_{[nq]:n}, y_i < y_{[n(1-q)]:n})}, \quad (\text{A.2.6})$$

$$\lambda_{LU}(q, n) = \frac{1}{n(1 - q)} \sum_{i \leq n} \mathbf{1}_{(x_i < x_{[n(1-q)]:n}, y_i > y_{[nq]:n})}, \quad (\text{A.2.7})$$

$$\lambda_{LL}(q, n) = \frac{1}{n(1 - q)} \sum_{i \leq n} \mathbf{1}_{(x_i < x_{[n(1-q)]:n}, y_i < y_{[n(1-q)]:n})}, \quad (\text{A.2.8})$$

para toda $q \in (0.5, 1.0)$. Dónde $x_{i:n}$ y $y_{i:n}$ son los estadísticos de orden de la muestra y q es un cuantil de la distribución uniforme $[0, 1]$ que determina que tan estricto será el cálculo.

A.3. Cópulas Elípticas

Las cópulas elípticas son las cópulas de las distribuciones elípticas. Daremos una definición general para la Cópula Gaussiana y la Cópula t.

A.3.1. Cópula Gaussiana

Definición A.3.1. Decimos que C_R^n es una Cópula Gaussiana si y sólo si,

$$C_R^n(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (\text{A.3.1})$$

donde Φ_R representa la distribución conjunta de una normal estándar n -variada con matriz de correlaciones R , y Φ^{-1} representa la inversa de una función de distribución normal estándar.

A.3.2. Cópula t

Definición A.3.2. Decimos que $C_{v,R}^t$ es una Cópula t si y sólo si,

$$C_{v,R}^t(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{t}_{v,R}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)). \quad (\text{A.3.2})$$

Donde $\mathbf{t}_{v,R}$ representa la distribución conjunta de una distribución estandar \mathbf{t} n -variada con v grados de libertad, t_v^{-1} representa la inversa de una función de distribución t estandar con v grados de libertad y R es la matriz de correlaciones. Este tipo de cópulas están asociadas a variables del tipo,

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}} \mathbf{Z}, \quad (\text{A.3.3})$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^n$, $S \sim \chi_v^2$ y $\mathbf{Z} \sim N_n(0, \Sigma)$ son independientes, entonces \mathbf{X} tiene distribución n -variada \mathbf{t}_v con media μ (con $v > 1$) y matriz de covarianzas $\frac{v}{v-2}\Sigma$ (para $v > 2$). Si $v \leq 2$ la $\text{Cov}(\mathbf{X})$ no está definida, en tal caso interpretamos a Σ como el parámetro de estructura de la distribución de \mathbf{X} .

A.4. Funciones h

A.4.1. Cópula Gaussiana

La densidad de la cópula Gaussiana está dada por ,

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{\rho_{12}^2(x_1^2 + x_2^2) - 2\rho_{12}x_1x_2}{2(1 - \rho_{12}^2)} \right\},$$

dónde ρ_{12} es el parámetro de la cópula , $x_1 = \Phi^{-1}(u_1)$, $x_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ y $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la inversa de la función de distribución de una Normal estándar.

La función h está dada por,

$$h(u_1, u_2, \rho_{12}) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho_{12}\Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right)$$

y la h inversa por,

$$h^{-1}(u_1, u_2, \rho_{12}) = \Phi \left(\Phi^{-1}(u_1) \sqrt{1 - \rho_{12}^2} + \rho_{12} \Phi^{-1}(u_2) \right).$$

A.4.2. Cópula t

La densidad de la cópula t esta dada por,

$$c(u_1, u_2) = \frac{\Gamma(\frac{v_{12}+2}{2})/\Gamma(\frac{v_{12}}{2})}{v_{12}\pi dt(x_1, v_{12})dt(x_2, v_{12})\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_{12}x_1x_2}{v_{12}(1-\rho_{12}^2)} \right)^{-\frac{v_{12}}{2}},$$

dónde v_{12} y ρ_{12} son los parámetros de de la cópula, $x_1 = t_{v_{12}}^{-1}(u_1)$, $x_2 = t_{v_{12}}^{-1}(u_2)$ y $dt(\cdot, v_{12})$ y $t_{v_{12}}^{-1}(\cdot)$ son la función de densidad y la función de cuantiles de una distribución estándar t con v_{12} grados de libertad, media 0 y varianza $\frac{v_{12}}{v_{12}-2}$.

Para esta cópula la función h esta dada por,

$$h(u_1, u_2, \rho_{12}, v_{12}) = t_{v_{12}+1} \left(\frac{t_{v_{12}}^{-1}(u_1) - \rho_{12}t_{v_{12}}^{-1}(u_2)}{\sqrt{\frac{v_{12} + (t_{v_{12}}^{-1}(u_2))^2(1 - \rho_{12}^2)}{v_{12} + 1}}} \right),$$

y la inversa de esta función esta dada por,

$$h^{-1}(u_1, u_2, \rho_{12}, v_{12}) = t_{v_{12}} \left(t_{v_{12}+1}^{-1}(u_1) \sqrt{\frac{v_{12} + (t_{v_{12}}^{-1}(u_2))^2(1 - \rho_{12}^2)}{v_{12} + 1}} + \rho_{12}t_{v_{12}}^{-1}(u_2) \right).$$

A.4.3. Cópula clayton

La densidad de la cópula clayton esta dada por,

$$c(u_1, u_2) = (1 + \delta_{12})(u_1u_2)^{-1-\delta_{12}}(u_1^{-\delta_{12}} + u_2^{-\delta_{12}} - 1)^{-1/\delta_{12}-2},$$

dónde δ_{12} es el parámetro de la cópula.

La función h esta dada por,

$$h(u_1, u_2, \delta_{12}) = u_2^{-\delta_{12}-1}(u_1^{-\delta_{12}} + u_2^{-\delta_{12}} - 1)^{-1-1/\delta_{12}},$$

y la función inversa ,

$$h^{-1}(u_1, u_2, \delta_{12}) = [(u_1u_2^{\delta_{12}+1})^{-\frac{\delta_{12}}{\delta_{12}+1}} + 1 - u_2^{-\delta_{12}}]^{-1/\delta_{12}}.$$

A.5. Estimación de parámetros

Basaremos nuestra estimación de los parámetros de la cópula con el método de máxima pseudo log-verosimilitud para lo cual definimos a la función de log-verosimilitud como sigue [McNeil 2005].

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left[c(\hat{F}_1(y_1), \dots, \hat{F}_k(y_k)) \right],$$

dónde n es el tamaño de la muestra, k es la dimensión de los datos, $c(\cdot)$ es la densidad de la cópula $C(\cdot)$ con parámetros θ y $\hat{F}_j(\cdot)$ es la j -ésima función de distribución marginal empírica.

Lo que buscamos es el valor $\hat{\theta}$ que maximiza la función de pseudo log-verosimilitud, a este valor lo llamaremos el estimador máximo verosímil para C .

A.6. Estadístico Kolmogorov- Smirnov

La cópula empírica es una función frecuencial que al igual que la función de distribución empírica nos ayuda al análisis de los datos. En términos formales la cópula empírica se define como sigue.

Definición A.6.1. Sean $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, \dots, v_{n1}), \dots, \mathbf{v}_d = (v_{1d}, \dots, v_{nd})$ una muestra de tamaño d , de n uniformes $[0, 1]$ con cópula C . Definimos la cópula empírica como,

$$C_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{v_{i1} \leq u_1, \dots, v_{id} \leq u_d\}}, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbf{I}^d$$

El estadístico Kolmogorov - Smirnov se obtiene al comparar la cópula empírica C_n con la cópula teórica $C_{\hat{\theta}}$, dónde $\hat{\theta}$ es la estimación del parámetro desconocido θ . Bajo este concepto se define dicho estadístico:

$$T_n = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{I}^2} [\sqrt{n}(C_n(\mathbf{u}) - C_{\hat{\theta}}(\mathbf{u}))],$$

que mide la distancia entre C_n y $C_{\hat{\theta}}$ con una escala de \sqrt{n} .

El estadístico T_n es usado para pruebas de bondad de ajuste, lo que se busca es la cópula con valor mínimo de este estadístico, esta cópula será la de mayor parecido con la cópula empírica, es decir la que mejor se ajusta a nuestros datos.

Genest y Rémillard [7] consideraron la versión del estadístico de prueba Kolmogorv-Smirnov en combinación con cópulas.

A.7. Código SAS: Estadísticos de orden , gráficos y distribución empírica

Función dónde se calculan los estadísticos de orden, se gráficán las series históricas y se calcula la distribución empírica de cada variable.

```
%macro Estad_ord(Base,var);
/*Ordena de menor a mayor y enumera el nuevo orden de las observaciones*/
proc sort data=&Base.;
by Logr_&var.;
run;

data &Base.;
set &Base.;
retain EO_&var.;
EO_&var.+1;
if first.Logr_&var. then EO_&var.=1;
run;

%if "&Base." ne "SIM2" %then %do;

/*Gráfica de Series Históricas*/
proc sort data= &Base.;
by date;
run;

proc sgplot data=&Base.;
title "Gráfica de precios &var.";
series Y=&var. X=date ;
;
format date mmyy8.;
run;

title "Gráfica de Log Rendimientos &var.";v
proc sgplot data=&Base.;
Series Y=LogR_&var. X=date;
format date mmyy8.;
run;
%end;

/*Cálculo de distribución empírica */
proc univariate data=&Base.;
```

```

var LogR_&var.;
cdfplot /normal(mu=est sigma=est);
ods output CDFPlot=ECDF;
run;

proc sql ;
create table &Base. as
select A.*, (B.ECDFY*&N.)/(100*(&N+1)) as F_Log_&var.

from &Base. as A left join ECDF as B on
a.LogR_&var.=B.ECDFX;
quit;

title;
%mend;

```

A.8. Código SAS: Tau de Kendall, coeficientes de dependencia en colas y gráficos de dispersión

Función dónde se calculan la tau de Kendall, los coeficientes de dependencia en colas y se hacen gráficos de dispersión.

```

%macro Tail_i(Base,var1,var2);

data &Base.;
set &Base.;

/*Indicadoras para coeficiente finito en colas*/
if eo_&var1.>int(&N.*&q.) and
eo_&var2.>int(&N.*&q.) then
F_Luu_&var1._&var2.=1;
else F_Luu_&var1._&var2.=0;

if eo_&var1.>int(&N.*&q.) and
eo_&var2.<int(&N.*(1-&q.)) then
F_Lul_&var1._&var2.=1;
else F_Lul_&var1._&var2.=0;

if eo_&var1.<int(&N.*(1-&q.)) and
eo_&var2.<int(&N.*(1-&q.)) then

```

```

F_Lll_&var1._&var2.=1;
else F_Lll_&var1._&var2.=0;

if eo_&var1.<int(&N.*(1-&q.)) and
eo_&var2.>int(&N.*&q.) then
F_Llu_&var1._&var2.=1;
else F_Llu_&var1._&var2.=0;

/*****/

/*Cálculo de Tau de Kendall */
%if "&Base." ne "SIM2" %then %do;

proc corr data=&Base. kendall
out=TauB;
var F_Log_&var1. F_Log_&var2.;
run;
data _NULL_;
set TauB;

if _Name_="F_Log_&var2." then
call symput ("Tau",F_Log_&var1.);
run;

%end;
%if "&Base."="SIM2" %then %do;
proc corr data=&Base. kendall
out=TauB;
var LogR_&var1. LogR_&var2.;
run;

data _NULL_;
set TauB;

if _Name_="LogR_&var2." then
call symput ("Tau",LogR_&var1.);
run;

%end;

/*Crea una tabla con los coeficiente de dependencia
finitos en colas B y con la tau de Kendall B*/

```

```

proc sql;
create table Lambda_Q_N_&var1._&var2.B as
select
sum(F_Luu_&var1._&var2)*1/(&N.*(1-&q.)) as Luu_&var1._&var2 ,
sum(F_Lul_&var1._&var2)*1/(&N.*(1-&q.)) as Lul_&var1._&var2,
sum(F_Llu_&var1._&var2)*1/(&N.*(1-&q.)) as Llu_&var1._&var2,
sum(F_Lll_&var1._&var2)*1/(&N.*(1-&q.)) as Lll_&var1._&var2,
&Tau. as Tau_&var1._&var2
from &Base.;
quit;

```

```

/*Distribución de los coeficientes de dependencia en colas*/

```

```

proc freq data=&Base.;
tables F_Luu_&var1._&var2
F_Lul_&var1._&var2 F_Llu_&var1._&var2
F_Lll_&var1._&var2/missing;
run;

```

```

/*Scatter plot Activo1 vs Activo2*/
title "Log rendimientos &var1. vs &var2.";

```

```

proc sgplot data=&Base.;
scatter X=LogR_&var1. Y=LogR_&var2.;
run;

```

```

/*Scatter plot Activo1 vs Activo2 con funcion de rendimientos*/

```

```

proc sgplot data=&Base.;
scatter X=F_Log_&var1. Y=F_Log_&var2.;
run;

```

```

title;
%mend;

```

A.9. Código SAS: Uso de funciones en portafolio de cuatro acciones y datos simulados

Uso de las funciones anteriores para el portafolio de cuatro acciones y para los datos simulados.

```

/*Portafolio de cuatro acciones*/

```

```

data B2;
set Bactivos_2010_2015(keep= date cemex grumab kimber mexchem);
run;

```

```

data activos_2010_2015;
set B2;
CEMEX2=LAG(CEMEX);
GRUMAB2=LAG(GRUMAB);
KIMBER2=LAG(KIMBER);
MEXCHEM2=LAG(MEXCHEM);
LOGR_CEMEX=LOG(CEMEX/CEMEX2);
LOGR_GRUMAB=LOG(GRUMAB/GRUMAB2);
LOGR_KIMBER=LOG(KIMBER/KIMBER2);
LOGR_MEXCHEM=LOG(MEXCHEM/MEXCHEM2);

```

```

IF LOGR_CEMEX NE 0 AND LOGR_GRUMAB NE 0 AND
LOGR_KIMBER NE 0 AND LOGR_MEXCHEM NE 0 ;

```

```

IF LOGR_CEMEX NE . AND LOGR_GRUMAB NE . AND
LOGR_KIMBER NE . AND LOGR_MEXCHEM NE . ;
run;

```

```

/*Tabla con información de activos*/
proc sort data=activos_2010_2015;
by date;
run;

```

```

/*Calcula cuantas observaciones se tienen*/
data _null_;
set activos_2010_2015;
by date;
retain i;
i+1;

```

```

if last.date then
call symput('N',i);
run;

```

```

%put &N.;/*No. de observaciones*/
%let q=0.95;/*Nivel de confianza*/

```

```

/*Función 1*/
%estad_ord(activos_2010_2015,CEMEX);
%estad_ord(activos_2010_2015,GRUMAB);
%estad_ord(activos_2010_2015,KIMBER);
%estad_ord(activos_2010_2015,MEXCHEM);

/*Función 2*/

%Tail_i(activos_2010_2015,CEMEX,GRUMAB);
%Tail_i(activos_2010_2015,CEMEX,KIMBER);
%Tail_i(activos_2010_2015,CEMEX,MEXCHEM);
%Tail_i(activos_2010_2015,GRUMAB,KIMBER);
%Tail_i(activos_2010_2015,GRUMAB,MEXCHEM);
%Tail_i(activos_2010_2015,KIMBER,MEXCHEM);

/*Datos Simulados*/

data SIM2;
set SIML;
LogR_CEMEX=CEMEX;
LogR_GRUMAB=GRUMA;
LogR_MEXCHEM=MEXCHEM;
LogR_KIMBER=KIMBER;
run;

/*Función 1*/
%estad_ord(SIM2,CEMEX);
%estad_ord(SIM2,GRUMAB);
%estad_ord(SIM2,KIMBER);
%estad_ord(SIM2,MEXCHEM);

/*Función 2*/
%Tail_i(SIM2,CEMEX,GRUMAB);
%Tail_i(SIM2,CEMEX,KIMBER);
%Tail_i(SIM2,CEMEX,MEXCHEM);
%Tail_i(SIM2,GRUMAB,KIMBER);
%Tail_i(SIM2,GRUMAB,MEXCHEM);
%Tail_i(SIM2,KIMBER,MEXCHEM);

```


A.10. Código R: Selección de cópula y estimación de parámetros

Función para seleccionar una familia de copulas y estimar los parametros correspondientes.

```
Seleccion<-function(x){
t<-Kendall(x[,1],x[,2])
t1<-t$tau
t<-t1[1]
#Estimacion de parametros por maxima verosimilitud#
if (t>0) {
Clay.Par<-BiCopEst(x[,1],x[,2],3,method = "mle")
}
Gauss.Par<-BiCopEst(x[,1],x[,2],1,method = "mle")
t.Par<-BiCopEst(x[,1],x[,2],2,method = "mle")

#Calculo del estadistico Tn #
if (t>0) {
Clay.Cop<-GOFF(x[,1],x[,2],3)}
Gauss.Cop<-GOFF(x[,1],x[,2],1)
t.Cop<-GOFF(x[,1],x[,2],2)

#Vector con Parametros , estadistico Tn y copula #
if (t>0) { Clay.Vec<-c(Cl原因.Par,Clay.Cop,"Clayton",3)}
Gauss.Vec<-c(Gauss.Par,Gauss.Cop,"Gaussian",1)
t.Vec<-c(t.Par,t.Cop,"t",2)

# Seleccion de la copula por Min(Tn)#
if (t>0) {
if (t.Cop==min( Gauss.Cop,
t.Cop,Clay.Cop)) return(t.Vec)
if (Clay.Cop==min(Gauss.Cop,
t.Cop,Clay.Cop)) return(Clay.Vec)

if (Gauss.Cop==min(Gauss.Cop,
t.Cop,Clay.Cop))
return(Gauss.Vec)}

else {
if (t.Cop==min(Gauss.Cop,
t.Cop)) return(t.Vec)
```

```

if (Gauss.Cop==min(Gauss.Cop,
t.Cop))
return(Gauss.Vec)}

}

```

A.11. Código R: Funciones para calcular el estadístico de prueba T_n

Función para verificar integridad de los datos y llamar a la función que calcula el estadístico T_n .

```

GOFF<-function (u1, u2, family)
{
if (is.null(u1) == TRUE —— is.null(u2) == TRUE)
stop("Los insumos son nulos")
if (any(u1 > 1) —— any(u1 < 0))
stop("Los datos estan fuera del [0,1]")
if (any(u2 > 1) —— any(u2 < 0))
stop("Los datos estan fuera del [0,1]")
if (length(u1) != length(u2))
stop("Las marginales no son del mismo tamaño")
if (length(u1) < 2)
stop(."El numero de observaciones debe ser al menos 2")

Tn <- StadTn2(u1, u2, family)
out <- Tn
return(out)
}

```

Función que calcula el estadístico T_n para la familia de cópulas seleccionada.

```

StadTn2<-function(u, v, fam){

n <- length(u)
t <- seq(1, n)/(n + 1e-04)#Particion de [0,1]
kt <- rep(0, n)#Vector tamaño n lleno de 0

# Estimamos parametros de copula
param <- suppressWarnings( BiCopEst(u, v, family = fam))

```

```

Ct<- rep(0, n)#Vector tamaño n lleno de 0

# Gaussian
if (fam == 1) {

# Matriz de correlacion #
Rho <- matrix(c(1, param$par, param$par, 1), 2, 2)
dcop <- rep(0, n) #Vector tamaño 10,000 lleno de 0

#Llena el vector con evaluaciones de la distribución Normal Multivariada
# con parametro Rho
for (i in 1:n)
dcop[i] <- pmvnorm(upper = c(qnorm(u[i]),
qnorm(v[i])), corr = Rho)

}
# t
else if (fam == 2) {

Rho <- matrix(c(1, param$par, param$par, 1), 2, 2)
dcop <- rep(0, n)
for (i in 1:n) dcop[i] <- pmvt(upper = c(qt(u[i], df = param$par2), qt(v[i], df = param$par2)),
corr = Rho, df = param$par2)

}
#Clayton
else if (fam == 3) {

dcop <- rep(0, n)
for (i in 1:n) {
ux<-u[i]hat(-param$par)
vx<-v[i]hat(-param$par)
fx<-(ux+vx-1)hat(-1/param$par)
dcop[i] <- max(fx,0)

}

}

# Wn - Copula empirica
w <- rep(0, n)
w[1:n] <- mapply(function(x, y) (1/n) *

```

```

length(which(x > u & y > v)), u, v)

# Calculo de Tn
tn.obs <- matrix(0, n - 1, 2)

for (j in 1:(n - 1)) { tn.obs[j, 1] <- abs(w[j] - dcop[j])
}

for (j in 1:(n - 1)) {
tn.obs[j, 2] <- abs(w[j] - dcop[j + 1])
}
Tn <- max(tn.obs) * sqrt(n)

return(Tn=Tn)
}

```

A.12. Código R: Cálculo de observaciones condicionales , funciones h y h inversa

Funciones que se utilizan para el cálculo de las observaciones condicionadas.

```

Cdist<-function(x,y,cx,cy){
# Marginal condicional 1—2 #
a1<-Hfunct(x[,1], x[,2], cx[5], cx$par, cx$par2)
# Marginal condicional 3—2 #
b1<-Hfunct(y[,2], y[,1], cy[5], cy$par, cy$par2)
# Nuevas observaciones #
z<-cbind(a1,b1)
return(z)
}

```

Código para el cálculo de la función h.

```

Hfunct<-function (u1, u2, family, par, par2 )
{
n = length(u1)

# Funcion h para copula Gauss
if (family==1){
n1<-qnorm(u1)

```

```

n2<-qnorm(u2)
mu<-(par*n2)
sigma2<-(1-(par2))
hfunc1<- pnorm( ( n1-mu)/( sqrt(sigma2) ) ) }

# Funcion h para copula t
if (family==2){
t1<-qt(u1,par2)
t2<-qt(u2,par2)
mu<-par*t2
sigma2<-((par2+t2*t2)*(1-(par2)))/(par2+1)

hfunc1<- pt( (t1-mu)/sqrt(sigma2),par2+1)
}

# Funcion h para copula Clayton
if (family==3){
if (par==0) hfunc1<-u1
else {
x<-u1(-par)
y<-u2(-par)
xm<-((u2(-par-1)))
et<-(-1-(1/par))
hfunc1<- xm*(x+y-1)et }
}

# Funcion h para copula Gumbel
if (family==4){
if (par==1) hfunc1<-u1
else{
x<-((-log(u1))par)
y<-((-log(u2))par )
ym<-((-log(u2))(par-1) )
gcxy<-exp( -((x + y)(1/par)) )
g2<-ym*((x + y)(1/(par-1)))
hfunc1<- gcxy*(1/u2)*g2}
}

hfunc <- hfunc1
return(hfunc)
}

```

Código para el cálculo de la función h inversa.

```
HInvf<-function (u1, u2, family, par, par2=1 )
{

# Funcion h* para copula Gauss
if (family==1){
n1<-qnorm(u1)
n2<-qnorm(u2)

sigma2<-(1-(par2))
hinvf1<- pnorm( (n1*sqrt(sigma2) ) + (par*n2) ) }

# Funcion h* para copula t
if (family==2){
t1 <- qt(u1,par2+1)
t2<-qt(u2,par2)
sigma2<-(1-(par2))
w1<-(t1*sqrt( ( ( par2 + (t22) ) *sigma2)/ (par2+1) ) )
hinvf1<-pt( w1 + par*t2 ,par2 )
}

# Funcion h* para copula Clayton
if (family==3){
if (par==0) hinvf1<-u1
else {
x<-u1*(u2par+1)
y<-(1-(u2-par))
et<-(-par/(par+1))
hinvf1<- ((xet) + y )-1/par
}
}

hinvfx <- hinvf1
return(hinvfx)
}
```

A.13. Código R: Simulación D-racimo

Código para simular un D-racimo para cópulas seleccionadas.

```

SimDvine <- function (n,Dim,par,par2,fam ){
d <- Dim
if (d<3)
stop("Vines al menos 3 variables")

w <- matrix(runif(n * d), n, d) # Matriz nxd Uniformes [0,1]
v <- matrix(NA, d,d) # Matriz NA dxMax[2d-4,d]
v2<-matrix(NA,d,d) # Matriz auxiliar
result <- matrix(NA, n, d) #Matriz de resultados nxd (NA)

result[, 1] <- w[, 1] # Se llena columna 1 de resultados con unif[0,1]
result[, 2] <- HInvf(w[, 2], w[, 1],fam[1,1],par[1,1],par2[1,1])

for (s in 1:n) { # for para numero de simulaciones (1)
v[1, 1] <- w[s, 1]; v2[1,1]<-w[s, 1]
for (i in 2:d){ # for para variables (2)
v[i,i]<-w[s,i]
for (k in (i-1):1){ # for inversas (3)
v[k,i]<-HInvf(v[k+1,i],v2[k,i-1], fam[k,i-1]
,par[k,i-1],par2[k,i-1])
if(i<d){# if 1
v2[k+1,i] <- Hfunct(v2[k,i-1],v[k,i],
fam[k,i-1] ,par[k,i-1],par2[k,i-1])
} # if 1
} # for (3)
v2[1,i]<-v[1,i]
}# for (2)
result[s,]<-v[1,]
}# for (1)

return(result)
}

```

A.14. Código R: Ajuste y simulación D-racimo para portafolio de cuatro variables

Código utilizado para ajustar y simular un D-racimo para un portafolio de cuatro variables.

```

#Datos de portafolio
ACTIVOS_2010_2015_F <- read.delim(-/Desktop/Seminario_Titulacion/Programas/ACTIVOS_2010_2015.

```

```

Cemex<-ACTIVOS_2010_2015.F$F_Log_CEMEX
Mexchem<-ACTIVOS_2010_2015.F$F_Log_MEXCHEM
Kimber<-ACTIVOS_2010_2015.F$F_Log_KIMBER
Gruma<-ACTIVOS_2010_2015.F$F_Log_GRUMAB

```

```

LogCemex<-ACTIVOS_2010_2015.F$LOGR_CEMEX
LogMexchem<-ACTIVOS_2010_2015.F$LOGR_MEXCHEM
LogKimber<-ACTIVOS_2010_2015.F$LOGR_KIMBER
LogGruma<-ACTIVOS_2010_2015.F$LOGR_GRUMAB

```

```

#Gráficos de dispersión

```

```

plot(LogCemex,LogMexchem ,xlab = "Cemex",ylab = "Mexchem")
plot(LogCemex,LogKimber,xlab = "Cemex",ylab = "Kimber")
plot(LogCemex,LogGruma,xlab = "Cemex",ylab = "Gruma")
plot(LogMexchem,LogKimber,xlab = "Mexchem",ylab = "Kimber")
plot(LogMexchem,LogGruma,xlab = "Mexchem",ylab = "Gruma")
plot(LogKimber,LogGruma ,xlab = "Kimber",ylab = "Gruma")

```

```

#Calculo de Tau de Kendall

```

```

tau_Cem_Mex<-Kendall(Cemex,Mexchem)
tau_Cem_Kim<-Kendall(Cemex,Kimber)
tau_Cem_Grum<-Kendall(Cemex,Gruma)
tau_Mex_Kim<-Kendall(Mexchem,Kimber)
tau_Mex_Grum<-Kendall(Mexchem,Gruma)
tau_Kim_Grum<-Kendall(Kimber,Gruma)

```

```

tau_Cem_Mex
tau_Cem_Kim
tau_Cem_Grum
tau_Mex_Kim
tau_Mex_Grum
tau_Kim_Grum

```

```

#Se eligen las combinacion de mayor tau#

```

```

#Gruma-Cemex-Mexchem-Kimber Arbol 1
Tree1<-cbind(Gruma,Cemex,Mexchem,Kimber)
Cop1<-cbind(Gruma,Cemex)
Cop2<-cbind(Cemex,Mexchem)
Cop3<-cbind(Mexchem,Kimber)

```

```

###Scatter Plot###

```



```

plot(Cop1,col="steelblue4")
plot(Cop2,col="steelblue4")
plot(Cop3,col="steelblue4")

#Pruebas GoF Primer Arbol##

Def1< -Seleccion(Cop1)
Def2< -Seleccion(Cop2)
Def3< -Seleccion(Cop3)

Def1
Def2
Def3

#Observaciones para formar Segundo Arbol#

Cop13_2< -Cdist(Cop1,Cop2,Def1,Def2)
Cop24_3< -Cdist(Cop2,Cop3,Def2,Def3)

Kendall(Cop13_2[,1],Cop13_2[,2])
Kendall(Cop24_3[,1],Cop24_3[,2])

#Scatter Plot Distribuciones condicionales#

plot(Cop13_2,xlab="Gruma_Cemex",ylab="Mexchem_Cemex",col="steelblue4")
plot(Cop24_3,xlab="Cemex_Mexchem",ylab="Kimber_Mexchem",col="steelblue4")

#Pruebas GoF Segundo Arbol#

Def13_2< -Seleccion(Cop13_2)
Def24_3< -Seleccion(Cop24_3)
Def13_2
Def24_3

#Observaciones para formar tercer Arbol#

Cop14_23< -Cdist(Cop13_2,Cop24_3,Def13_2,Def24_3)

Kendall(Cop24_3[,1],Cop24_3[,2])
#Scatter plot Distribucion condicional#

plot(Cop14_23,

```

```

xlab = "Gruma_CemexMexchem",
ylab = "Kimber_CemexMexchem",
col="steelblue4")

#Prueba GoF Tercer arbol#
Def14_23< -Seleccion(Cop14_23)
Def14_23

# Parametros para simular
Theta1< -matrix(
c(Def1$par,Def2$par,Def3$par,0,Def13_2$par,Def24_3$par,0,0,Def14_23$par) ,3,3,1)
Theta1
Theta2< -matrix(
c(Def1$par2,Def2$par2,Def3$par2,0,Def13_2$par2,Def24_3$par2,0,0,Def14_23$par2),3,3,1)
Theta2
FamT1< -matrix(
c(Def1[5],Def2[5],Def3[5],0,Def13_2[5],Def24_3[5],0,0,Def14_23[5]),3,3,1)
FamT1
FamT2< -matrix(
c(Def1[4],Def2[4],Def3[4],0,Def13_2[4],Def24_3[4],0,0,Def14_23[4]),3,3,1)
FamT2

# Simulacion D-vine
SIMD< -SimDvine(length(Cop1[,1]),4,Theta1,Theta2,FamT1)
colnames(SIMD)< -c("Gruma", "Cemex", "Mexchem", "Kimber")

# Plot real vs Plot Sim
plot(SIMD[,1:2],col="firebrick")
plot(Cop1,col="steelblue4")

plot(SIMD[,2:3],col="firebrick")
plot(Cop2,col="steelblue4")

plot(SIMD[,3:4],col="firebrick")
plot(Cop3,col="steelblue4")

# tau real vs tau Sim
tau2_Cem_Mex< -Kendall(SIMD[,2],SIMD[,3])
tau2_Cem_Kim< -Kendall(SIMD[,2],SIMD[,4])
tau2_Cem_Grum< -Kendall(SIMD[,2],SIMD[,1])
tau2_Mex_Kim< -Kendall(SIMD[,3],SIMD[,4])
tau2_Mex_Grum< -Kendall(SIMD[,3],SIMD[,1])

```

tau2_Kim_Grum < -Kendall(SIMD[,4],SIMD[,1])

tau_Cem_Mex
tau2_Cem_Mex

tau_Cem_Kim
tau2_Cem_Kim

tau_Cem_Grum
tau2_Cem_Grum

tau_Mex_Kim
tau2_Mex_Kim

tau_Mex_Grum
tau2_Mex_Grum

tau_Kim_Grum
tau2_Kim_Grum

Bibliografía

- [1] AAS, K., CZADO, C., FRIGESSI, A., AND BAKKEN, H. *Pair copula construction of multiple dependence*. Elsevier. (2007).
- [2] BEDFORD, T., AND COOKE, R. M. *Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines*. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 32. (2001).
- [3] BEDFORD, T., AND COOKE, R. M. *Vines a new graphical model for dependent random variables*. *Annals of Statistics* 30. (2002).
- [4] CZADO, C., AND ALMEIDA, C. *Stepwise estimation of D-Vines with arbitrary specified copula pairs and EDA Tools*. Technische Universitat Munchen, Zentrum Mathematik. (2010).
- [5] EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F., AND MCNEIL, A. *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. ETH Zürich, Working Article. (2001).
- [6] EMBRECHTS, P., MCNEIL, A., AND STRAUMANN, D. *Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls*. Cambridge University Press. (2002).
- [7] GENEST, C., AND REEMILLARD, B. *Validity of the parametric bootstrap for goodness of fit testing in semiparametric models*. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44. (2008).
- [8] GARCÍA ÁLVAREZ, M. A. *Introducción a la teoría de la probabilidad*. Fondo de cultura económica. (2005).
- [9] JOE, H. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, London. (1997).
- [10] KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H., AND WILLMOT, G. E. *Loss Models: From Data to Decisions*. Wiley. (2008).
- [11] KUROWICKA, D., AND COOKE, R. M. *Sampling algorithms for generating joint uniform distributions using the vine copula method*. In 3rd IASC world conference on Computational Statistics and Data Analysis, Limassol, Cyprus. (2005).

- [12] MAI, J.-F., AND SCHERER, M. *Simulating copulas*. Imperial College Press. (2007).
- [13] MCNEIL, A. J., FREY, R., AND EMBRECHTS, P. *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press. (2005).
- [14] NELSEN, R. B. *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media. (2007).
- [15] SCHWEIZER, B., AND SKLAR, A. *Probabilistic Metric Spaces*. New York: North-Holland/ Elsevier. (1983).
- [16] ZHANG, M.-H. *Modelling total tail dependence along diagonals*. Elsevier, 2007. (2007).