



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

CÓPULAS ARQUIMEDIANAS JERÁRQUICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A:

DELIA MARÍN RODRÍGUEZ



**DIRECTORA DE TESIS:
MAESTRA EN CIENCIAS, LAURA NAYELI
LILJEHULT
2016**

Contents

Introducción	7
Capítulo 1. Definición y propiedades	9
1.1. Conceptos preliminares	9
1.2. Cópulas	12
1.3. El teorema de Sklar	15
1.4. Cópulas y variables aleatorias	24
1.5. Cópulas multivariadas.	27
1.6. Medidas de concordancia y medidas de dependencia	32
Capítulo 2. Cópulas arquimedianas y cópulas arquimedianas jerárquicas	37
2.1. Definiciones	37
2.2. Familias de cópulas	42
2.3. Cópulas arquimedianas jerárquicas	43
2.4. Construcción y estimación de cópulas jerárquicas arquimedianas	45
Capítulo 3. Ejemplo: Índices bursátiles	49
Conclusiones	57
Apéndice	59
Bibliografía	65

Introducción

La modelación y estimación de distribuciones multivariadas es uno de los temas más discutidos en la práctica de finanzas y economía. A diferencia de la teoría para modelar y estimar distribuciones univariadas, que ha sido bastante estudiada y está bien establecida, el problema del caso multivariado requiere modelar la dependencia entre variables. Es por esto que el estudio y aplicación de cópulas ha llamado mucho la atención recientemente, ya que a través del Teorema de Sklar se puede obtener una solución parcial a este problema, pues nos permite asociar las funciones de distribución marginales con las estructuras de dependencia entre las variables aleatorias.

Desde un punto de vista, las cópulas son funciones que “relacionan” funciones de distribución multivariadas con sus funciones de distribución marginales. Alternativamente, desde otro punto de vista, las cópulas son funciones de distribución multivariadas cuyas marginales (de una dimensión) son uniformes en el intervalo $[0, 1]$.

En el presente trabajo abordaremos algunos resultados principales en la teoría de cópulas; particularmente nos enfocaremos en las cópulas arquimedianas jerárquicas (HAC por sus siglas en inglés, *Hierarchical Archimedean copulas*). Este tipo de cópulas permiten una estructura de dependencia más flexible e intuitiva, a comparación de las cópulas arquimedianas simples. El objetivo será ajustar esta estructura a un conjunto de precios históricos de acciones que cotizan en el IPC, usando el método desarrollado por [4].

Definición y propiedades

En este primer capítulo abordaremos los fundamentos teóricos de las cópulas. Partiremos de su definición y propiedades en el caso bivariado para posteriormente enunciar el Teorema de Sklar. Finalmente generalizaremos los resultados al caso multivariado y definiremos algunas medidas de dependencia para cópulas. Los resultados desarrollados en este capítulo están tomados principalmente de [1].

1.1. Conceptos preliminares

Para el presente trabajo usaremos la siguiente notación:

- \mathbb{R} como la recta de los números reales $(-\infty, \infty)$.
- $\bar{\mathbb{R}}$ denotará la recta de los reales extendida $[-\infty, \infty]$.
- $\bar{\mathbb{R}}^2$ denota el plano real extendido $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$.
- El cuadrado unitario \mathbf{I}^2 es el producto cartesiano $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} = [0, 1]$.
- $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ el rectángulo cuyos vértices son (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) .

DEFINICIÓN 1.1.1. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y sea $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, con $x_1, x_2 \in S_1$ y $y_1, y_2 \in S_2$. Definimos el H - volúmen de B de la siguiente manera:

$$(1.1.1) \quad V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

DEFINICIÓN 1.1.2. Sea $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $S_1, S_2 \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Decimos que H es una función 2-creciente si $V_H(B) \geq 0$ para todo B rectángulo cuyos vértices estén en $\text{Dom}H$.

EJEMPLO 1.1.1. La función H definida como $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$, $x \in S_1$, $y \in S_2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$, es 2-creciente. Para ver esto, tomemos $x_1, x_2 \in S_1$ tales que $x_1 \leq x_2$ y $y_1, y_2 \in S_2$ tales que $y_1 \leq y_2$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) &= (2x_2 - 1)(2y_2 - 1) - (2x_2 - 1)(2y_1 - 1) \\ &\quad - (2x_1 - 1)(2y_2 - 1) + (2x_1 - 1)(2y_1 - 1) \\ &= (2x_2 - 1)(2y_2 - 1 - (2y_1 - 1)) \\ &\quad - (2x_1 - 1)(2y_2 - 1 - (2y_1 - 1)) \\ &= (2x_2 - 1)(2y_2 - 2y_1) - (2x_1 - 1)(2y_2 - 2y_1) \\ &= (2y_2 - 2y_1)(2x_2 - 1 - (2x_1 - 1)) \\ &= (2y_2 - 2y_1)(2x_2 - 2x_1) \geq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.1.1. Es importante observar que el que una función sea *2-creciente* no necesariamente implica que sea no decreciente en cada coordenada. Esto lo podemos observar en el Ejemplo 1.1.1. Como comprobamos, la función H es *2-creciente*, pero, notemos que para $0 < x < \frac{1}{2}$ fija y $y_1, y_2 \in S_2$ tales que $y_1 \leq y_2$ tenemos que

$$H(x, y_1) = (2x - 1)(2y_1 - 1) \geq (2x - 1)(2y_2 - 1) = H(x, y_2)$$

Es decir, H es decreciente en S_1 cuando $x \in (0, \frac{1}{2})$. Análogamente, H es decreciente en S_2 cuando $y \in (0, \frac{1}{2})$.

OBSERVACIÓN 1.1.2. Que una función sea no decreciente en cada coordenada no implica que sea *2-creciente*.

EJEMPLO 1.1.2. Dada la función H definida como $H(x, y) = \max\{x, y\}$, para $x \in S_1$, $y \in S_2$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$, podemos comprobar que H es no decreciente en cada coordenada:

En el caso de S_1 , tomemos $x \in S_1$ fija y $y_1, y_2 \in S_2$ tales que $y_1 \leq y_2$. Queremos demostrar que $H(x, y_1) \leq H(x, y_2)$. Para esto debemos considerar los 3 diferentes casos posibles:

$$\begin{aligned} \text{Caso 1. } & y_1 \leq y_2 \leq x \\ & H(x, y_1) = \max\{x, y_1\} = x = \max\{x, y_2\} = H(x, y_2) \\ \text{Caso 2. } & x \leq y_1 \\ & H(x, y_1) = \max\{x, y_1\} = y_1 \leq y_2 = \max\{x, y_2\} = H(x, y_2) \\ \text{Caso 3. } & y_1 \leq x \leq y_2 \\ & H(x, y_1) = \max\{x, y_1\} = x \leq y_2 = \max\{x, y_2\} = H(x, y_2) \end{aligned}$$

Análogamente, podemos verificar que H es no decreciente en S_2 .

Notemos que a pesar de ser no decreciente en cada coordenada, H no es *2-creciente*, pues si tomamos el rectángulo formado por los puntos $x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 0, y_2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) &= \max\{x_2, y_2\} - \max\{x_2, y_1\} - \max\{x_1, y_2\} + \max\{x_1, y_1\} \\ &= \max\{1, 1\} - \max\{1, 0\} - \max\{0, 1\} + \max\{0, 0\} \\ &= 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMA 1.1.1. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y sea H una función *2-creciente* con dominio en $S_1 \times S_2$. Sean $x_1, x_2 \in S_1$ tales que $x_1 \leq x_2$ y $y_1, y_2 \in S_2$ tales que $y_1 \leq y_2$, entonces, las funciones

$$t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1) \quad \text{y} \quad t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$$

son no decrecientes en S_1 y S_2 respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Este lema se deriva inmediatamente de la definición de *2-creciente* y *H-volumen*, pues si H es *2-creciente*, entonces, para cualesquiera $t_1, t_2 \in S_1$ tales que $t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned} V_H(B) &= H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) - H(t_1, y_2) + H(t_1, y_1) \geq 0 \\ &\Rightarrow H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) \geq H(t_1, y_2) - H(t_1, y_1) \end{aligned}$$

El caso de $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es análogo. \square

DEFINICIÓN 1.1.3. Sea $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$, $S_1, S_2 \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ un función tal que S_1 y S_2 tienen un elemento mínimo, decimos que H es *fija* si, para todo $(x, y) \in S_1 \times S_2$, se cumple que

$$H(a_1, y) = H(x, a_2) = 0$$

con $a_1 = \inf \{x | x \in S_1\}$ y $a_2 = \inf \{y | y \in S_2\}$. Además $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$.

LEMA 1.1.2. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y sea H una función fija y 2-creciente con dominio en $S_1 \times S_2$, entonces H es una función no decreciente en cada coordenada.

DEMOSTRACIÓN. Para ver que es no decreciente en S_1 , tomemos $y \in S_2$ fija. Del Lema 1.1.1 tenemos que la función $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es no decreciente en S_1 para $y_1, y_2 \in S_2$ tales que $y_1 \leq y_2$. Sea $a_2 = \inf \{y | y \in S_2\}$, entonces la función $t \mapsto H(t, y) - H(t, a_2) = H(t, y) - 0 = H(t, y)$ es no decreciente en S_1 .

Análogamente, en el caso de S_2 , tomemos $x \in S_1$ fija. Nuevamente, del Lema 1.1.1, tenemos que la función $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es no decreciente en S_2 para $x_1, x_2 \in S_1$ tales que $x_1 \leq x_2$. Sea $a_1 = \inf \{x | x \in S_1\}$, entonces la función $s \mapsto H(x, s) - H(a_1, s) = H(x, s) - 0 = H(x, s)$ es no decreciente en S_2 . \square

DEFINICIÓN 1.1.4. Supongamos que $S_1, S_2 \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Sea $b_1 = \sup \{x | x \in S_1\}$ y sea $b_2 = \sup \{y | y \in S_2\}$. Decimos que $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ tiene marginales y que las marginales de H son las funciones $F : S_1 \mapsto \mathbb{R}$ y $G : S_2 \mapsto \mathbb{R}$ dadas por:

$$F(x) = H(x, b_2)$$

$$G(y) = H(y, b_1)$$

LEMA 1.1.3. Sean $S_1, S_2 \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ y $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ una función 2-creciente y fija. Tomemos $x_1, x_2 \in S_1$ y $y_1, y_2 \in S_2$, entonces

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $b_1 = \sup \{x | x \in S_1\}$ y $b_2 = \sup \{y | y \in S_2\}$, entonces

$$\begin{aligned} |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| &= |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \\ &\leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \\ &\leq |H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2)| + |H(b_1, y_2) - H(b_1, y_1)| \\ &= |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)| \end{aligned}$$

En el caso de la segunda desigualdad, para verificar que $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2)|$ debemos considerar dos casos:

$$a) x_1 \leq x_2$$

Dado que H es 2-creciente y fija, entonces es no decreciente en cada coordenada, además $H(x_2, b_2) - H(x_2, y_2) - H(x_1, b_2) + H(x_1, y_2) \geq 0$, es decir

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2)$$

Sabemos además que H tiene marginales, entonces $H(x_2, b_2) = F(x_2)$ y $H(x_1, b_2) = F(x_1)$, por lo que

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1)$$

$$b) x_2 \leq x_1$$

Dado que H es $\mathcal{2}$ -creciente y fija, entonces es no decreciente en cada coordenada. Además $H(x_1, b_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, b_2) + H(x_2, y_2) \geq 0$, es decir

$$0 \leq -H(x_2, y_2) + H(x_1, y_2) \leq -H(x_2, b_2) + H(x_1, b_2)$$

Sabemos además que H tiene marginales, entonces $H(x_2, b_2) = F(x_2)$ y $H(x_1, b_2) = F(x_1)$, por lo que

$$0 \leq -(H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)) \leq -(F(x_2) - F(x_1))$$

De $a)$ y $b)$ tenemos que

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2)|$$

Análogamente podemos demostrar que $|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(b_1, y_2) - H(b_1, y_1)|$. \square

1.2. Cópulas

DEFINICIÓN 1.2.1. Una *subcópula bidimensional* ó $\mathcal{2}$ -*subcópula* (o de manera abreviada, *subcópula*) es una función $C' : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

- (1) $S_1, S_2 \subseteq \mathbf{I}$ y $\{0, 1\} \subseteq S_1 \cap S_2$.
- (2) C' es fija y $\mathcal{2}$ -creciente.
- (3) Para cualesquiera $u \in S_1$ y $v \in S_2$:

$$\begin{aligned} C'(u, 1) &= u \\ & \text{y} \\ C'(1, v) &= v \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.2.1. Si C' es subcópula, entonces, para todo $(u, v) \in S_1 \times S_2$ se cumple que $0 \leq C'(u, v) \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que C' es fija, y $0 = \inf\{x|x \in S_1\} = \inf\{y|y \in S_2\}$, entonces $C(0, y) = C(x, 0) = 0$.

Por otro lado, $1 = \sup\{x|x \in S_1\} = \sup\{y|y \in S_2\}$ y $C(1, 1) = 1$, además C' es $\mathcal{2}$ -creciente, por lo tanto es no decreciente en cada coordenada. De modo que $0 \leq C'(u, v) \leq 1$. \square

DEFINICIÓN 1.2.2. **Cópula.** Decimos que una subcópula C es una *cópula* si $S_1 = S_2 = \mathbf{I}$.

OBSERVACIÓN 1.2.2. La definición de *cópula* es equivalente a:

- (1) Para cualesquiera $u, v \in \mathbf{I}$

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v),$$

$$C(u, 1) = u \quad \text{y} \quad C(1, v) = v.$$

- (2) C es $\mathcal{2}$ -creciente.

EJEMPLO 1.2.1. La función definida como $\Pi(u, v) = uv$ con $u, v \in \mathbf{I}$ es cópula. A esta cópula se le conoce como *cópula independencia* o *cópula producto*. Para demostrar que es cópula, debemos verificar:

Dados $u, v \in \mathbf{I}$,

$$i) \Pi(u, 0) = \Pi(0, v) = 0$$

$$\Pi(u, 0) = u \cdot 0 = 0.$$

Análogamente $\Pi(0, v) = 0$.

$$ii) \Pi(u, 1) = u \quad \text{y} \quad \Pi(1, v) = v.$$

$$\Pi(u, 1) = u \cdot 1 = u.$$

Análogamente $\Pi(1, v) = v$.

$$iii) \Pi \text{ es } 2\text{-creciente.}$$

Sean $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$.

$$\begin{aligned} V_{\Pi}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \Pi(u_2, v_2) - \Pi(u_2, v_1) - \Pi(u_1, v_2) + \Pi(u_1, v_1) \\ &= u_2 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2 + u_1 \cdot v_1 \\ &= u_2(v_2 - v_1) - u_1(v_2 - v_1) \\ &= (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Es intuitivo pensar en cópulas como funciones de distribución conjuntas cuyas marginales son funciones de distribución uniformes en \mathbf{I} . Si bien, hasta este punto no hemos hablado de variables aleatorias, más adelante se mostrará un importante resultado que nos proporciona una relación entre cópulas y funciones de distribución, aunque la forma en la que se abordarán estas últimas, no es quizá la forma en la que la mayoría de los lectores estarán familiarizados, pues se definirán de manera más general.

TEOREMA 1.2.1. *Sea C' una subcópula, entonces, para todo $(u, v) \in \text{Dom}(C')$ se cumple que*

$$\text{máx}\{u + v - 1, 0\} \leq C'(u, v) \leq \text{mín}\{u, v\}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea (u, v) un punto arbitrario en $\text{Dom}(C')$. Entonces, por ser C' no decreciente en cada coordenada, tenemos que

$$C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$$

y

$$C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$$

Por lo que $C'(u, v) \leq \text{mín}\{u, v\}$.

Por otro lado, por ser C' 2-creciente, se cumple que $V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$. De donde

$$\begin{aligned} V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) &= C'(1, 1) - C'(1, v) - C'(u, 1) + C'(u, v) \\ &= 1 - u - v + C'(u, v) \geq 0 \\ \Rightarrow C'(u, v) &\geq u + v - 1 \\ \Rightarrow C'(u, v) &\geq \text{máx}\{u + v - 1, 0\} \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1.2.3. Dado que toda cópula es una subcópula, el resultado anterior es aplicable cuando C' es cópula. Si C es una cópula, se cumple que

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

donde $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ y $M(u, v) = \min\{u, v\}$ son cópulas.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos el caso de M .

Claramente, podemos observar que el dominio de M es \mathbf{I}^2 .

Comprobemos que, dados $u, v \in \mathbf{I}$, para M se cumple:

$$i) M(u, 0) = M(0, v) = 0$$

$$M(u, 0) = \min\{u, 0\} = 0.$$

Análogamente $M(0, v) = 0$.

$$ii) M(u, 1) = u \quad y \quad M(1, v) = v.$$

$$M(u, 1) = \min\{u, 1\} = u.$$

Análogamente $M(1, v) = v$.

$$iii) W \text{ es } 2\text{-creciente.}$$

Sean $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$.

$$\begin{aligned} V_M([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) \\ &= \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_2\} + \min\{u_1, v_1\} \end{aligned}$$

Tenemos ahora 6 casos:

a) Cuando $v_1 \leq u_1 \leq v_2 \leq u_2$

$$\begin{aligned} V_M([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_2\} + \min\{u_1, v_1\} \\ &= v_2 - v_1 - u_1 + v_1 = v_2 - u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Cuando $v_1 \leq v_2 \leq u_1 \leq u_2$

$$\begin{aligned} V_M([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_2\} + \min\{u_1, v_1\} \\ &= v_2 - v_1 - v_2 + v_1 = 0. \end{aligned}$$

c) Cuando $u_1 \leq v_1 \leq v_2 \leq u_2$

$$\begin{aligned} V_M([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_2\} + \min\{u_1, v_1\} \\ &= v_2 - v_1 - u_1 + u_1 = v_2 - v_1 \geq 0. \end{aligned}$$

d) Cuando $v_1 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_2$

$$\begin{aligned} V_M([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_2\} + \min\{u_1, v_1\} \\ &= u_2 - v_1 - u_1 + v_1 = u_2 - u_1 \geq 0. \end{aligned}$$

e) Cuando $u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2$

$$\begin{aligned} V_M([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_2\} + \min\{u_1, v_1\} \\ &= u_2 - v_1 - u_1 + u_1 = u_2 - v_1 \geq 0. \end{aligned}$$

f) Cuando $u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2$

$$\begin{aligned} V_M([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= \min\{u_2, v_2\} - \min\{u_2, v_1\} - \min\{u_1, v_2\} + \min\{u_1, v_1\} \\ &= u_2 - u_2 - u_1 + u_1 = 0. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.2.2. Sea C' una subcópula, entonces, para cualesquiera $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \text{Dom}C'$,

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

DEMOSTRACIÓN. Por ser C' subcópula, es 2-creciente y fija. Sean F y G las marginales de C' , entonces, por el Lema 1.1.3 se cumple que

$$\begin{aligned} |C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| &\leq |F(u_2) - F(u_1)| + |G(v_2) - G(v_1)| \\ &= |C'(u_2, 1) - C'(u_1, 1)| + |C'(1, v_2) - C'(1, v_1)| \\ &= |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.2.3. Sea C una cópula. Para cada $v \in \mathbf{I}$ existe $\frac{\partial C}{\partial u}$ para casi toda $u \in \mathbf{I}$ y, cuando existe, se cumple que

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u}(u, v) \leq 1$$

Análogamente, para cada $u \in \mathbf{I}$ existe $\frac{\partial C}{\partial v}$ para casi toda $v \in \mathbf{I}$ y, cuando existe, se cumple que

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial v}(u, v) \leq 1$$

Además, cuando estas parciales existen, las funciones $v \mapsto \frac{\partial C}{\partial u}(u, v)$ y $u \mapsto \frac{\partial C}{\partial v}(u, v)$ son no decrecientes casi en todos lados.

TEOREMA 1.2.4. Sea C cópula. Si $\frac{\partial C}{\partial v}(u, v)$ y $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u, v)$ son continuas en \mathbf{I}^2 y $\frac{\partial C}{\partial u}(u, v)$ existe para toda $u \in (0, 1)$ cuando $v = 0$, entonces $\frac{\partial C}{\partial u}(u, v)$ y $\frac{\partial^2 C}{\partial v \partial u}(u, v)$ existen en $(0, 1)^2$ y $\frac{\partial^2 C}{\partial v \partial u}(u, v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u, v)$.

La demostración de estos teoremas requiere de algunos resultados previos que no se abordarán en el presente trabajo, por lo que sólo los mencionaremos, pero si el lector está interesado en la demostración de éstos, puede consultar la sección 2.2 de [1].

1.3. El teorema de Sklar

El Teorema de Sklar es el resultado más importante que mostraremos sobre la teoría de cópulas, pues es a partir de este que estableceremos una relación entre cópulas y variables aleatorias; más específicamente, la relación entre cópulas y funciones de distribución.

DEFINICIÓN 1.3.1. Una *función de distribución* es una función F con dominio en \mathbb{R} tal que

- (1) F es no decreciente,

$$(2) F(-\infty) = 0 \text{ y } F(\infty) = 1.$$

DEFINICIÓN 1.3.2. Una *función de distribución conjunta* es una función H con dominio en $\bar{\mathbb{R}}^2$ tal que

- (1) H es 2-creciente,
- (2) $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ y $H(\infty, \infty) = 1$.

OBSERVACIÓN 1.3.1. Si H es función de distribución conjunta, entonces tiene marginales $F(x) = H(x, \infty)$ y $G(y) = H(\infty, y)$.

OBSERVACIÓN 1.3.2. Las marginales F y G de la distribución conjunta H son funciones de distribución.

TEOREMA 1.3.1. **Teorema de Sklar.** Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces existe una cópula C tal que

$$(1.3.1) \quad H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Si F y G son continuas, entonces C es única; si no, C está determinada de manera única en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$.

De manera inversa, si C es cópula y F y G son funciones de distribución, entonces H definida como en (1.3.1) es función de distribución conjunta.

Los siguientes lemas nos servirán para demostrar el Teorema de Sklar.

LEMA 1.3.1. Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces existe una única subcópula C' tal que

- (1) $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$,
- (2) Para todos $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que H satisface las hipótesis del Lema 1.1.3 con $S_1 = S_2 = \bar{\mathbb{R}}$. Entonces, para cualesquiera puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bar{\mathbb{R}}^2$,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

De aquí se sigue que, si $F(x_1) = F(x_2)$ y $G(y_1) = G(y_2)$, entonces $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$. Por lo tanto, el conjunto de pares ordenados

$$\{(F(x), G(y)), H(x, y) \mid x, y \in \bar{\mathbb{R}}\}$$

define una función bivariada a la que llamaremos C' cuyo dominio es $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$. Para ver que C' es subcópula, debemos verificar que:

- i) $\text{Ran}F \subset \mathbf{I}$ y $\text{Ran}G \subset \mathbf{I}$. Además, $\{0, 1\} \subseteq \text{Ran}F, \text{Ran}G$.

Es claro que $\text{Ran}F \subset \mathbf{I}$ y $\text{Ran}G \subset \mathbf{I}$ por ser F y G funciones de distribución. Además

$$\begin{aligned} F(-\infty) = G(-\infty) = 0 &\Rightarrow 0 \in \text{Ran}F \cap \text{Ran}G \\ F(\infty) = G(\infty) = 1 &\Rightarrow 1 \in \text{Ran}F \cap \text{Ran}G \end{aligned}$$

- ii) C' está fija, es decir, $C'(u, 0) = C'(0, v) = 0$.

Tenemos que $F(-\infty) = 0$. Si $v \in \text{Ran}G$, entonces existe $y \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $G(y) = v$. Entonces

$$C'(0, v) = C'(F(-\infty), G(y)) = H(-\infty, y) = 0.$$

Análogamente $C'(u, 0) = 0$.

iii) $C'(u, 1) = u$ y $C'(1, v) = v$.

Sea $u \in \text{Ran}F$, entonces existe $x \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = u$. Sabemos además que $G(\infty) = 1$. Entonces

$$C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u.$$

Análogamente $C'(1, v) = v$.

iv) C' es 2-creciente, es decir, si $u_1, u_2 \in \text{Ran}F$ y $v_1, v_2 \in \text{Ran}G$ con $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$. Entonces $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$

Si $u_1, u_2 \in \text{Ran}F$ entonces existen $x_1, x_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ tales que $F(x_1) = u_1$, $F(x_2) = u_2$. Análogamente, si $v_1, v_2 \in \text{Ran}G$, existen $y_1, y_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ $G(y_1) = v_1$ y $G(y_2) = v_2$.

Notemos que, por ser F y G funciones de distribución, son no decrecientes, por lo que, $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$ sí, y sólo si, $F(x_1) \leq F(x_2)$ y $G(y_1) \leq G(y_2)$. De este modo,

$$\begin{aligned} V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= C'(u_2, v_2) - C'(u_2, v_1) - C'(u_1, v_2) + C'(u_1, v_1) \\ &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) \geq 0. \end{aligned}$$

□

LEMA 1.3.2. Sea C' una subcópula, entonces existe una cópula C tal que $C(u, v) = C'(u, v)$ para todo $(u, v) \in \text{Dom}C'$; es decir, cualquier subcópula puede extenderse a una cópula.

DEMOSTRACIÓN. Sea C' una subcópula con dominio $S_1 \times S_2$. Por ser C' 2-creciente y fija, C' es no decreciente en cada coordenada y uniformemente continua, entonces C' puede extenderse de manera única a $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, donde \bar{S} es la cerradura de S . Llamémosle C'' a la única extensión de C' en $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$.

Si $u \in \bar{S}_1 \setminus S_1$ y $v \in \bar{S}_2 \setminus S_2$, para $\{u_n\} \subset S_1$ tal que $u_n \nearrow u$, $\{v_n\} \subset S_2$ tal que $v_n \nearrow v$ definimos

$$C''(u, v) = \lim_{u_n \rightarrow u} \lim_{v_n \rightarrow v} C'(u_n, v_n).$$

Dado que C'' es no decreciente en cada coordenada y acotada, el límite existe y $C''(u, v) \leq 1$.

Análogamente, si $u \in S_1$ y $v \in \bar{S}_2 \setminus S_2$, entonces, para $\{v_n\} \subset S_2$ tal que $v_n \nearrow v$ definimos

$$C''(u, v) = \lim_{v_n \rightarrow v} C'(u, v_n).$$

Definimos de manera similar el caso en el que $u \in \bar{S}_1 \setminus S_1$ y $v \in S_2$.

Notemos que $\{0, 1\} \in \bar{S}_1, \bar{S}_2$, pues $\{0, 1\} \in S_1, S_2$.

Dado que C'' es una extensión de C' , para comprobar que C'' es subcópula, basta verificar que para $u \in \bar{S}_1 \setminus S_1$ y $v \in \bar{S}_2 \setminus S_2$ se cumple que:

i) C'' está fija, es decir, $C''(u, 0) = C''(0, v) = 0$.

Como $u \in \bar{S}_1 \setminus S_1$, tomemos $\{u_n\} \subset S_1$ tal que $u_n \nearrow u$. Entonces

$$C''(u, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} C'(u_n, 0) = 0.$$

De forma similar podemos comprobar que para $v \in \bar{S}_2 \setminus S_2$ se cumple que $C''(0, v) = 0$.

ii) $C''(u, 1) = u$ y $C''(1, v) = v$.

Nuevamente, tomemos $\{u_n\} \subset S_1$ tal que $u_n \nearrow u$. Entonces

$$C''(u, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} C'(u_n, 1) = u.$$

Análogamente, $C''(1, v) = v$.

iii) C'' es 2-creciente; es decir, si $u_1, u_2 \in \bar{S}_1$ y $v_1, v_2 \in \bar{S}_2$ con $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$. Entonces $V_{C''}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$

Para verificar esto, es necesario comprobar que se cumple para todos los posibles casos en los que al menos $u_1 \in \bar{S}_1 \setminus S_1$ o $u_2 \in \bar{S}_1 \setminus S_1$ o al menos $v_1 \in \bar{S}_2 \setminus S_2$ o $v_2 \in \bar{S}_2 \setminus S_2$,

Comprobemos sólo el caso en el que $u_1 \in \bar{S}_1 \setminus S_1$. Para esto, tomemos $\{t_n\} \subset S_1$ tal que $t_n \nearrow u_1$. Notemos que $t_n \leq u_2$ para toda n . Entonces

$$\begin{aligned} V_{C''}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &= C''(u_2, v_2) - C''(u_2, v_1) - C''(u_1, v_2) + C''(u_1, v_1) \\ &= C'(u_2, v_2) - C'(u_2, v_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} C'(t_n, v_2) + \lim_{n \rightarrow \infty} C'(t_n, v_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Con todo esto, podemos concluir que C'' es subcópula.

Queremos ahora extender C'' a una función con dominio en \mathbf{I}^2 .

Sea $(a, b) \in \mathbf{I}^2$. Definimos $a_1 = \sup\{c \in S_1 | c \leq a\}$ y $a_2 = \inf\{d \in S_1 | a \leq d\}$, de modo que $a_1 \leq a \leq a_2$. Además, si $a \in S_1$ entonces $a_1 = a = a_2$.

Análogamente, definimos $b_1 = \sup\{c \in S_2 | c \leq b\}$ y $b_2 = \inf\{d \in S_2 | b \leq d\}$, de modo que $b_1 \leq b \leq b_2$. Además, si $b \in S_2$ entonces $b_1 = b = b_2$.

Sea

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{a-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 < a_2 \\ 1, & \text{si } a_1 = a_2 \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \frac{b-b_1}{b_2-b_1}, & \text{si } b_1 < b_2 \\ 1, & \text{si } b_1 = b_2 \end{cases}$$

y definimos

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} C(a, b) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C''(a_2, b_2). \end{aligned}$$

Es claro que $\text{Dom}C = \mathbf{I}^2$. Debemos ahora verificar que C es cópula y que es extensión de C'' .

Para ver que es extensión de C'' , es necesario comprobar que si $(a, b) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ entonces $C(a, b) = C''(a, b)$.

Tomemos $(a, b) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$. como observamos anteriormente, $a_1 = a_2 = a$ y $b_1 = b_2 = b$, lo cual implica que $\lambda_1 = \mu_1 = 1$. Sustituyendo en (1.3.2), tenemos que $C(a, b) = C''(a_2, b_2) = C''(a, b)$.

Verifiquemos que C es cópula. Para esto C debe cumplir que:

i) C está fija, es decir, $C(a, 0) = C(0, b) = 0$.

Para ver que $C(a, 0) = 0$, tomemos $b = 0$. Tenemos que $0 \in \bar{S}_2 \Rightarrow b_1 = b_2 = 0$ y $\mu_1 = 1$.

Si $a \in \bar{S}_1 \Rightarrow C(a, 0) = C''(a, 0) = 0$.

Si $a \notin \bar{S}_1 \Rightarrow C(a, 0) = (1 - \lambda_1)C''(a_1, 0) + \lambda_1C''(a_2, 0) = 0$.

Análogamente podemos comprobar que $C(0, b) = 0$.

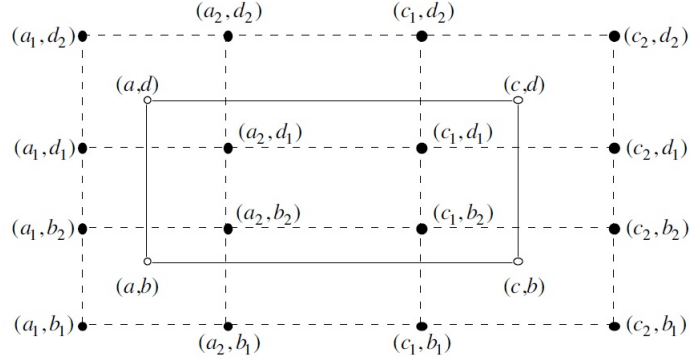


FIGURA 1.3.1.

ii) $C(a, 1) = a$ y $C(1, b) = b$.

En el caso de $b = 1$. Tenemos que $1 \in \bar{S}_2 \Rightarrow b_1 = b_2 = 1$ y $\mu_1 = 1$.

Si $a \in \bar{S}_1 \Rightarrow C(a, 1) = C''(a, 1) = a$.

Si $a \notin \bar{S}_1$ entonces

$$\begin{aligned}
 C(a, 1) &= (1 - \lambda_1) C''(a_1, 1) + \lambda_1 C''(a_2, 1) \\
 &= (1 - \lambda_1) a_1 + \lambda_1 a_2 \\
 &= \left(1 - \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}\right) a_1 + \left(\frac{a - a_1}{a_2 - a_1}\right) a_2 \\
 &= \frac{(a_2 - a_1) a_1 - (a - a_1) a_1 + (a - a_1) a_2}{a_2 - a_1} \\
 &= \frac{(a_2 - a_1) a_1 - (a - a_1) \cdot (a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} \\
 &= \frac{(a - a_1 + a_1) \cdot (a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} = a
 \end{aligned}$$

Análogamente podemos comprobar que $C(1, b) = b$.

iii) C es 2-creciente.

Tomemos dos puntos $(a, b), (c, d) \in \mathbf{I}^2$ tales que $a \leq c$ y $b \leq d$. Para determinar el volumen de $B = [a, b] \times [c, d]$ habría que considerar todos los casos posibles en los que, tanto a y c pueden o no pertenecer a \bar{S}_1 , como b y d pueden o no pertenecer a \bar{S}_2 . Verificaremos sólo el caso en el que $a, c \notin \bar{S}_1$ y $b, d \notin \bar{S}_2$. Además, si $a_1 = \sup \{s \in S_1 | s \leq a\}$, $a_2 = \inf \{t \in S_1 | a \leq t\}$, $c_1 = \sup \{s \in S_1 | s \leq c\}$, $c_2 = \inf \{t \in S_1 | c \leq t\}$, $b_1 = \sup \{s \in S_2 | s \leq b\}$, $b_2 = \inf \{t \in S_2 | b \leq t\}$, $d_1 = \sup \{s \in S_2 | s \leq d\}$ y $d_2 = \inf \{t \in S_2 | d \leq t\}$, consideraremos el caso en el que a_1, a_2, c_1, c_2 son todos distintos y b_1, b_2, d_1, d_2 son todos distintos, como se muestra en la figura (1.3.1).

Definimos $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ como en la ecuación (1.3.2) para a, c, b, d , respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
V_C([a, c] \times [b, d]) &= C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b) \\
&= (1 - \lambda_2)(1 - \mu_2)C'''(c_1, d_1) + (1 - \lambda_2)\mu_2C'''(c_1, d_2) \\
&\quad + \lambda_2(1 - \mu_2)C'''(c_2, d_1) + \lambda_2\mu_2C'''(c_2, d_2) \\
&\quad - (1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C'''(c_1, b_1) - (1 - \lambda_2)\mu_1C'''(c_1, b_2) \\
&\quad - \lambda_2(1 - \mu_1)C'''(c_2, b_1) - \lambda_2\mu_1C'''(c_2, b_2) \\
&\quad - (1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C'''(a_1, d_1) - (1 - \lambda_1)\mu_2C'''(a_1, d_2) \\
&\quad - \lambda_1(1 - \mu_2)C'''(a_2, d_1) - \lambda_1\mu_2C'''(a_2, d_2) \\
&\quad + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'''(a_1, b_2) \\
&\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'''(a_2, b_2)
\end{aligned}$$

Agrupando algunos términos, tenemos que

$$\begin{aligned}
V_C([a, c] \times [b, d]) &= \lambda_2\mu_2V_{C''}([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + (1 - \lambda_2 - \mu_2)C'''(c_1, d_1) \\
&\quad + \mu_2C'''(c_1, d_2) + \lambda_2C'''(c_2, d_1) \\
&\quad + \lambda_2(1 - \mu_1)V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) - (1 - \mu_1)C'''(c_1, b_1) \\
&\quad + (\lambda_2 + 1 - \mu_1 - 1)C'''(c_1, b_2) - \lambda_2C'''(c_2, b_2) \\
&\quad + (1 - \lambda_1)\mu_2V_{C''}([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) - (1 - \lambda_1)C'''(a_1, d_1) \\
&\quad + (1 - \lambda_1 + \mu_2 - 1)C'''(a_2, d_1) - \mu_2C'''(a_2, d_2) \\
&\quad + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) + (1 - \lambda_1)C'''(a_1, b_2) \\
&\quad + (1 - \mu_1)C'''(a_2, b_1) + (1 - \mu_1 + \lambda_1 + 1 - 1)C'''(a_2, b_2)
\end{aligned}$$

Si ordenamos y agrupamos nuevamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
V_C([a, c] \times [b, d]) &= \lambda_2\mu_2V_{C''}([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + \lambda_2(1 - \mu_1)V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) \\
&\quad + (1 - \lambda_1)\mu_2V_{C''}([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) \\
&\quad + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \\
&\quad + \mu_2V_{C''}([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) + (1 - \lambda_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) \\
&\quad + V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \lambda_2V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\
&\quad + (1 - \mu_1)V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_1, b_2])
\end{aligned}$$

De aquí, podemos ver que, dado que $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \leq 1$ y C''' es cópula, entonces todos los términos de la esta igualdad son mayores o iguales a cero, por lo que $V_C([a, c] \times [b, d]) \geq 0$. \square

En general, esta extensión no es única. Consideremos, por ejemplo, $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$ y la subcópula C' definida sobre $S_1 \times S_2$ como

$$C'(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u, v) \in \{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\} \\ 1 & \text{si } (u, v) = (1, 1) \end{cases}$$

Dado que toda cópula coincide con el dominio de C' , cualquier cópula es extensión de C' . Particularmente, usando la extensión definida en la ecuación (1.3.2) obtenemos la cópula independencia $\Pi(u, v) = uv$.

Una vez demostrados los Lemas 1.3.1 y 1.3.2, podemos demostrar el Teorema de Sklar.

DEMOSTRACIÓN. (**Teorema de Sklar**). Si H es una función de distribución conjunta con marginales F y G , por el Lema 1.3.1 existe una única subcópula C' tal que:

$$H(x, y) = C'(F(x), G(y))$$

$$\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$$

Por el Lema 1.3.2 podemos extender C' a una cópula C . Además, si F y G son continuas, entonces $\text{Ran}F = \text{Ran}G = \mathbf{I}$ y C' es cópula y es única.

Por otro lado, la parte inversa del teorema de Sklar nos dice que si C es cópula y F y G son funciones de distribución, entonces H definida como

$$H(x, y) := C'(F(x), G(y))$$

es función de distribución conjunta. Para esto debemos demostrar que:

i) H es 2-creciente

Sean $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$, entonces

$$\begin{aligned} V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= C(F(x_2), G(y_2)) - C(F(x_2), G(y_1)) \\ &\quad - C(F(x_1), G(y_2)) + C(F(x_1), G(y_1)) \\ &= V_C([F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]) \end{aligned}$$

De donde $[F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]$ es un rectángulo en \mathbf{I}^2 , pues, por ser F y G funciones de distribución, son no decrecientes y $F(x_1) \leq F(x_2)$, $G(y_1) \leq G(y_2)$. Por ser C cópula, es 2-creciente y entonces $V_C([F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]) \geq 0$ y, por lo tanto,

$$V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) \geq 0$$

ii) $H(\infty, \infty) = 1$ y $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$.

$$H(\infty, \infty) = C(F(\infty), G(\infty)) = C(1, 1) = 1.$$

$$H(x, -\infty) = C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0.$$

Análogamente $H(-\infty, y) = 0$. □

Hasta ahora el Teorema de Sklar nos muestra el importante papel que juegan las cópulas en la relación que existe entre funciones de distribución conjuntas y sus marginales, ya que nos permite ver a las cópulas como estructuras que definen por completo la dependencia entre dos variables aleatorias a partir de sus funciones de distribución marginales.

DEFINICIÓN 1.3.3. Sea F una función de distribución, decimos que $F^{(-1)}$ con dominio en \mathbf{I} es la *cuasi-inversa* de F si cumple las siguientes propiedades:

- (1) $F(F^{(-1)}(t)) = t$, para toda $t \in \text{Ran}F$.
- (2) Si $t \notin \text{Ran}F$ entonces

$$F^{(-1)}(t) = \inf \{x | F(x) \geq t\}$$

Si F es estrictamente creciente, entonces tiene una única *cuasi-inversa* $F^{(-1)}$ y coincide con la función inversa usual de F , es decir, $F^{(-1)} = F^{-1}$.

EJEMPLO 1.3.1. Sea

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Entonces, una *cuasi-inversa* de F podría ser

$$F^{(-1)}(t) = \begin{cases} a-1 & \text{si } t = 0 \\ a & \text{si } 0 < t < 1 \\ a+1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Notemos que, en general, podemos reemplazar $a-1$ por cualquier valor menor que a , y de igual manera, podemos reemplazar $a+1$ por cualquier valor mayor que a . Es decir, en este ejemplo, hay una infinidad de *cuasi-inversas* de F .

Una vez definidas las *cuasi-inversas* de una función de distribución, tenemos entonces el siguiente corolario del Teorema de Sklar.

COROLARIO 1.3.1. *Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G y sean $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F y G respectivamente, entonces existe una única subcópula C' tal que*

- (1) $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$,
- (2) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.
- (3) Para cualesquiera $(u, v) \in \text{Ran}F \times \text{Ran}G$

$$(1.3.3) \quad C'(u, v) = H\left(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)\right)$$

Si F y G son continuas, entonces C' sería cópula y el resultado anterior nos daría una forma de construir cópulas a partir de funciones de distribución.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(u, v) \in \text{Ran}F \times \text{Ran}G$, entonces existen x, y tales que $F(x) = u$ y $G(y) = v$. Entonces,

$$\begin{aligned} C'(u, v) &= C'(F(x), G(y)) = H(x, y) \\ &= H\left(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)\right) \end{aligned}$$

□

Ahora que tenemos una manera de construir cópulas a partir de *cuasi-inversas* veamos el siguiente ejemplo de esta construcción:

EJEMPLO 1.3.2. Sea

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & x \in [-1, 1], y \in (0, \infty) \\ 1 - e^{-y} & x \in (1, \infty), y \in (0, \infty) \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Construyamos una cópula a partir de H .

- i*) Calculemos primero las marginales, F y G , de H .

Para F tenemos:

Por L'Hopital

$$\bullet \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} = (x+1) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2e^y} = \frac{x+1}{2}$$

$$\bullet \lim_{y \rightarrow \infty} 1 - e^{-y} = 1$$

Entonces

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & x \in [-1, 1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

En el caso de G

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-y} = 1 - e^{-y}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y} & y \geq 0 \end{cases}$$

ii) Calculemos las *cuasi-inversas* de F y G .

Notemos que F y G son continuas.

Para $0 \leq t \leq 1$ y $0 \leq s \leq 1$

$$t = F(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 2t - 1$$

$$s = G(y) = 1 - e^{-y} \Rightarrow y = -\ln(1 - s)$$

Entonces

$$\begin{aligned} F^{(-1)}(t) &= 2t - 1 \\ G^{(-1)}(s) &= -\ln(1 - s) \end{aligned}$$

iii) Finalmente, construyamos la cópula C' .

$$C'(u, v) = H\left(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)\right)$$

Tomemos $u, v \in \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} H\left(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)\right) &= \frac{(F^{(-1)}(u) + 1)(e^{G^{(-1)}(v)} - 1)}{F^{(-1)}(u) + 2e^{G^{(-1)}(v)} - 1} \\ &= \frac{((2u - 1) + 1)(e^{-\ln(1-v)} - 1)}{2u - 1 + 2e^{-\ln(1-v)} - 1} \\ &= \frac{2u\left(\frac{1}{1-v} - 1\right)}{2u - 2 + 2\left(\frac{1}{1-v}\right)} \\ &= \frac{2uv}{2u(1-v) - 2(1-v) + 2} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $C'(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$ es cópula. \blacksquare

1.4. Cópulas y variables aleatorias

En esta sección se hablará de la relación entre cópulas y variables aleatorias sin detenernos en la definición de *variable aleatoria*, por lo que, cuando nos refiramos a estas, daremos por hecho que hablamos de funciones que van de un espacio muestral Ω a \mathbb{R} . Si el lector desea profundizar en el tema de *variables aleatorias* puede consultar [10, 2, 3].

DEFINICIÓN 1.4.1. Si X es variable aleatoria, definimos la *función de distribución de X* como $F_X(x) = P(X \leq x)$. Donde F_X cumple las propiedades definidas para una función de distribución en la Definición 1.3.1.

DEFINICIÓN 1.4.2. Si X y Y son variables aleatorias, definimos la función de distribución conjunta de X y Y como $H_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Donde $H_{X,Y}$ cumple las propiedades definidas para una función de distribución conjunta en la Definición 1.3.2.

TEOREMA 1.4.1. Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H y marginales F y G , entonces existe una cópula C tal que

$$(1.4.1) \quad H(x,y) = C(F(x), G(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si F y G son continuas, entonces C es única.

Este teorema es el Teorema de Sklar aplicado a variables aleatorias, de modo que cuando trabajemos con variables aleatorias, denotaremos a la cópula definida en la ecuación (1.4.1) como $C_{X,Y}$ cuando esta sea única.

OBSERVACIÓN 1.4.1. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G , entonces X y Y son independientes si, y sólo si, $C_{X,Y}$ es la cópula producto Π .

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow) Sean X y Y variables aleatorias independientes. Entonces $H(x,y) = F(x)G(y)$.

Como X y Y son continuas, existe una única cópula C tal que

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) = F(x)G(y)$$

Entonces, para $u, v \in \mathbf{I}$

$$C_{X,Y}(u,v) = uv = \Pi(u,v)$$

\Leftarrow) Si $C_{X,Y}(w,z) = wz$, para cualesquiera $w, z \in \mathbf{I}$, tomemos $u, v \in \mathbf{I}$, tales que $u = F(x)$ y $v = G(y)$. Por el teorema de Sklar,

$$\begin{aligned} H(x,y) &= C_{X,Y}(F(x), G(y)) = F(x)G(y) \\ &\Rightarrow H(x,y) = F(x)G(y) \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.4.2. Si X y Y son variables aleatorias continuas con cópula $C_{X,Y}$, entonces:

- (1) Sean α y β transformaciones estrictamente crecientes en $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$, respectivamente, entonces $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = C_{X,Y}(u,v)$.

- (2) Sean α y β transformaciones estrictamente decrecientes en $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$, respectivamente, entonces $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u+v-1+C_{X,Y}(1-u,1-v)$
- (3) Sea α una transformación estrictamente creciente en $\text{Ran}X$ y β una transformación estrictamente decreciente en $\text{Ran}Y$, entonces $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u - C_{X,Y}(u,1-v)$
- (4) Sea α una transformación estrictamente decreciente en $\text{Ran}X$ y β una transformación estrictamente creciente en $\text{Ran}Y$, entonces $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = v - C_{X,Y}(1-u,v)$

Demostremos sólo el caso (4) en el que α es estrictamente decreciente y β es estrictamente creciente.

DEMOSTRACIÓN. Sean F, G, F' y G' las funciones de $X, Y, \alpha(X)$ y $\beta(Y)$ respectivamente, entonces, dado que α es estrictamente decreciente, $F'(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X > \alpha^{-1}(x)] = 1 - F(\alpha^{-1}(x))$, es decir, $F(\alpha^{-1}(x)) = 1 - F'(x)$.

Por otro lado, dado que β es estrictamente creciente, $G'(y) = P[\beta(Y) \leq y] = P[Y \leq \beta^{-1}(y)] = G(\beta^{-1}(y))$.

Sean $u = F'(x)$ y $v = G'(y)$, por ser F' y G' funciones de distribución, entonces $u, v \in \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F'(x), G'(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X > \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \end{aligned}$$

Notemos que

$$P[Y \leq \beta^{-1}(y)] = P[X > \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] + P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)]$$

Despejando, tenemos que

$$P[X > \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] = P[Y \leq \beta^{-1}(y)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)]$$

De modo que,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F'(x), G'(y)) &= P[X > \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= P[Y \leq \beta^{-1}(y)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= G(\beta^{-1}(y)) - C(F(\alpha^{-1}(x)), G(\beta^{-1}(y))) \\ &= G'(y) - C(1 - F'(x), G'(y)) \end{aligned}$$

Entonces $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = v - C_{X,Y}(1-u,v)$. \square

Es importante notar que en el caso (1) $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = C_{X,Y}(u,v)$, es decir, las cópulas son invariantes bajo transformaciones estrictamente crecientes.

OBSERVACIÓN 1.4.2. Si C es cópula, entonces C puede escribirse como

$$C(u,v) = A_C(u,v) + S_C(u,v)$$

donde

$$A_C(u,v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s,t) dt ds$$

es la parte absolutamente continua de C y

$$S_C(u,v) = C(u,v) - A_C(u,v)$$

es la parte singular de C .

En el caso en el que $C(u, v) = A_C(u, v)$, decimos que C es absolutamente continua. Si $A_C(u, v) = 0 \forall (u, v) \in \mathbf{I}^2$, entonces $C(u, v) = S_C(u, v)$ y C sería singular. Además, si C tiene parte singular y parte absolutamente continua, entonces ni A_C ni S_C son cópulas.

EJEMPLO 1.4.1. Sea $\Pi(u, v) = uv$, calculemos A_C y S_C .

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = 1$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A_C(u, v) &= \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Pi(s, t) dt ds \\ &= \int_0^u \int_0^v 1 dt ds = \int_0^u v ds = uv \end{aligned}$$

De donde vemos que $A_C(u, v) = C(u, v)$ y, por lo tanto, C no tiene parte singular y es absolutamente continua. ■

DEFINICIÓN 1.4.3. Simetría. Decimos que una variable aleatoria X es simétrica con respecto a b si la función de distribución de $(X - b)$ es la misma que la de $(b - X)$, es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$, $P[X - b \leq x] = P[b - X \leq x]$.

En particular se dice que una variable aleatoria X es simétrica con respecto al origen si para todo $x \in \mathbb{R}$, $P[X \leq x] = P[-X \leq x]$.

Un ejemplo de este tipo de variable aleatoria, es $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. En este caso, X es simétrica con respecto a μ , pues $P[X - \mu \leq x] = P[\mu - X \leq x]$.

DEFINICIÓN 1.4.4. Intercambiabilidad. Sean X y Y variables aleatorias, decimos que son *intercambiables* si la función de distribución conjunta de (X, Y) es la misma que la de (Y, X) . Es decir, si H es la función de distribución conjunta de X y Y entonces $H(x, y) = H(y, x)$.

En el caso multivariado decimos que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n son *intercambiables* si la función de distribución conjunta de (X_1, X_2, \dots, X_n) es la misma que la de $(X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_n})$ para cualesquiera j_i permutaciones posibles de $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, con $j_i \neq j_v$. Es decir, si H es la función de distribución conjunta de X_1, X_2, \dots, X_n , entonces $H(x_1, x_2, \dots, x_n) = H(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})$.

Un ejemplo de intercambiabilidad podrían ser las variables aleatorias independientes X y Y con funciones de distribución $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ y $G(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ respectivamente. Como X y Y son independientes, entonces $H(x, y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) = H(y, x)$.

OBSERVACIÓN 1.4.3. Si X y Y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces son intercambiables.

Esto es porque si $X, Y \sim F$ y son independientes, entonces, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $H(x, y) = F(x)F(y) = F(y)F(x) = H(y, x)$.

OBSERVACIÓN 1.4.4. Si X y Y son variables aleatorias intercambiables, entonces son idénticamente distribuidas.

DEMOSTRACIÓN. Si X y Y son intercambiables entonces las funciones de distribución marginales de X y Y serían

$$F(x) = H(x, \infty) = H(\infty, x) = G(x).$$

□

TEOREMA 1.4.3. Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente, entonces X y Y son intercambiables sí, y sólo sí, $F = G$ y $C_{X,Y}(u, v) = C_{X,Y}(v, u) \forall (u, v) \in \mathbf{I}^2$.

DEMOSTRACIÓN. X y Y son intercambiables si para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned} & H(x, y) = H(y, x) \\ \Leftrightarrow & C_{X,Y}(F(x), G(y)) = C_{X,Y}(F(y), G(x)) \\ \Leftrightarrow & G(x) = F(x) \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & C_{X,Y}(F(x), F(y)) = C_{X,Y}(F(y), F(x)) \\ \Leftrightarrow & C_{X,Y}(u, v) = C_{X,Y}(v, u), u = F(x), v = F(y) \end{aligned}$$

□

La segunda igualdad es resultado del Teorema de Sklar y la tercera igualdad se da por la Observación 1.4.4.

Cuando una cópula C cumple que $C(u, v) = C(v, u) \forall (u, v) \in \mathbf{I}^2$, se dice que la cópula es simétrica.

1.5. Cópulas multivariadas.

En esta sección generalizaremos algunos de los resultados y definiciones vistos hasta el momento que pueden extenderse al caso multivariado. La demostración de estos casos no se abordará en el presente trabajo, pero puede consultarse en la sección 2.10 de [1].

Usaremos, además, la siguiente notación:

- $\bar{\mathbb{R}}^n$ denotará el espacio de dimensión n de los reales extendidos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Análogamente, \mathbf{I}^n denotará el cubo de dimensión n formado por el producto cartesiano $\overbrace{\mathbf{I} \times \mathbf{I} \times \dots \times \mathbf{I}}^n$.
- Denotaremos a los vectores en $\bar{\mathbb{R}}^n$ como $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Además, diremos que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ si $a_i \leq b_i$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Análogamente, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ si $a_i < b_i$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Para $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, denotaremos como $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ al rectángulo de dimensión n , $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

DEFINICIÓN 1.5.1. Sean S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y sea $H : \bar{\mathbb{R}}^n \mapsto \mathbf{I}$ una función cuyo dominio es $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Para $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, un

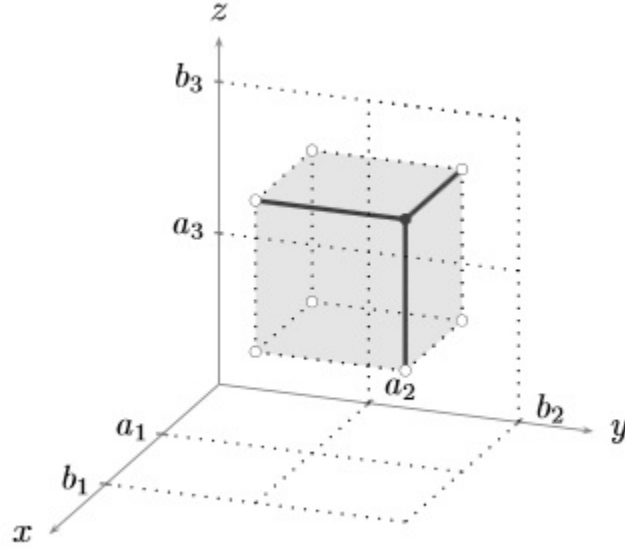


FIGURA 1.5.1.

rectángulo de dimensión n cuyos vértices están en $\text{Dom}H$, definimos el H -volumen de B como

$$(1.5.1) \quad V_H(B) = \sum_{x_i \in \{a_i, b_i\}} (-1)^{\#a} H(x_1, \dots, x_n)$$

donde $\#a$ es el número de veces que alguna de las variables x_i toma el valor a_i en la evaluación de la función H .

Por ejemplo, en el caso de $n = 3$, el volumen de $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ sería

$$\begin{aligned} V_H(B) = & H(b_1, b_2, b_3) - H(a_1, b_2, b_3) - H(b_1, a_2, b_3) - H(b_1, b_2, a_3) \\ & + H(a_1, a_2, b_3) + H(a_1, b_2, a_3) + H(b_1, a_2, a_3) - H(a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.5.2. Sea $H : \bar{\mathbb{R}}^n \mapsto \mathbf{I}$ una función cuyo dominio es $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, con S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$. Decimos que H es n -creciente si $V_H(B) \geq 0$ para todo B rectángulo de dimensión n cuyos vértices están en $\text{Dom}H$.

DEFINICIÓN 1.5.3. Sean S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y $H : \bar{\mathbb{R}}^n \mapsto \mathbf{I}$ una función con dominio $\text{Dom}H = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Sea $a_k = \inf \{x | x \in S_k\}$. Decimos que H es fija si $H(\mathbf{t}) = 0$ para toda $\mathbf{t} \in \text{Dom}H$ tal que $t_k = a_k$ para al menos alguna $k \in \{1, \dots, n\}$.

DEFINICIÓN 1.5.4. Sean S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y $H : \bar{\mathbb{R}}^n \mapsto \mathbf{I}$ una función cuyo dominio es $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Sea $b_k = \sup \{x | x \in S_k\}$. Decimos que

H tiene marginales y sus marginales en una dimensión son funciones $H_k : \bar{\mathbb{R}} \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ tales que $\text{Dom}H_k = S_k$ y

$$(1.5.2) \quad H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \quad \forall x \in S_k.$$

Notemos que H puede tener marginales de más dimensiones si la fijamos en b_k para todo k excepto en los espacios en los que queremos que sea variable.

EJEMPLO 1.5.1. Sea H la función con dominio $[-1, 1] \times [0, \infty] \times [0, \pi/2]$, definida como

$$H(x, y, z) = \frac{(x+1)(e^y-1)\sin z}{x+2e^y-1}$$

Podemos comprobar que H es fija, pues $H(-1, y, z) = 0$, $H(x, 0, z) = 0$ y $H(x, y, 0) = 0$. De este modo, H tiene marginales de una dimensión H_1 , H_2 , H_3 dadas por:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= H(x, \infty, \pi/2) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(x+1) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(e^y-1)}{x+2e^y-1} \\ &= (x+1) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2e^y} \\ &= (x+1) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \\ &= \frac{(x+1)}{2} \end{aligned}$$

La tercera igualdad se da por L'Hopital.

$$\begin{aligned} H_2(y) &= H(1, y, \pi/2) \\ &= \frac{(1+1)(e^y-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+2e^y-1} \\ &= \frac{e^y-1}{e^y} \\ &= 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(z) &= H(1, \infty, z) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(1+1)(e^y-1)\sin z}{1+2e^y-1} \\ &= 2\sin z \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(e^y-1)}{2e^y} \\ &= \sin z \end{aligned}$$

Y 2-marginales $H_{1,2}$, $H_{1,3}$ y $H_{2,3}$ dadas por:

$$\begin{aligned}
H_{1,2}(x, y) &= H(x, y, \pi/2) \\
&= \frac{(x+1)(e^y-1)\sin(\frac{\pi}{2})}{x+2e^y-1} \\
&= \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{2,3}(y, z) &= H(1, y, z) \\
&= \frac{(1+1)(e^y-1)\sin(z)}{1+2e^y-1} \\
&= \sin z (1 - e^{-y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{1,3}(x, z) &= H(x, \infty, z) \\
&= (x+1)\sin z \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(e^y-1)}{x+2e^y-1} \\
&= (x+1)\sin z \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2e^y} \\
&= \frac{(x+1)\sin z}{2}
\end{aligned}$$

Nuevamente la tercera se obtiene por L'Hopital.

En adelante, cuando hablemos de marginales de una dimensión diremos simplemente *marginales*, y cuando se trate de marginales de k dimensiones ($k \geq 2$), nos referiremos a ellas como *k-marginales*.

LEMA 1.5.1. Sean S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y $H : \bar{\mathbb{R}}^n \mapsto \mathbf{I}$ una función n -creciente y fija con dominio $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, entonces H es no decreciente en cada coordenada. Es decir, si $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \in \text{Dom}H$ y $x < y$, entonces $H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$.

LEMA 1.5.2. Si S_1, S_2, \dots, S_n son subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, y $H : \bar{\mathbb{R}}^n \mapsto \mathbf{I}$ una función n -creciente y fija con dominio $S \times S_2 \times \dots \times S_n$ y marginales H_k . Sean $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ cualesquiera puntos en $\text{Dom}H$, entonces,

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

DEFINICIÓN 1.5.5. Una subcópula de dimensión n (o n -subcópula) es una función C' con las siguientes propiedades:

- (1) $\text{Dom}C' = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, donde $S_k \subseteq \mathbf{I}$ y $\{0, 1\} \subseteq S_k$, para toda $k \in \{1, \dots, n\}$.
- (2) C' es fija y n -creciente.
- (3) C' tiene marginales C'_k , para toda $k \in \{1, \dots, n\}$, que satisfacen

$$C'_k(u) = u \quad \forall u \in S_k.$$

OBSERVACIÓN 1.5.1. Si C' es n -subcópula, entonces, para toda $\mathbf{u} \in \text{Dom}C'$ se cumple $0 \leq C'(\mathbf{u}) \leq 1$.

DEFINICIÓN 1.5.6. Una cópula de dimensión n (o n -cópula) es una n -subcópula cuyo dominio es \mathbf{I}^n .

OBSERVACIÓN 1.5.2. La definición de n -cópula es equivalente a:

Decimos que $C : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ es n -cópula si cumple las siguientes propiedades:

- (1) Para toda $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$, $C(\mathbf{u}) = 0$ si al menos una de las coordenadas de \mathbf{u} es 0. y $C(\mathbf{u}) = u_k$ si todas las coordenadas de \mathbf{u} son iguales a 1 excepto u_k .
- (2) C es n -creciente.

OBSERVACIÓN 1.5.3. Si C es n -cópula ($n \geq 3$), entonces cualquier k -marginal de C es k -cópula, para $2 \leq k < n$.

TEOREMA 1.5.1. Sea C' n -subcópula, entonces, para toda $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom}C'$

$$|C'(\mathbf{v}) - C'(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|,$$

y, por lo tanto, C' es uniformemente continua en su dominio.

DEFINICIÓN 1.5.7. Una función de distribución de dimensión n es una función $H : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (1) H es n -creciente,
- (2) $H(\mathbf{t}) = 0$ para todo $\mathbf{t} \in \bar{\mathbb{R}}^n$ tal que $t_k = -\infty$ para al menos alguna $k \in \{1, \dots, n\}$ y $H(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$.

De esta definición podemos observar que H es fija, además, por el Lema 1.5.1, las marginales de una dimensión de H son no decrecientes y cumplen que $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$; es decir, las marginales de H son funciones de distribución.

TEOREMA 1.5.2. **Teorema de Sklar en n -dimensiones.** Sea H una función de distribución de dimensión n con marginales F_1, F_2, \dots, F_n , entonces existe una n -cópula C tal que, para toda $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$

$$(1.5.3) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son continuas, entonces C es única; si no, C está determinada de manera única en $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_n$.

De manera inversa, si C es n -cópula y F_1, F_2, \dots, F_n son funciones de distribución, entonces H definida como en (1.5.3) es función de distribución conjunta de dimensión n con marginales F_1, F_2, \dots, F_n .

Como en el caso de dimensión 2, el Teorema de Sklar en n dimensiones se demuestra a partir de los Lemas 1.5.3 y 1.5.4 que son la extensión al caso multivariado de los Lemas 1.3.1 y 1.3.2. Es decir:

LEMA 1.5.3. Sea H una función de distribución de dimensión n con marginales F_1, F_2, \dots, F_n , entonces existe una única n -subcópula C' tal que

- (1) $\text{Dom}C' = \text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_n$,
- (2) Para toda $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$, $H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C'(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$.

LEMA 1.5.4. Sea C' una n -subcópula, entonces existe una n -cópula C tal que $C(\mathbf{u}) = C'(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in \text{Dom}C'$, es decir, cualquier n -subcópula puede extenderse a una n -cópula. En general, esta extensión no es única.

Como comentamos al inicio de esta sección, no abordaremos la demostración del Teorema de Sklar para n -dimensiones. Sin embargo, es importante saber que éste es aplicable al caso multivariado, así como varios resultados que se derivan de él.

COROLARIO 1.5.1. *Sea H una función de distribución de dimensión n con marginales F_1, F_2, \dots, F_n y C la n -cópula que satisface (1.5.3). Sean además $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F_1, F_2, \dots, F_n , respectivamente. Entonces, para toda $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$,*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H\left(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)\right).$$

TEOREMA 1.5.3. *Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias, $n \geq 2$, entonces X_1, X_2, \dots, X_n son independientes si, y sólo si, la n -cópula de X_1, X_2, \dots, X_n es Π^n . Donde $\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ para $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$.*

1.6. Medidas de concordancia y medidas de dependencia

En esta sección introduciremos algunas funciones que nos permitan describir ciertos aspectos de las cópulas. Como se mencionó anteriormente, las cópulas pueden interpretarse como una estructura que define la dependencia entre variables aleatorias, por lo que las funciones que definiremos en esta sección son medidas que nos dan un poco más de información sobre el tipo de dependencia que define la cópula.

1.6.1. Tau de Kendall. La *Tau de Kendall* es una medida de asociación o concordancia que puede definirse únicamente en términos de la cópula, de modo que no depende de las funciones de distribución marginales, a diferencia, por ejemplo, del coeficiente de relación de Pearson.

DEFINICIÓN 1.6.1. Sean X, Y variables aleatorias continuas y sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de (X, Y) . Decimos que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son *concordantes* si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. De forma similar, decimos que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son *discordantes* si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$. Otra manera de decirlo es que: (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son *concordantes* si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$; y son *discordantes* si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

DEFINICIÓN 1.6.2. Tau de Kendall (muestral). Sean X, Y variables aleatorias continuas y sea $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de (X, Y) . Sea c el número de pares concordantes y d el número de discordantes, entonces definimos la *Tau de Kendall muestral* como:

$$(1.6.1) \quad t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}$$

Dado que el denominador es el número de posibles pares, tenemos que $-1 \leq t \leq 1$. Cuando $t = 1$ decimos que X y Y tienen concordancia positiva; por el contrario, cuando $t = -1$ decimos que X y Y tienen concordancia negativa.

DEFINICIÓN 1.6.3. Tau de Kendall (poblacional). Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, ambos con función de distribución conjunta H , definimos la *Tau de Kendall poblacional* como:

$$(1.6.2) \quad \tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

En el siguiente teorema, definiremos una función de concordancia, Q , en términos de cópulas. Posteriormente, mencionaremos un teorema que nos da una forma de definir la *Tau de Kendall poblacional* en términos de Q . La demostración de estos teoremas no se realizará en el presente trabajo, pero puede consultarse en la sección 5.1.1 de [1].

TEOREMA 1.6.1. Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes de variables aleatorias continuas con funciones de distribución H_1 y H_2 , respectivamente y marginales comunes F (de X_1 y X_2) y G (de Y_1 y Y_2), Sean C_1 y C_2 las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , respectivamente, tales que $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ y $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Denotemos a Q como la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) ; es decir

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Entonces

$$(1.6.3) \quad Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int \int_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

TEOREMA 1.6.2. Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la *Tau de Kendall poblacional* de X y Y está dada por

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \int \int_{\mathbf{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

Notemos que el término $\int \int_{\mathbf{I}^2} C(u, v) dC(u, v)$ puede interpretarse como la esperanza de la función $C(U, V)$ (ver apéndice). De modo que la τ de Kendall puede expresarse como

$$\tau_C = 4E[C(U, V)] - 1$$

1.6.2. Dependencia en las colas. La dependencia en las colas es una medida que describe la dependencia de dos variables aleatorias en valores extremos. Generalmente se definen dos tipos de dependencia en las colas:

DEFINICIÓN 1.6.4. Sean X, Y variables aleatorias continuas con funciones de distribución F y G , respectivamente. Definimos la *dependencia superior en las colas* como

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} P\left(Y > G^{(-1)}(q) \mid X > F^{(-1)}(q)\right)$$

DEFINICIÓN 1.6.5. Sean X, Y variables aleatorias continuas con funciones de distribución F y G , respectivamente. Definimos la *dependencia inferior en las colas* como

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0^+} P\left(Y \leq G^{(-1)}(q) \mid X \leq F^{(-1)}(q)\right)$$

En el presente trabajo aplicaremos otro concepto de dependencia en las colas basado en [5], donde se define una nueva notación para dependencia en las colas a lo largo de las diagonales.

DEFINICIÓN 1.6.6. Sean X, Y variables aleatorias continuas con funciones de distribución F y G y cópula asociada $C(u, v)$. Definimos la *dependencia en las colas a lo largo de las diagonales* como

$$(1.6.4) \quad \Lambda(q) = \begin{pmatrix} \lambda_{LU}(q) & \lambda_{UU}(q) \\ \lambda_{LL}(q) & \lambda_{UL}(q) \end{pmatrix}$$

Donde

$$(1.6.5) \quad \begin{cases} \lambda_{UU}(q) &= P[V > q \mid U > q] \\ \lambda_{UL}(q) &= P[V < (1-q) \mid U > q] \\ \lambda_{LL}(q) &= P[V < (1-q) \mid U < (1-q)] \\ \lambda_{LU}(q) &= P[V > q \mid U < (1-q)] \end{cases}$$

(1.6.4) también puede definirse como

$$\Lambda = \lim_{q \rightarrow 1^-} \Lambda(q) = \begin{pmatrix} \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{LU}(q) & \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{UU}(q) \\ \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{LL}(q) & \lim_{q \rightarrow 1^-} \lambda_{UL}(q) \end{pmatrix}$$

Notemos que $\lambda_{UU} = \lambda_U$ y $\lambda_{LL} = \lambda_L$.

Lo siguiente es obtener una estimación empírica de cada una de las entradas de Λ dado un conjunto de observaciones.

DEFINICIÓN 1.6.7. Sean X, Y variables aleatorias continuas y sea $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de (X, Y) . Sea $q \in (0.5, 1)$ un cuantil. Definimos la *dependencia muestral en las colas a lo largo de las diagonales* como

$$(1.6.6) \quad \hat{\Lambda}(q, n) = \begin{pmatrix} \lambda_{LU}(q, n) & \lambda_{UU}(q, n) \\ \lambda_{LL}(q, n) & \lambda_{UL}(q, n) \end{pmatrix}$$

Donde

$$(1.6.7) \quad \begin{cases} \lambda_{UU}(q, n) &= \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i > x_{[nq]:n}, y_i > y_{[nq]:n}) \\ \lambda_{UL}(q, n) &= \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i > x_{[nq]:n}, y_i < y_{[n(1-q)]:n}) \\ \lambda_{LL}(q, n) &= \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i < x_{[n(1-q)]:n}, y_i < y_{[n(1-q)]:n}) \\ \lambda_{LU}(q, n) &= \frac{1}{n(1-q)} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i < x_{[n(1-q)]:n}, y_i > y_{[nq]:n}) \end{cases},$$

$\mathbb{I}_{x \in A}$ denota a la función indicadora y $x_{i:n}, y_{j:n}$ denotan los estadísticos de orden de la muestra.

La dependencia en las colas puede ser usada para seleccionar cópulas que tengan ciertas características que se ajusten mejor a los datos que queremos modelar.

Algo importante que podemos mencionar sobre la Tau de Kendall y la dependencia en las colas es que estas medidas pueden definirse únicamente en términos de la cópula y , de este modo, no dependen de las funciones de distribución marginales.

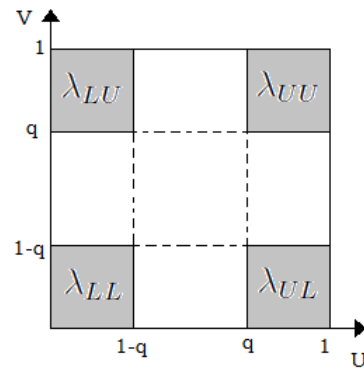


FIGURE 1.6.1. Dependencia en las colas a lo largo de las diagonales

Cópulas arquimedianas y cópulas arquimedianas jerárquicas

En este capítulo veremos una clase importante de cópulas conocidas como cópulas arquimedianas. Este tipo de cópulas tiene muchas aplicaciones debido a que existe una gran variedad de familias de cópulas que pertenecen a esta clase, además de que su construcción es fácil y sus propiedades las vuelven “amigables”. La mayor parte del desarrollo de esta sección estará basada en el capítulo 4 de [1].

2.1. Definiciones

DEFINICIÓN 2.1.1. Sea $\varphi : \mathbf{I} \mapsto [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$. Decimos que la *pseudo-inversa* de φ es la función $\varphi^{[-1]}$ con $\text{Dom}\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ y $\text{Ran}\varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$ definida como

$$(2.1.1) \quad \varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Notemos que $\varphi^{[-1]}$ es continua y no decreciente en $[0, \infty]$, y estrictamente decreciente en $[0, \varphi(0)]$; además, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ cuando $u \in \mathbf{I}$ y

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

Es decir, $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \min(t, \varphi(0))$.

LEMA 2.1.1. Sea $\varphi : \mathbf{I} \mapsto [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$ y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa de φ . Sea $C : \mathbf{I}^2 \mapsto \mathbf{I}$ una función definida como

$$(2.1.2) \quad C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

Entonces C cumple que:

Para todos $u, v \in \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} C(u, 0) &= 0 = C(0, v) \\ C(u, 1) &= u \quad \text{y} \quad C(1, v) = v. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos que, dados $u, v \in \mathbf{I}$:

i) $C(u, 0) = C(0, v) = 0$.

$C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$.

Esto es porque $\varphi(0) \leq \varphi(u) + \varphi(0) \leq \infty$. Análogamente $C(0, v) = 0$.

ii) $C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v$.

$$C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u.$$

Análogamente $C(1, v) = v$. \square

LEMA 2.1.2. Sean φ , $\varphi^{[-1]}$ y C definidas como en el Lema 2.1.1, entonces C es 2-creciente si, y sólo si, para toda $u_1, u_2, v \in \mathbf{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$ se cumple que

$$(2.1.3) \quad C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1.$$

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow) Supongamos que C es 2-creciente. Por el Lema 2.1.1, podemos notar que $u_1 = C(u_1, 1)$ y $u_2 = C(u_2, 1)$, además, $v \leq 1$. Entonces, por ser C 2-creciente, tenemos que $V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) \geq 0$; es decir, $C(u_2, 1) - C(u_2, v) - C(u_1, 1) + C(u_1, v) = u_2 - C(u_2, v) - u_1 + C(u_1, v) \geq 0$. De donde $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$.

\Leftarrow) Supongamos ahora que C satisface (2.1.3). Tomemos $v_1, v_2 \in \mathbf{I}$ tales que $v_1 \leq v_2$. Notemos que $C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$. Notemos también que C es continua por ser φ y $\varphi^{[-1]}$ continuas, por lo tanto, existe una $t \in \mathbf{I}$ tal que $C(t, v_2) = v_1$; es decir, $C(t, v_2) = C(1, v_1)$, que podemos expresar también como $\varphi^{[-1]}(\varphi(t) + \varphi(v_2)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(1) + \varphi(v_1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v_1))$, de donde podemos concluir que $\varphi(v_1) = \varphi(t) + \varphi(v_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &\quad - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \end{aligned}$$

La última desigualdad se da por la expresión (2.1.3). Finalmente $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$. Por lo tanto, C es 2-creciente. \blacksquare

\square

TEOREMA 2.1.1. Sea $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$ y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa de φ . Entonces la función $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ definida como $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ es una cópula si, y sólo si, φ es convexa.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que, para que C sea cópula debe cumplir que Para todos $u, v \in \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} C(u, 0) &= 0 = C(0, v) \\ C(u, 1) &= u \quad y \quad C(1, v) = v. \end{aligned}$$

C es 2-creciente.

En el Lema 2.1.1 demostramos que se cumple la condición (1). Además, con el Lema 2.1.2 se demostró que la propiedad $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ es una condición suficiente y necesaria para que C sea 2-creciente, por lo que bastaría demostrar que $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ se cumple si, y sólo si, φ es convexa. Para esto, notemos que φ es convexa si, y sólo si, $\varphi^{[-1]}$ es convexa.

Otra observación es que $u_1 + C(u_2, v) \leq u_2 + C(u_1, v)$ se puede expresar como $u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v))$; además, $u_1 = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1))$

y $u_2 = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2))$. Sean $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$ y $c = \varphi(v)$. Por ser φ decreciente, $b \leq a$ y $c \geq 0$. Entonces (2.1.3) puede expresarse como

$$(2.1.4) \quad \varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b+c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a+c).$$

Demostremos entonces que $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ se cumple si, y sólo si, φ es convexa:

\Rightarrow) Supongamos que se cumple $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$, para cualesquiera $u_1, u_2, v \in \mathbf{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$. Tomemos $s, t \in [0, \infty]$ tales que $0 \leq s < t$ hagamos $a = \frac{s+t}{2}$, $b = s$ y $c = \frac{t-s}{2}$. Sustituyendo en (2.1.4), tenemos que

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) + \varphi^{[-1]}\left(s + \frac{t-s}{2}\right) \leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2} + \frac{t-s}{2}\right)$$

Simplificando, tenemos

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) + \varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)$$

De donde

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}.$$

Notemos que $\varphi^{[-1]}$ cumple con ser *punto-medio convexa* (*midconvex*), y, por ser continua, es convexa (el lector puede consultar más sobre esta propiedad en [11, 12]).

\Leftarrow) Supongamos ahora que $\varphi^{[-1]}$ es convexa. Tomemos $a, b, c \in \mathbf{I}$ tales que $a \leq b$ y $c \geq 0$. Sea $\gamma = \frac{a-b}{a-b+c}$, entonces $a = (1-\gamma)b + \gamma(a+c)$ y $b+c = \gamma b + (1-\gamma)(a+c)$. Por ser $\varphi^{[-1]}$ convexa, tenemos que

$$\varphi^{[-1]}((1-\gamma)b + \gamma(a+c)) \leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c)$$

Simplificando $(1-\gamma)b + \gamma(a+c) = b - \gamma(a-b+c) = b - \frac{a-b}{a-b+c} \cdot (a-b+c) = a$ tenemos que

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c).$$

Por otro lado,

$$\varphi^{[-1]}(\gamma b + (1-\gamma)(a+c)) \leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c)$$

Nuevamente, simplificando $\gamma b + (1-\gamma)(a+c) = a+c - \gamma(a-b+c) = a+c - \frac{a-b}{a-b+c} \cdot (a-b+c) = b+c$ tenemos que

$$\varphi^{[-1]}(b+c) \leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c)$$

Sumando las dos desigualdades obtenidas, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b+c) &\leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c) \\ &\quad + \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c) \end{aligned}$$

Que puede reducirse a

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b+c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a+c).$$

Notemos que esta desigualdad es la misma que (2.1.4), que, a su vez, era equivalente a que $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$, para cualesquiera $u_1, u_2, v \in \mathbf{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$. \square

DEFINICIÓN 2.1.2. Decimos que una cópula es *arquimediana* si es de la forma $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$, con $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$, y $\varphi^{[-1]}$ la *pseudo-inversa* de φ . La función φ es llamada *generadora* de la cópula. Si $\varphi(0) = \infty$ decimos que φ es *generadora estricta*; en dicho caso $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ y a la cópula $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ se le llama *cópula arquimediana estricta*.

EJEMPLO 2.1.1. Sea $\varphi(t) = -\ln t$ para $t \in [0, 1]$. Dado que $\varphi(0) = \infty$, entonces φ es *generadora estricta* y $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$. Generamos C usando la ecuación (2.1.2) y obtenemos $C(u, v) = \exp(-[(-\ln u) + (-\ln v)]) = \exp(\ln u + \ln v) = uv = \Pi(u, v)$. Por lo tanto, Π es una *cópula arquimediana estricta*.

TEOREMA 2.1.2. Sea C una cópula arquimediana con generadora φ , entonces:

- (1) C es simétrica; es decir, $C(u, v) = C(v, u)$ para cualesquiera $u, v \in \mathbf{I}$;
- (2) C es asociativa; es decir, $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para cualesquiera $u, v \in \mathbf{I}$;
- (3) Si $c > 0$ es una constante, entonces $c\varphi$ también es generadora de C .

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $u, v \in \mathbf{I}$, entonces

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) = C(v, u)$$

(2) Nuevamente, tomemos $u, v \in \mathbf{I}$, entonces

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u, v)) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \end{aligned}$$

Recordemos que $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \min(t, \varphi(0))$, de modo que tenemos 5 casos:

i) Cuando $\varphi(u) + \varphi(v) > \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(0) + \varphi(w)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$, entonces

$$\begin{aligned} C(u, C(v, w)) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) = 0$.

ii) Cuando $\varphi(u) + \varphi(v) > \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) \leq \varphi(0)$

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(0) + \varphi(w)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado notemos que si $\varphi(u) + \varphi(v) > \varphi(0)$, entonces $\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$, por lo que

$$\begin{aligned} C(u, C(v, w)) &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi(u) + \varphi \left(\varphi^{[-1]} (\varphi(v) + \varphi(w)) \right) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} (\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De modo que $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) = 0$.

iii) Cuando $\varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) \leq \varphi(0)$

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi \left(\varphi^{[-1]} (\varphi(u) + \varphi(v)) \right) + \varphi(w) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} (\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]} (\varphi(u) + (\varphi(v) + \varphi(w))) \\ &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi(u) + \varphi \left(\varphi^{[-1]} (\varphi(v) + \varphi(w)) \right) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} (\varphi(u) + \varphi(C(v, w))) \\ &= C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

De modo que $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$.

iv) Cuando $\varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0)$ y $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$

Dado que $\varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$, entonces $\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w) > \varphi(0)$, por lo que

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi \left(\varphi^{[-1]} (\varphi(u) + \varphi(v)) \right) + \varphi(w) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} (\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} C(u, C(v, w)) &= \varphi^{[-1]} \left(\varphi(u) + \varphi \left(\varphi^{[-1]} (\varphi(v) + \varphi(w)) \right) \right) \\ &= \varphi^{[-1]} (\varphi(u) + \varphi(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De modo que $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) = 0$.

(3) Tomemos $c > 0$ y $c\varphi$. Entonces $(c\varphi)^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}\left(\frac{t}{c}\right), & 0 \leq \frac{t}{c} \leq \varphi(0), \\ 0, & c\varphi(0) \leq \frac{t}{c} \leq \infty. \end{cases}$

Llamemos

$$\begin{aligned} C'(u, v) &= (c\varphi)^{[-1]}(c\varphi(u) + c\varphi(v)) \\ &= \begin{cases} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{c}(c\varphi(u) + c\varphi(v))\right), & 0 \leq \frac{1}{c}(c\varphi(u) + c\varphi(v)) \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq \frac{1}{c}(c\varphi(u) + c\varphi(v)) \leq \infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), & 0 \leq \varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq \varphi(u) + \varphi(v) \leq \infty \end{cases} \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= C(u, v) \end{aligned}$$

□

2.2. Familias de cópulas

Existen varias familias de cópulas que pueden clasificarse por muchos criterios; por ejemplo, algunas de estas familias son *paramétricas* (las cópulas pueden representarse por una misma ecuación paramétrica, donde el parámetro o parámetros cuantifican de algún modo la relación de dependencia entre las variables que asocian) y otras son *no paramétricas*. En esta sección mencionaremos algunas familias de cópulas importantes.

2.2.1. Cópula Gumbel. La cópula Gumbel tiene generadora $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$, para $\theta \geq 1$, y es de la forma

$$C_\theta(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$$

Si X y Y son variables aleatorias con cópula Gumbel C de parámetro θ , entonces la τ de Kendall de X y Y está dada por

$$\tau_C = 1 - \frac{1}{\theta}.$$

Así mismo, la dependencia en las colas superior en inferior son $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$ y $\lambda_L = 0$.

2.2.2. Cópula Clayton. La cópula Clayton tiene generadora $\varphi_\theta(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$, para $\theta > 0$, y es de la siguiente forma

$$C_\theta(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}$$

Si X y Y son variables aleatorias con cópula Clayton C de parámetro θ , entonces la τ de Kendall de X y Y está dada por

$$\tau_C = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

Así mismo, la dependencia en las colas superior en inferior son $\lambda_U = 0$ y $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$.

2.2.3. Cópula Frank. La cópula Frank tiene generadora $\varphi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$, para $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y es de la siguiente forma

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

Si X y Y son variables aleatorias con cópula Frank C de parámetro θ , entonces la τ de Kendall de X y Y está dada por

$$\tau_C = 1 + \frac{4(D_1(\theta) - 1)}{\theta}.$$

Donde $D_1(\theta)$ representa a la *función de Debye de orden 1*, $D_1(\theta) = \int_0^\theta \frac{t}{\exp(t)-1} dt/\theta$. La integral de esta expresión no tiene solución analítica, sin embargo, es posible usar métodos numéricos que pueden dar buenas aproximaciones. Observando los casos especiales de la cópula Frank se puede comprobar que

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \tau_\theta = -1 \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_\theta = 1 \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \tau_\theta = 0.$$

2.2.4. Cópula Ali-Mikhail-Haq. La cópula Frank tiene generadora $\varphi_\theta(t) = \ln\left(\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right)$, para $\theta \in [-1, 1)$, y es de la siguiente forma

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}.$$

Si X y Y son variables aleatorias con cópula Ali-Mikhail-Haq C de parámetro θ , entonces la τ de Kendall de X y Y está dada por

$$\tau_C = 1 - \frac{2\left(\theta + (1-\theta)^2 \ln(1-\theta)\right)}{3\theta^2}$$

2.3. Cópulas arquimedianas jerárquicas

Como vimos en el Teorema de Sklar para el caso multivariado, dada H , una función de distribución continua de dimensión $k > 2$, la cópula asociada es única y está definida como una función continua $C: \mathbf{I}^k \mapsto \mathbf{I}$, tal que $H(x_1, \dots, x_k) = C(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k))$, donde $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ y F_1, \dots, F_k son las funciones de distribución marginales de H .

DEFINICIÓN 2.3.1. Definimos la familia de funciones diferenciables estrictamente decrecientes como

$$\mathcal{L} = \left\{ \varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty) \mid \varphi(1) = 0, (-1)^j \varphi^{(j)} \geq 0, j = 1, \dots, \infty \right\}.$$

A esta familia se le conoce también como la clase de *transformaciones de Laplace de variables aleatorias estrictamente positivas*. De manera similar definimos \mathcal{L}^* como

$$\mathcal{L}^* = \left\{ \omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \omega(0) = 0, (-1)^{j-1} \omega^{(j)} \geq 0, j = 1, \dots, \infty \right\}.$$

En la Definición 2.1.2 se presentó la forma de una cópula arquimediana para el caso bivariado. Ahora, de manera más general, tenemos:

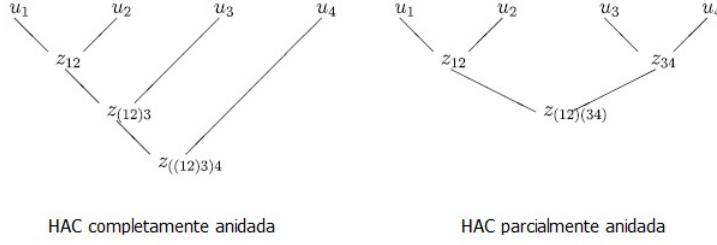


FIGURA 2.3.1.

DEFINICIÓN 2.3.2. Sea $\varphi \in \mathcal{L}$, la función $C : \mathbf{I}^k \mapsto \mathbf{I}$, $k \geq 2$, definida como

$$C(u_1, \dots, u_k) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k))$$

es llamada *cópula arquimediana de dimensión k* y φ es la función generadora de la cópula. En general, φ depende de un vector de parámetros θ .

Como vimos en el Teorema 2.1.2, las cópulas arquimedias son simétricas. De manera similar a la demostración de dicho teorema, se puede ver que esta propiedad se cumple también para el caso multivariado; es decir, si C es una cópula arquimediana de dimensión $k > 2$ con generadora φ , entonces $C(u_1, \dots, u_k) = C(u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$ para cualesquiera j_i permutaciones posibles de $\{u_1, \dots, u_k\}$, con $j_l \neq j_v$; sin embargo, en la práctica esta condición no siempre se cumple, por lo que recurriremos a las cópulas jerárquicas arquimedias.

DEFINICIÓN 2.3.3. Sean $u_1, \dots, u_k \in \mathbf{I}$ y $\varphi_j \in \mathcal{L}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, funciones generadoras tales que $\varphi_{k-i} \circ \varphi_{k-j}^{[-1]} \in \mathcal{L}^*$ para $i < j < k$. La cópula $C : \mathbf{I}^k \mapsto \mathbf{I}$, $k \geq 2$, definida como

$$C(u_1, \dots, u_k) = \varphi_{k-1}^{[-1]} \left(\varphi_{k-1} \circ \left\{ \varphi_{k-2}^{[-1]} \left[\dots \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{[-1]} [\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2)] + \varphi_2(u_3) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \dots + \varphi_{k-2}(u_{k-1}) \right] \right\} + \varphi_{k-1}(u_k) \right) \tag{2.3.1}$$

es llamada *cópula jerárquica arquimediana completamente anidada*.

A diferencia de las cópulas arquimedias simples, las cópulas jerárquicas arquimedias (HACs por sus siglas en inglés, *Hierarchical Archimedean copulas*) definen toda la estructura de dependencia de manera recursiva.

Para hacer esta definición un poco más clara, en el caso de una HAC completamente anidada, digamos que, en el “primer nivel” la dependencia de las primeras dos variables es modelada por una cópula con generadora φ_1 ; es decir, tomemos $z_1 = C(u_1, u_2) = \varphi_1^{[-1]}[\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2)]$. En el “segundo nivel”, la dependencia entre z_1 y u_3 es modelada por otra cópula con generadora φ_2 , y así sucesivamente, como se muestra en la figura (2.3.1).

Nótese que los generadores φ_i pueden pertenecer a la misma familia y diferir únicamente en el parámetro o pueden pertenecer a diferentes familias, lo cual introduce más flexibilidad al modelo.

En la figura (2.3.1) observamos un ejemplo de HAC parcialmente anidada. Estas nos permiten hacer agrupaciones de más de dos variables y sin importar el orden en que estas se agrupan; es decir, en una *cópula arquimediana parcialmente anidada* con p niveles jerárquicos definimos a la cópula recursivamente mediante cópulas C_j , con generadoras φ_j , $j \in \{1, \dots, p\}$, tales que $C_j(u_1, \dots, u_k) = \varphi_j^{[-1]}(C_{j-1}(u_{j,1}, \dots, u_{j,k-1}) + \varphi_j(u_{j,k}))$.

OBSERVACIÓN 2.3.1. Sea C una HAC, entonces en cada *nodo* de C hay una distribución marginal que es también una HAC. Esto quiere decir que la familia de HACs es cerrada cuando tomamos distribuciones marginales multivariadas.

Esto lo podemos ver igualando $u_k = 1$ en la ecuación (2.3.1). Tenemos que $\varphi_k^{-1}(1) = 0$ y

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_{k-1}, 1) &= \varphi_{k-1}^{[-1]} \left(\varphi_{k-1} \circ \left\{ \varphi_{k-2}^{[-1]} \left[\dots \left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \left[\varphi_1^{-1}(u_1) + \varphi_1^{-1}(u_2) \right] + \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. + \varphi_2^{-1}(u_3) \right) + \dots + \varphi_{k-2}^{-1}(u_{k-1}) \right] \right\} + 0 \right) \\ &= \varphi_{k-2}^{[-1]} \left[\dots \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{[-1]} \left[\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2) \right] + \varphi_2(u_3) \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{k-2}(u_{k-1}) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de distribución marginal de las primeras $k - 1$ variables es también HAC.

2.4. Construcción y estimación de cópulas jerárquicas arquimedianas

En esta sección se mostrará un método para estimar distribuciones multivariadas definidas mediante cópulas jerárquicas arquimedianas, así como un ejemplo de su aplicación. El método utilizado para determinar la estructura de la jerarquía será el desarrollado por Ostap Okhrin, Yarema Okhrin y Wolfgang Schmid en [4].

Como vimos en la sección 2.3, las HACs tienen una estructura muy flexible, sin embargo, no hay estudios viables que permitan estimar la estructura de una HAC. Teóricamente, dadas k y φ podemos crear todas las estructuras posibles de HACs y elegir la que mejor se ajuste a los datos. El principal problema es que el número de estructuras es igual al número de árboles filogenéticos posibles con k nodos. Para $k = 10$ este número es mayor a 2.8×10^8 , cuya simple creación es impensable. El método que se empleará en este trabajo desarrolla una técnica para determinar la estructura de la HAC que mejor se ajusta a nuestro conjunto de datos.

2.4.1. Determinación de la estructura. Sea $\mathcal{M} = \{\varphi_j\}_{j \in \{1, \dots, M\}}$ el conjunto finito de funciones generadoras que se considerarán para la estimación. Asumiremos que cada φ_j depende de un vector de parámetros θ_j . Sea (X_1, \dots, X_k) el vector de variables aleatorias cuya estructura de dependencia queremos determinar y sea $\mathbf{X} = \{x_{ji}\}'$ sus respectivas muestras, para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, k\}$. Supongamos que las k variables se agrupan en p niveles jerárquicos. Denotaremos como s a la estructura de la HAC y s_l denotará la estructura de la “sub-agrupación” en el nivel l de la jerarquía. Para representarlos, usaremos índices re ordenados de $\{1, \dots, k\}$ agrupados en paréntesis; por ejemplo, en la figura (2.3.1), las estructuras son $((12)3)4$ y $(12)(34)$. De este modo, denotaremos a la HAC de dimensión k como $C(\varphi, \theta; s)(u_1, \dots, u_k)$.

En lugar de enumerar y probar todas las posibles estructuras, en cada nivel j de la jerarquía seleccionaremos la mejor agrupación de variables I^j en cada nivel; para esto, estimaremos los parámetros de la cópula de cada agrupación de variables y elegiremos la agrupación que tenga mayor dependencia. Denotaremos a dicho subconjunto como I^j y a la función generadora óptima y a sus parámetros como φ_j y θ_j , respectivamente. El subconjunto seleccionado se usará para definir las *pseudo-variables* $C(\varphi_j, \hat{\theta}_j; I^j)$ que serán tratadas como variables comunes en los niveles posteriores.

De forma generalizada, el algoritmo se puede resumir en los siguientes pasos:

- (1) Se estiman los parámetros θ_j usando el método de máxima verosimilitud para cada agrupación posible $\{X_i\}_{i \in I_{k_j}}$, $j \in \{1, \dots, 2^k - k - 1\}$ y cada $\varphi \in \mathcal{M}$. En el caso no paramétrico, primero se estiman las distribuciones marginales de forma no paramétrica; posteriormente se determinan los parámetros de la cópula usando la ecuación (2.4.2).
- (2) Se elige la mejor agrupación de variables I^1 para la cópula dada y se introduce una *pseudo-variable* definida como $Z_1 = \hat{C}(I^1)$. Se considera el conjunto $Z_1 \cup \{X_j\}_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus I^1}$ de tamaño $k_2 = k - \dim(I^1) + 1$.
- (3) Con el nuevo conjunto, se procede de forma similar al Paso 1 y se consideran todos los subconjuntos de $Z_1 \cup \{X_j\}_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus I^1}$ en el nivel 2. Para cada subconjunto se estiman los parámetros de la cópula.
- (4) Se elige la agrupación de variables que mejor se ajuste a la cópula en el segundo nivel. Denotemos como I^2 a la agrupación obtenida; esta puede contener tanto a las variables originales como a las *pseudo-variables* obtenidas en niveles anteriores. Se introduce una nueva variable definida como $Z_2 = \hat{C}(I^2)$ y se considera el conjunto $Z_2 \cup \{X_j\}_{j \in \{1, \dots, k_2\} \setminus I^2}$ de tamaño $k_3 = k_2 - \dim(I^2) + 1$.
- (5) ... continuar hasta que $k_j = 1$.

Es importante notar que las *pseudo-variables* sólo se usarán como funciones de las variables originales X_1, \dots, X_k y no se usarán de forma explícita en el proceso de estimación. Es decir, cuando calculemos la densidad de la cópula por el método de máxima verosimilitud, debemos tomar las derivadas con respecto a las variables originales X_1, \dots, X_k , y no con respecto a las *pseudo-variables* Z .

2.4.2. Sobre las estimaciones. Para determinar las funciones de distribución marginales en el caso no paramétrico usaremos la siguiente modificación de la distribución empírica:

$$(2.4.1) \quad \hat{F}_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_{ji} \leq x), \quad j \in \{1, \dots, k\}$$

Donde \mathbb{I} denota la función indicadora.

Para obtener el estimador del parámetro θ por máxima verosimilitud debemos maximizar la función de *pseudo-logverosimilitud* resolviendo el sistema

$$(2.4.2) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \theta'_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \theta'_p} \right)' = \mathbf{0}$$

Donde

$$\mathcal{L}_j = \sum_{i=1}^n l_j(\mathbf{X}_i), \quad j \in \{1, \dots, p\},$$

(2.4.3)

$$l_j(\mathbf{X}_i) = \log \left[c \left(\left\{ \varphi_l, \hat{\theta}_l \right\}_{l \in \{1, \dots, j\}}; s_j \right) \left(\left\{ \hat{F}_m(x_{mi}) \right\}_{m \in s_j} \right) \prod_{m \in s_j} \hat{f}_m(x_{mi}) \right],$$

$\hat{f}_l(x)$ es la función de densidad empírica para $l \in \{1, \dots, k\}$ y c es la función de densidad de la cópula, la cuál, cuando es arquimediana, puede expresarse en términos de su función generadora de la siguiente manera:

- (1) Para el caso de dos variables, la función de densidad de la cópula con función generadora φ está dada por

$$\begin{aligned} c_\theta(u, v) &= \frac{\partial^2 C_\theta}{\partial u \partial v}(u, v) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \left(\varphi^{[-1]} \right)''(\varphi(u) + \varphi(v)) \varphi'(v) \varphi'(u) \end{aligned}$$

- (2) Para el caso de tres variables, la función de densidad de la cópula con función generadora φ está dada por

$$\begin{aligned} c_\theta(u, v, w) &= \frac{\partial^3 C_\theta}{\partial u \partial v \partial w}(u, v, w) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial u \partial v \partial w} \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \left(\varphi^{[-1]} \right)'''(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \varphi'(v) \varphi'(u) \varphi'(w) \end{aligned}$$

De manera general, para n variables, la función de densidad de la cópula con función generadora φ está dada por

$$\begin{aligned} c_\theta(u, v, w, z) &= \frac{\partial^n C_\theta}{\partial u_1 \dots \partial u_n}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \frac{\partial^n C_\theta}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \\ &= \left(\varphi^{[-1]} \right)^{(n)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \prod_{i=1}^n \varphi'(u_i). \end{aligned}$$

Ejemplo: Índices bursátiles

Tomaremos una muestra que contenga los precios diarios de 4 acciones pertenecientes al IPC a partir del 31 de agosto del 2011, teniendo un total de 1024 observaciones de cada acción. Tomaremos las observaciones de América Móvil (AMX), Bimbo (BIMBO), Cemex (CEMEX) y Grupo Financiero Inbursa (GFINBURO). Para tener datos comparables, usaremos los log-rendimientos diarios de cada acción calculados como $r_t = -\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, donde S_t denota el precio de cierre de la acción al día t , por lo que en adelante, cuando hablemos de AMX, BIMBO, CEMEX o GFINBURO, nos referiremos a los log-rendimientos diarios, a menos que se especifique que hablamos de los precios de la acción.

Las series de tiempo de los precios de cierre de las acciones, así como sus log-rendimientos se observan en las figuras (3.0.1) y (3.0.2), respectivamente.

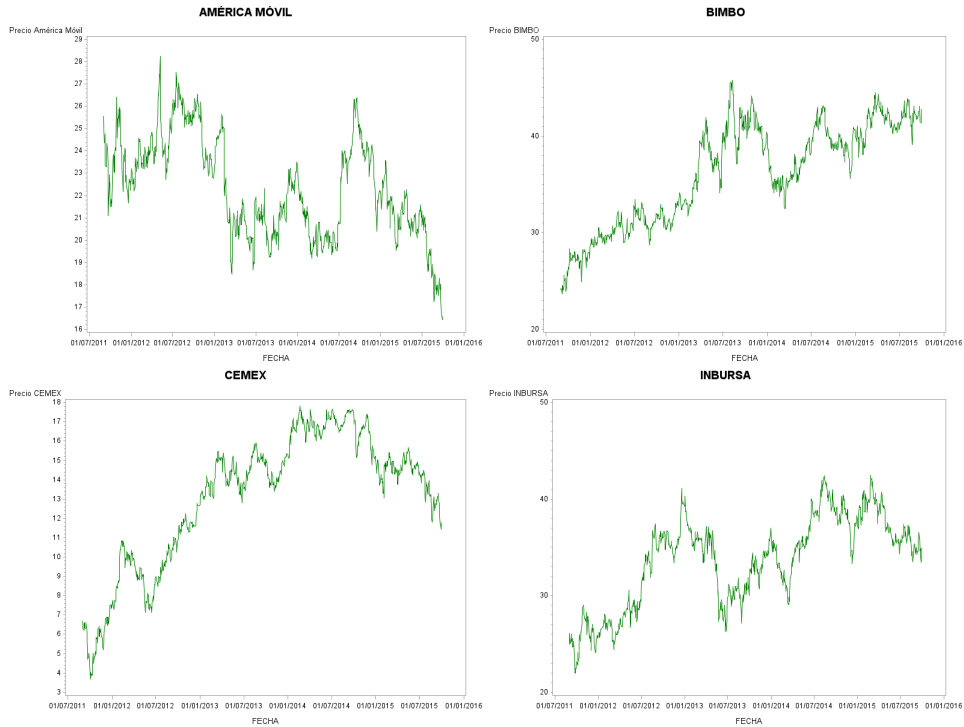


FIGURA 3.0.1. Precios de cierre S_t

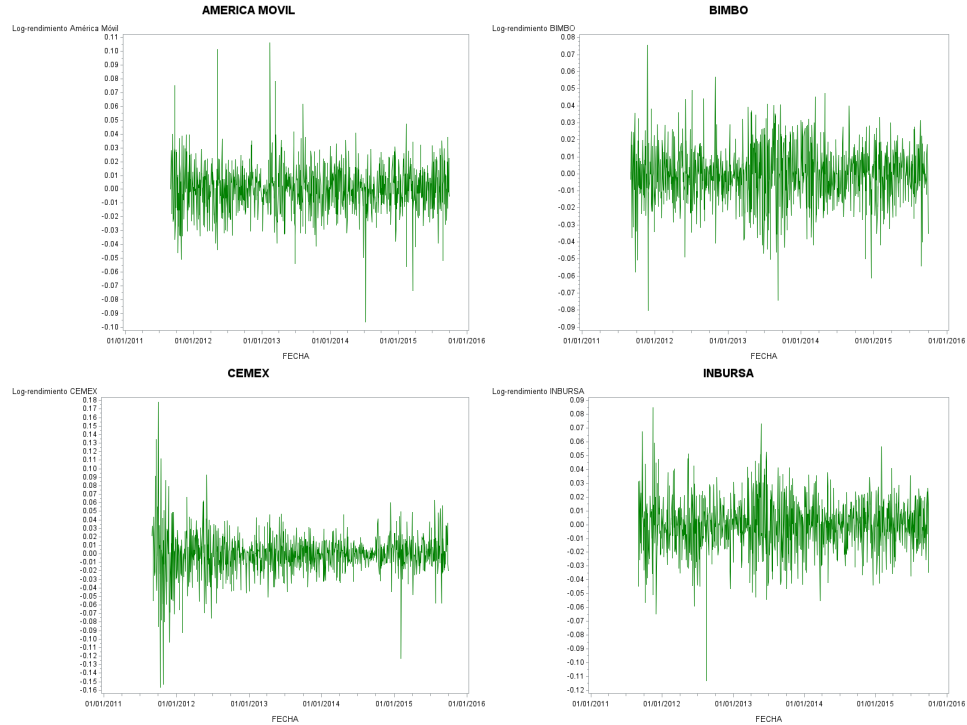


FIGURA 3.0.2. Log-rendimientos $r_t = -\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$

Variables	τ de Kendall	Dependencia en las colas ($q=0.95$)			
		λ_{UU}	λ_{UL}	λ_{LL}	λ_{LU}
(AMX, BIMBO)	0.23008	0.17595	0	0.13685	0.039101
(AMX, CEMEX)	0.2618	0.25415	0	0.2346	0.01955
(AMX, INBURSA)	0.17415	0.13685	0	0.097752	0.039101
(BIMBO, CEMEX)	0.20396	0.1173	0	0.1564	0.01955
(BIMBO, INBURSA)	0.27095	0.2346	0.039101	0.21505	0.01955
(CEMEX, INBURSA)	0.17157	1	0	0.97752	0

TABLE 1. Medidas de dependencia

Los diagramas de dispersión de las funciones de distribución empíricas de los log-rendimientos de las acciones dos a dos se muestran en la figura (3.0.3). En la tabla (1) se muestran también, dos a dos, las medidas de dependencia entre las variables. Procederemos como indica el paso (1) de la sección 2.4.1. Para este ejemplo sólo consideraremos la familia de cópulas Gumbel, de modo que nuestra función generadora está dada por $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$, para $\theta \geq 1$.

Para facilitar la notación, en adelante A representará al vector de las funciones de distribución empíricas de los log-rendimientos de América Móvil, B al de BIMBO, C al de CEMEX y G al de Grupo Financiero Inbursa.

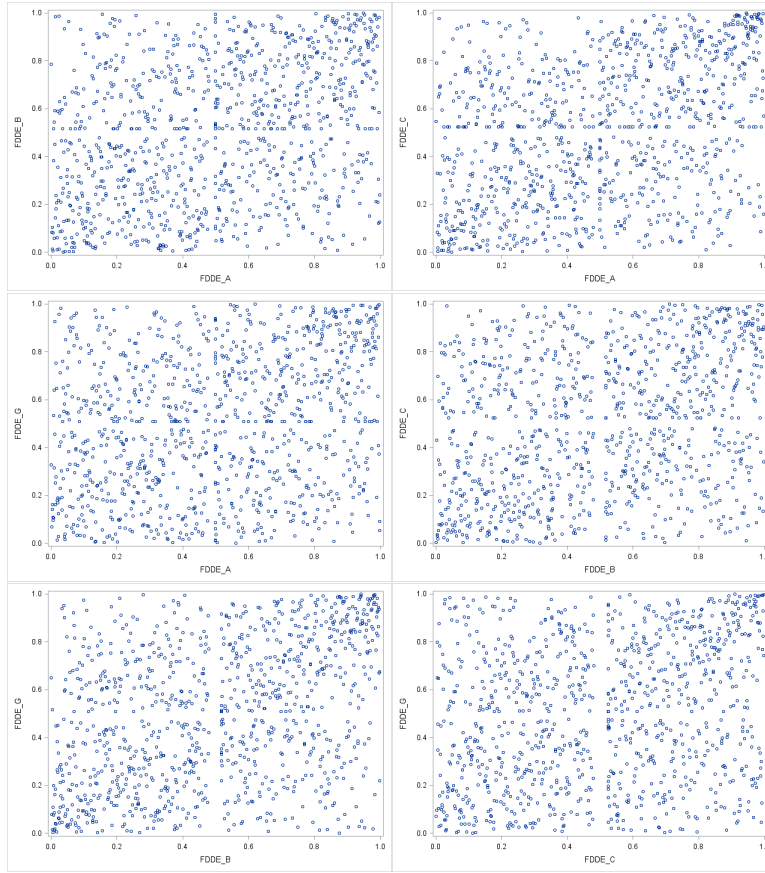


FIGURA 3.0.3. Diagramas de dispersión

En el primer nivel las posibles agrupaciones son AB , AC , AG , BC , BG , CG , ABC , ABG , ACG , BCG , $ABCG$. De modo que calcularemos un estimador de θ por máxima verosimilitud para cada posible agrupación.

En el caso de dos variables, la función de densidad de la cópula Gumbel con parámetro θ está dada por

$$\begin{aligned}
 c_{\theta}(u, v) &= \frac{\partial^2 C_{\theta}}{\partial u \partial v}(u, v) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right) \\
 &= \frac{\exp\left\{-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right\} \left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}-2}}{uv} \\
 &= \frac{(-\ln u)^{\theta-1} (-\ln v)^{\theta-1} \left[\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}} - (1 - \theta)\right]}{uv}
 \end{aligned}$$

En el caso de tres variables, la función de densidad de la cópula Gumbel con parámetro θ está dada por

$$\begin{aligned}
c_\theta(u, v, w) &= \frac{\partial^3 C_\theta}{\partial u \partial v \partial w}(u, v, w) \\
&= \frac{\partial^3 C_\theta}{\partial u \partial v \partial w} \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta\right]^{1/\theta}\right) \\
&= \frac{(-\ln u)^{\theta-1} (-\ln v)^{\theta-1} (-\ln w)^{\theta-1} \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}-3}}{uvw} \\
&\quad \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta\right]^{1/\theta}\right\} \cdot \\
&\quad \left(2\theta^2 - 3\theta + 1 + \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta\right]^{1/\theta}\right) \\
&\quad \left(\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta\right]^{1/\theta} - 3 + 3\theta\right)
\end{aligned}$$

En el caso de cuatro variables, la función de densidad de la cópula Gumbel con parámetro θ está dada por

$$\begin{aligned}
c_\theta(u, v, w, z) &= \frac{\partial^4 C_\theta}{\partial u \partial v \partial w \partial z}(u, v, w, z) \\
&= \frac{\partial^4 C_\theta}{\partial u \partial v \partial w \partial z} \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta\right]^{1/\theta}\right) \\
&= \frac{1}{uvwz} (-\ln u)^{\theta-1} (-\ln v)^{\theta-1} (-\ln w)^{\theta-1} (-\ln z)^{\theta-1} \cdot \\
&\quad \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}-4} \cdot \\
&\quad \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta\right]^{1/\theta}\right\} \cdot \\
&\quad \left(2\theta^2 + 1 - 3\theta + \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta\right]^{1/\theta}\right) \\
&\quad \left(\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta\right]^{1/\theta} - 3 + 3\theta\right) \cdot \\
&\quad \left(1 - 3\theta + \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{uvwz} (-\ln u)^{\theta-1} (-\ln v)^{\theta-1} (-\ln w)^{\theta-1} (-\ln z)^{\theta-1} \cdot \\
& \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}-3} \cdot \\
& \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \cdot \\
& \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}-1} \cdot \\
& \left(3 - 3\theta - 2 \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta + (-\ln w)^\theta + (-\ln z)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right)
\end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo, para el primer nivel obtenemos los estimadores de θ_1 mostrados en el cuadro (2). Eligiremos la agrupación con el estimador más grande; esto es porque, en el caso de la familia Gumbel, entre más grande es el parámetro, mayor es la dependencia entre las variables ($\tau_C = 1 - \frac{1}{\theta}$). Observamos que el valor más grande de $\hat{\theta}_1$ está en la agrupación (BG).

Agrupación	$\hat{\theta}_1$
AB	2.1153
AC	2.2004
AG	2.0522
BC	2.0894
BG	2.2098
CG	2.0842
ABC	1.2570
ABG	1.2488
ACG	1.2172
BCG	1.2431
ABCG	1.2259

CUADRO 2. Estimadores de θ_1 para .

Sea Z_1 la *pseudo-variable* $Z_1 = C_{\hat{\theta}_1}(B, G)$, donde $C_\theta(u, v) = \exp \left(- \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right)$.

Las siguientes agrupaciones posibles son AZ_1 , CZ_1 , ACZ_1 . Aplicamos nuevamente el procedimiento anterior. Los estimadores para θ_2 se muestran en el cuadro (3).

Tenemos que el estimador de θ_2 más grande es el de la agrupación (CZ_1). Tomemos entonces $Z_2 = C_{\hat{\theta}_2}(C, Z_1)$. La única agrupación posible ahora es AZ_2 , de modo que sólo resta calcular el estimador de θ_3 , cuyo valor es $\hat{\theta}_3 = 2.0847$.

De todo lo anterior, la cópula obtenida es

$$(3.0.4) \quad C(A, B, C, G) = C_{\theta_3}(C_{\theta_2}(C_{\theta_1}(B, G), C), A).$$

Donde C_θ es una cópula Gumbel con parámetro θ y $\theta_1 = 2.2098$, $\theta_2 = 2.1591$ y $\theta_3 = 2.0847$.

Agrupación	$\hat{\theta}_2$
AZ_1	2.1473
CZ_1	2.1591
ACZ_1	1.2352

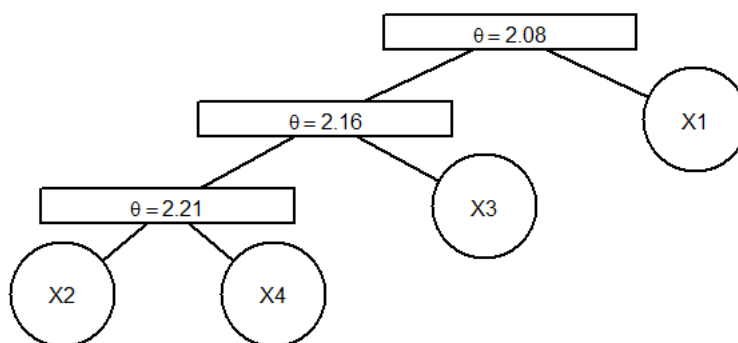
CUADRO 3. Estimadores de θ_2 .

FIGURA 3.0.4. Estructura de la HAC obtenida

Finalmente, con ayuda del paquete HAC en R (ver apéndice), simulamos 1000 observaciones del vector (X_1, X_2, X_3, X_4) con la estructura de la HAC obtenida en la ecuación (3.0.4).

Las medidas de dependencia obtenidas con la simulación se muestran en el cuadro (4), así mismo, los diagramas de dispersión de las variables simuladas dos a dos se muestran en la figura (3.0.5).

Algo que podemos observar es que, en algunos casos, existen varias similitudes entre los resultados obtenidos en la simulación y nuestros datos originales con respecto a la τ de Kendall. Una diferencia que podemos observar es que, en el caso de la muestra original, las variables con mayor τ de Kendall fueron $(BIMBO, INBURSA)$, mientras que, en el caso de la simulación, las variables con mayor dependencia fueron (X_3, X_4) . De las gráficas podemos notar que los datos originales tienen un comportamiento más disperso, mientras que las variables simuladas se concentran más en la diagonal.

Variables	τ de Kendall	Dependencia en las colas ($q=0.95$)			
		λ_{UU}	λ_{UL}	λ_{LL}	λ_{LU}
(X_1, X_2)	0.50491	0.6	0	0.26	0
(X_1, X_3)	0.51755	0.5	0	0.28	0
(X_1, X_4)	0.51479	0.5	0	0.28	0
(X_2, X_3)	0.521	0.6	0	0.22	0
(X_2, X_4)	0.53441	0.6	0.02	0.3	0
(X_3, X_4)	0.56617	1	0	0.98	0

CUADRO 4. Medidas de dependencia (simulación)



FIGURA 3.0.5. Diagramas de dispersión de variables aleatorias simuladas

Conclusiones

El estudio de cópulas es un tema relativamente reciente y el desarrollo de métodos para estimarlas adquiere cada vez más importancia. Como se mencionó en el Capítulo 2, el método que se presentó en este trabajo puede hacerse tan flexible como se desee. En el caso de nuestro ejemplo de índices bursátiles (Capítulo 3), la estructura de la HAC obtenida resultó tener sólo agrupaciones de dos a dos, sin embargo el modelo está construido de manera que se pueda generar la estructura con cualquier tipo de agrupaciones; además, como se mencionó también, pueden compararse varias familias de cópulas aunque, por supuesto, el criterio de selección de la agrupación sería un tanto diferente al empleado en el presente trabajo.

Se recurrió al paquete *HAC* en R, creado por Ostap Okhrin y Alexander Risting [9]. El código empleado para dicha simulación puede consultarse en el apéndice. Como proyecto futuro o adicional, podría fundamentarse la teoría de simulación de la HAC y construir un programa para esta.

Finalmente, de los resultados obtenidos en la simulación observamos que en algunos casos existen varias similitudes con nuestros datos originales con respecto a la τ de Kendall. Una diferencia que podemos observar es que, en el caso de la muestra original, las variables cuya τ de Kendall es mayor son (*BIMBO*, *INBURSA*), mientras que, en el caso de la simulación, las variables con mayor dependencia fueron (X_3 , X_4). Concluimos que, si bien la cópula obtenida no se ajusta del todo a nuestros datos, esto puede deberse a la familia de cópulas elegida para su construcción, sin embargo, como se ha mencionado, este ajuste podría mejorarse usando otras familias de cópulas.

Apéndice

DEFINICIÓN. Sea (X, Y) un vector aleatorio y $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible tal que la variable aleatoria $\phi(X, Y)$ tiene esperanza finita, entonces

$$E[\phi(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y) dF_{X, Y}(x, y).$$

Para los cálculos realizados se utilizó Matlab. Las funciones empleadas se presentan a continuación:

- Las cópulas Gumbel de 2, 3 y 4 variables se programaron, respectivamente, como

```
% Cópula Gumbel de 2 variables
function z=gumbel_dos(u,v,t)
z=exp(-(((log(u))^t)+(log(v))^t)^(1/t));
end

% Cópula Gumbel de 3 variables
function z=gumbel_tres(u,v,w,t)
z=exp(-(((log(u))^t)+(log(v))^t)+...
(log(w))^t)^(1/t));
end

% Cópula Gumbel de 4 variables
function z=gumbel_cuatro(u,v,w,z,t)
z=exp(-(((log(u))^t)+(log(v))^t)+...
(log(w))^t+(log(z))^t)^(1/t));
end
```

- Las funciones de densidad empíricas se construyeron con la siguiente función

```
function f=densidad(A)
for i=1:length(A)
g(i)=sum(A==A(i))/length(A);
end;
f=g';
end
```

- Para obtener las funciones de densidad de las cópulas Gumbel de 2, 3 y 4 variables, respectivamente se usó la función diff como

```

syms u v w z t
diff(gumbel_dos(u,v,t),u,v)

diff(gumbel_tres(u,v,w,t),u,v,w)

diff(gumbel_cuatro(u,v,w,z,t),u,v,w,z)

```

- La función de *pseudo*-logverosimilitud de la ecuación (2.4.3) en el caso de dos variables se programó como

```

function y=lmvdif_2(A,B,fa,fb,t)
y=0;
for i=1:length(A)
s=log(fa(i)*fb(i)*(exp(-((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*...
(-log(B(i)))^(t - 1)*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t)^(2/t - 2))/(A(i)*B(i))-...
(t*exp(-((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t)^...
(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*(-log(B(i)))^(t - 1)*...
(1/t - 1)*((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t)^...
(1/t - 2))/(A(i)*B(i)));
y=y+s;
end
end

```

- La función de *pseudo*-logverosimilitud de la ecuación (2.4.3) en el caso de tres variables se programó como

```

function y=lmvdif_3(A,B,C,fa,fb,fc,t)
y=0;
for i=1:length(A)
s=log(fa(i)*fb(i)*fc(i))*((exp(-((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t)^(1/t))*...
(-log(A(i)))^(t - 1)*(-log(B(i)))^(t - 1)*...
(-log(C(i)))^(t - 1)*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t)^(2/t - 2))*...
((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t)^(1/t - 1))/(A(i)*B(i)*C(i)) -...
(t*exp(-((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*...
(-log(B(i)))^(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*...
(2/t - 2)*((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t)^(2/t - 3))/(A(i)*B(i)*C(i)) +...
(t^2*exp(-((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*...
(-log(B(i)))^(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*...
(1/t - 1)*(1/t - 2)*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t)^(1/t - 3))/...
(A(i)*B(i)*C(i)) - (t*exp(-((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t)^(1/t))*...
(-log(A(i)))^(t - 1)*(-log(B(i)))^(t - 1)*...
(-log(C(i)))^(t - 1)*(1/t - 1)*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t)^(1/t - 1)*...
((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t)^(1/t - 2))/(A(i)*B(i)*C(i)));
y=y+s;
end
end

```

- La función de *pseudo*-logverosimilitud de la ecuación (2.4.3) en el caso de cuatro variables se programó como

```

function y=lmvdif_4(A,B,C,D,fa,fb,fc,fd,t)
y=0;
for i=1:length(A)
s=log(fa(i)*fb(i)*fc(i)*fd(i)*...
((exp(-((-log(A(i)))^t +(-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t +(-log(D(i)))^t)^(1/t))*...
(-log(A(i)))^(t - 1)*(-log(B(i)))^...
(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*(-log(D(i)))^...
(t - 1)*((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^t)^(4/t - 4))/...
(A(i)*B(i)*C(i)*D(i)) + (t^2*exp(-((-log(A(i)))^...
t + (-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^...
t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*(-log(B(i)))^...
(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*(-log(D(i)))^(t - 1)*...
(1/t - 1)^2*((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^t)^(2/t - 4))/...
(A(i)*B(i)*C(i)*D(i)) - (2*t*exp(-((-log(A(i)))^...
t + (-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^...
t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*(-log(B(i)))^(t - 1)*...
(-log(C(i)))^(t - 1)*(-log(D(i)))^(t - 1)*(2/t - 2)*...
((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t +...
(-log(D(i)))^t)^(1/t - 1))*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^t)^...
(2/t - 3))/(A(i)*B(i)*C(i)*D(i)) - (2*t*exp(-...
((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^...
t + (-log(D(i)))^t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*...
(-log(B(i)))^(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*...
(-log(D(i)))^(t - 1)*(1/t - 1))*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^t)^...
(1/t - 2))*((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +...
(-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^t)^(2/t - 2))/...
(A(i)*B(i)*C(i)*D(i)) + (t^2*exp(-((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t +(-log(D(i)))^...
t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*(-log(B(i)))^...
(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*(-log(D(i)))^...
(t - 1)*(2/t - 2)*(2/t - 3))*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^...
t)^(2/t - 4))/(A(i)*B(i)*C(i)*D(i)) + (2*t^2*...
exp(-((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t +
(-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^t)^(1/t))*(-log(A(i)))^...
(t - 1)*(-log(B(i)))^(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*...
(-log(D(i)))^(t - 1)*(1/t - 1)*(1/t - 2)*
((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^...
t + (-log(D(i)))^t)^(1/t - 1))*((-log(A(i)))^t +...
(-log(B(i)))^t +(-log(C(i)))^t + (-log(D(i)))^t)^...
(1/t - 3))/(A(i)*B(i)*C(i)*D(i)) - (t^3*exp(-...
((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t +...
(-log(D(i)))^t)^(1/t))*(-log(A(i)))^(t - 1)*...
(-log(B(i)))^(t - 1)*(-log(C(i)))^(t - 1)*...
(-log(D(i)))^(t - 1)*(1/t - 1)*(1/t - 2)*(1/t - 3)*...
((-log(A(i)))^t + (-log(B(i)))^t + (-log(C(i)))^t +...
(-log(D(i)))^t)^(1/t - 4))/(A(i)*B(i)*C(i)*D(i)));
y=y+s;
end
end
end

```

- Para encontrar el parámetro, maximizamos las funciones `lmvdif_2`, `lmvdif_3` y `lmvdif_4` con respecto a t entre (1, 30).

```
x1=fminbnd(@(t)lmvdif_2(FDDE_A,FDDE_B,t)*(-1),1,30)

x2=fminbnd(@(t)lmvdif_3(FDDE_A,FDDE_B,FDDE_C,t)*...
(-1),1,30)

x3=fminbnd(@(t)lmvdif_4(FDDE_A,FDDE_B,FDDE_C,...
FDDE_G,t)*(-1),1,30)
```

- En el primer nivel de la HAC, construimos la variable Z_1 a partir de B y G en la ventana de comando como

```
for i=1:length(FDDE_A)
    Z(i)=gumbel_dos(FDDE_B(i),FDDE_G(i),2.2098);
end;
```

- Análogamente, en el segundo nivel de la HAC, construimos la variable Z_2 a partir de Z_1 y C en la ventana de comando como

```
for i=1:length(FDDE_C)
    W(i)=gumbel_dos(Z(i),FDDE_C(i),2.1591);
end;
```

- Dado que la estructura de nuestra cópula jerárquica arquimediana está en agrupaciones de dos a dos, la función de ésta se programó como

```
function z=arq_jer(u,v,w,z,t1,t2,t3)
a=gumbel_dos(v,z,t1);
b=gumbel_dos(a,w,t2);
z=gumbel_dos(b,u,t3);
end
```

- Para construir el estadístico de bondad de ajuste de ambas cópulas (la cópula Gumbel de 4 variables y la HAC construida) usamos


```

%HAC construida
for i=1:length(FDDE_A)
AJ(i)=abs(arq_jer(FDDE_A(i),FDDE_B(i),FDDE_C(i),...
FDDE_G(i),2.2098,2.1591,4.8183)-...
copula_empirica(FDDE_A(i),...
FDDE_B(i),FDDE_C(i),FDDE_G(i),...
FDDE_A,FDDE_B,FDDE_C,FDDE_G));
end

max(AJ)

%Gumbel de 4 variables
for i=1:length(FDDE_A)
CG(i)=abs(gumbel_cuatro(FDDE_A(i),FDDE_B(i),...
FDDE_C(i),FDDE_G(i),1.2259)-...
copula_empirica(FDDE_A(i),...
FDDE_B(i),FDDE_C(i),FDDE_G(i),...
FDDE_A,FDDE_B,FDDE_C,FDDE_G));
end;

max(CG)

```

Como se mencionó en las conclusiones, para crear la simulación de la HAC obtenida, empleamos el paquete *HAC* de R. El código empleado es el siguiente:

```

HAC2 = hac(type = 1, tree = list(list(list("X2",
"X4", 2.2098),"X3", 2.1591), "X1", 2.0847))
plot(HAC2)
sample = rHAC(1000, HAC2)

```

Bibliografía

- [1] Roger B. Nelsen (2006), An Introduction to Copulas.
- [2] Luis Rincón (2007). Curso intermedio de Probabilidad.
- [3] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot (2004). Loss Models. From data to Decisions.
- [4] Ostap Okhrin, Yarema Okhrin, Wolfgang Schmid (2012). Journal of Econometrics. *On the structure and estimations of hierarchical Arquimedean copulas.*
- [5] Ming-Heng Zhang (2008). Insurance: Mathematics and Economics 42 (2008) 73-80. *Modelling total tail dependence along diagonals.*
- [6] Ken Kleinman, Nicholas J. Horton (2014). SAS y R. Data Management, Statical Analysis, and Graphics.
- [7] David Ruppert. Statistics and Data Analysis for Financial Engineering.
- [8] Christian Hering, Marius Hofer, Jan-Frederik Mai, Matthias Scherer (2009). Journal of Multivariate AnaLysis. *Constructing hierarchical Archimedean copulas with Lévy subordinators.*
- [9] Ostap Okhrin, Alexander Risting (2014). Journal of Statistical Software. *Hierarchical Arquimedean Copulae: The HAC Package.*
- [10] Sheldon Ross. A First Course in Probability, Eighth Edition.
- [11] Brian S. Thomson. Symmetric Properties of Real Functions.
- [12] A. Wayne Roberts, Dale E. Varberg. Convex Functions.
- [13] Paul Embrechts, Filip Lindskog, Alexande McNeil (2001). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management.