UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MANUAL DE APOYO A LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PARA BACHILLERATO EN EL SISTEMA DIRECCIÓN GENERAL DE BACHILLERATO DE LA SECRETARIA DE EDUCACIÓN PUBLICA

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

MARÍA JAZMÍN LÓPEZ LEÓN

TUTOR: DR. PABLO BARRERA SANCHEZ

2019

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. DATOS DEL ALUMNO

Apellido paterno:	López
Apellido materno	León
Nombres	María Jazmín
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Actuaría

2. DATOS TUTOR

Grado	Dr.
Nombre	Pablo
Apellido paterno	Barrera
Apellido materno	Sánchez

3. DATOS DEL SINODAL 1

Grado	M. en C.
Nombre	José Antonio
Apellido paterno	Gómez
Apellido materno	Ortega

4. DATOS DEL SINODAL 2

Grado	M. en C.
Nombre	María Lourdes
Apellido paterno	Velasco
Apellido materno	Arregui

5. DATOS DEL SINODAL 3

Grado	Dr.
Nombre	Javier de Jesús
Apellido paterno	Cortés
Apellido materno	Aguirre

6. DATOS DEL SINODAL 4

Grado	M. en C.
Nombre	Iván
Apellido paterno	Méndez
Apellido materno	Cruz

7. DATOS DEL TRABAJO ESCRITO

Título	MANUAL DE APOYO A LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PARA BACHILLERATO EN EL SISTEMA DIRECCIÓN GENERAL DE BACHILLERATO DE LA SECRETARIA DE EDUCACIÓN PUBLICA
Número de páginas	239
Año	2019

CONTENIDO

Prefacio

El propósito de éste manual de apoyo a la docencia de la materia de Geometría Analítica es servir como referencia de estudio para los alumnos que estén interesados en la asignatura, pero tienen dificultad a la hora de recordar las bases algebraicas y geométricas necesarias para el desarrollo de los ejercicios del mismo.

En éste material se desarrollan todos los ejercicios sin omitir los pasos obvios de desarrollo algebraico y aritmético, así como que se mencionan todas las definiciones de los conceptos geométricos que se utilizan, para que el alumno pueda ligar los conceptos algebraicos y geométricos con la geometría analítica.

La mayoría de los profesores encuentran dificultad no en la impartición de la materia, sino, en las deficiencias que traen los alumnos con temas necesarios para la geometría analítica. En la mayoría de las situaciones dan por hecho que el alumno tiene los conocimientos previos de la materia o deja al alumno la obligación de adquirirlos a la par que adquiere los conocimientos nuevos. Este documento puede ser un auxiliar en estos casos, donde el profesor puede referenciar a los alumnos para adquirir (reforzar) o ligar los conocimientos de algebra a la par de los de geometría analítica.

No es un manual que contenga sólo los elementos básicos de la geometría analítica, sino que pretende abordar los temas a profundidad, de manera que pueda ser utilizado por el alumno que apenas comprende los conceptos esenciales del algebra y la geometría, como por el interesado en profundizar en los temas de la geometría analítica, de manera que el alumno adquiera los conocimientos de geometría analítica necesarios para iniciar una carrera universitaria ligada a las matemáticas.

El manual está dividido en capítulos, en el capítulo I se trabaja el plano cartesiano, donde se trasladan los principales conceptos de geometría plana a un plano cartesiano.

En el capítulo II trabajamos la línea recta, donde utilizamos el teorema de Pitágoras y algebra para definir los conceptos básicos de la geometría plana referentes a rectas, triángulos y polinomios.

El capítulo III es el más extenso, ya que, manejamos las cónicas, desde la circunferencia, parábola, elipse hasta la hipérbola.

Finalmente, en el capítulo IV trabajamos la ecuación cuadrática, en la que describimos las características que debe cumplir la ecuación cuadrática para representar cada una de las cónicas vistas en el capítulo III.

Se utilizó el software de Geogebra para la generación de las gráficas presentadas en este manual, sin embargo, no es el propósito del presente trabajo enseñar el uso del software. En el apéndice podemos encontrar una liga hacia manuales de Geogebra y ejercicios de la materia manejados con el mismo.

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

1.1 Introducción

El objetico de este capítulo es presentar alguno de los conceptos fundamentales de la Geometría analítica:

I. Partiendo de los conceptos básicos de la geometría plana y del teorema de Pitágoras definiremos los elementos y conceptos esenciales de la geometría analítica.
II. Obtendremos áreas, perímetros, problemas de colinealidad, así como problemas de punto medio y razón de un segmento.
III. Dada las condiciones que debe cumplir los puntos pertenecientes a una figura geométrica determinaremos su ecuación.
IV. Analizaremos las características básicas de un lugar geométrico y la construcción de su gráfica a partir de ellas.

Es importante mencionar que para reforzar el aprendizaje teórico se utilizará el programa Geogebra para la comprobación de los ejercicios, no es el objetivo del presente trabajo el aprender a utilizar dicho programa, más bien, es una herramienta para confirmar nuestros resultados.

1.2 Plano cartesiano

Aproximadamente en 1630, Pierre de Fermat y René Descartes descubrieron independientemente las ventajas de usar los números como coordenadas en la geometría. Descartes fue el primero en publicar una lista detallada, en su libro Géométrie de 1637. Por esa razón, él tiene los créditos de la idea y en su honor son nombradas coordenadas cartesianas. “Lo que hizo Descartes fue explorar las relaciones entre la geometría y el álgebra e indicar cómo cada una de ellas puede iluminar a la otra.” (E. Moise & L. Downs, 1986)

Anteriormente Euclides describió cómo funcionan los sistemas de coordenadas en una recta, donde todos los números corresponden a un punto y todo punto corresponde a un número. La idea de coordenadas cartesianas es semejante, ahora un punto no corresponde a un número, sino a un par de números.

Para la construcción del plano cartesiano utilizaremos dos rectas numéricas, una perpendicular a la otra, fijadas de tal forma que los puntos de coordenadas 0 de ambos coincidan. Tomaremos las siguientes generalidades:

- El eje “X” se tomará horizontal y se nombra eje de las abscisas, su sentido positivo es a la derecha.
- El eje “Y” se tomará vertical y se nombra eje de las ordenadas, su sentido positivo es a hacia arriba.
- El cruce de ambos ejes se llama “origen”
- El plano cartesiano se divide en 4 regiones llamadas cuadrantes, los cuales se nombran con números romanos en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

1.3 Sistema de coordenadas.

Un punto P dentro del plano cartesiano se puede representar por medio del par ordenado (*x*, *y*), donde *x* representa el número sobre el eje “X” que se obtiene al trazar una recta perpendicular a dicho eje que pase por el punto P. El número *x* es la coordenada *x* de P, también suele llamarse la abscisa del punto P o proyección ortogonal de P sobre el eje *x*. Análogamente, *y* representa el número sobre el eje “Y” que se obtiene al trazar una recta perpendicular a dicho eje que pase por el punto P. El número *y* se llama la coordenada *y*, también suele llamarse ordenada de P o proyección ortogonal de P sobre el eje *y*.

De esta manera, cada punto dentro del plano cartesiano está determinado por un par ordenado de números reales.

- El origen tendrá coordenadas$(0,0)$
- Un punto sobre el eje *x* tendrá coordenadas $(a, 0)$, siendo a un número real
- Un punto sobre el eje y tendrá coordenadas $(0, b)$, siendo b un número real
- Un punto fuera de los ejes tendrá coordenadas (a, b)

Ejercicio 1: Observa el siguiente plano cartesiano (*figura* 1-1) y contesta lo que se te pide:

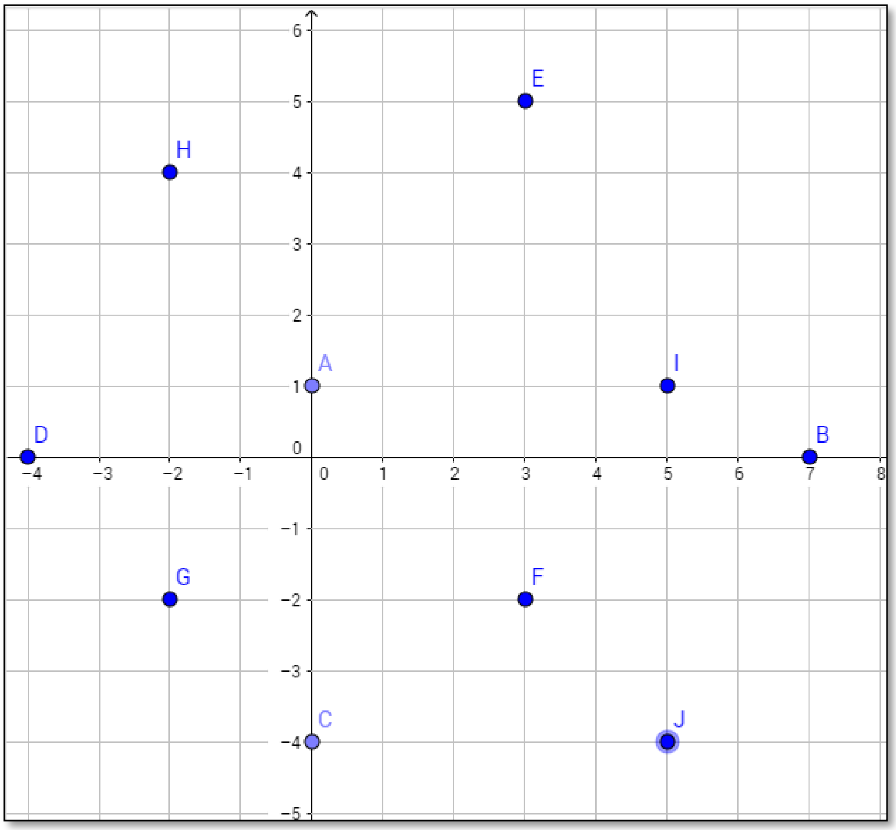

Figura 1-1 Puntos en el plano cartesiano

a) Da las coordenadas de cada punto de la *figura 1* como un par ordenado.

b) Algunos puntos están alineados horizontalmente, ¿Qué tienen en común sus coordenadas?

c) Algunos puntos están alineados verticalmente, ¿qué tienen en común sus coordenadas?

d) Completa la siguiente tabla, tomando en cuenta que si no se encuentra en un cuadrante indica en que eje está localizado:

Par ordenado	Abscisa del punto	Ordenada del punto	Cuadrante en que se encuentra.
$A(\quad,\quad)$			
$B(\quad,\quad)$			
$C(\quad,\quad)$			

Par ordenado	Abscisa del punto	Ordenada del punto	Cuadrante en que se encuentra.
$D(\quad,\quad)$			
$E(\quad,\quad)$			
$F(\quad,\quad)$			
$G(\quad,\quad)$			
$H(\quad,\quad)$			
$I(\quad,\quad)$			
$J(\quad,\quad)$			

Ejercicio 2.

1. Localiza los siguientes puntos en un plano cartesiano.
    a) $A(4,3)$
    b) $B(3,4)$
    c) $C(2,-3)$
    d) $D(-3,2)$

   ¿En qué cuadrante están cada uno de los puntos?
2. Sitúa los siguientes puntos en el plano cartesiano, $A(-3,0)$, $B(0,-3)$, $C(3,0)$ y $D(0,-3)$.
    a. Sí unimos los puntos ¿Qué figura forman?
    b. Calcula su área
3. Si queremos formar un rectángulo cuyos vértices sean las coordenadas $A(-3,-4)$, $B(-3,6)$, $C(4,6)$, ¿Cuáles tienen que ser las coordenadas del último vértice $D(x,y)$
4. Queremos formar un rectángulo con los ejes coordenados, el punto $P(5,7)$ y las rectas perpendiculares a los ejes "x" y "y" que pasan por el punto P. Grafícalo y obtén su área.

1.4 Teorema de Pitágoras

Los triángulos se pueden clasificar:

- Según la medida de sus lados en: equilátero (3 lados iguales), isósceles (2 lados iguales) y escaleno (3 lados desiguales).
- Según sus ángulos: acutángulos (3 ángulos agudos), obtusángulo (un ángulo obtuso) y rectángulo (un ángulo de 90°).

Es precisamente el triángulo rectángulo de vital importancia en la geometría tanto plana como analítica. Recordemos que los lados del triángulo rectángulo tendrán nombres específicos dependiendo el ángulo que lo formen:

- Catetos: los lados que forman el ángulo de 90°
- Hipotenusa: el lado opuesto al ángulo de 90°

Como se muestra en la *figura1- 2*

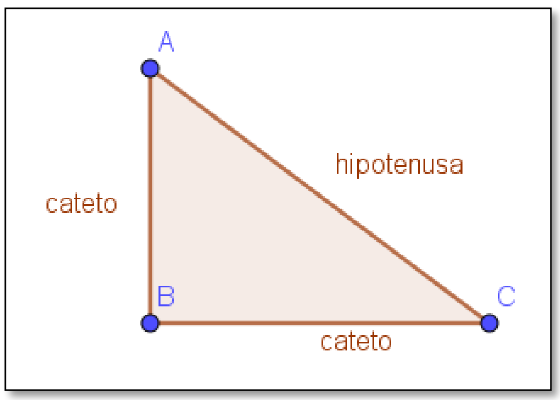

Figura 1-2 Elementos de un triángulo rectángulo

Una propiedad importante del triángulo rectángulo es el teorema de Pitágoras:

"La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

Veamos una pequeña demostración de esta propiedad:

Demostración

Tomemos el triángulo rectángulo ABC de la *figura 1- 3*, Sea A el ángulo recto, y AD perpendicular al lado BC. Según uno de los postulados de Euclides, los triángulos DBA y DAC son ambos semejantes con el triángulo ABC y, por tanto, semejantes entre sí.

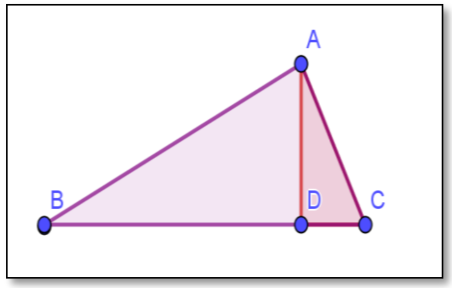

Figura 1-3 Triángulos semejantes según el postulado de Euclides.

Es decir, $\Delta DBA \sim DAC \sim ABC$

Por lo que los lados son proporcionales y podemos tener las siguientes relaciones

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$$

Despejando BA y AC de las proporciones tenemos

$$BA * BA = BC * BD$$

$$AC * AC = BC * CD$$

Es decir

$$BA^2 = BC * BD$$

$$AC^2 = BC * CD$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos

$$BA^2 + AC^2 = BC * BD + BC * CD$$

Factoricemos

$$BA^2 + AC^2 = BC(BD + CD)$$

Que si observamos la *figura 3*, podemos ver que

$$BD + CD = BC$$

Entonces Tenemos:

$$BA^2 + AC^2 = BC * BC = BC^2$$

$$BA^2 + AC^2 = BC^2$$

Que si asignamos la notación comúnmente conocida tenemos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Es decir, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

1.5 Distancia entre dos puntos

En una recta numérica la distancia entre dos números A y B se calcula como:

$$\overline{AB} = |A - B|$$

Por ejemplo, la distancia entre el punto -8 y 5 sería:

$$|-8 - (-5)| = |-8 + 5| = |-3| = 3$$

En un sistema de coordenadas(x, y) los casos más sencillos serían los puntos que se encuentran sobre los ejes coordenados, ya que estaremos refiriéndonos al caso anterior. Por ejemplo:

La distancia entre los puntos $(-3,0)$ y $(5,0)$ están situados en la misma recta, en consecuencia su distancia sería $|-3 - 5| = |-8| = 8$

Se puede generalizar a cualquier par de números que se encuentren en una misma recta horizontal. Sean los puntos $(x_1, y)\ y\ (x_2, y)$ que tienen la misma coordenada de y, su distancia sería $|x_2 - x_1|$.

También se puede generalizar a los puntos que se encuentren sobre el eje de las y o en la misma recta vertical. Sean los puntos $(x, y_1)\ y\ (x, y_2)$ que tienen en común la coordenada x, su distancia sería $|y_2 - y_1|$.

Ahora bien, para dos puntos que se encuentran sobre una recta cualquiera, podremos calcular las distancias de sus proyecciones sobre cada uno de los ejes coordenados y auxiliándonos del teorema de Pitágoras podremos calcular la distancia entre los dos puntos:

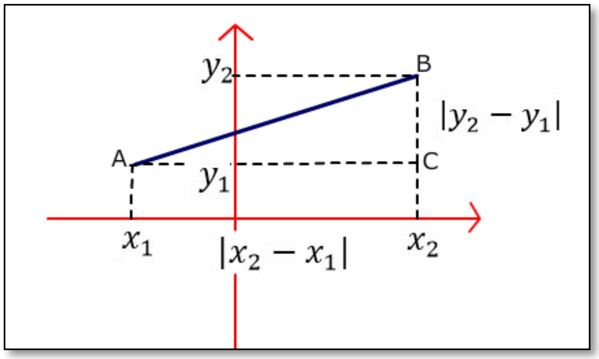

Figura 1-4 Construcción para utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo de la distancia entre dos puntos.

En la *Figura 1-4*, podemos ver el triángulo que se forma con los dos puntos A y B y el cruce de sus perpendiculares, el cual es un triángulo rectángulo que cumple con el teorema de Pitágoras. Es decir,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Donde

$$\overline{AB}^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Y como todo número elevado al cuadrado es positivo podemos excluir el valor absoluto, quedando la ecuación de la forma:

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Despejando $\overline{AB}$ de la ecuación obtenemos la ecuación o fórmula para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera como:

$$d_{AB} = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Comúnmente $\overline{AB}$ también se escribe como d_{AB}, usaremos ambas expresiones indistintamente.

Problema 1. 1.1

Localiza en el plano cartesiano los puntos $A(-2,5)$ y $B(3,-4)$ traza la línea que los une y calcula su distancia entre ellos por medio de la formula obtenida.

Solución

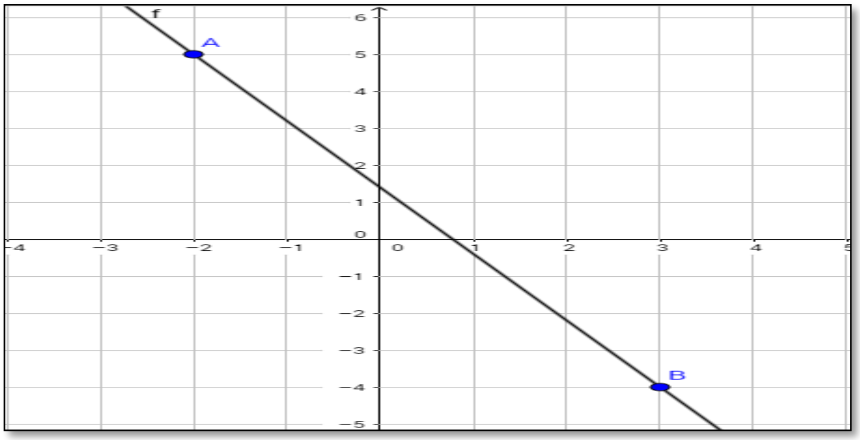

Figura 1-5 Calcular la distancia entre los puntos A y BC

En la *figura 1-5* se muestra la gráfica de los dos puntos solicitados, utilizando al Punto A como (x_1, y_1) y B (x_2, y_2), al sustituir en la formula tendremos:

$$d_{AB} = \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-4-5)^2}$$

Respetando la jerarquía de operaciones resolvemos primero lo que se encuentra entre paréntesis

$$d_{AB} = \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2}$$

Después elevamos al cuadrado

$$d_{AB} = \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{25 + 81}$$

Y finalmente resolvemos la suma

$$d_{AB} = \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{106}$$

Cómo no es un número que tenga raíz cuadrada exacta se deja expresado como raíz. Así, nuestra distancia entre los puntos A y B ($\overline{\mathrm{AB}}$ o d_{AB}) es $\sqrt{106}$.

La distancia entre dos puntos es muy útil en geometría analítica, ya que con ella podemos encontrar la medida del radio de una circunferencia, el valor del lado de un polígono, el valor de la altura de un triángulo, así como auxiliar para encontrar áreas y volúmenes de figuras geométricas dentro de un plano cartesiano. Veamos algunos ejemplos:

Problema 1. 2

Sabemos que $A(2,0)$ y $B(6,0)$ son los vértices de un triángulo. Encontrar las coordenadas del vértice $C(x,y)$ que convierten al triángulo en equilátero.

Solución

Sabemos que un triángulo es equilátero cuando la medida de sus 3 lados es la misma, por ello, nuestro primer paso es encontrar la medida de los lados, como conocemos dos vértices empezaremos por encontrar la distancia entre ellos para conocer la medida de los lados del triángulo.

Usando A como (x_1, y_1) y B (x_2, y_2), al sustituir en la formula tendremos:

$$d_{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$$

Así, cada lado del triángulo mide 4 unidades. Es decir,

$$d_{AB} = d_{AC} = d_{CB} = 4$$

Que al sustituirlo en la fórmula de la distancia considerando a $C(x_1, y_1)$ obtenemos

$$d_{AC} = \sqrt{(x-2)^2 + (\mathrm{y}-0)^2} = 4$$

$$d_{CB} = \sqrt{(x-6)^2 + (\mathrm{y}-0)^2} = 4$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones para eliminar la raíz tenemos:

Para AC	Para CB
$(x-2)^2 + (\mathrm{y}-0)^2 = 16$	$(x-6)^2 + (\mathrm{y}-0)^2 = 16$

Desarrollando los cuadrados y simplificando tendremos

Para AC	Para CB
$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 16$	$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 16$

Igualamos las ecuaciones obtenidas para encontrar las coordenadas del punto C

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2$$

Pasando todos los elementos de un solo lado de la igualdad obtenemos

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 + 12x - 36 - y^2 = 0$$

Simplificando nos queda

$$8x - 32 = 0$$

Que es una ecuación de primer grado que se resuelve despejando

$$8x = 32$$

$$x = \frac{32}{8} = 4$$

Para obtener la coordenada de y necesitamos sustituir $x = 4$ en cualquiera de las dos ecuaciones de distancia, lo vamos a hacer en ambas para comprobar que dan el mismo resultado

Para AC	Para CB
$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 16$	$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 16$
$(4)^2 - 4(4) + 4 + y^2 = 16$	$(4)^2 - 12(4) + 36 + y^2 = 16$
$16 - 16 + 4 + y^2 = 16$	$16 - 48 + 36 + y^2 = 16$
$4 + y^2 = 16$	$4 + y^2 = 16$
$y = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = \pm 2$	

De modo que tenemos dos resultados posibles:

El punto $C(4\,,2)$ y $D(4,-2)$ ambos forman con los puntos $A(2,0)$ y $B(6,0)$ un triángulo equilátero. Visualmente se aprecia en la *figura 1-6*.

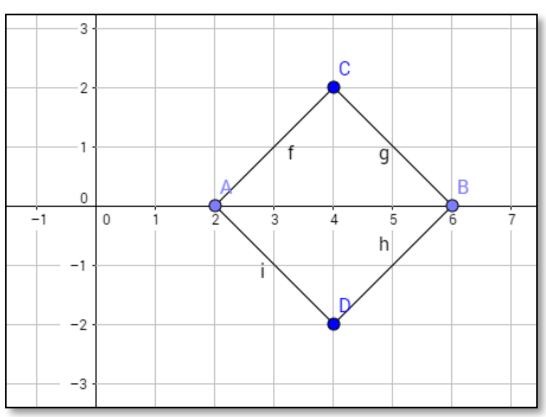

Figura 1-6 Se aprecian los dos triángulos equiláteros que se forman con las dos posibles soluciones del Problema 1.

Problema 1. 3

Verificar que los puntos $A(2,2)$, $B(3,0)$, $C(5,1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución:

Para ser un triángulo rectángulo necesitamos que se cumpla con el teorema de Pitágoras, es decir, Si c es la hipotenusa y a y b los catetos, se debe cumplir:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

También sabemos que en un triángulo rectángulo la medida de la hipotenusa es mayor que la de los catetos.

$$c > a \ \ y\, c > b$$

Por eso el proceso sería:

Encontrar las medidas de los lados con la fórmula de distancia entre dos puntos.

Comparar las distancias y encontrar cual podría considerarse como hipotenusa y cuales los catetos

Sustituir las medidas en el teorema de Pitágoras y verificar que se cumpla.

Proceso:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Con esta información podemos asegurar que es un triángulo isósceles, ya que 2 de sus lados miden lo mismo, pero falta comprobar que es un triángulo rectángulo.

Supongamos que la hipotenusa es $\overline{AC} = \sqrt{10}$ y los catetos $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$, sustituyendo en el teorema de Pitágoras tendremos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$5 + 5 = 10$$

$$10 = 10$$

De modo que se cumple el teorema de Pitágoras, por lo que es un triángulo rectángulo. Se aprecia visualmente en la *figura 1- 7*

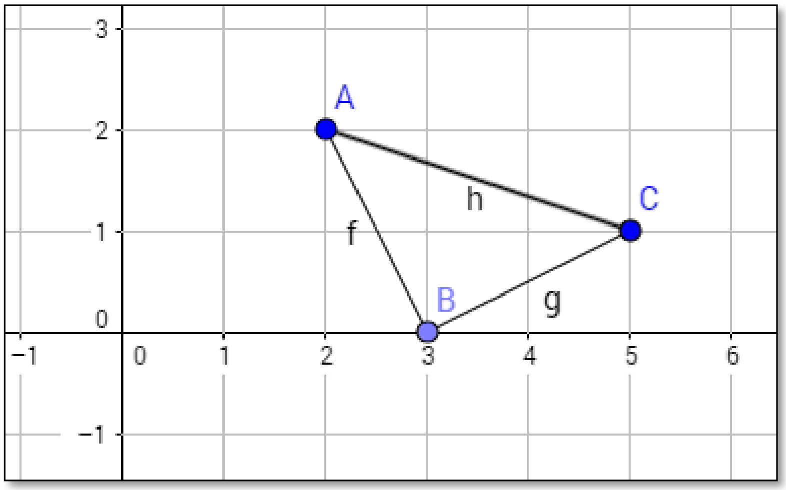

Figura 1-7 Se aprecia visualmente que el triángulo es rectángulo, con los catetos AB y BC.

Problema 1. 4

Encuentra la ordenada del punto $P(-2, y)$ que se encuentra a 3 unidades del punto $A(-5,4)$

Solución:

Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$\overline{PA} = \sqrt{\left(-2-(-5)\right)^2 + (y-4)^2} = 3$$

$$\overline{PA} = \sqrt{(-2+5)^2 + (y-4)^2} = 3$$

Despejaremos x, para ellos seguiremos los siguientes pasos:

$$(3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

$$9 + (y-4)^2 = 9$$

$$9 + (y-4)^2 - 9 = 0$$

$$(y-4)^2 = 0$$

Así tenemos una única solución $y = 4$, decir la coordenada del punto es $P(-2,4)$.

Ejercicios 3:

1. Utiliza la fórmula de la distancia para determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
   a) $A(0,0)$, $B(5,4)$
   b) $A(0,0)$, $B(-2,3)$
   c) $A(5,8)$, $B(2,4)$
   d) $A(-6,3)$, $B(4,-2)$
   e) $A(3,-3)$, $B(-3,3)$
   f) $A(0,-5)$, $B(3,-2)$
2. Verifica que el triángulo cuyos vértices son $A(2,3)$,$B(-1-1)$, $C(3,-4)$, es isósceles.
3. De los puntos $A(4,-5)$, $B(-2,3)$ ¿Cuál está más cerca del origen?
4. Demuestra que los puntos $A(9,-1), B(5,5), C(2,3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
5. Si queremos formar un rectángulo cuyos vértices sean las coordenadas $A(-3,-4)$, $B(-3,6)$, $C(4,6)$ ¿Cuáles tienen que ser las coordenadas del último vértice $D(x,y)$?
6. Los vértices de un triángulo son los puntos $(1,8)$, $(4,1)$, $(7,1)$ Calcular el área del triángulo.
7. Encuentra la ordenada del punto $P(0,y)$ que se encuentra a 3 unidades del punto $A(-2,4)$

1.6 Perímetro y área de polígonos

Polígono, existen diferentes definiciones de polígono, pero podemos resumirlas como el espacio cerrado por líneas rectas, donde los segmentos de línea son llamados lados y los puntos donde se tocan se llaman vértices.

El perímetro de una figura geométrica es la suma de las longitudes de los lados, es decir, es la longitud del contorno de la figura.

Área de una figura geométrica es la medida de la superficie limitada por los lados de la figura.

Por medio de la fórmula de distancia entre dos puntos podemos encontrar la medida de los lados de un triángulo, y con ello podemos encontrar el perímetro de un polígono y en algunos casos también el área. Veamos algunos ejemplos:

Problema 1. 5

Determina el perímetro y área del triángulo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(4,0)$

Solución:

Veamos gráficamente el triángulo:

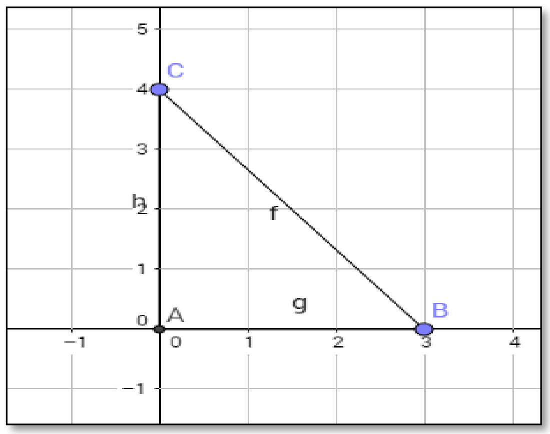

Figura 1-8 Se aprecia que el triángulo es rectángulo con base AB y altura AC.

En la *figura 1-8* podemos ver que se trata de un triángulo rectángulo, ya que los catetos forman parte de los ejes, que por definición forman un ángulo recto. Aunque visualmente podemos decir las medidas de los lados $\overline{AB} = 3\ y\ \overline{AC} = 4$ vamos a comprobarlas con la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

De manera que el perímetro es

$$P = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 3 + 4 + 5 = 12u$$

Cómo es un triángulo rectángulo, para calcular su área utilizaremos la fórmula

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Donde

A es el área, b la base y h la altura.

En este caso $b = \overline{AB}$, $h = \overline{AC}$, y al sustituir en la formula queda de la siguiente manera:

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6u^2$$

Problema 1. 6

Los vértices de un triángulo son los puntos $A(1,8), B(4,1), C(7,1)$ Calcular el área del triángulo.

Solución:

En el caso de los triángulos es muy fácil encontrar el perímetro y la altura, como se puede ver en la figura 9, si consideramos el lado $\overline{BC}$ como base, basta con prolongar los lados para encontrar la medida de la altura, que visualmente es de 7 unidades. O podemos usar la fórmula de Herón de Alejandría, en la que necesitamos conocer las longitudes de los lados, la cual es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde:

$$s = \frac{Perímetro}{2}$$

$a = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{BC}$

Así, usando la fórmula de la distancia entre dos puntos para encontrar la medida de los lados del triángulo, quedando como muestra la *Figura 1-9.*

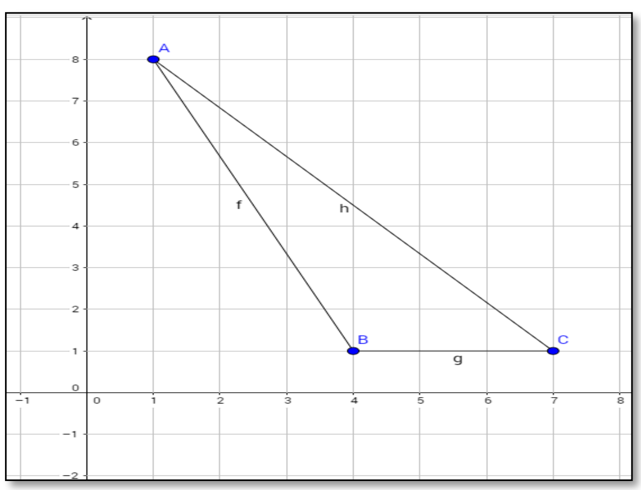

Figura 1-9 Para usar la fórmula de Herón de Aljandría consideremos $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$ y $c = \overline{BC}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(7-1)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(7-4)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$$

De donde obtenemos que el perímetro es

$$P = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{58} + \sqrt{85} + 3 \approx 19.83u$$

Y el área queda como:

$$s = \frac{19.83}{2} = 9.92u$$

$$= 9.92u^2$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9.92\left(9.92-\sqrt{58}\right)\left(9.92-\sqrt{85}\right)(9.92-3)} \approx 10.5u^2$$

Para cualquier polinomio que no sea un triángulo podemos calcular sin ningún Problema su perímetro con la fórmula de distancia entre dos puntos, pero para el área utilizaremos la fórmula de determinantes en la que solo necesitamos conocer las coordenadas de los puntos

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left[(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + \cdots + x_n \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_n + x_n \cdot y_{n-1} + \cdots + x_2 \cdot y_1)\right]\right|$$

Veamos algunos ejemplos de cómo aplicar la formula.

Problema 1. 7

Calcular el perímetro del rombo cuyas coordenadas son $A(3,-1), B(-3,-1), C(0,3)$ y $C(0,3)$.

Solución:

Primero encontremos en el plano cartesiano sus coordenadas como muestra la *Figura 1- 10*:

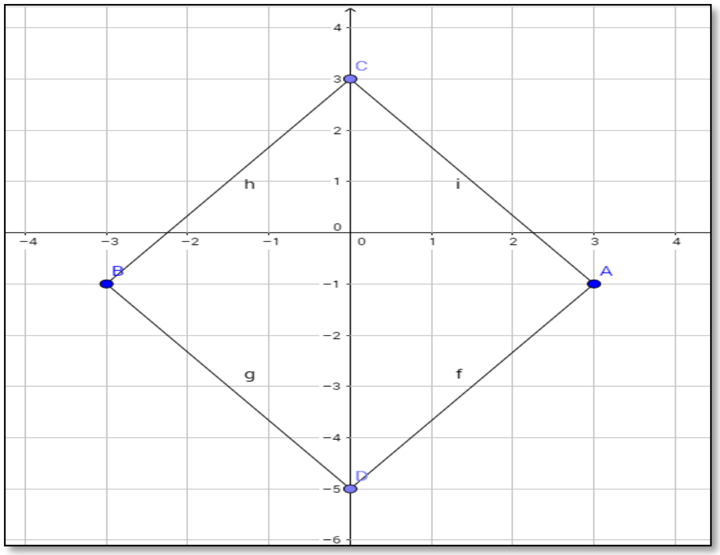

Figura 1-10 Coordenadas de los puntos que forman el rombo, podemos visalizar cuales son las distancias a calcular: AC, CB, BD y DA.

Calcularemos las distancias de $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{DA}$.

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-3)^2+(3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{CB} = \sqrt{(0+3)^2+(3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(0-3)^2+(-5+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(0+3)^2+(-5+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Su perímetro es $P = 5+5+5+5 = 20u$, pero podemos ver que es un polígono regular, es decir, la medida de sus lados es la misma, y si consideramos la *figura 10* como dos triángulos, donde, $\overline{BA} = \sqrt{(-3-3)^2+(-1+1)^2} = \sqrt{(-6)^2+0^2} = \sqrt{36} = 6$, entonces tenemos dos triángulos isósceles que comparten un lado, es más, que la medida de sus lados iguales es la misma, luego son triángulos congruentes, por lo que la medida de sus ángulos es la misma. Así, estamos hablando de un polígono regular, lados y ángulos iguales. De esta forma, pudimos haber calculado su perímetro como $P = 4 * d$, donde d es la medida de uno de sus lados, quedando de la siguiente manera:

$$P = 4 * 5 = 20u$$

Para calcular el área utilizaremos determinantes, quedando de la siguiente manera: No olvidemos, que debemos seguir un orden para colocar los puntos, puede ser el sentido de las manecillas del reloj o el contrario, pero siempre debe seguirse un sentido para colocar los puntos.

$$A = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \\ -3 & -1 \\ 0 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \left[\left((3 \times 3) + (0 \times -1) + (-3 \times -5) + (0 \times -1) \right) - \left((3 \times -5) + (0 \times -1) + (-3 \times 3) + (0 \times -1) \right) \right] \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} [(9 + 0 + 15 + 0) - (-15 + 0 - 9 + 0)] \right| = \left| \frac{1}{2} [(24) - (-24)] \right| = \left| \frac{1}{2} [24 + 24] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} [48] \right| = |24| = 24u^2$$

Así tenemos que el perímetro es de $20u$y el área de $24u^2$

1.7 Colinealidad de los puntos

Se dice que tres puntos son colineales cuando se encuentran sobre la misma recta, es decir, al calcular su área es cero, ya que si fueran un triángulo su altura sería cero y al aplicar la fórmula del área de un triángulo el resultado sería cero.

Así, para demostrar la Colinealidad de 3 puntos solo necesitaremos aplicar la fórmula del área de un polígono y ver que da como resultado cero.

Problema 1. 8

Demostrar que los puntos $A(3,1), B(0,-1) y\ C(-3,-3)$ son puntos colineales.
Solución:

Al graficar podemos ver que pertenecen a la misma recta, cómo podemos ver en la *figura 1-11*.

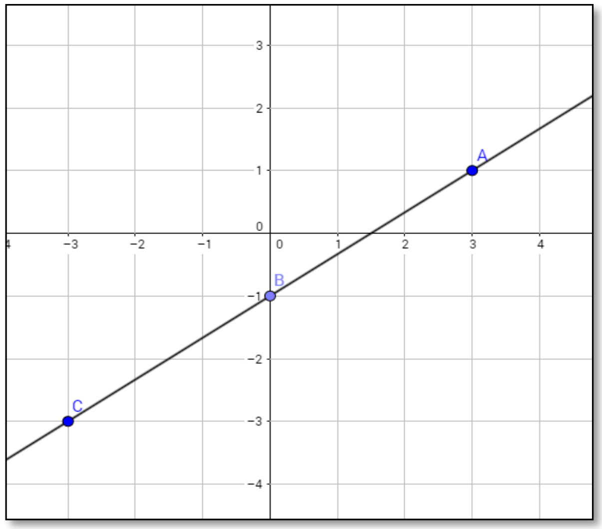

Figura 1-11 Gráfica donde se aprecia que los puntos A, B y C pertenecen a la misma recta, falta demostrarlo matemáticamente.

Aplicaremos la fórmula de determinantes para comprobarlo algebraicamente

$$A = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ -3 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$\left| \frac{1}{2} \left[\big((3 \times -1) + (0 \times -3) + (-3 \times 1) \big) - \big((3 \times -3) + (-3 \times -1) + (0 \times 1) \big) \right] \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} [(-3 + 0 - 3) - (-9 + 3 + 0)] \right| = \left| \frac{1}{2} [(-6) - (-6)] \right| = \left| \frac{1}{2} [-6 + 6] \right| = \left| \frac{1}{2} [0] \right| = 0$$

Es decir, los tres puntos pertenecen a la misma recta.

Problema 1. 9

Determinar la ecuación de los puntos colineales con $A(2{,}3)\ y\ B(-3{,}4)$.

Solución:

Siguiendo la idea de que para los puntos colineales el área es cero, Calculamos el área de los puntos $A(2{,}3), B(-3{,}4)\ y\ C(x, y)$, donde C representa cualquier punto colineal a los anteriores. Más exacto, bastará con encontrar el determinante e igualarlo a cero

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \\ x & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \big((2 \times 4) + (-3 \cdot y) + (x \cdot 3) \big) - \big((2 \cdot y) + (x \cdot 4) + (-3 \times 3) \big) = 0$$

$$= (8 - 3y + 3x) - (2y + 4x - 9) = 0$$

$$= 8 - 3y + 3x - 2y - 4x + 9 = 0$$

$$-x - 5y + 17 = 0$$

Esta es la ecuación de los puntos colineales con A y B

Ejercicios 4:

1. Calcula el perímetro y el área del triángulo formado por las coordenadas $A\ (4, -1), B\ (2, 5)\ , C\ (-4, -3),$
2. Un pentágono tiene las siguientes coordenadas $A(0,0), B(4,0), C(6,3.5\ ),$ $D(4,7),\ \ E(0,7), F(-2,3.5\ )$, calcula su área y perímetro.
3. Las coordenadas de un cuadrado son $C(\ 0,0), A(5,0)\ , B\ (\ 5,5), D(0,5),$ encuentra su área y perímetro.
4. las coordenadas de los vértices de un paralelogramo son $A(\ 0,1), B(3,7), C(\ 4,4),\ \ D(1, 2)$, encuentra su área y perímetro.
5. Comprueba si los siguientes puntos son colineales o forman un triángulo, en caso de ser triángulo encuentra su área y perímetro.
   a. $A(2,5), B(-4, -3), C(0,2)$
   b. $A(0,5), B(3, -4), C(1,2)$
   c. $A(2,4), B(-3, -4), C(-8, -12)$
   d. $A(0,0), B(-1, 2.5), C(-1,5)$
6. Encuentra las coordenadas del tercer punto para que sean colineales:
   a. $A(3,2), B(7,3), C(-1, y)$
   b. $A(1,5), B(1,8), C(x, 9)$

1.8 División de segmentos de recta (razón y punto medio)

1.8.1Punto Medio

Consideremos uno de los ejes coordenados, sea x, localicemos dos puntos cuales quiera, A, B, y sus coordenadas respectivamente x_1 y x_2, como se muestra en la *figura 12*, sea P y su coordenada x_m el punto medio entre ellos, es decir, el punto que tiene exactamente la misma distancia hacia A que hacia B., como se muestra en la *figura 1-12*. Cómo los hemos definido, se intuye que $x_1 < x_m < x_2$.

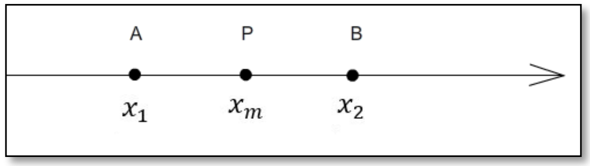

Figura 1-12 En una recta real, el punto P sería el punto medio de los puntos A y B

Cómo lo hemos definido $\overline{AP} = \overline{PB}$

Calculemos las distancias

$$\overline{AP} = |x_1 - x_m|$$

$$\overline{PB} = |x_m - x_2|$$

Como son iguales las distancias tenemos:

$$\overline{AP} = |x_1 - x_m| = |x_m - x_2| = \overline{PB}$$

Así podemos tener:

$$x_1 - x_m = x_m - x_2$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$-x_m - x_m = -x_1 - x_2$$

$$-2\, x_m = -x_1 - x_2$$

$$x_m = \frac{-x_1 - x_2}{-2} = \frac{-1(x_1 + x_2)}{-2}$$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Haciendo la analogía con el eje de las y, tenemos que la coordenada en y del punto medio será

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Así, en un plano cartesiano, quedaría expresado de la siguiente manera:

Sea $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces el punto medio de $\overline{AB}$ es P

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Problema 1. 10

Calcular el punto medio de los puntos $A(1,-1)$, y $B(-5,-4)$.

Solución:

Localizando los puntos en el plano cartesiano como lo muestra la *figura 1-13*:

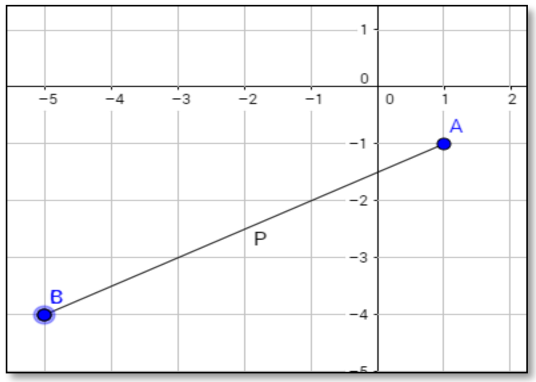

Figura 1-13 Hay que calcular el punto medio P de los puntos A y B

Queremos encontrar las coordenadas del punto medio P, aplicando la formula tenemos:

$$P=\left(\frac{1-5}{2},\frac{-1-4}{2}\right)=\left(\frac{-4}{2},\frac{-5}{2}\right)=(-2,-2.5)$$

Así las coordenadas del punto medio son $P=(-2,-2.5)$

Problema 1. 11

Un segmento tiene el punto medio $P(3,-5)$ y un extremo es $A(2,-4)$, ¿Cuales son las coordenadas del otro extremo B?

Solución:

Por definición tenemos:

$$P=\left(\frac{x_1+\ x_2}{2},\frac{y_1+\ y_2}{2}\right)=\left(\frac{2+\ x_2}{2},\frac{-4+\ y_2}{2}\right)=(3,-5)$$

En consecuencia tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{2+\ x_2}{2}=3$$

$$\frac{-4+\ y_2}{2}=-5$$

Resolviéndolas tenemos:

$$\frac{2+\ x_2}{2}=3$$ $$2+\ x_2=6$$ $$x_2=6-2=4$$	$$\frac{-4+\ y_2}{2}=-5$$ $$-4+\ y_2=-10$$ $$y_2=-10+4=-6$$

Por ello las coordenadas del extremo B son $(4,-6)$

Problema 1. 12

Si los vértices de un triángulo son $A(5,-1)$, $B(1,-2)$ y $C(2,3)$, ¿Cuáles son las longitudes de sus medianas?

Solución:

Por definición, “Una la mediana de un triángulo es un segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto” (E. Moise & L. Downs, 1986)

Llamemos a, b, y c a los puntos medios de los extremos como se muestra en la *figura 1-14*, por lo que buscamos las distancias de los segmentos $\overline{Bb}$, $\overline{Aa}$, $\overline{Cc}$.

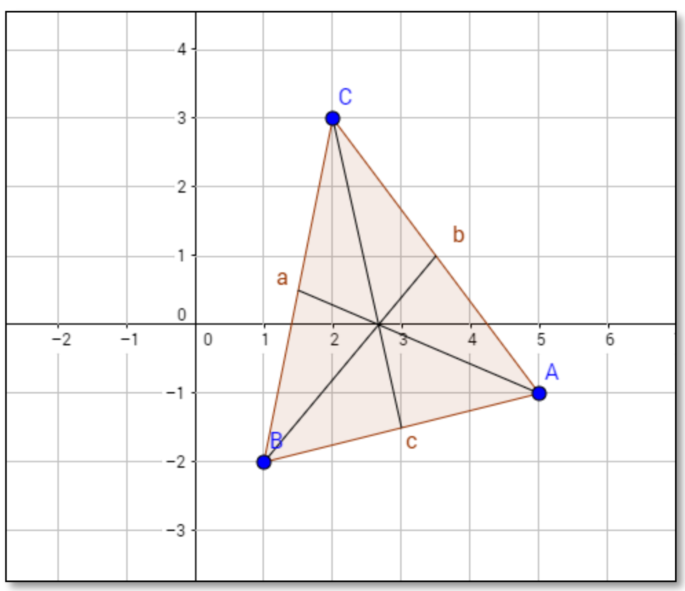

Figura 1-14 Se muestra visualmente las medianas del triángulo ACB formada por los puntos medios de cada lado y el vértice no adyacente a el. Así, como el punto donde se intersectan.

Primero tenemos que encontrar los puntos medios:

$$a=\left(\frac{1+2}{2},\frac{-2+3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$b = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 1\right)$$

$$c = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{-2-1}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{-3}{2}\right) = \left(3, \frac{-3}{2}\right)$$

Y utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos encontramos las longitudes de sus medianas.

$$\overline{Aa} = \sqrt{\left(5-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{58}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{2}u$$

$$\overline{Bb} = \sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}u$$

$$\overline{Cc} = \sqrt{(3-2)^2 + \left(\frac{-3}{2}-3\right)^2} = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{-9}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}u$$

En consecuencia las longitudes de las medianas son $\overline{Aa} == \frac{\sqrt{58}}{2}u$, $\overline{Bb} = \frac{\sqrt{61}}{2}u$, $\overline{Cc} = \frac{\sqrt{85}}{2}u$

1.8.2 Razón entre dos Puntos

Ahora encontraremos la fórmula para el punto P que divide un segmento AB en una razón dada.

Consideremos uno de los ejes coordenados, sea x, localicemos dos puntos cuales quiera, A, B, y sus coordenadas respectivamente x_1 y x_2, como se muestra en la *figura 15*, sea P y su coordenada x_r el punto que divide al segmento AB en la razón r., como se muestra en la *figura1-15*. Se intuye que $x_1 < x_r < x_2$.

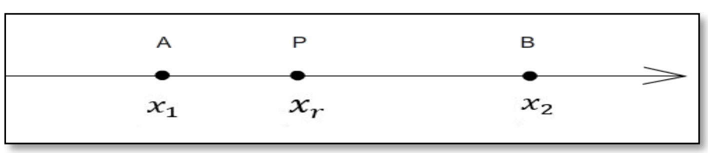

Figura 1-15 En el eje real, el punto P divide al segmento AB en una razó dada.

Que divida al segmento en la razón r, significa:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r$$

Que despejando queda:

$$\overline{AP} = r\overline{PB}$$

Y como ya habíamos visto

$$\overline{AP} = |x_r - x_1|$$

$$\overline{PB} = |x_2 - x_{r1}|$$

Entonces

$$|x_r - x_1| = r|x_2 - x_r|$$

Que por propiedades de valor absoluto podemos igualar

$$x_r - x_1 = r(x_2 - x_r)$$

Que pasando todos los $x_r$de un solo lado de la igualda y despejando queda de la siguiente manera:

$$x_r - x_1 = rx_2 - rx_r$$

$$x_r + rx_r = rx_2 + x_1$$

$$x_r(1 + r) = rx_2 + x_1$$

$$x_r = \frac{rx_2 + x_1}{(1 + r)} = \frac{x_1 + rx_2}{(1 + r)}$$

En el caso de la coordenada en y, es el proceso semejante, quedando

$$y_r = \frac{y_1 + ry_2}{(1 + r)}$$

Veamos la *figura1-16*

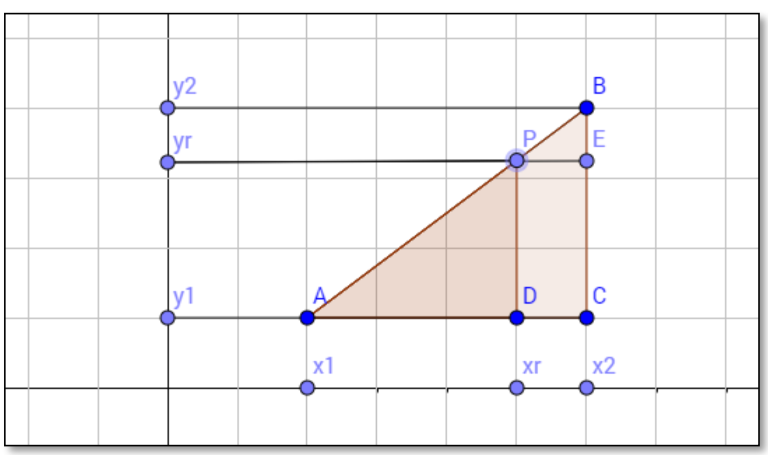

Figura 1-16 Construcción para calcular en un sistema coordenado la razón en que divide el punto P al segmento AB.

Tenemos dos triángulos, ΔABC y ΔAPD, ambos triángulos comparten el ángulo A y ambos tienen un ángulo rectángulo, y por propiedades de los triángulos ambos triángulos son semejantes (propiedad ángulo, ángulo, ángulo), por lo que tenemos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r \qquad \text{y} \qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = r$$

Luego los triángulos ΔPBE y ΔAPD son rectángulos, con $\overline{PD}$ paralelo a $\overline{BE}$, $\overline{PE}$ paralelo a $\overline{AD}$, donde los triángulos son semejantes y obtenemos

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = r$$

Y como $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = r$ corresponde a nuestro análisis del eje de las x, y $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = r$ al del eje de las y, tenemos que la formula para encontrar el punto que divide a un segmento en una razón r dada es:

$$P = \left(\frac{x_1 + rx_2}{(1+r)}, \frac{y_1 + ry_2}{(1+r)}\right)$$

Ahora bien, si lo que queremos es encontrar la razón en la que un punto divide a un segmento dado tendremos que despejar r de cualquiera de las dos coordenadas. Sea la fórmula para x,

$$x_r = \frac{x_1 + rx_2}{(1+r)}$$

$$x_r(1+r) = x_1 + rx_2$$

$$x_r + rx_r = x_1 + rx_2$$

$$rx_r - rx_2 = x_1 - x_r$$

$$r(x_r - x_2) = x_1 - x_r$$

$$r = \frac{x_1 - x_r}{x_r - x_2}$$

Que si utilizáramos y tendríamos:

$$r = \frac{y_1 - y_r}{y_r - y_2}$$

Veamos ejemplos de ambos casos:

Problema 1. 13

Sea el punto $A(-5,3)$ y $B(6,1)$, encuentra las coordenadas del punto P, sabiendo que la razón $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r$ es igual a:

a) $r = 1$

b) $r = 2$

c) $r = -2$

Solución:

Cuándo $r = 1$, y aplicando la fórmula para encontrar el punto tenemos

$$P = \left(\frac{-5 + (1)(6)}{(1 + 1)}, \frac{3 + (1)(1)}{(1 + 1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Podemos ver fácilmente con este ejemplo que cuando r=1, estamos hablando de obtener el punto medio.

Cuando $r = 2$, tenemos

$$P = \left(\frac{-5 + (2)(6)}{(1 + 2)}, \frac{3 + (2)(1)}{(1 + 2)}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Cuando $r = -2$ tenemos:

$$P = \left(\frac{-5 + (-2)(6)}{(1 - 2)}, \frac{3 + (-2)(1)}{(1 - 2)}\right) = \left(\frac{-17}{-1}, \frac{1}{-1}\right) = (17, -1)$$

Que la razón sea negativa significa que el punto no se encuentra sobre el segmento AB, sino que se encuentra fuera de él, como se puede apreciar en la *figura 1- 17* de este último ejemplo.

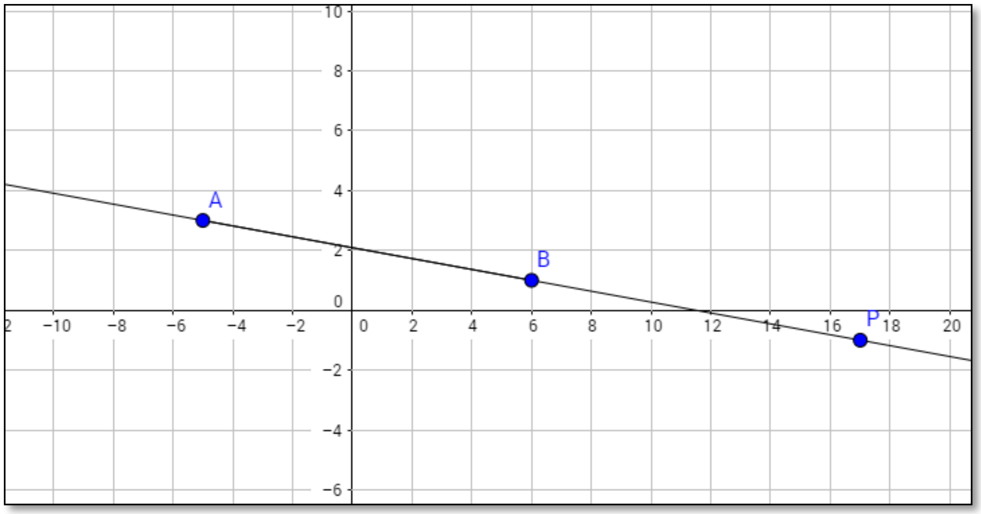

Figura 1-17 El punto P se encuentra fuera del segmento AB, por lo que la razón es negativa.

Problema 1. 14

Encontrar las coordenadas de los dos puntos que trisecan al segmento cuyos extremos son $A(2,-3)$, y $B(8,9)$

Solución:

Primero hay que entender el concepto trisecar (dividir en tres partes iguales), consideremos el segmento $\overline{AB}$ como se muestra en la *figura 1- 18*, y los puntos C y D que los dividen en tres partes iguales, si encontramos las razones en que dividen cada uno de los puntos C y D al segmento tendremos:

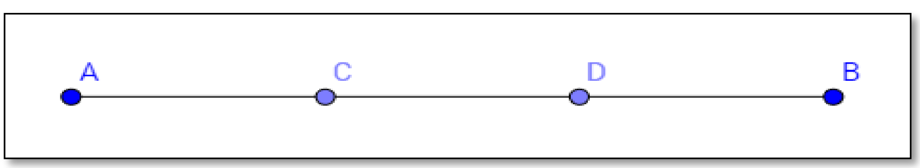

Figura 1-18 Se puede apreciar que los puntos C y D trisecan al segmento AB, es decir, lo divide en tres partes iguales.

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2} \qquad r = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{2}{1} = 2$$

Donde C se encuentra con $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$

$A(2,-3)$, y $B(8,9)$

$$C=\left(\frac{2+(\frac{1}{2})(8)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)},\frac{-3+(\frac{1}{2})(9)}{\left(1+(\frac{1}{2})\right)}\right)=\left(\frac{6}{\frac{3}{2}},\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)=(4,1)$$

Y D se encuentra con $r=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=2$

$$D=\left(\frac{2+(2)(8)}{(1+2)},\frac{-3+(2)(9)}{(1+2)}\right)=\left(\frac{18}{3},\frac{15}{3}\right)=(6,5)$$

Así los puntos que buscamos son $C(12,3)$ y $D(6,5)$ como se muestra en la *figura 1-19*

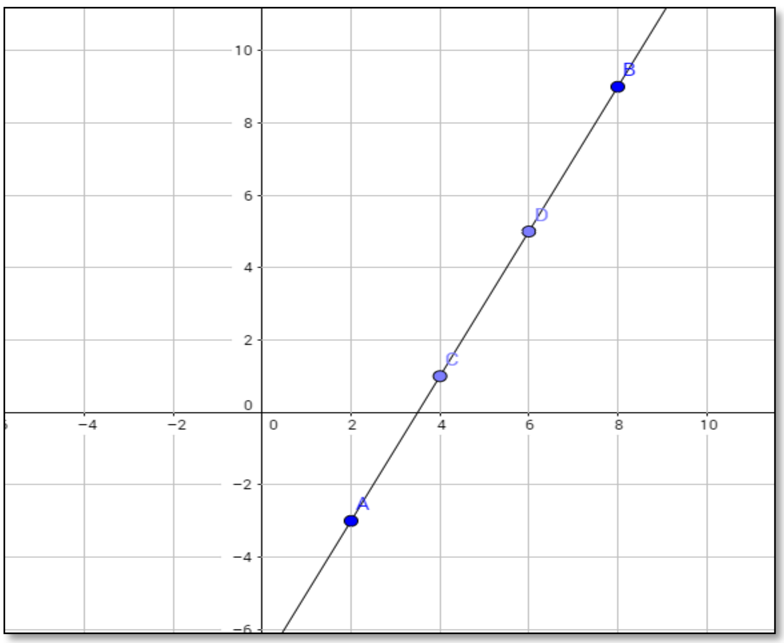

Figura 1-19 Los puntos C y D trisectan al segmento AB, es decir, lo dividen en tres partes iguales.

Problema 1. 15

Determinar la razón en que divide el punto C al segmento $\overline{AB}$, si sus coordenadas son $A(1,6)$, $B(8,-1)$ $C(3,4)$.

Solución:

Veamos la *Figura 1- 20* para darnos una idea de la razón que estamos buscando:

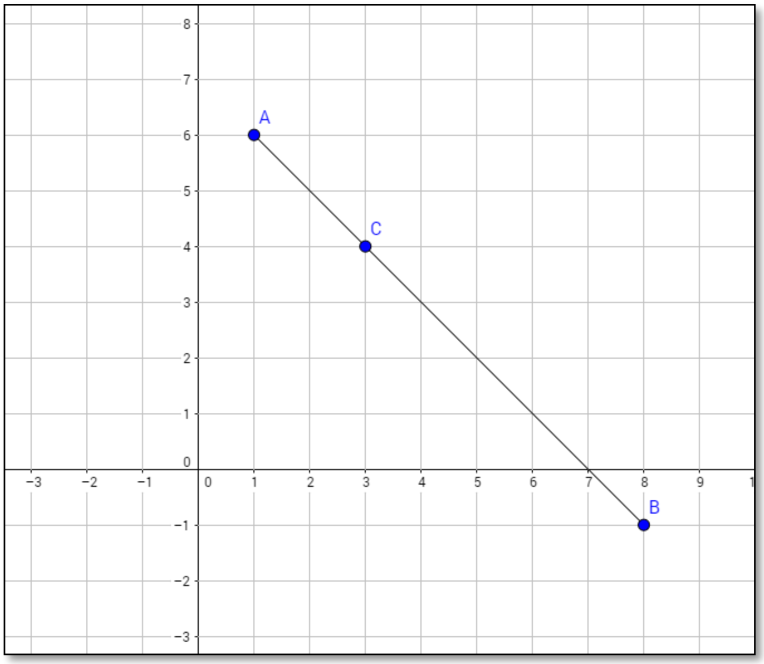

Figura 1-20 Se busca la razón en que el punto C divide al segmento AB.

Aplicaremos la fórmula

$$r = \frac{x_1 - x_r}{x_r - x_2}$$

$$r = \frac{1-3}{3-8} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Es decir, la distancia de $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{2}{5}$.

Ejercicios 5:

1. Encuentra el punto medio de los siguientes pares de números:
   a) $A(0,0)$, $B(-4,2)$
   b) $A(1,-6)$, $B(-3,-2)$
   c) $A(-2,5)$, $B(3,8)$
2. Encuentra las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{AB}$ en las razones dadas:
   a) $A(0,0)$, $B(-4,6)$ y $r = \frac{1}{4}$
   b) $A(-2,5)$, $B(2,-4)$ y $r = \frac{2}{3}$
   c) $A(1,4)$, $B(-4,2)$ y $r = -2$

3. Para cada segmento, encuentra los puntos de trisección si los extremos son:
   a) $A(1,2)$, $B(4,1)$
   b) $C(2,3)$, $D(0,0)$
4. Los vértices del triángulo ΔABC son $A(4,0)$, $B(2,1) y\, C(1,5)$, ¿Cuáles son las longitudes de sus medianas?
5. Los extremos de un segmento $\overline{AB}$ son $A(x,y)$ y $B(-1,3)$, sí, el punto medio es $C(1,5)$, encuentra las coordenadas de A.
6. Da las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $\overline{AB}$ en 5 partes iguales, $A(-5,1)$, $B(5,6)$.
7. Dados los puntos $A(5,4)$ y $B(-1,7)$, hallar un punto P en el segmento $\overline{AB}$ tal que la distancia de $\overline{BP}$ sea la mitad de la distancia de $\overline{PA}$.
8. ¿En qué razón divide el punto P al segmento $\overline{AB}$, si sus coordenadas son $A(-1,3)$ y $B(6,5)$ y $P(2.5,4)$

1.9 Ecuación de un lugar geométrico

Un lugar geométrico en el plano cartesiano es el conjunto de los puntos (x,y) que satisfacen una misma propiedad o condición geométrica dada. Dicha condición puede ser expresada por medio de una ecuación de dos variables, usemos la notación de función para definirlo $f(x,y)=0$. Cuya solución será los puntos en el plano cartesiano (x,y) que forman el lugar geométrico.

Problema 1. 16

Encontrar el lugar geométrico de todos los puntos (x,y) que tienen abscisa $x=1$, su gráfica sería todos los puntos que se encuentran en la recta

Solución

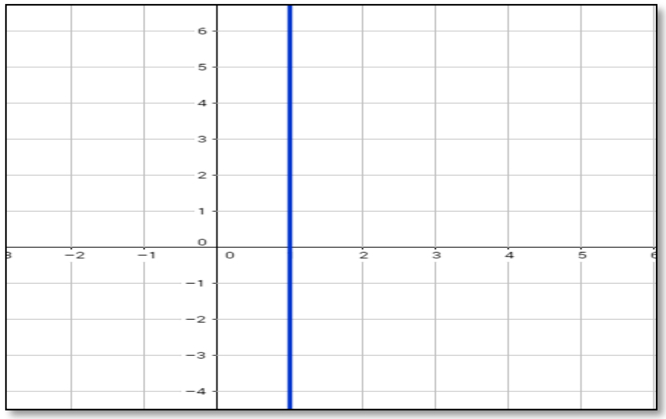

Figura 1-21 Todos los puntos que se encuentran en la recta azul representan el lugar geométrico de los puntos (x,y) que tiene abscisa x=1

En la *figura 1- 21* podemos observar que para todos los puntos que se encuentran sobre la recta azul, su abscisa es 1, por lo que es la gráfica de todos los puntos que cumplen esta condición.

Así, podemos tener varias condiciones y limitar cuál sería su lugar geométrico.

Problema 1. 17

El lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que $x < 4$

Solución

Quedan representados por la gráfica de la *figura 1- 22*

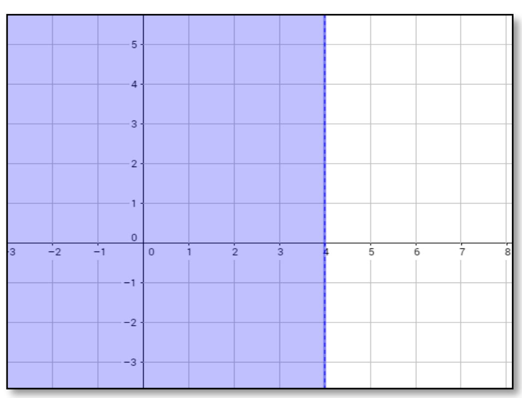

Figura 1-22 Gráfica de los puntos (x, y) tales que x<4

Donde toda el área azul representa los puntos que cumplen la condición indicada y la recta está punteada porque son los puntos donde $x = 4$, de manera que no deben pertenecer al lugar geométrico, pero todos los que se encuentran del lado izquierdo sí.

Problema 1. 18

Encontrar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos (x, y) cuya distancia al origen sea 2

Solución

Sean los puntos $A(x, y)$ que cumplen con la condición dada, el origen tiene coordenadas $O(0,0)$, usando la fórmula de distancia entre dos puntos calculemos su distancia:

$$\overline{AO} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2$$

Elevemos al cuadrado la igualdad

$$x^2 + y^2 = 4$$

Problema 1. 19

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano que equidistan de los puntos $A(2,1)$ y $B(-4,2)$

Solución

El término equidistar se refiere a que la distancia al punto A es la misma que la distancia al punto B, por eso aplicaremos la fórmula de distancia para encontrar $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ e igualarlas.

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$$

Elevemos al cuadrado para eliminar las raíces:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=(x+4)^2+(y-2)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado tenemos:

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2+8x+16+y^2-4y+4$$

Pasando todos los términos de un solo lado tendríamos:

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1-x^2-8x-16-y^2+4y-4=0$$

Simplificando tendremos:

$$-12x+2y-15=0$$

Que es la ecuación buscada.

Ahora bien, para obtener la gráfica de la ecuación de un lugar geométrico vamos a analizar sus propiedades fundamentales, es decir, si tienen intersección con alguno de los ejes, si es simétrica, y con respecto a quién, al origen, al eje x, al eje y; y por último encontraremos los valores para los cuales la curva está definida y si tiene asíntotas.

1.10 Intersección con los ejes

Cuando hablamos de la intersección de los ejes, estamos hablando de la intersección con el eje de las x y la intersección con el eje de las y.

1.10.1 Intersección con el eje x.

Todos los puntos que se encuentran en el eje de las x tienen ordenada igual a cero, es decir, las coordenadas de los puntos del eje x son $(x, 0)$, expresando como ecuación sería $y=0$. Por tanto, algebraicamente tendríamos que encontrar los puntos que cumplen la condición del lugar geométrico y además tienen coordenada $y=0$. Prácticamente solo tendríamos que hacer $y=0$ en la ecuación del lugar geométrico.

1.10.2 Intersección con el eje y.

Análogamente, los puntos que se encuentran en el eje y, son los puntos cuya abscisa es cero, y bastaría con sustituir en la ecuación $x = 0$.

Problema 1. 20.

Encuentra si, el lugar geométrico definido por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ tiene intersección con los ejes coordenados.

Solución

Primero encontraremos la intersección con el eje de las x, para ello haremos $y = 0$.

$$x^2 + (0)^2 = 4$$

Despejando tendremos

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Es decir, cruza al eje de las x en los puntos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Para encontrar la intersección con el eje de las y haremos $x = 0$

$$(0)^2 + y^2 = 4$$

Siguiendo el proceso análogo al de x encontramos que la intersección con el eje de las y son los puntos $(0, -2)$ y $(0, -2)$.

Así, los puntos de intersección con los ejes se muestran en la *figura 1-23.*

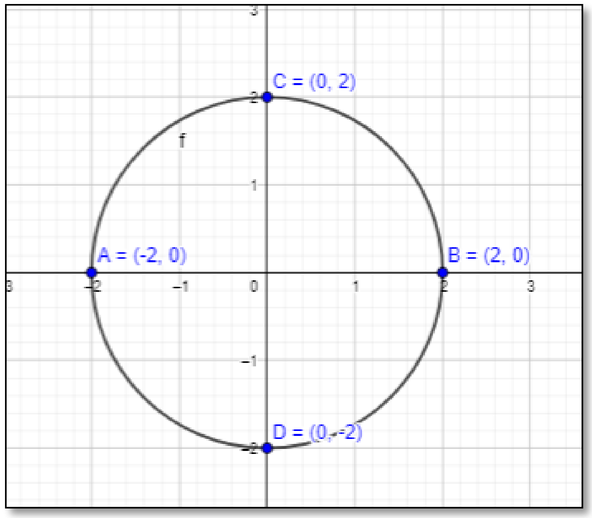

Figura 1-23 Como es una circunferencia con centro en el origen, podemos ver que va a intersectar a los ejes coordenados en 4 puntos: A, B, C y D.

Problema 1. 21.

Encuentra si, el lugar geométrico definido por la ecuación $x^2 - 4y = 0$ tiene intersección con los ejes coordenados.

Solución

Encontremos la intersección con x, sea $y = 0$.

$$x^2 - 4(0) = 0$$

Despejando tendremos

$$x^2 - 0 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{0} = 0$$

Por ello, solo cruza al eje de las x en un solo punto (0,0), es decir, cruza en el origen. Por lo tanto, el cruce con el eje de las y también es el origen. Comprobémoslo haciendo x=0.

$$(0)^2 - 4y = 0$$

Despejando tenemos

$$-4y = 0$$

$$y = \frac{0}{-4} = 0$$

$$y = 0$$

Es decir, el origen $(0,0)$, la gráfica solo cruza a los ejes coordenados en el origen como muestra la *figura 1- 24*.

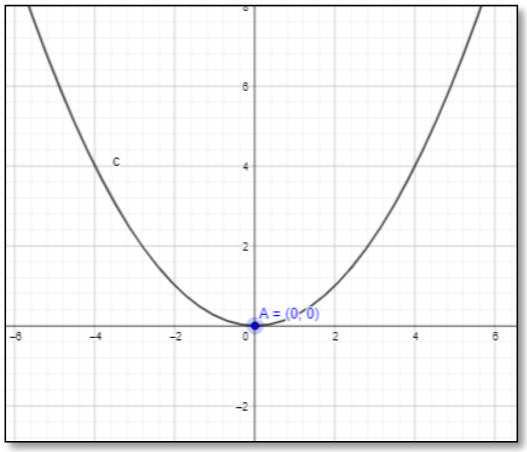

Figura 1-24 Se puede apreciar que la gráfica solo cruza en un punto (el origen) a los ejes coordenados.

Problema 1. 22.

Encuentra la intersección de los ejes coordenados del lugar geométrico definido por la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x + y - 6 = 0$

Solución

Hagamos $x = 0$ para encontrar la intersección con el eje de las y.

$$(0)^3 - 6(0)^2 + 11(0) + y - 6 = 0$$

$$y - 6 = 0$$

Despejando

$$y = 6$$

Es decir, el punto de intersección con el eje de las y es $(0,6)$

Sea $y = 0$ para encontrar la intersección con el eje de las x.

$$x^3 - 6x^2 + 11x + (0) - 6 = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Factorizando tenemos:

$$(x-3)(x-2)(x-1)=0$$

Por esta razón los puntos que buscamos son $x=3$, $x=2$ y $x=1$ que determinan las intersecciones con el eje x. Los puntos de la intersección se muestran en la *figura 1- 25*.

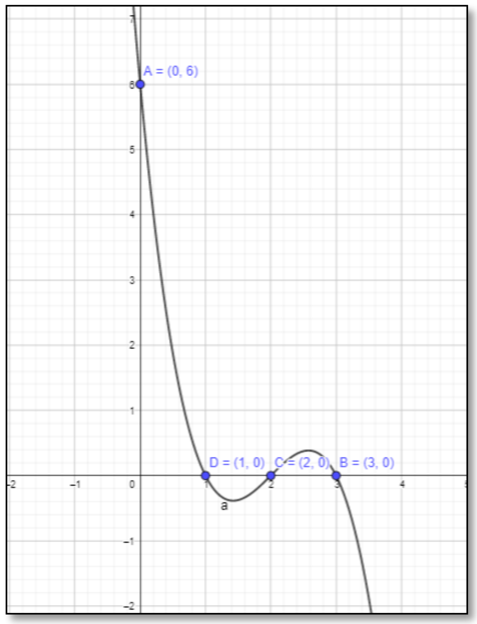

Figura 1-25 La figura muestra los 3 puntos que intersectan el eje de las x, y el punto que cruza el eje de las y.

1.10.3 Simetría

Tenemos dos tipos de simetrías, con respecto a un punto y con respecto a una recta.

El punto A es simétrico a B con respecto a otro punto C, cuando este se encuentra en el punto medio del segmento que une a $\overline{AB}$. Al punto C se le llama centro de simetría. A este tipo de simetría se le llama simetría radial.

Se le llama simetría axial cuando el centro de simetría es una recta, y se le llama eje de simetría. Se explica como: “Dos puntos son simétricos con respecto a una recta, cuando ésta es perpendicular en el punto medio de la recta que une dichos puntos” (Landaverde, 1977)

De esta manera tenemos dos tipos de simetrías en el plano cartesiano, Simetría radial, cuando es simétrico con respecto al origen, es decir, el centro de simetría es $(0,0)$. Simetría axial, cuando el eje de simetría es uno de los ejes coordenados, ya sea x o y.

Analicemos ambos casos:

Empecemos cuando el eje de simetría es el eje de las x, analicemos la *figura 1- 26*:

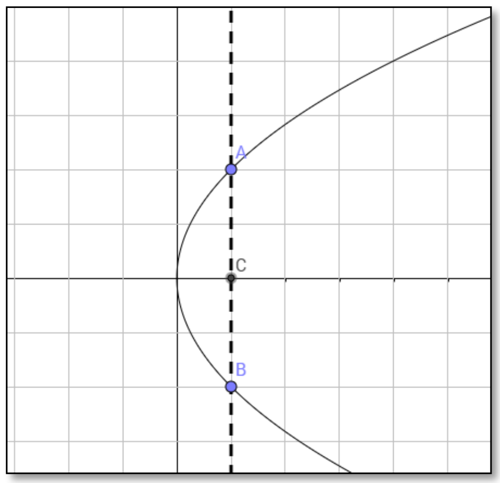

Figura 1-26 Se puede apreciar que la parábola es simétrica con respecto al eje de las x.

.El eje de simetría es el eje x, y la recta punteada representa la recta perpendicular a la que se refiere la definición, debido a lo cual, la distancia de $\overline{AC}$ es la misma que de $\overline{CB}$. Sí analizamos las coordenadas de los puntos veremos que comparten la abscisa, pero su ordenada es la misma pero con signo diferente. Así, un método para saber si una ecuación es simétrica con respecto al eje x será sustituir en la ecuación y por $-y$ y si la ecuación no se altera estaremos hablando de simetría con respecto al eje de las x.

Para el caso de simetría con respecto al eje de las y analicemos la *figura 1- 27*.

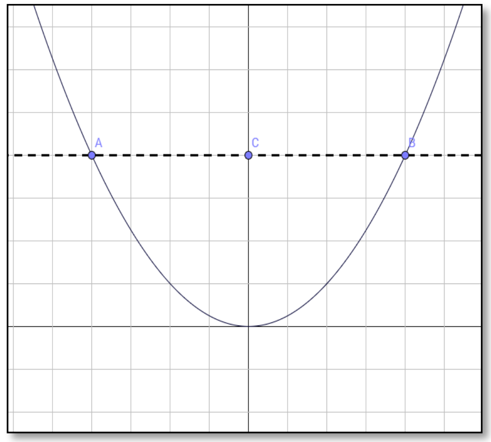

Figura 1-27 Se aprecia que la parábola es simétrica con respecto al eje de las y

En ella vemos que la distancia de $\overline{AC}$ es la misma que de $\overline{CB}$, de modo que el eje de las y es el eje de simetría, y analizando las coordenadas, vemos que comparten la ordenada y su abscisa es la misma pero de signo contrario, por lo que nuevamente el método para encontrar la simetría con respecto a y es sustituir x por $-x$ y si la ecuación es la misma será simétrico con respecto a y.

Ahora analicemos la figura 1- 28

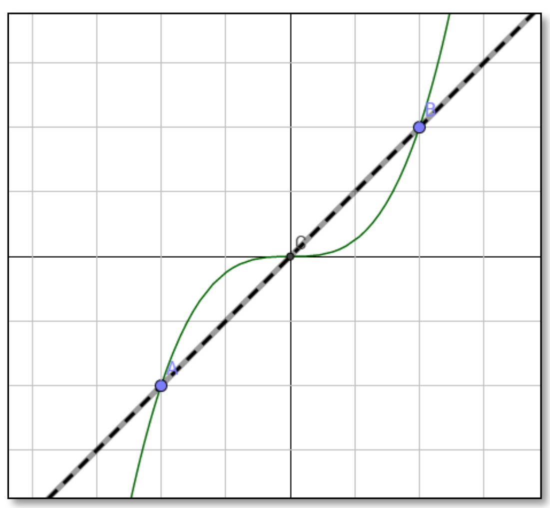

Figura 1-28 Es un ejemplo de simetría radial con respecto al origen.

En ella vemos una simetría radial con respecto al origen $(0,0)$, y analizando sus coordenadas encontramos las coordenadas de $A(-x,-y)$ y $B(x,y)$, son iguales pero de signo contrario tanto para x como para y. Por lo que el método para encontrar la simetría con respecto al origen será sustituir x por $-x$ y y por $-y$, si la ecuación no se altera será una simetría radial con respecto al origen.

Problema 1. 23

Analiza si la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ es simétrica con respecto a algún eje o al origen.

Solución

Cambiemos x por $-x$

$$(-x)^2 + y^2 = 4$$

Pero $(-x)^2 = x^2$, de manera que tenemos

$$x^2 + y^2 = 4$$

Luego es simétrico con respecto a y

Cambiemos y por –y

$$x^2 + (-y)^2 = 4$$

Y nuevamente $(-y)^2 = y^2$, en consecuencia tenemos

$$x^2 + y^2 = 4$$

Así que, es simétrico con respecto a x

Y como también lo fue con respecto a y, tenemos que es simétrico con respecto al origen ya que al cambiar x por $-x$ y y por $-y$ nos queda la misma ecuación. Lo podemos ver en la *figura 1- 23* del Problema 1. 20.

Problema 1. 24

Analiza si la ecuación $x^2 - 4y = 0$ es simétrica con respecto a algún eje o al origen.

Solución

Cambiemos x por $-x$

$$(-x)^2 - 4y = 0$$

Nuevamente $(-x)^2 = x^2$, por eso tenemos

$$x^2 - 4y = 0$$

Cómo es la misma, es simétrico con respecto a y.

Cambiemos y por –y

$$x^2 - 4(-y) = 0$$

Que nos queda

$$x^2 + 4y = 0$$

Que no es la misma ecuación, por ello no es simétrico con respecto a x.

Al cambiar x por $-x$ y y por $-y$

$$(-x)^2 + 4(-y) = 0$$

$$x^2 - 4y = 0$$

Donde concluimos que no es simétrico con respecto al origen. Cómo se muestra en la *figura 24* del Problema 1. 21

Problema 1. 25

Analiza si la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x + y - 6 = 0$ es simétrica con respecto a algún eje o al origen.

Solución:

Cambiemos x por $-x$,

$$(-x)^3 - 6(-x)^2 + 11(-x) + y - 6 = 0$$

Que nos queda

$$-x^3 - 6x^2 - 11x + y - 6 = 0$$

Por tanto no es simétrico con respecto a y.

Cambiemos y por $-y$

$$x^3 - 6x^2 + 11x + (-y) - 6 = 0$$

Nos queda:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - y - 6 = 0$$

Que no es simétrica con respecto a x.

Al cambiar x por $-x$ y y por $-y$

$$(-x)^3 - 6(-x)^2 + 11(-x) + (-y) - 6 = 0$$

Quedando

$$-x^3 - 6x^2 - 11x - y - 6 = 0$$

Que no es igual a la original, de donde concluimos que no es simétrica con respecto al origen. Cómo se muestra en la *figura 1-25* del Problema 1. 22.

1.11 Extensión de la curva

Por este término entenderemos los puntos para los cuales la gráfica está definida, los cuales pueden ser una curva cerrada o una curva infinita. Para ello encontramos los puntos para los cuales la curva está definida tanto en x, como en y,. Para la extensión de x despejamos y y analizamos el resultado; para la extensión de y despejamos x y analizamos el resultado, es decir, buscamos los puntos para los cuales son válidas las ecuaciones obtenidas.

Problema 1. 26

Encuentra la extensión de la gráfica $x + 2y = 4$

Solución:

Despejemos y de la ecuación

$$y = \frac{4 - x}{2} = \frac{4}{2} - \frac{x}{2} = 2 - \frac{x}{2}$$

Y es un polinomio de primer grado, para el cual a cada valor de x le corresponde un valor de y, luego su extensión es infinita como los números reales, tanto para x, como para y.

Problema 1. 27

Encuentra la extensión de $x^2 + y^2 = 4$

Solución

Despejemos y

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Al analizarla recordamos que la raíz no tiene sentido para los números negativos, debido a lo cual solo es válida si $4 - x^2 \geq 0$, que despejando tenemos:

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$4 \geq x^2$$

De donde obtenemos

$$2 \geq |x|$$

Donde por definición de valor absoluto tenemos que $x \leq 2$ y $x \geq -2$, es decir, la extensión de la curva es $-2 \geq x \geq 2$.

Ahora despejemos x para ver la extensión de y, nos queda de la siguiente manera

$$x = \sqrt{4 - y^2}$$

Que es análoga a la de y, en consecuencia la extensión de y es la misma que la de x, los reales entre $-2 \geq y \geq 2$

Problema 1. 28

Encontrar la extensión de la ecuación $x^2 - 4y = 0$

Solución

Despejemos y de la ecuación

$$-4y = -x^2$$

$$y = \frac{-x^2}{-4} = \frac{x^2}{4}$$

Que para cada valor de x existe un único valor de y, es decir, que la extensión de las x es todos los números reales.

Despejemos x de la ecuación

$$-4y = -x^2$$

$$4y = x^2$$

$$x = \sqrt{4y}$$

Que solamente tiene sentido si $4y \geq 0$, es decir $y \geq \frac{0}{4} = 0$, por lo tanto, la extensión de y es $y \geq 0$.

1.12 Asíntotas

Son rectas que al tomar un punto de la curva y alejarnos indefinidamente de su origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero.

Una asíntota solo existe si al despejar x o y de la ecuación queda expresada como fracción. Para obtener la asíntota basta con igualar a cero el denominador, de esta manera tenemos en términos de x la asíntota horizontal y en términos de y la vertical.

Problema 1. 29

Encontrar si la función $xy = 1$ tiene asíntotas

Solución

$$xy = 1$$

Despejemos y

$$y = \frac{1}{x}$$

La cual se indetermina cuando $x = 0$, por lo tanto, esta es su asíntota horizontal.

Despejemos x

$$x = \frac{1}{y}$$

Y tenemos la misma situación, se indetermina cuando $y = 0$, por lo que, su asíntota vertical es $y = 0$. Cómo se muestra en la *figura 1- 29*, las asíntotas son los ejes coordenados.

Figura 1-29 Se muestra que las asíntotas de la curva son los ejes coordenados.

Problema 1. 30

Determinar las asíntotas de la ecuación $2x - yx - 3y = 0$

Solución

Despejemos x

$$2x - yx = 3y$$

$$x(2-y)=3y$$

$$x=\frac{3y}{2-y}$$

Entonces, su asíntota vertical será $2-y=0,$ es decir, $y=2$

Despejemos y

$$2x-yx-3y=0$$

$$-yx-3y=-2x$$

$$y(x+3)=2x$$

$$y=\frac{2x}{x+3}$$

Por lo que la asíntota será $x+3=0$, es decir, x=-3.

La *figura 1-30* muestra las asíntotas horizontales y verticales de la función.

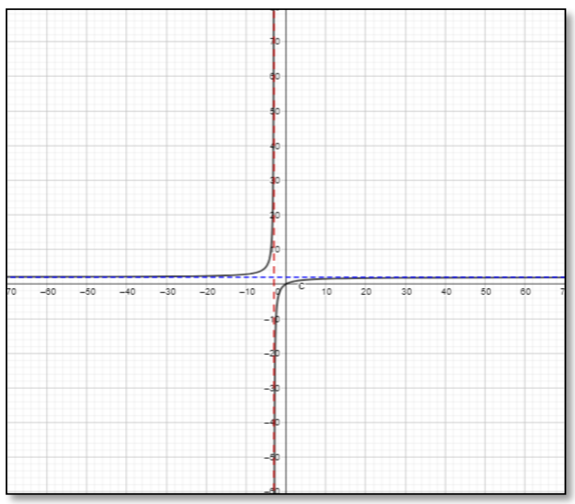

Figura 1-30 Se muestran las asíntotas de la hipérbola x=-3 y y=2

1.13 Trazo de la gráfica

Ahora bien, ya tenemos los elementos principales para poder realizar el trazo de una gráfica dada su ecuación.

Los pasos son los siguientes:

1. Encontrar las intersecciones con los ejes
2. Simetría, como se comporta

3. Su extensión, nos dirá que valores podemos tomar para tabular
4. Asíntotas, si existen rectas a las que se aproxime.
5. Tabular
6. Graficar la información obtenida

Problema 1. 31

Realiza el trazo de la gráfica $x^2 - 4y = 0$

Solución

En el Problema 1. 21 encontramos que sus intersecciones con los ejes son únicamente en el origen

En el Problema 1. 24 vimos que únicamente es simétrico al eje de las y, lo cual apreciaremos en la tabulación

En el Problema 1. 28 obtuvimos que su extensión en el eje de las x es todos los números reales, pero del eje de las y solo las $y \geq 0$, lo cual se apreciará a la hora de tabular.

Cómo al despejar x y y no se obtienen expresiones fraccionarias no tiene asíntotas.

Tabulemos considerando la información obtenida, solo tomaremos valores positivos de x, ya es simétrica con respecto a y, también sabemos que nuestros resultados solo estarán en los 2 primeros cuadrantes, ya que y siempre será $y \geq 0$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16	20.25	25	30.25

Graficando tenemos la *figura 1- 31*

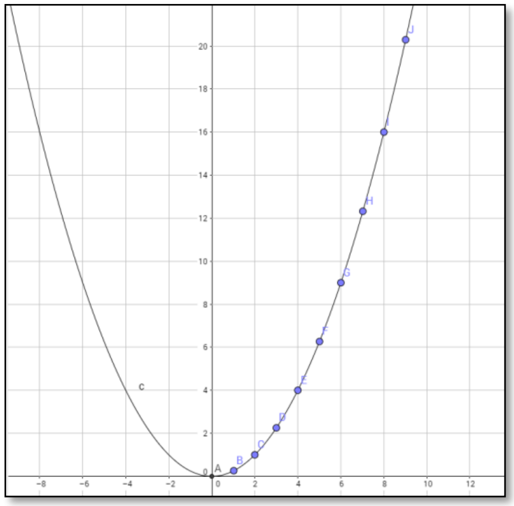

Figura 1-31 Gráfica de la ecuación de la parábola $x^2 - 4y = 0$

Los puntos marcados, son los obtenidos por la tabulación, el resto se obtuvo con la definición de simetría, es decir, al punto $x = -2$, le dimos el mismo valor que $x = 2$, y así sucesivamente. Se puede apreciar que solo se utilizaron los dos primeros cuadrantes, como se previó al ser $y \geq 0$.

Problema 1. 32

Realiza el trazo de la gráfica $x^2 + y^2 = 4$

Solución

Del Problema 1. 20 tenemos los cruces con x y y, es decir los puntos $(-2{,}0)$, $(2{,}0)$ y $(0, -2)$, $(0, -2)$.

Del Problema 1. 22 sabemos que es simétrico al origen, al eje x y al eje y.

Del Problema 1. 27 su extensión en x es $-2 \leq x \leq 2$ y de y es $-2 \leq y \leq 2$

Al despejar x y y notamos que no se obtiene una expresión fraccionaria, luego entonces no hay asíntotas.

Tomando en cuenta esta información solamente tomaremos valores de x entre 0 y 2, ya que todos los demás se obtendrán por simetría radial.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
y	2	1.984	1.936	1.854	1.732	1.561	1.323	0.968	0.000

Quedado la gráfica como muestra la figura 1- 32.

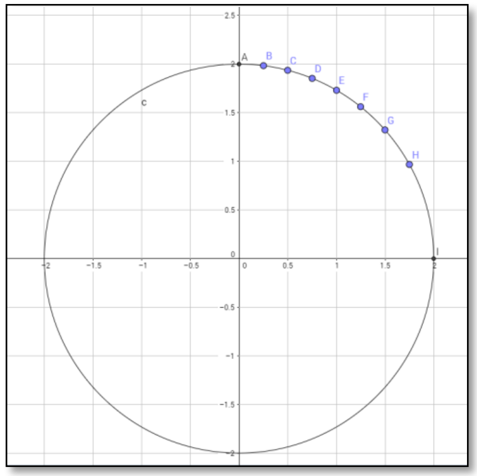

Figura 1-32 Gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

Donde los puntos A e I representan las intersecciones con los ejes en el primer cuadrante, y los puntos de los demás cuadrantes se obtuvieron por simetría.

Problema 1. 33

Realiza el trazo de la gráfica $xy - 3y - 5x = 0$

Solución

Empecemos por encontrar la intersección con x, haciendo $y = 0$

$$x(0) - 3(0) - 5x = 0$$

$$-5x = 0$$

$$x = \frac{0}{-5} = 0$$

Es decir, cruza el origen $(0,0)$

Encontremos la intersección con y, haciendo $x = 0$

$$(0)y - 3y - 5(0) = 0$$

$$-3y = 0$$

$$y = \frac{0}{-3} = 0$$

Sólo cruza al origen.

Encontremos si es simétrico con respecto al eje de las x, sustituyendo y por $-y$

$$x(-y) - 3(-y) - 5x = 0$$

$$-xy + 3y - 5x = 0$$

Por ello no es simétrica con respecto a x.

Sustituyendo x por $-x$ encontramos la simetría con respecto al eje y.

$$(-x)y - 3y - 5(-x) = 0$$

$$-xy - 3y + 5x = 0$$

Luego no es simétrica con respecto a y

Cambiemos x por $-x$, y y por $-y$ para ver si es simétrico con respecto al origen

$$(-x)(-y) - 3(-y) - 5(-x) = 0$$

$$xy + 3y + 5x = 0$$

De manera que no es simétrica con respecto al origen.

Obtengamos su extensión y asíntotas

Despejando x, tenemos

$$xy - 5x = -3y$$

$$x(y - 5) = -3y$$

$$x = \frac{-3y}{y - 5}$$

Igualamos a cero el denominador: $y - 5 = 0$, tenemos que $y = 5$, es decir, existe para todos los reales menos el número 5, y su asíntota vertical es y =5.

Despejemos y

$$xy - 3y - 5x = 0$$

$$xy - 3y = 5x$$

$$y(x - 3) = 5x$$

$$y = \frac{5x}{x - 3}$$

Igualando a cero el denominador tenemos $x - 3 = 0$, $x = 3$, que es la asíntota horizontal, y nos indica además que existe x para todo número real excepto para 3. Es decir, para tabular tomaremos puntos que se encuentren a la derecha y a la izquierda de 3. Trazaremos las asíntotas para saber hacia dónde se acerca la curva.

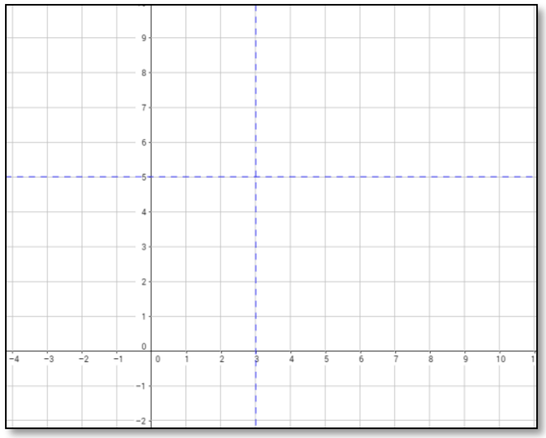

Figura 1-33 Asíntotas de la curva $xy - 3y - 5x = 0$

En la *figura1- 33* podemos ver las asíntotas punteadas y de color azul.

Por definición de asíntota sabemos que entre más nos acerquemos a 3 esté tenderá a infinito y entre más nos alejemos de él tenderá a 5.

Así que tomemos los siguientes valores para tabular

	A	B	C	D	E	F	G		H	I	J	K	L
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2.86	2.50	2.00	1.25	0.00	-2.50	-10.00	no existe	20.00	12.50	10.00	8.75	8.00

Quedando la gráfica como muestra la *figura 34.*

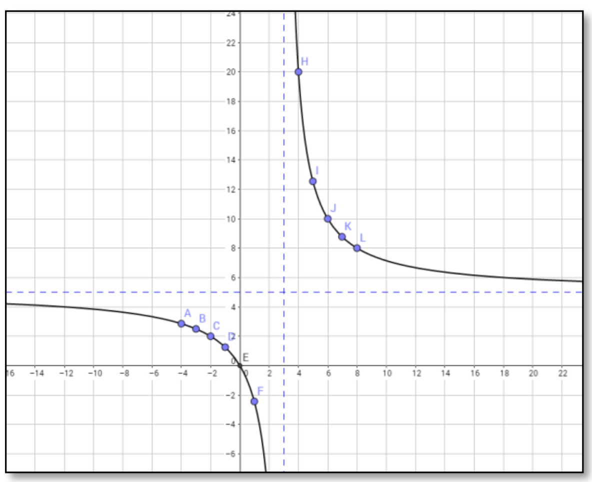

Figura 1-34 Gráfica de la curva $xy - 3y - 5x = 0$

Ahora, si prolongamos la curva siguiendo la definición de asíntotas se aprecia mejor la curva como muestra la *figura1- 35.*

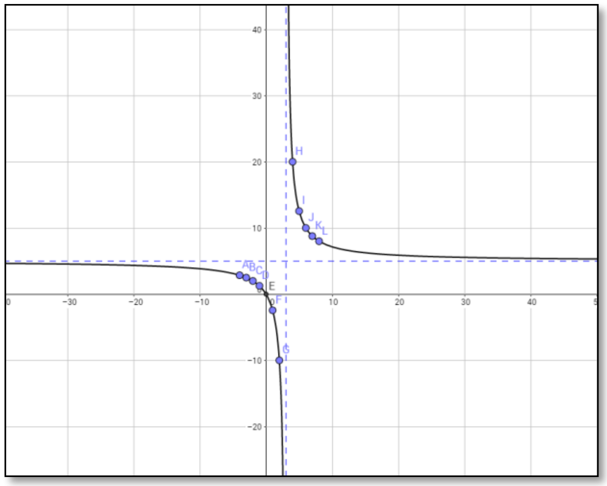

Figura 1-35 Gráfica amplificada de la curva $xy - 3y - 5x = 0$

Ejercicios 6:

1. Encuentra la ecuación que define los siguientes lugares geométricos:

    a. De todos los puntos (x, y) cuya distancia al origen sea 3

    b. De los puntos $P(x, y)$ del plano que equidistan de los puntos $A(3,1)$ y $B(-2,3)$

    c. De los puntos (x, y) tales que su ordenada es igual a su abscisa

    d. La distancia al origen es el doble de la distancia al punto $(1,2)$

    e. La distancia al eje de las x es doble a la distancia al punto $(1,1)$

    f. De todos los puntos (x, y) tales que su distancia a $A(-2, 1)$ sea igual a 2

    g. De todos los puntos (x, y) tales que sean la mediatriz del segmento $A(4, 3)$ y $B(2, 1)$

    h. De todos los puntos (x, y) tales que su distancia al punto $A(1, 0)$, es el triple de su distancia a la recta $x = 2$

2. Para cada uno de los siguientes ejercicios encuentra su intersección con los ejes, su simetría, su extensión, asíntotas, tabulación y gráfica

a. $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$

b. $x^2 - 8y = 0$

c. $y^2 - 8x = 0$

d. $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

e. $xy = 1$

f. $x^2y = 16$

g. $x^2 + y^2 = 25$

h. $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$

2. RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

2.1. Introducción

En este capítulo llevaremos los conceptos básicos de línea recta estudiados en geometría plana al plano cartesiano:

1. Analizaremos la pendiente y por consiguiente el ángulo de inclinación de la recta, condiciones de paralelismo y perpendicularidad y el ángulo entre dos rectas.
2. Obtendremos las diferentes formas de representar la ecuación de una recta.
3. Aplicaremos la ecuación general de la recta para encontrar la distancia entre un punto y una recta.
4. Analizaremos los diferentes puntos notables del triángulo desde el punto de vista de la geometría analítica.

2.2. Elementos de la línea Recta

Una línea contiene una infinidad de puntos, por lo que no se puede describir explícitamente cada uno de ellos, es necesario describirse por medio de una ecuación.

Si tenemos una recta vertical, sabemos que se puede representar por el punto que cruza en el eje de las x, es decir, si cruza al eje en el punto -5, la ecuación de la recta será $x = -5$.

Si la recta es horizontal, su ecuación será el punto en el que cruza al eje de las y, es decir, si cruza al eje en el punto 3, la ecuación de la recta será $y = 3$

Es decir, si la recta es vertical que cruza al eje de las y en el punto $(0, b)$, la ecuación de la recta será $y = b$.

Si la recta es horizontal que cruza al eje de las x en el punto $(a, 0)$, la ecuación de la recta será $x = a$

Cuando la recta no es horizontal ni vertical tendremos que buscar una propiedad única que la represente, dicha propiedad es la pendiente.

Así, la recta como lugar geométrico queda definida de la siguiente manera:

"Lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que la pendiente entre cualesquiera dos puntos se mantiene constante" (Benjumeda, De la Rosa, Maqueo, & González, 2013)

Por tanto, tendremos que definir y analizar la pendiente de la recta para poder obtener su ecuación. La gráfica es muy sencilla, ya que basta con dar dos puntos de la recta para poder trazarla, ya que sabemos que por dos puntos pasa una única recta.

2.3. Pendiente de una recta

Se define a la pendiente de una recta como una razón de cambio, es decir, la variación vertical entre la variación horizontal. Dicha variación es independiente de los puntos que se tomen sobre la recta, veamos la construcción de la *figura 2-1.*

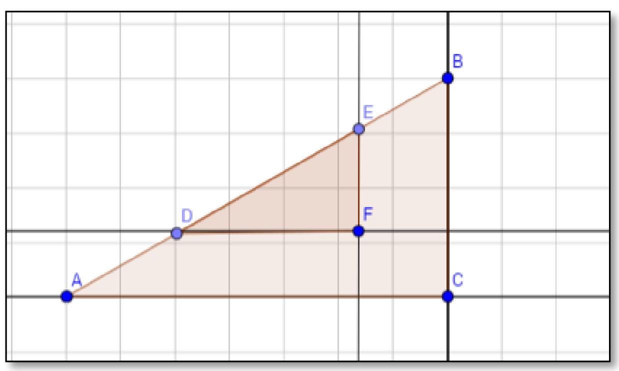

Figura 2-1 Construcción para calcular la pendiente de una recta por medio de triángulos semejantes.

Los puntos A, D, E, y B se encuentran sobre la misma recta, al trazar rectas paralelas al eje de las x y al eje de las y que pasen sobre los puntos marcados como se muestra en la figura 2-1, tenemos triángulos semejantes, $\Delta ACB \sim \Delta DFE$, las razones son:

1. $\forall A = \forall D$ por condiciones de paralelismo de dos rectas (correspondientes).
2. $\forall F = \forall C$ por formar un ángulo de 90°

3. $\forall E = \forall B$ por condiciones de paralelismo.

Por lo que se cumple la regla AAA (ángulo-ángulo-ángulo), es decir, son semejantes, por lo que las medidas de sus lados son proporcionales, es decir,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} = m$$

Donde m es la pendiente de la recta.

Si lo vemos con coordenadas, sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$y $C(x_2, y_1)$ las coordenadas de los puntos A, B y C, si obtenemos las distancias,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2}} = \frac{\sqrt{(y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo que la pendiente se define como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora, analicemos los tipos de pendientes que podemos tener.

Para la recta horizontal, donde cruzan al eje de las y en un punto tenemos que todos los puntos tienen la misma ordenada, sean dos puntos sobre ella $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_1)$

$$m = \frac{y_1 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

Para la recta vertical, donde cruzan al eje de las x en un punto a, todos los puntos tienen la misma abscisa, sean dos puntos sobre ella $A(x_1, y_1)$, $B(x_i, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0} = \nexists$$

Es decir, no se puede expresar la pendiente en una recta horizontal, pero, como ya vimos, si hay una expresión para la recta horizontal, que es $x = a$.

Problema 2.1

Encuentra la pendiente de la recta que contiene los puntos $A(2,3)$ y $B(5,7)$

Solución

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Así que la pendiente de la recta es $m = \frac{4}{3}$

Problema 2.2

Dar la pendiente de la recta que contiene los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,-1)$

Solución

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{-1-3}{5-(-1)} = \frac{-4}{5+1} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

La pendiente es $m = \frac{-2}{3}$

Cómo se ve en los dos ejemplos, la pendiente puede ser positiva o negativa, esto depende de la inclinación de la recta. Recordemos que también puede ser cero en caso de las rectas horizontales y no existir en caso de las rectas verticales.

Tomemos como ejemplos los dos problemas anteriores para poder obtener una conclusión, usemos las gráficas de las *figuras 2-2 y 2-3*.

$A(2,3)$ y $B(5,7)$ $m = \frac{4}{3}$	$A(-1,3)$ y $B(5,-1)$ $m = \frac{-2}{3}$

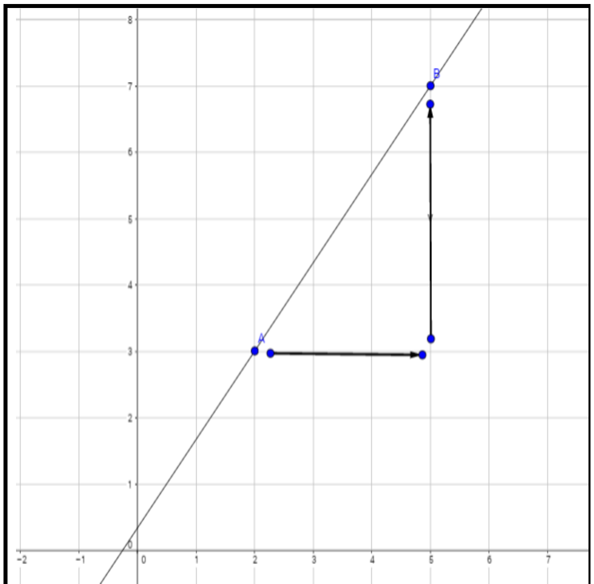

Figura 2-2 pendiente positiva de una recta.

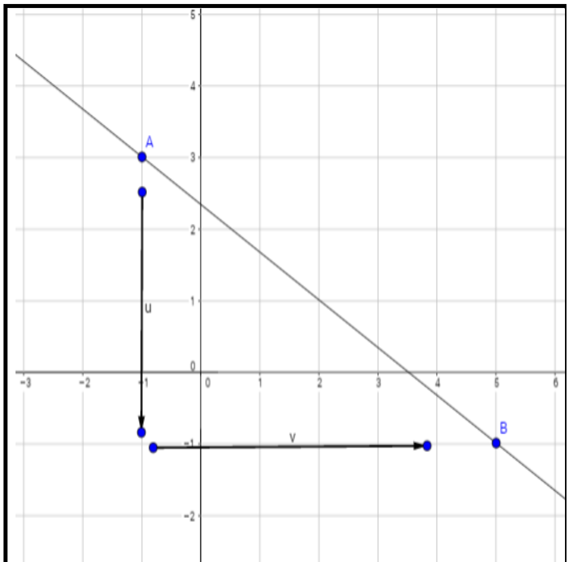

Figura 2-3 pendiente negativa de una recta.

En la primera gráfica nos movemos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, es decir, en sentidos positivos.

En la segunda gráfica el recorrido es de arriba hacia abajo (negativo) y de derecha a izquierda, es decir, en sentido negativo.

En el primer ejercicio la pendiente es positiva, porque al movernos de un punto hacia el otro, nuestros movimientos siempre son en sentido positivo, es decir, la variación de x es positiva y la variación de las y también es positiva. Sin embargo, en la pendiente negativa una de nuestras variaciones es negativa, en este ejemplo es la de las y, el movimiento es de arriba hacia abajo.

En conclusión, si la recta está inclinada hacia la derecha su pendiente será positiva, y si esta inclinada hacia la izquierda su pendiente será negativa.

Ejercicios 7:

Encuentra la pendiente “m” de los siguientes pares de puntos, obtén su gráfica

1. $A(-5,4)$ y $B(2,3)$
2. $A(-3,-2)$ y $B(-4,5)$

3. $A(5,8)$ y $B(9,3)$

4. $A(0,0)$ y $B(-2,6)$

5. $A(-1,5)$ y $B(-3,-5)$

2.4. Ángulo de inclinación de una recta

Analicemos las rectas de la figura 2-4.

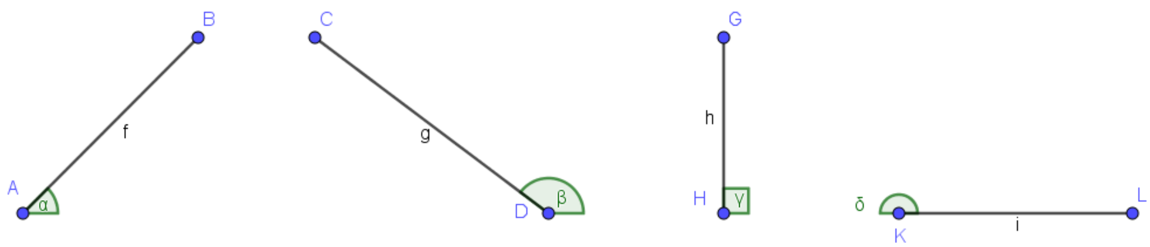

Figura 2-4 Muestra las diferentes inclinaciones de la recta y por lo tanto los diferentes ángulos que deben tomar.

Si consideramos que el ángulo se mide desde el eje de las x, siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj, veremos que en la primera gráfica, la recta f, que contiene los puntos A y B, el ángulo de inclinación es menor a $90°$ y en la segunda, la recta g que contiene a los puntos C y D , el ángulo de inclinación es mayor a $90°$, en la tercera recta h que contiene los puntos H y G, el ángulo de inclinación de la recta es de $90°$, es decir, es perpendicular al eje de x. Y por último la recta i, es paralela al eje de las x, por lo que su ángulo es de $180°$ Uniendo la información obtenida con respecto a la pendiente tenemos:

- Una recta tiene pendiente positiva si tiene un ángulo de inclinación menor a 90°
- Una recta tiene pendiente negativa si tiene un ángulo de inclinación mayor a 90°
- Una recta tiene pendiente cero si tiene un ángulo de inclinación de 180°
- Para un ángulo de 90° no existe pendiente.

Ahora bien, para encontrar el valor del ángulo de inclinación tomaremos en cuenta que la pendiente también se define como la tangente del ángulo de inclinación de la recta, es decir, Sea θ el ángulo de inclinación de la recta, entonces, definimos la pendiente como:

$$m = tan\theta$$

De donde podemos despejar el ángulo, es decir,

$$\theta = \tan^{-1} m$$

Problema 2.3

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es $m = 1$

Solución

Usando la fórmula encontrada tenemos:

$$\theta = \tan^{-1} m = \tan^{-1}(1) = 45°$$

Problema 2.4

Dado el segmento $A(2, -4)$ y $B(-1,1)$, encuentra la medida de su ángulo de inclinación.

Solución

Primero hay que encontrar la pendiente, usamos la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{-1 - 2}{1 - (-4)} = \frac{-3}{1 + 4} = \frac{-4}{5}$$

Ahora hay que encontrar el ángulo de inclinación:

$$\theta = \tan^{-1} m = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right) = -38.6598°$$

Cómo el ángulo es negativo, nos está marcando el ángulo en sentido de las manecillas del reloj, y nosotros queremos el contrario, por lo que sumaremos 180º para obtener el deseado, veamos la gráfica de la *figura 2-5*:

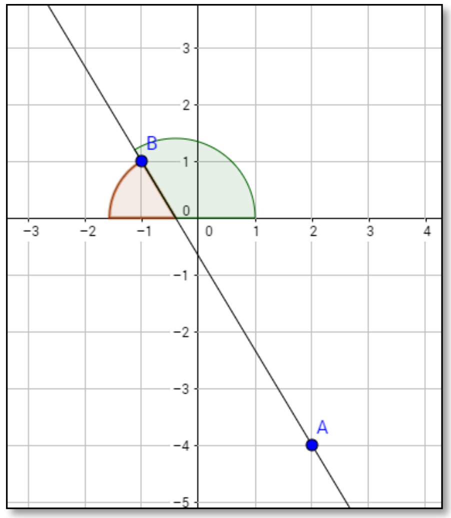

Figura 2-5 El ángulo anaranjado es el que se obtiene originalmente, pero el verde es el que queremos calcular, ambos son suplementarios, es decir suman 180.

La sección azul representa el ángulo que nos da la calculadora, y el verde el que necesitamos, como la suma de ambos nos tiene que dar $180º$, el ángulo buscado se obtiene sumando 180 al encontrado.

$$\theta = -38.6598° + 180° = 141.34019°$$

Problema 2. 5

Encuentra la pendiente de la recta cuyos puntos son $A(-1,1)$, $B(-1,2)$

Solución

Observemos la gráfica en la $figura\ 2-6$

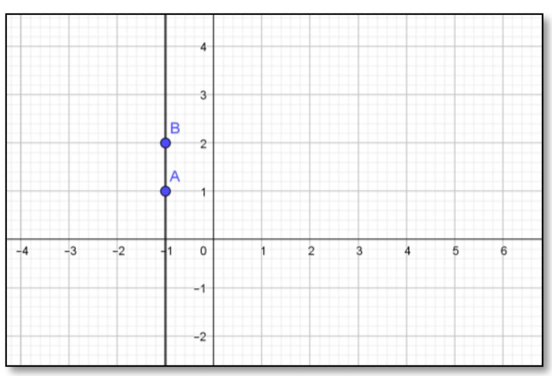

Figura 2-6 la recta forma un ángulo de 90° con respecto al eje x, por lo que la pendiente no existe

Ahora apliquemos la fórmula de pendiente

$$m = \frac{2-1}{-1+1} = \frac{1}{0} = \nexists$$

Podemos ver que la pendiente no existe, pero la gráfica nos indica que es porque la recta es perpendicular al eje de las x, es decir, tiene un ángulo de 90°.

Problema 2. 6

Encuentra la pendiente de la recta conociendo su ángulo de inclinación es $\theta = 45°$

Solución

$$m = tan\theta = tan(45°) = 1$$

$$m = 1$$

Ejercicios 8:

Encuentra el ángulo de inclinación para las rectas con las siguientes pendientes:

1. $m = \frac{1}{2}$
2. $m = \frac{-1}{4}$
3. $m = 3$
4. $m = \frac{3}{2}$
5. $m = \frac{-1}{3}$

Encuentra la pendiente de la recta si conocemos su ángulo de inclinación:

1. $\theta = 30°$
2. $\theta = 60°$
3. $\theta = -45°$
4. $\theta = 170°$
5. $\theta = 120°$

2.5. Condición de paralelismo y perpendicularidad entre rectas

2.5.1. Rectas paralelas

Analicemos dos rectas paralelas cualesquiera en el plano cartesiano como se muestra en la *figura 2-7.*

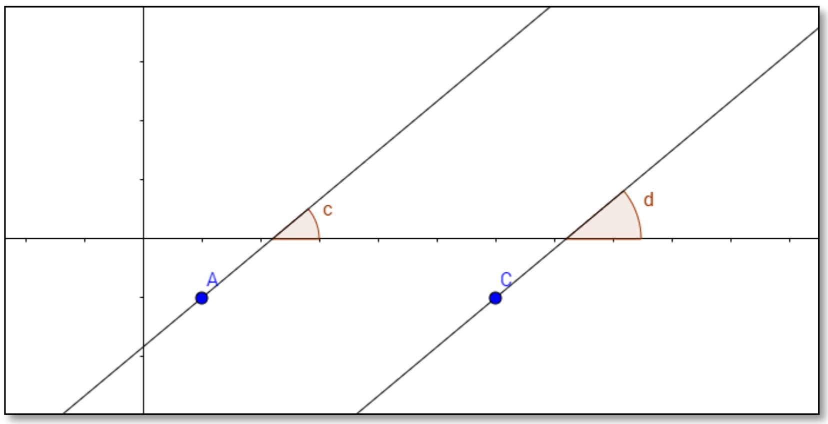

Figura 2-7 Dos rectas paralelas que cruzan el eje x, con ellas podemos aplicar las propiedades aplicar la geometría plana y demostrar que los ángulos son iguales.

Cómo la recta A es paralela a la recta C, y en este caso el eje x es una recta secante de las dos, tenemos que por ángulos correspondientes $\forall c = \forall d$, por lo que sus respectivas tangentes son iguales, es decir

$$tan(c) = tan(d)$$

Sea $m_1$la pendiente de la recta A y m_2 la pendiente de la recta B, tenemos la siguiente igualdad

$$m_1 = tan(c) = tan(d) = m_2$$

Es decir

$$m_1 = m_2$$

Que nos dice, que dos rectas paralelas tendrán pendientes iguales.

2.5.2. Rectas perpendiculares

Tracemos dos rectas perpendiculares en el plano cartesiano como muestra la *figura 2-8.*

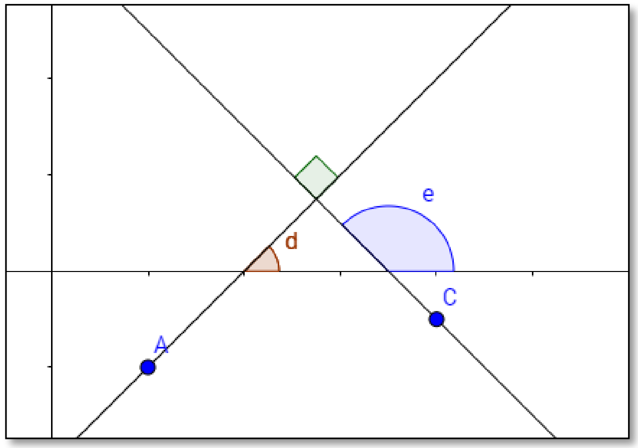

Figura 2-8 Ángulos que se forman con 2 rectas perpendiculares, con ellos podemos aplicar la geometría plana para demostrar que los ángulos son inversos y de signos contrarios.

La recta A y C son perpendiculares, es decir, forman un ángulo de $90º$ entre ellas.

Si consideramos el triángulo que se forma con las rectas A, C y el eje de las x, vemos que es un triángulo rectángulo. Además, cumple con la propiedad de los ángulos: La suma de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

Por lo que tenemos que $\forall e = \forall d + 90°$, si aplicamos tangente a ambos lados de la ecuación nos queda

$$tan(e) = tan(d + 90°)$$

Que por propiedades trigonométricas

$$tan(d + 90°) = -ctg(d) = \frac{-1}{tan(d)}$$

Quedando

$$tan(e) = \frac{-1}{tan(d)}$$

Y expresado como pendientes, donde m_1 es la pendiente de la recta A y m_2 la pendiente de la recta C

$$m_1 = tan(e) = \frac{-1}{tan(d)} = \frac{-1}{m_2}$$

Quedando

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

Es decir, para rectas perpendiculares, las pendientes son inversas y de signo contrario.

Problema 2. 7

Dado los puntos $A(2,4)$ y $B(-1,3)$ encuentra la pendiente de la recta C paralela a ella, y de la recta D perpendicular a ella.

Solución

Primero encontramos la pendiente de la recta que contiene a los puntos A y B.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{3 - 4}{-1 - 2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

A esta pendiente démosle el nombre de m_1

De la recta paralela a ella

$$m_2 = \frac{1}{3}$$

Para la recta perpendicular

$$m_3 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$$

Ejercicios 9:

Encuentra la pendiente de las rectas paralelas y perpendiculares a las mencionadas según su caso:

a) $m_1 = 2$

b) $m_1 = \frac{2}{3}$

c) $m_1 = \frac{-3}{5}$

d) $\theta = 75°$

e) $\theta = 120°$

f) $\theta = 150°$

2.6. Ángulos entre dos rectas

Una de las aplicaciones de la pendiente es encontrar el ángulo que se forma entre dos rectas, para ello utilizaremos nuestros conocimientos de trigonometría.

Sean dos rectas f y g que se cruzan en un punto dado y los ángulos de inclinación entre de cada uno de ellos $\forall c$ y $\forall d$ así como el ángulo que se forma entre ellas $\forall d$ tal y como se ven en la *figura 2-9*.

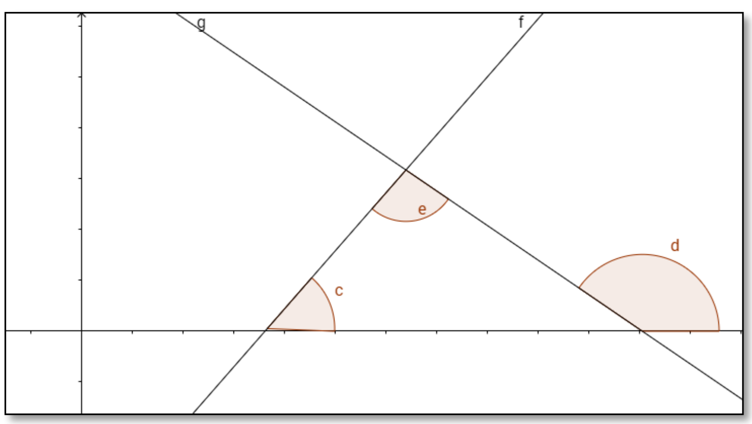

Figura 2-9 Al cruzarse dos rectas se forman 4 pares de ángulos, pero si consideramos la intersección del eje de las x con ellas tenemos más posibilidades para demostrar que las pendientes son inversas y de signos contrarios.

Por propiedades de los triángulos sabemos que el $\forall d = \forall c + \forall e$, como nos interesa el ángulo e, despejamos y encontramos que $\forall e = \forall d - \forall c$

Si calculamos la tangente a ambos lados de la igualdad tenemos:

$$tan(e) = tan(d - c)$$

Y por identidades trigonométricas obtenemos:

$$tan(e) = \frac{tan\ (d) - tan(c)}{1 + tan(d)tan(c)}$$

Utilicemos las pendientes en lugar de las tangentes, $tan(d) = m_1$ y $tan(c) = m_2$, por lo que la ecuación queda:

$$tan(e) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Y como lo que nos interesa es el ángulo, no la tangente, despejamos y obtenemos:

$$e = \tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

Que es la fórmula para encontrar el ángulo formado por la intersección de dos rectas.

Problema 2. 8

Encontrar el ángulo formado por las rectas A, B que tienen pendientes $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$

Solución

$$e = \tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 - (-3)}{1 + (2)(-3)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{1 - 6}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right) = \tan^{-1}(-1) = -45°$$

Cómo es negativo le sumaremos 180° para obtener el ángulo positivo.

$$e = -45° + 180° = 135°$$

Es decir, el ángulo formado entre las dos rectas es de 135°.

Problema 2. 9

Encuentra los ángulos internos del triángulo formado por los vértices $A(1,3)$, $B(4,1)$ y $C(6,-4)$

Solución

En la *figura 2-10* se muestra la gráfica de los puntos indicados que nos da una idea de lo que estamos buscando.

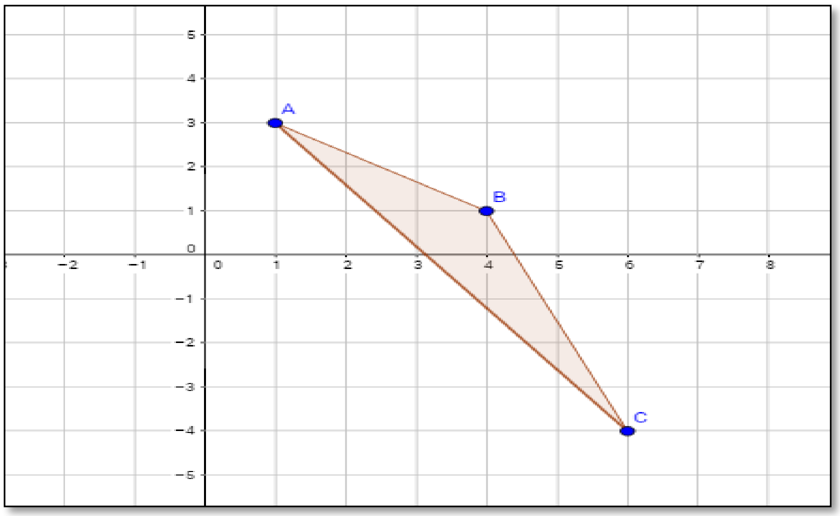

Figura 2-10 Utilizaremos la fórmula de ángulos entre dos rectas para calcular el valor de los ángulos internos del triángulo formado por los puntos A, B y C.

Primero encontraremos las pendientes de las tres rectas, la pendiente de $\overline{AB} = m_1$, la de $\overline{BC} = m_2$y la de $\overline{AC} = m_3$

$$m_1 = \frac{1-3}{4-1} = \frac{-2}{3}$$

$$m_2 = \frac{-4-1}{6-4} = \frac{-5}{2}$$

$$m_3 = \frac{-4-3}{6-1} = \frac{-7}{5}$$

Por lo que $m_1 = \frac{-2}{3}$, $m_2 = \frac{-5}{2}$ y $m_3 = \frac{-7}{5}$

Vamos a encontrar el ángulo de intersección entre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, que sería el ángulo interno A

$$\forall A = \tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-2}{3} - \left(\frac{-7}{2}\right)}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-7}{2}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{17}{6}}{1 + \frac{14}{6}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{17}{6}}{\frac{20}{6}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{17}{20}\right) = 40.3645°$$

$$\forall A = 40.3645°$$

Vamos a calcular el ángulo de intersección entre $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, que será el ángulo interno C

$$\forall C = \tan^{-1}\left(\frac{m_3 - m_2}{1 + m_3 m_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-7}{5} - \left(\frac{-5}{2}\right)}{1 + \left(\frac{-7}{5}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{11}{10}}{1 + \frac{7}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{11}{10}}{\frac{9}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{11}{45}\right) = 13.736°$$

Y como en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es 180°, tenemos que

$$\forall A + \forall B + \forall C = 180°$$

Entonces $\forall B = 180° - \forall A - \forall C$

$$\forall B = 180° - 40.3645° - 13.736° = 125.8995°$$

Ejercicios 10:

1. Por medio de las pendientes demuestra que el triángulo formado por los puntos $A(10,5)$, $B(8,1)$ y $C(14,3)$ es rectángulo.

2. Por medio de pendientes, demuestra que el polígono formado por los vértices $A(2,2)$, $B(-1,-2)$, $C(6,-2)$ y $D(9,2)$, es un paralelogramo.

3. Encuentra los ángulos interiores del triángulo formado por los vértices $A(2,-2)$, $B(-1,4)$ y $C(4,5)$.

2.7. Ecuación de la recta

Cómo ya vimos, la recta se define por medio de su pendiente, que es la propiedad más importante de ella, por lo que la utilizaremos para encontrar su ecuación.

Sea l una recta cuya pendiente se define con la formula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sí tomamos un punto $P(x, y)$ que pertenece a esta recta, este punto debe cumplir con la ecuación de la pendiente, es decir, al sustituirlo en la ecuación nos queda

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Si despejamos tenemos

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

Ordenando tenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Que es la ecuación de la recta, que por comodidad del estudiante se divide en casos, según los datos que nos den.

2.7.1. Punto pendiente

Si nos dan un punto dentro de la recta $P(x, y)$ y el valor de su pendiente m, la fórmula para encontrar la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Problema 2. 10

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -3)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{2}$

Solución

Sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$y - (-3) = \frac{2}{3}(x - 2)$$

Resolvamos la ecuación

$$y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

Quitando denominadores tenemos:

$$3(y + 3) = 2(x - 2)$$

Resolviendo tenemos

$$3y + 9 = 2x - 4$$

Pasando todo de un solo lado de la igualdad

$$-2x + 3y + 9 + 4 = 0$$

$$-2x + 3y + 13 = 0$$

Esta forma de expresar la ecuación de una recta se conoce como forma general.

2.7.2. Dos puntos

Cuando nos dan dos puntos sobre la recta y nos piden encontrar su ecuación, tenemos dos caminos, uno es encontrar primero el valor de la pendiente y después sustituirlo en la ecuación anterior; o sustituir la fórmula de la pendiente en la de la ecuación de la recta punto –pendiente.

Sean m la pendiente de una recta y su ecuación punto-pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Al sustituir la pendiente en la ecuación de la recta tenemos:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Que es la ecuación de la recta dada dos puntos.

Problema 2. 11

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(-3,4)$ y $B(5,-3)$

Solución

Tomemos a A como las coordenadas (x_1, y_1)

Sustituyendo en la ecuación

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Tenemos

$$y - 4 = \left(\frac{-3-4}{5-(-3)}\right)\left(x - (-3)\right)$$

$$y - 4 = \left(\frac{-7}{8}\right)(x+3)$$

Que despejando tenemos

$$8(y-4) = -7(x+3)$$

$$8y - 32 = -7x - 21$$

$$7x + 8y - 32 + 21 = 0$$

$$7x + 8y - 11 = 0$$

La cual representa la ecuación general de la recta.

2.7.3. Pendiente -ordenada al origen

Toda recta que no sea paralela al eje de las y tiene un cruce en el eje de las abscisas, es decir, hay un punto con coordenadas $(0, b)$ que pertenece al eje de las y, pero también a una recta. Sustituyamos este punto en la ecuación punto pendiente de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

Despejando y tenemos

$$y = mx + b$$

Que representa la ecuación ordenada al origen, pendiente, donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

Problema 2. 12

Dada la ordenada al origen b=2, y la pendiente $m = \frac{1}{2}$, encuentra la ecuación de la recta.

Solución:

Sustituyendo en $y = mx + b$ tenemos:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Para convertirla en ecuación general multiplicamos todo por el denominador.

$$2y = 2\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$$

$$2y = x + 4$$

Pasando todo de un solo lado de la igualdad tenemos:

$$x - 2y + 4 = 0$$

Que representa la ecuación general de la recta.

2.7.4. Grafica a partir de la ecuación pendiente - ordenada al origen.

Recordemos que la pendiente es la razón de cambio de y con respecto a x, en formula,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En palabras coloquiales, el numerador representa cuanto me muevo de un punto a otro con respecto de y, es decir, subo o bajo a partir de un punto (dependiendo del signo del numerador); y el denominador representa cuanto me muevo de un punto a otro con respecto a x, es decir, avanzo a la derecha o a la izquierda a partir de un punto (dependiendo del signo del denominador).

Por lo que el proceso para graficar a partir de una ecuación pendiente-ordenad al origen sería:

- Localizar sobre el eje de las y la ordenada al origen.
- Expresar la pendiente como fracción
- Subir o bajar a partir de la ordenada al origen, si el signo del numerador es positivo subimos, si el signo es negativo bajamos.

- Desde donde nos quedamos en y, avanzamos a la derecha o a la izquierda, dependiendo del signo del denominador, positivo o negativo respectivamente.
- Unimos los puntos con una línea recta.

Problema 2. 13

Graficar la ecuación y=3x+2

Solución

En la ecuación $b = 2$ y $m = 3$, por lo que hay que localizar el punto $A(0,2)$ en el plano cartesiano. Luego $m = 3 = \frac{3}{1}$, quiere decir que, si subo 3 me muevo a la derecha 1

o $m = 3 = \frac{-3}{-1}$, quiere decir que, si bajo 3 me muevo a la izquierda 1.

Que en la recta numérica me da dos puntos diferentes $C(1,5)$ y $E(-1,-1)$, pero que pertenecen a la misma recta. Como se muestra en la *figura 2-11*.

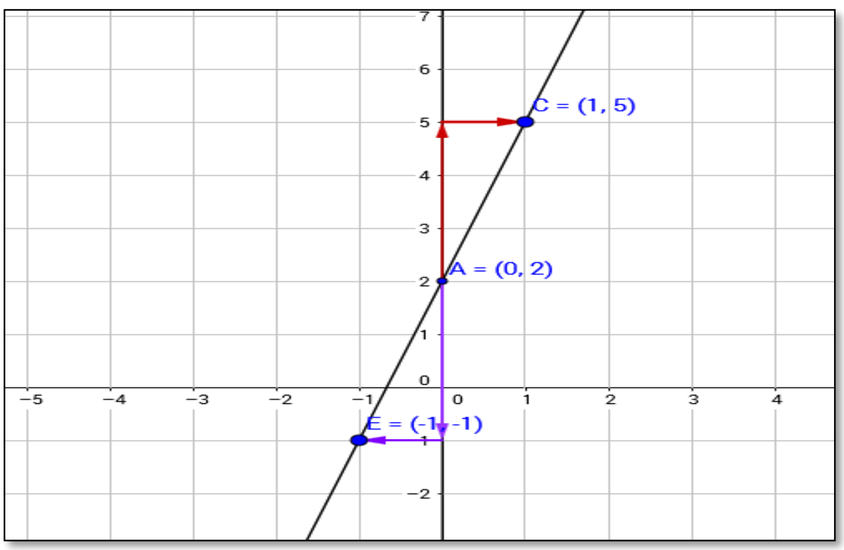

Figura 2-11 Podemos ver que del punto A se suben sobre el eje de las "y" 3 puntos y se recorre a la derecha una unidad para llegar a C, mientras que para el punto E se bajan 3 unidades y se recorre una a la izquierda.

Ahora, toda ecuación de la recta se puede convertir a la forma pendiente- ordenada al origen.

Problema 2. 14

Dado los puntos $A(2,1)$ y $B(-4,2)$ indica en el valor de su pendiente y el punto en que cruza al eje de las y.

Solución:

Encontramos su pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{-4-2} = \frac{1}{-6}$$

Sustituyendo el valor de la pendiente y usando uno de los puntos tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{-6}(x-2)$$

Despejando y tenemos:

$$-6(y-1) = 1(x-2)$$

$$-6y + 6 = x - 2$$

$$-6y = x - 2 - 6$$

$$y = \frac{x-8}{-6} = \frac{x}{-6} + \frac{-8}{-6} = \frac{-1}{6}x + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{-1}{6}x + \frac{4}{3}$$

Por lo que cruza al eje de las y en $(0, \frac{4}{3})$ y $m = \frac{1}{-6}$

2.7.5. Simétrica

Es la ecuación de la recta que representa el cruce de la recta en los dos ejes coordenados. Sean $A(a,0)$ y $B(0,b)$ los puntos donde la recta l cruza a los ejes coordenados. Utilizando la ecuación de la recta para dos puntos tenemos:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - b = \left(\frac{b-0}{0-a}\right)(x-0)$$

$$y - b = \left(\frac{b}{-a}\right)(x)$$

Dividiendo entre b tenemos

$$\frac{y-b}{b}=\left(\frac{b}{-ab}\right)(x)$$

Simplificando

$$\frac{y}{b}-\frac{b}{b}=\left(\frac{1}{-a}\right)(x)=\frac{-x}{a}$$

$$\frac{y}{b}-1=\frac{-x}{a}$$

Acomodando queda

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Esta es la ecuación simétrica de la recta, donde a es la abscisa al origen y b la ordenada al origen.

Problema 2. 15

Encontrar la ecuación simétrica y general de la recta que pasa por los puntos $A(-2,0)$ y $B(0,5)$.

Solución.

Tenemos que a=-2 y b=5, por lo que la ecuación queda

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$$

Ahora, si buscamos la ecuación general tendremos que multiplicar por 2 y por 5 para eliminar denominadores.

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1\right)(10)$$

Quedando

$$5x+2y=10$$

Pasando todo de un solo lado de la ecuación tendremos:

$$5x+2y-10=0$$

2.7.6. General de la recta

Cuando encontramos la ecuación de la recta, en cualquiera de sus fórmulas podemos igualarla a cero y encontrar la ecuación de la recta en forma general, la cual se puede expresar de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

Donde A y B no pueden ser cero simultáneamente.

Supongamos que $A = 0$, entonces tenemos $By + C = 0$, si despejamos y tenemos

$$y = \frac{-c}{B}$$

Que es una recta horizontal que cruza al eje de las y en el punto, $(0, \frac{-c}{B})$.

Supongamos que $B = 0$, entonces tenemos $Ax + C = 0$, si despejamos x tenemos

$$x = \frac{-c}{B}$$

Que es una recta horizontal que cruza al eje de las y en el punto, $(\frac{-c}{B}, 0)$.

Supongamos que $C = 0$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$ entonces tenemos $Ax + By = 0$, si despejamos y tenemos

$$By = -Ax$$

$$y = -\frac{A}{B}y$$

Tenemos una recta que pasa por el origen $(0,0)$ y tiene pendiente $m = \frac{-A}{B}$

Supongamos que $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$, despejemos y

$Ax + By + C = 0$

$$By = -Ax - C$$

$$y = \frac{-Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

Que representa una ecuación de la forma pendiente-ordenada al origen, donde

$$m = \frac{-A}{B}$$

Y la ordenada al origen es

$$b = \frac{-C}{B}$$

De esta forma podemos obtener rápidamente la gráfica de la recta.

Ahora, si $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$ y dividimos todo entre C, tenemos:

$$\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} + \frac{C}{C} = 0$$

$$\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} + 1 = 0$$

Pasando el 1 del otro lado de la igualdad y re expresando tenemos

$$\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} = -1$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Que es la forma simétrica de la ecuación de la recta, es decir, las intersecciones de los ejes son $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Problema 2. 16

Dada la ecuación de la recta $3x + 2y = 6$ encuentra la gráfica, las intersecciones con los ejes y el valor de su pendiente.

Solución:

Igualemos a cero la ecuación y encontremos los valores de A, B y C,

$$3x + 2y - 6 = 0$$

Por lo que $A = 3$, $B = 2$ y $C = -6$

Cómo vimos en el análisis de la ecuación $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$, y $m = \frac{-A}{B}$

$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{-6}{3} = 2$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$m = \frac{-A}{B} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Por lo que cruza a los ejes en $(2,0)$ y $(0,3)$ y tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$. Veamos su gráfica en la *figura 2-12.*

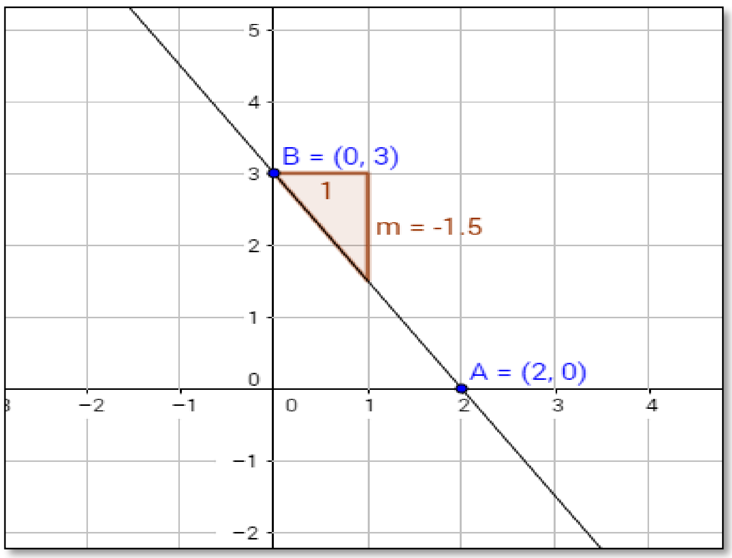

Figura 2-12 Las intersecciones de los ejes de la recta 3x+2y-6=0 son $A(2,0)$ y $B(0,3)$ y la pendiente es $m = -1.5$

Ejercicios 10:

1) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto indicado y la pendiente dada:

   a) $P(3,-4)$ y $m = 4$

   b) $P(-1,-3)$ y $m = \frac{4}{3}$

   c) $P(0,-2)$ y $m = \frac{-1}{5}$

   d) $P(3,0)$ y $m = \frac{3}{5}$

e) $P(1,1)$ y $m = -3$

2) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

a) $A(3,2)$ y $B(5,7)$

b) $A(-1,4)$ y $B(4,-7)$

c) $A(-5,-2)$ y $B(0,3)$

d) $A(0,1)$ y $B(1,0)$

e) $A(-5,0)$ y $B(3,-3)$

3) Grafica las siguientes rectas indicando cuál es su pendiente m y la ordenada al origen b

a) $y = 3x - 7$

b) $y = \frac{-6}{5}x + 6$

c) $y = -2x + 9$

d) $y = -x - 1$

e) $y = \frac{3}{5}x + 3$

4) Dada la ordenada al origen b y la pendiente m encuentra la ecuación de la recta.

a) $b = 5$ y $m = \frac{2}{3}$

b) $b = -3$ y $m = \frac{-1}{4}$

c) $b = 0$ y $m = 5$

d) $b = -1$ y $m = \frac{-5}{3}$

e) $b = 9$ y $m = -3$

5) Encuentra la ecuación simétrica y general de la recta que pasa por los puntos dados:

   a) $A(-3,4)$ y $B(5,7)$

   b) $A(2,-5)$ y $B(0,1)$

   c) $A(-1,0)$ y $B(3,-2)$

   d) $A(-5,2)$ y $B(4,-4)$

   e) $A(-2,-1)$ y $B(-4,0)$

6) Dadas las siguientes ecuaciones generales de la recta encuentra la gráfica, las intersecciones con los ejes y el valor de su pendiente.

   a) $3x - 2y - 12 = 0$

   b) $5x - 4y + 20 = 0$

   c) $7x - 6y - 14 = 0$

   d) $8x - 3y + 16 = 0$

   e) $-9\mathrm{x} - 6\mathrm{y} - 2 = 0$

   f) $\mathrm{x} - 6\mathrm{y} = 0$

   g) $2\mathrm{x} - 4 = 0$

   h) $-2\mathrm{y} + 9 = 0$

   i) $\mathrm{y} = 5\mathrm{x} - 3$

   j) $\mathrm{y} - 2 = 0$

2.8. Distancia de un punto a una recta

Para calcular la distancia de un punto a una recta tomaremos una recta cualquiera con ecuación general $Ax + By + C = 0$ y un punto A cualquiera con coordenadas (x_0, y_0). Sabemos de antemano que la distancia más corta entre un punto y una recta es la que se encuentra en la recta perpendicular que pasa por el punto dado.

Vamos a tomar dos puntos más sobre la recta de tal manera que las rectas que formen con el punto A sean paralelas a los ejes coordenados, es decir, que formen un ángulo recto al juntarse en A. De esta manera tenemos dos triángulos rectángulos, ΔABC y ΔDAC. Veamos la *figura 2-13*

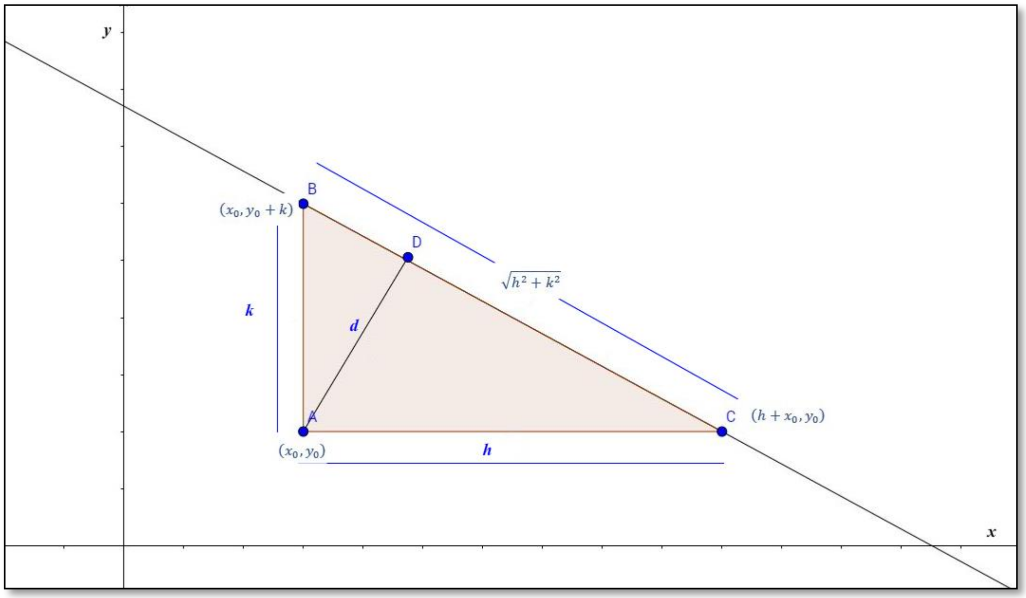

Figura 2-13 Utilizaremos las propiedades de triángulos rectángulos semejante para calcular la distancia entre un punto y una recta.

Cómo la ecuación de la recta es $Ax + By + C = 0$ y los puntos $B(x_0, y_0 + k)$ y $C(h + x_0, y_0)$ pertenecen a la recta, entonces, al sustituirlos en la ecuación de la recta se cumplirá la igualdad.

Al sustituir $B(x_0, y_0 + k)$

$$Ax_0 + B(y_0 + k) + C = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Bk + C = 0$$

Al sustituir $C(h + x_0, y_0)$

$$A(h + x_0) + By_0 + C = 0$$

$$Ah + Ax_0 + By_0 + C = 0$$

Cómo ambas son iguales a cero podemos igualarlas

$$Ax_0 + By_0 + Bk + C = Ah + Ax_0 + By_0 + C$$

Y simplificando tenemos

$$Bk = Ah$$

Despejando k tenemos

$$k = \frac{Ah}{B}$$

Despejando Bk de la ecuación $Ax_0 + By_0 + Bk + C = 0$ obtenemos

$$Bk = -Ax_0 - By_0 - C$$

Y si aplicamos valor absoluto a ambos lados de la igualdad tendremos

$$|Bk| = |-Ax_0 - By_0 - C| = |-1|\,|Ax_0 + By_0 + C| = |Ax_0 + By_0 + C|$$

$$|Bk| = |Ax_0 + By_0 + C|$$

Regresando al triángulo que construimos y recordando que el área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la altura y que un triángulo tiene 3 alturas, calculemos el área del triángulo ΔABC con dos alturas diferentes,

Con la altura k tendremos:

$$área = \frac{1}{2}|kh|$$

Con la altura d tendremos:

$$área = \frac{1}{2}\left|d\sqrt{h^2 + k^2}\right|$$

Cómo es el área del mismo triángulo deben ser iguales,

$$\frac{1}{2}|kh| = \frac{1}{2}\left|d\sqrt{h^2 + k^2}\right|$$

Despejando d tenemos

$$d = \frac{|kh|}{\left|\sqrt{h^2 + k^2}\right|}$$

Sustituyendo $k = \frac{Ah}{B}$ en la formula encontrada tenemos

$$d = \frac{|kh|}{\left|\sqrt{h^2 + \left(\frac{Ah}{B}\right)^2}\right|} = \frac{\left|\frac{Ah}{B} * h\right|}{\left|\sqrt{h^2 + \frac{A^2h^2}{B^2}}\right|} = \frac{\left|\frac{Ah^2}{B}\right|}{\left|\sqrt{\frac{B^2h^2 + A^2h^2}{B^2}}\right|} = \frac{\left|\frac{Ah^2}{B}\right|}{\left|\frac{\sqrt{(B^2 + A^2)h^2}}{\sqrt{B^2}}\right|}$$

$$= \frac{|Ah^2|}{\left|\sqrt{(B^2 + A^2)}\sqrt{h^2}\right|} = \frac{|Ah|}{\left|\sqrt{(B^2 + A^2)}\right|} = \frac{|Bk|}{\left|\sqrt{(B^2 + A^2)}\right|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\left|\sqrt{(B^2 + A^2)}\right|}$$

Por lo que la fórmula para encontrar la distancia de un punto a una recta es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\left|\sqrt{(B^2 + A^2)}\right|}$$

Problema 2.17

Encuentra la distancia que hay entre la recta $5x + 2y - 3 = 0$ y el punto $(2, -1)$

Solución

Como la formula está en su forma general deducimos que $A = 5$, $B = 2$ y $C = -3$, y sustituyendo en la formula tendremos

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\left|\sqrt{(B^2 + A^2)}\right|} = \frac{|5(2) + 2(-1) - 3|}{\left|\sqrt{((2)^2 + (5)^2)}\right|} = \left|\frac{10 - 2 - 3}{\sqrt{4 + 25}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{29}}\right| = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$d = \frac{5}{\sqrt{29}}u$$

Ejercicios 11:

Encuentra la distancia que hay entre las siguientes rectas y los puntos dados en cada inciso:

1. $2x - 3y + 4 = 0$ y el punto $(0, -1)$
2. $x - 4y + 2 = 0$ y el punto $(2,4)$
3. $x - y + 1 = 0$ y el punto $(-3, -2)$

4. $3x - 4y - 5 = 0$ y el punto $(5,0)$

5. $x + y + 7 = 0$ y el punto $(0,0)$

2.9. Rectas y puntos notables del triángulo

2.9.1. Mediatriz

Es la recta que pasa por el punto medio de uno de los lados de un triángulo y es perpendicular a él. El punto donde se cruzan las tres mediatrices se llama **circuncentro.**

Problema 2.18

Para el triángulo formado por los puntos $A(3,4)$, $B(2,-3)$ y $C(-3,1)$ encuentra la ecuación de sus mediatrices y su circuncentro.

Solución

Veamos la gráfica del triángulo en la *figura 2-14*

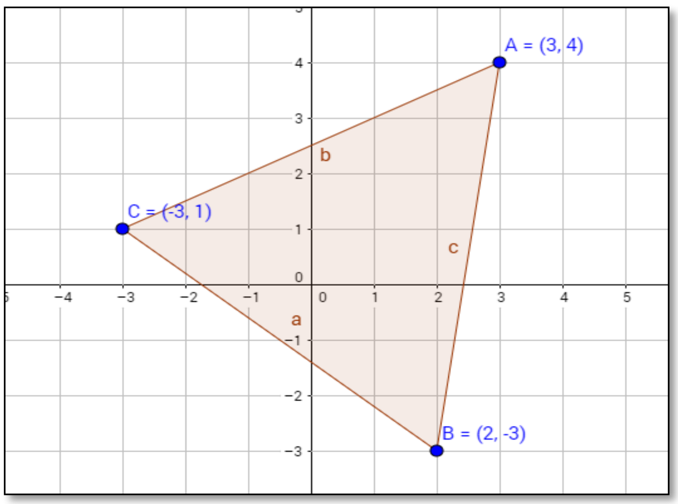

Figura 2-14 Al graficar los tres puntos nos facilita distinguir cuales son los puntos que debemos considerar para calcular los puntos medios de cada lado, así como las pendientes de cada lado del triángulo.

Como la mediatriz parte del punto medio del segmento, el primer paso será encontrar los puntos medios de los tres lados del triángulo.

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es:

$$\overline{AB} = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{4-3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

El punto medio del segmento $\overline{BC}$ es

$$\overline{BC} = \left(\frac{2-3}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, -1\right)$$

El punto medio del segmento $\overline{AC}$ es

$$\overline{AC} = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

Ahora necesitamos las rectas perpendiculares a dichos segmentos, sabemos que las pendientes de las rectas buscadas son perpendiculares a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, por lo que encontraremos las pendientes de dichos segmentos y por propiedades de rectas perpendiculares encontraremos las que necesitamos.

La pendiente del segmento $\overline{AB}$ es

$$m = \frac{-3-4}{2-3} = \frac{-7}{-1} = 7$$

La pendiente del segmento $\overline{BC}$ es

$$m = \frac{-3-1}{2+3} = \frac{-4}{5}$$

La pendiente del segmento $\overline{AC}$ es

$$m = \frac{4-1}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Utilizando propiedades de perpendicularidad (inversa y de signo contrario) obtenemos las pendientes de las mediatrices.

La pendiente de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es

$$m = \frac{-1}{7}$$

La pendiente de la mediatriz del segmento $\overline{BC}$ es

$$m = \frac{5}{4}$$

La pendiente de la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ es

$$m = \frac{-2}{1} = -2$$

Ya contamos con un punto y la pendiente, ya podemos obtener la ecuación de la mediatriz.

La ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ se obtiene con el punto $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y la pendiente $m = \frac{-1}{7}$, usando la formula punto-pendiente tenemos:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{7}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

Multiplicamos por 14 para eliminar denominadores

$$\left(y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{7}\left(x - \frac{5}{2}\right)\right)(14)$$

$$14y - 7 = -2\left(x - \frac{5}{2}\right) = -2x + 5$$

Pasando todo de un solo lado de la igualdad tenemos:

$$14y + 2x - 7 - 5 = 0$$

$$14y + 2x - 12 = 0$$

Dividiendo todo entre dos y ordenando

$$x + 7y - 6 = 0$$

Que es la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

La ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{BC}$ se obtiene con el punto $\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$ y la pendiente $m = \frac{5}{4}$, usando la formula punto-pendiente tenemos:

$$y + 1 = \frac{5}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Multiplicamos todo por 8 para eliminar denominadores

$$\left[y + 1 = \frac{5}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right](8)$$

$$8y + 8 = 10\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$8y + 8 = 10x + 5$$

Pasando todo de un solo lado de la igualdad tenemos

$$10x - 8y + 5 - 8 = 0$$

$$10x - 8y - 3 = 0$$

Que es la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

La ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ se obtiene con el punto $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ y la pendiente $m = -2$, usando la formula punto-pendiente tenemos:

$$y - \frac{5}{2} = -2(x - 0)$$

Multiplicamos por 2 para eliminar denominadores

$$\left(y-\frac{5}{2}=-2(x-0)\right)(2)$$

$$2y-5=-4(x)=-4x$$

Pasando todo de un solo lado de la igualdad tenemos

$$4x+2y-5=0$$

Que es la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AC}$

Por definición de circuncentro tenemos que encontrar el punto donde se intersectan las tres rectas, es decir, hay que resolver el sistema de ecuaciones de 2 variables, pero 3 ecuaciones.

$$\begin{cases} x+7y-6=0 \\ 10x-8y-3=0 \\ 4x+2y-5=0 \end{cases}$$

Donde encontramos que $x=\frac{23}{26}$, $y=\frac{19}{26}$, es decir el circuncentro tiene coordenadas $\left(\frac{23}{26},\frac{19}{26}\right)=(0.88,0.73)$.

Veamos la gráfica de la *figura 2-15*

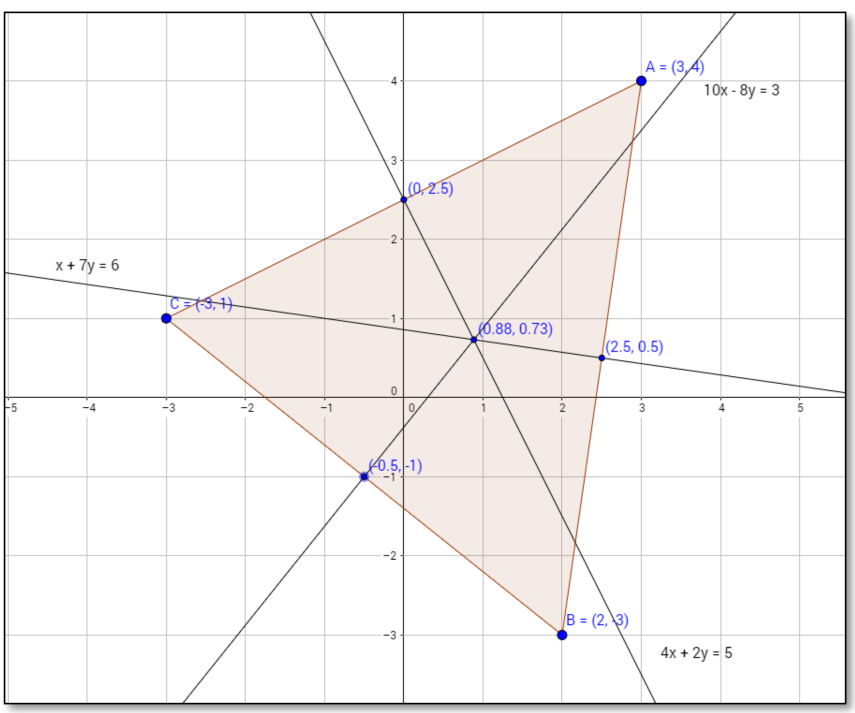

Figura 2-15 Podemos ver las mediatrices y el punto donde se intersectan, el circuncentro-

Ejercicios 12:

Para los siguientes conjuntos de puntos encuentra la ecuación de sus mediatrices y su circuncentro.

a) $A(-3,3), B(4,1)\ y\ C(-1,-3)$
b) $A(1,4), B(5,2)\ y\ C(2,1)$
c) $A(-3,-4), B(3,-3)\ y\ C(0,3)$
d) $A(-4,0), B(0,4)\ y\ C(4,0)$

2.9.2. Mediana

Es la recta que pasa por el punto medio de uno de los lados de un triángulo y por el vértice opuesto a ese lado. El punto donde se cruzan las 3 medianas se llama **baricentro**

Problema 2.19

Para el triángulo formado por los puntos $A(3,4)$, $B(2,-3)$ y $C(-3,1)$ encuentra la ecuación de sus medianas y su baricentro.

Solución

Primero tendremos que calcular los puntos medios, y tendremos dos puntos de la mediatriz: el punto medio y el vértice.

Los puntos medios los calculamos en el ejercicio 43, el punto medio de $\overline{AB}$ es $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, de $\overline{BC}$ es $\left(\frac{-1}{2},-1,\right)$, de $\overline{AC}$ es $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

La mediana de $\overline{AB}$ se calcula con $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $(-3,1)$. Utilizamos la ecuación de la recta dada dos puntos:

$$y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$$

$$y-1=\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{-3-\frac{5}{2}}\right)(x-(-3))$$

$$y-1=\left(\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{11}{2}}\right)(x+3)$$

$$y-1=\frac{-1}{11}(x+3)$$

Multiplicamos por 11 e igualamos a cero

$$11y-11=-1(x+3)$$

$$11y-11=-x-3$$

$$x+11y-11+3=0$$

$$x+11y-8=0$$

Que es la mediana de $\overline{AB}$

La mediana de $\overline{BC}$se calcula con $\left(\frac{-1}{2},-1,\right)$ y $(3{,}4)$ Utilizamos la ecuación de la recta dada dos puntos:

$$y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$$

$$y-4=\left(\frac{4-(-1)}{3-\left(\frac{-1}{2}\right)}\right)(x-3)$$

$$y-4=\left(\frac{5}{\frac{7}{2}}\right)(x-3)$$

$$y-4=\frac{10}{7}(x-3)$$

Multiplicamos por 7 e igualamos a cero

$$7y-28=10(x-3)$$

$$7y-28=10x-30$$

$$10x-7y-30+28=0$$

$$10x-7y-2=0$$

Que es la mediana de $\overline{BC}$

mediana de $\overline{AC}$ se calcula con $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ y $(2,-3)$. Utilizamos la ecuación de la recta dada dos puntos:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \left(\frac{-3 - \frac{5}{2}}{2 - 0}\right)(x - 2)$$

$$y + 3 = \left(\frac{\frac{-11}{2}}{2}\right)(x - 2)$$

$$y + 3 = \frac{-11}{4}(x - 2)$$

Multiplicamos por 4 e igualamos a cero

$$4y + 12 = -11(x - 2)$$

$$4y + 12 = -11x + 22$$

$$11x + 4y - 22 + 12 = 0$$

$$11x + 4y - 10 = 0$$

Que es la mediana de $\overline{AC}$

Para encontrar el baricentro tendremos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 11y - 8 = 0 \\ 10x - 7y - 2 = 0 \\ 11x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$$

Que es el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Veamos la gráfica en la *figura 2-16*

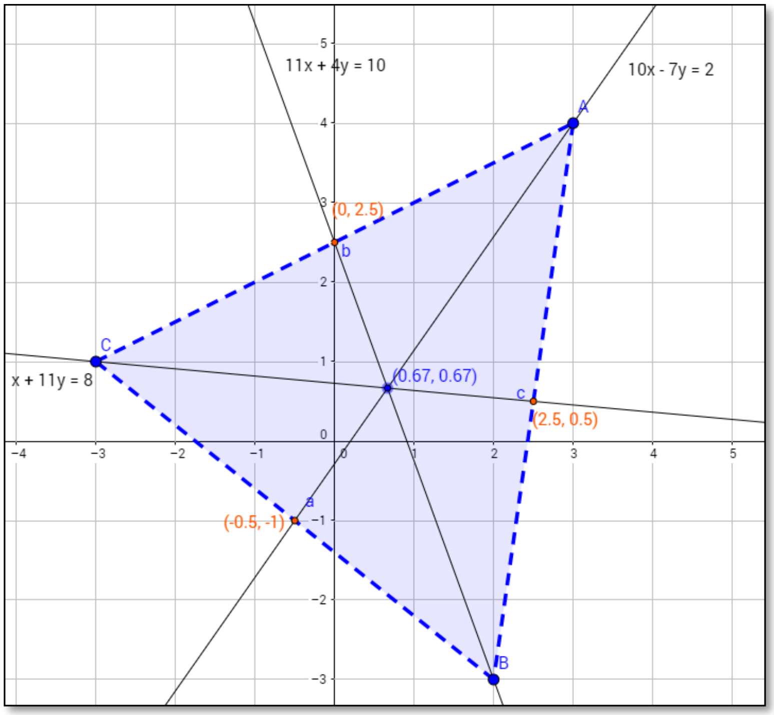

Figura 2-16 El baricentro es la intersección de las medianas, por lo que tuvimos que calcular los puntos medios de cada lado y con el vértice no adyacente obtenemos la ecuación de la mediatriz de cada lado.

Ejercicios 13:

Para los siguientes conjuntos de puntos encuentra la ecuación de sus mediatrices y su baricentro.

e) $A(-3,3), B(4,1)\ y\ C(-1,-3)$

f) $A(1,4), B(5,2)\ y\ C(2,1)$

g) $A(-3,-4), B(3,-3)\ y\ C(0,3)$

h) $A(-4,0), B(0,4)\ y\ C(4,0)$

2.9.3. Altura

Es la recta que pasa por uno de los vértices de un triángulo y es perpendicular al otro lado opuesto. El punto donde se cruzan las tres alturas se llama **ortocentro.**

Problema 2.20

Para el triángulo formado por los puntos $A(3,4)$, $B(2,-3)$ y $C(-3,1)$ encuentra la ecuación de sus alturas y su ortocentro.

Solución

Tenemos un punto de la altura (el vértice), nos falta su pendiente, la cual es perpendicular al segmento opuesto del vértice. Las pendientes las calculamos en el problema 2. 19:

La pendiente de la altura del segmento $\overline{AB}$ es $m = \frac{-1}{7}$ y el vértice opuesto es $C(-3,1)$, utilizando la ecuación punto pendiente encontramos la ecuación de la altura

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{7}\big(x - (-3)\big)$$

Multiplicando por 7 para eliminar denominador e igualando a cero

$$\left[y - 1 = \frac{-1}{7}(x + 3)\right](7)$$

$$7y - 7 = -x - 3$$

$$x + 7y - 4 = 0$$

La pendiente de la altura del segmento $\overline{BC}$ es $m = \frac{5}{4}$ y el vértice opuesto es $A(3,4)$, utilizando la ecuación punto pendiente encontramos la ecuación de la altura

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{5}{4}(x - 3)$$

Multiplicando por 4 para eliminar denominador e igualando a cero

$$\left[y - 4 = \frac{5}{4}(x - 3)\right](4)$$

$$4y - 16 = 5x - 15$$

$$5x - 4y - 15 + 16 = 0$$

$$5x - 4y + 1 = 0$$

La pendiente de la altura del segmento $\overline{AC}$ es $m = -2$ y el vértice opuesto es $B(2,-3)$

Utilizando la ecuación punto pendiente encontramos la ecuación de la altura

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = -2(x - 2)$$

Multiplicando tenemos

$$y + 3 = -2x + 4$$

$$2x + y + 3 - 4 = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

Así el ortocentro se encuentra con la intersección de las tres ecuaciones de las alturas, es decir, de la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 7y - 4 = 0 \\ 5x - 4y + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Que es el punto

$$\left(\frac{3}{13}, \frac{7}{13}\right)$$

Cómo se muestra en la gráfica de la *figura 2-17.*

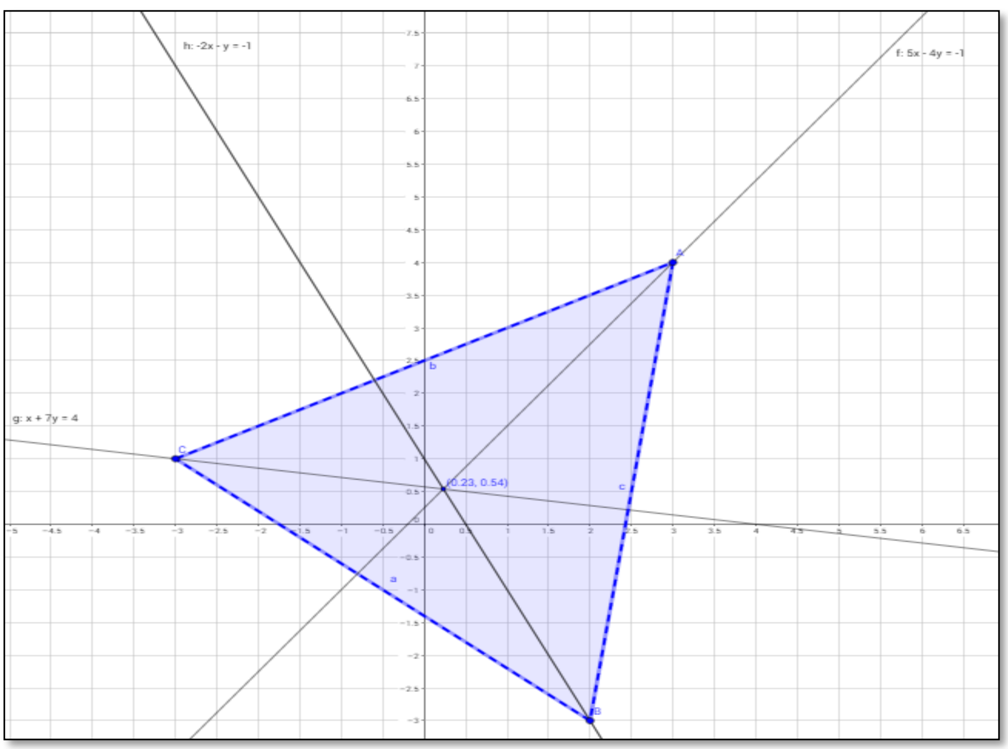

Figura 2-17 El ortocentro es la intersección de las alturas de cada lado, para lo cual necesitamos las pendientes de cada lado y el vértice opuesto de cada uno de ellos.

Ejercicios 13:

Para los siguientes encuentra la ecuación de sus alturas y su ortocentro.

a) $A(-3,3), B(4,1)\ y\ C(-1,-3)$

b) $A(1,4), B(5,2)\ y\ C(2,1)$

c) $A(-3,-4), B(3,-3)\ y\ C(0,3)$

d) $A(-4,0), B(0,4)\ y\ C(4,0)$

2.9.4. Bisectriz

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la semirrecta de un ángulo. En otras palabras, la recta que divide en dos partes iguales a un ángulo.

Para encontrar la ecuación de la bisectriz consideraremos las dos rectas que forman el ángulo con sus formas generales $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ y un punto sobre la recta bisectriz $E(x, y)$. Como se indica en la gráfica de la *figura 2-18*.

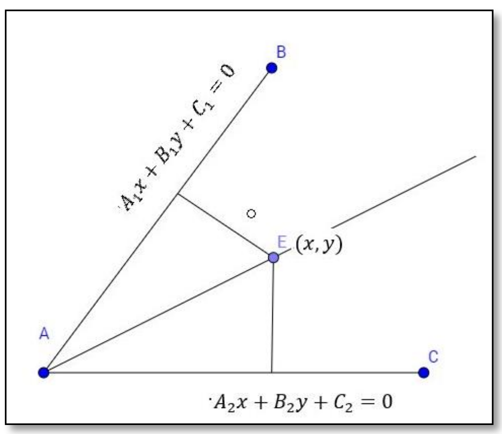

Figura 2-18 La bisectriz es la recta que divide a la mitad el ángulo

La distancia del punto a ambas rectas es la misma, por lo que tenemos la siguiente igualdad

$$d = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\left|\sqrt{\left({B_1}^2 + {A_1}^2\right)}\right|} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\left|\sqrt{\left({B_2}^2 + {A_2}^2\right)}\right|}$$

Que representa la ecuación de la bisectriz.

Problema 2.21

Encuentra la ecuación de las bisectrices del triángulo ΔABC formado por los vértices $A(3,4)$, $B(2,-3)$ y $C(-3,1)$

Solución

La gráfica de la *figura 2-19* nos muestra las rectas bisectrices de las que buscamos las ecuaciones.

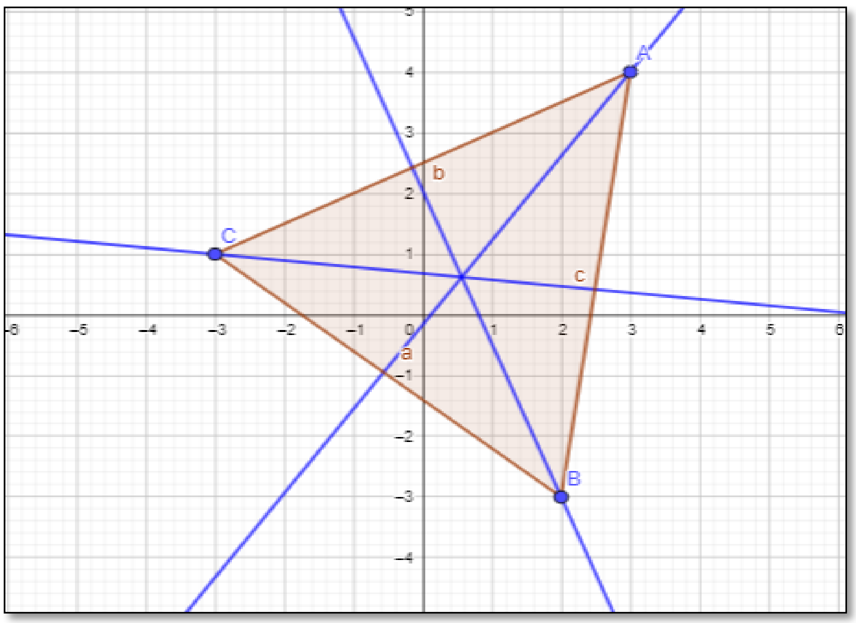

Figura 2-19 Se muestra el incentro del triángulo ΔABC, el punto donde las tres bisectrices de los ánguos internos del triángulo.

Primero tendremos que encontrar la ecuación de cada uno de los lados del triángulo.

Ecuación del segmento de recta $\overline{AB}$

$$y-4=\frac{-3-4}{2-3}(x-3)$$

$$y-4=\frac{-7}{-1}(x-3)$$

$$y-4=7(x-3)$$

$$y-4=7x-21$$

$$7x-y-17=0$$

Ecuación del segmento de recta $\overline{AC}$

$$y-4=\frac{1-4}{-3-3}(x-3)$$

$$y-4=\frac{-3}{-6}(x-3)$$

$$y-4=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$2(y-4)=x-3$$

$$2y-8=x-3$$

$$x-2y-3+8=0$$

$$x-2y+5=0$$

Ecuación del segmento de recta $\overline{BC}$

$$y-1=\frac{-3-1}{2+3}(x+3)$$

$$y-1=\frac{-4}{5}(x+3)$$

$$5(y-4)=-4(x+3)$$

$$5y-5=-4x-12$$

$$4x+5y-5+12=0$$

$$4x+5y+7=0$$

El ángulo $\forall ABC$ está formada por las rectas $7x-y-17=0$ y $4x+5y+7=0$

Su bisectriz se encuentra sustituyendo en la formula

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\left|\sqrt{\left({B_1}^2+{A_1}^2\right)}\right|}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\left|\sqrt{\left({B_2}^2+{A_2}^2\right)}\right|}$$

$$\frac{|7x-y-17|}{\left|\sqrt{((7)^2+(-1)^2)}\right|}=\frac{|4x+5y+7|}{\left|\sqrt{((4)^2+(5)^2)}\right|}$$

Que resolviendo las operaciones queda como

$$\frac{|7x-y-17|}{\left|\sqrt{50}\right|}=\frac{|4x+5y+7|}{\left|\sqrt{(41)}\right|}$$

Quitando denominadores y simplificando queda

$$|7x-y-17|\left(\sqrt{41}\right)=|4x+5y+7|\left(\sqrt{50}\right)$$

$$7\sqrt{41}x-\sqrt{41}y-17\sqrt{41}=4\sqrt{50}x+5\sqrt{50}y+7\sqrt{50}$$

$$7\sqrt{41}x - 4\sqrt{50}x - \sqrt{41}y - 5\sqrt{50}y - 17\sqrt{41} - 7\sqrt{50} = 0$$

$$16.53x - 41.75y + 37.75 = 0$$

Así la ecuación de la bisectriz del $\forall ABC$ es $16.53x - 41.75y + 37.75 = 0$

El ángulo $\forall CAB$ está formada por las rectas $7x - y - 17 = 0$ y $x - 2y + 5 = 0$

Su bisectriz se encuentra sustituyendo en la formula

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\left|\sqrt{({B_1}^2 + {A_1}^2)}\right|} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\left|\sqrt{({B_2}^2 + {A_2}^2)}\right|}$$

$$\frac{|7x - y - 17|}{\left|\sqrt{((7)^2 + (-1)^2)}\right|} = \frac{|x - 2y + 5|}{\left|\sqrt{((1)^2 + (-2)^2)}\right|}$$

Que resolviendo las operaciones queda como

$$\frac{|7x - y - 17|}{|\sqrt{50}|} = \frac{|x - 2y + 5|}{\left|\sqrt{(5)}\right|}$$

Quitando denominadores y simplificando queda

$$|7x - y - 17|(\sqrt{5}) = |x - 2y + 5|(\sqrt{50})$$

$$7\sqrt{5}x - \sqrt{5}y - 17\sqrt{5} = \sqrt{50}x - 2\sqrt{50}y + 5\sqrt{50}$$

$$7\sqrt{5}x - \sqrt{50}x - \sqrt{5}y + 2\sqrt{50}y - 17\sqrt{5} - 5\sqrt{50} = 0$$

$$-3.83x - 5.32y + 32.8 = 0$$

Así la ecuación de la bisectriz del $\forall CAB$ es $-3.83x - 5.32y + 32.8 = 0$

El ángulo $\forall ACB$ está formada por las rectas $x - 2y + 5 = 0$ y $4x + 5y + 7 = 0$

Su bisectriz se encuentra sustituyendo en la formula

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\left|\sqrt{({B_1}^2 + {A_1}^2)}\right|} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\left|\sqrt{({B_2}^2 + {A_2}^2)}\right|}$$

$$\frac{|x - 2y + 5|}{\left|\sqrt{((1)^2 + (-2)^2)}\right|} = \frac{|4x + 5y + 7|}{\left|\sqrt{((4)^2 + (5)^2)}\right|}$$

Que resolviendo las operaciones queda como

$$\frac{|x - 2y + 5|}{|\sqrt{5}|} = \frac{|4x + 5y + 7|}{\left|\sqrt{(41)}\right|}$$

Quitando denominadores y simplificando queda

$$|x - 2y + 5|\left(\sqrt{41}\right) = |4x + 5y + 7|\left(\sqrt{5}\right)$$

$$\sqrt{41}x - 2\sqrt{41}y + 5\sqrt{41} = 4\sqrt{5}x + 5\sqrt{5}y + 7\sqrt{5}$$

$$\sqrt{41}x - 4\sqrt{5}x - 2\sqrt{41}y - 5\sqrt{5}y + 5\sqrt{41} - 7\sqrt{5} = 0$$

$$0.42x - 1.62y + 47.66 = 0$$

Así la ecuación de la bisectriz del $\forall ACB$ es $0.42x - 1.62y + 47.66 = 0$

Ejercicio 14:

Encuentra la ecuación de las bisectrices del triángulo ΔABC formado por los vértices:

a) $A(1,1)$. $B(2,4)$ y $C(4,2)$

b) $A(-3,-2)$. $B(1,3)$ y $C(4,-4)$

c) $A(1,0)$. $B(2,4)$ y $C(3,-2)$

d) $A(-2,3)$. $B(0,2)$ y $C(3,5)$

3. CÓNICAS

Generalmente se utiliza un cono y cortes sobre él para definir las figuras geométricas llamadas cónicas, veamos la *figura 3-2* para ejemplificar:

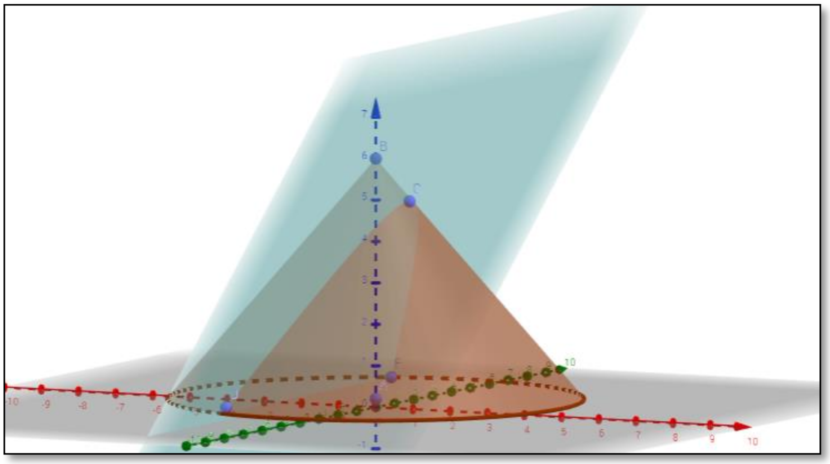

Figura 3-1 Cortes de un cono para formar las diferentes conicas, de color azul se aprecia la parábola..

En esta intersección del cono con dos planos, horizontal y transversal, podemos observar las dos primer cónicas, circulo de color rojo y parábola de color azul.

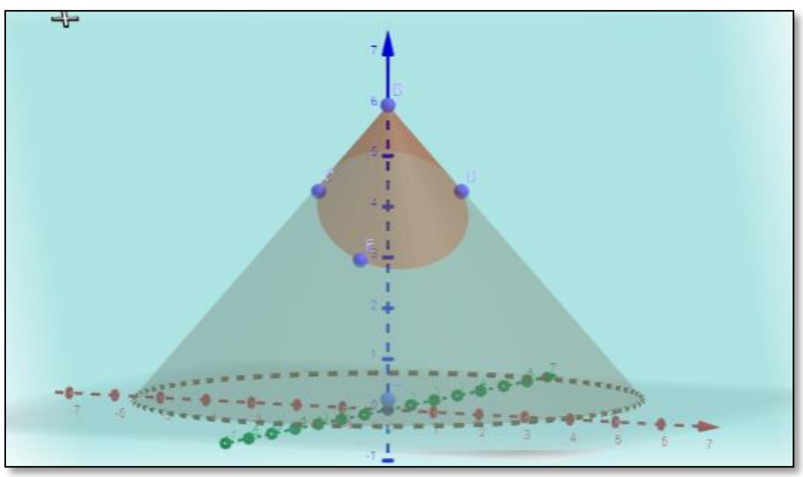

Figura 3-2 Los cortes del cono en que se aprecian la elipse y el circulo.

En esta *figura 3-2* se observa la elipse y el círculo nuevamente.

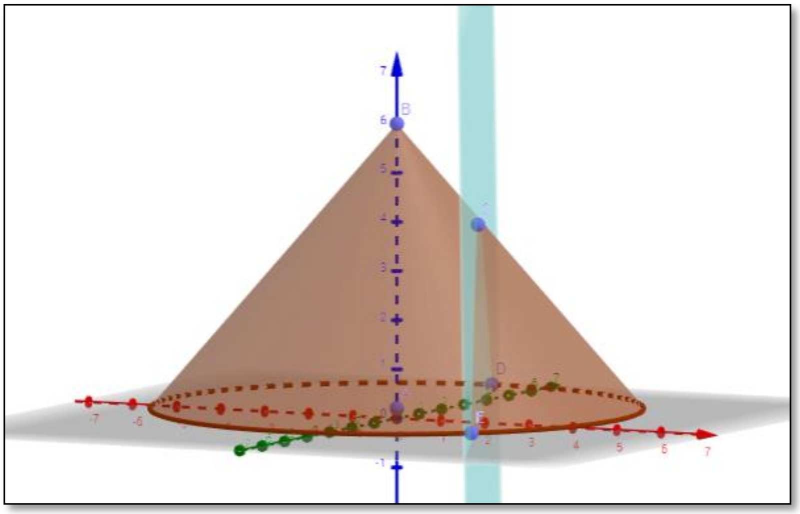

Figura 3-3 el corte vertical del cono muestra la hipérbola.

En la *figura 3-3* se muestra la hipérbola (mitad de ella) y el círculo.

Ahora analizaremos una por una las propiedades de cada una de estas figuras geométricas incluyendo el álgebra para definir analíticamente sus propiedades. Cómo ya se analizó la circunferencia comenzaremos con la parábola.

3.1. PARÁBOLA

3.1.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos una de las principales cónicas, la parábola, en ella nos enfocaremos en tres puntos claves:

1. Su definición como lugar geométrico y por consiguiente su ecuación ordinaria.
2. Analizaremos los elementos de la parábola con eje focal paralelo a los ejes coordenados y veremos la construcción de la gráfica de la misma.
3. La ecuación general de la parábola y su conversión a ecuación ordinaria y viceversa.

3.1.2. Definición como lugar geométrico

La parábola es importante en construcciones arquitectónicas, en obras de arte, en tiro parabólico, por mencionar algunas de sus aplicaciones. Empezaremos el estudio de la parábola definiéndola como lugar geométrico.

Los puntos claves de una parábola son: una recta fija llamada directriz “D”, un punto fijo llamado foco “F” y la recta que contiene al foco, la que llamaremos eje focal.

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cartesiano cuya distancia al foco “F” y a la directriz “D” es la misma. Llamemos $P(x, y)$ a las coordenadas de un punto cualquiera dentro de la parábola

$$d(P, F) = d(P, D)$$

3.1.3. Elementos de la parábola

Una parábola puede ser de tres tipos, con eje focal paralelo al eje de las x, con eje focal paralelo al eje de las y, y con eje focal inclinado. Todas tienen los mismos elementos, la diferencia es que están rotados, por lo que al entender perfectamente una de estas condiciones ya entendimos las demás. Los elementos básicos de la parábola son Foco F (punto fijo), Directriz D (recta fija), Vértice V (punto de simetría), parámetro p (distancia del vértice al foco), lado recto LR (amplitud de la parábola en el Foco), eje focal o eje de simetría (recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz).

3.1.4. Parábola con Directriz Vertical o Parábola Horizontal.

Podemos tener dos tipos de parábola horizontal, que abre a la derecha o la que abre a la izquierda, como ya se mencionó, tiene las mismas propiedades y los mismos elementos.

Empezaremos con una parábola con eje focal paralelo al eje de las x, en el que la parábola abre hacia el lado derecho, que comúnmente se refiere a ella como parábola horizontal que abre a la derecha.

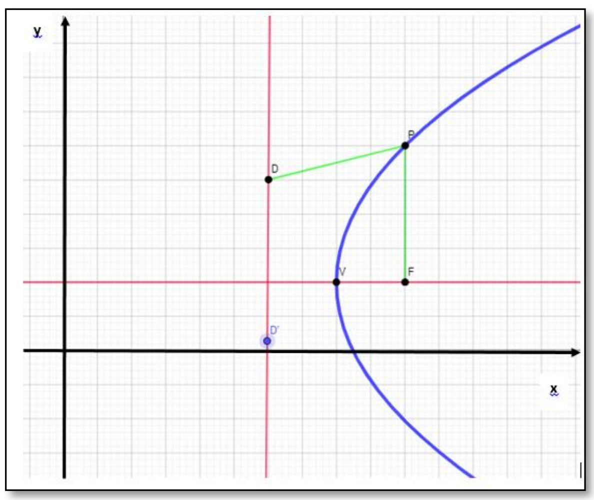

Figura 3.1-1 Muestra los elementos de la parábola horizontal, la directriz y eje focal de rojo, el vértice V, El foco F.

En la *figura 3.1-1*, los elementos marcados son:

Directriz: $\overline{DD'}$

Vértice $V(h,k)$

Foco: F

Punto sobre la parábola: $P(x,y)$

Eje focal: recta que contiene al vértice y al foco.

Por definición la distancia de cualquier punto de la parábola al foco y a la directriz es la misma, llamemos p a esta distancia. Entonces, podemos encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz:

Foco $F(h+p,k)$

Directriz: $x = h-p$

Llamaremos lado recto LR a la cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz, también conocida como ancho focal. Tomemos el punto de la parábola que pertenece a esta cuerda $P(x,k)$ y obtengamos la distancia del foco a este punto:

$$\sqrt{(x-(h+p))^2+(k-k)^2} = \sqrt{(x-(h+p))^2} = \sqrt{(x-h-p)^2} =$$

Por la directriz sabemos:

$$x = h-p$$

Despejando

$$x-h = -p$$

Entonces tenemos:

$$\sqrt{(x-h-p)^2} = \sqrt{(-p-p)^2} = \sqrt{(-2p)^2} = \sqrt{4p^2} = 2p$$

Pero el lado recto va de extremo a extremo de la parábola, por lo que, el valor del lado recto es $4p$

El eje focal es la recta que pasa por el foco y además es perpendicular a la directriz, por lo que su ecuación será $y = k$

Observemos la figura 3.1-2

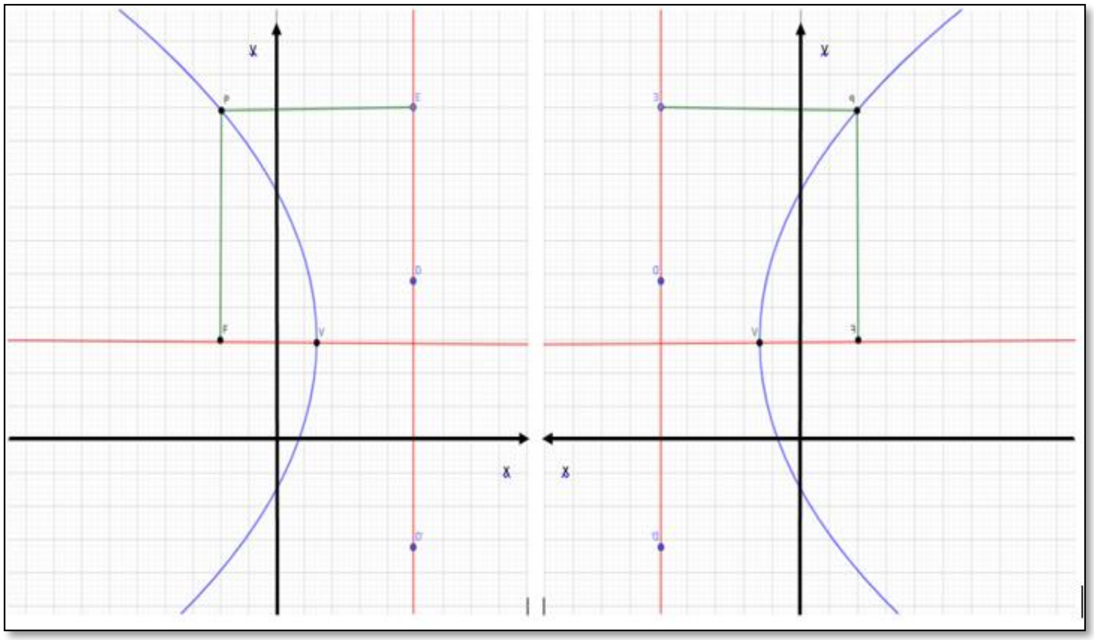

Figura 3.1-2 Los dos tipos de parábolas horizontales que podemos encontrar.

La primera representa una parábola horizontal que abre a la izquierda y la segunda una parábola horizontal que abre a la derecha, en ambas las propiedades y elementos son los mismos, de hecho la imagen solo esta rotada180°, por lo que lo único que cambia es el sentido en el que abre, en la siguiente tabla se muestra los elementos que se afectan con esta rotación.

Parábola horizontal		
	Abre a la derecha	**Abre a la izquierda**
Vértice	$V(h,k)$	$V(h,k)$
Foco	$F(h+p,k)$	$F(h-p,k)$
Directriz	$x = h-p$	$x = h+p$
Eje focal	$y = k$	$y = k$
Lado recto	$4p$	$4p$

3.1.5. Con Directriz Horizontal o Parábola Vertical.

Rotemos 90° la parábola horizontal que abre a la derecha como lo muestra la *figura 3.1-3*:

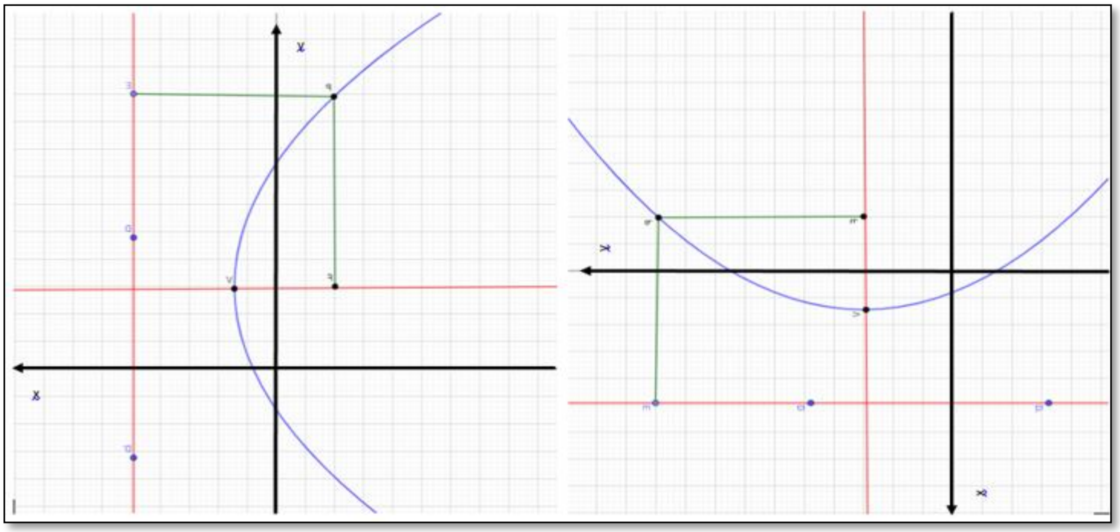

Figura 3.1-3 Rotación de los ejes para convertir una parábola horizontal en una parábola vertical.

Donde los ejes quedan invertidos, x se convierte en y y viceversa. Ahora nuestra parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Haciendo analogía con la parábola horizontal y tomando en cuenta, que ahora los valores que se afectan en el foco son las ordenadas, al igual que la directriz está definida por el cruce de la recta con las ordenadas, y el eje focal se define con el cruce en las abscisas, nuestras nuevas coordenadas de los elementos de la parábola quedan de la siguiente manera:

Parábola Vertical		
	Abre hacia arriba	**Abre hacia abajo**
Vértice	$V(h,k)$	$V(h,k)$
Foco	$F(h,k+p)$	$F(h,k-p)$
Directriz	$y = k-p$	$y = k+p$
Eje focal	$x = h$	$x = h$
Lado recto	$4p$	$4p$

3.1.6. Ecuación ordinaria de la parábola

Con Directriz Vertical o Parábola Horizontal

Comencemos por una parábola horizontal que abre a la derecha, la cual tienen una directriz vertical y eje focal horizontal. Podemos tener dos opciones: abre a la derecha o abre a la izquierda. Analizaremos primero la que abre a la derecha.

Tomemos un punto en la directriz D y en la recta perpendicular a la directriz, tendría las coordenadas $D(h-p,y)$, ahora un punto en la parábola $P(x,y)$ y apliquemos la definición de parábola, es decir:

$$d(F,P) = d(D,P)$$

Utilizando la definición de distancia entre dos puntos tendremos:

$$\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-(h-p))^2+(y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-h-p)^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-h+p)^2+(0)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación tenemos:

$$(x-h-p)^2+(y-k)^2 = (x-h+p)^2$$

Que es equivalente a

$$\big((x-h)-p\big)^2+(y-k)^2 = \big((x-h)+p\big)^2$$

$$(x-h)^2-2(x-h)p+p^2+(y-k)^2 = (x-h)^2+2(x-h)p+p^2$$

Eliminando términos semejantes:

$$-2(x-h)p+(y-k)^2 = 2(x-h)p$$

Simplificando:

$$(y-k)^2 = 4(x-h)p$$

Ordenando

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

Que es la ecuación ordinaria de la parábola con eje focal paralelo al eje de las “x” y abre a la derecha, que llamamos parábola horizontal que abre a la derecha.

Como se observó en la tabla comparativa entre la parábola que abre a la derecha y a la izquierda, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz cambiaron, por lo que la ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$d(F,P) = d(D,P)$$

$$\sqrt{(x-(h-p))^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-(h+p))^2+(y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-h+p)^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-h-p)^2+(0)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación tenemos:

$$(x-h+p)^2+(y-k)^2 = (x-h-p)^2$$

Que es equivalente a

$$\big((x-h)+p\big)^2+(y-k)^2 = \big((x-h)-p\big)^2$$

$$(x-h)^2+2(x-h)p+p^2+(y-k)^2 = (x-h)^2-2(x-h)p+p^2$$

Eliminando términos semejantes:

$$2(x-h)p+(y-k)^2 = -2(x-h)p$$

Simplificando:

$$(y-k)^2 = -4(x-h)p$$

Ordenando

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

Por lo que la única diferencia entre las parábolas que abren a la derecha y a la izquierda es el signo del lado derecho de la ecuación, por lo que completando nuestra tabla comparativa quedaría de la siguiente manera:

Parábola horizontal		
	Abre a la derecha	Abre a la izquierda
Vértice	$V(h,k)$	$V(h,k)$
Foco	$F(h+p,k)$	$F(h-p,k)$
Directriz	$x = \ h-p$	$x = h+p$
Eje focal	$y = k$	$y = k$
Lado recto	$4p$	$4p$
Ecuación ordinaria	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

Por lo que podemos tener varios tipos de ejercicios, que nos den los elementos y obtengamos la gráfica y la ecuación; que nos den la ecuación y a partir de ella obtengamos los elementos de la parábola y grafiquemos. Antes de iniciar con los ejercicios veamos los elementos y formula en caso de una parábola vertical, es decir, una parábola con directriz horizontal.

Con Directriz Horizontal o Parábola Vertical

Podríamos rehacer todo el proceso anterior, pero recordemos que la parábola Vertical es una rotación de la parábola horizontal, y que por tanto son los mismos procesos, por lo que solamente tomaremos las conclusiones a las que llegaremos, los cuales se aprecian en la siguiente tabla:

Parábola Vertical		
	Abre hacia arriba	Abre hacia abajo
Vértice	$V(h,k)$	$V(h,k)$
Foco	$F(h,k+p)$	$F(h,k-p)$
Directriz	$y = \ k-p$	$y = k+p$
Eje focal	$x = h$	$x = h$
Lado recto	$4p$	$4p$

Ecuación ordinaria	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$

La mayoría maneja de manera independiente las ecuaciones de la parábola que tienen el vértice en el origen, sin embargo, son un caso particular de las que ya vimos, en la que $V(h,k)$ se cambia por $V(0.0)$, por lo que se resumen en las siguientes tablas:

Parábola horizontal con Vértice en el origen		
	Abre a la derecha	**Abre a la izquierda**
Vértice	$V(0,0)$	$V(0,0)$
Foco	$F(p,0)$	$F(-p,0)$
Directriz	$x = \ -p$	$x = +p$
Eje focal	$y = 0$	$y = 0$
Lado recto	$4p$	$4p$
Ecuación ordinaria	$y = 4px$	$y = -4px$

Parábola Vertical con Vértice en el origen		
	Abre hacia arriba	**Abre hacia abajo**
Vértice	$V(0,0)$	$V(0,0)$
Foco	$F(0,p)$	$F(0,-p)$
Directriz	$y = \ -p$	$y = p$
Eje focal	$x = 0$	$x = 0$
Lado recto	$4p$	$4p$
Ecuación ordinaria	$x^2 = 4py$	$x^2 = -4py$

Empezaremos los ejercicios de la parábola, los cuales pueden ser de construcción de la gráfica, y/o de encontrar los elementos.

Problema 3.1-1

Encontrar la gráfica y ecuación de la parábola cuyo vértice es $V(3,-1)$ y Foco $F(5,-1)$

Solución

Empezaremos por entender la información, para ello graficaremos los datos que nos dan, veamos la *figura* 3.1-4, en ella podemos ver que el foco se encuentra del lado derecho del vértice, por lo que estamos hablando de una parábola horizontal que abre a la derecha, también, podemos ver que la distancia entre el vértice y el foco es de 2, es decir, $p = 2$, y como el vértice se encuentra a la mitad del foco y la directriz, podemos ver que la directriz se encuentra en $x = 1$, también, sabemos que el eje focal contiene al foco y al vértice, por lo que es $y = -1$. La distancia del eje focal es $4p$, es decir, $LR = 4(2) = 8$, representada por el segmento AB, al unir el vértice con los extremos del lado recto con un parabológrafo se obtiene la parábola como se ven en la $figura\ 3.1 - 5$.

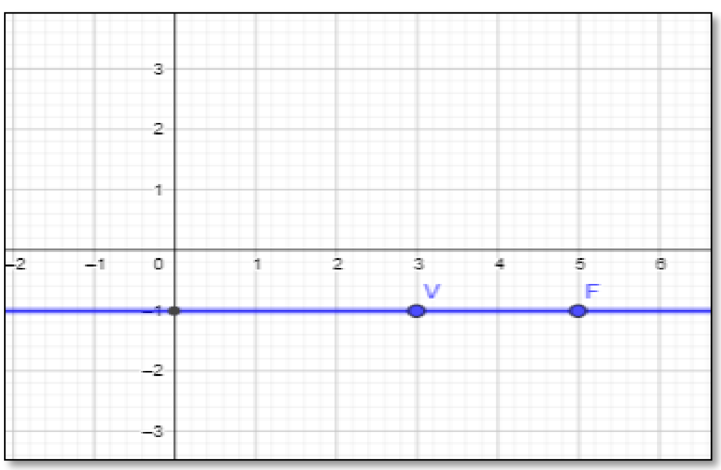

Figura 3.1-4 Vértice y Foco de la parábola vertical, donde el foco se encuentra del lado derecho del vértice, característica de la parábola vertical.

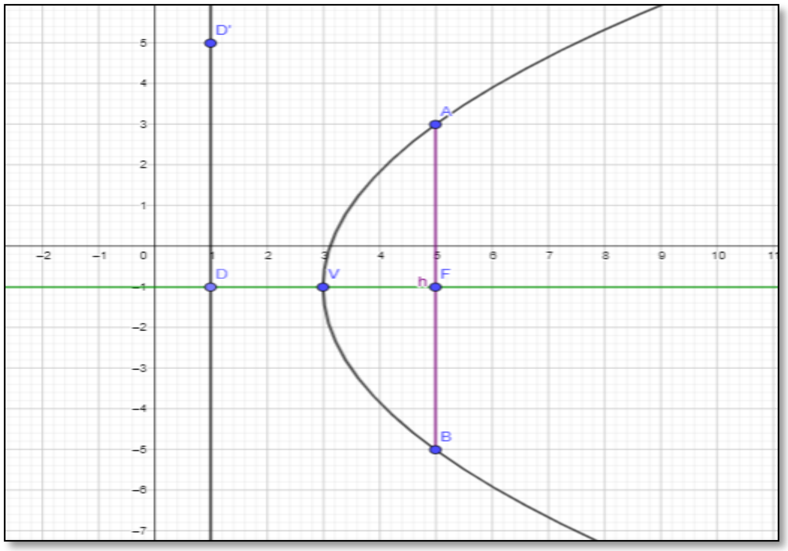

Figura 3.1-5 Gráfica de la parábola con vértice en $V(3,-1)$ *y Foco* $F(5,-1)$

Otra forma de identificar el tipo de parábola que tenemos es darnos cuenta que el vértice y el foco comparten la ordenada, lo cual nos dice que es parábola horizontal, como la abscisa es mayor la del foco que la del vértice podemos decir que abre a la derecha, luego, la fórmula de la abscisa del foco es $h+p$, por lo que tenemos:

$$h+p=5$$

Como $h=3$ tenemos

$$3+p=5$$

Despejando

$$p=5-3=2$$

Por lo que podemos completar la tabla de los elementos de la parábola

Abre a la derecha		
Vértice	$V(h,k)$	$V(3,-1)$
Foco	$F(h+p,k)$	$F(5,-1)$
Directriz	$x=\ h-p$	$x=\ 3-2=1$
Eje focal	$y=k$	$y=-1$
Lado recto	$4p$	$4(2)=8$
Ecuación ordinaria	$(y-k)^2=4p(x-h)$	$(y+1)^2=8(x-3)$

Figura 3.1-6 Tabla de los elementos de la parábola que abre a la derecha

Así, la ecuación de la parábola es

$$(y+1)^2 = 8(x-3)$$

Problema 3.1-2

Obtener la ecuación y gráfica de la parábola con foco $F(3,5)$ y directriz $y = 1$.

Solución

Grafiquemos primero los elementos del problema como se muestra en la $figura\ 3.1-7$

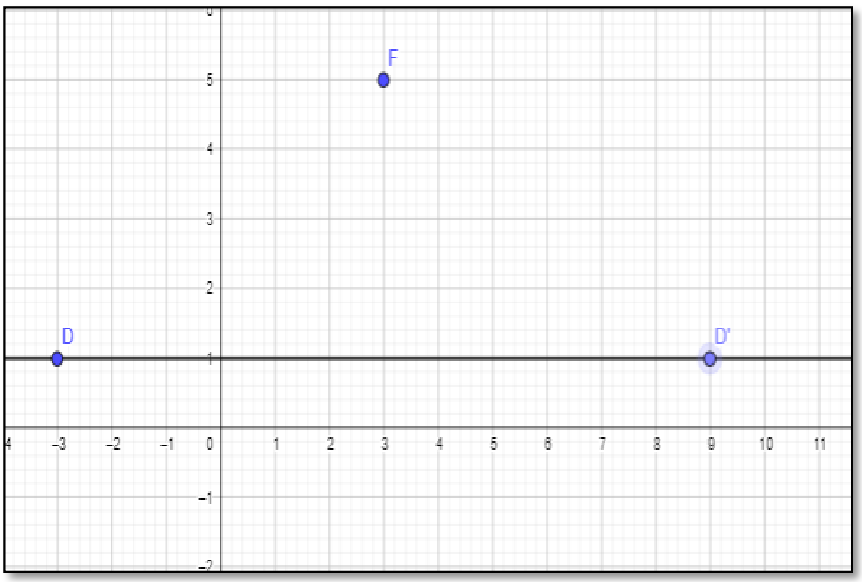

Figura 3.1-7 gráfica de la parábola con foco $F(3,5)$ y directriz $y = 1$.

Analizando la gráfica y la definición de parábola podemos obtener el vértice $V(3,3)$ ya que se encuentra a la mitad del foco y del vértice, también podemos encontrar el parámetro, ya que es la distancia del vértice al foco, o la mitad del foco a la directriz, es decir, el parámetro es $p = 2$, el eje focal es la recta que contiene al vértice y al foco, por lo que sería $x = 3$,y el lado recto es el $4p$, es decir, 8, quedando la gráfica como la $figura\ 3.1-8$.

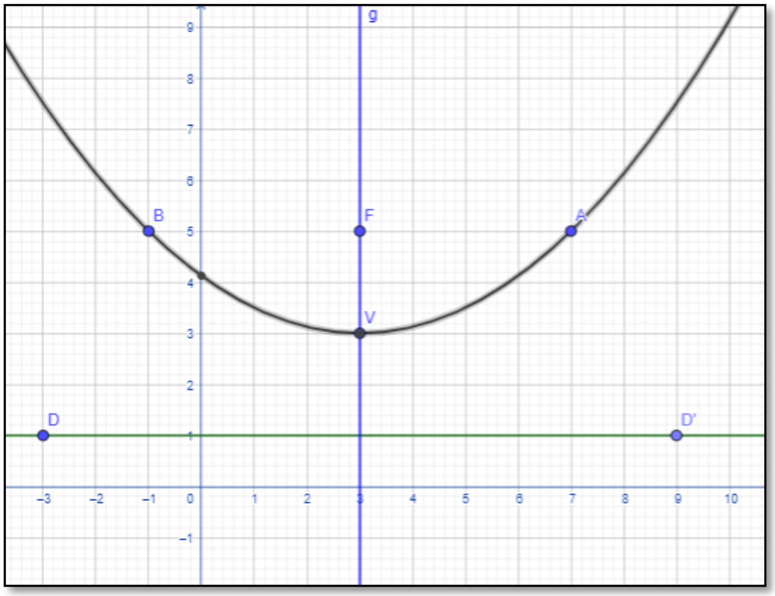

Figura 3.1-8 Gráfica terminada de la parábola con foco $F(3,5)$ y directriz $y = 1$.

Podemos ver que es una parábola vertical que abre hacia arriba, por lo que su ecuación se encuentra con la formula

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Es decir:

$$(x-3)^2 = 8(y-3)$$

Otra forma de obtener los elementos sin tener que graficar es analizar los elementos que nos dan, $F(3,5)$ y directriz $y = 1$, como la directriz es una recta horizontal, el eje focal es vertical, ahora la fórmula del foco es $F(h, k+p)$, que sustituyendo tenemos:

$$3 = h$$

$$5 = k + p$$

La ecuación de la directriz es $y = k - p$, es decir

$$1 = k - p$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} k + p = 5 \\ k - p = 1 \end{cases}$$

Al resolverlo tenemos que $k = 3$, y $p = 2$.

Así, el vértice es $V(h,k) = V(3,3)$, $LR = 4p = 8$.

Problema 3.1-3

Encuentra la ecuación de la parábola con Foco $F(0,-11)$ y $V(0,0)$

Solución

Tiene vértice en el origen, y el foco abajo del vértice, por lo que hablamos de parábola vertical que abre hacia abajo, y por lo tanto $p=11$, y la directriz y=11

En tabla tenemos

Parábola Vertical abre hacia abajo		
Vértice	$V(h,k)$	$V(0,0)$
Foco	$F(h,k-p)$	$F(0,-11)$
Directriz	$y = \ k+p$	$y=11$
Eje focal	$x=h$	$X=0$
Lado recto	$4p$	$4(11)=44$

Quedando la gráfica como lo muestra la *figura 3.1-9*

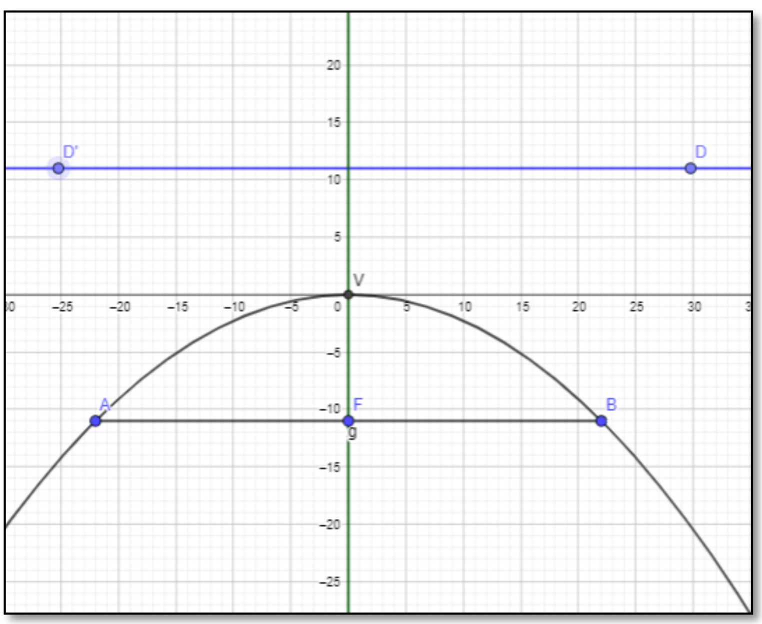

Figura 3.1-9 Parábola con Foco $F(0,-11)$ y $V(0,0)$

Problema 3.1-4

Dada la ecuación de la parábola $y^2 = -12(x-6)$ encuentra sus elementos y grafica.

Solución

Cómo el término de y es el cuadrado, estamos hablando de una parábola horizontal que abre a la izquierda, cuya ecuación sería

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

Haciendo una analogía con la ecuación original tenemos

$$(y-0)^2 = -12(x-6)$$

Así $4p = 12$ y $p = 3$, y podemos llenar nuestra tabla

Abre a la izquierda		
$\boldsymbol{V(h,k)}$	$V(h,k)$	$V(6,0)$
$\boldsymbol{F(h-p,k)}$	$F(h-p,k)$	$F(6-3,0) = F(3,0)$
$\boldsymbol{x = h+p}$	$x = h+p$	$x = 6+3 = 9$
$\boldsymbol{y = k}$	$y = k$	$y = 0$
$\boldsymbol{4p}$	$4p$	$4(3) = 12$

Quedando la gráfica como la *figura 3.1-10*

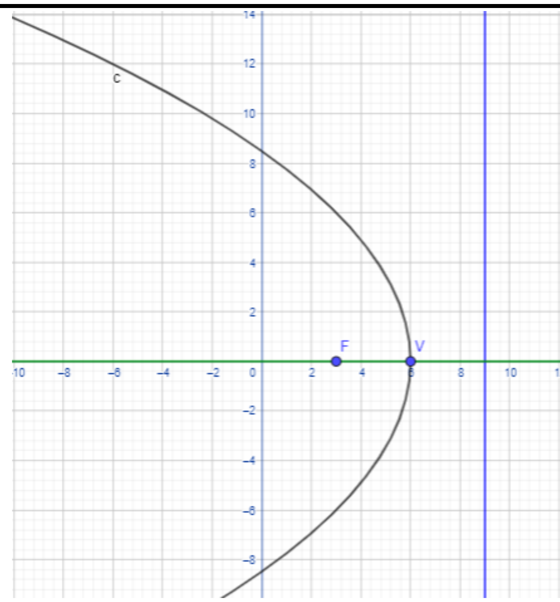

Figura 3.1-10 Gráfica de la parábola $y^2 = -12(x-6)$

Problema 3.1-5

Encuentra la ecuación de la parábola cuyos extremos del lado recto son $A(4,0)$ y $B(-4,0)$, abre hacia arriba.

Solución

La parábola es simétrica, y el punto medio del lado recto es el foco, por lo que el punto medio del lado recto es

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0+0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Por lo que el foco es $F(0,0)$.

Ahora, el lado recto mide $4p$, que es la distancia de AB

$$d_{AB} = \overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-4-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-8)^2} = 8$$

Es decir, $4p = 8$ donde $p = 2$.

Luego el Foco $F(0,0) = (0,0 = k + 2)$, por lo que $k = -2$

Con nuestra tabla tenemos

Abre hacia arriba		
Vértice	$V(h,k)$	$V(0,-2)$
Foco	$F(h,k+p)$	$F(0,0) = (0,0 = k+2)$, $k = -2$
Directriz	$y = k - p$	$y = -2 - 2 = -4$
Eje focal	$x = h$	$x = 0$
Lado recto	$4p$	$4p = 8$
Ecuación ordinaria	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(x-0)^2 = 8(y+2)$

Ejercicios 15:

Encontrar la gráfica y ecuación de la parábola cuyo vértice y focos son:

a) $V(2,6)$ y $F(-4,6)$

b) $V(-1,3)$ y $F(-1,5)$

c) $V(0,6)$ y $F(0,2)$

d) $V(3,4)$ y $F(-2,4)$

e) $V(0,0)$ y $F(0,3)$

Obtener la ecuación y gráfica de la parábola con foco y directriz indicados:

a) $F(3,5)$ y directriz $y = 1$.

b) $F(4,2)$ y directriz $y = -3$.

c) $F(-2,3)$ y directriz x= 2.

d) $F(0,0)$ y directriz $x = -4$.

e) $F(-1,-3)$ y directriz $y = -5$.

Encuentra la ecuación y gráfica de la parábola cuyos extremos del lado recto son

a) $A(0,4)$ y $B(0,-4)$, abre hacia abajo.

b) $A(1,2)$ y $B(-3,2)$, abre hacia arriba

c) $A(5,3)$ y $B(-1,3)$, abre hacia la derecha

d) $A(0,3)$ y $B(0,-3)$, abre hacia la izquierda

e) $A(0,3)$ y $B(4,3)$, abre hacia abajo

Dada la ecuación de la parábola encuentra todos sus elementos

a) $x^2 = 12(y-4)$

b) $(y+1)^2 = 32(x-1)$

c) $(x-4)^2 = -16(y+3)$

d) $(y-1)^2 = 8x$

e) $x^2 = -16y$

3.1.7. Ecuación general de la parábola

Para encontrar la ecuación general de la parábola vamos a considerar únicamente los dos casos de la parábola, horizontal y vertical. Encontremos primeramente el caso de la ecuación de la parábola vertical

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$

Desarrollando el binomio al cuadrado y la multiplicación tenemos

$$x^2 - 2xh + h^2 = \pm 4py \mp 4pk$$

Pasando todo de un solo lado de la ecuación tenemos

$$x^2 - 2xh + h^2 \mp 4py \pm 4pk = 0$$

Ordenando tenemos

$$x^2 - 2xh \mp 4py + h^2 \pm 4pk = 0$$

Llamemos

$$D = -2h$$

$$E = \mp 4p$$

$$F = h^2 \pm 4pk$$

Entonces la ecuación general de la parábola vertical es

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Análogamente la ecuación de la parábola horizontal se obtiene

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$

Desarrollando el binomio al cuadrado y la multiplicación tenemos

$$y^2 - 2yh + k^2 = \pm 4px \mp 4ph$$

Pasando todo de un solo lado de la ecuación tenemos

$$y^2 - 2yh + k^2 \mp 4px \pm 4ph = 0$$

Ordenando tenemos

$$y^2 - 2yh \mp 4px + k^2 \pm 4ph = 0$$

Llamemos

$$D = -2h$$

$$E = \mp 4p$$

$$F = k^2 \pm 4ph$$

Entonces la ecuación general de la parábola vertical es

$$y^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Problema 3.1-6

Encuentra la ecuación de la parábola con ecuación ordinaria $(x-3)^2 = 8(y-1)$

Solución

Desarrollemos el binomio al cuadrado y la multiplicación

$$(x-3)^2 = 8(y-1)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 8$$

Pasando todo de un solo lado de la ecuación tenemos

$$x^2 - 6x - 8y + 9 - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$$

Que es la ecuación general de la parábola.

Problema 3.1-7

Dada la ecuación general de la parábola encuentra su ecuación ordinaria y sus elementos y gráfica.

$$x^2 - 4x - 8y - 28 = 0$$

Solución

Agrupemos los términos que tienen x, ya que es el cuadrático y pasamos todo lo demás del otro lado de la igualdad

$$x^2 - 4x = 8y + 28$$

Ahora completemos el trinomio cuadrado perfecto

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = (2)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 8y + 28 + 4$$

Factorizando tenemos

$$(x-2)^2 = 8y + 32$$

Factorizando tenemos

$$(x-2)^2 = 8(y+4)$$

De donde se obtiene el vértice $V(2,-4)$ y el parámetro $4p = 8$, donde $p = 2$, como es una parábola vertical utilizamos nuestra tabla

Abre hacia arriba		
Vértice	$V(h,k)$	$V(2,-4)$
Foco	$F(h,k+p)$	$F(2,-4+2) = (2,-2)$
Directriz	$y = k - p$	$y = -4 - 2 = -6$
Eje focal	$x = h$	$x = 2$
Lado recto	$4p$	$4p = 8$
Ecuación ordinaria	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(x-2)^2 = 8(y+4)$

Y la gráfica nos queda como en la *figura 3.1-11*:

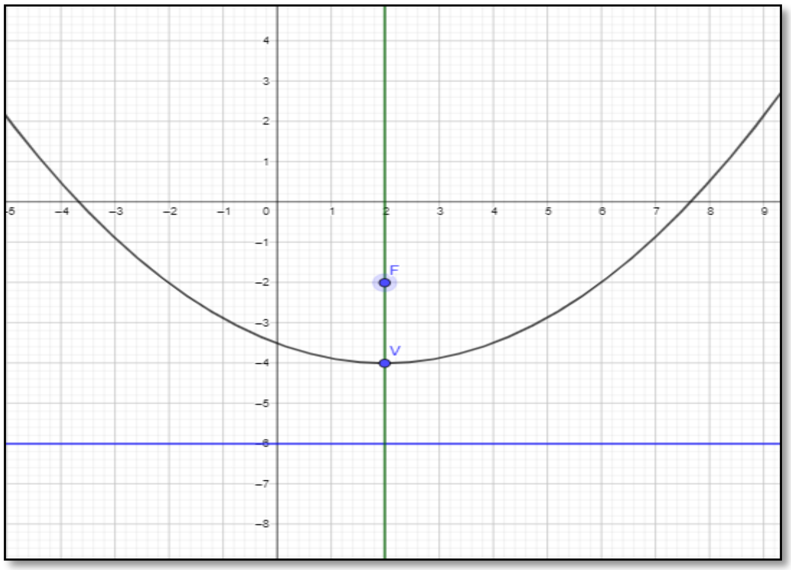

Figura 3.1-11 Gráfica de la ecuación x²-4x-8y-28=0

Ejercicio 16:

Dada la ecuación general de la parábola encuentra su ecuación ordinaria y sus elementos y gráfica.

a) $x^2 - 4x - 5y - 31 = 0$

b) $x^2 + 2x - 40y + 1 = 0$

c) $y^2 - 18y + 64x + 17 = 0$

d) $y^2 - 16x = 0$

e) $x^2 + 28y = 0$

f) $y^2 - 6y + 4x + 9 = 0$

g) $x^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

3.2. CIRCUNFERENCIA

3.2.1. Introducción

Este capítulo está organizado de la siguiente manera:

1. Definir la circunferencia como lugar geométrico y la obtención de su ecuación ordinaria.
2. Encontraremos la ecuación general de la circunferencia y convertiremos la ecuación ordinaria en general y viceversa.
3. Analizaremos algunos casos particulares de la circunferencia vistos en geometría plana con el enfoque analítico.

3.2.2. Circunferencia como lugar geométrico

Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, es decir, la distancia de cualquier punto que se encuentre en la circunferencia al centro es la misma, y dicha distancia se llama radio

3.2.3. Ecuación ordinaria y canónica de la circunferencia

Para definir la circunferencia tomemos $C(h,k)$ como las coordenadas del centro de la misma, $P(x,y)$ un punto de la circunferencia y r un número real positivo como el radio de la circunferencia. Calculemos la distancia de C a P.

$$r = d(C,P) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Elevemos al cuadrado toda la ecuación tenemos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Que se conoce como la **ecuación ordinaria de la circunferencia**.

Se le llama ecuación canónica de la circunferencia cuando las coordenadas del centro de la circunferencia se encuentran en el origen del plano cartesiano, es decir, las coordenadas del centro son $C(0,0)$. Sustituyendolas en la ecuación de la circunferencia tendríamos:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$

Por lo que la **ecuación canónica de la circunferencia** queda de la forma:

$$x^2+y^2=r^2$$

Empezaremos con ejemplos básicos de la ecuación de una circunferencia.

Problema 3.2-1:
Encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia que tiene centro $C(3,-4)$ y pasa por el punto $P(6,1)$.

Solución:
La información que nos dan es el centro, pero nos falta encontrar el radio, el cual por definición se encuentra calculando la distancia del centro al punto, por lo tanto tendríamos:

$$r=d(C,P)=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=\sqrt{(3-6)^2+(-4-1)^2}=$$
$$\sqrt{(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

Por lo que el radio tiene el valor de $r=\sqrt{34}$.

Ya tenemos los elementos necesarios para encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia, aplicamos la ecuación de la circunferencia:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-3)^2+\left(y-(-4)\right)^2=\left(\sqrt{34}\right)^2$$
$$(x-3)^2+(y+4)^2=34$$

Problema 3.2-2:

Encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia que tiene centro en el origen y pasa por el punto $P(1,4)$

Solución:

Solo nos falta encontrar el valor del radio de la circunferencia, el cual se encuentra nuevamente con la fórmula de distancia de dos puntos:

$$r = d(C, P) = \sqrt{(0-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

Por lo que el radio tiene el valor de $r = \sqrt{17}$.
Sustituyendo la información en la ecuación canónica de la circunferencia tendríamos:

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$$

$$x^2 + y^2 = 17$$

Que es la ecuación canónica de la circunferencia que nos pedían.

Problema 3.2-3:

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro los extremos $A(-5,4)$ y $B(3,-2)$.

Solución:

Por definición, el diámetro D es el doble del radio, por lo que encontraremos el valor del diámetro y lo dividiremos entre dos para encontrar el valor del radio.

$$D = d(A, B) = \sqrt{(-5-3)^2 + \left(4-(-2)\right)^2} = \sqrt{(-5-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Por lo que el radio sería

$$r = \frac{10}{2} = 5$$

También, el centro se encuentra a la mitad del diámetro, por lo que encontraremos el punto medio para encontrar las coordenadas del centro de la circunferencia.

Centro $C(h, k)$

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo que el centro tiene coordenadas $C(-1,1)$

Ya tenemos los elementos de la circunferencia, centro y radio, por lo que ya podemos encontrar su ecuación.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=(5)^2$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=25$$

Ejercicio17

Encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia que tiene centro C y pasa por el punto P

a) $C(-1,-5)$ y $P(0,4)$

b) $C(3,0)$ y $P(3,-4)$

c) $C(0,0)$y $P\ (-2,-5)$

d) $C(0,6)$ y $P(1,-3)$

e) $C(2,0)$ y $P(7,-4)$

f) $C(0,0)$y $P\ (-1,1)$

g) $C(0,0)$y $P\ (2,-4)$

Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro los extremos A y B

a) $A(1,-2)$ y $B(-1,2)$

b) $A(0,5)$ y $B(-3,7)$

c) $A(-4,2)$ y $B(1,-6)$

d) $A(0,0)$ y $B(-3,7)$

e) $A(-7,0)$ y $B(2,0)$

f) $A(0.6,-0.4)$ y $B(-0.5,1)$

3.2.4. Ecuación general de la circunferencia

Vamos a desarrollar los binomios de la ecuación ordinaria de la circunferencia.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$$

Pasamos todos los elementos de un solo lado de la ecuación y ordenamos con respecto a sus exponentes de mayor a menor.

$$x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$$

Cómo h y k representan números, $2h$ y $2k$ también son números, que llamaremos A y B respectivamente y llamaremos C a la suma de $h^2+k^2-r^2$. Entonces la ecuación general de la circunferencia tendría la forma:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Problema 3.2-4

Encontrar la ecuación general de la circunferencia que tiene centro $C(2,-5)$ y radio $r = 4$.

Solución:

Apliquemos la fórmula de la ecuación de la circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y+5)^2=(4)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2+10y+25=16$$

Pasando todos los términos de un solo lado tenemos:

$$x^2+y^2-4x+10y+4+25-16=0$$

$$x^2+y^2-4x+10y+13=0$$

Que es la ecuación general de la circunferencia.

Otra forma de manejarlo es utilizando los elementos de la ecuación general:

$$A=-2h=2(2)=-4$$

$$B=-2K=2(-5)=10$$

$$C=h^2+k^2-r^2=(2)^2+(-5)^2-(4)^2=13$$

Así la ecuación general queda

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$$

Otro problema es encontrar los elementos de la circunferencia dada la ecuación general.

Problema 3.2-5:

Encontrar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$

Solución:

Utilizaremos el método de completar el trinomio cuadrado perfecto, primero agrupamos los términos cuadrados con sus respectivos lineales y pasamos el independiente al otro lado de la igualdad

$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 8y) = -24$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto, dividimos el término lineal entre dos y lo elevamos al cuadrado, tanto para x como para y

$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$ para x

$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$ para y

Ahora lo sumamos a cada lado de la igualdad

$$(x^2 - 4x + 9) + (y^2 - 10y + 16) = -24 + 9 + 16$$

Factorizando los trinomios cuadrados perfectos

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$$

Haciendo una analogía con la ecuación de la circunferencia tendremos que $h = 3$, $k = 4$ y $r^2 = 1$ por lo que el centro y el radio son:

$C(4,5)$ y $r = 1$

Otra forma de encontrar los elementos de la circunferencia es utilizar

$$A = -2h$$

$$B = -2K$$

$$C = h^2 + k^2 - r^2$$

Cómo $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$ $A = -6$, $B = -8$ y $C = 25$, por lo que
$-6 = 2h$ Entonces $h = \frac{-6}{2} = -3$

$-8 = 2k$ Entonces $k = \frac{-8}{2} = -4$

$$25 = (-3)^2 + (-4)^2 - r^2 = 9 + 16 - r^2$$

Despejando $r^2 = -24 + 9 + 16 = 1,$ por lo que $r = 1$

Por lo que el centro y radio son $C(4,5)$ $y r = 1.$

Ejercicio 18

Encontrar la ecuación general de la circunferencia que tiene centro Cy radio r

a) $C(2,-6)$ y $r = 3$

b) $C(-1,-3)$ y $r = 4$

c) $C(5,-4)$ y $r = 1$

d) $C(0,-3)$ y $r = 4$

e) $C(0,0)$ y $r = 5$

Encontrar el centro y el radio de las circunferencias

a) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 49 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

3.2.5. Casos particulares de la circunferencia

Ecuación de la circunferencia dados tres puntos.

Uno de los problemas de circunferencia que se presentan a menudo es encontrar la ecuación ordinaria y general de la circunferencia cuando se conocen solamente tres puntos de ella.

Problema 3.2-6:

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,-1), B(5,3), C(3,5)$.

Solución

Cómo los tres puntos pasan por la misma circunferencia los tres cumplen con la ecuación general de la circunferencia, es decir, al sustituirlos en la ecuación general de la circunferencia se cumple la igualdad:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Para $A(1,-1)$ tenemos

$$(1)^2 + (-1)^2 + A(1) + B(-1) + C = 0$$

Es decir,

$$1 + 1 + A - B + C = 0$$

Pasando las constantes de un solo lado de la igualdad tenemos

$$A - B + C = -2$$

Para $A(5,3)$ tenemos

$$(5)^2 + (3)^2 + A(5) + B(3) + C = 0$$

Es decir,

$$25 + 9 + 5A + 3B + C = 0$$

Pasando las constantes de un solo lado de la igualdad tenemos

$5A + 3B + C = -34$

Para $A(3,5)$ tenemos

$$(3)^2 + (5)^2 + A(3) + B(5) + C = 0$$

Es decir,

$$9 + 25 + 3A + 5B + C = 0$$

Pasando las constantes de un solo lado de la igualdad tenemos

$3A + 5B + C = -34$

Por lo que tenemos el sistema de ecuaciones:

$$A - B + C = -2$$

$$5A + 3B + C = -34$$

$$3A + 5B + C = -34$$

Lo resolveremos reduciendo a sistemas de ecuaciones de dos incógnitas, restando la primera ecuación a las dos restantes.

Restando la segunda de la primera

$$A - B + C = -2$$

$$5A + 3B + C = -34$$

Tenemos:

$$-4A - 4B = 32$$

Dividiendo entre -4 tenemos

$$A + B = -8$$

Restando la tercera de la primera

$$A - B + C = -2$$

$$3A + 5B + C = -34$$

Tenemos:

$$-2A - 6B = 32$$

Dividiendo entre -2 tenemos

$$A + 3B = -16$$

Por lo que tenemos el sistema de ecuaciones de dos incógnitas

$$A + B = -8$$

$$A + 3B = -16$$

Restando tenemos

$$2B = -8$$

Despejando obtenemos $B = -4$ y sustituyendola en la ecuación $A + B = -8$ tenemos

$$A - 4 = -8$$

Despejando $A = -8 + 4 = -4$, es decir, $A = -4$.

Sustituyendo ambos valores en la ecuación $A - B + C = -2$ tenemos

$$-4 - (-4) + C = -2$$

Por lo que $C = -2$

Así, la ecuación de la circunferencia queda de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$$

Que es la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados.

Si queremos encontrar sus elementos tendríamos que completar los trinomios cuadrados perfectos:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 4y) = 2$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = 2 + 4 + 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

Donde el centro sería $C(2,2)$y el radio $r = \sqrt{10}$.

Otra forma de expresar este problema es plantearlo como:

Encontrar la ecuación de la circunferencia circunscrita en el triángulo cuyos vértices son $A(1, -1)$,. $B(5,3)$, $C(3,5)$, Ya que los vértices forman un triángulo por lo que la circunferencia queda circunscrita, como se ve en la *figura 3.2-1*:

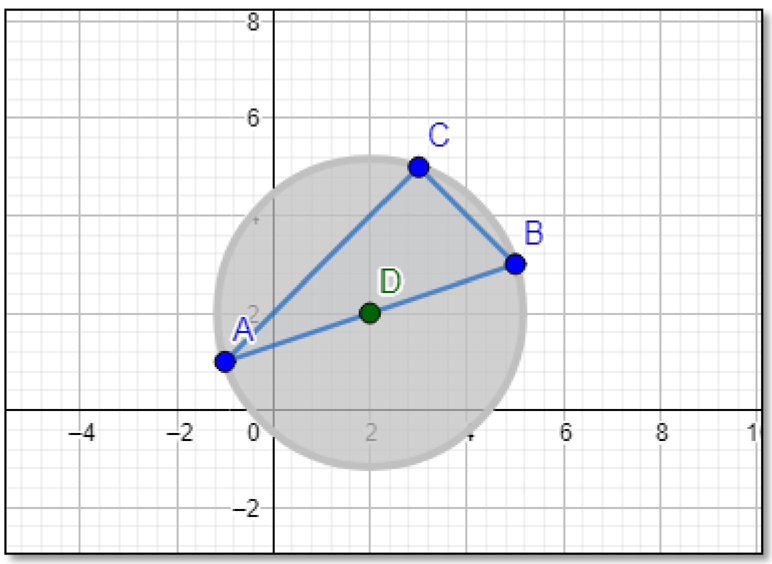

Figura 3.2-1 Ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, -1), B(5,3), C(3,5)$.

Ejercicio 19

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos

a) $A(-3,2), B(1,3), C(0,0)$.

b) $A(0,3), B(4,3), C(2, -2)$.

c) $A(5,4), B(1,3), C(3, -5)$.

Ecuación de la circunferencia dado un punto y una recta tangente a ella en un punto.

Es un problema muy usual, donde tenemos que analizar las definiciones de recta tangente y de los elementos de la circunferencia.

“una tangente a una circunferencia es una recta (en el mismo plano) que corta a la circunferencia en un solo punto. Este punto se llama punto de tangencia o punto de contacto. Decimos que la recta y la circunferencia son tangentes en el punto de contacto” **(referencia)**

Problema 3.2.7

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-3{,}6)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y - 16 = 0$ en el punto $P(2{,}5)$.

Solución

Tenemos dos puntos pertenecientes a la circunferencia, por lo tanto satisfacen la ecuación de una circunferencia. Llamemos $C(h, k)$ al centro de la circunferencia y r al radio de la misma, por lo que la ecuación sería:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Al sustituir el punto $(-3{,}6)$ en la ecuación tenemos:

$$(-3 - h)^2 + (6 - k)^2 = r^2$$

La ecuación es equivalente a

$$(3 + h)^2 + (6 - k)^2 = r^2$$

Que al desarrollar los binomios, simplificando y pasando todo de un solo lado de la ecuación tenemos:

$$(9 + 6h + h^2) + (36 - 12k + k^2) = r^2$$

$$h^2 + k^2 - r^2 + 6h - 12k + 45 = 0$$

Al sustituir el punto $(2{,}5)$ en la ecuación tenemos:

$$(2 - h)^2 + (5 - k)^2 = r^2$$

Que al desarrollar los binomios, simplificando y pasando todo de un solo lado de la ecuación tenemos:

$$(4 - 4h + h^2) + (25 - 10k + k^2) = r^2$$

$$h^2 + k^2 - r^2 - 4h - 10k + 29 = 0$$

Por lo que tenemos el sistema de ecuaciones:

$$h^2 + k^2 - r^2 + 6h - 12k + 45 = 0$$

$$h^2 + k^2 - r^2 - 4h - 10k + 29 = 0$$

Que restamos ambas ecuaciones tenemos

$$10h - 2k + 16 = 0$$

Dividiendo la ecuación entre dos tenemos

$$5h - k + 8 = 0$$

Ahora, como la recta es perpendicular a la circunferencia, un diámetro es perpendicular a dicha recta y contiene el centro, por lo que debemos encontrar la ecuación del diámetro perpendicular a la recta $3x + 2y - 16 = 0$, que se convierte en un problema de ecuación de la recta que tenemos un punto y podemos encontrar su pendiente.

De la recta $3x + 2y - 16 = 0$ obtendremos la pendiente despejando y

$y = \frac{-3}{2}x + 8$, por lo que la pendiente es $m = \frac{-3}{2}$.

Así, la pendiente del diámetro perpendicular que contiene al centro es $m = \frac{2}{3}$, y como tenemos un punto $(2,5)$. Por lo que la ecuación del diámetro es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

Multiplicando por 3

$$3(y - 5) = 2(x - 2)$$

$$3y - 15 = 2x - 4$$

$$2x - 3y - 4 + 15 = 0$$

$$2x - 3y + 11 = 0$$

Ecuación del diámetro perpendicular a la recta $3x + 2y - 16 = 0$

Cómo está recta contiene al centro $C(h, k)$, al sustituir este en la ecuación tenemos

$$2h - 3k + 11 = 0$$

Juntando las dos ecuaciones encontradas tenemos el sistema de ecuaciones:

$$2h - 3k + 11 = 0$$

$$5h - k + 8 = 0$$

Multiplicando la segunda ecuación por -3

$$2h - 3k + 11 = 0$$

$$-3(5h - k + 8 = 0)$$

Simplificando

$$2h - 3k + 11 = 0$$

$$-15h + 3k - 24 = 0$$

Sumando las ecuaciones:

$$-13h - 13 = 0$$

Despejando h tenemos:

$$h = \frac{13}{-13} = -1$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos el valor de k

$$2h - 3k + 11 = 0$$

$$2(-1) - 3k + 11 = 0$$

$$-2 - 3k + 11 = 0$$

$$-3k = -11 + 2 = -9$$

$$k = \frac{-9}{-3} = 3$$

Por lo que el centro de la circunferencia es $C(-1,3)$.

Para obtener el radio usaremos la fórmula de distancia entre dos puntos, usemos el centro $C(-1,3)$ y el punto por el que pasa $A(-3,6)$

$$d(C,A) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(-3+1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

Por lo que el radio es $r = \sqrt{13}$ y como el centro es $C(-1,3)$, la ecuación de la circunferencia será:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$$

Es decir

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

Desarrollando los cuadrados tendremos

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 13$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 + 9 - 13 = 0$$

Por lo que la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0$$

Ejercicio 20

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta l dada en el punto P.

a) $A(-4,4)$, $l: x + y - 4 = 0$, $P(0,4)$

b) $A(5,8)$, $l: 4x + 3y - 54 = 0$, $P(9,6)$

c) $A(8,0)$, $l: 4x + 3y - 22 = 0$, $P(4,-2)$

Ecuación de la circunferencia tangente a los ejes.

Problema 3.2-8

Escribe la ecuación de la circunferencia tangente al eje x y al eje y, si se sabe que su radio es $r = 3$ y que su centro está en el cuarto cuadrante.

Solución

Que sea tangente al eje de las x, significa que el punto de tangencia tiene las coordenadas $(x, 0)$.

Ahora el eje de las x tiene la ecuación $y = 0$, por lo que su recta tangente que contiene al radio y que pasa por el centro tiene la fórmula $x = h$

Que sea tangente al eje de las y, quiere decir que su punto de tangencia tendrá coordenadas $(0, y)$.

Ahora el eje de las y tiene la ecuación $x = 0$, por lo que su recta tangente que contiene al radio y que pasa por el centro tiene la fórmula $y = -k$.

De esta manera tenemos que los puntos de tangencia son $A(h, 0)$ y $B(0, -k)$.Con cualquiera de estos dos puntos podemos calcular el radio de la circunferencia.

Tomemos $A(h, 0)$ y el centro $C(h, k)$

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(h-h)^2 + (0-k)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-k)^2} = \sqrt{(k)^2} = k$$

Tomemos $B(0, -k)$ y el centro $C(h, k)$

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(0-h)^2 + (k-k)^2} = \sqrt{(-h)^2 + (0)^2} = \sqrt{(h)^2} = h$$

Cómo los dos son radios tenemos que $k = h = r = 3$, pero como estamos en el cuarto cuadrante, k es negativo, Por lo que las coordenadas del centro son $C(3, -3)$.

Y la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

Cómo se muestra en la *figura 3.2-2*

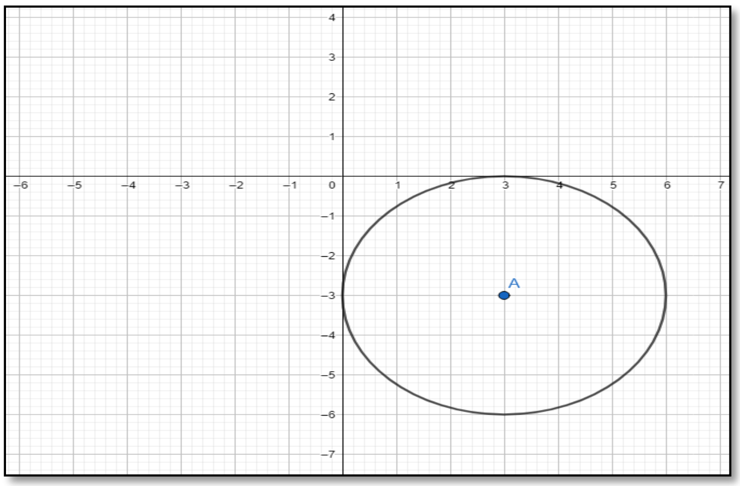

Figura 3.2-2 la circunferencia tangente al eje x y al eje y, si se sabe que su radio es $r = 3$ y que su centro está en el cuarto cuadrante

Ejercicio 21

Escribe la ecuación de la circunferencia tangente al eje x y al eje y, si se sabe que su radio es r y que su centro está en el cuarto indicado.

a) $r = 3$, Cuadrante III

b) $r = 4$, Cuadrante I

c) $r = 2$, Cuadrante II

d) $r = 5$, Cuadrante IV

e) $r = 1$, Cuadrante II

Área del cuadrado inscrito en una circunferencia.

Problema 3.2-9:

Encontrar el área del cuadrado inscrito en la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

Solución

Primero encontremos las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia.

$$(x^2 + 8x) + (y^2 - 10y) = -5$$

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 10y + 25) = -5 + 16 + 25$$

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

Por lo que el centro es $C(-4,5)$ y radio $r = 6$

Analíticamente sabemos que podemos encontrar 4 puntos de la circunferencia, los que son paralelos a los ejes, dos de ellos tendrían las coordenadas $(-4, y)$ y $(x, 5)$ y si usamos el centro $C(-4,5)$ y el radio $r = 6$, tendremos:

$6 = r = \sqrt{(-4+4)^2 + (5-y)^2} = \sqrt{(0)^2 + (5-y)^2} = \sqrt{(5-y)^2} = \pm(5-y)$, por lo que tenemos:

$$6 = \pm(5 - y)$$

Al considerar la parte positiva tenemos $6 - 5 = -y$, de donde $y = -1$

Al considerar el negativo tenemos $6 = -(5 - y)$ y despejando $6 = -5 + y$

Por lo que $y = 6 + 5 = 11$

De esta forma tenemos dos puntos $(-4, -1)$ y $(-4,11)$.

Usemos ahora el punto $(x, 6)$, el centro $C(-4,5)$ y el radio $r = 6$.

$6 = r = \sqrt{(x+4)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (0)^2} = \sqrt{(x+4)^2} = \pm(x+4)$, por lo que tenemos:

$$6 = \pm(x + 4)$$

Consideremos la parte positiva

$$6 = x + 4$$

Por lo que

$$x = 6 - 4 = 2$$

Considerando la parte negativa

$$6 = -(x + 4) = -x - 4,$$

Despejando x

$$x = -4 - 6 = -10.$$

Así, los puntos de la circunferencia son $(2{,}5)$ y $(-10{,}5)$.

Cómo podemos ver en la *figura 71* son los extremos del cuadrado, que si lo dividimos en 4 triángulos, solo necesitamos encontrar el área de un triángulo y multiplicarla por 4.

Los lados del cuadrado son $A(2{,}5)$, $B(-10, 5)$, $C(-4, -1)$ y $D(-4, 11)$. Por lo que uno de sus lados mide:

$$d(A, C) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(2+4)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$$

Y como el área de un cuadrado es $A = l^2 = (\sqrt{72})^2 = 72u^2$

Otra forma de abordar el problema es recordar que las diagonales de un cuadrado forman ángulos rectos, así, los puntos encontrados son los extremos de las diagonales, que se parten simétricamente por el centro. Por lo que el radio forma un triángulo rectángulo isósceles, cuya diagonal es la medida del lado l del cuadrado. Así usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$l = \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{72}$$

Y como el área de un cuadrado es $A = l^2 = (\sqrt{72})^2 = 72u^2$ llegamos al mismo resultado.

El problema se ilustra en la *figura 3.2-3*.

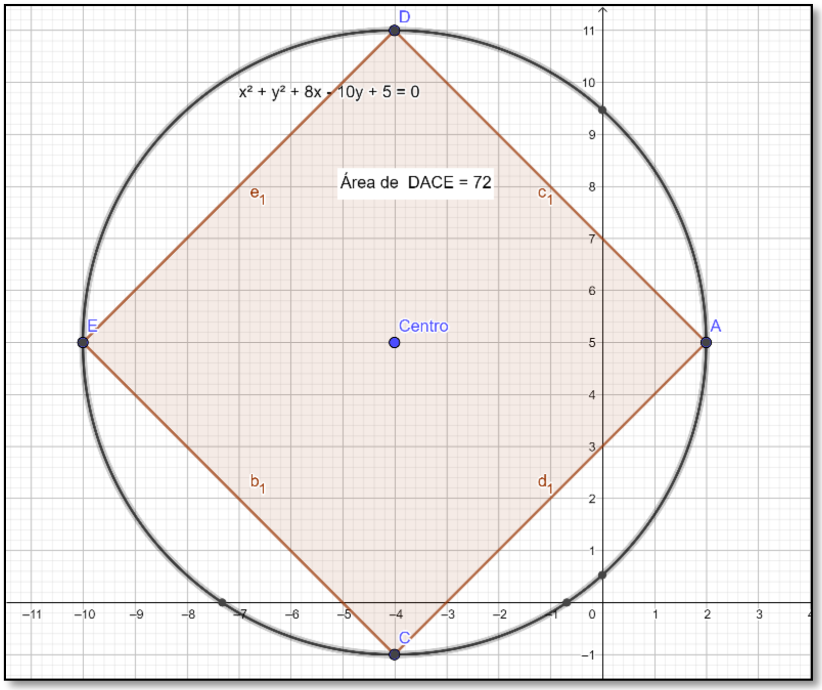

Figura 3.2-3 cuadrado inscrito en la circunferencia

Ejercicio 22

Encontrar el área del cuadrado inscrito en la circunferencia cuya ecuación es:

1. $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 80 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 15x - 10y + 50 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 36 = 0$

Longitud de una cuerda de circunferencia tangente a otra circunferencia.

Problema 3.2-10

Encontrar la longitud de la cuerda perteneciente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 72$ que es perpendicular a la circunferencia $x^2 + y^2 = 18$

Solución

Observemos la *figura 3.2-4*

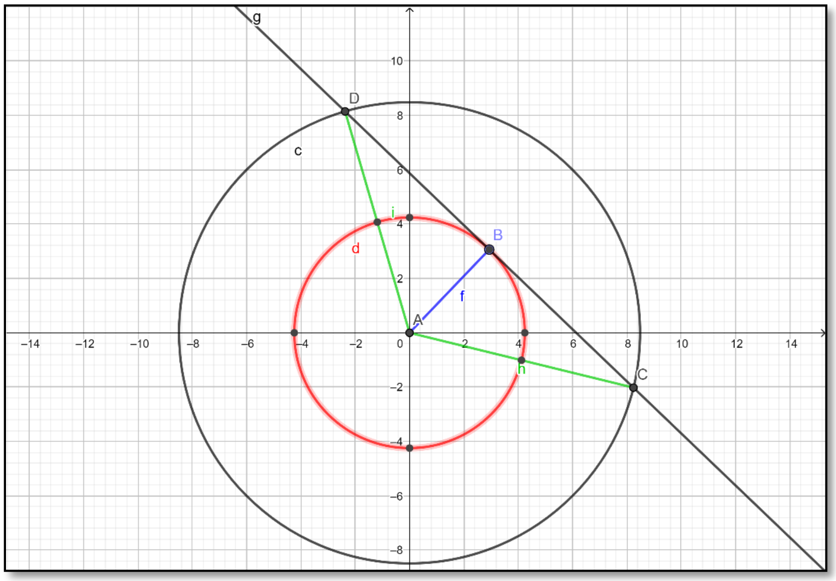

Figura 3.2-4 Gráfica de una cuerda perteneciente a una circunferencia y perpendicular a otra.

Podemos notar del enunciado y la *figura 72* las siguientes afirmaciones:

La cuerda es perpendicular al radio $\sqrt{18}$

Los dos radios forman junto con la cuerda dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es $\sqrt{72}$ y uno de los catetos mide $\sqrt{18}$

Así la longitud de la mitad de la cuerda la podemos obtener por Pitágoras:

$$l = \sqrt{\left(\sqrt{18}\right)^2 + \left(\sqrt{72}\right)^2} = \sqrt{18 + 72} = \sqrt{90}$$

La cuerda completa es $2l = 2\sqrt{90} = 6\sqrt{10}$

Ejercicio 23

Encontrar la longitud de la cuerda perteneciente a la primera circunferencia y que es perpendicular a la segunda circunferencia:

1. $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + y^2 = 4$
2. $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = 9$
3. $x^2 + y^2 = 36$ y $x^2 + y^2 = 10$

3.3. ELIPSE

3.3.1. Introducción

Este capítulo está organizado de la siguiente manera:

1. Definiremos la elipse como lugar geométrico y encontrar su ecuación ordinaria y gráfica.
2. Analizar la elipse y sus elementos dependiendo del paralelismo de su eje focal con los ejes coordenados.
3. Estudiaremos la excentricidad y simetría de la elipse
4. Ecuación general de la elipse y su conversión a la ecuación ordinaria y viceversa.

3.3.2. Elipse cómo lugar geométrico

Cómo ya se vio anteriormente, suele llamarse Cónicas a la curva obtenida al cortar un cono por un plano, las diferentes posiciones de dicho plano nos determinan distintas curvas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Podemos ver en la *figura 3.3-1* el caso particular de la elipse

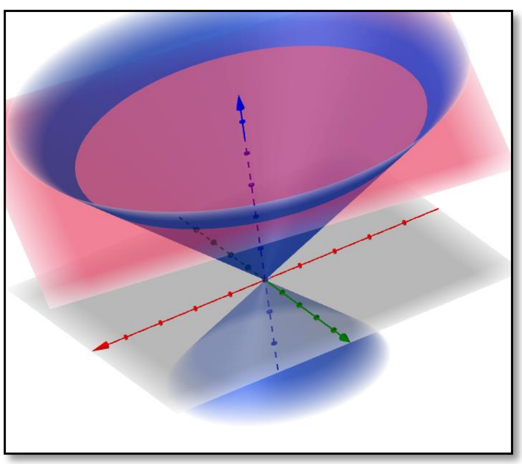

Figura 3.3-1 Elipse obtenida en un cono.

La importancia del estudio de la elipse consta en su aparición en situaciones reales:

- El movimiento de los planetas es elíptico, donde el sol se sitúa en uno de los focos de la órbita elíptica, tal y como lo explica Kepler en su primera ley.
- La ley de Gravitación que explica los movimientos de los planetas y satélites es el sistema Solar, explica que cumpliéndose ciertas condiciones la trayectoria de un objeto es elíptica.
- También encontramos a la elipse en Óptica, en el estudio del fenómeno de la Doble Refracción.
- En el anfiteatro Romano podemos ver la base elíptica sobre la que se construyó.
- La Plaza de San Pedro en el Vaticano tiene planta elíptica, al igual que muchas ciudades. Además, en las elevaciones de sus cúpulas en la Catedral de San Pedro apreciamos la elipse.
- También, se puede observar en diferentes puentes como el “puente Aranda y los mártires. Bogotá”

Los elementos importantes de una elipse son:

- Dos puntos fijos llamados focos F_1 y F_2
- Distancia Focal: 2c
- Centro de la elipse $C(h,k)$
- Dos Vértices V_1 y V_2
- Eje Mayor: $2a$, es la distancia de vértice a vértice
- Eje menor: $2b$,

Podemos definir a la elipse como lugar geométrico de la siguiente manera:

Es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y)$, tales que la suma de sus distancias a los focos es constante y mayor que la distancia entre los dos puntos.

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=C$$

Auxiliándonos en la *figura 3.3-2*,

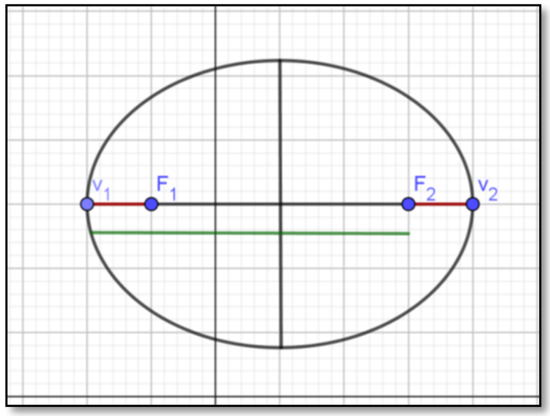

Figura 3.3-2 Trazo para mostrar la suma del vértice1 a los dos focos.

Consideremos que el punto de la elipse es uno de los vértices, sea $V_1(h+a)$, por lo que, $d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) = C$ se convierte en

$$\sqrt{\left(h+a-(h-c)\right)^2 + (k-k)^2} + \sqrt{\left(h+a-(h+c)\right)^2 + (k-k)^2} =$$

$$\sqrt{(h+a-h+c)^2} + \sqrt{(h+a-h-c)^2} =$$

$$\sqrt{(a+c)^2} + \sqrt{(a-c)^2} = a+c+a-c = 2a$$

Por lo que,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

3.3.3. Relación de los semiejes de la elipse

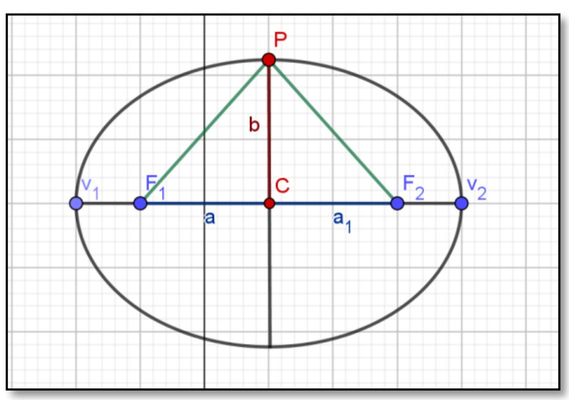

Figura 3.3-3 Que muestra la relación que existe entre los dos semiejes de la elipse.

Tomemos el punto de la elipse $P(x,y)$ que se encuentra en el extremo del eje menor (cómo lo muestra la *figura 3.3-3*) y analicemos el triángulo que se forma con los focos, el centro y el punto seleccionado. Por construcción, el triángulo es isósceles, formado por dos triángulos rectángulos;

$$d(C,F_1) = d(C,F_1)$$

$$\measuredangle F_1CP = \measuredangle F_2CP$$

Comparten un lado

$$d(C,P)$$

Por lo que se cumple la propiedad de semejanza LAL, es decir, son triángulos semejantes

$$\triangle F_1CP \sim \triangle F_2CP$$

Por lo que los lados

$$d(P,F_1) = d(P,F_2)$$

Apliquemos la definición de elipse

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$2d(P,F_2) = 2a$$

Por lo que

$$d(P,F_2) = a$$

Regresemos a la figura 75 y apliquemos el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esta es la relación que tienen los ejes entre ellos, que despejando podemos tener

$$b^2 = c^2 - a^2$$

También, encontramos que $a > b$ y $a > c$

3.3.4. Ecuación ordinaria de la elipse

Al igual que la parábola, la elipse puede encontrarse de dos formas principalmente, con el eje focal horizontal o con el eje focal vertical, y al igual que la parábola al deducir la fórmula para uno, se obtiene la segunda. Así que, comencemos por obtener la ecuación de la elipse con eje focal horizontal.

3.3.5. Elipse con eje focal horizontal

Tomemos un punto $P(x,y)$ en la elipse con centro en $C(h,k)$ y Focos $F_1(h+c,k)$ y $F_2(h-c,k)$ y apliquemos la definición obtenida de elipse:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$\sqrt{\big(x-(h+c)\big)^2+(y-k)^2}+\sqrt{\big(x-(h-c)\big)^2+(y-k)^2}=2a$$

Pasamos una raíz del otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado ambos lados

$$\sqrt{\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{\big((x-h)+c\big)^2+(y-k)^2}$$

$$\left(\sqrt{\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{\big((x-h)+c\big)^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$\big((x-h)-c\big)^2+(y-k)^2$$
$$=4a^2-4a\sqrt{\big((x-h)+c\big)^2+(y-k)^2}+\big((x-h)+c\big)^2+(y-k)^2$$

Eliminando términos semejante y reagrupando los restantes tenemos:

$$\big((x-h)-c\big)^2=4a^2-4a\sqrt{\big((x-h)+c\big)^2+(y-k)^2}+\big((x-h)+c\big)^2$$

$$(x-h)^2-2(x-h)c+c^2$$
$$=4a^2-4a\sqrt{\big((x-h)+c\big)^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2(x-h)c+c^2$$

Eliminando términos semejantes y dejando de un solo lado la raíz tenemos

$$-4(x-h)c-4a^2 = -4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}$$

Dividiendo entre -4 y elevando al cuadrado tenemos:

$$\left((x-h)c+a^2\right)^2 = a^2\left(\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2\right)$$

Resolviendo tenemos:

$$(x-h)^2c^2+2(x-h)ca^2+a^4 = a^2((x-h)^2+2(x-h)c+c^2+(y-k)^2)$$

$$(x-h)^2c^2+2(x-h)ca^2+a^4 = a^2(x-h)^2+2a^2(x-h)c+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Eliminando términos semejantes tenemos

$$(x-h)^2c^2+a^4 = a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Pasando de un solo lado de la igualdad los términos con x y y, y todo lo demás del otro lado.

$$a^4-a^2c^2 = a^2(x-h)^2-(x-h)^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Factorizando tenemos:

$$a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2$$

Utilicemos una de las propiedades de la elipse, la relación que tienen entre la medida de sus ejes

$$b^2 = a^2-c^2$$

$$a^2b^2 = b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2$$

Dividiendo todo entre a^2b^2 tenemos la ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}+\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}$$

$$1 = \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}$$

Problema 3.3-1

Determine la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos pertenecientes al plano, cuya suma de sus distancias a los puntos $F_1(3,1)$ y $F_2(-5,1)$ es 20.

Solución

Usamos la definición de elipse tendríamos:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

Por lo que $2a = 20$, entonces $a = 10$

Ahora el centro de la elipse es el punto medio de los focos

$$x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo que el centro es $C(-1,1)$

Y el valor de c es la distancia del centro a uno de los focos

$$c = d_{F_2C} = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Otra forma de hacerlo más sencillo y menos estricto a nivel matemáticas es por medio de la *figura 3.3-4*, donde se puede apreciar visualmente el centro y el valor de c

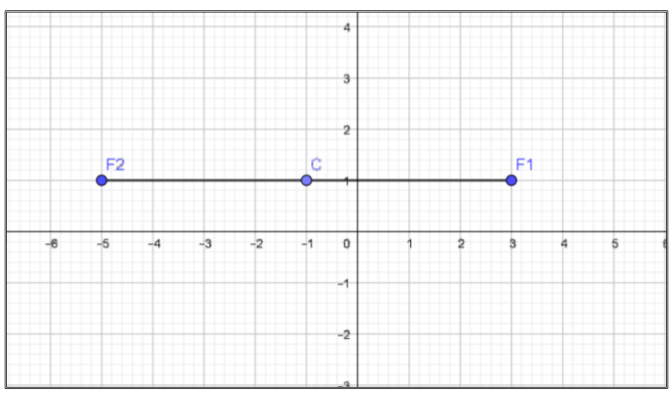

Figura 3.3-4 Muestra que el centro se encuentra exactamente a la mitad de los dos focos.

Utilizando la relación de los ejes tenemos

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(10)^2 - (4)^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84}$$

O $b^2 = 84$

De esta manera ya podemos sustituir en la ecuación de la elipse horizontal.

$$1=\frac{\left(x-(-1)\right)^2}{10^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{84}\right)^2}$$

Elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{(x+1)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{84}=1$$

Que es la ecuación buscada.

Problema 3.3-2

Encontrar la ecuación de la elipse que tiene centro en $C(1,4)$ y uno de los focos es $F_1(-2,4)$ y uno de sus vértices es $V_1(-4,4)$.

Solución

Veamos la *figura 3.3-5* para obtener directamente los valores de a y c.

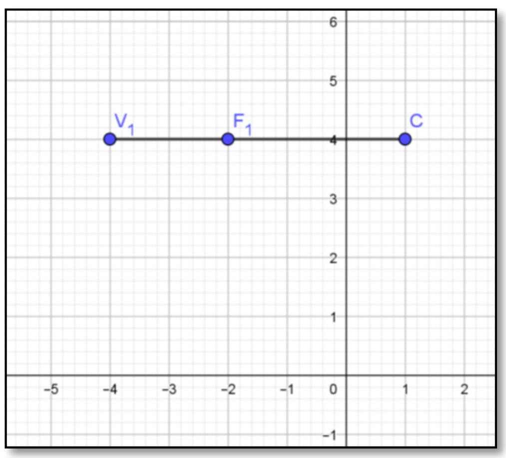

Figura 3.3-5 Elementos de la elipse en los que se puede apreciar los valores de a y c sin tener que hacer cálculos.

Podemos apreciar el valor de $a=5$ y de $c=3$, por la relación de los ejes podemos encontrar b

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(5)^2-(3)^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

Por lo que $b=4$ y ya podemos encontrar la ecuación de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

Lado recto de una elipse.

Es la cuerda perpendicular al eje focal que cruza por los focos. Cómo se muestra en la *figura 3.3-6*

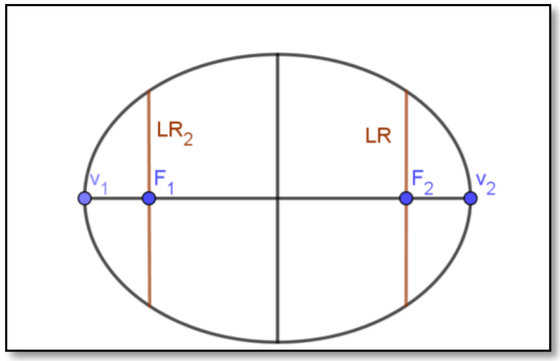

Figura 3.3-6 Con rojo podemos apreciar los lados rectos de la elipse.

Consideraremos una elipse horizontal, sea $P(x, y)$ uno de los extremos del lado recto, por definición de perpendicularidad, los focos y el punto comparten coordenada x $P(h + c, y)$. Necesitamos conocer la coordenada y. Para ello utilizaremos el hecho de que pertenece a la elipse. Despejemos y de la ecuación ordinaria de la elipse.

Multiplicamos toda la ecuación por a^2b^2

$$a^2b^2\left(\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right)$$

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

Despejemos y

$$a^2(y-k)^2 = a^2b^2 - b^2(x-h)^2$$

$$a^2(y-k)^2 = b^2(a^2 - (x-h)^2)$$

$$(y-k)^2 = \frac{b^2(a^2 - (x-h)^2)}{a^2}$$

$$(y-k)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (x-h)^2)$$

$$y-k=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-(x-h)^2)}$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-(x-h)^2)}+k$$

En este despeje sustituiremos la coordenada de x del punto $P(h+c,y)$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-(h+c-h)^2)}+k$$

Quedando

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-c^2)}+k$$

Que por propiedad de los semiejes tenemos:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{b^2}+k$$

$$y=\frac{b}{a}b+k$$

$$y=\frac{b^2}{a}+k$$

Entonces nuestro punto es $P(h+c,\frac{b^2}{a}+k)$ y la distancia entre el punto y el foco $F_1(h+c,k)$ es:

$$d=\sqrt{\big(h+c-(h+c)\big)^2+\left(\frac{b^2}{a}+k-k\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}=\frac{b^2}{a}$$

Que es la distancia de uno de los focos a uno de los extremos del lado recto, pero como la elipse es simétrica (lo demostramos más adelante), el lado recto, es el doble de lo obtenido, por lo que la distancia focal o más comúnmente conocido como lado recto es

$$LR=\frac{2b^2}{a}$$

Problema 3.13

Del problema 3.12 encontrar el lado recto y su gráfica

Solución

En el problema 3.12 se encontraron los elementos $C(1,4)$, $F_1(-2,4)$, $V_1(-4,4)$, $a = 5$, $c = 3$, $b = 4$, por lo que el lado recto es

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$$

Con estos datos podemos encontrar los demás puntos de la elipse y trazar su gráfica, recordando que el lado recto pasa por los focos, es perpendicular al eje focal y divide al segmento en dos. Como se muestra en la *figura 3.3-7*, Solo se trazaron los vértices, focos, centro y a partir de ellos se trazó el lado recto y el eje menor "b", se puede apoyar con un flexómetro para que la elipse quede lo más perfecta posible.

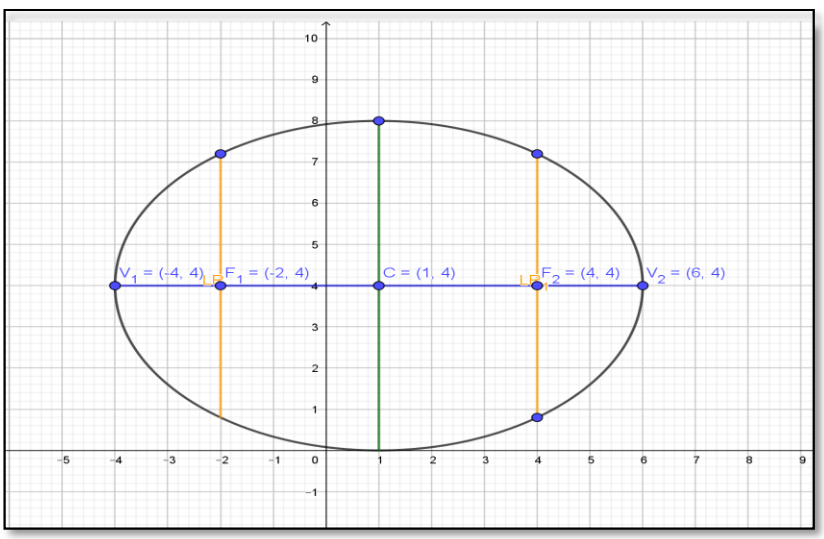

Figura 3.3-7 Trazado de la gráfica donde se parecían los lados rectos de la elipse.

Elementos de la elipse con eje focal horizontal

El siguiente cuadro resume los elementos de la elipse horizontal y su ecuación ordinaria, tanto para centro en el origen $C(0,0)$, como para centro fuera de el $C(h,k)$

Elementos de la elipse horizontal		
Centro	$C(h,k)$	$C(0,0)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(c,0)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(-c,0)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(a,0)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(-a,0)$
Eje mayor	$2a$	$2a$
Eje Menor	$2b$	$2b$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}$
Relación de los ejes	$b^2=a^2-c^2$	$b^2=a^2-c^2$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Problema 3.14

Encuentra la ecuación de la elipse horizontal que tiene centro $C(-1,2)$, $a=6$, $c=4$. Traza su gráfica.

Solución

Empecemos por encontrar el valor de b, utilizando la relación de los ejes.

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(6)^2-(4)^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$$

O $b^2=20$

Entonces, la ecuación de la elipse será

$$\frac{\left(x-(-1)\right)^2}{(6)^2}+\frac{(y-2)^2}{(4)^2}=1$$

Que simplificando queda

$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

Para graficar nos hace falta encontrar los valores de los focos y los vértices, pero usando nuestra tabla tenemos:

Elementos de la elipse horizontal		
Centro	$C(h,k)$	$C(-1,2)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(-1+4,2)$=$F_1(3,2)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(-1-4,2)$=$F_2(-5,2)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(-1+6,2)=V_1(5,2)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(-1-6,2)=V_2(-7,2)$
Eje mayor	$2a$	$2(6)=12$
Eje Menor	$2b$	$2(4)=8$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2(4)^2}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}=2.6$
Relación de los ejes	$b^2=a^2-c^2$	$b^2=20$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

Por lo que ya podemos trazar la gráfica como se muestra en la *figura.3.3-8*

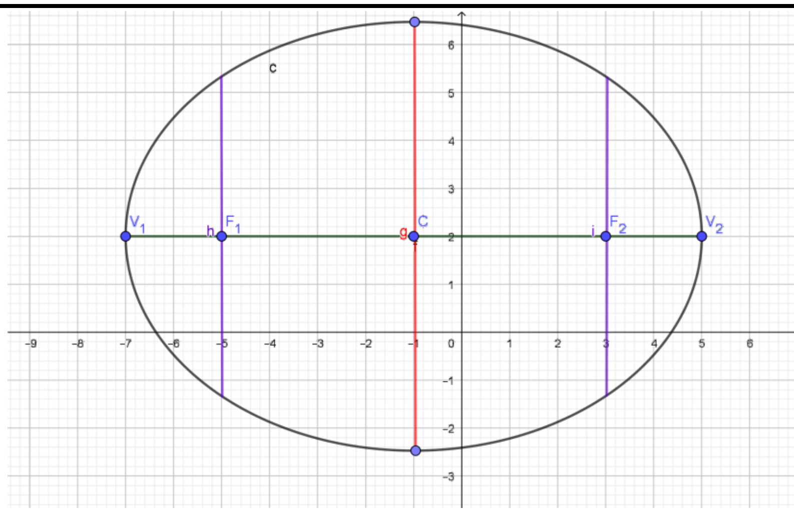

Figura 3.3-8 Trazo de la gráfica que tiene centro $C(-1,2)$, $a = 6$, $c = 4$.

Ejercicio 24

Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse horizontal que cumple con las condiciones indicadas, y traza su gráfica.

1. $F_1(3,4)$, $F_2(-3,4)$ y $a = 6$
2. $C(-2,4)$, $a = 5$, $c = 3$
3. $C(0,0), V_1(0,4)$ lado recto $LR = 5$
4. $V_1(1,-2)$, $F_1(0,-2)$, $C(-1,-2)$
5. Lado recto $LR = 8$, $b^2 = 4$ y $C(-1,-4)$
6. $V_1(4,4)$, $F(8,4)$ $a = 7$
7. $C(0,0)$, $a = 4$, $c = 3$

3.3.6. Elipse con eje focal vertical

Aunque, es el mismo proceso que en la elipse con eje focal horizontal, vamos a obtenerlo para comprobar nuestro análisis.

Tomemos un punto $P(x, y)$ en la elipse con centro en $C(h, k)$ y Focos $F_1(h, k + c)$ y $F_2(h, k - c)$ y apliquemos la definición obtenida de elipse:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2+\big(y-(k+c)\big)^2}+\sqrt{(x-h)^2+\big(y-(k-c)\big)^2}=2a$$

Pasamos una raíz del otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado ambos lados

$$\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)-c\big)^2}=2a-\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)-c\big)^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}&(x-h)^2+\big((y-k)-c\big)^2\\&\qquad=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2}+(x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2\end{aligned}$$

Eliminando términos semejante y reagrupando los restantes tenemos:

$$\big((y-k)-c\big)^2=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2}+\big((y-k)+c\big)^2$$

$$\begin{aligned}&(y-k)^2-2(y-k)c+c^2\\&\qquad=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2}+(y-k)^2+2(y-k)c+c^2\end{aligned}$$

Eliminando términos semejantes y dejando de un solo lado la raíz tenemos

$$-4(y-k)c-4a^2=-4a\sqrt{(x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2}$$

Dividiendo entre -4 y elevando al cuadrado tenemos:

$$\big((y-k)c+a^2\big)^2=a^2\left((x-h)^2+\big((y-k)+c\big)^2\right)$$

Resolviendo tenemos:

$$(y-k)^2c^2+2(y-k)ca^2+a^4=a^2((x-h)^2+(y-k)^2+2(y-k)c+c^2)$$

$$(y-k)^2c^2+2(y-k)ca^2+a^4=a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+2a^2(y-k)c+a^2c^2$$

Eliminando términos semejantes tenemos

$$(y-k)^2c^2 + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 + a^2c^2$$

Pasando de un solo lado de la igualdad los términos con x y y, y todo lo demás del otro lado.

$$a^4 - a^2c^2 = a^2(x-h)^2 - (y-k)^2c^2 + a^2(y-k)^2$$

Factorizando tenemos:

$$a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)(y-k)^2 + a^2(x-h)^2$$

Utilicemos una de las propiedades de la elipse, la relación que tienen entre la medida de sus ejes

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$a^2b^2 = b^2(y-k)^2 + a^2(x-h)^2$$

Dividiendo todo entre a^2b^2 y ordenando tenemos la ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2(y-k)^2}{a^2b^2} + \frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2}$$

$$1 = \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2}$$

Problema 3.15

Encontrar la ecuación de la elipse con centro en $C(0,4)$ y Foco $(0,7)$ y Vértice $V(0,9)$.

Solución

Podemos notar que entre las diferencia de la elipse horizontal y vertical se encuentra que los elementos que la componen (foco, vértice, centro) comparten una de sus coordenadas, en el caso de la elipse horizontal es la ordenada y en la elipse vertical es la abscisa. En este caso, todas tienen la abscisa 0. Utilicemos la gráfica de la figura 3.3-9 para encontrar el valor de a, b, c.

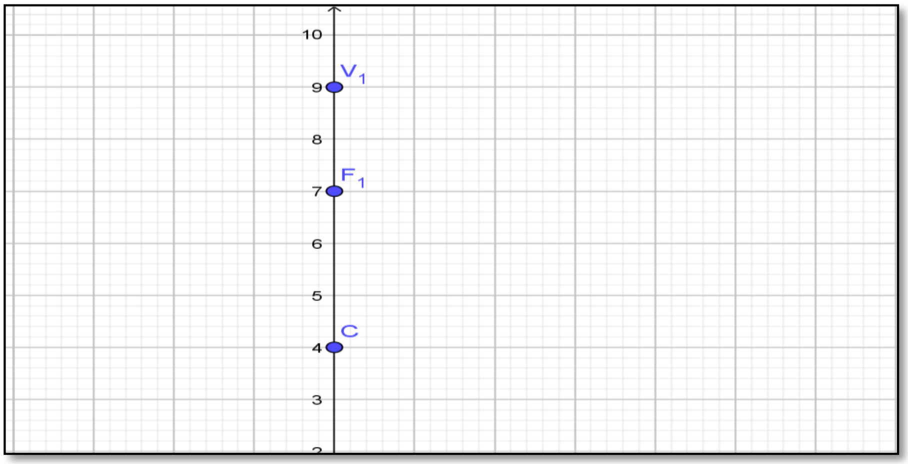

Figura 3.3-9 Elementos de la elipse con centro en $C(0,4)$ y Foco $(0,7)$ y Vértice $V(0,9)$

Podemos apreciar que la distancia del Centro al vértice es 5, es decir, a=5, del centro al foco es 3, es decir, c=3, y con la relación de los ejes podemos encontrar b

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

Por lo que $b = 4$. De esta manera ya podemos encontrar los demás elementos de la elipse para graficarla y también su ecuación.

$$\frac{(x-0)^2}{(4)^2} + \frac{(y-4)^2}{(5)^2} = 1$$

Quedando

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

Y la gráfica quedaría como en la figura 3.3-10

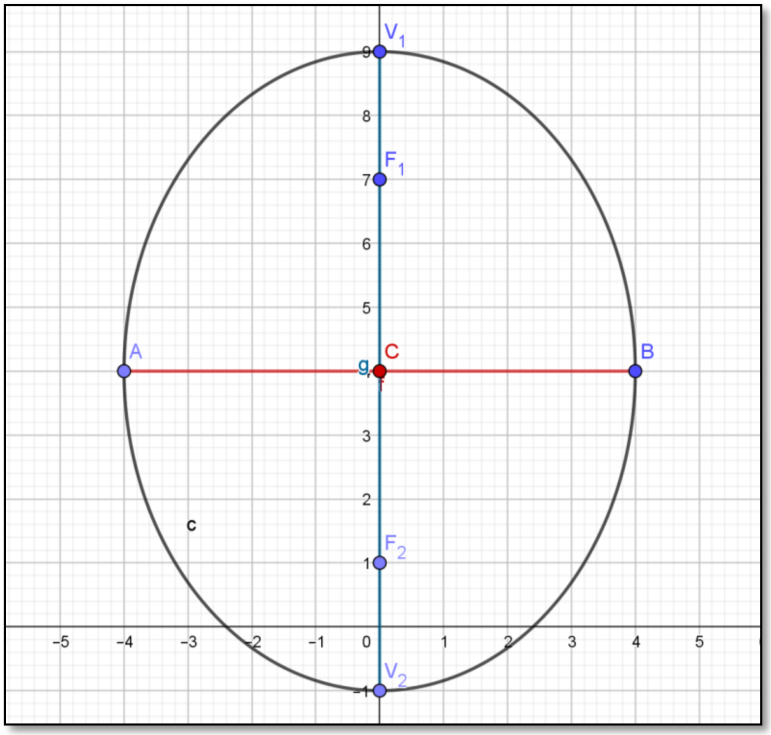

Figura 3.3-10 elipse con centro en $C(0,4)$ *y Foco* $(0,7)$ *y Vértice* $V(0,9)$

Elementos de la elipse con eje focal Vertical

El siguiente cuadro resume los elementos de la elipse vertical y su ecuación ordinaria, tanto para el centro fuera del origen $C(h,k)$, como para el centro en el origen $C(0,0)$. Recordemos que las medidas del lado recto de la elipse se obtuvieron para el caso de eje focal horizontal, pero es el mismo valor para la vertical.

Elementos de la elipse vertical		
Centro	$C(h,k)$	$C(0,0)$
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1(0,c)$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2(0,-c)$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(0,a)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(0,-a)$
Eje mayor	$2a$	$2a$

Eje Menor	$2b$	$2b$
Lado Recto	$LR = \frac{2b^2}{a}$	$LR = \frac{2b^2}{a}$
Relación de los ejes	$b^2 = a^2 - c^2$	$b^2 = a^2 - c^2$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Problema 3.16

Encontrar la ecuación de la elipse con lado recto $LR = 5$, vertical y centro $C(-3,-2)$ y Vértice $V(-3,-6)$.

Solución

La distancia del centro al Vértice es $a = 4$ y por definición de Lado recto tenemos

$$5 = LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2b^2}{4}$$

Quedando la ecuación de segundo grado

$$5 = \frac{2b^2}{4}$$

Donde

$$20 = 2b^2$$

$$\frac{20}{2} = 10 = b^2$$

Por lo que $b = \sqrt{10} = 3.16$

Ya tenemos todos los elementos necesarios para obtener la ecuación de la elipse.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-(-3))^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2} + \frac{\left(y-(-2)\right)^2}{(4)^2} = 1$$

Quedando

$$\frac{(x+3)^2}{10}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

Ahora, para trazar la gráfica nos hace falta el valor de c, el cual se encuentra con la relación de los ejes

$$b^2=a^2-c^2$$

$$c^2=a^2-b^2=(4)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2=16-10=6$$

$$c=\sqrt{6}$$

Por lo que ya podemos completar la tabla y tener todos los elementos de la elipse

Centro	$C(h,k)$	$C(-3,-2)$
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1(-3,-2+\sqrt{6})$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2(-3,-2-\sqrt{6})$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(-3,-2+4)=V_1(-3,2)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(-3,-2-4)=V_2(-3,-6)$
Eje mayor	$2a$	$2(4)=8$
Eje Menor	$2b$	$2(\sqrt{10})$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}$=5
Relación de los ejes	$b^2=a^2-c^2$	$c^2=a^2-b^2=6$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$\frac{(x+3)^2}{10}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

Quedando la gráfica como se muestra en la *figura 3.3-11*

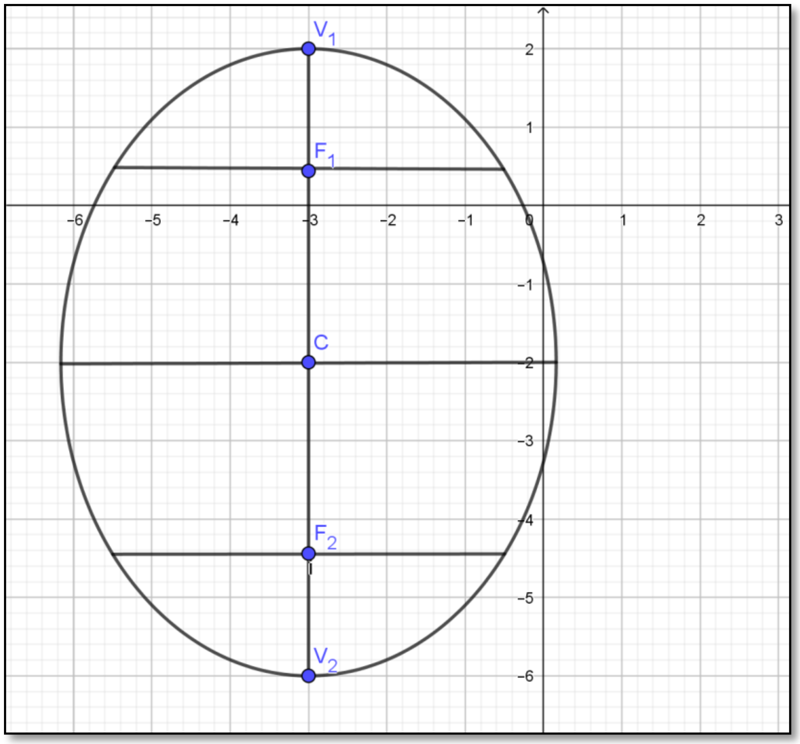

Figura 3.3-11 Gráfica de la elipse con lado recto $LR = 5$, vertical y centro $C(-3,-2)$ y Vértice $V(-3,-6)$.

Ejercicio 25

Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse vertical que cumple con las condiciones indicadas, y traza su gráfica.

1. $F_1(3,4)$, $F_2(3,-4)$ y $a = 6$
2. $C(-2,4)$, $a = 5$, $c = 3$
3. $C(0,0), V_1(4,0)$ lado recto $LR = 5$
4. $V_1(1,-2)$, $F_1(1,0)$, $C(1,3)$
5. Lado recto $LR = 8$, $b^2 = 4$ y $C(-1,-4)$
6. $V_1(4,4)$, $F(4,8)$ $a = 7$
7. $C(0,0)$, $a = 4$, $c = 3$

Problema 3.17

Encuentra los elementos y gráfica de la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

Solución

Lo primero que podemos obtener es el centro de la elipse, basta con cambiar el signo de las coordenadas de h y k. Es decir, $C(-1,4)$

Ahora hay que distinguir que tipo de elipse es, horizontal o vertical, recordando que $a>b$ por lo que $a^2>b^2$, también que en la ecuación de la elipse horizontal a^2 se ubica debajo de $(x-h)^2$, y para la vertical debajo de $(y-k)^2$.

Entonces, $a^2=16$ y $b^2=9$, y es vertical.

Encontremos c, usando la relación de los ejes.

$$c^2=a^2-b^2=16-9=7, \text{ por lo que } c=\sqrt{7}.$$

Ya podemos llenar nuestra tabla para encontrar los elementos.

Centro	$C(h,k)$	$C(-1,4)$
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1\left(-1,4+\sqrt{7}\right)=F_1(-1,6.6)$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2\left(-1,4-\sqrt{7}\right)=F_2(-1,1.4)$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(-1,4+4)=V_1(-1,8)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(-1,4-4)=V_2(-1,0)$
Eje mayor	$2a$	$2(4)=8$
Eje Menor	$2b$	$2(\sqrt{7})$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$
Relación de los ejes	$b^2=a^2-c^2$	$c^2=a^2-b^2=7$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$

Quedando la gráfica como se muestra en la *figura 3.3-12*

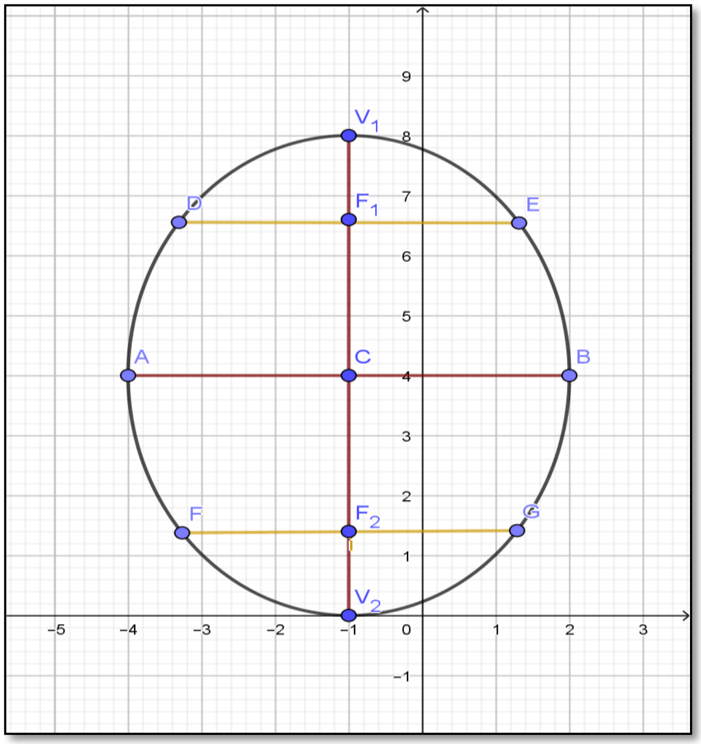

Figura 3.3-12 Elipse de la ecuación
$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

Problema 3.18

Encontrar los elementos y gráfica de la elipse cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Solución

Como $9>4$ entonces $a^2=9$ y $b^2=4$ y la elipse es horizontal, con centro en el origen $C(0,0)$. Encontremos c

$$c^2=a^2-b^2=9-4=5$$

Por lo que $c=\sqrt{5}$

Completemos nuestra tabla

Centro	$C(h,k)$	$C(0{,}0)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(0+\sqrt{5},0)$=$F_1(\sqrt{5},0)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(0-\sqrt{5},0)$=$F_2(-5,0)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(0+3{,}0)=V_1(3{,}0)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(0-3{,}0)=V_2(-3,0)$
Eje mayor	$2a$	$2(3)=6$
Eje Menor	$2b$	$2(2)=4$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2(2)^2}{3}=\frac{8}{3}=2.6$
Relación de los ejes	$b^2=a^2-c^2$	$c^2=a^2-b^2=9-4=5$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Quedando la gráfica como lo muestra la siguiente *figura 3.3-13*

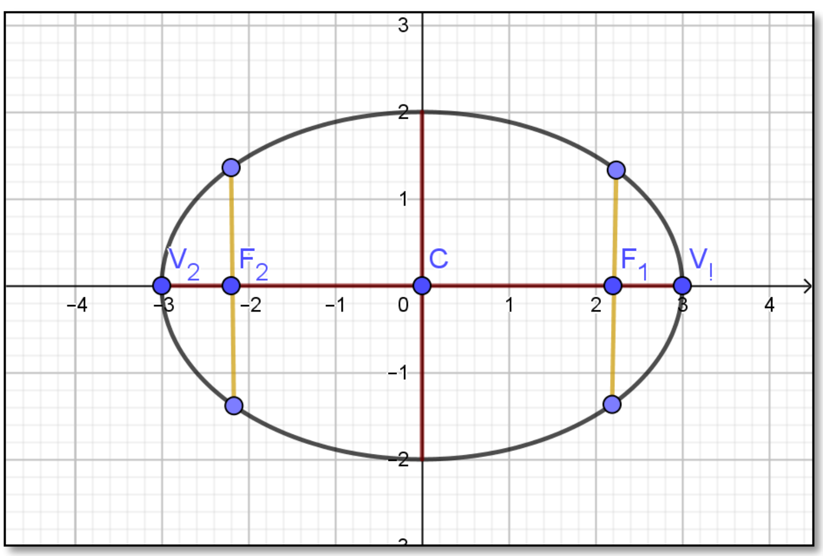

Figura 3.3-13 Gráfica de la elipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ejercicio 26

Encuentra los elementos de las elipses cuyas ecuaciones ordinarias son:

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. $\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

4. $\frac{(x-7)^2}{100} + \frac{(y+8)^2}{144} = 1$

5. $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

6. $\frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$

3.3.7. Excentricidad

Este parámetro indica la forma de la curva, es decir, determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia, que tan abierta o cerrada es la curva. En otras palabras, mide el grado de achatamiento de la elipse.

Es el cociente entre el eje focal y el eje mayor.

$$e = \frac{c}{a}$$

Recordamos la relación de los semiejes de la elipse tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Por lo que la excentricidad queda de la forma

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Analicemos la *figura 3.3-14*, donde se muestra las diferentes posibilidades sobre el valor de e, donde apreciamos que cuando e se aproxima a cero la elipse se asemeja a una circunferencia, pero cuando e se aproxima a uno la elipse es muy angosta y alargada.

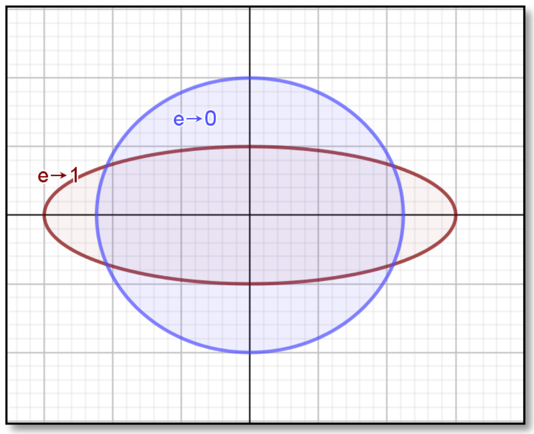

Figura 3.3-14 Muestra cómo sería la elipse cuando la excentricidad se aproxime a cero y cuando se aproxime a 1.

Problema 3.19

Encontrar la ecuación general de la elipse con focos en $F_1(-3,-2), F_2(-3,2)$, excentricidad $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Solución

El centro de la elipse se encuentra en el punto medio de los focos, y comparte la abscisa, por lo que es una elipse vertical

$$y = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Por lo que el centro es $C(-3,0)$.

La distancia focal c es la distancia entre el centro y el foco

$$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{0+4} = 2$$

Luego la excentricidad se calcula con la formula

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo c tenemos la igualdad

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Despejando

$$a = 2\sqrt{2} = 2.82$$

$$a^2 = 4(2) = 8$$

Y b^2la obtendremos con la propiedad de los ejes

$$b^2 = a^2 - c^2 = 8 - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

Por lo que la ecuación ordinaria de la elipse queda

$$\frac{\left(x - (-3)\right)^2}{4} + \frac{(y - 0)^2}{8} = 1$$

Simplificando queda

$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Multiplicando por el común denominador 8 queda

$$\frac{8(x + 3)^2}{4} + \frac{8y^2}{8} = 1(8)$$

Simplificando

$$2(x + 3)^2 + y^2 = 8$$

Resolviendo binomio al cuadrado

$$2(x^2 + 6x + 9) + y^2 = 8$$

Multiplicando, agrupando y pasando todo del mismo lado de la igualdad

$$2x^2 + 12x + 18 + y^2 - 8 = 0$$

Acomodando y resolviendo las sumas

$$2x^2 + y^2 + 12x + 10 = 0$$

Que es la ecuación general de la elipse.

Ejercicio 27

Encuentra la ecuación ordinaria, general, elementos y gráfica de las siguientes elipses.

1. $C(-1,-1)$, $V(5,-1)$ y $e=\frac{2}{3}$
2. $C(8,-3)$, $F(4,-3), e=\frac{2}{3}$
3. $F_1(5{,}0),\ F_2(-5{,}0), e=\frac{5}{8}$
4. $C(3{,}1), V(3,-2), e=\frac{1}{3}$
5. $C(0{,}0), V(5{,}0), e=\frac{3}{4}$

3.3.8. Ecuación general de la elipse

Desarrollemos la ecuación ordinaria de la elipse, tomemos la elipse vertical, aunque el proceso es el mismo que la horizontal.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Multipliquemos por el común denominador, es decir a^2b^2

$$\frac{a^2b^2(x-h)^2}{b^2}+\frac{a^2b^2(y-k)^2}{a^2}=1(a^2b^2)$$

$$\frac{a^2(x-h)^2}{b^2}+\frac{b^2(y-k)^2}{a^2}=1(a^2b^2)$$

$$a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2=a^2b^2$$

Desarrollando los cuadrados tenemos

$$a^2(x^2-2xh+h^2)+b^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$

$$a^2x^2-2a^2xh+a^2h^2+b^2y^2-2b^2yk+b^2k^2-a^2b^2=0$$

Ordenando tenemos

$$a^2x^2+b^2y^2-2a^2xh-2b^2yk+a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2=0$$

Llamamos

$A=a^2$, $B=b^2, C=-2a^2h$, $D=-2b^2k$, $E=a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$,

Por lo que tenemos:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde $A>B$ para la elipse vertical, y ambas son positivas. Esta ecuación representa la ecuación general de la elipse.

En el caso de la elipse horizontal el proceso es el mismo, y como la diferencia entre la ecuación horizontal y vertical es la posición de a^2 y b^2 ,(se invierte) la diferencia entre las ecuaciones generales será la relación de A con B.

En el caso de la horizontal $A < B$.

De esta manera podríamos resumir la ecuación general de la elipse en el siguiente cuadro:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$	
$A < B$	Elipse horizontal
$A > B$	Elipse vertical
$C = D = 0$	Elipse centro en el origen

Problema 3.40

Convierte la ecuación de la elipse del problema 3.39 en ecuación general.

Solución

En el problema 3.39 se encontró la siguiente ecuación ordinaria de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

Multiplicamos toda la ecuación por los dos denominadores $(9)(16) = 144$ tenemos

$$16(x+1)^2 + 9(y-4)^2 = 144$$

Desarrollando los binomios al cuadrado

$$16(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 16) = 144$$

Realizando las multiplicaciones e igualando a cero tenemos

$$16x^2 + 32x + 16 + 9y^2 - 36y + 144 - 144 = 0$$

Ordenando tenemos la ecuación general de la elipse

$$16x^2 + 9y^2 + 32x + -36y + 16 = 0$$

Problema 3.41

Encuentra los elementos de la elipse y la gráfica de la ecuación general

$$9x^2 + 4y^2 - 72x + 40y + 208 = 0$$

Solución

En la ecuación $A > B$ ya que $9 > 4$ es una elipse vertical.

Ahora agruparemos los elementos que tengan "x" y los que tengan "y" y todo lo demás se pasa del otro lado de la igualdad.

$$(9x^2 - 72x) + (4y^2 + 40y) = -208$$

Factorizamos de cada paréntesis y completamos el trinomio cuadrado perfecto

$$9(x^2 - 8x) + 4(y^2 + 10y) = -208$$

$$9(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 + 10y + 25) = -208 + 9(16) + 4(25)$$

Factorizando tenemos

$$9(x-4)^2 + 4(y+5)^2 = 36$$

Dividiendo todo entre 36 tenemos

$$\frac{9(x-4)^2}{36} + \frac{4(y+5)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$$

Que es la ecuación ordinaria de la elipse horizontal, con centro en $C(4,-5)$,$a^2 = 9$ y $b^2 = 4$ con la relación encontramos $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$.

Completemos la tabla

Centro	$C(h,k)$	$C(4,-5)$
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1\left(4,-5+\sqrt{5}\right) = F_1(4,-2.76)$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2\left(4,-5-\sqrt{5}\right) = F_2(4,-7.23)$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(4,-5+3) = V_1(4,-2)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(4,-5-3) = V_2(4,-8)$
Eje mayor	$2a$	$2(3) = 6$
Eje Menor	$2b$	$2(2) = 4$

Lado Recto	$LR = \frac{2b^2}{a}$	$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$
Relación de los ejes	$b^2 = a^2 - c^2$	$c^2 = a^2 - b^2 = 5$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$

Quedando la gráfica como lo muestra la siguiente *figura 3.3-15*

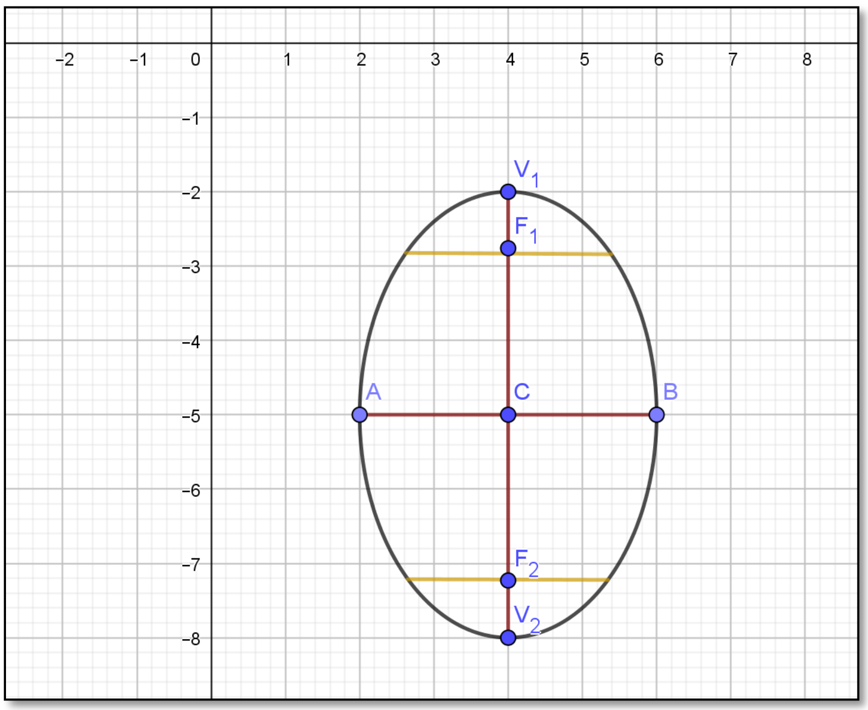

Figura 3.3-15 Elipse cuya ecuación es
$9x^2 + 4y^2 - 72x + 40y + 208 = 0$

Ejercicio 28

I. Encuentra la ecuación general de las ecuaciones ordinarias siguientes

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$

4. $\frac{(x-7)^2}{100}+\frac{(y+8)^2}{144}=1$

5. $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

6. $\frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{7}=1$

II. De las siguientes ecuaciones generales encuentra sus elementos, gráfica y su ecuación ordinaria

1. $36x^2+72y^2+180x+336y+329=0$
2. $4x^2+y^2+32x-4y+112=0$
3. $4x^2+16y^2-64=0$
4. $49x^2+36y^2-1764=0$
5. $4x^2+9y^2+32x-18y+37=0$
6. $x^2+4y^2-6x+16y-39=0$
7. $64x^2+25y^2+384x-50y+999=0$

3.3.9. Simetría de una elipse

Tendremos que ver sí la elipse es simétrica con respecto a los ejes o con respecto al origen. Tomemos el caso más sencillo, que es la elipse con centro en el origen. Empecemos viendo la simetría con respecto al eje x, cambiando y por $-y$

Tomemos la ecuación general de la elipse con centro en el origen

$$Ax^2+By^2=0$$

$$Ax^2+B(-y)^2=0$$

Desarrollando tenemos la misma ecuación

$$Ax^2 + By^2 = 0$$

Por lo que es simétrica con respecto al eje x

Comprobemos con el eje y, cambiando x por –x

$$A(-x)^2 + By^2 = 0$$

Desarrollando tenemos la misma ecuación

$$Ax^2 + By^2 = 0$$

Por lo que es simétrica con respecto al eje y

Al considerar la ecuación con centro fuera del origen, consideraremos que es una traslación, en la cual no ocurre ninguna deformación, por lo que será simétrica al eje mayor y al eje menor.

3.4. HIPÉRBOLA

3.4.1. Introducción

La última de las cónicas que estudiaremos será la hipérbola, que se desarrolla de la siguiente manera:

1. Definiremos la hipérbola como lugar geométrico.
2. Obtendremos la ecuación ordinaria y su respectiva gráfica para los diferentes casos de la hipérbola: horizontal o vertical.
3. Analizaremos los elementos de la hipérbola y sus propiedades
4. Obtendremos la ecuación general de la hipérbola y la convertiremos a ordinaria y viceversa.

3.4.2. Hipérbola cómo lugar geométrico

Es la última de las curvas que se obtiene del corte de un cono y un plano, como se muestra en la *figura 3.4-1*.

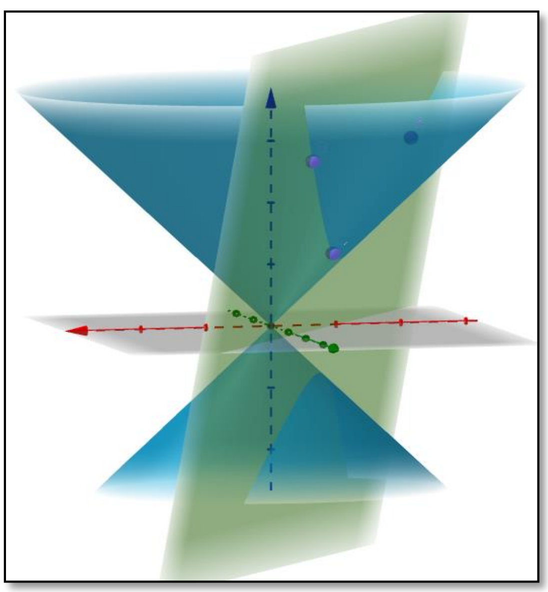

Figura 3.4-1 Formación de la elipse a partir de un cono.

La hipérbola se usa en la arquitectura para hacer construcciones de bóvedas impresionantes, en la física en la creación de lentes telescópicos, cámaras fotográficas, telescopios se utiliza los principios de la hipérbola para lograr enfocar los objetos. Existen sistemas de navegación basados en la definición de hipérbola que permiten dar la ruta más adecuada para optimizar el tiempo de llegada a un punto. Algunos cometas tienen trayectoria hiperbólica para atravesar al sistema solar. Son algunas de las aplicaciones de la hipérbola en la vida diaria.
Los elementos que forman la hipérbola son semejantes a la de la elipse:

- Dos puntos fijos llamados focos F_1 y F_2
- Distancia Focal: 2c
- Centro de la elipse $C(h,k)$
- Dos Vértices V_1 y V_2
- Eje Real: $2a$, es la distancia de vértice a vértice
- Eje Imaginario: $2b$,
- Relación de sus ejes es: $a^2+b^2=c^2$
- Lado recto: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Podemos definir a la hipérbola como lugar geométrico de la siguiente manera:
Es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y)$, tales que la diferencia de sus distancias a los focos es constante.

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=C$$

Veamos la *figura 3.4-2*

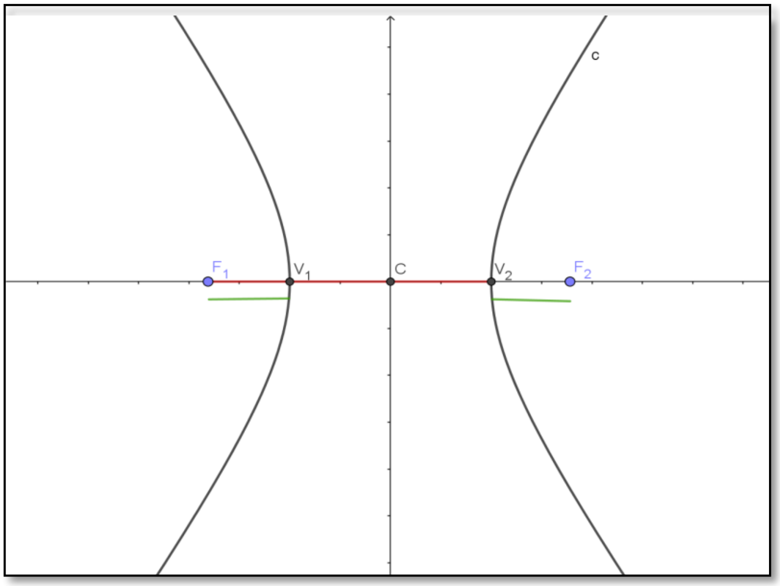

Figura 3.4-2 Se muestra la diferencia de las distancias del vértice 1 a los focos

Consideremos el punto P de la hipérbola como el vértice $V_1(h+a,k)$ y apliquemos la definición, considerando $F_1(h+c,k)$ y $F_2(h-c,k)$ podemos ver que

$$d(V_1,F_2)-d(V_1,F_1)=C$$

Se convierte en

$$\sqrt{\left(h-c-(h+a)\right)^2+(k-k)^2}-\sqrt{\left(h+c-(h+a)\right)^2+(k-k)^2}=$$

$$\sqrt{(h-c-h-a)^2}-\sqrt{(h+c-h-a)^2}=$$

$$\sqrt{(-c-a)^2}-\sqrt{(c-a)^2}=c+a-(c-a)=c+a-c+a=2a$$

Por lo que,

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=2a$$

Que se aprecia perfectamente en la *figura 89*.

3.4.3. Ecuación ordinaria de la hipérbola

Al igual que la parábola y la elipse puede encontrarse de dos formas principalmente, con el eje focal horizontal o con el eje focal vertical, y al igual que en las cónicas anteriores al deducir la fórmula para uno, se obtiene la segunda. Así que, comencemos por obtener la ecuación de la hipérbola con eje focal horizontal.

3.4.4. Hipérbola con eje focal horizontal

Tomemos un punto $P(x,y)$ en la hipérbola con centro en $C(h,k)$ y Focos $F_1(h+c,k)$ y $F_2(h-c,k)$ y apliquemos la definición obtenida de hipérbola:

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=2a$$

$$\sqrt{\left(x-(h+c)\right)^2+(y-k)^2}-\sqrt{\left(x-(h-c)\right)^2+(y-k)^2}=2a$$

Pasamos una raíz del otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado ambos lados

$$\sqrt{\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$\left(\sqrt{\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2$$
$$=4a^2+4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}+\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2$$

Eliminando términos semejante y reagrupando los restantes tenemos:

$$\left((x-h)-c\right)^2=4a^2+4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}+\left((x-h)+c\right)^2$$

$$(x-h)^2-2(x-h)c+c^2$$
$$=4a^2+4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2(x-h)c+c^2$$

Eliminando términos semejantes y dejando de un solo lado la raíz tenemos

$$-4(x-h)c-4a^2=4a\sqrt{\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2}$$

Dividiendo entre 4 y elevando al cuadrado tenemos:

$$\left((x-h)c+a^2\right)^2=a^2\left(\left((x-h)+c\right)^2+(y-k)^2\right)$$

Resolviendo tenemos:

$$(x-h)^2c^2+2(x-h)ca^2+a^4=a^2((x-h)^2+2(x-h)c+c^2+(y-k)^2)$$

$$(x-h)^2c^2+2(x-h)ca^2+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2(x-h)c+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Eliminando términos semejantes tenemos

$$(x-h)^2c^2+a^4=a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Pasando de un solo lado de la igualdad los términos con x y y, y todo lo demás del otro lado.

$$a^4-a^2c^2=a^2(x-h)^2-(x-h)^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Factorizando tenemos:

$$a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2$$

Utilicemos una de las propiedades de la hipérbola, la relación que tienen entre la medida de sus ejes

$$-b^2=a^2-c^2$$

$$-a^2b^2=-b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2$$

Dividiendo todo entre $-a^2b^2$ tenemos la ecuación de la hipérbola con centro $C(h,k)$

$$\frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}=\frac{-b^2(x-h)^2}{-a^2b^2}+\frac{a^2(y-k)^2}{-a^2b^2}$$

$$1=\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}$$

Ordenando tenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Que es la ecuación de la hipérbola con eje focal horizontal.

Problema 3.42

Determine la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos pertenecientes al plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos $F_1(7,2)$ y $F_2(-1,2)$ es 4.

Solución

Usamos la definición de elipse tendríamos:

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=8$$

Por lo que $2a=4$, entonces $a=2$

Ahora el centro de la hipérbola es el punto medio de los focos

$$x=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$y=\frac{2+2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Por lo que el centro es $C(3,2)$

Y el valor de c es la distancia del centro a uno de los focos

$$c=d_{F_2C}=\sqrt{(3-(-1))^2+(2-2)^2}=\sqrt{(3+1)^2+(0)^2}=\sqrt{16}=4$$

Utilizando la relación de los ejes tenemos

$$b^2=c^2-a^2$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(4)^2-(2)^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

O $b^2=12$

De esta manera ya podemos sustituir en la ecuación de la hipérbola horizontal.

$$\frac{(x-3)^2}{(2)^2}-\frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1$$

Elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$$

Que es la ecuación buscada.

Para obtener la gráfica de la hipérbola tenemos $C(3,2)$, $a = 2$, $b = \sqrt{12}$, c=4, por lo que los elementos de la hipérbola son:

Centro	$C(h,k)$	$C(3,2)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(3+4,2)$=(7,2)
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(3-4,2) = (-1,2)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(3+2,2)$=(5,2)
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(3-2,2) = (1,2)$
Eje mayor	$2a$	$2(2) = 4$
Eje Menor	$2b$	$2(\sqrt{12})$

Por lo que la gráfica de la hipérbola queda como en la *figura 3.4-3*

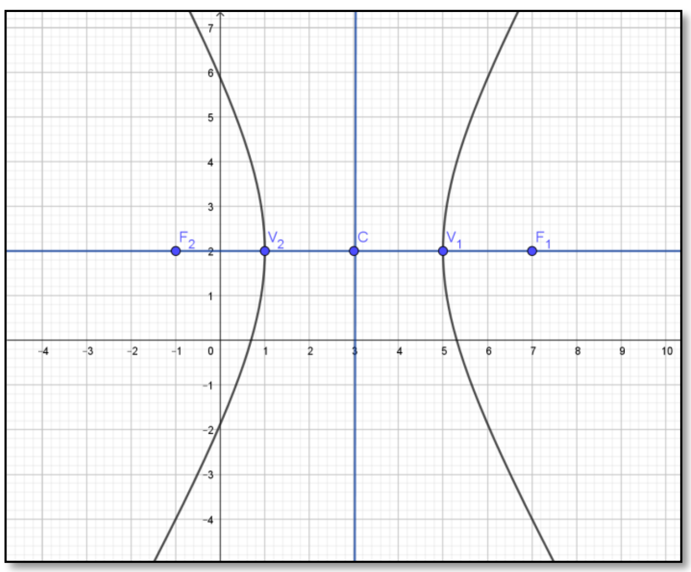

Figura 3.4-3 Gráfica del lugar cuya diferencia de sus distancias a los puntos $F_1(7,2)$ y $F_2(-1,2)$ es 4.

Problema 3.43

Encontrar la ecuación de la hipérbola que tiene como focos $F_1(-4,2)$, $F_2(2,2)$ y vértices $V(-3,2)$

Solución

Como los focos y el vértice comparten la ordenada, estamos buscando la ecuación de la hipérbola horizontal, donde la distancia entre los focos es $2c$

$$2c = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Por lo que $c = 3$

El punto medio nos da el centro de la hipérbola

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Y comparten ordenada, por lo que el centro es el punto $C(-1{,}2)$

La distancia entre el centro y el vértice es a

$$a = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + 0} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Utilizamos la relación de los ejes para encontrar el valor de b

$$b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

Por lo que $b = \sqrt{5}$

Utilizando la ecuación de la hipérbola horizontal tenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\left(x-(-1)\right)^2}{(2)^2} - \frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

Y la gráfica se muestra en la *figura 3.4-4*

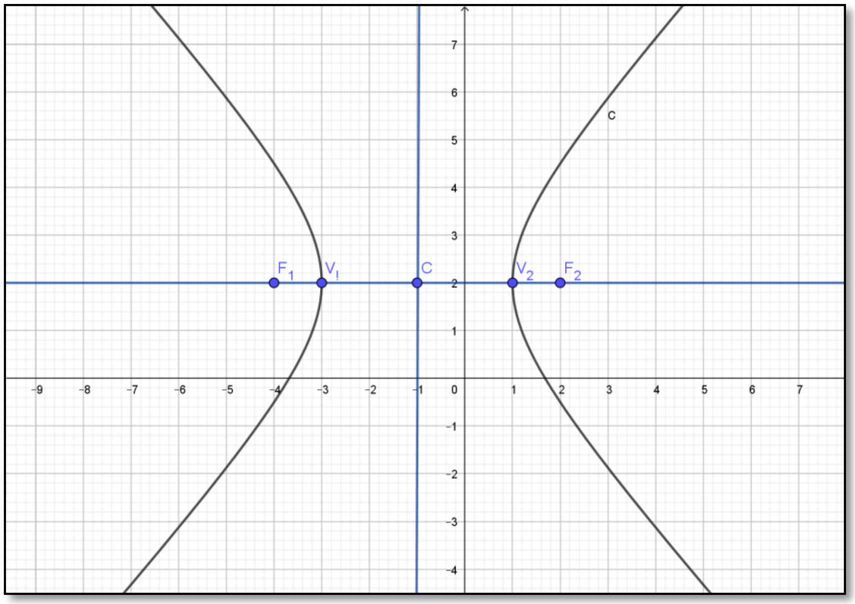

Figura 3.4-4 gráfica de la hipérbola que tiene como focos $F_1(-4{,}2)$, $F_2(2{,}2)$ y vértices $V(-3{,}2)$

Problema 3.44

Encontrar la ecuación de la hipérbola con Centro $(-5{,}3)$, un vértice $V(-2{,}3)$, pasa por $P(-1{,}1)$.

Solución

La Distancia del centro al vértice nos da el valor de a

$$a = \sqrt{(-2+5)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + 0} = \sqrt{9} = 3$$

Para encontrar b, tendremos que sustituir el punto P y el valor de a en la ecuación de la hipérbola horizontal.

$$\frac{\left(-1-(-5)\right)^2}{(3)^2} - \frac{(1-3)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(-1+5)^2}{9} - \frac{(-2)^2}{b^2} = \frac{16}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

Despejando b^2

$$\frac{4}{b^2} = \frac{16}{9} - 1 = \frac{16-9}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\text{b} = \sqrt{\frac{4(9)}{7}} = \sqrt{\frac{36}{7}} = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

Por lo que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x+5)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{\frac{36}{7}}=1$$

Problema 3.45

Encontrar la ecuación de la hipérbola con Focos $F_1(5{,}0)$, $F_2(-5{,}0)$ y $a=3$

Solución

El centro de hipérbola es el punto medio

$$x=\frac{-5+5}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Y comparte la abscisa, por lo que el centro es el origen $C(0{,}0)$.

Encontramos c con la distancia del foco al centro, que se aprecia que es 5.

$$c=\sqrt{(-5-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$$

Y usando la relación de los ejes encontramos

$$b^2=c^2-a^2=25-9=16$$

Por lo que la ecuación de la hipérbola queda

$$\frac{(x-0)^2}{9}-\frac{(y-0)^2}{16}=1$$

Simplificando queda

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

3.4.5. Lado recto de una hipérbola.

Es la cuerda perpendicular al eje focal que cruza por los focos. Consideraremos una hipérbola horizontal, sea $P(x,y)$ uno de los extremos del lado recto, por definición de perpendicularidad, los focos y el punto comparten coordenada x, $P(h+c,y)$. Necesitamos conocer la coordenada y. Para ello utilizaremos el hecho de que pertenece a la hipérbola. Despejemos y de la ecuación ordinaria de la hipérbola.

Multiplicamos toda la ecuación por a^2b^2

$$a^2b^2\left(\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\right)$$

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

Despejemos y

$$a^2(y-k)^2=-a^2b^2+b^2(x-h)^2$$

$$a^2(y-k)^2=b^2(-a^2+(x-h)^2)$$

$$(y-k)^2=\frac{b^2(-a^2+(x-h)^2)}{a^2}$$

$$(y-k)^2=\frac{b^2}{a^2}(-a^2+(x-h)^2)$$

$$y-k=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(-a^2+(x-h)^2)}$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(-a^2+(x-h)^2)}+k$$

En este despeje sustituiremos la coordenada de x del punto $P(h+c,y)$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(-a^2+(h+c-h)^2)}+k$$

Quedando

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(-a^2+c^2)}+k$$

Que por propiedad de los semiejes tenemos:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{b^2}+k$$

$$y=\frac{b}{a}b+k$$

$$y=\frac{b^2}{a}+k$$

Entonces nuestro punto es $P(h+c,\frac{b^2}{a}+k)$ y la distancia entre el punto y el foco $F_1(h+c,k)$ es:

$$d=\sqrt{\big(h+c-(h+c)\big)^2+\left(\frac{b^2}{a}+k-k\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}=\frac{b^2}{a}$$

Que es la distancia de uno de los focos a uno de los extremos del lado recto, pero como la hipérbola es simétrica, el lado recto, es el doble de lo obtenido, por lo que la distancia focal o más comúnmente conocido como lado recto es

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Problema 3.4-6

Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos extremos del eje imaginario son $(0,3)$ y $(0,-3)$, y la longitud del lado recto es 6.

Solución

Como tenemos los extremos del eje imaginario podemos encontrar $2b$

$$2b = \sqrt{(0-0)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$b = \frac{3}{2}$$

El centro se encuentra con el punto medio

$$y = \frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Y como comparten abscisa el centro es $C(0,0)$

Luego, el lado recto

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^2}{a} = 6$$

Despejando a tenemos

$$a = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \frac{2\left(\frac{9}{4}\right)}{6} = \frac{\frac{9}{2}}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Quedando la ecuación de la hipérbola horizontal de la siguiente manera

$$\frac{(x-0)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{9}{16}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

Y la gráfica se aprecia en la *figura 3.4-5*

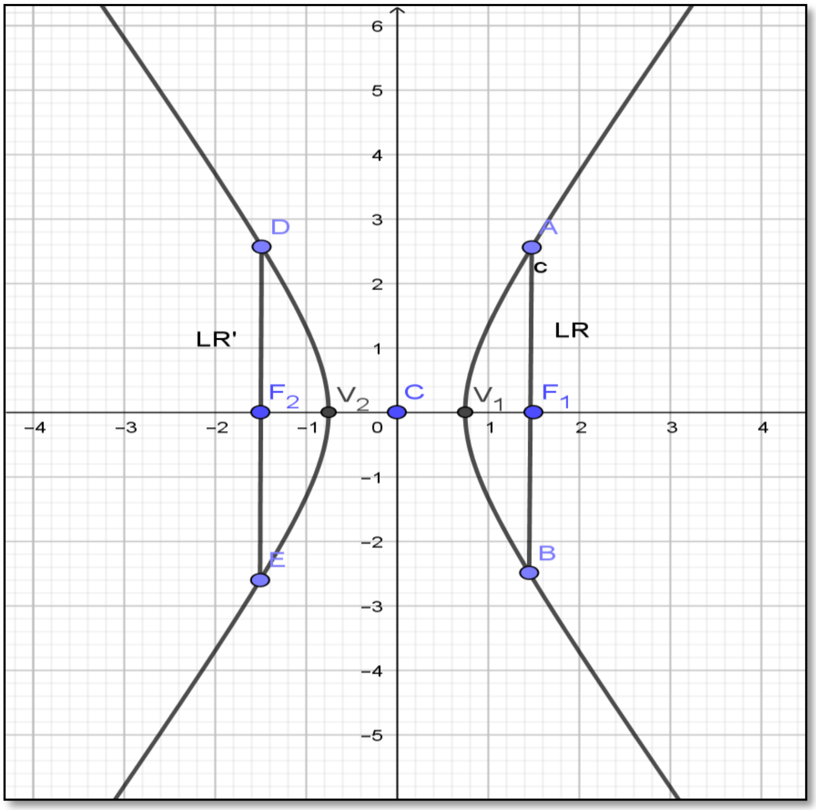

Figura 3.4-5 la hipérbola cuyos extremos del eje imaginario son $(0,3)$ *y* $(0,-3)$*, y la longitud del lado recto es 6.*

Ejercicios 29

Encuentra la ecuación de la hipérbola que cumple con cada uno de los requisitos planteados:

1. $V_1(-1,3), V_2(3,3)$ y $2c = 6$
2. $V_1(-4,-2), V_2(2,-2)$ y $b = \sqrt{3}$
3. $F_1(-2,4), F_2(-8,4)$ y $2a = 4$
4. $C(0,0), V_1(7,0), F_1(9,0)$
5. $C(2,3), V_1(0,3), F_1(3,3)$
6. $V_1(1,4), V_2(5,4)$, $LR = 5$
7. $C(2,-2), V_1(0,-2), LR = 8$

3.4.6. Elementos de la hipérbola con eje focal horizontal

El siguiente cuadro resume los elementos de la hipérbola horizontal y su ecuación ordinaria, tanto para centro en el origen $C(0{,}0)$, como para centro fuera de el $C(h,k)$

Elementos de la hipérbola horizontal		
Centro	$C(h,k)$	$C(0{,}0)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(c,0)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(-c,0)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(a,0)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(-a,0)$
Eje mayor	$2a$	$2a$
Eje Menor	$2b$	$2b$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$c^2=a^2+b^2$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Problema 3.4-7

Encontrar los elementos de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{49}=1$$

Solución

Podemos ver que el centro es $C(5,-1)$, $a^2=4$, $b^2=49$, por lo que $a=2$, $b=7$, ya podemos llenar nuestro cuadro

Elementos de la hipérbola horizontal		
Centro	$C(h,k)$	$C(5,-1)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(5+\sqrt{53},-1)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(5-\sqrt{53},-1)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(5+2,-1)=(7,-1)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(5-2,-1)=(3,-1)$
Eje mayor	$2a$	$2(2)=4$
Eje Menor	$2b$	$2(7)=14$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(7)^2}{2}=49$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$c^2=a^2+b^2=4+49=53$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{49}=1$

Y la gráfica queda como muestra la *figura 3.4-6*

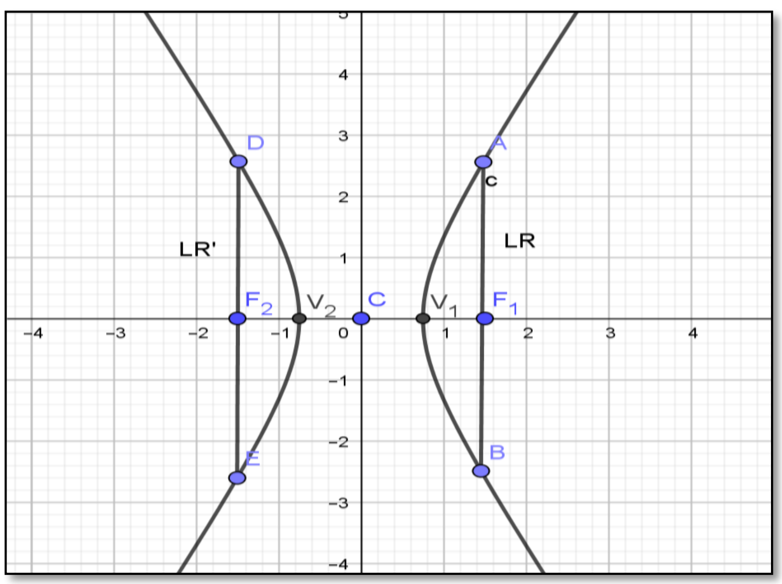

Figura 3.4-6 hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{49}=1$$

Problema 3.4-8

Encuentra sus elementos y gráfica de la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Solución

Es una hipérbola con centro en el origen C(0,0), $a^2 = 25$, $b^2 = 36$, por lo que podemos encontrar c^2 con la relación de sus ejes.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 36 = 71$$

Por lo que la tabla de datos queda

Elementos de la hipérbola horizontal		
Centro	$C(0,0)$	$C(0,0)$
Foco 1	$F_1(c, 0)$	$F_1(\sqrt{71}, 0)$
Foco 2	$F_2(-c, 0)$	$F_2(-\sqrt{71}, 0)$
Vértice 1	$V_1(a, 0)$	$V_1(5, 0)$
Vértice 2	$V_2(-a, 0)$	$V_2(-5,0)$
Eje mayor	$2a$	$2(5) = 10$
Eje Menor	$2b$	$2(6) = 12$
Lado Recto	$LR = \frac{2b^2}{a}$	$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(6)^2}{2} = 36$
Relación de los ejes	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2 = 71$
Ecuación ordinaria	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$

Y la gráfica se aprecia en la *figura 3.4-7*

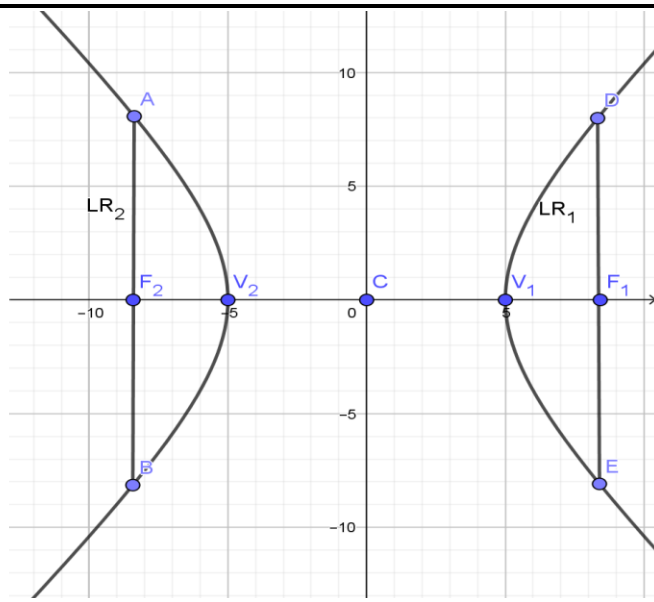

Figura 3.4-7 gráfica de la ecuación de la hipérbola
$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$$

Ejercicio 30

En las siguientes ecuaciones encuentra todos los elementos de la hipérbola y su gráfica.

1. $\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$
2. $\frac{(x-1)^2}{45}-\frac{(y-2)^2}{20}=1$
3. $\frac{(x+4)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$
4. $\frac{(x-3)^2}{100}-\frac{(y+7)^2}{25}=1$
5. $\frac{(x+6)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{16}=1$
6. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{16}=1$
7. $\frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{20}=1$
8. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$
9. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{25}=1$
10. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$

3.4.7. Hipérbola con eje focal vertical

Es el mismo análisis y proceso que en la hipérbola con eje focal horizontal. Tomemos un punto $P(x, y)$ en la hipérbola con centro en $C(h, k)$ y Focos $F_1(h, k + c)$ y $F_2(h, k - c)$ y apliquemos la definición obtenida de hipérbola:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + \big(y-(k+c)\big)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + \big(y-(k-c)\big)^2} = 2a$$

Pasamos una raíz del otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado ambos lados

$$\sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)-c\big)^2} = 2a + \sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)-c\big)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}&(x-h)^2 + \big((y-k)-c\big)^2 \\ &\quad = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2} + (x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2\end{aligned}$$

Eliminando términos semejante y reagrupando los restantes tenemos:

$$\big((y-k)-c\big)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2} + \big((y-k)+c\big)^2$$

$$\begin{aligned}&(y-k)^2 - 2(y-k)c + c^2 \\ &\quad = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2} + (y-k)^2 + 2(y-k)c + c^2\end{aligned}$$

Eliminando términos semejantes y dejando de un solo lado la raíz tenemos

$$-4(y-k)c - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2}$$

Dividiendo entre -4 y elevando al cuadrado tenemos:

$$\big((y-k)c + a^2\big)^2 = a^2\left((x-h)^2 + \big((y-k)+c\big)^2\right)$$

Resolviendo tenemos:

$$(y-k)^2c^2+2(y-k)ca^2+a^4=a^2((x-h)^2+(y-k)^2+2(y-k)c+c^2)$$

$$(y-k)^2c^2+2(y-k)ca^2+a^4=a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+2a^2(y-k)c+a^2c^2$$

Eliminando términos semejantes tenemos

$$(y-k)^2c^2+a^4=a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+a^2c^2$$

Pasando de un solo lado de la igualdad los términos con x y y, y todo lo demás del otro lado.

$$a^4-a^2c^2=a^2(x-h)^2-(y-k)^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Factorizando tenemos:

$$a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)(y-k)^2+a^2(x-h)^2$$

Utilicemos una de las propiedades de la hipérbola, la relación que tienen entre la medida de sus ejes

$$-b^2=a^2-c^2$$

$$-a^2b^2=-b^2(y-k)^2+a^2(x-h)^2$$

Dividiendo todo entre $-a^2b^2$ y ordenando tenemos la ecuación de la hipérbola vertical con centro $C(h,k)$

$$\frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}=\frac{-b^2(y-k)^2}{-a^2b^2}+\frac{a^2(x-h)^2}{-a^2b^2}$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Problema 3.4-9

Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene los siguientes elementos, $C(1,-3)$, $F_1(1,-6)$y $V_1(1,-5)$

Solución

Cómo comparten la abscisa es una hipérbola vertical, para encontrar a y c, necesitamos la distancia entre el vértice y el centro; el foco y el centro respectivamente.

$$a=\sqrt{(1-1)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$c=\sqrt{(1-1)^2+(-3+6)^2}=\sqrt{(3)^2}=\sqrt{9}=3$$

b^2lo encontramos con la relación de los ejes

$$b^2=c^2-a^2=9-4=5$$

Por lo que la ecuación de hipérbola quedaría

$$\frac{(y+3)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{5}=1$$

Y la gráfica se aprecia en la *figura 3.4-8*

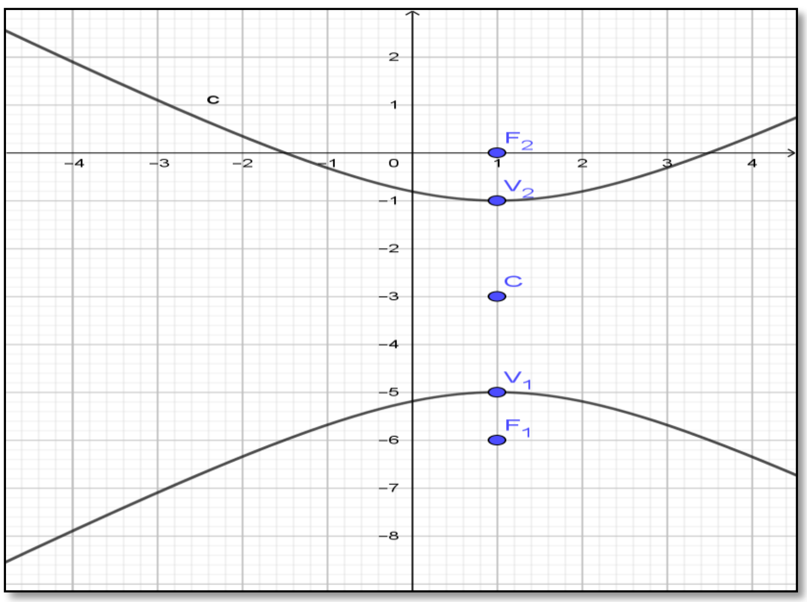

Figura 3.4-8 hipérbola que tiene $C(1,-3)$, $F_1(1,-6)$*y* $V_1(1,-5)$

3.4.8. Elementos de la hipérbola con eje focal Vertical

El siguiente cuadro resume los elementos de la hipérbola vertical y su ecuación ordinaria, tanto para el centro fuera del origen $C(h,k)$, como para el centro en el origen $C(0,0)$. Recordemos que las medidas del lado recto de la hipérbola se obtuvieron para el caso de eje focal horizontal, pero es el mismo valor para la vertical.

Elementos de la hipérbola vertical		
Centro	$C(h,k)$	$C(0,0)$
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1(0,c)$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2(0,-c)$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(0,a)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(0,-a)$
Eje mayor	$2a$	$2a$
Eje Menor	$2b$	$2b$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$c^2=a^2+b^2$
Ecuación ordinaria	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Problema 3.4-10

Encontrar los elementos y la gráfica de la hipérbola

$$\frac{(y-5)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1$$

Solución

Es la ecuación de una hipérbola vertical ya que los elementos de x es negativo, por lo que el centro es C(-1,5), $a^2=4$, $b^2=9$ y encontramos c^2 por medio de la relación de los ejes

$$c^2=a^2+b^2=4+9=13$$

Así nuestro cuadro queda

Elementos de la hipérbola vertical		
Centro	$C(h,k)$	C(-1,5)
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1(-1{,}5+\sqrt{13})$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2(-1{,}5-\sqrt{13})$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(-1,5+2)=(-1{,}7)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(-1,5-2)=(-1{,}3)$
Eje mayor	$2a$	$2(2)=4$
Eje Menor	$2b$	$2(3)=6$
Lado Recto	$LR=\dfrac{2b^2}{a}$	$LR=\dfrac{2(3)^2}{2}=9$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$c^2=a^2+b^2=13$
Ecuación ordinaria	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-5)^2}{4}-\dfrac{(x+1)^2}{9}=1$

La gráfica se muestra en la *figura 3.4-9*

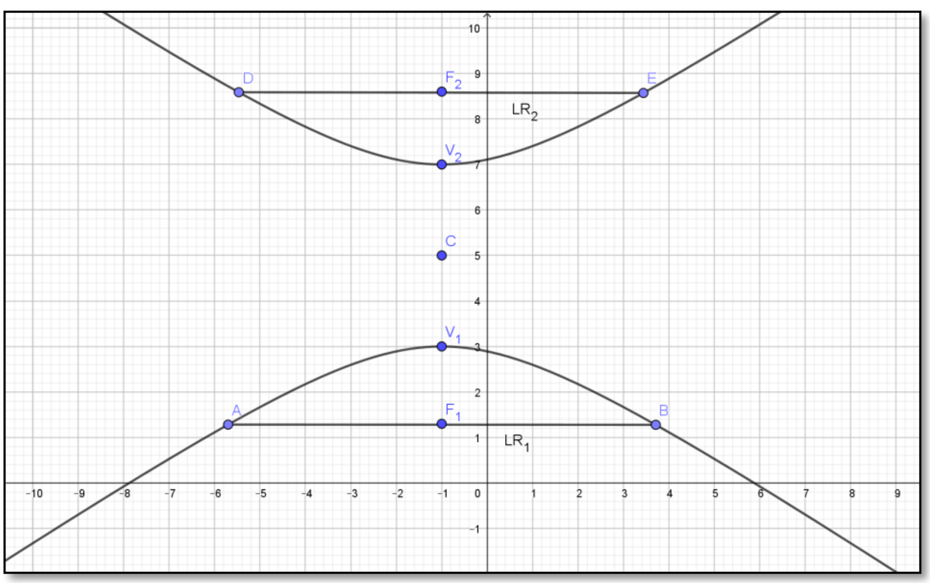

Figura 3.4-9 hipérbola
$$\frac{(y-5)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1$$

3.4.9. Excentricidad

La excentricidad, al igual que en la elipse, representa la relación entre las distancias de foco a foco y de vértice a vértice, esto es el cociente entre el eje focal y el eje mayor.

$$e = \frac{c}{a}$$

Recordamos la relación de los semiejes de la elipse tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Por lo que la excentricidad queda de la forma

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Ahora bien, por la relación entre a, b y c, se observa que c es mayor que a y que b, así, la excentricidad en la hipérbola siempre es mayor que la unidad: $e > 1$.

Problema 3.4-11

El centro de una hipérbola es el punto $C(4,5)$ y uno de sus focos es $F(8,5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2. Hallar su ecuación, sus elementos y gráfica.

Solución

Como comparten ordenada es una hipérbola horizontal. La distancia entre el centro y el foco es c

$$c = \sqrt{(8-4)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 2$$

Despejando a tenemos

$$a = \frac{4}{2} = 2$$

Con la relación de los ejes encontramos b

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$$

La ecuación quedaría

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$$

Nuestra tabla queda

Elementos de la hipérbola horizontal		
Centro	$C(h,k)$	$C(4{,}5)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(4+4{,}5)=(8{,}5)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(4-4,5)=(0{,}5)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(4+2,5)=(6{,}5)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(4-2,5)=(2{,}5)$
Eje mayor	$2a$	$2(2)=4$
Eje Menor	$2b$	$2(\sqrt{12})$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(12)}{2}=12$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$b^2=c^2-a^2=12$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y-5)^2}{12}=1$

La gráfica se aprecia en la *figura 3.4-10*

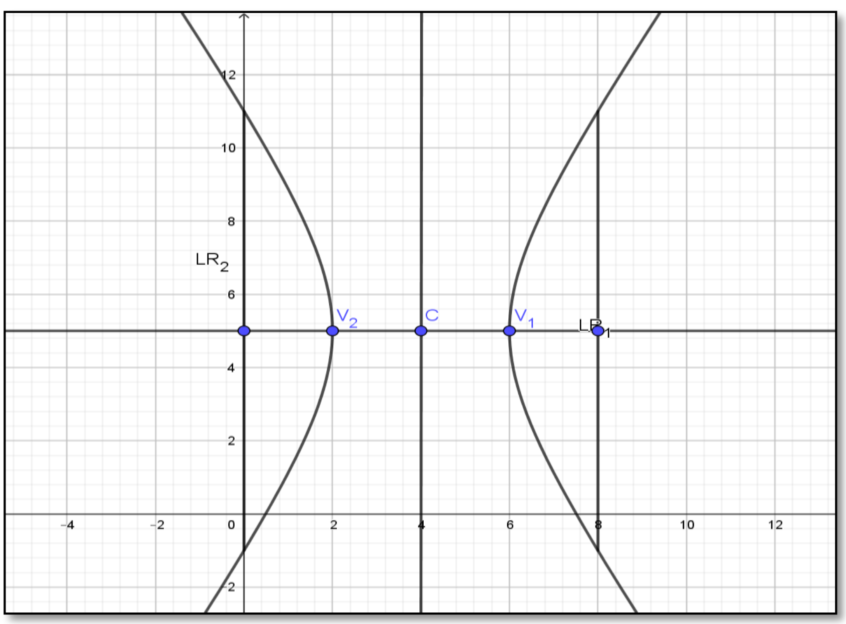

Figura 3.4-10 Gráfica de la hipérbola cuyo centro es $C(4{,}5)$ y uno de sus focos es $F(8{,}5)$Y la excentricidad es 2.

Ejercicio 31

I. Encuentra la ecuación de la hipérbola que cumple con las condiciones indicadas, da todos sus elementos y gráfica.

1. $V_1(-2,2),\ V_2(-2,-4), LR = 2$
2. $F_1(4,-2),\ F_2(4,-8), 2a = 4$
3. $C(5,4), F_1(5,8)\ e = 2$
4. $V_1(-3,2),\ V_2(-3,-2), 2b = 6$
5. $V_1(3,4),\ V_2(3,-2), e = 2$
6. $C(0,0), V_1(0,2), F_1(0,4)$

II. Dada la ecuación de la hipérbola encuentra sus elementos y gráfica.

1. $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$
2. $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{81} = 1$
3. $\frac{(y+7)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{25} = 1$
4. $\frac{(y-8)^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$
5. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

3.4.10. Asíntotas de la Hipérbola

La hipérbola cuenta con dos asíntotas, es decir, las ramas de la hipérbola se acercan indefinidamente a las asíntotas, sin que jamás lleguen a tocarlas. Par encontrar la ecuación de las asíntotas despejemos y de la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal.

Multiplicamos toda la ecuación por a^2b^2

$$a^2b^2\left(\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\right)$$

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

Despejemos y

$$a^2(y-k)^2=-a^2b^2+b^2(x-h)^2$$

$$a^2(y-k)^2=b^2(-a^2+(x-h)^2)$$

$$(y-k)^2=\frac{b^2(-a^2+(x-h)^2)}{a^2}$$

$$(y-k)^2=\frac{b^2}{a^2}(-a^2+(x-h)^2)$$

$$y-k=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(-a^2+(x-h)^2)}$$

$$y-k=\frac{b}{a}\sqrt{((x-h)^2-a^2)}$$

Factorizando $(x-h)^2$ y sacándola de la ecuación tenemos

$$y-k=\frac{b}{a}(x-h)\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{(x-h)^2}\right)}$$

Si x aumenta indefinidamente, la curva se prolonga hacia el infinito a partir del vértice y el cociente

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{a^2}{(x-h)^2}=0$$

Por lo que el radicando tiende al valor de 1 y la curva se acerca cada vez más a las rectas

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$

Que son las asíntotas de la hipérbola horizontal.

En el caso de la hipérbola vertical tendríamos

$$a^2b^2\left(\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1\right)$$

$$\frac{a^2b^2(y-k)^2}{a^2} - \frac{a^2b^2(x-h)^2}{b^2} = a^2b^2$$

$$b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2b^2$$

Despejando y tenemos

$$(y-k)^2 = \frac{a^2(x-h)^2 + a^2b^2}{b^2}$$

$$y-k = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}((x-h)^2 + b^2)}$$

Factorizando $(x-h)^2$ tenemos

$$y-k = \frac{a}{b}(x-h)\sqrt{1+\frac{b^2}{(x-h)^2}}$$

Y nuevamente, si x aumenta indefinidamente, la curva se prolonga hacia el infinito a partir del vértice y el cociente

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{b^2}{(x-h)^2} = 0$$

Por lo que las ecuaciones de las asíntotas son

$$y-k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$$

Problema 3.4-12

Encuentra la ecuación de la hipérbola con centro en $C(-2,2)$ y vértice $V_1(-2,3)$, y asíntota $x+5y-8=0$.

Solución

Como comparten la abscisa estamos hablando de hipérbola vertical, donde la distancia entre el centro y uno de los vértices nos da el valor de a.

$$a = \sqrt{(-2+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(1)^2} = 1$$

Utilizando la fórmula de las asíntotas tenemos y sustituyamos los datos

$$y-k = \frac{-a}{b}(x-h)$$

$$y-2 = \frac{-1}{b}(x+2)$$

Multiplicando todo por b tenemos

$$by - 2b = -x - 2$$

Pasando todo de un solo lado

$$x + by - 2b + 2 = 0$$

Igualamos las ecuaciones $x + 5y - 8 = 0$ con $x + by - 2b + 2 = 0$

Tenemos que igualar término con término

$$x = x$$

$$5y = by$$

$$-8 = -2b + 2$$

Encontramos $b = 5$

Y encontramos c con la relación de los ejes

$$c^2 = a^2 + b^2 = (1)^2 + (5)^2 = 26$$

Quedando nuestra tabla

Elementos de la hipérbola vertical		
Centro	$C(h,k)$	C(-2,2)
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1(-2,2+\sqrt{26},)$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2(-2,2-\sqrt{26})$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(-2,3)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(-2,2-1) = (-2,1)$
Eje mayor	$2a$	$2(1) = 2$
Eje Menor	$2b$	$2(5) = 10$
Lado Recto	$LR = \frac{2b^2}{a}$	$LR = \frac{2(5)^2}{1} = 100$
Relación de los ejes	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2 = 26$
Ecuación ordinaria	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$
asíntotas	$y - k = \frac{-a}{b}(x-h)$	$x + 5y - 8 = 0$

Quedando la gráfica como lo muestra la *figura 3.4-11*

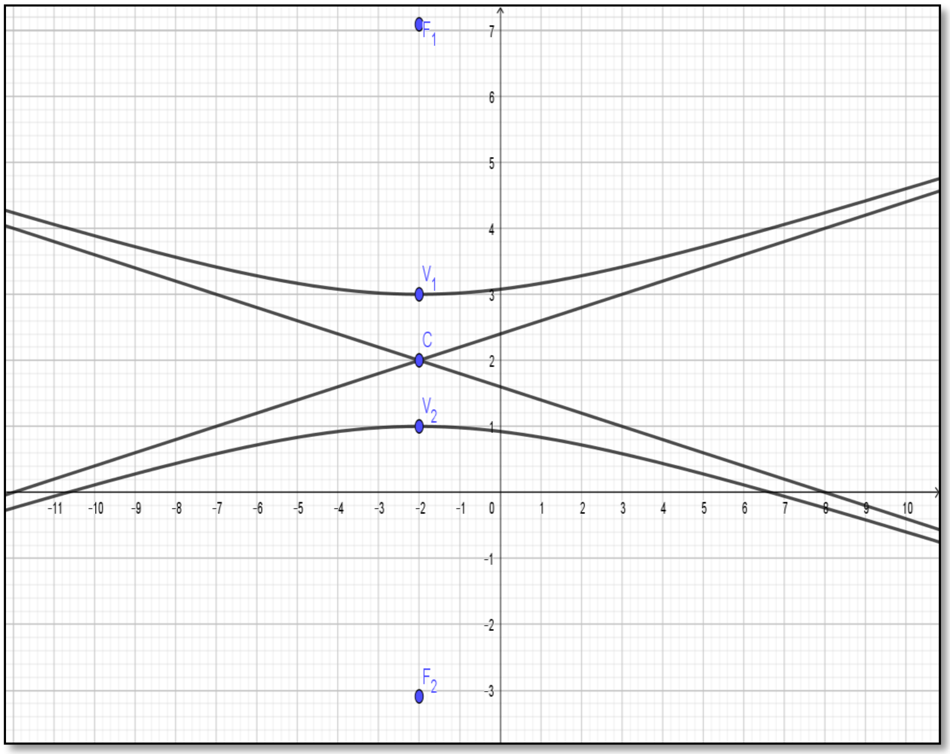

Figura 3.4-11 hipérbola con centro en $C(-2,2)$ y vértice $V_1(-2,3)$, y asíntota $x+5y-8=0$

Ejercicio 32

Hallar la ecuación de la hipérbola que cumple con las condiciones marcadas

1. $V_1(6,0), V_2(-6,0)$ y asíntotas $6y = \pm 7x$
2. $C(0,0), V_1(3,0)$ y asíntotas $2x - 3y = 0$
3. $C(2,-1), F_1(7,-1)$ y asíntotas $y+1 = \pm\frac{3}{4}(x-2)$
4. $V(0,-4), F_1\left(0,\sqrt{65}\right)$ y asíntotas $y = \pm\frac{4}{7}x$
5. $C(1,-2), V(3,-2), F_1(-4,-2)$ y asíntotas $y+2 = \pm\frac{3}{4}(x-1)$

3.4.11. Ecuación general de la hipérbola

Desarrollemos la ecuación ordinaria de la hipérbola, tomemos la hipérbola horizontal, aunque el proceso es el mismo que la vertical.

Multiplicamos toda la ecuación por a^2b^2

$$a^2b^2\left(\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\right)$$

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

Desarrollando los cuadrados tenemos

$$b^2(x^2-2xh+h^2)-a^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2-a^2y^2+2a^2yk-a^2k^2-a^2b^2=0$$

Ordenando tenemos

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2xh+2a^2yk+b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=0$$

Llamamos

$A=b^2$, $B=-a^2, C=-2b^2h$, $D=2a^2k$, $E=b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2$, Por lo que tenemos:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Que es la ecuación general de la hipérbola.

En el caso de una hipérbola vertical el proceso es lo mismo, solo difieren los valores de la siguiente manera.

$$A=-a^2, B=b^2, C=-2a^2h, D=2ab^2k, E=b^2k^2-a^2h^2-a^2b^2$$

En general, si en una ecuación de segundo grado los valores de A y B difirieren de signo y no hay término xy, estamos hablando de una hipérbola. Si $A>0$ es hipérbola horizontal y si $A<0$ es hipérbola vertical.

En el siguiente cuadro se resume los elementos de la hipérbola tanto horizontal como vertical.

	Hipérbola horizontal	**Hipérbola vertical**
Centro	$C(h,k)$	$C(h,k)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(h,k+c)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(h,k-c)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(h,k+a)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(h,k-a)$
Eje mayor	$2a$	$2a$
Eje Menor	$2b$	$2b$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$c^2=a^2+b^2$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Asíntotas	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
Ecuación general	$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ $A>0,B<0$	$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ $A<0\,,B>0$

Problema 3.4-13

Encuentra la ecuación general de la hipérbola, sus elementos y gráfica

$$\frac{(x+2)^2}{10}-\frac{(y+4)^2}{25}=1$$

Solución

Multiplicamos por el común denominador, es decir, por 50

$$\frac{50(x+2)^2}{10}-\frac{50(y+4)^2}{25}=50$$

Simplificando

$$5(x+2)^2-2(y+4)^2=50$$

Desarrollando los binomios y pasando todo de un solo lado de la igualdad

$$5(x^2+4x+4)-2(y^2+8y+16)-50=0$$

$$5x^2+20x+20-2y^2-16y-32-50=0$$

Simplificando y acomodando los términos tenemos la ecuación general de la hipérbola.

$$5x^2-2y^2+20x-16y-62=0$$

Quedando nuestra tabla de elementos

Hipérbola horizontal		
Centro	$C(h,k)$	$C(-2,-4)$
Foco 1	$F_1(h+c,k)$	$F_1(-2+\sqrt{35},-4)$
Foco 2	$F_2(h-c,k)$	$F_2(-2-\sqrt{35},-4)$
Vértice 1	$V_1(h+a,k)$	$V_1(-2+\sqrt{10},-4)$
Vértice 2	$V_2(h-a,k)$	$V_2(-2-\sqrt{10},-4)$
Eje mayor	$2a$	$2\sqrt{10}$
Eje Menor	$2b$	$2(5)=10$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(5)^2}{\sqrt{10}}=\frac{50}{\sqrt{10}}=5\sqrt{10}$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$c^2=10+25=35$
Ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x+2)^2}{10}-\frac{(y+4)^2}{25}=1$
Asíntotas	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$y+4=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}(x+2)$
Ecuación general	$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ $A>0,B<0$	$5x^2-2y^2+20x-16y-62=0$

La gráfica se puede apreciar en la *figura 3.4-12*

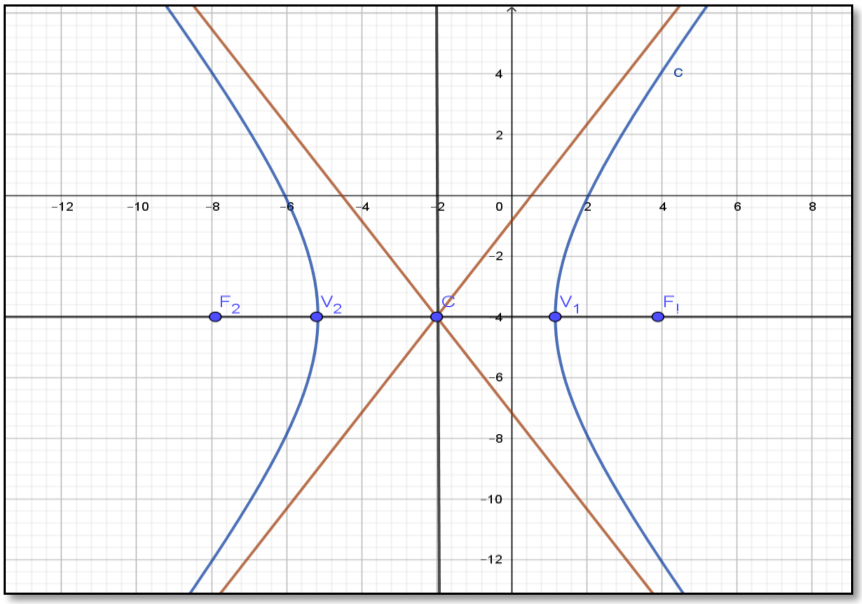

Figura 3.4-12 Gráfica de la hipérbola cuya ecuación es
$$\frac{(x+2)^2}{10}-\frac{(y+4)^2}{25}=1$$

Problema 3.4-14

Encuentra los elementos, la gráfica y la ecuación general de la hipérbola

$$y^2-\frac{(x+9)^2}{7}=1$$

Solución

Es una hipérbola vertical, ya que el elemento que esta negativo es x, el centro de la hipérbola es $C(-9,0)$, como no hay denominador en y, se asume que es 1, por lo que $a=1$, $b^2=7$, y obtenemos c con la propiedad de los ejes

$$c^2=a^2+b^2=1+7=8$$

Para encontrar la ecuación general multiplicamos toda la ecuación por 7

$$7y^2-\frac{7(x+9)^2}{7}=1(7)$$

Simplificando queda

$$7y^2-(x+9)^2=7$$

Desarrollando el binomio y simplificando tenemos

$$7y^2-x^2-18x-81-7=0$$

$$7y^2 - x^2 - 18x - 88 = 0$$

Nuestra tabla de elementos queda

	Hipérbola vertical	
Centro	$C(h,k)$	$C(-9{,}0)$
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1(-9,\sqrt{8})$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2(-9,-\sqrt{8})$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(-9,1)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(-9,-1)$
Eje mayor	$2a$	$2(1) = 2$
Eje Menor	$2b$	$2(\sqrt{7})$
Lado Recto	$LR = \frac{2b^2}{a}$	$LR = \frac{2(\sqrt{7})^2}{1} = 14$
Relación de los ejes	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2 = 8$
Ecuación ordinaria	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$y^2 - \frac{(x+9)^2}{7} = 1$
Asíntotas	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}(x+9)$
Ecuación general	$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ $A < 0\ , B > 0$	$-x^2 + 7y^2 - 18x - 88 = 0$

La gráfica se puede ver en la *figura 3.4-13*

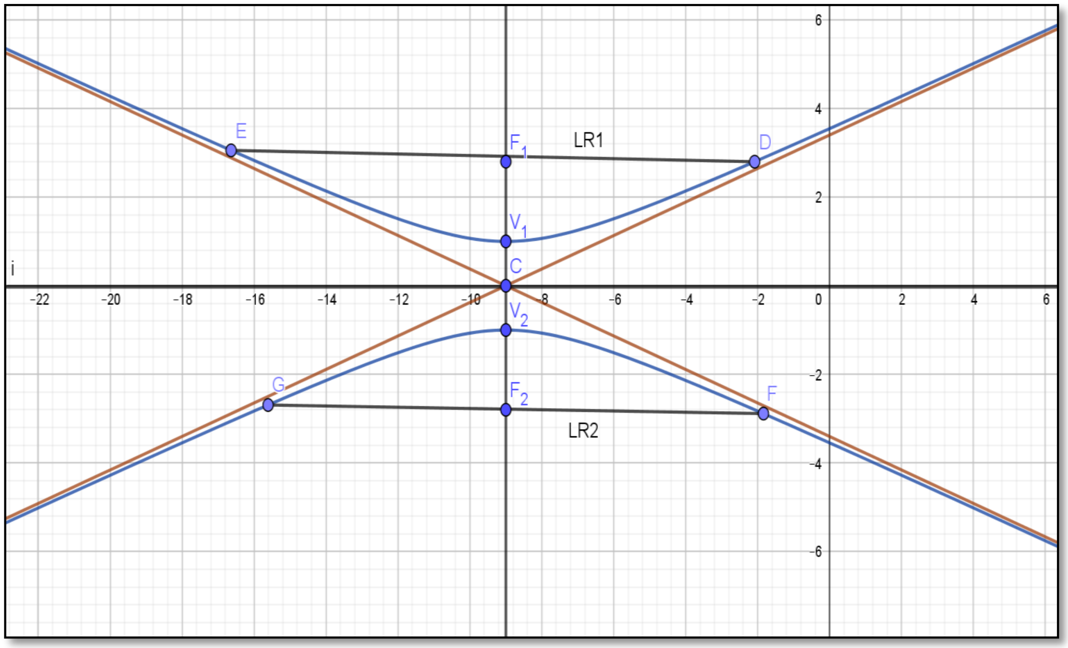

Figura 3.4-13 Hipérbola cuya ecuación es

$$y^2-\frac{(x+9)^2}{7}=1$$

Problema 3.4-15

Encuentra los elementos, gráfica y ecuación ordinaria de la hipérbola

$$2y^2-9x^2-18x+20y+5=0$$

Solución

Es una hipérbola vertical, ya que x es negativa, agrupamos los términos que tienen x y los que tienen y, lo demás lo pasamos del otro lado de la igualdad

$$(2y^2+20y)-(9x^2+18x)=-5$$

Factorizamos términos semejantes en cada paréntesis

$$2(y^2+10y)-9(x^2+2x)=-5$$

Completamos el trinomio cuadrado perfecto en cada paréntesis

$$2\left(y^2+10y+\left(\frac{10}{2}\right)^2\right)-9\left(x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right)=-5+2\left(\frac{10}{2}\right)^2-9\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$2(y^2+10y+25)-9(x^2+2x+1)=-5+50-9=36$$

Factorizando tenemos

$$2(y+5)^2-9(x+1)^2=36$$

Dividiendo todo entre 36 para igualar a 1

$$\frac{2(y+5)^2}{36}-\frac{9(x+1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(y+5)^2}{18}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$$

Donde tenemos la siguiente tabla

	Hipérbola vertical	
Centro	$C(h,k)$	$C(-1,-5)$
Foco 1	$F_1(h,k+c)$	$F_1(-1,-5+\sqrt{22})$
Foco 2	$F_2(h,k-c)$	$F_2(-1,-5-\sqrt{22})$
Vértice 1	$V_1(h,k+a)$	$V_1(-1,1)$
Vértice 2	$V_2(h,k-a)$	$V_2(-1,-1)$
Eje mayor	$2a$	$2(\sqrt{18})$
Eje Menor	$2b$	$2(2)=4$
Lado Recto	$LR=\frac{2b^2}{a}$	$LR=\frac{2(2)^2}{\sqrt{18}}=\frac{8}{\sqrt{18}}$
Relación de los ejes	$c^2=a^2+b^2$	$c^2=a^2+b^2=18+4=22$
Ecuación ordinaria	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y+5)^2}{18}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$
Asíntotas	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y+5=\pm\frac{\sqrt{18}}{2}(x+1)$
Ecuación general	$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ $A<0\,,B>0$	$2y^2-9x^2-18x+20y+5=0$

La gráfica se muestra en la *figura 3.4-14*

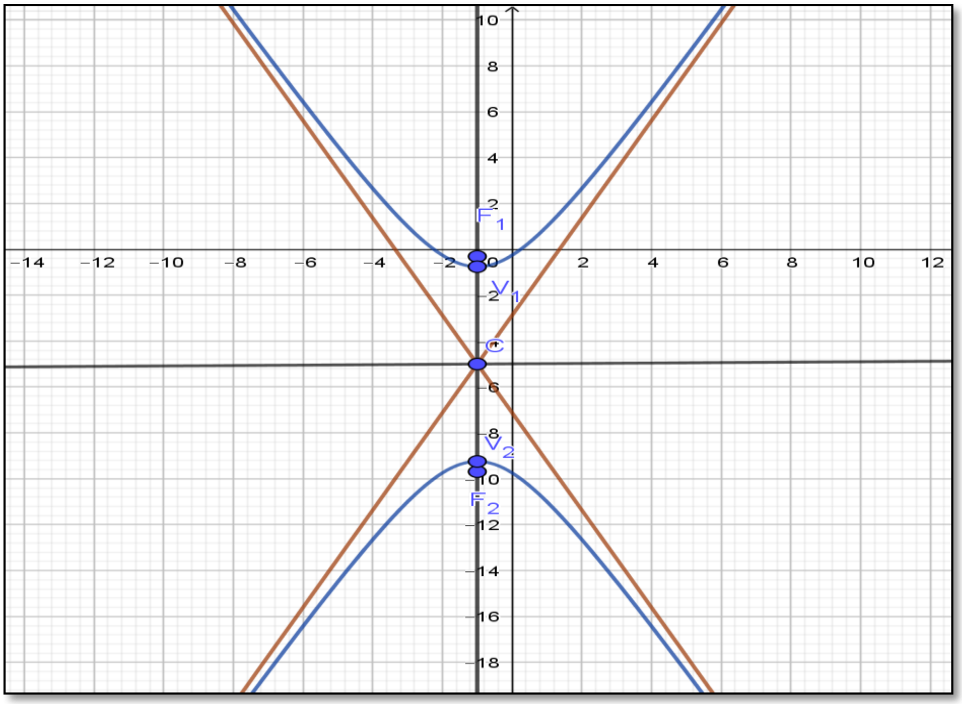

Figura 3.4-14 Hipérbola cuya ecuación es
$2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$

Ejercicio 33

I. Encuentra la ecuación general de la hipérbola representada por las ecuaciones:

1. $\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

2. $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

3. $\frac{(y-4)^2}{36} - x^2 = 1$

4. $\frac{(y+4)^2}{10} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$

5. $\frac{(x+2)^2}{10} - \frac{(y+4)^2}{25} = 1$

II. En cada una de las siguientes ecuaciones encuentra los elementos de la hipérbola, su ecuación ordinaria, asíntotas y gráfica.

1. $x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0$
2. $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$
4. $2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$
5. $5y^2 - 9x^2 = 36$

4. ECUACIÓN CUADRÁTICA

4.1. Introducción

Cómo se vio en cada capítulo, cada una de las cónicas representada en su ecuación general representa una ecuación cuadrática, en este capítulo veremos como identificar que tipo de cónica representa la ecuación analizando los términos de la ecuación cuadrática.

4.2. Caso $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Como hemos estado viendo, al obtener las ecuaciones generales de las cónicas con ejes focales paralelos a los ejes coordenados tenemos como resultado una ecuación de segundo grado de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

De la cual podemos obtener las siguientes conclusiones

Parábola	Si $A = 0$, $B \neq 0$ horizontal	$By^2 + Cx + Dy + E = 0$ $D \neq 0$ $E = 0$ eje focal sobre el eje x $D \neq 0$ $E \neq 0$ Eje focal fuera de los ejes.
	Si $B = 0$, $A \neq 0$vertical	$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ $D = 0$ $E \neq 0$ Eje focal sobre el eje y. $D \neq 0$ $E \neq 0$ Eje focal fuera de los ejes.
Elipse	A y B tienen el mismo signo, A y $B \neq 0$	$D = 0$, $E = 0$ centro en el origen $D \neq 0$, $E = 0$ eje focal sobre eje x $D = 0$, $E \neq 0$ eje focal sobre eje y $D \neq 0$, $E \neq 0$ eje focal fuera de los ejes

Hipérbola	A y B diferentes signo	$D = 0$, $E = 0$ centro en el origen $D \neq 0$, $E = 0$ eje focal sobre eje x $D = 0$, $E \neq 0$ eje focal sobre eje y $D \neq 0$, $E \neq 0$ eje focal fuera de los ejes
Circunferencia	$A = B \neq 0$	$D = 0$, $E = 0$ centro en el origen $D \neq 0$, $E = 0$ centro sobre eje x $D = 0$, $E \neq 0$ centro sobre eje y $D \neq 0$, $E \neq 0$ centro fuera de los ejes
Rectas paralelas, un punto o ningún lugar geométrico.	Si $A = 0$, $B \neq 0$, $D = 0$ Si $B = 0$, $A \neq 0$ $E = 0$	Dependiendo de la solución de la ecuación.

Problema 4.2-1.

Indica que tipo de cónica representa la ecuación

$$y^2 - 6x + 2y = 0$$

Solución

Comparemos con la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

$$A = 0, B = 1, C = -6, D = 2, E = 0$$

Es una parábola horizontal, ya que $A = 0$ y $B > 0$, y como $D \neq 0$ $E = 0$ tiene eje focal sobre el eje x. Comprobemos obteniendo la gráfica por medio de Geogebra, como lo muestra la *figura 4-1*.

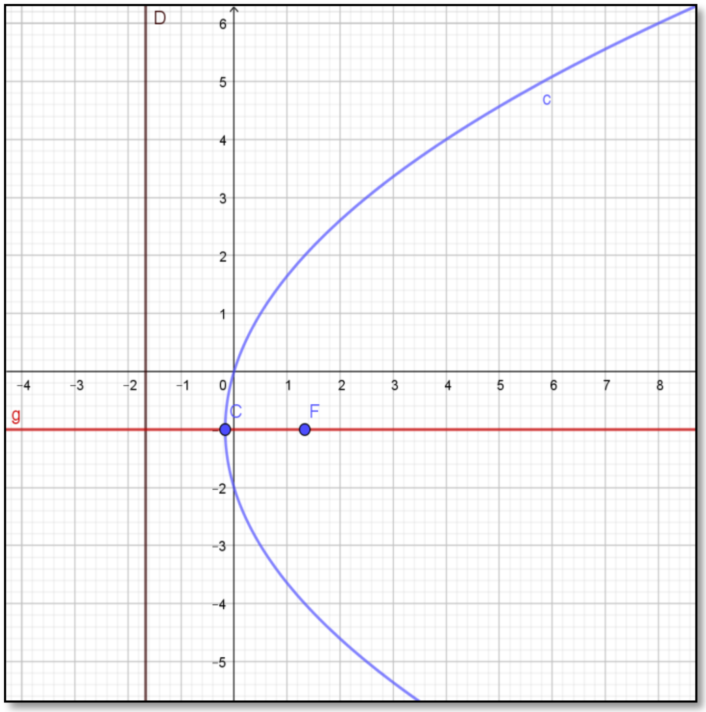

Figura 4-1 Grafica de la hipérbola cuya ecuación es

$$y^2 - 6x + 2y = 0$$

Problema 4.2-2

Analiza e indica que tipo de cónica es la representada por la ecuación

$$-2x^2 - 4y^2 + 8x - 4y + 3 = 0$$

Solución

Comparemos con la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Multipliquemos por -1 para tener los términos cuadráticos positivos, esto es opcional, pero es más fácil la comparación

$$2x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 3 = 0$$

Obtenemos los siguientes datos

$B > A > 0,$ Por lo que es una elipse, $D \neq 0$, $E \neq 0$ lo que implica que el eje focal esta fuera de los ejes. Comprobemos por medio de Geogebra, como se muestra en la *figura 4-2*.

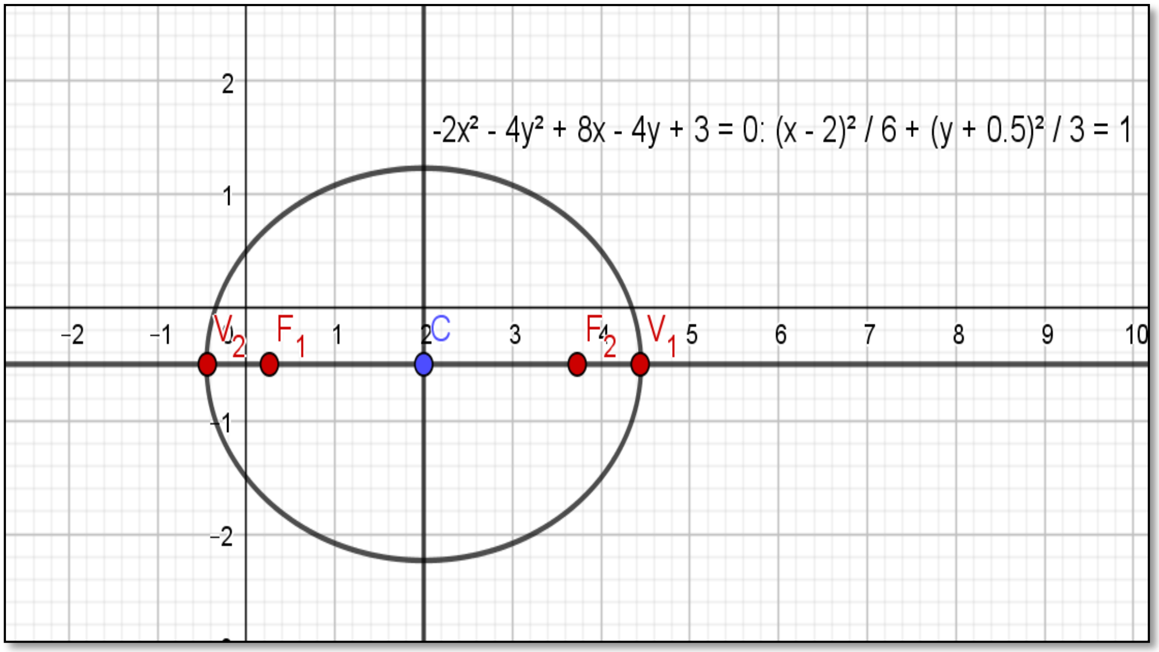

Figura *4-2 Grafica de la ecuación*
$-2x^2 - 4y^2 + 8x - 4y + 3 = 0$

Problema 4.2-3

Indica que tipo de cónica representa la siguiente función

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y - 30 = 0$$

Solución

Comparemos con la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

$A = 1, B = 1, C = 2, D = -10, E = 30$, es una circunferencia fuera del origen, cuya gráfica se muestra en la *figura 104*.

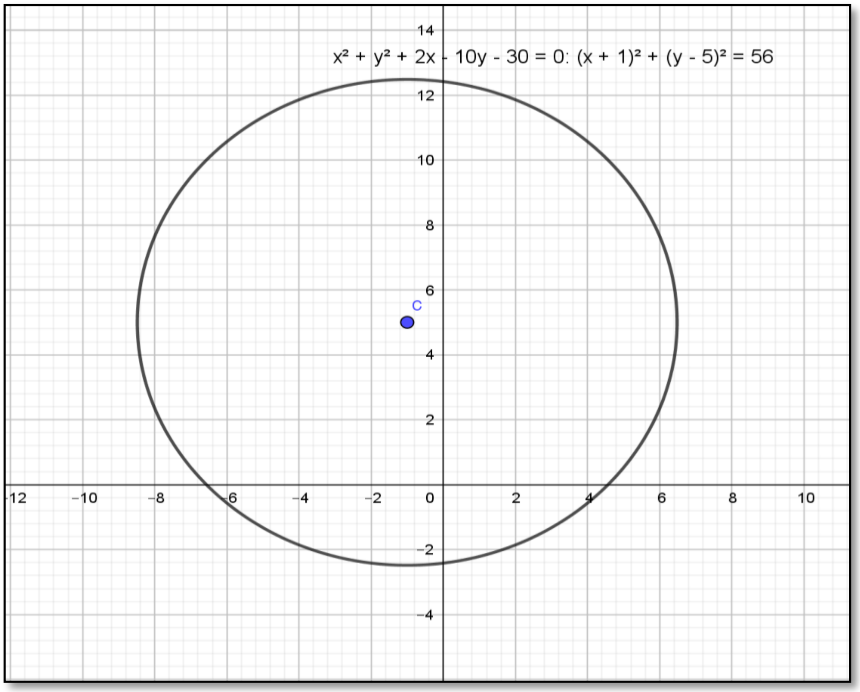

Figura 4-3 Gráfica de la ecuación cuadrática donde $A = 1, B = 1, C = 2, D = -10, E = 30$

Problema 4.2-4

Analiza que tipo de cónica representa la ecuación cuadrática

$$y^2 + 6y + 9 = 0$$

Solución

Comparando con la ecuación cuadrada tenemos

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

$$A = 0, B = 1, C = 0, D = -6, E = 9$$

Por lo que es una recta paralela al eje de las x, como lo muestra la *figura 4-4*

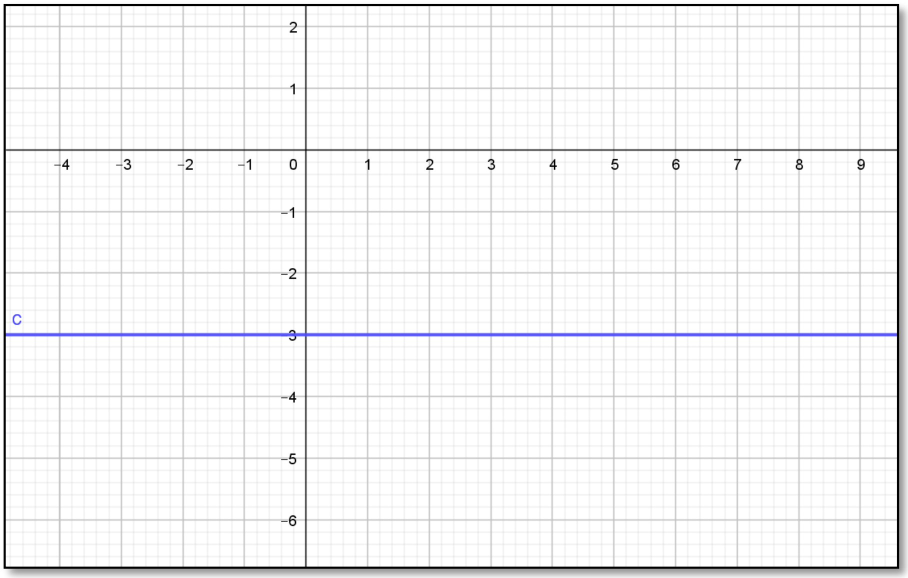

Figura 4-4 Gráfica de la ecuación
$y^2 + 6y + 9 = 0$

Ejercicio 34

Analiza cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas e indica que tipo de cínica representa.

6. $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$
7. $x^2 - 4y - 4 = 0$
8. $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$
9. $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$
10. $3x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 30 = 0$
12. $4x^2 - 7x + 53 = 0$
13. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$
14. $3x^2 + y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$
15. $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$

4.3. Caso $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Cuando nuestra cónica tienen ejes focales oblicuos, nuestra ecuación esta expresada con el término $xy,$ es decir, tiene la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Bastará con analizar el discriminante $B^2 - 4AC$ para definir qué tipo de cónica se trata.

$B^2 - 4AC < 0$	Elipse
$B^2 - 4AC > 0$	Hipérbola
$B^2 - 4AC = 0$	Parábola

Problema 4.3-1

Indica que tipo de cónica representa la ecuación

$$4x^2 - 24\text{xy} + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$$

Solución

Comparemos con la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A = 4$, $B = -24$, $C = 11$, $D = 56$, $E = -58$, $F = 95$

Analicemos el discriminante $B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(4)(11) = 576 - 176 = 400 > 0$ por lo que es una hipérbola. Comprobemos con Geogebra, donde la gráfica se muestra en la *figura 4-5*.

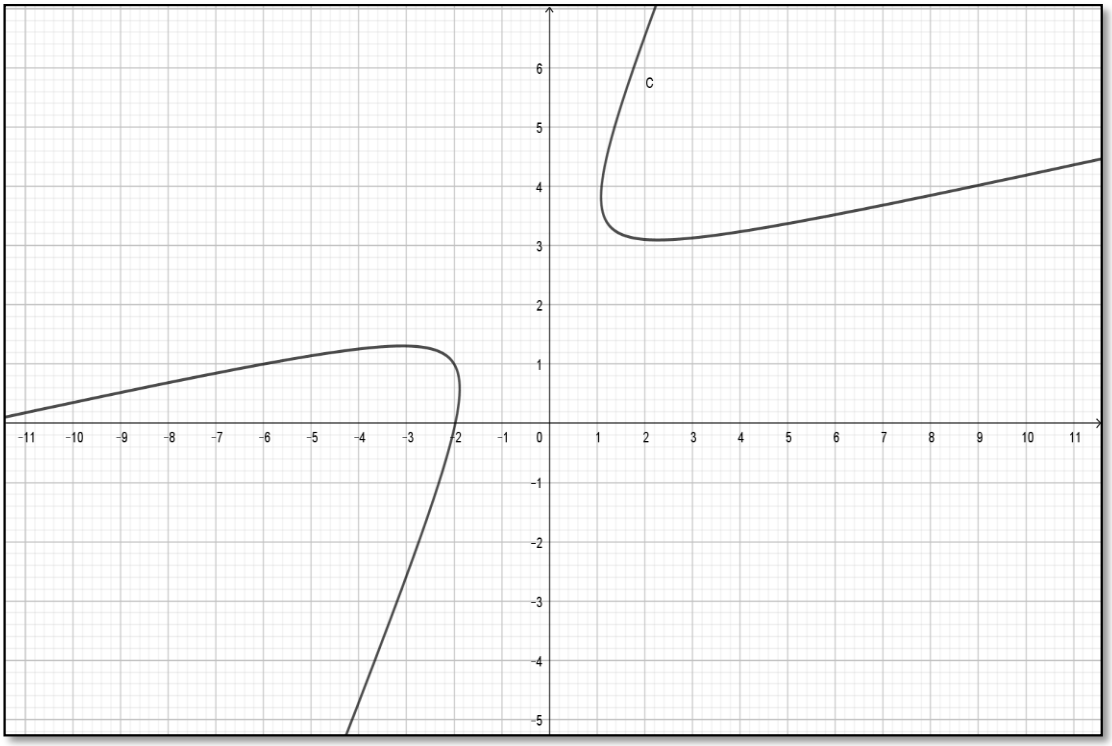

Figura 4-5 Gráfica de la ecuación
$4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$

Problema 4.3-2

Indica que tipo de cónica representa la ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

Solución

Comparemos con la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$, $E = -2$, $F = -1$

Analicemos el discriminante $B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$, por lo que es una parábola, como se aprecia en la *figura 107*

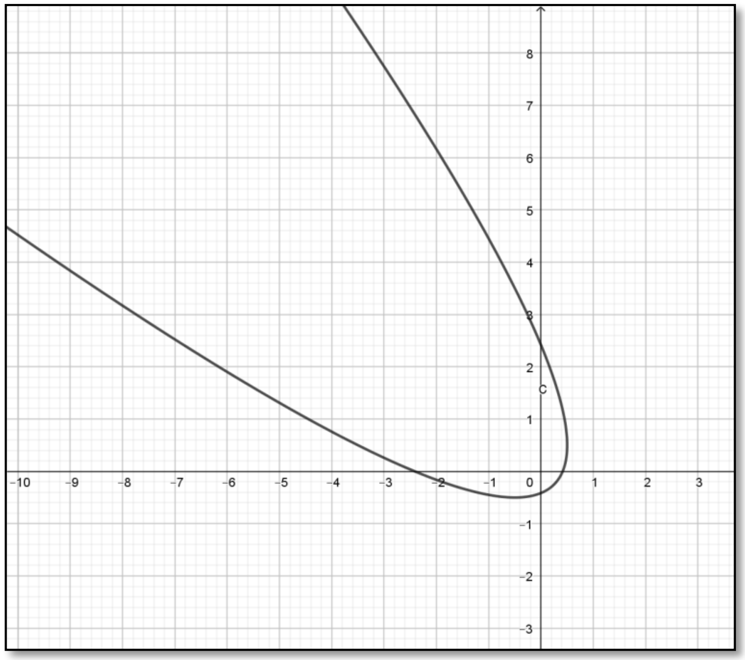

Figura 4-6 Gráfica de la ecuación
$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

Ejercicio 35

Determina qué tipo de cónica es la que representa cada una de las siguientes funciones

1. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$
2. $x^2 + 2xy - 2y^2 + 2x + y + 1 = 0$
3. $7x^2 + 11xy - 9y^2 + 5x + 8y + 1 = 0$
4. $2x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y - 4 = 0$
5. $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$
6. $8x^2 - 24xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0$
7. $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$
8. $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0$

4.4. Rotación de Ejes

Por último, aunque propiamente no pertenece al temario oficial de la materia de Geometría Analítica según la dirección general de bachillerato, dejaremos la inquietud sobre el caso de la rotación de los ejes, el cual daremos únicamente las generalidades para que la curiosidad del alumno lo lleve a desarrollar el tema.

Si los ejes originales x y y rotan en sentido contrario al reloj un ángulo θ, para cualquier punto $P(x, y)$, las coordenadas originales (x, y) se convierten en las nuevas coordenadas $(x\,', y\,')$, que son:

$$x = x' cos\,\theta + y'\,sen\,\theta$$

$$y = -x'\,sen\,\theta + y'\,cos\,\theta$$

Cómo ejemplo pondremos la hipérbola $xy = 1$, que giraremos $45°$. La gráfica original se muestra en la *figura 4-7.*

Al sustituir los valores del ángulo en las ecuaciones mencionadas tendremos:

$$x = x' cos\,45° + y' sen\,45° = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = -x\,' sen\,45° + y' cos\,45° = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Que al sustituir en la ecuación original tenemos:

$$xy = 1$$

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

Qué al resolver la ecuación tenemos:

$$\left(\frac{y'^2 - x'^2}{2}\right) = 1$$

Escrito como su fórmula tradicional de hipérbola.

$$\frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = 1$$

Qué es una hipérbola con centro en el origen cuya gráfica se muestra en *la figura 4-8.*

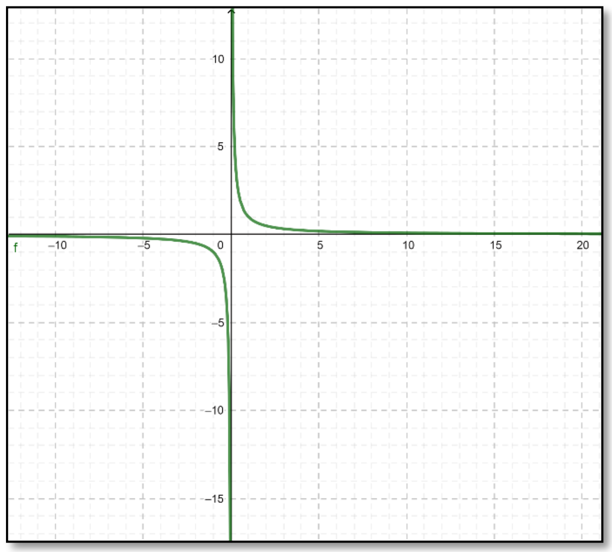

Figura 4-7 gráfica de la ecuación $xy = 1$

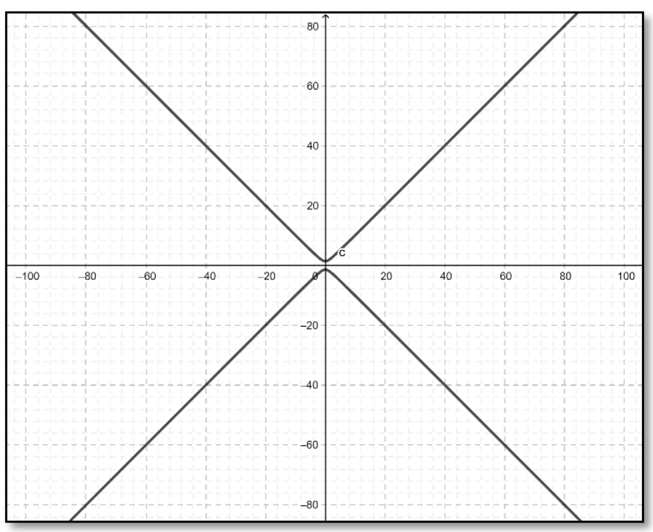

Figura 4-8 Rotación de 90º de la ecuación $xy = 1$

CONCLUSIONES

El manual es un documento de apoyo a la impartición de la materia de Geometría Analítica que cubre las necesidades del profesor de repasar los conceptos algebraicos y geométricos sin descuidar el temario.

Para el alumno es una guía de trabajo de los problemas más utilizados en la asignatura en la que encontrarán no solo la solución al ejercicio, sino que adquirirán los conocimientos previos de algebra y geometría plana necesarios para la geometría analítica.

Es un libro que pretende ser de cabecera para el alumno en el que trabaje desde los conocimientos básicos hasta temas más profundos, pretende que al terminar el curso de Geometría analítica tenga los conocimientos necesarios para continuar una carrera universitaria dirigida a cualquier área, es decir, tenga los conocimientos básicos requeridos para licenciaturas de áreas como ciencias sociales, artes o humanidades, pero que si decide continuar con una ingeniería o licenciatura en el área físico matemático tenga todos los conocimientos necesarios para ello.

Ha sido utilizado como material de apoyo en el Instituto de Estudios Superiores Patria, situado en Carretera Atizapán Villa Nicolás Romero sin Número, donde se encontró que los estudiantes no solo aprueban la materia, sino, que dominan los temas de geometría analítica y son capaces de resolver problemas geométricos con facilidad, lo cual se aprecia en la materia de Calculo diferencial, donde son capaces de reconocer el uso de la Geometría Analítica en el Cálculo Diferencial e Integral.

Al presentar el examen de Planea en Educación Media Superior que aplica la Secretaria de Educación Pública de cada año, se han incrementado el número de aciertos en el área de Geometría Analítica.

También, se ha visto un incremento en el gusto de los estudiantes por la geometría que influye en la decisión de carrera en el último semestre de la preparatoria.

Bibliografía

- H. Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica.* Nueva York, E.U.A.: Limusa.
- Benjumeda, F. R., De la Rosa, R. G., Maqueo, M. G., & González, P. R. (2013). *Matematicas III.* México, D.F.: Equipo SM.
- D.C: Murdoch. (1991). *Geometría Analítica con vectores y Matrices.* Nueva York, E:U.A.: Limusa.
- E. Moise, E., & L. Downs, F. (1986). *Geometria Moderna.* Wilmington, Delaware, E.U.A.: Fondo Educativo Interamericano.
- G. Zill, D., & M. Dewar, J. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría analítica* (Vol. Tercera edición). México: Mc GRaw Hill.
- Landaverde, F. (1977). *Curso de Geometria para secundaria y preparatoria.* México, D.F.: Editorial Progreso, S.A. de C.V.
- Masjuan Torres, G., Arena Daza , F., & Villanuevas Mansilla, F. (2011). *Trigonometría y Geometría analítica* (Tercera ed.). Santiago, Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Ramíres-Garza, A. I. (2004). *Geometría analítica. Una introducción a la geometría.* México: Facultad de Ciencias UNAM.

Tabla de Ilustraciones

Apéndice

Geogebra es un software de código abierto, disponible gratuitamente en www.geogebra.org. Es de interfaz amigable y muy fácil de utilizar. Se utiliza para facilitar la enseñanza del algebra, geometría, cálculo y estadística. Trabaja gráficos en 2D y 3D, así como animaciones y deslizadores.

Como ya se mencionó, el manual utilizó el programa Geogebra para la construcción de los gráficos e ilustraciones. El objetivo del documento no es enseñar el uso del programa Geogebra, sin embargo, en esta sección encontrarás links donde encontrarás manuales y videos para aprender a utilizar el programa.

- Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemáticas, 2010, "Manual para Geogebra, Guías para geometría dinámica, animaciones y deslizadores. Encontrado en https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Secciones/Temas_de_Geometria/ABorbon_ManualGeogebraV11N1_2010/1_ABorbon_ManualGeogebra.pdf.
- GeoGebra 5.0.Guía de inicio rápido para la versión de escritorio, encontrado en https://wiki.geogebra.org/uploads/d/de/Geogebra-quickstart-es-50-desktop.pdf
- Hohenwarter M., Hohenwarter J., Documento de Ayuda de GeoGebra, manual oficial de la versión 3.2 , Última modificación 18 de Septiemnre del 2009, GeoGebra Website www.geogebra.org. Encontrado en https://app.geogebra.org/help/docues.pdf

En los siguientes enlaces encontrarás ejercicios relacionados con la geometría analítica para reforzar los conocimientos adquiridos en el presente manual.

- Arriaga , J. (2014), Ejercicios de Geometría Analítica resueltos con GeoGebra, encontrado en http://campusvirtual.uaemex.mx/SECMED/carga.php?id=22589
- Tinoco, G., secciones Cónicas, encontrado en https://www.geogebra.org/m/yQwmf2We
- Cayetano J. Elementos de las Cónicas, encontrado en https://www.geogebra.org/m/bU3GkH6p
- Cayetano J. Hipérbolas Equiláteras, encontrado en https://www.geogebra.org/m/gR5wxqDE
- Nelson T., Cónicas (Elipse 1), encontrado en https://www.geogebra.org/m/VmdevEmy
- Nelson T., Cónicas (Hipérbola 3), encontrado en https://www.geogebra.org/m/UpGTdYQk
-