UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MANUAL DE INTRODUCCIÓN AL FUNDAMENTO Y ANÁLISIS DE LOS JUEGOS DE APUESTAS

REPORTE DE TRABAJO PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

PATRICIA MARGARITA HUERTA GIL

TUTOR:
ACT. LAURA ELENA GLORIA HERNÁNDEZ

2013

Hoja de Datos del Jurado

1, Datos del Alumno	
Apellido paterno	Huerta
Apellido materno	Gil
Nombre(s)	Patricia Margarita
Teléfono	55 1653 0622
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de Cuenta	40105106-9
2. Datos del Tutor	
Grado	Dra
Nombre(s)	Laura Elena
Apellido paterno	Gloria
Apellido materno	Hernández
3. Datos del sinodal 1	
Grado	M en D
Nombre(s)	Alejandro
Apellido paterno	Mina
Apellido materno	Valdés
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dr
Nombre(s)	Víctor Manuel
Apellido paterno	García
Apellido materno	Guerrero
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dra
Nombre(s)	María Edith
Apellido paterno	Pacheco
Apellido materno	Gómez Muñoz
6. Datos del sinodal 4	M en D
Grado	María Teresa
Nombre(s)	Velázquez
Apellido paterno	Uribe
Apellido materno	
7. Datos del trabajo escrito	
Título	Manual de Introducción al Fundamento y Análisis de los Juegos de Apuestas
Número de páginas	60
Año	2013

Agradezco primero a mi familia por apoyarme en mis continuos cambios de carrera hasta que por fin encontré el camino profesional que, sin temor a equivocarme, puedo decir que es para mí.

A Caro, Fab y Mony por estar conmigo y demostrarme que a pesar de la distancia y, el tiempo y hasta países de por medio hay lazos que no se rompen.

A Juanjo, por guiarme en mi formación profesional descubriendo el fascinante mundo de los casinos y apoyarme cuando fue hora de dejar el nido. Casi cinco años de mucho aprendizaje que agradezco infinitamente.

A Marisol, por recibirme en el nuevo nido, creer en mí y darme la oportunidad de conocer nuevos horizontes haciendo lo que me apasiona; adquiriendo experiencias invaluables para seguir aprendiendo e inspirándome para ser mejor y exigirme más cada día.

A Rosa Elena, por ser la mejor maestra de Mate que pude haberme encontrado. Seguramente mi vida sería muy diferente si no hubiera disfrutado tanto aprender Matemáticas en secundaria.

Gracias a todos por ser partícipes de una u otra manera para que yo pudiera llegara a este momento, desde la inspiración inicial hasta el último empujón de este proyecto que hoy concluyo.

Introducción

La industria del juego ha tenido un gran desarrollo en todo el mundo. Sin embargo, la velocidad con la cual se ha desarrollado no ha sido la misma en todos los países. En el caso de México se puede ver que la apertura de establecimientos, coloquialmente conocidos como casinos, dedicados al juego es relativamente reciente.

La cantidad de operadores de juegos legalmente establecidos en México pasó de apenas un cuantos en 1997 a 24 en 2010; el número de establecimientos de dichos operadores actualmente en funcionamiento ha pasado de 19 en 1997 a 225 en 2010 (esto sin considerar el número de establecimientos ilegales en México, los cuáles se calculan en alrededor de 60, y representan alrededor del 24% de la totalidad de establecimientos).

La industria del juego es un campo de trabajo en donde puede colaborar cualquier persona que tenga nociones matemáticas. Sin duda alguna, esto lo hace un campo ideal de trabajo para un Actuario. Un conocimiento sólido en Matemáticas puede marcar la diferencia entre tomar las decisiones correctas o no en este tipo de negocios.

Los conocimientos y habilidades adquiridas durante la formación educativa de un actuario son las herramientas base que permiten un desarrollo exitoso en este tipo de empresas. Considero que, en particular, las herramientas que más he aprovechado para mi desarrollo profesional en esta área son las que adquirí en Investigación de Operaciones, Finanzas, Álgebra y Probabilidad. Por supuesto que el Álgebra es fundamental para comprender el diseño del juego, y, de la mano con la Probabilidad conforman la esencia de los juegos. En el aspecto ya empresarial, las decisiones de impacto y las mejoras en la producción se obtienen analizando el aspecto financiero; la Investigación de Operaciones aporta herramientas para llevar a cabo la optimización y ejecución de las estrategias ya con los productos.

Los casinos obtienen ingresos gracias a la matemática que está detrás de cada uno de los juegos ofrecidos. Entender las reglas básicas de los juegos y más aún, el fondo matemático de ellas, es indispensable, pues existen numerosos ejemplos de casos en donde lo que parecía ser una sencilla alteración a la regla de un juego o al pago ofrecido, hecho con el fin de hacer un juego más atractivo, resultaban en pérdidas incluso catastróficas para los casinos. Incluso ayuda a detectar cuando se hacen trampas en el juego o cuando las máquinas electrónicas pudieran tener fallas. Todo eso se obtiene bajo el estudio teórico de estos juegos comparándolo con los resultados reales obtenidos en las salas de juegos.

Mi experiencia laboral ha consistido en el estudio y entendimiento de estos juegos para posteriormente poderlos ofrecer como parte de opciones de entretenimiento de acuerdo a las necesidades de los distintos mercados que tenemos en México. Es fundamental el desarrollo, entendimiento y aplicación de análisis y otras herramientas que permiten mejorar continuamente la experiencia que se le ofrece a los clientes, puesto que no es lo mismo un cliente en las ciudades fronterizas con Estados Unidos, que un cliente en la zona del Bajío; incluso dentro de una misma localidad hay marcadas diferencias, en la Ciudad de México y su zona conurbada, no es lo mismo un cliente de Santa Fe que un cliente de Cuautitlán Izcalli. Hay que encontrar la combinación adecuada del producto y afinar las características de cada juego para mejorar la rentabilidad de cada unidad de negocio, a la par que se debe cumplir con las expectativas de los clientes.

Una de las empresas pioneras en la introducción de estos juegos en México es la Corporación Interamericana de Entretenimiento (CIE) mediante su división Administradora Mexicana de Hipódromo (AMH), la cual obtuvo en un inicio, los permisos para operar el Hipódromo de las Américas (en la Ciudad de México) y 45 salas de sorteos de números (también conocidos como bingo) y actualmente está considerada como la empresa líder en entretenimiento de este tipo en México.

Mi trayectoria en CIE inicia como Analista de Juegos, cargo que desempeñé desde enero del 2008 hasta agosto de 2010, y posteriormente como Coordinadora de Análisis de Terminales hasta julio de 2012. La intención de crear este documento es servir como un manual de introducción para cualquier profesionista que se incorpore a las áreas de interés de este negocio e incluso podrá servir como referencia para cualquier interesado en conocer más a fondo los temas que se cubren en este trabajo.

Empezaré primero por dar un panorama de los aspectos legales que rigen actualmente en México en materia de juegos y sorteos; un poco de historia del juego en México y en el mundo; posteriormente un estudio general de los juegos de azar más comúnmente encontrados. Desde los juegos de dados y cartas hasta las terminales electrónicas, el producto principal en torno al cual ha girado mi experiencia profesional, para finalizar con la presentación de algunos de los análisis fundamentales para el negocio, específicamente enfocado a dichas terminales electrónicas.

A 2010, CIE mantiene cerca del 16% de la totalidad de terminales electrónicas de sorteos (alrededor de 11,000) distribuidas en 53 establecimientos a lo largo de todo el país, por lo que el volumen de información a analizar diariamente es considerable.

Continuamente se debe analizar la información para poder tomar las decisiones acertadas acerca de los productos que se ofrecen a los clientes. Las opciones de juego son muy versátiles y están en continuo cambio. No es suficiente con ofrecer productos innovadores, sino que se debe tomar en cuenta que los juegos son matemáticamente distintos y por eso ofrecen al jugador experiencias distintas, por lo que es vital contar con la información necesaria y analizarla adecuadamente para maximizar los resultados esperados, sin sacrificar el gusto y el interés del cliente,

Existe toda una terminología para referirnos a los diferentes indicadores clave relacionados al juego. Pronto nos damos cuenta que muchos de estos conceptos son familiares pues se toman directamente de una de las ramas fundamentales para un actuario, la Probabilidad.

1. Antecedentes históricos de los juegos con apuestas

Uno de los aspectos más fascinantes con los que se ha encontrado el hombre ha sido el constante deseo de tener el conocimiento para anticiparse a sucesos futuros. Este afán lo llevó a desarrollar avanzadas teorías en lo que ahora llamamos Probabilidad. Este desarrollo no ha sido ajeno a otro fenómeno que va íntimamente relacionado con los eventos probabilísticos. Desde las civilizaciones más antiguas existen evidencias de los juegos de azar. Incluso podría llegarse a afirmar que, si bien es cierto, que la base sobre la cual se construye la Teoría de la Probabilidad es la tradición filosófica, los juegos de azar han sido la excusa en el nacimiento y posterior perfeccionamiento de la misma (García Secades, 2005).

Se han descubierto restos en sitios arqueológicos de los asirios y de los sumerios que sugieren el uso de un hueso de algunos animales, el astrágalo, como un rudimentario artefacto de azar. Podría incluso decirse que es un ancestro de nuestro dado de 6 caras. Dicho hueso muestra en su superficie, 4 caras irregulares (David, 1955). Uniendo este hecho con el de que cada hueso es distinto, podemos suponer que aun cuando fuese un instrumento para dar resultados aleatorios, no era el indicado para desarrollar teorías a través del estudio de sus resultados.

Estos instrumentos eran también utilizados por los antiguos griegos y romanos en sus ceremonias de adivinación. Las evidencias del astrágalo como instrumento de juego de azar, junto con tableros de juego datan alrededor del año 3,600 a.C., mientras que las primeras disertaciones filosóficas del juego se presentaron alrededor del siglo XVI con Girolamo Cardano (1501-1576) y su libro "Liber de Ludo Aleae", el cual fue publicado hasta 1663. Es posible inferir que esta falta de desarrollo de teorías probabilísticas pueda deberse a la relación que existió durante mucho tiempo a la magia y la superstición con los dados, al ser los resultados considerados como voluntad divina o medio de comunicación entre los dioses y los humanos (García Secades, 2005).

La intuición de los jugadores jugó durante muchos años, y probablemente hasta la actualidad, un papel muy importante en los juegos de azar. Pero esta intuición, acompañada de curiosidad sentó el camino para incorporar de manera más formal a las matemáticas en el campo de los juegos de azar.

En 1494, Luca Paccioli presentó el "problema de los puntos" a partir de un juego llamado balla. El problema decía: "A y B están jugando un juego justo de balla y aceptan jugarlo hasta que alguno gane 6 rondas. Por razones inesperadas, el juego se tiene que detener cuando A ha ganado 5 rondas y B ha ganado 3. ¿Cómo debe repartirse el monto apostado entre ambos jugadores?" Fue precisamente Cardano el que dio la primera aproximación a la resolución de este problema.

Otro importante participante en los juegos de azar es la baraja, la cual hizo su aparición en la historia en China en el siglo X y en Europa en el siglo XIV. Así, a lo largo de la historia podemos ir ubicando las primeras apariciones de juegos que hasta nuestros días forman parte fundamental de los juegos de azar.

La ruleta, el backgammon, el juego de dados (Craps), el bingo y otros tipos de lotería, el keno, las carreras de caballos, son algunos ejemplos de juegos donde, además del valor de entretenimiento que tienen, existe un interés sumamente rentable y es aquel derivado de las apuestas sobre dichos juegos. No solo los dueños de los casinos se ven beneficiados de las ganancias, sino también el gobierno de los países al regular los impuestos sobre las actividades con apuestas; además de ser una industria generadora de empleos.

Hablar de juegos de azar y de juegos de apuesta lleva desgraciadamente implicaciones morales inherentes. Muchos juegos de apuestas han estado prohibidos en diversos países y en donde están permitidos son intensamente regulados. Sin embargo, las connotaciones sociales negativas que acarrea el juego no son del interés de este estudio y sí, en cambio, el interés académico de estudiar estos juegos. Actualmente están permitidos los establecimientos donde se celebren sorteos de números, apuestas remotas y juegos de dados. Un desarrollo natural, llevaría a que se pueda abrir el mercado a otro tipo de productos y juegos ofrecidos en otros mercados internacionales. Es por eso que en este trabajo se analizan los casos de juegos, como la ruleta o los juegos con cartas, que a pesar de no estar legalmente permitidos para su operación, al tiempo de este trabajo, me parece importante conocer y estudiar.

1.1. Historia de los casinos

Los casinos son lugares en donde se ofrece una forma de entretenimiento basado en los juegos con apuestas. Los esquemas legales bajo los cuales operan son muy diversos en los diferentes lugares del mundo. El término casino proviene de la palabra italiana *casino*, la cual significa casa de veraneo o casa de campo; es decir, una casa dedicada al esparcimiento.

Uno de los primeros casinos en el mundo de los cuales se tiene referencia es el Casinò di Venezia, establecido en Venecia, Italia alrededor de 1638 y el cuál se encuentra aún en funcionamiento (Casinò Municipale di Venezia).

De este lado del mundo y posterior a la colonización de América se presenta la introducción de una gran cantidad de juegos, tanto en las colonias españolas como en las británicas. Carreras de caballos, peleas de gallos, juegos de cartas, loterías y demás, fueron popularizándose a lo largo del tiempo. Es en los Estados Unidos en donde se presenta lo que se considera como la Era de Oro del juego. Nueva Orleans fue la primera ciudad norteamericana en abrir un casino en 1822. Los juegos más populares eran la ruleta y el póker. Esto trajo numerosas consecuencias a la ciudad, ya que aunado al crecimiento del juego, también se presentó un aumento considerable en el crimen.

Durante la Fiebre del Oro en California en 1848 florecieron los casinos y las cantinas en la zona oeste de los Estados Unidos. Posteriormente las máquinas tragamonedas se popularizaron enormemente; sin embargo, al mismo tiempo empezaron a proliferar las estafas y los engaños.

Para 1915 prácticamente todos los establecimientos dedicados al juego, los hipódromos y casas de apuestas, fueron cerrados. La operación paso a la clandestinidad surgiendo a la par de las mafias, ya que estos grupos no se dedicaban únicamente al juego ilegal sino al contrabando de alcohol prohibido desde 1920.

En 1933, durante la Gran Depresión de los Estados Unidos, se levanta la prohibición al alcohol; sin embargo, el juego se sigue considerando ilegal en todo el país, excepto en un pequeño estado desértico en donde se legalizó el juego en un intento por generar ingresos ya que el país se encontraba sumido en una fuerte depresión. La primera ciudad que se destacó como centro de juego fue Reno, con la legalización del juego en Nevada en 1931, y posteriormente vendría el éxito de Las Vegas, la cual es hasta ahora considerada como la capital del entretenimiento en el mundo. Es hasta 1976 cuando es legalizado el juego en Atlantic City; y en 1990 en Tunica, Mississippi. El ejemplo de los Estados Unidos nos muestra lo gradual que puede ser la apertura a la legalización del juego, en el gobierno de un país.

1.2. Desarrollo del juego en México

Los primeros antecedentes de juego legal en México los encontramos desde la época de la colonia. Con el apoyo de Carlos III, Rey de España y el Virrey Marqués de Croix, Francisco Xavier de Sarría desarrolló un proyecto para crear una lotería basada en las que había en Inglaterra y en Italia. Es así que el 7 de agosto de 1770 fue dada a conocer en la Nueva España que habría una lotería, la primera de Latinoamérica, bajo el nombre de Real Lotería General de la Nueva España, y cuyo Plan y Reglas fueron publicados en un Bando Real, el 19 de septiembre del mismo año (Lotería Nacional, 2008). El primer sorteo fue llevado a cabo casi 8 meses después, el 13 de mayo de 1771.

Pronto encontraron que era un método muy eficiente para recaudar fondos, con propósitos políticos, militares, sociales y de beneficencia.

Durante la guerra de independencia, el Virrey Calleja instituyó loterías forzosas para recaudar los fondos que le permitían sufragar la guerra contra los insurgentes. Años después, por su parte, Juárez evitó todo tipo de loterías; sin embargo, sí usó una para financiar la construcción del ferrocarril México – Toluca. En la época del porfiriato, se usó a la lotería para obtener recursos para una gran cantidad de proyectos, incluido el Hospital General de la Ciudad de México, el Quiosco Morisco, emblemático de la colonia Santa María la Ribera e incluso el Manicomio de la Castañeda. En 1915 se suspende la lotería, y es hasta 1920 en que vuelve a ser instituida y sigue funcionando hasta la actualidad.

Además de la Lotería, otro precursor del juego en México es el de Pronósticos para la Asistencia Pública, organismo descentralizado del gobierno, el cual inició operaciones en junio de 1978 con concursos deportivos sobre el Campeonato Mundial de Futbol de Argentina y posteriormente seguiría con concursos semanales sobre los resultados del futbol nacional. A partir de 1980 se incorporan nuevos productos, de acuerdo a los resultados de otros deportes como el futbol americano y el beisbol; en 1984, se inicia con el concepto del adivinar números sorteados, con el llamado "Melate", con el cual seguirían otros juegos también basados en el sorteo de números (Pronósticos, 2010).

Los inicios del juego en México los encontramos en el sector público; sin embargo, el sector privado también ha tenido un desarrollo importante en la industria del juego en México. Tenemos como ejemplo el casino de la Feria de San Marcos, en Aguascalientes, siendo el primero en ser legalmente permitido para operar como tal, y cuyos inicios datan de 1828.

Por otro lado tenemos también el desarrollo de los hipódromos y las primeras carreras de caballos. El primer hipódromo en la ciudad de México fue el Hipódromo de Peralvillo, inaugurado en 1882, construido y operado por la Sociedad Mexicana de Carreras, y desmantelado en 1913.

Actualmente, los dos hipódromos en operación son el Hipódromo de las Américas en la Ciudad de México y el Hipódromo de Agua Caliente en Tijuana, BC, aunque realmente el de Agua Caliente lleva a cabo carreras de galgos y no de caballos. El Hipódromo de las Américas se construyó en 1943, durante el gobierno del presidente Manuel Ávila Camacho y su operación se encuentra actualmente concesionada a CIE.

1.3. Aspectos generales del marco legal en México

La Secretaría de Gobernación a través de la Dirección Adjunta de Juegos y Sorteos es la encargada de atender y tramitar los asuntos relacionados con la supervisión y vigilancia de la Ley Federal de Juegos y Sorteos (LFJyS) y su Reglamento. Es en esta dependencia gubernamental en donde se expiden los permisos necesarios para la celebración de sorteos y de juegos de apuestas permitidos por la ley.

En México existen actualmente alrededor de 225 establecimientos legales destinados al sorteo de números y/o símbolos permitido por la LFJyS. De acuerdo al Artículo 124 del Reglamento de la LFJyS se entiende por sorteo de símbolos o números a "aquellos en los que los participantes adquieren una dotación de algunos de dichos caracteres y resulta ganador aquél o aquellos participantes que sean los primeros en integrar o completar la secuencia de los símbolos o números sorteados, de acuerdo con la mecánica particular del sorteo"[1]. El Cuadro 1 representa los permisionarios registrados hasta el 10 de diciembre de 2009.

Se puede destacar que en la década de los 90s hubo un interés en este tipo de negocio pero es hasta 2005 en donde se ve un mayor crecimiento en el número de permisos otorgados. Eso nos dice que la perspectiva de crecimiento es muy amplia. A la fecha están operando 225 establecimientos, pero existe el potencial para casi duplicar el número de establecimientos legales en México donde haya juegos con apuestas. Los permisos otorgados son por 25 años y delimitan las actividades de apuesta que se pueden realizar. Entre ellos se incluyen hipódromos, galgódromos, salas de sorteos con números y centros de apuestas remotas.

Es importante destacar que, como cualquier otra industria, los establecimientos dedicados a sorteos de números y apuestas deben apegarse a la ley. El juego ilegal es nocivo para la industria del juego, de la misma forma que la informalidad y la ilegalidad afectan a cualquier tipo de industria.

[1] Reglamento de la Ley Federal de Juegos y Sorteos como fue publicado en el Diario Oficial de la Federación el 17 de Septiembre de 2004

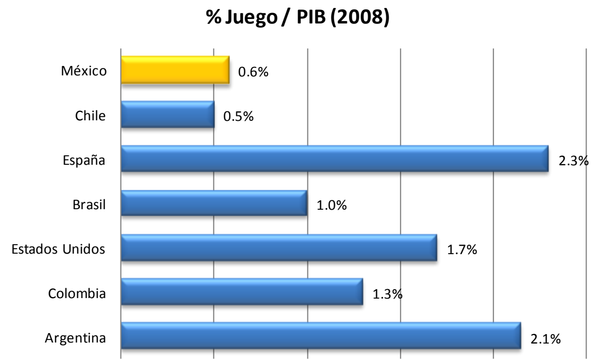
Cuadro 1. Lista de permisionarios autorizados por la Dirección General Adjunta de Juegos y Sorteos

Razón Social	Año Permiso	Término Vigencia	Establecimientos	
			Permitidos	Operando
Administradora Mexicana de Hipódromo, S.A. de C.V.	1997	2022	65	51
Atracciones y Emociones Vallarta, S.A. de C.V.	1992	2017	4	0
Cesta - Punta Deportes, S.A. de C.V.	1989	2017	9	0
Divertimex, S.A. de C.V.	1991	2016	7	7
Espectáculos Deportivos de Cancún, S.A. de C.V.	1991	2017	4	0
Espectáculos Deportivos de Occidente, S.A. de C.V.	1994	2019	4	0
Espectáculos Latinoamericanos Deportivos, S.A. de C.V.	1992	2017	4	4
Grupo Océano Haman, S.A. de C.V.	1993	2018	10	5
Hipódromo de Agua Caliente, S.A. de C.V.	1989	2014	ilimitado	25
Impulsora Géminis, S.A. de C.V.	1993	2018	3	3
Libros Foráneos, S.A. de C.V.	1990	2015	18	16
Operadora Cantabria, S.A. de C.V.	1993	2018	25	23
Operadora de Apuestas Caliente, S.A. de C.V.	1991	2016	4	4
Operadora de Espectáculos Deportivos, S.A. de C.V.	1992	2017	3	3
Promociones e Inversiones de Guerrero, S.A. de C.V.	1993	2030	53	17
Mio Games, S.A. de C.V.	2005	2030	2	2
Eventos Festivos de México, S.A. de C.V.	2005	2030	20	4
Promojuegos de México, S.A. de C.V.	2005	2030	10	6
Apuestas Internacionales, S.A. de C.V.	2005	2030	65	25
Entretenmiento de México, S.A. de C.V.	2005	2030	50	14
Juega y Juega, S.A. de C.V.	2005	2030	18	7
Cía. Operadora Megasport, S.A. de C.V.	ND	ND	ND	14
El Palacio de los Números, S.A. de C.V.	2006	2031	18	9
PETOLOF, S.A. de C.V.	1998	2023	7	0
			403	225

Fuente: www.juegosysorteos.gob.mx en su apartado Permisionario

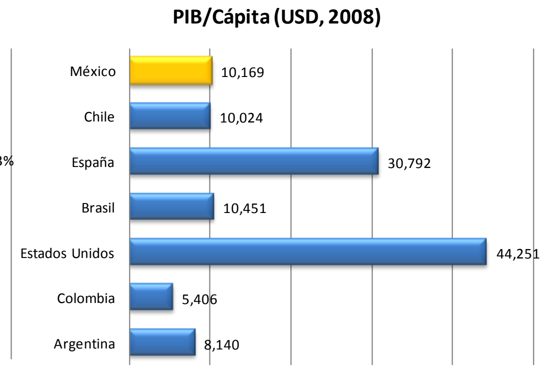
Se observa el potencial de crecimiento que existe para esta industria en nuestro país, ya que la industria del juego representa en México, apenas un 0.6% del PIB, mientras que en otros países como España y Argentina, este mismo indicador se encuentra por arriba del 2%. (Gráficas 1 a 3). Es importante también conocer el PIB per Cápita de esos países para poder hacer comparaciones adecuadas.

Gráfica 1. Comparativo del Porcentaje del Producto Interno Bruto que corresponde a la Industria del Juego en diferentes países. (2008)



Fuente: Administradora Mexicana de Hipódromo, 2010 (con datos del Fondo Monetario Internacional)

Gráfica 2. Comparativo del Porcentaje del Producto Interno Bruto per Cápita en diferentes países (2008)

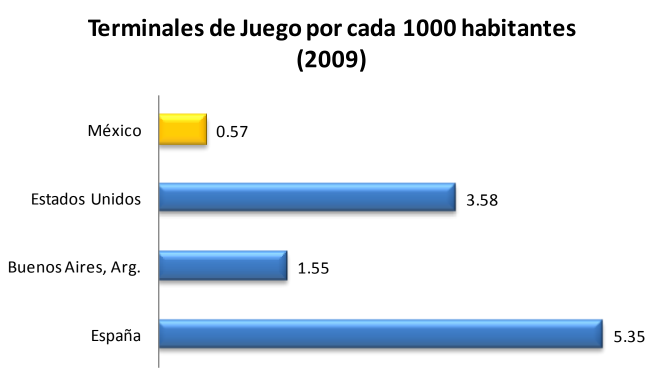


Fuente: Administradora Mexicana de Hipódromo, 2010 (con datos del Fondo Monetario Internacional)

El PIB per Cápita de México es 24% mayor que el argentino, sin embargo el % del PIB que corresponde a la industria del juego es 3.5 veces más grande en Argentina. ¿Qué nos dice esto? El mercado actual tiene muchísimo potencial de crecimiento. Si vemos además la siguiente gráfica podremos entender aún más este escenario.

Alcanzar un mercado que podamos llamar maduro, implica ser hasta 3 veces más grande lo que es actualmente. Esto hablaría de una inversión mucho más grande, tanto nacional como extranjera; mayor competencia, generación de empleos y desarrollo de más productos enfocados al mercado mexicano (Gráficas 1 a 3).

Gráfica 3. Número de terminales electrónicas de sorteos independientes disponibles por cada 1000 habitantes



Fuente: Administradora Mexicana de Hipódromo, 2010 (con datos del Fondo Monetario Internacional)

2. Las matemáticas de los juegos con apuestas

Los juegos como la lotería, algunos juegos de cartas y los juegos de dados parecen ser meros ejemplos de aplicaciones de la probabilidad clásica. En efecto eso son. Es muy usual encontrar ejemplos en los cursos de probabilidad o álgebra basados en estos populares juegos para ilustrar los casos de combinaciones y permutaciones; distribuciones Bernoulli; esperanza y varianza, etc. Es por eso que conocer todas estas herramientas es necesario para analizar y comprender a fondo dichos juegos y para su implementación como instrumentos o productos para generar utilidad en los establecimientos dedicados a esos fines.

2.1. Momios

En los distintos juegos de azar, la aleatoriedad determina que los juegos sean justos o no. Generalmente podemos calcular directamente las probabilidades de cada resultado. A partir de ahí se calculan los momios y posteriormente la tabla de pagas con los que el casino pagará las apuestas de cada juego. Los momios se calculan a partir de la probabilidad del evento entre su complemento. Es decir, la fórmula para calcular los momios de un evento es:

$$\text{Momio} = \frac{p}{1-p}$$

Por ejemplo, supongamos que el evento A tiene una probabilidad calculada de $1/3$. Siguiendo la fórmula presentada, el momio para A sería $1/2$. En la industria del juego, y de apuestas, estos momios suelen escribirse de la forma 2:1, y se puede interpretar de la siguiente forma: La posibilidad de que ocurra el evento A es de 2 contra 1; en otras palabras, hay 2 en 3 posibilidades de que A^c ocurra y 1 en 3 de que A ocurra (Barboianu, 2009).

2.2. Valor esperado

Matemáticamente hablando, el valor esperado de una apuesta se refiere al dinero que, a largo plazo, un jugador espera ganar o perder. La mayor parte de las apuestas que se hacen en los juegos disponibles en un casino tienen, como es de suponer, esperanzas negativas (desde el punto de vista del jugador).

La esperanza o valor esperado de una apuesta se puede definir como una función que depende de las probabilidades de ganar (y perder) en un juego determinado, así como de la cantidad apostada. La fórmula se expresa de la siguiente manera:

$$E(X) = \sum (Pago_i \times P_i)$$

Donde P_i es la probabilidad de obtener el $Pago_i$.

Por ejemplo, en la Ruleta con doble cero[2], la apuesta directa a un número paga 35 a 1. Si se hace una apuesta de \$25 al 12, tenemos que el valor esperado de esta apuesta se calcula:

$$E(\text{apuesta al } 12) = (\$25)(35)\left(\frac{1}{38}\right) + (-\$25)\left(\frac{37}{38}\right)$$
$$= -\$1.3157$$

[2] La ruleta con doble cero tiene 36 números, un cero y un doble cero, es decir, 38 posibles resultados numéricos.

¿Qué quiere decir este resultado? Se puede interpretar de dos maneras equivalentes, una desde el punto de vista del jugador, el otro, desde el punto de vista del casino. Tomando el punto de vista del casino, este resultado indica que por cada apuesta que se haga de 25 dólares a un número fijo en la ruleta, el casino espera ganar aproximadamente \$1.32 (que son los mismos \$1.32 que el jugador esperaría perder por cada apuesta de \$25 que haga a un número).

2.3. Ventaja de la Casa

Se le llama ventaja de la casa (House Edge o House Advantage) al margen matemático de ganancia que el casino obtiene gracias a las reglas de los juegos para garantizar su propia rentabilidad. Esto se consigue al asignar las tablas de pagos de acuerdo a las probabilidades de los resultados de cada juego. De manera natural se construye la tabla de pagos para cualquier juego en donde se ofrezca un juego justo (juego de suma cero) alterando esta tabla de pagos a una donde el jugador tenga una ligera desventaja se crea la ventaja de la casa.

La ventaja de la casa guarda una relación intrínseca con el valor esperado de una apuesta. La ventaja de la casa es, además, uno de los indicadores más comúnmente utilizados para mostrar el valor de un juego o de una apuesta en particular.

A diferencia del valor esperado, la ventaja de la casa se indica en porcentaje y no en unidades monetarias.

Recordemos el ejemplo utilizado para determinar el valor esperado de apostarle al número 12 en la ruleta con doble cero. Para obtener la ventaja de la casa simplemente dividimos el valor esperado entre el valor de la apuesta, por lo que, en este caso en particular es del 5.26% (\$1.3157/\$25).

La ventaja de la casa también se puede calcular directamente de la tabla de pagos y las probabilidades reales de cada evento.

Si suponemos que para un juego cualquiera el pago esta dado como x a 1 y los momios reales son y a 1, la ventaja de la casa, que de ahora en adelante denominaremos HA se calcula de la siguiente manera:

$$\text{HA} = \frac{y-x}{y+1}$$

Usando una vez más el ejemplo de la apostarle al número 12 en la ruleta, tenemos que ya que la probabilidad de acertar al número apostado es de 1/38, el momio real es de 37 a 1. El pago que ofrece el juego es de 35 a 1. Por lo tanto la ventaja de la casa es de (37-35)/(37+1) = .0526, que corresponde al 5.26% que habíamos calculado anteriormente.

Muchas veces nos encontraremos con que los momios ofrecidos no están en términos de x a 1 sino de x a u y que los reales son de x a v. Entonces, podemos dar una generalización de la fórmula para calcular la ventaja de la casa, la cual quedaría de la siguiente manera:

$$\text{HA} = \frac{yu-xv}{u(y+v)}$$

No hay que olvidar que estos valores, la esperanza y la ventaja de la casa son valores ciertos después de un número muy grande de repeticiones de los experimentos. Se apoyan totalmente en la Ley de los Grandes Números. Los casinos esperan ganar a largo plazo lo indicado por la ventaja de la casa. En el cálculo día a día, la ganancia real puede ser muy distinta de la teórica, y a eso corresponden otros conceptos que se tratan en el capítulo 5.2 Análisis. Es vital para cualquiera relacionado con el análisis y administración de un casino entender estos fundamentos para poder tomar las decisiones adecuadas.

2.4. Indicadores principales

Existe una gran variedad de conceptos asociados a los juegos de azar y a las operaciones que se llevan a cabo en los casinos. Muchos de estos términos mantienen su nombre en inglés, a falta de una estandarización de estos conceptos en español. Estos conceptos se aplican tanto a los juegos de mesa como a las máquinas de juego.

Volumen de Juego

El Volumen de Juego (VJ) o Handle, también llamado Coin In, es el total de dinero apostado por el o los jugadores en un juego determinado en un tiempo determinado.

Drop

Se le llama drop a la cantidad de dinero que tiene en efectivo una máquina de apuestas, una mesa de juego o todo el casino en su conjunto.

Beneficio o Win

El Beneficio o Win se refiere al total ganado por el casino, por mesa o por terminal. En el caso de las mesas que usan fichas, el Beneficio se puede calcular como la diferencia entre el drop y los faltantes de fichas sobre el inventario inicial de la mesa. En el caso de terminales electrónicas se calcula como el total de apuestas menos el total de pagos.

Beneficio o Win Teórico

La manera de calcular el Win como se acaba de describir se obtiene en un periodo de tiempo determinado, por ejemplo, un turno, un día, un mes, etc. El Win Teórico es aquel que el casino espera ganar a largo plazo, y está determinado por el Volumen de Juego (VJ) y la Ventaja de la Casa (HA), es decir:

$$Win_{Teórico} = HA \times VJ$$

Porcentaje de Beneficio (o de Win)

Se refiere simplemente al Beneficio entre el Volumen de Juego, es decir:

$$\%Win = \frac{Win}{VJ}$$

Con el paso del tiempo y mientras mayor sea el número de juegos jugados y por consiguiente crezca el volumen de juego, el porcentaje real debe acercarse más y más al teórico, que es, como debe esperarse, la ventaja de la casa.

3. Juegos de Azar

3.1. Keno, Bingo y otros juegos tipo Lotería

3.1.1. Keno

El Keno es un juego muy sencillo, similar a la lotería, que se juega en los casinos. Inventado en China hace más de 2000 años, el propósito del juego operado en los estados chinos era el de obtener fondos para apoyar su ejército. La versión china consistía de 120 símbolos y al ser adaptado por los Estados Unidos de Norteamérica en el siglo XIX se redujo a 90 símbolos, que rápidamente fueron sustituidos por números (Gollehon, 1994).

La mecánica del juego consiste en que el jugador elige hasta 10 números, generalmente entre el 1 y el 80. Posteriormente se hace un sorteo aleatorio donde se extraen 20 números sin reemplazo. Si algunos de los números seleccionados corresponden a los números elegidos por el jugador, el jugador gana[3]. Entre más aciertos tenga, mayor será el premio. El juego puede ser en vivo, con tarjetas y bolas sorteadas, o de manera electrónica en donde el jugador selecciona en una pantalla los números que desea y en fracciones de segundos después, la terminal electrónica lleva a cabo un sorteo con un generador de números aleatorios e informa el resultado.

El caso más simple es suponer que se apuesta a acertar un solo número. El casino hace el sorteo y obtiene 20 números. Como hay 80 posibles números, de los cuales 20 serán consideradores ganadores, la probabilidad de ganar es de 20/80.

Formalmente, este número lo podemos calcular como:

$$P(1\ acierto) = \frac{C_{20}^{1} \times C_{60}^{0}}{C_{80}^{1}} = \frac{\frac{20!}{1!\,(20-1)!} \times \frac{60!}{0!\,(60-0)!}}{\frac{80!}{1!\,(80-1)!}}$$

$$= \frac{\frac{20!}{19!} \times \frac{60!}{60!}}{\frac{80!}{79!}} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

Supongamos además que por cada \$1 de apuesta, se obtienen \$3 al acertar el número apostado. Si integramos la tabla de pagos, podemos calcular el valor esperado de la apuesta. El Valor Esperado de la Apuesta es:

$$\mathrm{VE} = (-\$1)(0.75) + (\$3 - \$1)(0.25) = -\$0.25$$

Esto quiere decir que el jugador espera perder 25 centavos por cada \$1 apostado, lo cual se refleja en una ganancia de \$0.25 para el casino. La ventaja de la casa es entonces del 25% (\$0.25/\$1). Esto se puede resumir en la siguiente tabla.

Tabla 1. Keno. Ventaja de la casa: 1 Selección

Aciertos	Probabilidad	Pago Neto	Esperanza
0	0.75	-\$1	-\$0.75
1	0.25	\$2	\$0.5
		VE	-\$0.25
		HA	25%

Fuente: Cálculos Propios

La siguiente modalidad sería la de elegir dos números. Usualmente, el casino no paga por acertar solamente un resultado. Supongamos que el pago por una apuesta de \$1 y acertar a dos números es de \$12. La probabilidad de que el jugador acierte a los dos números está dada por:

[3] Se han documentado casos en los que un jugador puede hacerse ganador de un premio en caso de tener 0 aciertos.

$$P(2\text{ aciertos}) = \frac{C_{20}^{2}}{C_{80}^{2}} = \frac{\frac{20!}{2!\,(20-2)!}}{\frac{80!}{2!\,(80-2)!}} = \frac{\frac{20(19)}{2!}}{\frac{80(79)}{2!}} = \frac{380}{6320}$$

$$= 0.06012$$

Ya que sacar un acierto o ningún acierto no generan ningún pago, podemos calcular su probabilidad como el complemento:

$1 - 0.06012 = 0.93987$

Por separado podemos calcular las probabilidades de no obtener ningún resultado o de obtener solo un resultado:

$$P(0\text{ aciertos}) = \frac{C_{60}^{2}}{C_{80}^{2}} = \frac{\frac{60!}{2!\,(60-2)!}}{\frac{80!}{2!\,(80-2)!}} = \frac{\frac{60(59)}{2!}}{\frac{80(79)}{2!}} = \frac{3540}{6320}$$

$$= 0.56012$$

$$P(1\text{ acierto}) = \frac{C_{20}^{1} \times C_{60}^{1}}{C_{80}^{2}} = \frac{\frac{20!}{1!\,(20-1)!} \times \frac{60!}{1!\,(60-1)!}}{\frac{80!}{2!\,(80-2)!}}$$

$$= \frac{20(60)}{\frac{80(79)}{2}} = \frac{1200}{3160} = 0.37974$$

La suma de las probabilidades de obtener ningún y un acierto es, efectivamente, 0.93987, tal como había sido calculado previamente.

Siguiendo los cálculos para Valor Esperado y Ventaja de la podemos obtener la siguiente tabla de resultados.

Tabla 2. Keno. Ventaja de la casa: 2 Selecciones

Aciertos	Probabilidad	Pago	Esperanza
0	0.56012	-$1	-$0.56012
1	0.37974	-$1	-$0.37974
2	0.06012	$11	$0.66139
		VE	-$0.27847
		HA	27.84%

Fuente: Cálculos Propios

Para el caso de 3 selecciones, en la mayoría de los casinos tenemos que ya empieza a haber pagos aun cuando no se acierten todas las selecciones. Si suponemos que acertar los 3 números implica un pago de $42[4] (Keno Payout Percentages, 2007) y acertar 2 números otorga un "reintegro", es decir, devuelve el $1 apostado originalmente obtenemos la siguiente tabla de resultados:

Tabla 3. Keno. Ventaja de la casa: 3 Selecciones

Aciertos	Probabilidad	Pago	Esperanza
0	0.41650	-$1	-$0.4165
1	0.43086	-$1	-$0.43086
2	0.13875	0	0
3	0.01387	$41	$0.56888
		VE	-$0.27848
		HA	27.84%

Fuente: Cálculos Propios

Para 4 selecciones, el acierto de los 4 números otorga un pago de $120; 3, un pago de $3; 2, un pago de $1 y nada para uno o ningún acierto.

Tabla 4. Keno. Ventaja de la casa: 4 Selecciones

Aciertos	Probabilidad	Pago	Esperanza
0	0.30832	-$1	-$0.30832
1	0.43273	-$1	-$0.43273
2	0.21263	0	0
3	0.04324	$2	$0.08648
4	0.00306	$119	$0.36454
		VE	-$0.29002
		HA	29%

Fuente: Cálculos Propios

Para 5 selecciones, el acierto de 5 números otorga un pago de $800; 4, un pago de $9; 3, un pago de $1 y nada para menos aciertos.

[4] Las tablas de pagos están basadas en las del Casino Luxor de Las Vegas vigentes en 2007.

Tabla 5. Keno. Ventaja de la casa: 5 Selecciones

Aciertos	Probabilidad	Pago	Esperanza
0	0.22718	-$1	-$0.22718
1	0.40568	-$1	-$0.40568
2	0.27044	-$1	-$0.27044
3	0.08393	0	0
4	0.01209	$8	0.09673
5	0.00064	$799	0.51529
		VE	-$0.2912
		HA	29.12%

Fuente: Cálculos Propios

Para 6 selecciones, el acierto de 6 números otorga un pago de $1,500; 5 aciertos, un pago de $88; 4, un pago de $4; 3 aciertos otorga el reintegro y nada para menos aciertos.

Tabla 6. Keno. Ventaja de la casa: 6 Selecciones

Aciertos	Probabilidad	Pago	Esperanza
0	0.1666	-$1	-$0.1666
1	0.3634	-$1	-$0.3634
2	0.3083	-$1	-$0.3083
3	0.1298	0	0
4	0.0285	$3	$0.0856
5	0.0030	$87	$0.2693
6	0.0001	$1499	$0.1933
		VE	-$0.2901
		HA	29.01%

Fuente: Cálculos Propios

Puede observarse que a medida que se aumenta el número de selecciones, el margen de utilidad que el casino espera tener a largo plazo aumenta. Sin embargo, puede también observarse que un cambio en el pago que ofrece el casino puede afectar también la ventaja de la casa. El siguiente ejemplo se toma del casino Arizona Charlie's en Las Vegas.

Para 6 selecciones, el acierto de 6 números otorga, igual que antes, un pago de $1500. Para 5 aciertos este casino ofrece un premio más atractivo, de $110; para 4 aciertos se otorga un pago de $3, y el resto permanece en las mismas condiciones que el caso anterior. Ya que las probabilidades el juego son exactamente las mismas, la diferencia recae en la esperanza de cada resultado. Al recalcular las esperanzas de cada apuesta y la total del juego podemos ver que esta diferencia de $22 en el pago del segundo premio, impacta en un 3.96% de diferencia sobre la ventaja de la casa entre un casino y otro

Tabla 7. Keno. Ventaja de la casa: 6 Selecciones – Caso Alterno

Aciertos	Probabilidad	Pago	Esperanza
0	0.1666	-$1	-$0.1666
1	0.3634	-$1	-$0.3634
2	0.3083	-$1	-$0.3083
3	0.1298	0	0
4	0.0285	$2	$0.0856
5	0.0030	$109	$0.2693
6	0.0001	$1499	$0.1933
		VE	-$0.2505
		HA	25.05%

Fuente: Cálculos Propios

De acuerdo a esos resultados y a los que se verán más adelante, al Keno le corresponde uno de los valores más altos de la Ventaja de la Casa, en general entre un 25% y un 35%, dependiendo de las reglas y de las tablas de pagos que se ocupen.

Finalmente, se puede mencionar que la probabilidad de acertar a los 20 números ganadores en un sorteo de Keno eligiendo exactamente 20 números, es decir, C_{80}^{20}, es de 1 en 3'535,316,142,212,180,000.

.

3.1.2. Bingo

El Bingo es un juego con un concepto muy similar al Keno, en el sentido del sorteo de números. A diferencia del Keno donde el jugador elige los números con los que desea jugar, en el Bingo se asignan cartones con una cuadrícula de 5x5. En la primera columna del cartón, la columna "B" contiene 5 números colocados al azar entre el 1 y el 15. La segunda columna es la columna "I", la cual contiene 5 números entre el 16 y el 30. La tercera columna, encabezada con una "N" contiene 4 números entre el 31 y el 45. La cuarta columna, la "G" contiene otros 5 números entre el 46 y el 60. La última columna es la "O", la cual contiene 5 números entre el 61 y el 75. Usualmente la casilla central, es decir, la tercera casilla de la columna "N" es "libre", es decir, el jugador ya puede contar con ella.

Ilustración 1. Bingo. Ejemplo de un cartón de juego

B	I	N	G	O
2	16	32	47	61
5	22	33	49	64
6	25		50	66
8	29	40	55	68
12	30	44	57	75

El objetivo del juego es llenar un patrón definido. Éste puede ser el cartón completo, una línea que puede ser vertical horizontal o diagonal, una "X", un cuadro, las cuatro esquinas o cualquier otro mediante las extracciones sucesiones de bolas de una urna si el juego es en vivo, o mediante un generador aleatorio de números si se juega en versión electrónica.

El número de posibles cartones de Bingo es de:

$$(P_{15}^{5})(P_{15}^{4}) = 15^5 14^5 13^5 12^5 11^4$$

Es decir, aproximadamente de $5.524\text{x}10^{26}$. Sin embargo, el número total de cartones diferentes (es decir, permutaciones de números es de:

$$(C_{15}^{5})^4 C_{15}^{4} = \left(\frac{15!}{5!\,(15-5)!}\right)^4 \left(\frac{15!}{4!\,(15-4)!}\right)$$

Es decir, son aproximadamente $1.11\text{x}10^{17}$. Además, es importante mencionar que la probabilidad de que un jugador gane no depende del número de posibles cartones de bingo que hay. La probabilidad de que un jugador gane está determinada por el número de cartones en juego en un sorteo determinado y la probabilidad de completar el patrón ganador en el menor número de extracciones posibles.

Supongamos que para ganar se necesita llenar el cartón completo. La probabilidad para tener x aciertos en y extracciones está dada por:

$$P = \frac{C_x^{24} C_{y-x}^{51}}{C_y^{75}}$$

Podemos estudiar el caso general de un solo cartón y verificar la probabilidad de completar los 24 números en y extracciones $24 \leq y \leq 75$. En la siguiente tabla podemos ver el resultado de las probabilidades para obtener un cartón completo en exactamente y extracciones (Densidad) o la probabilidad de obtener un cartón completo en y extracciones o menos (Distribución).

Tabla 8. Bingo. Probabilidad de Ganar de 1 Cartón de Juego para la i-ésima extracción de bolas

Extracciones	Densidad	Distribución
24	0.000000000000000000004	0.000000000000000000004
25	0.000000000000000000093	0.000000000000000000097
26	0.000000000000000001164	0.000000000000000001261
27	0.000000000000000010086	0.000000000000000011347
28	0.000000000000000068079	0.000000000000000079426
29	0.000000000000000381245	0.000000000000000460671
30	0.000000000000001842684	0.000000000000002303355
31	0.000000000000007897218	0.000000000000010200573
32	0.000000000000030601718	0.000000000000040802291
33	0.000000000000108806109	0.000000000000149608400
34	0.000000000000359060160	0.000000000000508668560
35	0.000000000001109822313	0.000000000001618490874
36	0.000000000003236981747	0.000000000004855472621
37	0.000000000008963949453	0.000000000013819422074
38	0.000000000023690437841	0.000000000037509859915
39	0.000000000060015775864	0.000000000097525635779
40	0.000000000146288453669	0.000000000243814089448
41	0.000000000344208126279	0.000000000588022215727
42	0.000000000784029620969	0.000000001372051836696
43	0.000000001733118109511	0.000000003105169946207
44	0.000000003726203935449	0.000000006831373881656
45	0.000000007807284436178	0.000000014638658317834
46	0.000000015969445437637	0.000000030608103755472
47	0.000000031938890875275	0.000000062546994630747
48	0.000000062546994630747	0.000000125093989261493
49	0.000000120090229691033	0.000000245184218952526
50	0.000000226323894417717	0.000000471508113370243
51	0.000000419118322995771	0.000000890626436366014
52	0.000000763394088313726	0.000001654020524679740
53	0.000001368844572148750	0.000003022865096828490
54	0.000002418292077462790	0.000005441157174291290
55	0.000004212508780096470	0.000009653665954387760
56	0.000007240249465790830	0.000016893915420178600
57	0.000012286483941948100	0.000029180399362126600
58	0.000020597928961501200	0.000049778328323627800
59	0.000034133710850487700	0.000083912039174115500
60	0.000055941359449410300	0.000139853398623526000
61	0.000090715718026070800	0.000230569116649597000
62	0.000145622599989219000	0.000376191716638816000
63	0.000231502594854655000	0.000607694311493471000
64	0.000364616586896083000	0.000972310898389554000
65	0.000569157599057300000	0.001541468497446850000
66	0.000880839141398202000	0.002422307638845060000
67	0.001351985658890260000	0.003774293297735320000
68	0.002058705435128360000	0.005832998732863680000
69	0.003110932657527300000	0.008943931390390970000
70	0.004666398986290940000	0.136103303766819000000
71	0.069499559370290600000	0.205602863137110000000
72	0.102801431568555000000	0.308404294705665000000
73	0.151055164753795000000	0.459459459459459000000
74	0.220540540540541000000	0.680000000000000000000
75	0.320000000000000000000	1.000000000000000000000

Fuente: Cálculos Propios

Usualmente en los juegos de bingo hay muchos más cartones involucrados. Con esta información podemos calcular las probabilidades en cada extracción para un mayor número de cartones. Supongamos que deseamos saber la probabilidad de completar un cartón de bingo en la extracción 60 o antes y hay 200 cartones en juego. De acuerdo a la tabla anterior, la probabilidad de completar un cartón para la extracción 60 es de 0.001398 por lo que la probabilidad de no completar el cartón es de 1 - 0.001398 = 0.998602. En consecuencia la probabilidad de que los 200 cartones no sean ganadores es 0.998602^{200}.

Finalmente, la probabilidad de que al menos uno de esos cartones sea ganador es simplemente $1 - 0.998602^{200} = 0.24406$.

Siguiendo esta lógica, se construye la tabla que se observa a continuación, en donde se pueden ver las probabilidades por número de extracción para 1, 100, 200, 500, 600 y 1000 cartones en juego.

Tabla 9. Bingo. Probabilidad de que haya al menos un ganador con N cartones en juego en la i-ésima extracción

	Cartones								
Extracciones	1	100	200	500	600	1000	2000	5000	10000
24	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
25	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
26	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
27	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
28	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
29	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
30	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
31	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
32	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
33	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%
34	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00001%
35	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00001%	0.00002%
36	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00001%	0.00002%	0.00005%
37	0.00000%	0.00000%	0.00000%	0.00001%	0.00001%	0.00001%	0.00003%	0.00007%	0.00014%
38	0.00000%	0.00000%	0.00001%	0.00002%	0.00002%	0.00004%	0.00008%	0.00019%	0.00038%
39	0.00000%	0.00001%	0.00002%	0.00005%	0.00006%	0.00010%	0.00020%	0.00049%	0.00098%
40	0.00000%	0.00002%	0.00005%	0.00012%	0.00015%	0.00024%	0.00049%	0.00122%	0.00244%
41	0.00000%	0.00006%	0.00012%	0.00029%	0.00035%	0.00059%	0.00118%	0.00294%	0.00588%
42	0.00000%	0.00014%	0.00027%	0.00069%	0.00082%	0.00137%	0.00274%	0.00686%	0.01372%
43	0.00000%	0.00031%	0.00062%	0.00155%	0.00186%	0.00311%	0.00621%	0.01552%	0.03105%
44	0.00001%	0.00068%	0.00137%	0.00342%	0.00410%	0.00683%	0.01366%	0.03415%	0.06829%
45	0.00001%	0.00146%	0.00293%	0.00732%	0.00878%	0.01464%	0.02927%	0.07317%	0.14628%
46	0.00003%	0.00306%	0.00612%	0.01530%	0.01836%	0.03060%	0.06120%	0.15292%	0.30561%
47	0.00006%	0.00625%	0.01251%	0.03127%	0.03752%	0.06253%	0.12502%	0.31225%	0.62352%
48	0.00013%	0.01251%	0.02502%	0.06253%	0.07503%	0.12502%	0.24988%	0.62352%	1.24315%
49	0.00025%	0.02452%	0.04902%	0.12252%	0.14700%	0.24488%	0.48917%	1.21844%	2.42203%
50	0.00047%	0.04714%	0.09426%	0.23548%	0.28251%	0.47040%	0.93859%	2.32997%	4.60566%
51	0.00089%	0.08902%	0.17797%	0.44433%	0.53295%	0.88668%	1.76549%	4.35545%	8.52121%
52	0.00165%	0.16527%	0.33026%	0.82361%	0.98751%	1.64043%	3.25395%	7.93743%	15.24483%
53	0.00302%	0.30183%	0.60276%	1.50009%	1.79740%	2.97768%	5.86669%	14.02774%	26.08771%
54	0.00544%	0.54265%	1.08236%	2.68398%	3.21206%	5.29592%	10.31136%	23.81955%	41.96538%
55	0.00965%	0.96077%	1.91231%	4.71242%	5.62791%	9.20276%	17.55862%	38.28891%	61.91742%
56	0.01689%	1.67534%	3.32262%	8.10069%	9.64032%	15.54518%	28.67383%	57.03426%	81.53945%
57	0.02918%	2.87629%	5.66985%	13.57760%	16.06336%	25.31169%	44.21656%	76.75855%	94.59835%
58	0.04978%	4.85715%	9.47838%	22.03839%	25.82510%	39.21987%	63.05775%	91.70516%	99.31196%
59	0.08391%	8.05203%	15.45570%	34.27799%	39.56994%	56.80618%	81.34294%	98.49648%	99.97739%
60	0.13985%	13.05994%	24.41426%	50.32937%	56.81633%	75.32829%	93.91307%	99.90859%	99.99992%
61	0.23057%	20.61298%	36.97701%	68.46830%	74.96792%	90.05752%	99.01147%	99.99903%	100.00000%
62	0.37619%	31.40161%	52.94261%	84.80958%	89.57962%	97.69251%	99.94676%	100.00000%	100.00000%
63	0.60769%	45.64036%	70.45030%	95.25340%	97.41977%	99.77470%	99.99949%	100.00000%	100.00000%
64	0.97231%	62.35871%	85.83134%	99.24435%	99.71556%	99.99429%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
65	1.54147%	78.84878%	95.52626%	99.95767%	99.99105%	99.99998%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
66	2.42231%	91.38899%	99.25850%	99.99953%	99.99996%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
67	3.77429%	97.86641%	99.95448%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
68	5.83300%	99.75460%	99.99940%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
69	8.94393%	99.99147%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
70	13.61033%	99.99996%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
71	20.56029%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%
72	30.84043%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%	100.00000%

Fuente: Cálculos Propios

3.2. Ruleta

La Ruleta es otro juego muy popular en los casinos. Consiste en un dispositivo circular llamado cilindro en el que están dispuestos números. Tradicionalmente consiste en los números del 1 al 36, y el cero si corresponde a la versión europea. La versión americana incluye una posición adicional del doble cero. Los números están, además, divididos en dos colores, rojo y negro, con excepción del cero y del doble cero, los cuales se representan en verde. Sobre esa configuración se determinan distintas posibilidades de apuestas sobre las cuales el jugador puede elegir.

Existen ciertas normas para la determinación de los números en rojo o en negro y su ubicación en la rueda. Del 1 al 10 y del 19 al 28, los números pares son negros y los impares son rojos. Del 11 al 18, y del 29 al 36, se invierte, siendo los pares rojos y los impares, negros. Para el caso de la ruleta americana, en posiciones diametralmente opuestas están colocados el cero y el doble cero, en color verde, de manera que se puede decir que dividen a la ruleta en dos.

Para la ruleta americana los números quedan dispuestos de la siguiente manera:

0-28-9-26-30-11-7-20-32-17-5-22-34-15-3-24-36-13-1-00-27-10-25-29-12-8-19-31-18-6-21-33-16-4-23-35-14-2

En el caso de la ruleta europea, al solo tener un cero, la distribución de los números es:

0-32-15-19-4-21-2-25-17-34-6-27-13-36-11-30-8-23-10-5-24-16-33-1-20-14-31-9-22-18-29-7-28-12-35-3-26

La ruleta cuenta además con un paño que es donde se pueden ver todas las posibles apuestas, y sirve para que los jugadores coloquen ahí sus apuestas, tal como se aprecia en la Ilustración 2.

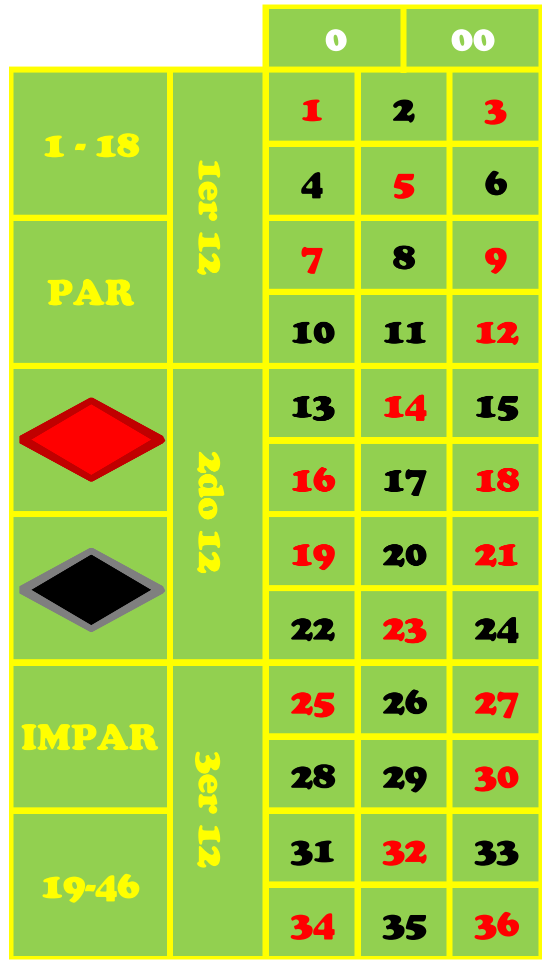


Ilustración 2. Ruleta. Ejemplo del paño donde se colocan apuestas

Existe una gran cantidad de opciones de apuestas para el juego de la ruleta. Por ejemplo, se puede apostar al color que el jugador cree será el siguiente en salir, o directamente a un número, etc.

A continuación veremos cada una de estas apuestas posibles, las probabilidades reales que tenemos de obtener el resultado deseado y los momios que usualmente ofrecen los casinos por dichas apuestas[5].

Al final se llega a la conclusión que los casinos obtienen sus ganancias precisamente porque la tabla de pagos que ofrecen difiere un poco de las probabilidades reales. Esa pequeña diferencia es de donde obtienen su margen de utilidad.

Veamos una a una las diferentes apuestas:

Número Individual: Consiste en apostar a cualquier número entre el 1 y el 36, el cero o el doble cero.

Dividida: En esta apuesta se eligen dos números; sin embargo, no todas las combinaciones de pares de números son posibles para esta apuesta. La apuesta se coloca en el paño, en la línea (vertical u horizontal) que divide a dos números. De esta manera podemos apostar por ejemplo al 29-32 o al 5-6. Sin embargo, apostar al 16-21 no sería una apuesta posible.

Calle: Esta apuesta consiste en elegir una fila del paño de 3 números. Por ejemplo 7-8-9.

Esquina: Esta apuesta se hace a cuatro números, cuya disposición en el paño forma un cuadro. Un ejemplo sería apostar al 11-12-14-15.

Línea: Esta apuesta consiste en elegir dos filas consecutivas de tres números cada una. La apuesta se coloca en el vértice inicial izquierdo de la línea que divide a las dos filas. Un ejemplo sería apostar a la línea 25-26-27-28-29-30.

Docena: Esta apuesta consiste en elegir si el número que va a salir está en la primera docena (1-12), en la segunda (13-24) o en la tercera (25-36).

Columna: Esta apuesta consiste en elegir la columna del paño donde se cree saldrá el siguiente número.

Color: Esta apuesta consiste en adivinar si el número será rojo o negro.

Par/Impar: Esta apuesta consiste en adivinar si el número es par o impar (para efectos del juego el cero y doble cero no cuentan ni como par ni como impar).

Alto/Bajo: Esta apuesta consiste en adivinar si el número sorteado es alto (19-36) o bajo (1-18). En esta apuesta tampoco se consideran al 0 y doble cero como números altos o bajos.

La tabla de pagos usualmente encontrada en los casinos con ruleta americana es la que se detalla a continuación:

Cuadro 2. Ruleta. Tabla de pagos tradicional

Apuesta	Pago	Apuesta	Pago
Individual	35 : 1	Docena	2 : 1
Dividida	17 : 1	Columna	2 : 1
Calle	11 : 1	Color	1 : 1
Esquina	8 : 1	Par/Impar	1 : 1
Línea	5 : 1	Altas/Bajas	1 : 1

Fuente: Hannum y Cabbot, 2005

A continuación se comprueba que estos pagos son menores a lo que realmente corresponden las probabilidades de cada resultado, si se trataran de pagos justos.

[5] Para todos los cálculos asumiremos el uso de la ruleta americana, es decir la que incluye el doble cero.

Número Individual: Calculemos la probabilidad de obtener un número cualquiera.

p = 1/38

Momio asociado = $\frac{p}{1-p} = \frac{1/38}{1-1/38} = \frac{1/38}{37/38}$ =1/37, 37:1

Calculemos ahora el Valor Esperado de una apuesta de \$1 al número 7. De acuerdo a la tabla de pagos, sabemos que el pago es de 35. Es decir:

VE = (+\$35)(1/38) + (-\$1)(37/38) = -\$0.0526

Lo cual representa una ventaja de la casa (HA) de 5.26%, y se comprueba al calcularla directamente de los momios reales y la tabla de pagos:

$$HA = \frac{37 - 35}{37 + 1} = \frac{2}{38} = 0.0526$$

Dividida: Calculemos ahora la probabilidad de acertar al número que sale en la ruleta, si usamos la apuesta a dos números.

p = 2/38

Momio asociado = $\frac{p}{1-p} = \frac{2/38}{1-2/38} = \frac{2/38}{36/38}$ =1/18, 18:1

Calculemos ahora el Valor Esperado de una apuesta de \$1 a la combinación 23-24. De acuerdo a la tabla de pagos, sabemos que el pago es de 17. Es decir:

VE = (+\$17)(2/38) + (-\$1)(36/38) = -\$0.0526

Lo cual representa una ventaja de la casa (HA) de 5.26%, la cual podemos comprobar al calcularla directamente de los momios reales y la tabla de pagos:

$$HA = \frac{18 - 17}{18 + 1} = \frac{1}{19} = 0.0526$$

Calle: Usando los mismos procedimientos anteriores podemos calcular el momio asociado, el valor esperado y la ventaja de la casa correspondientes a la apuesta para tres números.

p = 3/38

Momio asociado = $\frac{p}{1-p} = \frac{3/38}{1-3/38} = \frac{3/38}{35/38}$ =3/35, 35:3 ó 11.6:1

Calculemos ahora el Valor Esperado de una apuesta de \$1 a la combinación 34-35-36. De acuerdo a la tabla de pagos, sabemos que el pago es de 11. Es decir:

VE = (+\$11)(3/38) + (-\$1)(35/38) = -\$0.0526

Lo cual representa una ventaja de la casa (HA) de 5.26%, y se puede comprobar al calcularla directamente de los momios reales y la tabla de pagos:

$$HA = \frac{(35/3) - 11}{(35/3) + 1} = \frac{0.66}{12.66} = 0.0526$$

Podemos empezar a notar que, hasta ahora, pareciera que todas las apuestas le dan a la casa la misma ventaja. Sigamos viendo cada caso para ver si es así.

Esquina: Ya que para esta apuesta estamos eligiendo 4 números de los cuales esperamos uno sea el que salga determinado por la ruleta, tenemos que:

p = 4/38

Momio asociado = $\frac{p}{1-p} = \frac{4/38}{1-4/38} = \frac{4/38}{34/38}$ =4/34, 34:4 u 8.5:1

Calculemos ahora el Valor Esperado de una apuesta de $1 a la esquina 11-12-14-15. De acuerdo a la tabla de pagos, sabemos que el pago es de 8. Es decir:

VE = (+$8)(4/38) + (-$1)(34/38) = -$0.0526

Lo cual representa una ventaja de la casa (HA) de 5.26%, y se puede comprobar que al calcularla directamente de los momios reales y la tabla de pagos se obtiene:

$$HA = \frac{8.5-8}{8.5+1} = \frac{0.5}{9.5} = 0.0526$$

Línea: Calculemos los valores asociados a una línea, la cual nos permite elegir dos filas consecutivas.

p = 6/38

Momio asociado = $\frac{p}{1-p} = \frac{6/38}{1-6/38} = \frac{6/38}{32/38}$ =6/32, 16:3 ó 5.33:1

Calculemos ahora el Valor Esperado de una apuesta de $1 a la línea 25-26-27-28-29-30. De acuerdo a la tabla de pagos, sabemos que el pago es de $5. Es decir:

VE = (+$5)(6/38) + (-$1)(32/38) = -$0.0526

Lo cual representa una ventaja de la casa (HA) de 5.26%, y se puede comprobar que al calcularla directamente de los momios reales y la tabla de pagos se obtiene:

$$HA = \frac{(16/3)\ -5}{(16/3)\ +1} = \frac{0.333}{6.333} = 0.0526$$

Docena: Recordemos que esta apuesta consiste en adivinar si el resultado estará entre el 1 y el 12, el 13 y el 24 o entre el 25 y el 26.

p = 12/38

Momio asociado = $\frac{p}{1-p} = \frac{12/38}{1-12/38} = \frac{12/38}{26/38}$ =12/26, 13:6 ó 2.16:1

Calculemos ahora el Valor Esperado de una apuesta de $1 a la línea de la segunda docena. De acuerdo a la tabla de pagos, sabemos que el pago es de $2. Es decir:

VE = (+$2)(12/38) + (-$1)(26/38) = -$0.0526

Lo cual representa una ventaja de la casa (HA) de 5.26%, y se puede comprobar que al calcularla directamente de los momios reales y la tabla de pagos se obtiene:

$$HA = \frac{(13/6)\ -2}{(13/6)\ +1} = \frac{0.333}{6.333} = 0.0526$$

Columna: La apuesta a una columna da la posibilidad de apostar a 12 resultados posibles, por lo que el cálculo es idéntico al de la apuesta **Docenas**.

Color: Ya que hay 18 números rojos y 18 números negros, la probabilidad de acertar al color del número que determina la ruleta es igual a:

p = 18/38

Momio asociado = $\frac{p}{1-p} = \frac{18/38}{1-18/38} = \frac{18/38}{20/38}$ =18/20, 10:9 ó 1.11:1

Calculemos ahora el Valor Esperado de una apuesta de $1 al rojo. De acuerdo a la tabla de pagos, sabemos que el pago es de $1. Es decir:

VE = (+$1)(18/38) + (-$1)(20/38) = -$0.0526

Lo cual representa una ventaja de la casa (HA) de 5.26%, y se puede comprobar que al calcularla directamente de los momios reales y la tabla de pagos se obtiene:

$$HA = \frac{(10/9)\ -1}{(10/9)\ +1} = \frac{0.333}{6.333} = 0.0526$$

Par/Impar: Al igual que en el caso anterior, tenemos que hay 18 números pares y 18 números impares. De esta manera el cálculo del momio, Valor Esperado y HA de esta apuesta es idéntica a la de la apuesta **Color**.

Alto/Bajo: Para esta apuesta también se tiene el mismo momio, valor esperado y HA que las apuestas de **Color**.

Todos estos resultados se resumen en el cuadro 3.

Se observa que a todas las apuestas posibles les corresponde exactamente la misma ventaja de la casa. Este efecto es una consecuencia natural de la tabla de pagos, la cual mantiene las probabilidades a las que correspondería la ruleta con los 36 números naturales. El hecho de agregar el cero, y el doble cero, es decir, dos elementos más al conjunto de posibles resultados y sin alterar la tabla de pagos, como si permanecieran únicamente 36 números, es donde el casino obtiene su margen de utilidad.

Cuadro 3. Ruleta. Resumen de Resultados

Apuesta	Pago	Momio Real	Ventaja de la Casa
Directa	35 : 1	37 : 1	5.26%
Dividida	17 : 1	36 : 2	5.26%
Calle	11 : 1	35: 3	5.26%
Esquina	8 : 1	34:4	5.26%
Línea	5 : 1	16:3	5.26%
Docena	2 : 1	26:12	5.26%
Columna	2 : 1	26:12	5.26%
Color	1 : 1	20:18	5.26%
Par/Impar	1 : 1	20:18	5.26%
Altas/Bajas	1 : 1	20:18	5.26%

Fuente: Cálculos Propios

La ruleta permite hacer tantas apuestas válidas como el jugador desee. Para evitar confusiones entre las apuestas de distintos jugadores que participan simultáneamente, se asignan fichas de un color determinado a cada jugador, de la denominación que el jugador elija, mientras el monto apostado no exceda el límite de la casa.

Es importante señalar que sin importar la apuesta que se haga, las combinaciones que se elijan, la ventaja de la casa sobre el jugador siempre será del 5.26%, lo que equivale a decir que por cada unidad monetaria que se apueste, el jugador espera perder .0526 de esa unidad monetaria. Por simple inspección del paño se puede identificar que existen 154 distintas apuestas (38 directas, 62 divididas, 12 calles, 22 esquinas, 11 líneas, 3 docenas, 2 de color, 2 de par/impar y 2 de altas/bajas).

Cualquier estrategia que elija un jugador no será más que una combinación lineal de apuestas individuales cuyo valor esperado es perder $0.0526 por cada $1 apostado.

Sin embargo, existe una última apuesta a la que no le corresponde el 5.26% de ventaja de la casa. La apuesta a los 5 primeros números, es decir 0, 00. 1, 2 y 3 le corresponde una ventaja de la casa del 7.89% ya que paga 6:1. Si el propósito de este trabajo fuera el de dar estrategias de juego, podríamos decir que esta no es una apuesta muy recomendable.

El juego de la Ruleta es aquel que ha atraído a un mayor número de entusiastas a diseñar "sistemas de apuestas" para obtener ventajas a favor de los jugadores. Matemáticamente esto es imposible, pero a veces se basan en aspectos extrínsecos de la base matemática del juego. Esperan que el desgaste natural de la bola usada y de la ruleta misma pueda alterar la probabilidad de ciertos números en salir sorteados y poder detectar dicho comportamiento, Una ruleta puede ser jugada en promedio unas 100 veces por hora (Epstein, 2009).

Podemos calcular además, que el número de veces que se debe girar la ruleta para que cierto número aparezca con probabilidad p=0.5 está dada por:

$$1-\left(\frac{37}{38}\right)^n = 0.5$$

Es decir, de aproximadamente 26 juegos o giros (*spins*).

3.3. Juegos con dados

Los dados son elementos esenciales en muchos juegos de mesa y de azar. Existen de diversos tipos, pero para los juegos de apuestas los más comunes son los de forma cúbica, con cada cara numerada del 1 al 6.

Tradicionalmente los números de los dados se acomodan de forma tal que las caras opuestas sumen 7.

En general, los dados se usan como generadores de resultados aleatorios y han dado origen a toda una variedad de juegos muy populares en los casinos.

Los resultados que se calculan a partir de los lanzamientos de dados se hacen bajo la premisa fundamental de que los dados son honestos, es decir, que cada una de las caras tiene igual probabilidad de salir que las demás. Existen rigurosos estándares para controlar tanto la producción de los dados que se usan en un casino, así como la frecuencia de uso y reemplazo, para evitar que el desgaste natural de los dados pueda viciar los resultados y, en consecuencia, alterar las probabilidades naturales.

Bajo estos supuestos es evidente que cada número tiene la misma probabilidad de aparecer al lanzar un dado, y esta probabilidad es de $1/6$. Es un claro ejemplo de una distribución uniforme discreta.

Sin embargo, la mayoría de los juegos que se juegan en los casinos requieren, al menos, dos dados. Para iniciar podemos ver una sencilla tabla en donde se muestran los resultados posibles del total de la suma al lanzar un par de dados y su probabilidad asociada.

Tabla 10. Resultados al lanzar un par de dados

Combinaciones	Suma	Probabilidad	Porcentaje
(1,1)	2	$1/36$	$2.\overline{778}\%$
(1,2),(2,1)	3	$2/36$	$5.\overline{556}\%$
(1,3),(2,2),(3,1)	4	$3/36$	$8.\overline{333}\%$
(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)	5	$4/36$	$11.\overline{111}\%$
(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)	6	$5/36$	$13.\overline{889}\%$
(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)	7	$6/36$	$16.\overline{667}\%$
(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)	8	$5/36$	$13.\overline{889}\%$
(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)	9	$4/36$	$11.\overline{111}\%$
(4,6),(5,5),(,6,4)	10	$3/36$	$8.\overline{333}\%$
(5,6),(6,5)	11	$2/36$	$5.\overline{556}\%$
(6,6)	12	$1/36$	$2.\overline{778}\%$

Fuente: Cálculos Propios

3.3.1. Chuck a Luck

El juego de Chuck a Luck es sin duda uno de los juegos con dados más sencillos que podemos encontrar en un casino. Consiste en 3 dados dentro de una jaula de metal que tiene la forma de un reloj de arena. Los orígenes de este juego se encuentran en Inglaterra (o jaula de pájaros como es coloquialmente conocida) y posteriormente llegó a los Estados Unidos en el siglo XIX. (Epstein, 2009)

Se hacen apuestas a los posibles resultados de los 3 dados. El jugador hace una apuesta a un número, y gana tantas veces la apuesta como aparezca el número al girar los 3 dados simultáneamente. Si el número seleccionado no aparece, se pierde la apuesta (Packel, 2006). Este conjunto de reglas da como resultado una ventaja de la casa del 7.87% para esta apuesta.

Para calcular esta ventaja de la casa sabemos que existen 6^3 posibles resultados, y para cualquier número seleccionado, tenemos que verificar el número de combinaciones para 3 aciertos, 2 aciertos y ningún acierto y la probabilidad de cada caso.

$$P(0\text{ aciertos}) = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{125}{216} = 57.87\%$$

$$P(1\text{ acierto}) = 3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{75}{216} = 34.72\%$$

$$P(2\text{ aciertos}) = 3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216} = 6.94\%$$

$$P(3\text{ aciertos}) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{216} = 0.46\%$$

Esto lo podemos ver en la siguiente tabla.

Tabla 11. Chuck a Luck: Caso Típico

Aciertos	Comb	Prob	Pago	Valor Esperado
0	125	0.5787	-$1	-$0.5787
1	75	0.3472	+$1	+$0.3472
2	15	0.0694	+$2	+$0.1388
3	1	0.0004	+$3	+$0.0138
			VE	-$0.0787
			HA	7.87%

Fuente: Cálculos Propios

Existen lugares en donde pagan 10 a 1 en caso de los 3 aciertos (Shackleford, 2008). Veamos cómo afecta esta modalidad a la ventaja de la casa.

Tabla 12. Chuck a Luck: Cambio en la Tabla de Pagos

Aciertos	Comb	Prob	Pago	Valor Esperado
0	125	0.5787	-$1	-$0.5787
1	75	0.3472	+$1	+$0.3472
2	15	0.0694	+$2	+$0.1388
3	1	0.0004	+$10	+$0.0462
			VE	-$0.0462
			HA	4.62%

Fuente: Cálculos Propios

Tenemos una considerable diferencia con respecto a la Ventaja de la Casa original. Es precisamente por eso, que los administradores de los casinos deben tener un cuidado especial al alterar los pagos ofrecidos en las apuestas, pues deben saber de antemano el impacto que tendrá, tanto en el atractivo para los jugadores como en la rentabilidad del negocio. Un ajuste descuidado en la tabla de pagos puede revertir la Ventaja de la Casa incluso convirtiéndola en positiva para el jugador, lo cual puede llevar a cuantiosas pérdidas para el casino.

Podemos generalizar el caso para obtener la ventaja de la casa, si queremos variar la tabla de pagos y evaluar el impacto de la siguiente forma:

Si un acierto paga x ; dos aciertos paga y; tres aciertos paga z, tenemos que la Ventaja de la Casa está dada por:

$$(125 - 75x - 15y - z)/6^3$$

Es posible encontrar una variedad de apuestas adicionales en este juego.

Campo: Esta apuesta paga 1:1 si la suma de los 3 dados corresponde a cualquiera de los resultados 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17 o 18.

Tabla 13. Chuck a Luck: Apuestas Adicionales

Aciertos	Comb	Prob	Pago	Valor Esperado
Campo	91	0.421	+\$1	+\$0.4212
No Campo	125	0.578	-\$1	-\$0.5787
			VE	-\$0.1574
			HA	15.74%

Fuente: Cálculos Propios

Es posible encontrar alteraciones en las apuestas que ofrece cada casino; por ejemplo hay lugares donde pueden definir la apuesta de Campo como 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15 y 16; lo cual evidentemente altera la Ventaja de la Casa sobre el jugador.

3.3.2. Craps

El juego de dados o Craps es, sin duda, uno de los juegos más populares que podemos encontrar en un casino. El juego consiste básicamente en hacer apuestas al resultado de la suma al lanzar un par de dados. A pesar de lo sencillo que puede sonar esto, se cree que el juego de Craps es el juego mayor jugado sin que el jugador entienda por completo el juego; muchos jugadores entienden algunas de las posibles apuestas, pero no todas (International Gaming Industry, University of Nevada Las Vegas, 1996).

En la Ilustración 3 podemos ver cómo está diseñado el paño donde se van colocando las apuestas.

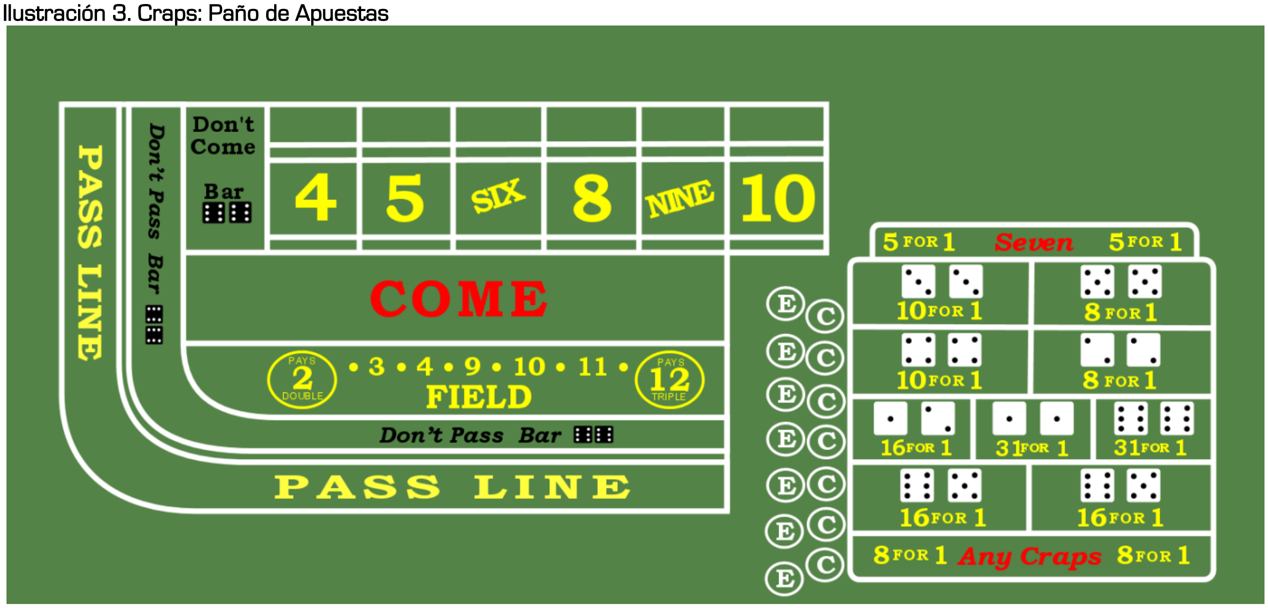
Empezaremos viendo las apuestas principales. Cuando se inicia un juego o una ronda, el lanzamiento se llama "de salida".

La apuesta que se coloca en el **Pass Line** (o Línea de Pase) paga 1:1 si el resultado del lanzamiento de salida es un 7 o un 11 y se pierde si el resultado es un 2, 3 o 12 (usualmente se le llama "craps" a un lanzamiento cuyo resultado es precisamente 2, 3 o 12). Cualquier otro resultado se le llama "punto". Una vez que se establece el valor del "punto", la apuesta en el **Pass Line** se define hasta que el valor del "punto" es lanzado de nuevo o sale un 7. Es decir, el lanzador, seguirá tirando los dados hasta que salga un 7 o salga de nuevo el valor que se asignó al "punto". Si sale un 7, el jugador pierde la apuesta; si sale de nuevo el "punto", la apuesta paga 1:1.

Podemos calcular la Ventaja de la Casa para la apuesta al **Pass Line**. Hay dos maneras para que el jugador gane esta apuesta, sacando 7 u 11 en el primer lanzamiento o ganando en el "punto".

Sea $p(x)$ la probabilidad de obtener el resultado x en algún lanzamiento tenemos que calcular las probabilidades de obtener los resultados 4, 5, 6, 8, 9 y 10 antes de obtener un 7.

Ilustración 3. Craps: Paño de Apuestas



Tenemos entonces que podemos calcular la probabilidad de ganar la apuesta cuando el "punto" es 4 de la siguiente forma:

Sea:

$$p(4\text{ antes que }7) = p(4) + p(4)\,p(\text{no }4\text{ y no }7) + p(4)\,p(\text{no }4\text{ y no }7)^2 + p(4)\,p(\text{no }4\text{ y no }7)^3 + p(4)\,p(\text{no }4\text{ y no }7)^4 + p(4)\,p(\text{no }4\text{ y no }7)^5 + \cdots$$

Entonces:

$$p(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Y además:

$$p(\text{no }4\text{ y no }7) = 1 - \frac{3}{36} - \frac{6}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Por lo que:

$$p(4\text{ antes que }7) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \cdots = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{12}(4) = \frac{1}{3}$$

Por simetría sabemos que obtener la probabilidad de obtener un 4 es la misma que la de obtener un 10. Por lo tanto, $p(10\text{ antes que }7) = \frac{1}{3}$

De la misma forma calculamos la probabilidad de obtener un 5 antes que un 7.

Sabemos que:

$$p(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Y además:

$$p(\text{no }5\text{ y no }7) = 1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

Por lo que:

$$p(5\text{ antes que }7) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^4 + \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^5 + \cdots = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^i = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{13}{18}}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{18}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Una vez más, por simetría podemos ver que éste último resultado es el mismo para $p(9\text{ antes que }7)$.

Lo siguiente es calcular la probabilidad de obtener un 6 antes que un 7. Siguiendo el mismo procedimiento tenemos:

$$p(6) = \frac{5}{36}$$

Y además:

$$p(\text{no }6\text{ y no }7) = 1 - \frac{5}{36} - \frac{6}{36} = \frac{25}{36}$$

Por lo que:

$$p(6\text{ antes que }7) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right) + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^2 + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^3 + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^4 + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^5 + \cdots = \frac{5}{36}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^i = \frac{5}{36}\left(\frac{1}{1-\frac{25}{36}}\right) = \frac{5}{36}\left(\frac{36}{11}\right) = \frac{5}{11}$$

Una vez más, ya que la probabilidad de obtener un 8 es la misma que de obtener un 6, $p(9\text{ antes que }7) = \frac{5}{11}$

Finalmente, la probabilidad de que un jugador gane la apuesta **Pass Line** está dada por:

$$
\begin{aligned}
p(\text{ganar}) = p(7) + p(11) &+ p(4)p(4 \text{ antes que } 7) \\
&+ p(5)p(5 \text{ antes que } 7) \\
&+ p(6)p(6 \text{ antes que } 7) \\
&+ p(8)p(8 \text{ antes que } 7) \\
&+ p(9)p(9 \text{ antes que } 7) \\
&+ p(10)p(10 \text{ antes que } 7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{6}{36} + \frac{1}{18} + \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{5}{11}\right) \\
+ \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{5}{11}\right) + \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{5}\right) \\
+ \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{244}{495}
\end{aligned}
$$

Con esta información podemos calcular entonces la Ventaja de la Casa para esta apuesta de la forma que ya conocemos y que podemos ver en la siguiente tabla.

Tabla 14. Craps: Pass Line

Pass Line	Prob	Pago	Valor Esperado
Ganar	0.4929	+$1	+$0.4929
Perder	0.5070	-$1	-$0.5070
		VE	-$0.0141
		HA	1.41%

Fuente: Cálculos Propios

Un jugador puede tomar la posición contraria a la del **Pass Line** con la apuesta **Don't Pass**. En esta apuesta el jugador gana si en el lanzamiento de salida cae un 2 o un 3 (el 12 se considera empate). Esta apuesta se pierde con un 7 o un 11. En caso de que se asigne el "punto", la apuesta **Don't Pass** se gana si en los siguientes lanzamiento se obtiene un 7 antes de repetir el valor del "punto".

Calculando esta apuesta de la misma forma que la apuesta anterior, es decir, evaluando todos los casos posibles tenemos:

$$
\begin{aligned}
p(\text{ganar}) = p(2) + p(3) &+ p(4)p(7 \text{ antes que } 4) \\
&+ p(5)p(7 \text{ antes que } 5) \\
&+ p(6)p(7 \text{ antes que } 6) \\
&+ p(8)p(7 \text{ antes que } 8) \\
&+ p(9)p(7 \text{ antes que } 9) \\
&+ p(10)p(7 \text{ antes que } 10)
\end{aligned}
$$

Sabemos que:

$$p(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Calculemos entonces:

$$
\begin{aligned}
p(7 \text{ antes que } 4) &= p(7 \text{ antes que } 10) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \cdots \\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(7 \text{ antes que } 5) &= p(7 \text{ antes que } 9) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{13}{18}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{13}{18}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{13}{18}\right)^3 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\frac{13}{18}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{13}{18}\right)^5 + \cdots \\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^i = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{13}{18}}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{18}{5}\right) = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

$$p(7 \text{ antes que } 6) = p(7 \text{ antes que } 8)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^3$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^5 + \cdots$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^i = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{25}{36}}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{36}{11}\right) = \frac{6}{11}$$

Entonces:

$$p(\text{ganar}) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{36}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{36}\left(\frac{6}{11}\right)$$
$$+ \frac{5}{36}\left(\frac{6}{11}\right) + \frac{4}{36}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{36}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{949}{1980}$$

Sabemos que para esta apuesta existe la posibilidad de empate si en el lanzamiento de salida cae un 12.

$$p(\text{empate}) = \frac{1}{36}$$

Con esto podemos calcular la Ventaja de la casa tal como se observa en la siguiente tabla:

Tabla 15. Craps: Don't Pass

Don't Pass	Prob	Pago	Valor Esperado
Gana	0.4792	+$1	+$0.4792
Empate	0.0277	0	0
Pierde	0.4929	-$1	-$0.4929
		VE	-$0.0136
		HA	1.36%

Fuente: Cálculos Propios

La apuesta **Come** es esencialmente idéntica a la apuesta **Pass Line**. Le permite al jugador hacer una apuesta a que el siguiente lanzamiento funcione como si fuera uno de salida que gana si cae en 7 u 11 y pierde en 2, 3 y 12.

Existe una única apuesta en los juegos de casino en donde la ventaja de la casa es 0, es decir, la apuesta paga los momios reales a los que corresponde y esta apuesta se encuentra en el juego de craps. La apuesta conocida en inglés como **Taking the Odds** (tomar los momios) se puede hacer una vez que se establece el punto y consiste en hacer apuestas adicionales a que se va a obtener el valor de punto de nuevo antes que un 7. Estas apuestas generalmente son de 3X a 100 X, siendo X el monto apostado en el **Pass Line** (y sin exceder los límites de la mesa). El pago es el pago matemáticamente justo, es decir, si el punto es 6 u 8, la apuesta paga 6:5; s le punto es 5 o 9, paga 3:2; finalmente si es 4 o 10, paga 2:1. Como en casi todas las apuestas que veremos en Craps, también se puede tomar la posición contraria; es decir, apostar que sale el 7 antes que el punto. En la siguiente tabla podemos ver un ejemplo del pago desde ambos escenarios, suponiendo en todos los casos una apuesta de $30.

Tabla 16. Ejemplo de Pago de Apuesta "Taking the Odds"

Valor del Punto	Momios	Tomar Odds	No tomar Odds
4	2:1	$60	$15
5	3:2	$45	$20
6	6:5	$36	$25
8	6:5	$36	$25
9	3:2	$45	$20
10	2:1	$60	$15

Fuente: Cálculos Propios

Por ejemplo, consideremos una apuesta libre de \$10 al 4 como punto. Recordemos que la probabilidad de obtener un 4 antes que un 6 es de un tercio, por lo que el valor esperado de esta apuesta corresponde a:

$$VE(\$10) = (+\$20)\left(\frac{1}{3}\right) + (-\$10)\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

Efectivamente la apuesta paga como un juego justo.

Como esta apuesta únicamente se puede hacer si se apostó en el **Pass Line**, podemos calcular la Ventaja de la casa combinada para este par de apuestas.

Desde el punto de vista del jugador, podemos calcular su ventaja dividiendo el promedio esperado de ganancia entre el promedio apostado. Sabemos que del **Pass Line** el jugador espera perder 0.0141 por cada 1 apostado. Supongamos que la apuesta libre es de 1X.

La apuesta promedio es entonces:

$$\begin{aligned} 1 + 2\left(\frac{3}{36}\right)(1) + 2\left(\frac{4}{36}\right)(1) + 2\left(\frac{5}{36}\right)(1) \\ = 1 + \left(\frac{6+8+10}{36}\right)(1) = \left(\frac{60}{36}\right) \end{aligned}$$

La ventaja del jugador es entonces:

$$\frac{-0.0141}{60/36} = -0.00848 = -0.848\%$$

Que es lo mismo que decir que es una ventaja de la casa de 0.848%.

Muchas veces los casinos ofrecen distintas opciones para estas apuestas. Por ejemplo, existe la 3-4-5X, lo cual quiere decir que el jugador puede tomar 3X en 4 y 10, 4X en 5 y 9 y 5X en 6 y 8. Para este caso tenemos que la apuesta promedio es de:

$$\begin{aligned} 1 + 2\left(\frac{3}{36}\right)(3) + 2\left(\frac{4}{36}\right)(4) + 2\left(\frac{5}{36}\right)(5) \\ = 1 + \left(\frac{18+32+50}{36}\right)(1) \\ = \left(\frac{136}{36}\right) \end{aligned}$$

La ventaja del jugador es entonces:

$$\frac{-0.0141}{136/36} = -0.00374 = -0.374\%$$

La cuál es entonces una ventaja para la casa del 0.374%. Definitivamente es una de las apuestas con menor ventaja para la casa. En general el casino puede ofrecer distintos valores para esta apuesta. De forma general podemos decir que si se ofrece x al 6 y 8, y al 5 y 9 y z al 6 y 10 podemos calcular la ventaja del jugador como:

$$\frac{-0.0141}{1 + \frac{5x+4y+3z}{18}}$$

En la tabla que se muestra a continuación podemos ver un resumen de las diferentes apuestas generalmente disponibles para este caso y su respectiva ventaja de la casa, calculadas con la formula descrita.

Tabla 17. Craps: Ventaja de la Casa combinada suponiendo Pass Line y Taking the Odds

Odds	Ventaja de la Casa
1X	0.848%
2X	0.606%
Dobles Completa[6]	0.572%
3X	0.471%
3-4-5X	0.374%
5X	0.326%
10X	0.184%
20X	0.099%
100X	0.021%

Fuente: Cálculos Propios

Una vez más es de esperarse que el jugador pueda asumir la posición contraria a la que se ofrece al tomar la apuesta **Taking the Odds**, la cual recibe el nombre de **Laying the Odds** y consiste en apostar a que sale el 7 antes de que se vuelva a repetir el valor del punto. Es decir, es una apuesta adicional a la de **Don't Pass**. Esta apuesta también paga como un juego justo. Si el punto es 4 o 10, tomar esta apuesta paga 1 a 2; si es 5 o 9, paga 2 a 3; si es 6 u 8, paga 5 a 6. El monto que el jugador puede ganar corresponde al producto de la apuesta hecha en **Don't Pass** y el multiplicador permitido de acuerdo a las reglas de la mesa.

Por ejemplo, si la mesa permite 5X, entonces el jugador puede ganar 5 veces la apuesta hecha en **Don't Pass** al apostar **Laying the Odds.** Es importante recalcar que el múltiplo aplica a lo que se puede ganar y no a lo que se puede apostar.

Por otro lado, si se apuestan $2 en **Don't Pass** y la mesa permite apuesta Doble Completa[6] (*full double odds*) el jugador puede apostar $8 para ganar $4 (2x$2) en un punto de 4 o 10; $6 para ganar 4 (2x$2) en punto de 5 o 9; y apostar $6 para ganar $5 (2.5x$2) en un punto de 6 u 8.

Para este caso, la apuesta promedio es de:

$$
\begin{aligned}
1 + 2\left(\frac{3}{36}\right)(8) + 2\left(\frac{4}{36}\right)(6) + 2\left(\frac{5}{36}\right)(6) \\
= 1 + 2\left(\frac{24 + 24 + 30}{36}\right) \\
= \left(\frac{228}{36}\right)
\end{aligned}
$$

Sabemos que la ventaja de la casa al apostar en **Don't Pass** es de 0.013636. Entonces para esta apuesta, la ventaja de la casa se calcula como:

$$\frac{0.013636}{228/36} = 0.00430622 \approx 0.431\%$$

Siguiendo el procedimiento anterior podemos calcular la ventaja de la casa para cualquier apuesta ofrecida. No hay que olvidar la importancia de que para este caso especial se debe considerar de antemano lo que se puede ganar como máximo para determinar el monto a apostar en cada posibilidad. En las tablas 18 y 19 podemos ver en resumen varias de las apuestas generalmente encontradas.

La siguiente apuesta que podemos estudiar es la de **Apuestas a los Números** o *Place Bets*. La apuesta consiste en apostar que alguno de los números del Punto del juego (4, 5, 6, 8, 9 o 10) va a salir antes que un 7. Los pagos son usualmente menores a la probabilidad real. Para el 4 y 10, se paga 9 a 5; para el 5 y 9, 7 a 5; para el 6 y 8; usualmente se paga 7 a 6.

[6] Doble completa o *full double odds* significa que el jugador apuesta 2.5X al 6 u 8 y 2X en las demás posibilidades

Tabla 18. Ejemplo de máximos permitidos para apostar suponiendo una apuesta de $10

Odds	Valor del Punto	Momios	Se apuesta	Para Ganar:
1X	4 y 10	2:1	$20	$10
	5 y 9	3:2	$15	$10
	6 y 8	6:5	$12	$10
Doble Completa	4 y 10	2:1	$40	$20
	5 y 9	3:2	$30	$20
	6 y 8	6:5	$30	$25
3-4-5X	4 y 10	2:1	$60	$30
	5 y 9	3:2	$60	$40
	6 y 8	6:5	$60	$50
5X	4 y 10	2:1	$100	$50
	5 y 9	3:2	$75	$50
	6 y 8	6:5	$60	$50
100X	4 y 10	2:1	$2000	$1000
	5 y 9	3:2	$1500	$1000
	6 y 8	6:5	$1200	$1000

Tabla 19. Craps: Ventaja de la Casa combinada suponiendo Don't Pass y Lay the Odds

Odds	Ventaja de la Casa
1X	0.682%
2X	0.455%
Dobles Completa	0.431%
3X	0.341%
3-4-5X	0.273%
5X	0.227%
10X	0.124%
20X	0.065%
100X	0.014%

Fuente: Cálculos Propios

La ventaja de la casa para cada una de estas apuestas se explica a continuación.

Supongamos una apuesta Place Bet al 4 por $5. En caso de que el jugador gane, recibirá $9, es decir, gana si sale un 4 antes que el 7. En caso de que salga el 7 antes que el 4, perderá su apuesta de $5. Recordemos que la probabilidad de que salga un 4 antes de un 7 en lanzamientos sucesivos es de un tercio,

Tabla 20. Craps: Ventaja de la Casa de Place Bet al 4

Resultado	Prob	Pago	Valor Esperado
4 antes que 7	1/3	+$9	$3
7 antes que 4	2/3	-$5	-$3.3333
		VE	-$0.3333
		HA	6.67%

Fuente: Cálculos Propios

De la misma forma, podemos calcular la ventaja de la casa para el caso del 5 y del 6. Con esto tendremos la ventaja de la casa calculada para todos los valores posibles ya que el del 10 es obviamente la misma que la del 4; la del 9 es la misma que la del 5 y por último, la del 8 es la misma que la del 6.

Tabla 21. Craps: Ventaja de la Casa de Place Bet al 5

Resultado	Prob	Pago	Valor Esperado
5 antes que 7	2/5	+$7	$2.8
7 antes que 5	3/5	-$5	-$3
		VE	-$0.2
		HA	4.00%

Fuente: Cálculos Propios

Tabla 22. Craps: Ventaja de la Casa de Place Bet al 6

Resultado	Prob	Pago	Valor Esperado
6 antes que 7	5/11	+$7	$3.1818
7 antes que 6	6/11	-$6	-$3.2727
		VE	-$0.0909
		HA	1.52%

Fuente: Cálculos Propios

Debido a que las posibles apuestas que se manejan en este juego son muy numerosas, se haría demasiado extenso y repetitivo analizar cada una de ellas. El procedimiento para poder calcular la ventaja de la casa es una y otra vez básicamente el mismo y no es el propósito de este trabajo hacer un estudio profundo del juego de Craps sino únicamente dar nociones generales que permitan comprender las relaciones matemáticas de este juego. Siendo que es de reciente incorporación formal al juego legal en México, es indispensable comprender éste juego y sus reglas, ya que es uno de los juegos de mesa más populares en un casino.

3.4. Juegos con Cartas

Los juegos con cartas están, hasta este momento, prohibidos por la Ley en México. Aún sin considerar la expectativa de que el marco legal cambie, es importante estudiar algunos de los casos de los juegos de cartas que podemos encontrar en los casinos del mundo. Desde el punto de vista didáctico, éstos nos proveen de unos ejercicios interesantes a estudiar, además de ser juegos permitidos en otros países.

3.4.1. Casino War

El Casino War o Guerra de Casino es un juego de cartas muy popular y muy sencillo de jugar.

Para participar, se "enfrentan" el jugador y el casino, representado por un crupier (o dealer). El juego consiste en que el jugador y el crupier reciben ambos una carta. Si la carta del jugador es más alta gana un monto igual al apostado; si es más baja, pierde.

Si ambas cartas son iguales, el jugador tiene entonces dos opciones, "rendirse", en donde el jugador pierde automáticamente la mitad de la apuesta hecha o "declarar la guerra", en la que debe colocar una segunda apuesta idéntica a la original. El crupier desecha las siguientes 3 cartas y entrega una al jugador, y una a él mismo. Si el jugador tiene una carta más alta o igual a la del crupier, gana un monto igual a la apuesta inicial; en caso contrario pierde ambas apuestas.

Para este juego se usan normalmente 6 barajas, y para valorar las cartas, se usa la jerarquía habitual de póker, siendo el 2 la carta más baja y el As la carta más alta. No hay distinción de rangos por palo y/o color.

Podemos construir la siguiente tabla que muestra los resultados posibles dependiendo de la carta que reciba el crupier.

Se puede ver que si el crupier recibe de las 312 cartas, un 2, quedan 23 cartas restantes que harían que el jugador empatara. El resto haría ganador al jugador. Siguiendo la misma lógica, la tabla quedaría como se muestra en la Tabla 23.

Es fácil intuir que este juego no tiene mucha más estrategia involucrada. En realidad la única decisión que tiene influencia en la ventaja de la casa del juego es si el jugador decide "ir a la guerra" o no en caso de un empate.

.

Tabla 23. Casino War: Primera Carta

Crupier	Combin Ganadoras	Combin Perdedoras	Combin Empate
2	288	0	23
3	264	24	23
4	240	48	23
5	216	72	23
6	192	96	23
7	168	120	23
8	144	144	23
9	120	168	23
10	96	192	23
J	72	216	23
Q	48	240	23
K	24	264	23
A	0	288	23
Total	1872	1872	299

Fuente: Cálculos Propios

. De acuerdo a la tabla anterior podemos calcular las probabilidades de ganar, perder o empatar (desde el punto de vista del jugador).

$P(Ganar)$

$$= \sum_{i=2}^{As} P(\text{Ganar si crupier tiene la carta } i)$$

$$\cdot P(\text{crupier tenga carta } i) = (\frac{288}{311})\left(\frac{24}{312}\right) + \left(\frac{264}{311}\right)\left(\frac{24}{312}\right)$$

$$+ \left(\frac{240}{311}\right)\left(\frac{24}{312}\right) + \cdots + \left(\frac{24}{311}\right)\left(\frac{24}{312}\right) + \left(\frac{0}{311}\right)\left(\frac{24}{312}\right)$$

$$= \frac{24}{312}\left(\frac{288+264+240+\cdots+24+0}{311}\right) = \frac{24}{312}\left(\frac{1872}{311}\right)$$

$$= \frac{1872}{4043} = 0.463022$$

Por otro lado, la probabilidad de empatar es:

$$P(\text{empate}) = \frac{24}{312}\left(\frac{23}{311}\right)(13) = \ 0.073954$$

La cual podía ser también calculada como el complemento de ganar o perder, es decir:

$$P(\text{empate}) = 1 - 2(0.463022) = \ 0.073954$$

Con esta información se puede calcular el valor esperado de cualquier apuesta en el juego, bajo el supuesto de que el jugador decide "ir a la guerra" en caso de empate.

Si se supone el caso en que tanto el jugador como el crupier empatan a una carta cualquiera, digamos el 2, podemos posteriormente generalizarlo a todas los valores posibles de empates.

En la tabla 24 se detalla que pasa con la segunda carta que recibe el crupier, es decir, cuántas son las cartas con las que el jugador puede ganar dada la que reciba el crupier. Sabemos que da las cartas que quedan, existen 95,790 distintas combinaciones posibles (310x309). Recordemos además que ya no hay empates, un segundo empate, en este caso ya beneficia al jugador.

Tabla 24. Casino War: Segunda Carta

2ª Carta Crupier	Número de Cartas			Combin Ganar	Combin Perder
	Restantes	Para Ganar	Para Perder		
2	22	309	0	6798	0
3	24	287	22	6888	528
4	24	263	26	6312	1104
5	24	239	70	5736	1680
6	24	215	94	5160	2256
7	24	191	118	4584	2832
8	24	167	142	4008	3408
9	24	143	166	3432	3984
10	24	119	190	2856	4560
J	24	95	214	2280	5136
Q	24	71	238	1704	5712
K	24	47	262	1128	6288
A	24	23	286	552	6864
Total	310			51,438	44,352

Fuente: Cálculos Propios

Podemos ver entonces que en caso de que haya habido un empate, de las 95,790 posibles combinaciones posteriores de cartas, el 53.69% serán favorables el jugador y el 46.30% serán desfavorables al jugador. Este esquema aplica independientemente del valor con el que empaten en las dos primeras cartas. Podemos calcular entonces que la probabilidad de ganar y la de perder dado primero un empate.

$$P(\text{Ganar Guerra}) = \sum_{i=2}^{As} P(\text{Ganar Guerra}|\text{Empate}_i)$$

$$\cdot P(\text{Empate}_i)$$

$$= \sum_{i=2}^{As}(0.5369)\left(\frac{24}{312}\right)\left(\frac{23}{311}\right)$$

$$= 13(0.5369)\left(\frac{24}{312}\right)\left(\frac{23}{311}\right)$$

$$= 0.039713$$

$$P(\text{Perder Guerra}) = \sum_{i=2}^{As} P(\text{Perder Guerra}|\text{Empate}_i)$$
$$\cdot P(\text{Empate}_i)$$
$$= \sum_{i=2}^{As} (0.4630)\left(\frac{24}{312}\right)\left(\frac{23}{311}\right)$$
$$= 13(0.4630)\left(\frac{24}{312}\right)\left(\frac{23}{311}\right)$$
$$= 0.034242$$

Tabla 25. Casino War: Tabla de Resultados

Resultado	Probabilidad	Pago Neto	Esperanza
Gana	0.4630	+$1	+$0.4630
Pierde	0.4630	-$1	-$0.4630
Empata y Gana	0.0397	+$1	+$0.0397
Empata y Pierde	0.0342	-$2	-$0.0684
		VE	-$0.0287
		HA	2.88%

Fuente: Cálculos Propios

Recordemos, sin embargo, que la Ventaja de la Casa se calcula por unidad monetaria apostada. En el caso del empate, se hace una apuesta adicional de otro tanto. Como la probabilidad de que haya un empate es del 7.39%, entonces la apuesta promedio no será de 1 sino de 1.0739 (esto es, si el jugador siempre decide "ir a la guerra").

Entonces la Ventaja de la Casa real es de:

$$HA = \frac{0.028871}{1.0739} = 0.02688 = 2.68\%$$

Podemos calcular también la Ventaja de la Casa en caso de que el jugador decida rendirse siempre después de un empate:

Tabla 26. Casino War - Ventaja de la Casa

Resultado	Probabilidad	Pago	Esperanza
Gana	0.4630	+$1	+$0.4630
Pierde	0.4630	-$1	-$0.4630
Empata	0.0739	-$0.5	-$0.3697
		VE	-$0.3697
		HA	3.69%

Fuente: Cálculos Propios

3.4.2. Blackjack

El Blackjack o Veintiuno es uno de los juegos más populares en los casinos. Los orígenes del juego no están perfectamente definidos, se sabe que proviene de Europa. Se le pueden encontrar similitudes con diversos juegos como el Vingt-et-Un de Francia, el Uno y Trente de España y el Baccarat italiano (Grochowski, 1998). Sin embargo, no se puede determinar con exactitud el origen de este juego. El propósito del juego es tener un juego mejor que el de la casa, y no como comúnmente se cree, acercarse más a 21 puntos.

El valor de las cartas está dado por el número que indica la carta, sin importar si se trata de corazón, trébol, hojas o diamantes. Las cartas con figura valen 10 puntos cada una[7]. El As vale 1 u 11, como el jugador prefiera El valor de la mano que tiene el jugador es simplemente la suma de las cartas que tenga en juego. Se le llama blackjack natural a la combinación A-T que un jugador recibe en sus dos primeras cartas y es, en automático, una mano ganadora.

Existen un sinnúmero de reglas que varían de casino a casino, incluyendo el número de barajas (una o más barajas, incluso hasta ocho), la tabla de pagos, las reglas que permiten al jugador pedir más cartas, los requisitos para que la banca reciba más cartas, etc. Poco a poco iremos detallando los casos y viendo como estas variaciones afectan, evidentemente, a la ventaja de la casa.

El juego se inicia entregando a cada jugador una carta, después una para el juego de la casa. Este procedimiento se repite para que cada jugador tenga dos cartas. Una de las cartas de la casa queda a la vista y la otra permanece oculta.

Si la carta mostrada es un As, se ofrece a los jugadores la posibilidad de pagar una apuesta adicional llamada Seguro *(Insurance)* que permite apostar a que la casa tiene una blackjack natural. Esta apuesta paga 2:1. El crupier revisa si tiene blackjack y recolecta las apuestas de los que no hayan optado por el Seguro y paga los Seguros. Si no tiene blackjack, el juego sigue de forma normal.

Es turno del jugador, quien tiene entonces la posibilidad de plantarse, es decir, quedarse con sus dos cartas originales, o pedir tantas cartas como desee sin exceder de 21 puntos. En el momento en que se pasa, pierde la apuesta automáticamente. El crupier, quien juega en nombre de la casa, tiene una regla definida para actuar, independientemente del resultado que tengan los jugadores. La casa pedirá una carta adicional mientras su total sea menor a 16; se planta si tiene 17 o más. Si la casa se pasa de 21 puntos, los jugadores que aun sigan jugando (es decir no hayan excedido de 21 puntos) ganan automáticamente. En caso de que el crupier no exceda de 21 puntos se comparan los totales, si el jugador tiene un total más alto que la casa, gana; en caso contrario pierde la apuesta.

Otro caso a considerar es que si el jugador recibe dos cartas iguales, puede formar con cada una de ellas un juego distinto, pagando una apuesta adicional igual a la que pagó originalmente.

Con las reglas generales establecidas, podemos ahora calcular las probabilidades asociadas al Blackjack (con una o dos barajas de 52 cartas cada una). Es importante señalar que el Blackjack como tal, no es un juego puramente de azar, sino el que factor de destreza de cada jugador puede influir

[7] Para el desarrollo de los cálculos matemáticos nos referiremos a las cartas con valor de 10 como T y al As como A.

directamente en las probabilidades de ganar, ya que el juego involucra decisiones que el jugador debe tomar.

Podemos comenzar calculando el número de posibles combinaciones de las dos cartas que el jugador recibe y suponiendo también que son las únicas 2 cartas que se reparten. Para juegos con una baraja, el total de combinaciones posibles es de $C_{52}^{2}=\frac{52!}{2!(52-2)!}=\frac{52(51)}{2!}=1326$ y de 5356 (C_{104}^{2}) para cuando se usan dos barajas.

Para calcular la probabilidad de obtener un blackjack natural, es decir A-T, debemos recordar que existen 4 A's en la baraja, y 16 T's en una baraja, es decir 64 distintas combinaciones que forman un blackjack natural. En el caso de dos barajas, tenemos 8 A's y 32 T's (256 combinaciones), por lo que las probabilidades de obtener el blackjack natural son:

P = $\frac{64}{1326}$ =4.8265% en el caso de una baraja[8]

P = $\frac{256}{5356}$ =4.7796% en el caso de dos barajas

Calculemos ahora la probabilidad de obtener 20 puntos en las primeras dos cartas. Hay dos maneras de obtener 20 puntos, ya sea mediante la pareja T-T o por la pareja A-9.

En el caso de una baraja tenemos que para formar parejas del tipo T-T tenemos 4 cartas diferentes (10, J, Q y K) por lo tanto la probabilidad está dada por $4\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)+6(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)=9.049\%$. Mientras que para las parejas tipo A-9, la probabilidad está dada por $2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)=1.20\%$. Es decir, la probabilidad de obtener 20 puntos en las primeras dos cartas es de 10.25%

Para dos barajas, las probabilidades de obtener T-T es igual a $2\left(\frac{32}{104}\right)\left(\frac{31}{103}\right)=18.52\%$, mientras que la probabilidad de obtener A-9 es igual a $2\left(\frac{8}{104}\right)\left(\frac{8}{103}\right)=1.19\%$, por lo que la probabilidad de obtener 19 puntos es de 19.71%

Calculemos ahora la probabilidad de obtener 19 puntos en las primeras dos cartas. Hay dos maneras de obtener 19 puntos, ya sea mediante la pareja T-9 o por la pareja A-8.

En el caso de una baraja tenemos que la probabilidad de obtener T-9 es igual a $2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)=4.82\%$, mientras que la probabilidad de obtener A-8 es igual a $2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)=1.20\%$, por lo que la probabilidad de obtener 19 puntos es de 6.03%

Para dos barajas, las probabilidades de obtener T-9 es igual a $2\left(\frac{32}{104}\right)\left(\frac{8}{103}\right)=4.77\%$, mientras que la probabilidad de obtener A-8 es igual a $2\left(\frac{8}{104}\right)\left(\frac{8}{103}\right)=1.19\%$, por lo que la probabilidad de obtener 19 puntos es de 5.97%

De manera similar podemos calcular las probabilidades de obtener las demás puntuaciones con las primeras cartas, las cuales resumimos en la siguiente tabla:

[8] También se puede calcular como $2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right)=4.8265\%$ al tener 16 posibles T's para la primer carta, y para la segunda carta tenemos 4 posibles A's, pero solo nos quedan 51 de donde elegir y se multiplica por dos porque nos es indistinto si la pareja as A-T o T-A.

Tabla 27. Blackjack: Probabilidades iniciales con una baraja

Puntuación	Una baraja	
21	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{4.82\%}$
20	$P = 4\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) + 6(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{10.25\%}$
19	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{6.03\%}$
18	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) + 2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{6.48\%}$
17	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 2(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{7.23\%}$
16	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 2(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{7.69\%}$
15	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 3(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{8.44\%}$
14	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 3(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{8.89\%}$
13	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 4(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{9.65\%}$
12	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 3(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{9.35\%}$
11	$P = 2\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + 4(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{9.65\%}$
10	$P = 4(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{5.27\%}$
9	$P = 4(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{4.82\%}$
8	$P = 3(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{4.07\%}$
7	$P = 3(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{3.61\%}$
6	$P = 2(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{2.86\%}$
5	$P = 2(2)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{2.41\%}$
4	$P = 2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{1.65\%}$
3	$P = 2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{51}\right) =$	$\mathbf{1.20\%}$
2	$P = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) =$	$\mathbf{0.45\%}$

Fuente: Cálculos Propios

Es importante mencionar que este cálculo de probabilidades sirve para ilustrar la parte inicial del juego. Existe una gran variedad de reglas en este juego y cada una impacta a la Ventaja de la Casa de maneras muy distintas. La manera de calcular esas probabilidades es corriendo un gran número de simulaciones considerando cada una de las reglas que se pueden aplicar, pues, a diferencia de los demás juegos que se han estudiado, en el Blackjack no se puede recurrir a la probabilidad clásica de manera tan sencilla.

4. Terminales Electrónicas de Apuestas

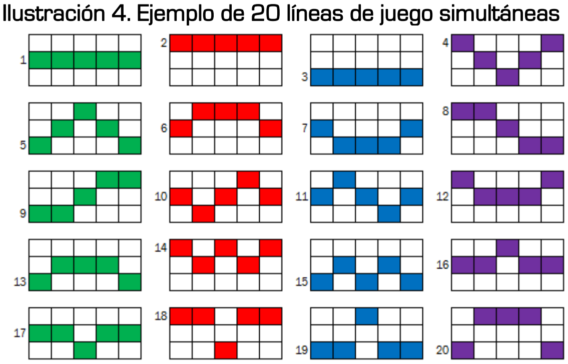
En México existen las terminales electrónicas de apuestas pues por ley no se permite que operen máquinas que reciban dinero en efectivo. Las terminales electrónicas actuales son versiones sofisticadas de las primeras máquinas tragamonedas que aparecieron en Estados Unidos. En 1899, Charles Fey inventó la primer máquina tragamonedas mecánica, la Liberty Bell (International Game Technology, 2005). Esta máquina estaba diseñada con 3 rieles mecánicos que giraban, y en los rieles estaban dispuestos diversos símbolos (diamantes, espadas, corazones, herraduras y la Campana de la Libertad de los Estados Unidos). La máquina recibía monedas que daban inicio a los rieles giratorios. Las 3 campanas alineadas otorgaban el premio más grande (50 centavos para una apuesta de 5 centavos).

Esta máquina tuvo un éxito impresionante y pronto Fey empezó a tener pedidos de su máquina para distribuirlas por una gran cantidad de cantinas en los Estados Unidos.

Estas máquinas mecánicas de antaño han sido reemplazadas por sus versiones electrónicas o electromecánicas en algunos casos para no perder la sensación de las máquinas originales. Además de las diferencias tecnológicas que se observan en estas nuevas versiones de máquinas, tenemos que ha existido un auge en el desarrollo de máquinas temáticas, es decir, que adoptan símbolos que el público reconoce como parte de películas, personajes de televisión, marcas, juegos, juegos y otros elementos que forman parte de la cultura popular y con las cuales el público puede sentirse identificado. Existe una gran variedad de opciones que los desarrolladores de estos juegos pueden ofrecer y siguen ofreciendo continuamente.

Así, si originalmente en las máquinas mecánicas la combinación ganadora consistía en que los 3 símbolos aparecieran alineados horizontalmente en las posiciones centrales, las versiones en video de estos juegos de rodillos permiten que un jugador juegue simultáneamente en 5, 15, 20, 25, o hasta 100 líneas virtuales. Y no solo eso, también las versiones en video permiten que se juegue con más rodillos virtuales, así podemos tener ahora juegos con 5 rodillos. Podemos ver en la siguiente ilustración un ejemplo de cómo se pueden jugar simultáneamente 20 líneas en un juego de 5 rodillos.

Ilustración 4. Ejemplo de 20 líneas de juego simultáneas



Para este ejemplo, las alineaciones de símbolos que otorgan combinaciones ganadoras son válidas únicamente mientras se presenten en alguna o algunas de las configuraciones presentadas en la Ilustración.

Además de los típicos juegos simulando rodillos mecánicos también existen otros juegos que son posibles de encontrar en este tipo de máquinas. Se puede encontrar el video póker, el blackjack (con unas de las más amplias selecciones de tablas de pagos y reglas para jugar), ruleta, bingo, baccarat, craps, keno, carreras de caballos y otros. Para los juegos tradicionales de mesas las reglas son esencialmente las mismas, son meras versiones electrónicas de los juegos que puede encontrar "en vivo". Estas versiones son buenas opciones para los lugares en donde por alguna u otra razón no se pueda disponer de los juegos originales "en vivo".

4.1. Diseño de juegos

Siempre es importante entender cómo funciona el producto que se ofrece. Esto permite despejar muchas dudas y mitos que surgen particularmente alrededor de estos juegos. Ya vimos a grandes rasgos cómo funcionaban las máquinas tragamonedas mecánicas originales. Ahora, las terminales electrónicas son mucho más complejas que sus antecesores y cada vez se basan más en modelos matemáticos más complejos para alcanzar nuevos objetivos.

Lo que antes conocimos como Ventaja de la Casa en los demás juegos, en el contexto de terminales electrónicas (de ahora en adelante llamadas únicamente terminales o slots) se redefine como porcentaje de retención (o Porcentaje de Hold o simplemente Hold) o equivalentemente nos podemos referir a su contraparte, el Porcentaje de Retoro. Es decir si una terminal tiene un Hold digamos del 5%, entonces tiene un Porcentaje de Retorno (Return to Player o RTP) del 95%.

Tenemos entonces que existe una gran variedad de porcentajes de hold disponibles en los juegos y varían en todos los lugares del mundo. Pueden ser tan bajos como del 0.5% o tan altos como del 30% (Hannum & Cabot, 2005).

Todos los juegos de los distintos proveedores de terminales vienen acompañados de un documento que explica el funcionamiento del juego. En ese documento (habitualmente llamado PAR Sheet, cuyas siglas significan Probability and Accounting Report) se detallan todos los posibles resultados al jugar dicho juego, la probabilidad con que salen esos resultados y los pagos asociados a cada posible resultado. Generalmente también incluyen información adicional como Hit Frequency (frecuencia de acierto), índice de volatilidad y los intervalos de confianza a los que están calculados los valores del porcentaje de retorno. Dicho documento es estrictamente confidencial ya que en él se detalla cómo está conformado el juego en su totalidad.

Veamos paso a paso un ejemplo de la información contenida en este tipo de documentos para un juego hipotético que iremos construyendo. Es importante mencionar que este modelo es teórico y sin tomar referencia de ningún otro. Cualquier parecido con algún juego existente sería coincidencia.

Mientras vamos desarrollando el juego iremos definiendo más términos habitualmente utilizados en el contexto de las terminales electrónicas y que posteriormente utilizaremos para hacer análisis exitosos.

Nuestro juego consiste en 3 rieles mecánicos con 6 distintos símbolos y 21 posiciones en cada riel. Los rieles son independientes entre sí.

Inicialmente podemos ver que existen 9,261 combinaciones de símbolos totales (21^3), es decir 9,261 tercias de símbolos alineados. Lo siguiente que debemos determinar es cuantos símbolos hay de cada tipo. Posteriormente nos daremos cuenta de las diferencias que implica alterar la cantidad de símbolos distribuidos en el riel. En este momento elegimos una distribución la cual se muestra en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Distribución de Símbolos en los Rieles Mecánicos de un Juego Hipotético

Descripción de Rieles			
Símbolo	Riel 1	Riel 2	Riel 3
Cereza	3	9	0
Naranja	8	2	8
Uva	5	2	5
Campana	1	4	5
Bar	2	3	2
Siete	2	1	1
Total	21	21	21
Ciclo	(21)(21)(21) = 9,261		

Después debemos crear una tabla de pagos para saber cómo va a funcionar el juego, es decir, cuales combinaciones de símbolos alineados van a ser considerados ganadores y el premio que se va a recibir.

Cuando hablamos de estos juegos, generalmente nos referimos a créditos a la unidad con la que se juega y en la que se reciben los pagos.

Los créditos están asociados a una denominación monetaria predeterminada y previamente asignada. De esta manera, en una cierta máquina podemos, por ejemplo, jugar 5 créditos, pero dependiendo de la denominación a la que se encuentren dicha máquina es el equivalente en dinero que vamos a jugar. Así, si la denominación base del juego es de $0.10, jugar 5 créditos equivale a jugar cincuenta centavos; a una denominación de $0.25, la apuesta correspondiente sería de $1.25 y así sucesivamente.

Las denominaciones más habitualmente encontradas en los juegos son $0.01, $0.02, $0.05, $0.10, $0.25, $0.50, $1, $2, $5 y $10. Aunque hay casos en donde pueden ser incluso de $100 o hasta $1000. Los creadores del software de estas máquinas de juego están conscientes de la actual globalización, entonces preparan sus productos para que puedan ser utilizados en mercados donde la divisa que se utilice pueda requerir. Es decir, para México una denominación de 10 o 50 centavos puede ser útil, o incluso en los Estados Unidos. Un cliente puede elegir jugar una maquina con denominación base de 50 centavos por crédito. Sin embargo, para un operador en Colombia no tendría sentido elegir una denominación tan pequeña cuando su moneda en circulación inicia en los 100 pesos.

Para participar en el juego que estamos diseñando solo es necesario apostar un crédito para obtener los pagos señalados en caso de acertar y jugar una sola línea. Cada juego sorteará aleatoriamente un símbolo en cada rodillo, y a cada tercia de símbolos le corresponderá o no un pago.

Ya sabemos que para este juego en particular existen 9,261posibles combinaciones de 3 símbolos al activar nuestra máquina. Debemos saber ahora cuántas de estas combinaciones dan un posible premio. Para conocer esto recurrimos a la Tabla de Pagos.

Para nuestro juego en cuestión podemos construir una tabla de pagos como la que se observa en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Ejemplo de una Tabla de Pagos

Tabla de Pagos (en créditos)			
Riel 1	Riel 2	Riel 3	Paga
Cereza	(no Cereza)	(cualquiera)	2
Cereza	Cereza	(cualquiera)	5
Naranja	Naranja	Naranja	10
Uva	Uva	Uva	14
Campana	Campana	Campana	18
Bar	Bar	Bar	100
Siete	Siete	Siete	500

Esta tabla de pagos es de vital importancia. Le llamamos aciertos o *hits* a cualquier combinación ganadora. Entonces de la información que ya tenemos podemos calcular cuantas combinaciones ganadoras existen en nuestro juego.

Por ejemplo, la primera combinación ganadora está dada por que aparezca cereza en el primer riel y cualquier otro símbolo que no sea cereza en los siguientes dos.

Si sabemos que hay 3 cerezas en el primer riel, 9 en el segundo y ninguna en el tercero. El total de posibles combinaciones para la primer combinación ganadora es: 3(21-9)(21)=756. No queremos que haya cereza en el segundo riel porque entonces sería un premio distinto y son excluyentes (obtener 2 cerezas en la línea ganadora no paga también el premio por haber obtenido una sola cereza).

Siguiendo la misma lógica tenemos la cantidad de combinaciones ganadoras que dan algún premio tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 6. Total de Combinaciones Ganadoras

Tabla de Pagos (en créditos)			# Símbolos			
Combinación Ganadora			R1	R2	R2	Hits
Cereza	no Cereza	Cualquiera	3	12	21	756
Cereza	Cereza	Cualquiera	3	9	21	567
Naranja	Naranja	Naranja	8	2	8	128
Uva	Uva	Uva	5	2	5	50
Campana	Campana	Campana	1	4	5	20
Bar	Bar	Bar	2	3	2	12
Siete	Siete	Siete	2	1	1	2
						1535

Fuente: Cálculos Propios

Ahora sabemos que de las 9,261 combinaciones posibles, a 1,535 les corresponde algún tipo de pago o premio. Esto quiere decir que el juego tiene un *Hit Frequency* o Frecuencia de Acierto del 16.57% (es decir 1525/9261). Dicho de otra manera, esperamos que aproximadamente cada 6 o 7 spins o juegos se produzca algún tipo de combinación ganadora.

La Frecuencia de Acierto provee de una cualidad especial a los juegos y es un factor importante para diferenciar a los jugadores. Existen jugadores que son aversos a juegos con una Frecuencia de Acierto notoriamente baja.

El Número de Juegos por Acierto o *Pulls per Hit* está dado por el número de juegos requeridos para un cierto premio. Por ejemplo el número de Pulls per Hit para obtener la combinación Campana – Campana – Campana es de 9261 / 20 = 463 (el resultado se maneja redondeado ya que no puede haber fracciones de juegos). Esto lo podemos interpretar como que la combinación de 3 campanas aparecerá más o menos cada 463 juegos,

El pago total lo podemos obtener sumando el producto de todas las combinaciones con acierto o Hits por el pago asociado a cada una de ellas.

Por ejemplo, el pago total de las combinaciones Bar – Bar – Bar es de 1200, ya que cada una de las 12 posibilidades de obtener la combinación en cuestión da un premio de 100 créditos.

Estos dos conceptos los podemos incorporar a la Tabla de Pagos como se muestra en el Cuadro 7.

Cuadro 7. Cálculo del Pago Total

Tabla de Pagos (en créditos)			# Símbolos			Hits	Pulls/Hit	Pago	Pago Total
Combinación Ganadora			R1	R2	R2				
Cereza	no Cereza	Cualquiera	3	12	21	756	12	2	1512
Cereza	Cereza	Cualquiera	3	9	21	567	16	5	2835
Naranja	Naranja	Naranja	8	2	8	128	72	10	1280
Uva	Uva	Uva	5	2	5	50	185	14	700
Campana	Campana	Campana	1	4	5	20	463	18	360
Bar	Bar	Bar	2	3	2	12	772	100	1200
Siete	Siete	Siete	2	1	1	2	4631	500	1000
						1535			8887

Fuente: Cálculos Propios

Podemos ver que al ciclo completo de 9,261 spins le corresponde un pago total de 8,887 créditos.

Dicho, de otra manera, si hipotéticamente recorriéramos una vez cada combinación posible, pagando una unidad por cada una de ellas y recibiendo, si es el caso, el pago correspondiente a cada una de las combinaciones ganadores, en total habríamos "invertido" 9,261 créditos y recibido a cambio 8,887 créditos.

Con esta información podemos calcular el Porcentaje de Pago teórico del juego.

$$\%PB = \frac{8887}{9261} = 95.96\%$$

Ya hemos hecho mención al Hold del juego. El Hold (%H) y el % Pago (%RTP) guardan una relación intrínseca y un tanto obvia:

100% - %RTP = %H

El % de Hold lo podemos definir como el porciento teórico del dinero jugado en una máquina que es ganado o retenido por una máquina en particular de manera teórica.

En este caso, a nuestro juego le corresponde un % Hold teórico del 4.04%. Es fácil ver que, una vez que tenemos definida la estructura física del juego (los rieles) si alteramos la tabla de pagos, el cambio lo veremos reflejado en el % de Hold del juego. De esta manera se pueden hacer pequeños ajustes para hacer una tabla de pagos que resulte atractiva a los jugadores.

El siguiente concepto que debemos determinar en nuestro juego es su volatilidad. La volatilidad de un juego la definimos como que tanto se desvía del porcentaje teórico una máquina que ya está en funcionamiento.

Es decir, sabemos que nuestro juego tiene un porcentaje de retorno del 95.96%. Esto obviamente no quiere decir que si llega una persona a jugar 100 créditos, le va a regresar 96.

Lo que quiere decir es que a largo plazo, va a regresar el 96% del dinero que le ingrese, entonces luna pregunta muy natural es ¿qué tan largo es este largo plazo? Este plazo, está determinado por el número de veces que la máquina sea jugada, y no realmente un plazo de tiempo.

Para esto calculamos un Índice de Volatilidad, el cual nos dice que tanto puede diferir el Hold observado del real por una cantidad que depende de la distribución de los pagos y, muy importante, del número de juegos que se han jugado (Hannum & Cabot, 2005). Esta diferencia puede ser considerablemente grande, si el número de juegos jugados es bajo. A medida que aumentamos el número de juegos, el porcentaje de hold observado se acercará más y más al teórico.

El Índice de Volatilidad lo podemos calcular como la desviación estándar del juego en cuestión por el valor apropiado de Z de acuerdo al nivel de confianza que deseamos suponiendo una distribución normal. El nivel de confianza más comúnmente usado en estos casos es del 90%. Sabemos entonces que para un nivel de confianza del 90%, z = 1.645.

De esta manera el Índice de Volatilidad está dado por:

$$IV = z\sigma$$

Por otro lado, la desviación estándar de nuestro juego lo calculamos simplemente como:

$$\sigma = \sqrt{\sum (Pago\ Total_i - VE)^2 P_i}$$

Dónde:

$Pago\ Total_i$ = Pago neto por crédito apostado

$VE =$ Valor Esperado teórico

P_i =Probabilidad de cada Pago Neto

Podemos ver en la siguiente tabla, el cálculo paso a paso del Índice de Volatilidad asociado a nuestro juego.

Tabla 28. Índice de Volatilidad (Cálculo)

A	B	C	D	E	F	G	H
Pago	Pago Neto	Hits	Probabilidad	B x D	B - E	F^2	G x D
0	1	7726	0.834251161	0.834251161	0.166	0.027	0.023
2	-1	756	0.081632653	- 0.081632653	-0.918	0.843	0.069
5	-4	567	0.06122449	- 0.244897959	-3.755	14.101	0.863
10	-9	128	0.013821402	- 0.124392614	-8.876	78.776	1.089
14	-13	50	0.005398985	- 0.070186805	-12.930	167.180	0.903
18	-17	20	0.002159594	- 0.036713098	-16.963	287.753	0.621
100	-99	12	0.001295756	- 0.128279883	-98.872	9775.617	12.667
500	-499	2	0.000215959	- 0.10776374	-498.892	248893.463	53.751
Combinaciones		9261	VE =	0.040384408		Var =	69.985615
						SD	8.3657406
						Índice Volatilidad	**13.76**

Fuente: Cálculos Propios

Este Índice de Volatilidad es sumamente importante ya que nos permite calcular los intervalos de confianza reales del Hold para un cierto número de juegos.

Dichos límites los calculamos de la siguiente forma:

$\mathrm{PB} \pm (\frac{\mathrm{IV}}{\sqrt{\mathrm{n}}} \times 100)$, donde n corresponde al número de juegos estimados.

Podemos ver entonces los intervalos de confianza para distintos números de juegos, como se ve a continuación:

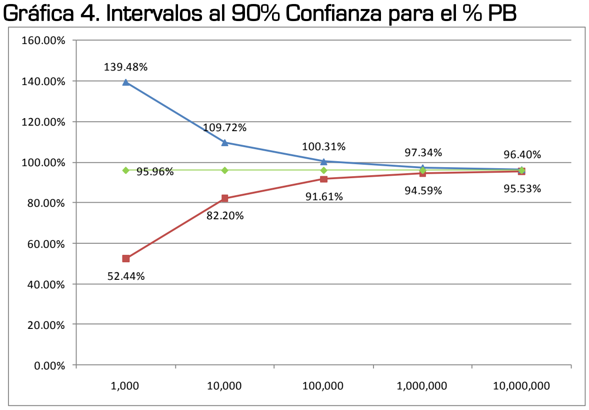
Tabla 29. Intervalos al 90% de Confianza

Juegos (n)	Mínimo	Máximo
1,000	52.44%	139.48%
10,000	82.20%	109.72%
100,000	91.61%	100.31%
1,000,000	94.59%	97.34%
10,000,000	95.53%	96.40%
100,000,000	95.82%	96.10%
1,000,000,000	95.92%	96.01%

Fuente: Cálculos Propios

De esta manera, mientras n crece la diferencia entre los límites superior e inferior se vuelve cada vez menor. Gráficamente esto podemos verlo de la siguiente manera:

Gráfica 4. Intervalos al 90% Confianza para el % PB



Fuente: Cálculos Propios

De acuerdo a esta gráfica, para nuestro juego en cuestión se requieren al menos un millón de juegos para asegurar que nuestro hold real pueda encontrarse entre un 94.59% y un 97.34% con un 90% de confiabilidad. Antes de ese número de juegos, podemos encontrar que el resultado real del juego pudiera encontrarse muy por arriba o muy por abajo del esperado 95.96% teórico.

Esta información resulta de gran utilidad porque nos provee una herramienta que nos permite analizar si los pagos realizados por una determinada máquina se pueden considerar "normales" o no. En la práctica, es muy común ver preocupación acerca del comportamiento de ciertas máquinas. Con "comportamiento" nos referimos a una percepción meramente subjetiva de un exceso (o, porque no, una falta) de pagos de una máquina en particular. Al contar con esta información podemos evaluar, con cierto nivel de confianza matemática y emitir un juicio de valor. Es decir si es necesario revisar con detenimiento una máquina que pudiera presentar un desperfecto o una falla de configuración, o si el exceso (o falta) de pagos de dicha máquina que ha atraído la atención pudiese ser considerado aún dentro de los rangos aceptables.

Esta información en general es la más relevante con respecto a las terminales. La transición de mecánicas a electrónicas consiste en la activación de muchas más posiciones virtuales que las que son posibles en un artefacto mecánico, pero la matemática es la misma. Es decir, podemos construir físicamente un cilindro que contenga 15 o posiciones; no así uno de 65 posiciones, o uno asimétrico con 65 posiciones en el primer rodillo, 85 en el segundo y 46 en el tercero. Mecánicamente esto sería imposible. Sin embargo, si es posible "virtualmente". Más aún, podemos agregar rodillos virtuales y usar cinco en lugar de tres. Estos dos últimos, de 100 posiciones cada uno.

De esta manera se puede obtener un nuevo juego que en lugar de 21^3 = 9261 combinaciones tengamos un juego con 65(85)(46)(100)(100) = 2'541,500,000 combinaciones posibles. Este mapeo virtual altera totalmente las probabilidades del riel mecánico original pero las bases para calcular paso a paso el % de Hold del juego y su Índice de Volatilidad permanecen idénticas.

Es aquí donde se diferencian las terminales mecánicas de las electrónicas, con el uso de un procesador electrónico que genere números aleatorios a los que les corresponde una única posición virtual que a su vez le corresponde una única posición física de los rieles (ya sean electromecánicos o totalmente de video).

La esencia es la misma, solo que el modelo se vuelve más elaborado a medida que los diseñadores de juegos buscan nuevas formas de ofrecer productos que satisfagan el gusto de los clientes. Además, el incremento en el número de combinaciones posibles permite ofrecer premios cada vez más atractivos (coloquialmente llamados *jackpots*).

Los rieles mecánicos estaban limitados a que el evento más raro ocurriera, digamos una vez cada 1000 juegos si se trataba de 3 rieles con 10 posiciones cada. Ahora con los rieles virtuales se pueden ofrecer premios más grandes ya que suponen que el pago de esos premios gigantescos ocurrirá una vez cada X millones de juegos, dependiendo del número de posiciones virtuales que se ocupen.

Si a eso, agregamos el hecho de que en general se ha hecho la transición de 3 rieles a 5 rieles, la cantidad de combinaciones posibles supera fácilmente las mil millones de posibles combinaciones (5 rieles, 65 posiciones virtuales de un total de 65^5=1'160,290,625 posibles combinaciones distintas).

4.2. Análisis

Trabajar en una empresa con poco más de 10,000 terminales electrónicas de juego, de diversos proveedores y características distintas implica recibir enormes cantidades de información de las mismas. Para analizar tal cantidad de información es necesario procesarla y presentarla de forma tal que permita sacar conclusiones certeras, rápidas y efectivas.

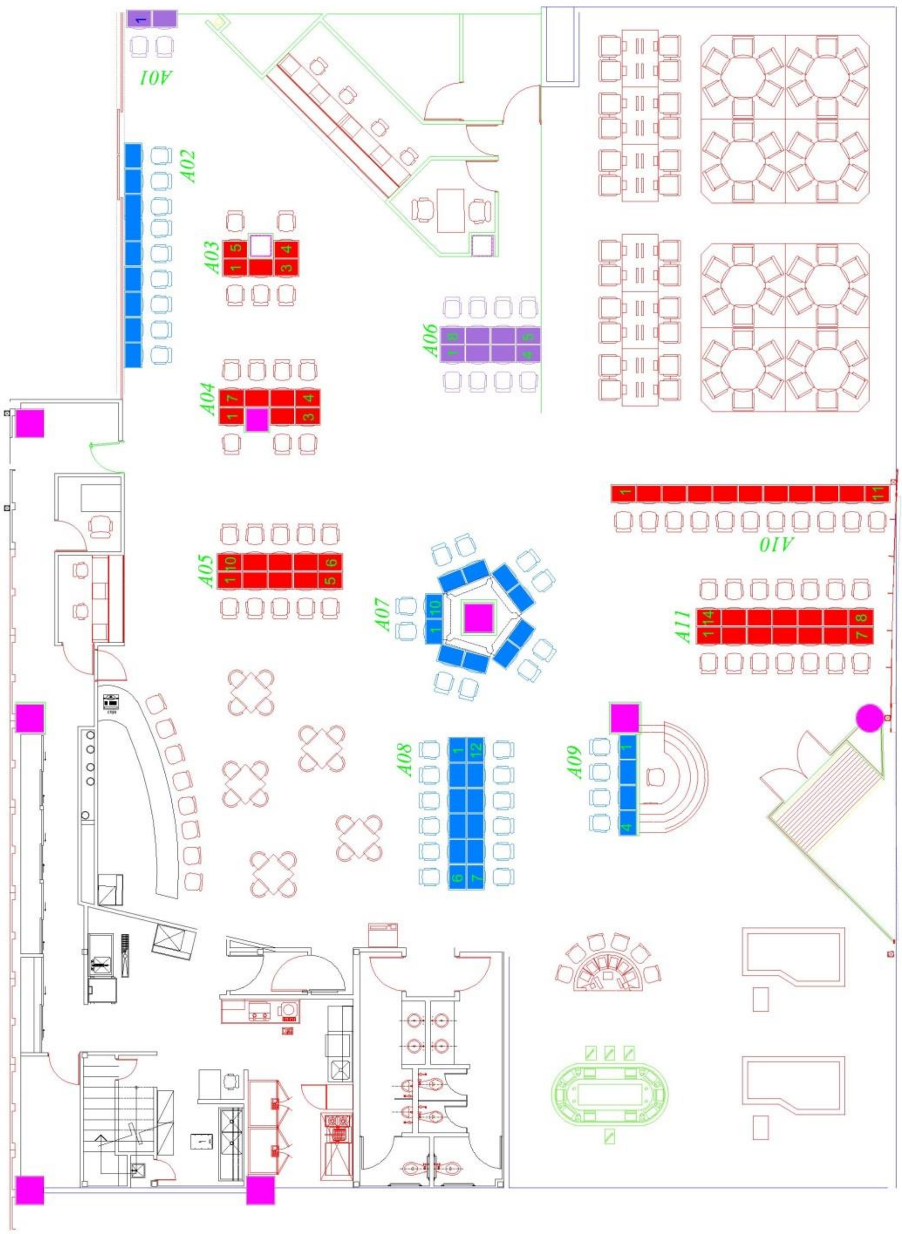
Para poder analizar la información presentada es importante entender el entorno en el que se está operando.

Llamamos Sala de Juego a aquel establecimiento en donde tenemos instaladas diversas terminales electrónicas de juego.

Antes de comenzar con un análisis es importante conocer el entorno de nuestro producto a analizar. El aspecto inicial es determinar de qué manera se van a colocar las terminales en el piso. Se acostumbra llamarle isla o banco a un conjunto de terminales que comparten un espacio común. Esto permite agruparlas de una manera estética y agradable pare el jugador que las va a utilizar.

Dado un local donde vamos a instalar terminales de juego se busca maximizar el espacio para colocar los productos. Podemos tener islas pequeñas o grandes, circulares, pegadas a una pared, etc. La distribución dependerá enteramente de la estructura del lugar, ya que, aun cuando el enfoque de nuestro análisis está centrado en el juego electrónico debemos recordar que la misma sala de juego puede tener un servicio de restaurante y/o bar, sala de bingo tradicional, escenario de espectáculos, área de apuestas deportivas, etc. y todos forman parte del negocio.

Ilustración 5. Ejemplo de una Sala de Juego



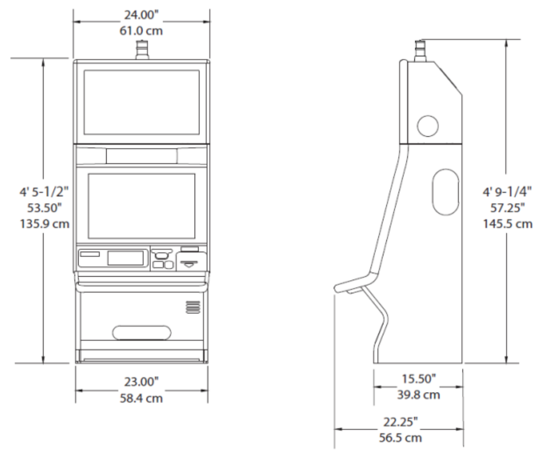
Para identificar las islas, lo más habitual es nombrarlas de manera ordenada con un código alfanumérico por ejemplo A01, A02, A03, etc. A veces hay salas muy grandes con áreas perfectamente distinguibles entre unas y otras, por lo cual conviene usar letras iniciales distintas para separar áreas. Entonces podemos tener islas A01, A02, o B12 o C06. Lo siguiente es identificar terminal por terminal de acuerdo al número de terminales que se encuentren en una isla. De esta manera podemos identificar la terminal A0310, la cual correspondería a la décima posición de la isla 3 del área A. Ahora, lo más probable es que prácticamente cualquier sala tenga la terminal 1 de la isla A01. Si estamos analizando datos concentrados de todas las terminales, ¿cómo diferenciar entre la que está en Acapulco con la que está en Querétaro? Podemos asignar entonces claves que identifiquen a la sala en cuestión, es decir, asignamos las letras AC para abreviar Acapulco y QR para Querétaro. De ésta manera tendríamos la terminal identificada como ACA0101 o la QRA0101, a la cual le corresponderán atributos distintos de cada terminal y que nos permitirán analizarlas correctamente.

En cuanto a los atributos generales que podemos estudiar en estas terminales tenemos: proveedor, ubicación (por ejemplo: si pertenecen o no al área donde se permite fumar), denominación, tema o juego, Es tanta la oferta y variedad que existe, que a veces, incluso, hace diferencia el gabinete sobre el cual está montado un juego y eso queremos analizarlo también.

El gabinete es el módulo físico de la máquina y existen de distintos tipos. Los más comunes son los llamados *slant* y los *upright* (y aún entre ellos puede haber más clasificaciones).

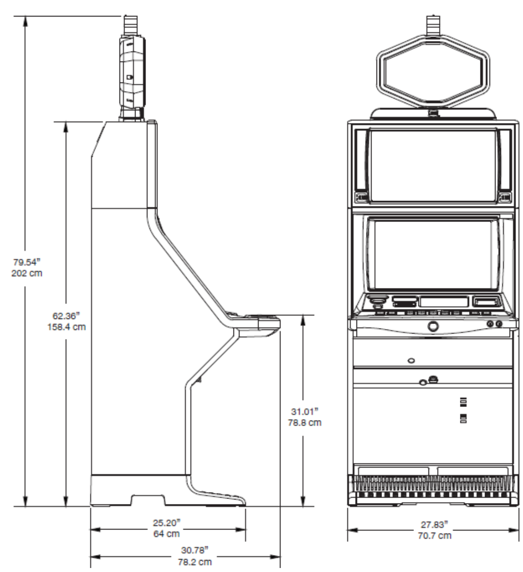
Las terminales *upright* son las que casi todo mundo asocia inmediatamente al mencionar una máquina tragamonedas. Son terminales altas, con la pantalla quedando directamente enfrente del jugador.

Ilustración 6. Terminal Electrónica tipo *Upright*



Por otra parte, las tipo *slant* se caracterizan por ser más bajas, y más anchas, las cuales permiten al jugador una posición más cómoda.

Ilustración 7. Terminal Electrónica tipo *Slant*



Una vez que tenemos una sala operando, se recopila información diariamente que sirve como la materia prima de donde hacer los análisis y reportes correspondientes. Esta información se obtiene sala por sala y terminal por terminal mediante sistemas informáticos especializados los cuales permiten la consulta de la información que registra electrónicamente cada máquina.

Un ejemplo de la presentación de la información base que podemos recibir de estos sistemas, misma que posteriormente utilizaremos para presentar los análisis correspondientes se presenta en la Ilustración 4. Los sistemas informáticos de la red de dinero que proveen esta información tienen una gran variedad de reportes que podemos consultar, ya que concentran la información en grandes bases de datos. Uno de los reportes que más nos interesa es el llamado Reporte de Beneficio por Terminal. Es decir, dada una sala y un cierto periodo de tiempo que nosotros definimos, nos devuelve los siguientes campos de Información:

- Terminal
- Juego o Tema
- Apuesta Promedio
- Total de Apuestas
- Total de Pagos
- Días (de Operación)
- Beneficio
- Promedio Diario (de Beneficio)
- % Pago (Payback) Real
- % (Payback) Teórico

Ilustración 8. Ejemplo de Reporte de Beneficio por Terminal

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Terminal	Juego	Apu. Prom.	Apuestas	Pagos	Jack Pot	Días	Beneficio	Prom. Diario	% Real	% Teo		
2	LXA0101	Globos	1.75	98,659.21	91,280.10	0.00	29	7,379.11	254.45	92.52	94.00		
3	LXA0102	Globos	3.20	148,294.31	136,868.90	0.00	28	11,425.41	408.05	92.30	94.00		
4	LXA0103	Globos	1.77	84,145.95	75,883.50	0.00	29	8,262.45	284.91	90.18	94.00		
5	LXA0104	Globos	2.65	207,050.88	187,576.00	0.00	29	19,474.88	671.55	90.59	94.00		
6	LXA0105	Globos	1.93	81,427.69	68,524.60	0.00	29	12,903.09	444.93	84.15	94.00		
7	LXA0106	Globos	1.89	94,411.85	87,041.30	0.00	28	7,370.55	263.23	92.19	94.00		
8	LXA0107	Globos	7.70	133,281.30	123,810.58	0.00	23	9,470.72	411.77	92.89	94.00		
9	LXA0108	Globos	27.20	340,544.52	338,215.60	0.00	24	2,328.92	97.04	99.32	94.00		
10	LXA0109	Globos	17.90	386,845.50	379,406.40	0.00	26	7,439.10	286.12	98.08	94.00		
11	LXA0110	Globos	24.33	250,724.18	237,288.83	0.00	25	13,435.35	537.41	94.64	94.00		
12	LXA0201	Loto	12.95	215,829.00	194,230.27	0.00	29	21,598.73	744.78	89.99	94.00		
13	LXA0202	Loto	10.18	74,535.00	69,654.03	0.00	29	4,880.97	168.31	93.45	94.00		
14	LXA0203	Loto	9.39	154,703.00	160,228.98	0.00	25	-5,525.98	-221.04	103.57	94.00		
15	LXA0204	Mexico	7.71	89,598.00	81,903.51	0.00	28	7,694.49	274.80	91.41	94.00		
16	LXA0205	Mexico	5.74	66,055.00	62,072.22	0.00	28	3,982.78	142.24	93.97	94.00		
17	LXA0206	Mexico	14.09	126,495.50	116,452.91	0.00	29	10,042.59	346.30	92.06	94.00		
18	LXA0207	Heroe	10.38	110,052.00	115,908.91	0.00	27	-5,856.91	-216.92	105.32	94.00		
19	LXA0208	Heroe	10.81	137,102.00	129,884.58	0.00	29	7,217.42	248.88	94.74	94.00		
20	LXA0209	Heroe	11.18	80,665.00	83,925.01	0.00	27	-3,260.01	-120.74	104.04	94.00		
21	LXA0210	Heroe	12.35	33,110.00	29,898.00	0.00	26	3,212.00	123.54	90.30	94.00		
22	LXA0401	Gatos	5.59	510,121.50	488,214.85	0.00	29	21,906.65	755.40	95.71	94.00		
23	LXA0402	Gatos 2	4.01	189,938.20	174,499.00	0.00	29	15,439.20	532.39	91.87	94.00		
24	LXA0403	Noahs Ark	3.86	193,273.55	175,453.60	0.00	29	17,819.95	614.48	90.78	94.00		
25	LXA0404	Gatos 2	2.84	145,741.45	132,482.00	0.00	29	13,259.45	457.22	90.90	94.00		
26	LXA0405	Tesoros	4.39	85,028.05	84,828.00	0.00	28	200.05	7.14	99.76	94.00		

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Este reporte contendrá tantos registros como terminales haya operando en sala. A partir de estos datos, y de acuerdo a como los agrupemos y presentemos podemos obtener análisis de gran importancia:

- Análisis de Islas
- Análisis de Temas
- Análisis de Denominaciones
- Análisis por Proveedor

El reporte de Beneficio por terminal no contiene toda la información de los juegos en cuestión. Sin embargo, el analista debe contar con la información de inventario y configuración que corresponden a cada terminal y es conveniente incorporarlo a los registros que se van a analizar.

Análisis de Islas

Este es uno de los análisis clave para cualquier sala. Una vez que tenemos los datos, procedemos a obtener subtotales. De acuerdo al nombre de la terminal podemos saber a qué isla pertenece. Entonces conviene agruparlas y considerar cada isla como un solo ente para comparar el desempeño entre unas y otras.

Así, para cada isla en cuestión podemos obtener el Total de Apuestas (llamado también Volumen de Juego), Pagos y Beneficio, las cuales consisten simplemente en la suma de las Apuestas, Pagos y Beneficio de cada una de las terminales que forman parte de una isla.

Del total de apuestas y de la apuesta promedio podemos estimar un dato que bastante importante: el número de juegos o *spins*. Los *spins* los obtenemos de dividir el total de apuestas entre la apuesta promedio.

De esta manera, teniendo el total de *spins* de una isla, podemos dividir el total de apuestas entre el total de *spins* y obtener la apuesta promedio por isla.

Es muy útil identificar los indicadores promedio (o por terminal). Nos interesa saber la Apuesta por Terminal (AxT), el Beneficio por Terminal (BxT o WPU de *win per unit*) y los Juegos o *Spins* por Terminal (SxT). Claramente AxT resulta de dividir el Total de Apuestas de una isla entre el número de terminales que hay en la isla. De la misma forma podemos calcular BxT y SxT. Es importante aclarar que estos indicadores, aunque sus nombre no lo indiquen, son también por día, es decir AxT es la Apuesta por Terminal **por Día**; entonces para obtener la AxT correcta también debe ir dividida entre el número de días.

Esto mismo lo podemos calcular para la totalidad de las terminales en una sala. Así obtenemos el AxT, BxT y SxT promedio de una sala. Esto nos sirve para saber que tanto se encuentre el AxT, BxT y SxT de cada isla con respecto al promedio general y así poder hacer clasificaciones de islas. Es decir, ver cuales tienen un desempeño por arriba o por debajo del promedio en cada rubro. Muchas veces podemos encontrarnos que cierta isla "se juega mucho" es decir, la cantidad de juegos jugados supera el promedio de la sala, pero su Beneficio no es tan alto como otras islas. Una isla puede ser muy buena en un aspecto pero no tan bueno en otros. ¿Qué debemos hacer en esos casos?

Con los tres datos fundamentales (AxT, BxT y SxT) podemos obtener un indicador global que considere los tres aspectos y de una "calificación final" a la isla. Es decir, dar un promedio ponderado que contemple la apuesta, el beneficio y el número de juegos jugados. El criterio a utilizar puede ser variable. Cada administración puede darle un valor más importante a un concepto o a otro.

Tradicionalmente asignamos 60% de valor al Volumen de Apuestas, un 25% al Beneficio y un 15% al número de *Spins*. De esta manera se obtiene un porcentaje ponderado que permite discriminar rápidamente unas islas de otras.

El mayor peso de la calificación se centra en el total de apuesta. El Beneficio depende del Hold del juego, y, dependiendo de la volatilidad que tenga, puede estar muy alejado del resultado teórico por lo que no necesariamente el mejor indicador para determinar el éxito o no de un juego. Sin embargo, no deja de ser un indicador importante, ya que como todo negocio, se debe llevar control de las ganancias arrojadas por cada máquina.

El número de juegos es importante para determinar la ocupación de un juego, y en cierta medida sirve para medir también el éxito de un juego, pero si la apuesta es muy baja, no necesariamente dará las mejores resultados.

Es por eso que se ponderan estos tres indicadores básicos de cada juego para poder medir el desempeño de manera cuantitativa y cualitativa.

El último apartado que se agrega en este reporte consiste en un Porcentaje de Ocupación. Como su nombre lo indica este consiste en un estimado de que tan ocupada está una terminal. Una constante generalmente aceptada es que en promedio, una terminal electrónica de video rodillos puede jugarse en teoría unas 300 veces en una hora. Sabiendo esto, y el número de horas promedio que está en operando la sala de juegos, podemos comparar el número de *spins* reales contra el teórico y estimar que tan ocupada está una terminal.

Podemos ver en el ejemplo que sigue a continuación una muestra del Análisis por Islas hecha a una sala ficticia, la cual consta de 90 terminales de 3 proveedores distintos. Las 90 terminales están distribuidas en 15 islas de 4, 6 y 8 terminales. Los datos corresponden a un periodo de 29 días y sabemos que la sala está en operación 16 horas al día.

Tabla 30. Caso Práctico de un Análisis de Islas

Análisis por Islas

Del 1 de mayo al 29 de mayo de 2009

Isla	Proveedor	Qty	Apu. Prom.	Apuestas	Pagos	Jack Pot	Beneficio	% Real	Spins	Días	AxT	BxT	SxT	%A	%B	%S	%Pon	%Ocup
														60%	25%	15%		16
Total A01	Proveedor 1	4	2.88	183,086.80	172,898.50	382.90	9,805.40	94.64%	63,552	27	1,695.25	90.79	588.44	-74.92%	-75.07%	-36.10%	-69.14%	12.26%
Total A02	Proveedor 2	6	11.08	2,610,237.50	2,427,108.58	0.00	183,128.92	92.98%	235,508	29	15,001.36	1,052.47	1,353.49	121.90%	189.04%	46.97%	127.45%	28.20%
Total A03	Proveedor 1	4	2.78	71,840.50	66,431.35	0.00	5,409.15	92.47%	25,818	26	690.77	52.01	248.25	-89.78%	-85.72%	-73.04%	-86.25%	5.17%
Total A04	Proveedor 1	4	4.17	326,981.90	307,337.90	0.00	19,644.00	93.99%	78,467	29	2,818.81	169.34	676.44	-58.30%	-53.49%	-26.55%	-52.34%	14.09%
Total A05	Proveedor 2	6	20.25	1,068,074.00	1,036,525.27	0.00	31,548.73	97.05%	52,739	28	6,357.58	187.79	313.92	-5.96%	-48.43%	-65.91%	-25.57%	6.54%
Total A06	Proveedor 1	4	2.69	170,246.70	152,840.70	0.00	17,406.00	89.78%	63,370	27	1,576.36	161.17	586.76	-76.68%	-55.74%	-36.29%	-65.39%	12.22%
Total A07	Proveedor 3	6	2.39	908,741.07	872,894.78	0.00	35,846.29	96.06%	380,917	29	5,222.65	206.01	2,189.18	-22.75%	-43.42%	137.72%	-3.85%	45.61%
Total A08	Proveedor 2	8	19.82	4,708,487.00	4,477,518.39	24,789.00	206,179.61	95.62%	237,534	29	20,295.20	888.71	1,023.85	200.21%	144.07%	11.18%	157.82%	21.33%
Total A09	Proveedor 1	6	2.59	386,047.90	366,586.60	0.00	19,461.30	94.96%	149,166	29	2,218.67	111.85	857.28	-67.18%	-69.28%	-6.91%	-58.67%	17.86%
Total B01	Proveedor 1	8	2.76	549,852.03	517,812.88	0.00	32,039.15	94.17%	199,228	28	2,454.70	143.03	889.41	-63.69%	-60.72%	-3.42%	-53.91%	18.53%
Total B02	Proveedor 2	8	18.03	1,736,236.00	1,606,485.97	0.00	129,750.03	92.53%	96,305	28	7,751.05	579.24	429.93	14.65%	59.08%	-53.31%	15.56%	8.96%
Total B03	Proveedor 1	8	2.92	482,499.02	449,197.33	0.00	33,301.69	93.10%	165,315	26	2,319.71	160.10	794.78	-65.69%	-56.03%	-13.70%	-55.47%	16.56%
Total B04	Proveedor 1	6	4.21	1,170,773.43	1,135,207.26	0.00	35,566.17	96.96%	277,969	29	6,728.58	204.40	1,597.52	-0.47%	-43.86%	73.47%	-0.23%	33.28%
Total B05	Proveedor 2	6	35.40	1,977,645.00	1,864,253.96	0.00	113,391.04	94.27%	55,873	29	11,365.78	651.67	321.11	68.12%	78.97%	-65.13%	50.85%	6.69%
Total B06	Proveedor 3	6	4.02	1,293,984.51	1,216,110.34	0.00	77,874.17	93.98%	321,834	29	7,436.69	447.55	1,849.62	10.00%	22.91%	100.85%	26.86%	38.53%
Total general		90	7.34	17,644,733.36	16,669,209.81	25,171.90	950,351.65	94.61%	2,403,595	29	6,760.43	364.12	920.92	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	19.19%

Análisis por Proveedores

Por su parte, el Análisis por Proveedores es muy similar al de islas. La diferencia radica en reagrupar los datos de una nueva manera. En lugar de obtener los subtotales por isla, los haremos por cada proveedor distinto que tengamos en operación.

Obviamente, el total general debe coincidir exactamente con el total general obtenido en el primer análisis. Igual que en el Análisis por islas, nos interesa saber la Apuesta Promedio, el Beneficio Promedio y los Juegos Promedio que le corresponden a cada proveedor de terminales de juego. Esta información es muy importante desde una vista macroscópica pues nos permite identificar rápidamente los gustos de los clientes en cada sala.

En el ejemplo de la Tabla 30 podemos ver que existen 3 proveedores. Muchas veces nos encontraremos que por razones técnicas, conviene separa un proveedor en dos subclasificaciones y verlos como entes ajenos. En el caso que presento, sucede esto mismo.

Análisis por Denominaciones

Posteriormente tenemos el Análisis por Denominaciones. Ya hemos mencionado con anterioridad que para apostar en las terminales electrónicas se hace por medio de créditos y que a cada crédito se le asigna un valor monetario predefinido. Muchas veces podemos encontrarnos con que ofrecemos un mismo juego, pero con denominaciones distintas. Esto permite ofrecer a los jugadores una amplia variedad de opciones en su nivel de apuestas. Habrá jugadores más "agresivos" o con capacidad de juegos más alta que otros jugadores. No es lo mismo jugar una terminal en la que es posible jugar 100 líneas simultáneamente que tenga un denominación de $0.02 por crédito a una que esté en $0.10. La primera supone una apuesta mínima de $2 mientras que la segunda la requiere de $10. De ahí la importancia de hacer un análisis por denominaciones. Una de las estrategias clave para hacer un piso óptimo, es determinar las necesidades de los clientes. Si los juegos están muy por arriba de su expectativa económica, difícilmente van a ser jugados. Para que un jugador disfrute la experiencia en las terminales electrónicas, debe poder pasar un tiempo razonable jugando. Si su presupuesto es de $200, y cada juego le cuesta $10, el peor escenario posible es que juegue 20 veces sin ganar absolutamente nada. Un caso así no figura como entretenimiento.

De esta manera, se presenta el análisis por denominaciones, igual que los anteriores análisis solo que los subtotales están basados en las diferentes denominaciones disponibles en los juegos. Para el caso particular que estamos estudiando, se hizo el análisis solo en un subconjunto de las terminales totales, más concretamente a las del Proveedor 1 ya que es aquel en el que nos interesa afinar la cuestión de las denominaciones ofrecidas.

Al Análisis de Denominaciones le agregué un apartado en donde defino de manera teórica la distribución adecuada de cada denominación de acuerdo a su prevalencia actual. Éste resulta de comparar el porcentaje de piso (%P) que ocupa cada denominación en la sala con el porcentaje que cada denominación aporta al volumen total de apuestas(%A), para posteriormente equilibrarlos a todos para que la relación %P / %A sea igual a 1.

Tenemos entonces que para cada denominación:

$$\%P_{denom} = \frac{\#\ \text{Terminales}_{denom}}{\sum \text{Terminales}}$$

$$\%A_{denom} = \frac{Apuesta\ Total_{denom}}{\sum Apuestas}$$

$$Ratio = \frac{\%A}{\%P}$$

$$Terminales\ Teóricas = \frac{(Apuesta\ Total_{denom})(\sum \text{Terminales})}{\sum Apuestas} = \%A_{denom}(\sum \text{Terminales})$$

Esta herramienta ha servido para ajustar

Análisis por Terminal

Esta parte del análisis puede considerarse como la más exhaustiva ya que nos permite observar el desempeño de cada terminal, una a una, comparándola contra el promedio de todas ellas. Este análisis es particularmente importante porque al poner la información teórica del juego nos permite observar si el comportamiento de una máquina se puede considerar normal o no. Recordemos que en una de las secciones anteriores mencionamos el concepto del % de Hold Teórico de un juego. En este momento es cuando comparamos el Hold Real del juego es decir el observado en el periodo y lo comparamos contra el teórico. De acuerdo a la información obtenida del PAR Sheet podemos evaluar el desempeño individual de las terminales, lo cual nos sirve para identificar potenciales malas configuraciones.

Un aspecto muy importante que podemos considerar en este análisis es el Beneficio por terminal Teórico de una máquina. A diferencia del BxT que calculamos de la manera habitual, ya que tenemos la información de la configuración de cada máquina, dado un volumen de apuesta fijo podemos calcular cual es el beneficio que en teoría debimos haber recibido con esa máquina. Ya que la volatilidad del juego hará que en la realidad la máquina diste un poco el % de Hold Real del Teórico, un beneficio por terminal relativamente bajo podría hacernos creer que tal o cual máquina no es rentable, sin embargo si calculamos el BxT Teórico podemos contar con más información para tomar decisiones pertinentes.

El BxT Teórico simplemente se calcula de la siguiente manera:

$$\text{BxT}_{\text{Teórico}} = (1 - \%Teo)(\text{AxT})$$

El conjunto de estos Análisis nos permite evaluar de manera integral una sala en particular. La decisiones que se tomen a partir de esto afectaran el desempeño futuro de esta sala. Será necesario continuar con estos análisis periódicamente para poder determinar si los cambios realizados tuvieron las consecuencias deseadas o no.

Muchas veces es posible realizar ajustes con una alta rapidez y una alta facilidad, por ejemplo los cambios de denominaciones en juego. Cambios de juego, sustitución de máquinas son cambios que no son necesariamente tan inmediatos. Sin embargo, cualquier que sea el cambio que se realice en una sala, se debe monitorear cuidadosamente para poder evaluar el antes y el después.

Resultados del Análisis

Una vez que se tiene el panorama completo de los juegos, el paso siguiente es sacar las conclusiones correspondientes.

Constantemente llegan al mercado nuevos juegos de los diversos fabricantes así como nuevos fabricantes. Hay una fuerte competencia por la colocación de los productos dentro de cada casino. Hay un interés mutuo entre el operador y el fabricante por tener los mejores juegos en piso a disposición de los clientes y el análisis de los resultados de los juegos son una parte fundamental para poder tomar decisiones de los juegos que hay que cambiar, agregar o retirar.

Adicionalmente, es importante completar las conclusiones obtenidas de los resultados numéricos con la experiencia presencial de los casinos. En la medida que se integra el conocimiento que se obtiene del análisis con la experiencia de campo, es como se pueden ir obteniendo los mejores resultados.

5. Conclusiones

Hasta hace algunos años pensar en establecimientos en México en donde la gente pudiera tener acceso a los populares juegos de azar comúnmente vistos en las películas, hubiera sido solo parte de más ficción. Sin embargo, ahora es una realidad.

Los expertos en la materia coinciden en decir que esta industria, en México, está aún en pañales. Hay mucho por hacer y el mercado potencial es enorme. Debido a esto es fundamental contar con profesionistas preparados para comprender los juegos que les permitan tomar decisiones acertadas.

Hay un delicado equilibrio en los juegos que ofrecen rentabilidad a la casa y alterar eso puede traer consecuencias catastróficas como se puede leer en numerosos casos al respecto. Casi todos esos casos se pueden atribuir a un desconocimiento de los fundamentos matemáticos de los juegos.

Como en cualquier industria, el conocimiento técnico es fundamental. La experiencia que se adquiere gradualmente, aunado al entendimiento del producto que se vende son requisitos esenciales para desarrollar profesionistas dedicados y altamente productivos.

La profundización del estudio y análisis de los juegos de azar puede resultar en casos muy interesantes para aquellos con gusto por las Matemáticas. Actualmente en el mundo, la mayoría de los matemáticos y actuarios que han encontrado un camino profesional en la industria del juego, lo hacen en las grandes empresas que diseñan y fabrican estos juegos. Es gente dedicada enteramente el diseño de nuevos, más complejos y sofisticados modelos matemáticos.

En paralelo, ha surgido también el interés, en México y en el mundo de integrar profesionistas, incluyendo a los actuarios para analizar la información derivada de las operaciones de los juegos y tomar decisiones con respecto a la colocación de productos. Me parece fascinante que, por un lado se tengan equipos de matemáticos y actuarios diseñando los juegos, especialmente los de las Terminales Electrónicas de Apuestas, y, posteriormente, otros grupos de matemáticos y actuarios, analizando los resultados. Estos últimos equipos tanto del lado de los casinos como de lado de los fabricantes de los juegos.

La industria del juego es un campo de trabajo real que la gente en su mayoría desconoce. No es el mercado tradicional de trabajo para un actuario, pero no por eso es menos adecuado, al contrario, me parece que es un mercado de trabajo ideal para un actuario.

De principio a fin, las Matemáticas están involucradas en la industria del juego y la experiencia profesional que he ido adquiriendo es invaluable. Hay mucho trabajo que hacer y con las herramientas adquiridas en mi preparación profesional estoy convencida que mi desarrollo profesional, y porque no, el de otros actuarios en este campo estará lleno de retos y logros.

6. Referencias

Barboianu, C. (2009). *Probability Guide to Gambling.* INFAROM.
David, F. (1955). Studies in the History of Probability and Statistics I. Dicing and Gaming (A Note on the History of Probability). *Biometrika , 42*, 1-15.
García Secades, M. (2005). Probabilidad Filosófica y Moral: Las Primeras Contribuciones a la Idea de lo Probable. *Estadística Española , 47* (160), 567-599.
Gollehon, J. (1994). *All About Keno.* Grand Rapids, Michigan, EUA: Gollehon Publishing Co.
Grochowski, J. (1998). *The Casino Answer Book.* Chicago, IL, USA: Bonus Books, Inc.
International Game Technology. (2005). Introduction to Slots and Video Gaming. Las Vegas, Nevada, USA.
Keno Payout Percentages. (31 de enero de 2007). Recuperado el 9 de Enero de 2010, de http://www.johnph77.com/math/kenopct.html
Kilby, J., Fox, J., & Lucas, A. (2005). *Casino Operations Management.* Hoboken, New Jersey, EUA: Wiley.
Lehman, R. (2002). *Slot Operations: The Myth and The Math.* EUA: Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming.
Ley Federal de Juegos y Sorteos. (1947). México.
Lotería Nacional. (15 de Enero de 2008). Recuperado el 5 de Enero de 2010, de http://www.lotenal.gob.mx/loteria/loterianacional/historia.jsp
Packel, E. (2006). *The Mathematics of Games and Gambling.* EUA: The Mathematical Assocition of America.
Pronósticos. (5 de Febrero de 2010). Recuperado el 5 de Febrero de 2010, de http://www.pronosticos.gob.mx
Reglamento de la Ley Federal de Juegos y Sorteos. (2004). México.
Shackleford, M. (22 de Abril de 2008). *Chuck a Luck*. Recuperado el 7 de Febrero de 2010, de Wizard of Odds: http://wizardofodds.com/chuckaluck