UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA EN LA DISTRIBUCIÓN DE DIPUTADOS DE REPRESENTACIÓN PROPORCIONAL EN EL DISTRITO FEDERAL

REPORTE DE TRABAJO PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

FÉLIX CRUZ AMAYA

TUTOR:
M. EN C. JOSÉ ANTONIO FLORES DÍAZ

2013

1.Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Cruz
Apellido materno	Amaya
Nombre(s)	Félix
Teléfono	01 777 102 33 71
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de cuenta	073851563
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	M en C
Nombre(s)	José Antonio
Apellido paterno	Flores
Apellido materno	Díaz
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dra
Nombre(s)	María del Pilar
Apellido paterno	Alonso
Apellido materno	Reyes
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Act
Nombre(s)	Jaime
Apellido paterno	Vázquez
Apellido materno	Alamilla
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	M en C
Nombre(s)	María Isabel
Apellido paterno	Escalante
Apellido materno	Membrillo
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	M en I
Nombre(s)	Mónica Iliana
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	Zaragoza
7. Datos del trabajo escrito.	7. Datos del trabajo escrito
Título	Aplicación de la programación matemática en la distribución de Diputados de Representación Proporcional
Subtitulo	
Número de páginas	55 p
Año	2013

APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA EN LA DISTRIBUCIÓN DE DIPUTADOS DE REPRESENTACIÓN PROPORCIONAL EN EL DISTRITO FEDERAL

I N D I C E

INTRODUCCIÓN

El Instituto Electoral del Distrito Federal (IEDF) es la institución autónoma del Distrito Federal encargada de la organización de los procesos electorales, de la capacitación ciudadana en los valores que sustentan la democracia y de fomentar el ejercicio de su participación en los diferentes niveles. En particular, el proceso electoral tiene varias etapas que son: preparación de la elección, jornada electoral, cómputo, resultados de la elección y declaración de validez.

Dentro de esta última que se inicia al concluir el cómputo de cada elección y concluye con la entrega de las constancias de mayoría, se encuentra la tarea de la determinación del número de diputados de representación proporcional que le corresponden a cada partido político basado principalmente en el número de votos obtenidos por cada uno de éstos en el proceso electoral.

La Asamblea Legislativa del Distrito Federal (ALDF) se integra por 66 diputados, 40 de estos son elegidos por mayoría de votos en cada uno de los también 40 distritos electorales que conforman el Distrito Federal y los 26 restantes son distribuidos entre los partidos políticos que participaron en la contienda electoral, atendiendo criterios de proporcionalidad entre el total de votos obtenidos por dichos partidos políticos y el número de diputados que deberían alcanzar con el total de votos en el Distrito Federal.

Ahora bien, es posible que los 40 diputados de mayoría relativa se concentren en pocos partidos políticos debido a que algunos de éstos tienen mayor fuerza electoral, inclusive ello ha conducido a que algunos de los partidos no alcancen ningún triunfo en los distritos electorales.

Entonces, cada partido político obtuvo un número determinado de triunfos en los 40 distritos electorales, por lo tanto tendrá 1 diputado denominado “de mayoría relativa” en cada uno de los distritos en donde alcanzó la mayoría de votos

La suma de los votos obtenidos por cada partido político en los 40 distritos electorales, constituirán su votación en el Distrito Federal.

Por lo tanto, para cada partido político se puede calcular un porcentaje de votos alcanzados al nivel del Distrito Federal.

El número de diputados de “representación proporcional” que se asignen a cada partido político (cantidad desconocida) se agregará al número de diputados alcanzados por dichos partidos políticos, obteniéndose el número de diputados totales de cualquier partido político.

Es decir si el número de diputados totales de un partido político lo dividimos entre los 66 diputados de la Asamblea Legislativa del Distrito Federal (ALDF), se obtendrá una proporción de diputados de ese partido.

Se pretende que tanto la proporción de votos obtenida por cada partido sea lo más equivalente a su proporción de diputados.

El presente trabajo pretende demostrar que la programación matemática es el método que puede ofrecer la solución requerida. Aún más, ésta no sólo ofrece un equilibrio mayor entre los porcentajes de votación y de diputados para cada partido político, sino también permite que el conjunto de equivalencias de proporciones de diputados y de votos integrado por todos los partidos políticos constituya la mejor distribución de diputados de representación proporcional conjunta, de tal manera que la suma de las diferencias entre las proporciones de diputados y de votación por cada partido político resulte mínima.

OBJETIVOS

Derivado de lo anterior, los objetivos principales de la asignación entre los partidos políticos de estos 26 diputados adicionales son:

- Que todo partido político esté representado en la ALDF.
- Que la representación anterior sea proporcional a los votos obtenidos por cada partido político en el Distrito Federal.

El primer objetivo tiende a lograrse por el hecho de que para asignar diputados por el principio de representación proporcional se toman en cuenta los votos alcanzados por cada partido político en cada uno de los 40 distritos electorales en que está dividido el Distrito Federal, haya o no obtenido el triunfo en alguno de éstos.

Por lo tanto resulta muy poco probable que un partido político no alcance al menos un diputado de representación proporcional aunque no haya obtenido triunfo alguno en cualquiera de los 40 distritos electorales, aún si la votación obtenida en todos éstos sea muy pequeña.

El segundo objetivo es posible alcanzarlo debido a que el Código de Instituciones y Procedimientos Electorales del Distrito Federal (CIPEDF, en adelante la Ley) establece una serie de condiciones, con objeto de que en la determinación de la distribución de los 26 diputados por el principio de representación proporcional, se propicie una equivalencia entre el porcentaje de diputados en la ALDF por cada partido político y el correspondiente a la votación obtenida por cada uno en el Distrito Federal. Resulta importante aclarar que dentro del porcentaje de diputados en la ALDF, por cada partido político se toman en cuenta también los diputados por el principio de mayoría relativa ganados por cada partido.

Es decir, la suma de los votos en los 40 distritos electorales de cada partido político dividida entre la votación en todo el Distrito Federal (la de todos los partidos políticos) y este cociente multiplicado por 100, constituirá el porcentaje de votación obtenido por cada partido político en el Distrito Federal. Dicho porcentaje de votación es el que se toma en cuenta para distribuir los 26 diputados de representación proporcional.

Ahora bien, respecto al segundo objetivo se señaló que la Ley establece algunas condiciones para propiciar la equivalencia de porcentajes considerados, sin embargo existen otras disposiciones en la misma Ley que obstaculizan la misma, éstas son:

a) De presentarse el caso de que en la elección, algún partido político obtenga la mayoría de triunfos en los 40 distritos electorales y más del 30% de votos en el Distrito Federal, se le asignarán el número de diputados de representación proporcional necesarios para que obtenga la mayoría absoluta en la ALDF. Ésta es la denominada "cláusula de gobernabilidad". Obviamente que esto provoca una desigualdad entre las proporciones ya referidas de diputados y de votos obtenida por ese partido político y por consecuencia a los demás.
b) Otra disposición permite establecer un límite para la sobrerrepresentación de la proporción de diputados respecto a la de los votos obtenidos por cada partido político. Sin embargo, no existe disposición alguna que impida la subrepresentación sin límite de esta misma comparación entre proporciones.

Es evidente que, respecto a la primer deficiencia nada se puede hacer, porque es una imposición política de la Ley, sin embargo sí es posible incidir en la segunda, proponiendo un método de distribución de los diputados de representación proporcional que cumpliendo con la Ley ofrezca un resultado para cada partido político con una equivalencia más precisa entre los porcentajes ya señalados. Ello debido a que si existe una disposición que regule la sobrerrepresentación en la ALDF, justo es que exista otra que se encargue de la subrrepresentación. Sin embargo como esta última no existe, resulta conveniente proponer un método de distribución que considere a la sobre y a la subrrepresentación.

II DISPOSICIONES ESTABLECIDAS EN LA LEY PARA DISTRIBUIR LAS 26 DIPUTACIONES DE REPRESENTACIÓN PROPORCIONAL

Ahora bien, las disposiciones establecidas en la Ley para distribuir los 26 diputados de representación proporcional son las siguientes:

Antes de señalar las disposiciones de la Ley, es necesario definir algunos conceptos, éstos son:

- Votación total emitida, es la suma de todos los votos depositados en las urnas.
- Votación efectiva, es la que resulta de deducir de la votación total emitida, los votos a favor de los partidos políticos que no hayan alcanzado el 2% del total de la votación en el Distrito Federal y los votos nulos.
- Votación ajustada, es la que resulta de deducir de la votación efectiva, los votos de los partidos políticos a los que se les haya asignado diputados de representación proporcional en una primera distribución o por la aplicación de la cláusula de gobernabilidad; adicionalmente, también aplica cuando se deduzcan los votos de los partidos políticos que se les haya disminuido diputados de representación proporcional porque su porcentaje de los mismos por ambos principios alcanzado, sea mayor en 3 puntos porcentuales a su porcentaje de votación en el Distrito Federal.
- Cociente natural: es el resultado de dividir la votación efectiva entre los diputados de representación proporcional por asignar.
- Cociente de distribución: es el resultado de dividir la votación ajustada entre el número de diputados de representación proporcional que falten por distribuir.
- Resto Mayor: es el remanente más alto entre los restos de las votaciones de cada partido político cuando se han asignado diputaciones de representación proporcional por cociente natural o cociente de distribución. Se utilizará cuando aún hubiesen diputaciones por distribuir.

Señalado lo anterior las disposiciones de Ley para la asignación de diputados de representación proporcional son las siguientes:

1. Observar si se presentan las condiciones para aplicar la “cláusula de gobernabilidad”. Si esto es así, se aplica, en caso contrario no se asigna ningún diputado por esta disposición.
2. Con base en las 26 diputaciones de representación proporcional o con las que se encuentren pendientes de distribuir, si es que se actualiza el hecho de que algún partido político obtuvo la mayoría de los triunfos de diputados de mayoría relativa y alcanzó más del 30% de la votación (aplicación de la cláusula de gobernabilidad), se calculará el cociente natural y con éste se determinará el número de diputaciones que corresponderían a cada partido político, conforme al número de veces que dicho cociente se contenga en su votación, aplicando en su caso el resto mayor para distribuir los diputados por representación proporcional faltantes para completar 26.
3. Calcular el porcentaje de diputados por ambos principios tomando en cuenta el número de los mismos que obtuvo de mayoría relativa y de representación proporcional alcanzados según el punto anterior para cada partido político.
4. Calcular el porcentaje de votación alcanzado por cada partido político.
5. Se determinará si de acuerdo con la comparación derivada de los puntos 3 y 4 se actualiza la hipótesis de que el porcentaje de diputados de algún partido, rebase en más de 3% su porcentaje de votación en todo el Distrito Federal. De no ser así, se asignarán a los partidos políticos, las diputaciones resultantes del cálculo.
6. Al partido político que supere el límite del 3% señalado, le serán deducidos del cálculo realizado, el número de diputados de representación proporcional necesarios hasta que se ajuste al límite respectivo, asignándose las diputaciones excedentes a los demás partidos políticos que no se ubiquen en ese supuesto.
7. Para los efectos de lo señalado en el punto anterior, una vez hecha la deducción y determinado el número de diputados a asignar al partido político correspondiente, se realizará nuevamente la distribución con las diputaciones pendientes de asignar entre el resto de partidos políticos, con

base en la votación ajustada y el cociente de distribución y, en su caso, el resto mayor.

III METODOLOGÍA Y RECURSOS EMPLEADOS

La programación matemática utiliza modelos simbólicos para representar un sistema. Éstos son conceptualizaciones abstractas de un problema real con base al uso de letras, números, variables y ecuaciones.

Una de las derivaciones de la programación matemática es la denominada investigación de operaciones (IO), cuyos inicios se remontan a la segunda parte del siglo XVIII.

Dentro de las diversas definiciones de Investigación de Operaciones que es aportada por Churchman, Ackoff y Arnoff y es la siguiente: "La Investigación de Operaciones es la aplicación por grupos interdisciplinarios del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización"[1].

La IO a su vez se constituye por diversos tipos de modelos, entre otros: programación lineal, no lineales, enteros, dinámicos, probabilísticos, de inventarios, de tiempos y movimientos, de líneas de espera y de teoría de juegos.

Se hace notar que los modelos matemáticos de IO que utilizaron sus precursores, estaban basados en el cálculo diferencial e integral, en la probabilidad y en la estadística.

Ahora bien, el inicio de la actividad llamada IO, es atribuible a ciertos servicios militares que se prestaron al inicio de la Segunda Guerra Mundial. Al terminar la guerra, el éxito de la IO en las actividades bélicas generó gran interés debido a las posibilidades de aplicarla en un ámbito distinto al militar. Una vez que la expansión industrial posterior a la guerra siguió su curso, los problemas provocados por el aumento en la complejidad y la especialización de las organizaciones pasaron de nuevo al primer plano. Entonces comenzó a ser evidente para los consultores industriales que habían trabajado con o para los equipos de IO durante la guerra, que los problemas de complejidad y especialización en las organizaciones eran en

[1] Juán Prawda, "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Vol. 1 Editorial Limusa. 1982.

esencia los mismos que los que habían enfrentado en el ámbito militar pero en un contexto diferente.

Como su nombre lo indica, el objetivo de esta disciplina implica “investigar sobre las operaciones”. En consecuencia ésta se aplica a la problemática relacionada con la conducción y la coordinación de actividades en una organización. La IO ha sido aplicada de manera extensa en áreas tan diversas como manufactura, transporte, construcción, telecomunicaciones, planeación financiera, cuidado de la salud, fuerzas armadas y servicios públicos por citar sólo unas cuantas. La gama de aplicaciones es inusualmente amplia.

La IO incluye el término “investigación” porque utiliza un enfoque similar al que se aplica en áreas científicas establecidas. El método científico se utiliza para explorar los diversos problemas que deben ser enfrentados, sin embargo, en ocasiones se emplea “ciencia de la administración” o “administración operacional” como sinónimo de IO o administración operacional.

El proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema, lo cual incluye la recolección de los datos pertinentes.

El siguiente paso es la construcción de un modelo científico –generalmente matemático- con el cual se intenta abstraer la esencia del problema real. En esta etapa se propone la hipótesis de que éste será una representación tan precisa de las características esenciales de la situación, que permitirá que las conclusiones –soluciones- que se obtengan sean válidas también para el problema real.

Después se lleva a cabo la búsqueda de la solución para probar el modelo matemático, para modificarlo si es necesario y para verificarlo en determinado momento, paso que se conoce como “validación del modelo”.

Se puede afirmar que en cierto sentido la IO involucra la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, es más que eso. Ésta se ocupa también de la administración práctica de la organización. Por lo tanto para tener éxito también debe proporcionar conclusiones claras que el tomador de decisiones pueda usar cuando sea necesario.

Otra característica de la IO es su amplio punto de vista. Desde esta perspectiva intenta resolver los conflictos de intereses entre los componentes de la organización de forma que, el resultado sea el mejor para ésta en su conjunto.

Una característica adicional de la IO es que intenta encontrar la mejor solución –llamada "óptima"- para el problema en cuestión. Se considera la mejor solución la cual se encuentra con un método heurístico. Una de las técnicas de la IO es la llamada programación lineal.

La programación lineal

De manera general se aplica a problemas del siguiente tipo: asignar de la mejor manera posible –es decir de forma óptima- recursos limitados a diversas actividades necesarias para el cumplimiento de un objetivo que compiten entre sí por dichos recursos, de tal forma que el resultado de la acción de todas éstas actividades, sea uno de los mejores para la organización a la que pertenecen. Ahora bien, los niveles de actividades que se eligen dictan la cantidad de recursos que consumirán cada una de éstas. La variedad de situaciones a las que se aplica esta descripción es muy grande.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación no se refiere aquí a términos computacionales; en esencia se utiliza como sinónimo de planeación. Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, esta disciplina tiene muchas otras posibilidades.

El problema de distribución de diputados de representación proporcional entre los partidos políticos se puede ajustar al formato de programación lineal, el cual se describirá puntualmente líneas adelante.

La programación lineal dispone de un modelo matemático estándar que representa un tipo generalizado de problemas reales. Aún más, también cuenta con un procedimiento de solución muy eficiente llamado método simplex para resolver este tipo de problemas.

El modelo estándar de la programación lineal

El modelo matemático del problema general de programación lineal es el siguiente:

Maximizar o minimizar (función objetivo) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

Sujeta a las restricciones:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{gathered}$$

Con $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, ... , $x_n \ge 0$

Cualquier situación cuya formulación matemática se ajuste a este modelo es un problema de programación lineal.

En otras palabras:

- La función que se desea maximizar o minimizar es:

  $$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n$$

  es decir, es la función objetivo. Donde las c_j son los coeficientes de las actividades x_j.
- Las $\boldsymbol{m}$ restricciones se representan $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \le b_i$ donde las a_{ij} son los coeficientes de las $\boldsymbol{n}$ actividades x_j de cada una de las restricciones y las b_i son las disponibilidades de los $\boldsymbol{m}$ recursos. Las restricciones también pueden presentarse con desigualdad en sentido mayor o igual es decir:

  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i$$

  o en la siguiente forma:

  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$

  para los diferentes valores de $\boldsymbol{i}$.
- Las restricciones de no negatividad $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, ... , $x_n \ge 0$. Donde las x_j no pueden tomar valores negativos.

Supuestos de la programación lineal

Proporcionalidad.- La proporcionalidad es un supuesto sobre la función objetivo y sobre las restricciones funcionales. La contribución de cada actividad al valor de la función objetivo Z es proporcional al nivel de actividad x_j, como lo representa el término $c_i x_j$ en la función objetivo. De manera similar la aportación de cada actividad al lado izquierdo de cada restricción funcional es proporcional al nivel de actuación de x_j, como lo representa en la misma el término $a_{ij} x_j$.

Aditividad.- Cada expresión de un modelo de programación lineal ya sea la función objetivo o el lado izquierdo de las restricciones funcionales, es la suma de las contribuciones individuales de las actividades respectivas.

Fraccionalidad.- Este supuesto se refiere a los valores permitidos para las variables de decisión. En un modelo de programación lineal estas pueden tomar cualquier valor, incluso no enteros, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad. Como cada variable de decisión representa el nivel de alguna actividad, se supondrá que éstas se pueden realizar en niveles fraccionales.

Certidumbre.- Este supuesto se refiere a los parámetros del modelo, es decir a los coeficientes c_i en la función objetivo, a los a_{ij} en las restricciones funcionales y los b_i en el lado derecho de las mismas. Se supone que los valores asignados a cada parámetro de un modelo de programación lineal son constantes conocidas.

Una limitación importante que impide muchas otras aplicaciones es el supuesto de fraccionalidad. En muchos problemas prácticos las variables de decisión sólo tienen sentido real si su valor es entero. Por ejemplo, con frecuencia es necesario asignar a las actividades cantidades enteras que pueden estar referidas a personas, máquinas, vehículos etc. El presente trabajo es un ejemplo de esos casos ya que no es posible distribuir un número fraccional de diputados de representación proporcional.

Si el hecho de exigir valores enteros es la única diferencia que tiene un problema con la formulación a través de la programación lineal, entonces se trata de un problema de programación entera.

La programación entera

El modelo matemático para la programación entera es muy parecido al de la lineal con la restricción adicional de que las variables deben tener valores enteros. Debido a la afirmación anterior, puede parecer que la solución a problemas de programación entera es sencilla, después de todo, las correspondientes a la lineal se pueden resolver de forma eficiente a través de su modelo estándar y el procedimiento del método simplex; y parece que la única diferencia es que la entera tiene muchas menos soluciones que considerar si se trata de que éstas pertenezcan a una solución factible acotada, lo que significa que existirían un número finito de soluciones de este tipo. En este razonamiento se presentan dos falacias.

La primera es que los números finitos pueden ser también muy grandes lo que acarrea una cantidad enorme de soluciones a considerar.

La segunda falacia es el pensar que si se eliminan algunas soluciones factibles, las no enteras, de un problema de programación lineal resulta entonces más fácil de resolver. Por el contrario, es mucho más sencillo encontrar la solución a problemas de programación lineal que los de programación entera debido a que la primera al considerar todas las soluciones factibles se presenta una condición favorable para alcanzar más rápidamente la solución óptima al problema integral.

Método de bifurcación y acotación

La búsqueda de una solución entera al problema resuelto con la programación lineal se realizará mediante el método de bifurcación y acotación. Éste redondea y acota variables enteras. Se hace de una manera secuencial y lógica, lo cual permite eliminar con anticipación un buen número de soluciones factibles alejadas del óptimo a medida de que se llevan a cabo las iteracciones.

En particular se empleará el algoritmo de Land-Doig, (método empleado para trabajar la programación entera), éste inicia por seleccionar el valor de una de las variables resueltas de un problema por medio de programación lineal, reasignándole a la misma, el valor entero inmediato inferior y por otro lado, el superior. Dicha reasignación de valores las incluye en una restricción adicional al planteamiento de la solución con la programación lineal. Por lo tanto se resolverán dos nuevos problemas, cada uno con uno de ellos con uno de los valores antes descritos. Una vez resueltos, aquella solución cuya función objetivo sea “mejor” ya sea en términos de maximizar o minimizar según sea el caso y sea factible, será la bifurcación que se seleccione para repetir el procedimiento hasta que todas las variables tengan un valor entero con su valor objetivo óptimo.

Es decir, cada vez se seleccionará una variable diferente y se repetirá el procedimiento hasta ir convirtiendo cada variable fraccional inicial en entera hasta completarlas todas, en ese momento se concluirá y el valor de la función objetivo será el óptimo.

IV DESARROLLO DEL TRABAJO

Antes de describir el planteamiento del problema, resulta necesario señalar que el presente trabajo se realizó con los resultados de la votación del proceso electoral del año 2009 efectuado en el Distrito Federal. Además se llevó a cabo como una propuesta metodológica para que pueda ser aplicada a los procesos posteriores, mientras las condiciones sigan siendo las mismas, esto es, que la Ley no se modifique (en este caso se realizarían las adecuaciones necesarias) y las condiciones específicas tampoco.

Se considera además, que la conceptualización desarrollada es aplicable a una situación complicada de la realidad.

A.- Situación problemática enfrentada

En el proceso electoral del Distrito Federal del año 2009 se admitía la existencia de ocho partidos políticos, los cuales tenían un carácter nacional y por Ley se les tenía reconocida su personalidad jurídica en el Distrito Federal.

Cada partido político recibió una determinada cantidad de votos distribuidos en los 40 distritos electorales. Si el candidato o la candidata de un determinado partido recibió un número mayor de votos que los demás en un distrito, dicho partido a través de su candidato obtuvo una diputación por el principio de mayoría relativa, esto es la correspondiente al distrito electoral en el que obtuvo dicha mayoría. De esta manera se distribuyeron (por mayoría de votos en cada distrito electoral) entre los partidos, 40 de los 66 diputados de la Asamblea Legislativa del Distrito Federal (ALDF). A estos diputados se les denomina hasta la actualidad “diputados por el principio de mayoría relativa”.

Los otros 26 llamados “diputados por el principio de representación proporcional” deben distribuirse entre los partidos políticos tomando en cuenta dos factores: la votación obtenida por cada partido político del total de votos válidos en el Distrito Federal y por el número de diputados de mayoría relativa alcanzados por cada uno de estos. Ahora bien, para esta distribución debe procurarse la equivalencia de las proporciones de la votación obtenida del total en el Distrito Federal y la correspondiente a la del número de diputados alcanzados por partido político por ambos principios del total de los diputados de la ALDF. Es decir, se pretende que las siguientes fracciones sean lo más iguales posibles:

$$\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} \quad \text{vs} \quad \frac{VPi}{VTE} \qquad \text{donde:}$$

$\mathrm{DMRP_i}$: representa el número de diputados de mayoría relativa obtenidos por el partido político $\boldsymbol{i}$.

$\mathrm{DRP_i}$: representa el número de diputados de representación proporcional para el partido político $\boldsymbol{i}$ (cantidad que se desea conocer).

66 = total de diputados de la ALDF conformados por 40 de mayoría relativa y 26 de representación proporcional.

$\mathrm{VP_i}$: número de votos totales obtenidos por el partido político $\boldsymbol{i}$ en los 40 distritos electorales que integran el Distrito Federal.

VTE : votación total efectiva en el Distrito Federal, es decir, la suma de los votos válidos de todos los partidos políticos. En esta cantidad no se incluyen los votos nulos, los cuales no pueden ser identificados para algún partido político ni los votos del partido político que no haya alcanzado el 2% de la votación total en el Distrito Federal.

Además en el planteamiento del problema se deben tomar en cuenta las siguientes restricciones establecidas en el Código de la materia.

- Ningún partido político debe tener más de 40 diputados por ambos principios, esto es $\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i} \leq 40$ para $i \in 1, 2, \ldots, 8$ donde i son los partidos políticos.
- Entre todos los partidos políticos se distribuyen las 26 diputaciones por el principio de representación proporcional, esto es:

$$\sum_{i=1}^{8} \mathrm{DRP_i} = 26$$

- Se debe considerar en el planteamiento del problema que, la proporción de diputados por ambos principios obtenidos por un partido político del total de la ALDF no sea mayor de 3 puntos porcentuales de la proporción de la votación alcanzada por el mismo partido político de la votación total efectiva.

  Es decir,

$$\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} - \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} \leq 0.03$$

Condiciones desequilibrantes

Resulta necesario señalar nuevamente que en la propia Ley existen algunas condiciones que no solo no abonan a la pretendida equidad entre las proporciones de votos y de diputados que se han citado, sino que propician lo contrario entre dichas proporciones, éstas son:

1.- En primer lugar destaca la existencia de la llamada “cláusula de gobernabilidad”, su aplicación consiste en la presentación necesaria de dos situaciones a la vez:

- Si un partido político obtiene la mayor cantidad de triunfos en los 40 distritos electorales, es decir, la mayor cantidad de diputados de mayoría relativa comparado con cada uno de los demás partidos políticos y
- Obtiene al menos el 30% de la votación efectiva en el Distrito Federal.

Entonces se le asignarán de antemano de los 26 diputados de representación proporcional a distribuir, los necesarios para que sumados a los de mayoría relativa que ganó, alcance la mayoría absoluta en la ALDF por ambos principios. Es decir, 34 ya que el total de diputados en la ALDF son 66. Esto es:

$$\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP}_i^* = 34 \text{ para } i \in 1, 2, \ldots, 8$$

Donde DRP_i^* son los diputados de representación proporcional **necesarios** para completar la mayoría absoluta de diputados en la ALDF.

En caso de presentarse las dos condiciones antes señaladas se aplica la cláusula de gobernabilidad, lo cual distorsiona mayormente para ese partido político en particular y para los demás en consecuencia, la pretendida equivalencia de

$$\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} \cong \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}}$$

2.- Como ya se señaló, la Ley establece que la proporción de diputados por ambos principios no debe exceder en 3 puntos porcentuales a la proporción de votos obtenidos por un partido político del total en el Distrito Federal, es decir:

$$\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} - \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} \leq 0.03$$

Sin embargo, no estipula un límite para la diferencia contraria, o sea que la proporción de votos obtenida por un partido político sea mayor a la proporción de diputados por ambos principios del total de los mismos en la ALDF, esto es:

$$\frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} - \frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} \leq k$$

donde a $\boldsymbol{k}$ la Ley no le impone ninguna restricción a su valor, sin embargo se deduce que no puede ser mayor a 1.

De los dos puntos anteriores se desprende que, la Ley tiene disposiciones que no atienden integralmente la equidad que se pretende entre proporciones de diputados y de votos por cada partido político.

Derivado de ello, en el presente trabajo como se señaló en el capítulo 1 de Objetivos, se procurará el equilibrio entre $\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i} \;/\, 66$ y $\mathrm{VP_i} \,/\, \mathrm{VTE}$ para cada partido político independientemente de cuál de estos valores sea mayor.

Por otro lado y considerando que esto tiene una gran importancia, se realizará el planteamiento de tal manera que la <u>suma</u> del conjunto de diferencias de esta última pretendida equivalencia de cada partido, sea lo menor posible con el objeto de encontrar mejores soluciones colectivas para la distribución de diputados de representación proporcional.

Resulta importante mencionar que antes de realizar el presente trabajo, se propusieron las modificaciones necesarias a la Ley con objeto de que se eliminaran los artículos en los cuales se manifiestan las contradicciones en la búsqueda de la equidad entre proporciones de votos y diputados incluidas en el procedimiento para la distribución de los correspondientes a los de representación proporcional. Estas propuestas no se atendieron, sin embargo si se hubiera hecho, no se presentarían situaciones tan desequilibradas. Sin embargo seguiría prevaleciendo la situación de encontrar la mejor distribución de diputados de representación proporcional, de tal manera de que las proporciones de votos y de diputados de cada partido político fueran lo mas semejantes posibles.

B. Planteamiento del Problema

1. Función objetivo

El problema se plantea en términos de la optimización de la distribución de diputados de representación proporcional entre los partidos políticos, que junto con los de mayoría relativa alcanzados por cada uno de éstos, minimicen la suma de las diferencias entre las proporciones de diputados por ambos principios alcanzados por cada partido político con las de la votación total efectiva que obtuvo cada uno del total de la misma, expresado de otra manera, se trata de

Minimizar : $$\sum_{i=1}^{8}((DMRP_i + DRP_i)/66) - VP_i/VTE)$$

El objetivo de este trabajo es hacer evidente que la solución óptima de este problema puede obtenerse al plantearlo mediante un modelo matemático propio de la programación lineal y programación entera, ambas incluidas en la investigación de operaciones.

En la expresión matemática propuesta que representa la función objetivo se muestra un gran problema, el cual consiste en que para cada partido político se desconoce cuál fracción es mayor entre:

$$\frac{\mathrm{DMRP_i + DRP_i}}{66} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}}$$

Si se analiza la función objetivo, puede observarse que al realizar la suma se podrían anular unas cantidades con otras, ya que la expresión

$$\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} - \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}}$$

resultaría para algunos partidos una cantidad positiva y en otros negativa, no permitiendo con ello una medición absoluta, lo cual demerita la efectividad de la función objetivo.

Lo que se necesita resolver entonces es cómo conocer la cuantificación total absoluta de esas diferencias.

Dada la situación recién descrita, es posible emplear las propiedades del valor absoluto, para resolver la función objetivo.

El valor absoluto de un número $\boldsymbol{a}$ es denotado con el símbolo $|\boldsymbol{a}|$ y es la distancia que existe entre $\boldsymbol{a}$ y 0 en la recta numérica real. Las distancias siempre son positivas o cero.

Derivado de ello, una propiedad del valor absoluto es:

$$|x| \leq y \quad \text{implica que} \quad x \leq y \ \text{ y } -x \leq y$$

Por lo tanto, si cada diferencia absoluta de porcentajes por partido político entre $\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i} \ / 66$ y $\mathrm{VP_i} / \mathrm{VTE}$ se considera menor a un cierto número y_i, es decir,

$$\left| \frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} - \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} \right| \leq y_i$$

donde y_i es la diferencia entre los porcentajes de votos y de diputados del partido i

Entonces, aplicando la propiedad del valor absoluto, se tiene:

$$\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} - \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} \leq y_i \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} - \frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} \leq y_i$$

Por lo tanto la función objetivo del problema real se puede expresar como:

$$\text{MIN} \quad Z = \sum_{i=1}^{8} y_i$$

Lo que significa minimizar la suma de las diferencias positivas entre las fracciones de diputados obtenidos por cada partido político i del total de los 66 diputados por ambos principios y las fracciones de votos obtenidos por cada partido político del total de votos efectivos del Distrito Federal.

Por lo tanto cada diferencia entre las fracciones de votos y de diputados para cada uno de los 8 partidos políticos sería en términos absolutos positiva y se sumarían. Por lo tanto, se trataría de minimizar la suma de las y_i (diferencias), es decir:

$$\text{MIN} \quad Z = \sum_{i=1}^{8} y_i$$

2. Restricciones

Como se consideró en la descripción del problema real, se tienen que tomar en cuenta las restricciones impuestas por la Ley. Su inclusión en el planteamiento del problema es:

1.- Resulta necesario en el planteamiento del problema que aquí se presenta y para que la función objetivo posea el significado que se le atribuye, el plantear como restricciones, las diferencias absolutas entre los porcentajes de diputados que se pueden obtener y los correspondientes a la votación efectiva y viceversa alcanzada por cada partido político. Esto es:

a) $$\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} - \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} \leq y_i \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} - \frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} \leq y_i$$

Donde: ***i*** representa a cualquiera de los 8 partidos políticos, por lo tanto $i \in 1, 2, \ldots, 8$

2.- Ningún partido político debe alcanzar más de 40 diputados por ambos principios.

Dado que la variable que representa a los diputados de mayoría relativa del partido "i" es $\mathrm{DMRP_i}$ y la correspondiente a los de representación proporcional es $\mathrm{DRP_i}$, entonces esta restricción se puede plantear de la siguiente manera para cualquier partido político "i":

$$\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i} \leq 40 \qquad i \in 1, 2, \ldots, 8$$

3.- Entre todos los partidos políticos o coaliciones participantes se distribuyen las 26 diputaciones por el principio de representación proporcional.

Esta restricción se puede representar de la siguiente manera

$$\sum_{i=1}^{8} \mathrm{DRP_i} \leq 26$$

donde $i \in 1,2,\ldots,8$ es cualquier partido político participante. Cabe hacer notar que las coaliciones actúan como si fueran un solo partido político.

4.- Se procurará que la fracción convertida en proporción de diputados por ambos principios obtenidos por un partido político de los 66 diputados de la ALDF no sea mayor de 3 puntos porcentuales de la proporción de la votación alcanzada por el mismo partido político de la votación total efectiva.

Esta restricción puede ser representada de la siguiente manera para cada partido político:

$$y_i \leq 0.03 \text{ para } i \in 1,2,\ldots,8$$

3. Planteamiento del problema general en términos de la programación lineal

Función Objetivo MIN $Z = \sum_{i=1}^{8} y_i$

Sujeto a:

- $\frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} - \frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} \leq y_i$ y $\frac{\mathrm{VP_i}}{\mathrm{VTE}} - \frac{\mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i}}{66} \leq y_i$
- $\sum_{i=1}^{8} \mathrm{DMRP_i} + \mathrm{DRP_i} \leq 40$
- $\sum_{i=1}^{8} \mathrm{DRP_i} \leq 26$
- $y_i \leq 0.03$
- $y_i \geq 0$
- $DRP_i \geq 0$

C.- Aplicación

En el proceso electoral del año 2009 se obtuvieron las siguientes votaciones por partido político en todo el Distrito Federal:

Partido Político	Votación alcanzada
Partido Revolucionario Institucional (PRI)	489 722 votos
Partido Verde Ecologista de México (PVEM)	277 771 votos
Partido del Trabajo (PT)	316 818 votos
Partido Acción Nacional (PAN)	603 860 votos
Partido Nueva Alianza (PNA)	114 941 votos
Partido Social Demócrata (PSD)	73 603 votos
Convergencia (CONV)	73 156 votos
Partido de la Revolución Democrática (PRD)	784 433 votos
Votación total efectiva en el Distrito Federal	**2 734 304**

El número de diputados por el principio de mayoría relativa ($\mathrm{DMRP_i}$) ganados por cada partido político fueron:

Partido Político	Diputados por el principio de mayoría relativa ganados
Partido Revolucionario Institucional (PRI)	0
Partido Verde Ecologista de México (PVEM)	0
Partido del Trabajo (PT)	1
Partido Acción Nacional (PAN)	9

Partido Político	Diputados por el principio de mayoría relativa ganados
Partido Nueva Alianza (PNA)	0
Partido Social Demócrata (PSD)	0
Convergencia (CONV)	0
Partido de la Revolución Democrática (PRD)	28

Estos valores serán aplicados en el planteamiento del problema de tal manera que a cada $DMRP_i$, se le sustituirá por su valor verdadero. Como se aprecia la suma de los diputados de mayoría relativa recién planteados totaliza 38, los otros dos diputados para completar los 40 los obtuvieron el PT y el PRD a través de una candidatura común. En este caso esos dos diputados podrían ser asignados a cada partido político sin embargo, si esto ocurriera se entendería que habría 42 diputados de mayoría relativa. Por lo tanto para efectos de la distribución de diputados de representación proporcional se considerará que se disputaron 38 candidaturas de mayoría relativa. Por lo tanto el planteamiento del problema se realizará con 38 diputados por el principio de mayoría relativa y 26 por el principio de representación proporcional, los cuales suman 64.

Ahora bien, resulta necesario decidir si se aplica la denominada cláusula de gobernabilidad.

El Partido de la Revolución Democrática (PRD) fue el que más triunfos de diputados de mayoría relativa obtuvo siendo éstos 28. Sin embargo no alcanzó el 30% de la votación del Distrito Federal ya que:

La votación del PRD fue de 784 433 y la votación total efectiva del Distrito Federal 2 734 304

$$784\ 433 / 2\ 734\ 304 = 0.2868 < 0.30$$

Es decir, aunque el PRD fue el partido que más triunfos obtuvo de diputados de mayoría relativa, no alcanzó el 30% de la votación efectiva por lo tanto en el proceso electoral del año 2009, no se aplicó la denominada cláusula de gobernabilidad.

Para un mejor reconocimiento de las variables, a partir de este momento la variable DRP_i, será sustituida por la que represente a los diputados de representación proporcional por cada partido político en específico. Esto es:

Variable que representa a los diputados de representación proporcional del partido político	
DRP_1	PRI
DRP_2	PVEM
DRP_3	PT
DRP_4	PAN
DRP_5	PNA
DRP_6	PSD
DRP_7	Convergencia
DRP_8	PRD

Por lo tanto, el planteamiento del problema en términos de programación lineal y con los datos correspondientes es:

$$\text{MIN} \quad Z = \sum_{i=1}^{8} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8$$

Sujeto a:

- Primer conjunto de restricciones

  - $\frac{489722}{2734304} - \frac{DRP_1}{64} \leq y_1$
  - $\frac{DRP_1}{64} - \frac{489722}{2734304} \leq y_1$

- $\frac{277771}{2734304} - \frac{DRP_2}{64} \leq y_2$
- $\frac{DRP_2}{64} - \frac{277771}{2734304} \leq y_2$

- $\frac{316818}{2734304} - \frac{1+DRP_3}{64} \leq y_3$
- $\frac{DRP_3}{64} - \frac{316818}{2734304} \leq y_3$

- $\frac{603860}{2734304} - \frac{9+DRP_4}{64} \leq y_4$
- $\frac{9+DRP_4}{64} - \frac{603860}{2734304} \leq y_4$

- $\frac{114941}{2734304} - \frac{DRP_5}{64} \leq y_5$
- $\frac{DRP_5}{64} - \frac{114941}{2734304} \leq y_5$

- $\frac{73603}{2734304} - \frac{DRP_6}{64} \leq y_6$
- $\frac{DRP_6}{64} - \frac{73603}{2734304} \leq y_6$

- $\frac{73156}{2734304} - \frac{DRP_7}{64} \leq y_7$
- $\frac{DRP_7}{64} - \frac{73156}{2734304} \leq y_7$

- $\frac{784433}{2734304} - \frac{28+DRP_8}{64} \leq y_8$
- $\frac{28+DRP_8}{64} - \frac{784433}{2734304} \leq y_8$

- Segundo conjunto de restricciones
  - PRI: $0 + DRP_1 \leq 40$

- PVEM: $0 + DRP_2 \leq 40$
- PT: $1 + DRP_3 \leq 40$
- PAN: $9 + DRP_4 \leq 40$
- PNA: $0 + DRP_5 \leq 40$
- PSD: $0 + DRP_6 \leq 40$
- CONV: $0 + DRP_7 \leq 40$
- PRD: $28 + DRP_8 \leq 40$

En este grupo de restricciones es importante señalar lo siguiente: resulta innecesario el planteamiento para todos los partidos políticos de esta restricción, excepto para el PRD. Esto obedece a que este partido obtuvo un número de triunfos suficientemente grande (28), que sumados a los que pudiera haber tenido por representación proporcional (26), excedería a los 40 diputados permitidos por la Ley. Esto no sucedió con los demás partidos políticos, debido a que el que le siguió en diputados ganados por mayoría relativa fue el PAN con 9, en el supuesto que este hubiera obtenido los 26 diputados de representación proporcional en disputa, hubiera alcanzado 35. Por lo tanto el conjunto de restricciones inmediatas anteriores se reduce a:

$28 + DRP_8 \leq 40$ o lo que es lo mismo $DRP_8 \leq 12$

Aún mas, en el PRD se presenta la condición siguiente en los porcentajes de diputados y de votación:

$$\begin{aligned} \frac{28 + DRP_8}{64} - \frac{784433}{2734304} &= 0.4375 + 0.0156\, DRP_8 - 0.2868 \\ &= 0.1507 + 0.0156\, DRP_8 \end{aligned}$$

Esto significa que aún sin asignar algún diputado de representación proporcional al PRD, éste tiene poco más del 15% de porcentaje adicional de diputados que del correspondiente al de votos, lo que excede con mucho al 3% permitido por la Ley.

Es decir, tampoco es necesario hacer explícita la restricción $\mathrm{DRP}_8 \leq 12$ lo que deriva en que esta se elimina del planteamiento del problema.

Por lo tanto, el procedimiento de distribución de diputados mediante el planteamiento presentado, seguramente no le asignará ningún diputado al PRD, dado que no cumple con la restricción de que su porcentaje de diputados no sea mayor en 3% al correspondiente de votación.

Tercera restricción

$$\sum_{i=1}^{8} \mathrm{DRP_i} = \mathrm{DRP_1} + \mathrm{DRP_2} + \mathrm{DRP_3} + \mathrm{DRP_4} + \mathrm{DRP_5} + \mathrm{DRP_6} + \mathrm{DRP_7} + \mathrm{DRP_8} = 26$$

Cuarta restricción

$$y_1 \leq 0.03,\ y_2 \leq 0.03,\ y_3 \leq 0.03,\ y_4 \leq 0.03$$

$$y_5 \leq 0.03,\ y_6 \leq 0.03,\ y_7 \leq 0.03,$$

Quinta restricción

$$y_i \geq 0$$

Sexta restricción

$$DRP_i \geq 0$$

No se establece la restricción de $y_8 \leq 0.03$, porque el PRD no podría cumplirla ya que sólo con los diputados de mayoría relativa sobrepasa en más de 15% a su porcentaje de votos.

Ahora bien, el primer conjunto de restricciones debe desarrollarse debido a que en el mismo están planteadas algunas operaciones, realizando éstas se tiene el siguiente conjunto equivalente de restricciones, el cual será empleado para correr el programa de programación lineal.

$$y_1 + 0.0156\, DRP_1 \geq 0.1791$$
$$\mathrm{y}_1 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_1 \geq -0.1791$$
$$\mathrm{y}_2 + 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq 0.1015$$
$$\mathrm{y}_2 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq -0.1015$$
$$\mathrm{y}_3 + 0.0156\ \mathrm{DRP}_3 \geq 0.1002$$
$$\mathrm{y}_3 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_3 \geq -0.1002$$
$$\mathrm{y}_4 + 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq 0.0802$$
$$\mathrm{y}_4 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq -0.0802$$
$$\mathrm{y}_5 + 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq 0.0420$$
$$\mathrm{y}_5 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq -0.0420$$
$$\mathrm{y}_6 + 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq 0.0269$$
$$\mathrm{y}_6 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq -0.0269$$
$$\mathrm{y}_7 + 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq 0.0267$$
$$\mathrm{y}_7 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq -0.0267$$
$$\mathrm{y}_8 + 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq 0.1507$$
$$\mathrm{y}_8 - 0.0156\ \mathrm{DRP}_2 \geq 0.1507$$

D.- Solución

Para encontrar la solución, se utilizará el programa de cómputo denominado “LINDO”. [2]

1. **Búsqueda de la solución a través de la programación lineal**

Este programa requiere la información precisa para llevar a cabo los diversos cálculos correspondientes al método simplex de la programación lineal, el cual es exhaustivo y por lo tanto bastante largo requiriendo gran atención para no cometer errores en las iteracciones que realiza.

El programa realmente es muy amigable ya que prácticamente viene siendo la estructura matemática del planteamiento para aplicar el método simplex en la programación lineal.

La información que el programa LINDO solicita es una expresión matemática clara de la función objetivo y de cada una de las restricciones o condicionantes del problema.

Un planteamiento equivocado del mismo no conduciría a una solución lógica y efectiva. En el caso de presentarse lo anterior o de propiciarse contradicciones en el mismo, el programa LINDO enviará un mensaje de NO FACTIBILIDAD en la solución.

Para cada una de las variables de decisión el programa una vez aplicado ofrece valores, los cuales son los que se están buscando, además presenta otro que cuantifica a la función objetivo en los términos planteados, es decir, si se trata de maximizar o minimizar.

Si se realiza el ejercicio de sustituir los valores de las variables de decisión en las expresiones que representan las condicionantes del problema, se llega a la conclusión de que se cumple con todas y cada una de dichas restricciones.

Ahora bien, con el empleo de este programa el cual tiene una aplicación específica a problemas de programación lineal se tiene los primeros resultados:

La solución óptima se encontró en la iteracción 15

Valor de la función objetivo:

[2] LINDO Versión 6.1 de mayo de 2003

0.3017

Variable	Valor
y_1	0.03
y_2	0.03
y_3	0.03
y_4	0.03
y_5	0.0041
y_6	0.0269
y_7	0
y_8	0.1507

Los valores de las variables de decisión son

DRP_1	9.557693
DRP_2	4.583333
DRP_3	4.500000
DRP_4	3.217949
DRP_5	2.429487
DRP_6	0
DRP_7	1.711538
DRP_8	0

Como se aprecia, los valores obtenidos del número de diputados de representación proporcional que le corresponderían a cada partido político no son enteros y resulta imprescindible que lo sean dado que no es posible que se asigne un número fraccional de estos a los partidos políticos.

Ante esto, se empleará la programación entera, la cual presenta resultados enteros en las variables que representan los valores que se desean conocer. Uno de los métodos de la programación entera es el de bifurcación y acotación.

2. Búsqueda de la solución a través de la programación entera

Método de bifurcación y acotación

El método de bifurcación y acotación redondea y acota variables enteras, resultantes de la solución de los problemas lineales correspondientes.

Este proceso de acotamiento y redondeo se hace de una manera secuencial, lógica y heurística que permite eliminar con anticipación un buen número de soluciones factibles alejadas del óptimo a medida que se itera. En el presente trabajo se aplicará entonces el algoritmo de Land-Doig para variables enteras. El algoritmo se publicó en 1960

Algoritmo de Land-Doig

El primer algoritmo desarrollado de bifurcación y acotación lo presentaron Land y Doig. El nombre se lo dieron posteriormente Little, Murty, Sweeney y Karel. El algoritmo en cuestión fue modificado más tarde por Dakin, que lo hace un poco más general. A continuación se presenta dicho algoritmo, suponiendo que se maximiza o minimiza la función objetivo.

- Paso 1. Resuélvase el problema entero por medio del método simplex de programación lineal. Si la solución es entera para todas las variables, pare, se ha conseguido la solución óptima. Si no, continúe al paso 2.
- Paso 2. Escójase arbitrariamente una variable entera x_j cuyo resultado en el paso 1 sea fraccional e igual a x_{bj}
- Paso 3. Resuélvase un par de nuevos problemas, similares al problema anterior, pero uno con la restricción adicional $x_j \le \left[x_{bj} \right]$ mientras que el otro tendrá la restricción adicional $x_j \ge \left[x_{bj} \right] + 1$ donde $\left[x_{bj} \right]$ es el entero próximo menor a x_{bj}.
- Paso 4. De los programas lineales resueltos en el paso 3, inclúyase en el análisis a seguir, sólo aquellos programas cuya solución entera o fraccional sea mejor (mayor en el caso de maximización y menor en el caso de minimización) a cualquiera de las soluciones enteras conocidas.

- Paso 5. Selecciónese aquel programa lineal que tenga el máximo o mínimo (según el caso) de la función objetivo. Si todas las variables enteras tienen valor entero, se ha conseguido la solución óptima. Si no, regrésese al paso 2 con la estructura del problema lineal resuelto en este paso.

Antes de la aplicación del algoritmo de programación entera, se presenta el planteamiento base utilizado en la solución obtenida del problema con la programación lineal, para obtener los valores de las variables de decisión. A dicho planteamiento se les agregará paulatinamente las nuevas restricciones de conformidad con el algoritmo anterior, observando después de cada agregado, si la solución es factible, el comportamiento del valor de la función objetivo y lo más importante si las variables de decisión se van convirtiendo en enteras, hasta que todas lo sean. Dicho planteamiento es el siguiente:

MIN $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8$

ST $y_1 + 0.0156DRP_1 \geq 0.1791$

$y_1 - 0.0156DRP_1 \geq -0.1791$

$y_2 + 0.0156DRP_2 \geq 0.1015$

$y_2 - 0.0156DRP_2 \geq -0.1015$

$y_3 + 0.0156DRP_3 \geq 0.1002$

$y_3 - 0.0156DRP_3 \geq -0.1002$

$y_4 + 0.0156DRP_4 \geq 0.0802$

$y_4 - 0.0156DRP_4 \geq -0.0802$

$y_5 + 0.0156DRP_5 \geq 0.0420$

$y_5 - 0.0156DRP_5 \geq -0.0420$

$y_6 + 0.0156DRP_6 \geq 0.0269$

$y_6 - 0.0156DRP_6 \geq -0.0269$

$$y_7 + 0.0156DRP_7 \geq 0.0267$$

$$y_7 - 0.0156DRP_7 \geq -0.0267$$

$$y_8 + 0.0156DRP_8 \geq -0.1507$$

$$y_8 - 0.0156DRP_8 \geq 0.1507$$

$$DRP_1 + DRP_2 + DRP_3 + DRP_4 + DRP_5 + DRP_6 + DRP_7 + DRP_8 \leq 26$$

$$y_1 \leq 0.03$$

$$y_2 \leq 0.03$$

$$y_3 \leq 0.03$$

$$y_4 \leq 0.03$$

$$y_5 \leq 0.03$$

$$y_6 \leq 0.03$$

$$y_7 \leq 0.03$$

$$DRP_1, DRP_2, DRP_3, DRP_4, DRP_5, DRP_6, DRP_7, DRP_8 \geq 0$$

Para una mejor apreciación, la solución del problema aplicando la programación lineal, aunque ya se mostró, se presentará en el ANEXO.

1.-Aplicando el algoritmo anterior al resultado de la corrida en la que únicamente se utilizó la programación lineal, se tiene lo siguiente: se escoge arbitrariamente una de las variables por ejemplo DRP_1 la cual está asociada al PRI. Obsérvese que esta variable obtuvo el valor de 9.557693 en la solución del problema lineal anterior. Ahora bien, <u>empleando la estructura de este problema</u> en el cual resultó el valor descrito a este partido, se plantean dos nuevos problemas a saber, esto es, para incluir la primera nueva restricción se aplica lo siguiente, si $x_j \leq [xb_j]$ como se señala en el algoritmo y para el caso que se trata, dicha x_j será DRP_1, entonces sustituyendo los valores se tiene DRP_1 ≤ 9, por lo tanto la nueva restricción a incluir en la estructura del primer problema sería $DRP_1 + DRP_{1a}$ = 9 aplicando el mismo razonamiento pero para $DRP_1 \geq [x_{bj}]+1$, la nueva restricción del segundo problema a resolver será $DRP_1 - DRP_{1a} = 10$. Como se aprecia, en cada nuevo problema se ha definido DRP_{1a} como la nueva variable de holgura para alcanzar la igualdad, en un caso con 9 y en el otro con 10.

Al correr el programa LINDO la solución del primer problema resultó no factible.

La no factibilidad obedeció a que no es posible que en el mismo planteamiento de solución del problema con la programación entera, se cumpla con las siguientes dos restricciones si la variable DRP1 toma el valor de 9:

y_1 + 0.0156 DRP_1 ≥ 0.1791 y $y_1 \leq 0.03$

Lo anterior es así, ya que si se despeja y_1 de la primera desigualdad, el valor que se obtiene de ésta es que es mayor de 0.0387, lo que se contrapone con la segunda desigualdad que es $y_1 \leq 0.03$.

Por lo tanto, se corre el programa con la estructura alterna la cual contiene como agregado la restricción DRP_1 - DRP_{1a} = 10

El resultado del segundo problema es:

La solución del problema se encontró en la iteracción 14.

Valor de la función objetivo

0.3017

Variable	Valor
y_1	0.0074
y_2	0.03
y_3	0.03
y_4	0.03
y_5	0
y_6	0.0269

y_7	0.0267
y_8	0.1507

Los resultados obtenidos son:

DRP_1	11.0064
DRP_2	4.5833
DRP_3	4.5000
DRP_4	3.217946
DRP_5	2.692308
DRP_6	0
DRP_7	0
DRP_8	0
DRP_{1a}	1.0064

Por lo tanto por ser ésta una solución factible, se selecciona esta segunda estructura que conlleva la restricción adicional $DRP_1 - DRP_{1a} = 10$ al problema inicial planteado.

Como se aprecia, ninguna de las variables de decisión es entera, por lo que se continúa con el proceso.

Resulta necesario aclarar que las restricciones adicionales se van acumulando al planteamiento original.

2.- Continuando con lo establecido por el algoritmo Land-Doig se selecciona ahora la variable DRP_5 asociada al PNA, la cual en la solución del problema anterior tuvo un valor de 2.692308.

Por lo tanto se tiene el siguiente par de problemas a resolver:

El primero con la restricción adicional de $DRP_5 + DRP_{5a} = 2$ y el segundo con $DRP_5 - DRP_{5a} = 3$.

La nueva variable de holgura para completar la igualdad en ambos problemas será DRP_{5a}.

Al resolver el primer problema, el resultado fue:

La solución del problema se encontró en la iteracción 15.

Valor de la function objetivo:

0.3017

Variable	Valor
y_1	0
y_2	0.03
y_3	0.03
y_4	0.0266
y_5	0.0108
y_6	0.0269
y_7	0.0267
y_8	0.1507

DRP_1	11.480770
DRP_2	4.583333
DRP_3	4.5
DRP_4	3.435897
DRP_5	2
DRP_6	0
DRP_7	0
DRP_8	0
DRP_{1a}	1.480770
DRP_{5a}	0

Al resolver el segundo problema se tiene:

Valor de la función objetivo

1) 0.3113

VARIABLE	VALOR
y_1	0.0122
y_2	0.03
y_3	0.03
y_4	0.03
y_5	0.0048
y_6	0.0269
y_7	0.0267
y_8	0.1507
DRP_1	10.698718
DRP_2	4.583333
DRP_3	4.5
DRP_4	3.217949
DRP_5	3
DRP_6	0
DRP_7	0
DRP_8	0
DRP_{1a}	0
DRP_{5a}	0

Al resolver el segundo problema, la variable DRP_5 aunque es factible y resulta también con valor entero, el valor de la función objetivo es 0.3113 el cual es mayor al obtenido en la solución del primer problema, es decir, 0.3017. Recuérdese que en el presente caso se trata de minimizar el valor de la función objetivo. Por lo tanto, se seleccionará la primer estructura, es decir, la que incluye al planteamiento base la restricción adicional de $DRP_5 + DRP_{5a} = 2$.

3.- Se selecciona ahora la variable DRP_2, asociada al PVEM, la cual hasta la solución del problema anterior tenía el valor de 4.583333 por lo tanto se tiene el siguiente par de problemas a resolver:

El primero con la restricción adicional de $DRP_2 + DRP_{2a} = 4$ y el segundo con la correspondiente $DRP_2 - DRP_{2a} = 5$.

Al resolver el primer problema, el resultado es no factible.
La no factibilidad obedeció a que no es posible que en el mismo planteamiento de solución del problema con la programación entera, se cumpla con las siguientes dos restricciones cuando DRP_2 toma el valor de 4:

$y_2 + 0.0156DRP_2 \geq 0.1015$ y $y_2 \leq 0.03$

Lo anterior es así, ya que si se despeja y_2 de la primera desigualdad, el valor obtenido de ésta es que es mayor de 0.0391, lo que se contrapone con la segunda desigualdad que es $y_2 \leq 0.03$.

Al resolver el segundo problema el resultado es:
La solución del problema se encontró en la iteracción 13

Valor de la función objetivo

1) 0.3017

Variable	Valor
y_1	0.0231
y_2	0

y_3	0
y_4	0
y_5	0.0143
y_6	0.0269
y_7	0.0267
y_8	0.1507
DRP_1	10
DRP_2	6.506410
DRP_3	4.5
DRP_4	3.217949
DRP_5	1.775641
DRP_6	0
DRP_7	0
DRP_8	0
DRP_{1a}	0
DRP_{5a}	0.224359
DRP_{2a}	1.506410

Dada la factibilidad de la solución, se selecciona la segunda estructura.

4.- Se selecciona ahora la variable DRP_3 asociada al PT, la cual hasta la solución del problema anterior tenía el valor de 4.5, por lo tanto se plantea la solución de los dos problemas siguientes:

El primero con la restricción $DRP_3 + DRP_{3a} = 4$ y el segundo con $DRP_3 - DRP_{3a} = 5$.

En ambos casos la nueva variable de holgura será DRP_{3a}.

Al resolver el primer problema el resultado fue no factible.

La no factibilidad obedeció a que no es posible que en el mismo planteamiento de solución del problema con la programación entera, se cumpla con las siguientes dos restricciones si la variable DRP_3 toma el valor de 4:

$y_3 + 0.0156DRP_3 \geq 0.1002$ y $y_3 \leq 0.03$

Lo anterior es así, ya que si se despeja y_3 de la primera desigualdad, el valor que se obtiene de ésta es que es mayor de 0.0378, lo que se contrapone con la segunda desigualdad que es $y_3 \leq 0.03$.

Al resolver el segundo problema el resultado es:

La solución del problema se encontró en la iteracción 12.

Valor de la función objetivo

0.3017

Variable	Valor
y_1	0.0231
y_2	0.0143
y_3	0
y_4	0.03
y_5	0.03
y_6	0.0269
y_7	0.0267
y_8	0.1507
DRP_1	10
DRP_2	5.589744
DRP_3	6.423077
DRP_4	3.217949
DRP_5	0.769231
DRP_6	0
DRP_7	0

DRP_8	0
DRP_{1a}	0
DRP_{5a}	1.230769
DRP_{2a}	0.589743
DRP_{3a}	1.423077

Los resultados anteriores son producto de tomar en cuenta las restricciones agregadas hasta este momento.

Por lo tanto se selecciona esta estructura, es decir con la restricción adicional de: $DRP_3 - DRP_{3a} = 5$.

5.- Se selecciona ahora la variable DRP_4, asociada al PAN, la cual en la solución del problema inmediato anterior resultó con el valor de 3.217949 por lo tanto se plantean los dos siguientes problemas a resolver:

El primero con la restricción adicional de $DRP_4 + DRP_{4a} = 3$ y el segundo con $DRP_4 - DRP_{4a} = 4$.

Al tratar de resolver el primer problema, se obtuvo una solución no factible.
La no factibilidad obedeció a que no es posible que en el mismo planteamiento de solución del problema con la programación entera, se cumpla con las siguientes dos restricciones si la variable DRP_4 toma el valor de 3:

$y_4 + 0.0156DRP_4 \geq 0.0802$ y $y_4 \leq 0.03$. Lo anterior es así, ya que si se despeja y_4 de la primera desigualdad, el valor que se obtiene de ésta es que es mayor de 0.0334, lo que se contrapone con la segunda desigualdad que es $y_4 \leq 0.03$.

Ahora bien, resolviendo la segunda estructura con el agregado de la restricción $DRP_4 - DRP_{4a} = 4$ se obtiene el siguiente resultado:

Valor de la función objetivo

1) 0.3017000

Variable	Valor
y_1	0.0231
y_2	0.0221
y_3	0.0222
y_4	0
y_5	0.03
y_6	0.0269
y_7	0.0267
y_8	0.1507
DRP_1	10
DRP_2	5.089743
DRP_3	5
DRP_4	5.141026
DRP_5	0.769231
DRP_6	0
DRP_7	0
DRP_8	0
DRP_{1a}	0
DRP_{5a}	1.230769
DRP_{2a}	0.089743
DRP_{3a}	0
DRP_{4a}	1.141026

Los valores de estas variables de decisión toman en cuenta el conjunto de restricciones adicionales hasta el momento.

La variable de holgura fue DRP_{4a} y por lo tanto se incluye la nueva restricción $DRP_4 - DRP_{4a} = 4$.

6.- Como se aprecia, DRP_6, asociada al PSD tiene un valor de 0. No se resolverá el problema $DRP_6 + DRP_{6a} = -1$ porque no tendría caso dado que no existirían valores negativos para las variables enteras a conocer. Por lo tanto ahora se resuelve un nuevo problema con la siguiente condición $DRP_6 - DRP_{6a} = 1$ La variable de holgura es DRP_{6a}. Dicha solución es:

La solución del problema se encontró en la iteracción 11.

Valor de la función objetivo

0.3017

Variable	Valor
y_1	0.0231
y_2	0.0235
y_3	0.0222
y_4	0.0178
y_5	0.03
y_6	0.0077
y_7	0.0267
y_8	0.1507
DRP_1	10
DRP_2	5
DRP_3	5
DRP_4	4
DRP_5	0.769231
DRP_6	1.230769
DRP_7	0
DRP_8	0

DRP_{1a}	0
DRP_{5a}	1.230769
DRP_{2a}	0
DRP_{3a}	0
DRP_{4a}	0
DRP_{6a}	0.230769

Como se observa, los resultados son que seis de las ocho variables de decisión ya cuentan con valores enteros.

7.- Como se aprecia la variable DRP_5, asociada al PNA, tiene un valor de 0.769231, ahora bien, no se resolverá el problema $DRP_5 + DRP_{5a} = 0$ dado que no es deseable buscar una solución igual a cero para un partido político. Por lo que se propone resolver $DRP_5 - DRP_{5a} = 1$. Dicha solución es:

La solución del problema se encontró en la iteracción 1.

Valor de la función objetivo:

0.3017

Variable	Valor
y_1	0.0231
y_2	0.0235
y_3	0.0222
y_4	0.0178
y_5	0.0264
y_6	0.0113
y_7	0.0267
y_8	0.1507
DRP_1	10
DRP_2	5

DRP_3	5
DRP_4	4
DRP_5	1
DRP_6	1
DRP_7	0
DRP_8	0
DRP_{1a}	0
DRP_{5a}	0
DRP_{2a}	0
DRP_{3a}	0
DRP_{4a}	0
DRP_{6a}	0

Como se observa, la función objetivo tiene un valor mínimo de 0.3017 y todas las variables poseen un valor entero. Por lo tanto, de conformidad con el algoritmo planteado, se ha obtenido una solución óptima.

Finalmente, a la estructura original del problema de programación lineal inicialmente planteado, se le agregaron las siguientes restricciones adicionales para obtener valores enteros en las variables que representan el número de diputados por el principio de representación proporcional a asignar:

$$\begin{aligned} PRI)\quad & DRP_1 - DRP_{1a} = 10 \\ PNA)\quad & DRP_5 - DRP_{5a} = 1 \\ PVEM)\quad & DRP_2 - DRP_{2a} = 5 \\ PT)\quad & DRP_3 - DRP_{3a} = 5 \\ PAN)\quad & DRP_4 - DRP_{4a} = 4 \\ PSD)\quad & DRP_6 - DRP_{6a} = 1 \end{aligned}$$

Además, puede corroborarse que la solución encontrada cumple con cada una de las restricciones establecidas en el planteamiento del problema y además con las condiciones que la Ley impone.

A continuación se hace un repaso de las mismas a fin de corroborar lo señalado.

1.- Ningún partido político tiene más de 40 diputados por ambos principios (de mayoría relativa y de representación proporcional). Esto es:
La solución se presenta en la siguiente tabla:

Partido Político	Diputados Mayoría Relativa	Diputados de Representación Proporcional	Total
PRI	0	10	10
PVEM	0	5	5
PT	1	5	6
PAN	9	4	13
PNA	0	1	1
PSD	0	1	1
CONV	0	0	0
PRD	28	0	28
TOTAL	38	26	64

2.- Los 26 diputados de representación proporcional son asignados entre los 8 partidos políticos.

Partido Político	Diputados por el principio de representación proporcional
Partido Revolucionario Institucional (PRI)	10
Partido Verde Ecologista de México (PVEM)	5
Partido del Trabajo (PT)	5
Partido Acción Nacional (PAN)	4
Partido Nueva Alianza (PNA)	1
Partido Social Demócrata (PSD)	1
Convergencia (CONV)	0
Partido de la Revolución Democrática (PRD)	0

3.- Ningún partido político posee una proporción de diputados por ambos principios mayor en tres puntos porcentuales que la correspondiente a sus votos obtenidos respecto al total de votos efectivos en el Distrito Federal.

Las diferencias entre ambos porcentajes resultaron de:

Diferencias entre porcentajes de votos obtenidos en todo el Distrito Federal y Diputados en la ALDF	
Partido Político	**Porcentaje**
Partido Revolucionario Institucional	2.31
Partido Verde Ecologista de México	2.35
Partido del Trabajo	2.22
Partido Acción Nacional	1.78
Partido Nueva Alianza	3.00
Partido Social Demócrata	0.77
Convergencia	2.67
Partido de la Revolución Democrática (PRD)	15.07

Al PRD no se le asignó ningún diputado de representación proporcional, el porcentaje descrito lo alcanzó con sus triunfos de diputados de mayoría relativa. Finalmente, el valor proporcionado por la función objetivo es de 0.3017

V CONCLUSIONES

- Una de las primeras conclusiones que se obtiene es que el modelo de estructura de la Investigación de Operaciones, en particular la programación lineal y entera, es aplicable en campos poco explorados como el que en este trabajo se desarrolló, que es el de la distribución de diputados por el principio de representación proporcional.

- Uno de los retos en el planteamiento del problema fue el de tomar en cuenta los diputados de mayoría relativa que ya tienen ganados los partidos políticos para asignar adicionalmente a los de representación proporcional, de tal manera que entre ambos tipos de diputados alcancen un porcentaje del total de los mismos en la Asamblea Legislativa del Distrito Federal, que sea lo más equivalente al porcentaje de votos obtenidos por cada partido político del total de la votación en el Distrito Federal.

- Definitivamente, el planteamiento que más se distingue es el de la función objetivo debido a la complejidad de representar una medida concreta de las diferencias individuales y colectivas entre los porcentajes de diputaciones alcanzadas y de votación por cada partido político en el entendido de que dichas diferencias tiendan a ser mínimas.

- Los resultados de aplicar la presente metodología y la descrita en la Ley para determinar los diputados de representación proporcional son idénticos, lo cual significa que el modelo proporciona resultados correctos, sin embargo el método empleado por la Ley, es de ensayo y error, en cambio el de la programación matemática es conducido por una secuencia que provee la formalidad necesaria en estos casos.

- Por otro lado, el empleo del método de la IO permite conocer resultados variando las restricciones de tal manera de que se puede averiguar cómo se comporta el sistema. Por ejemplo, la condición de que la diferencia entre los porcentajes de diputados y de votación obtenida por cada partido político, realmente es arbitraria, pudiéndose presentar el caso de que no sea posible resolver el problema por el método establecido en la Ley, en cambio con la programación matemática sería más rápido arribar a esta conclusión.

VI BIBLIOGRAFÍA

Autor Juan Prawda, “Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones”. Volúmen I. Editorial Limusa. 1982.

Autores Frederick S. Hillier y Gerald J. Lieberman, “Introducción a la Investigación de Operaciones”. Novena Edición, 2010.

Autor James Stewart. “Cálculo”. Grupo Editorial Iberoamérica S.A.de C.V. Edición 1994.

“Código Electoral del Distrito Federal”. Publicado en la Gaceta Oficial del Distrito Federal el 10 de enero de 2008. Edición reimpresa por segunda vez en marzo de 2009 en los talleres de GVG Grupo Gráfico S.A. DE C.V.

Estatuto de Gobierno del Distrito Federal. En este estatuto está definida la figura de diputados por el principio de representación proporcional. Artículo 37.

Anexo

El siguiente resultado es el que se obtiene al resolver el problema aplicando la programación lineal. A partir de estos valores de las variables de decisión, es de donde se partió para aplicar la programación entera.

Valor de la función objetivo:

0.3017

Variable	Valor
y_1	0.03
y_2	0.03
y_3	0.03
y_4	0.03
y_5	0.0041
y_6	0.0269
y_7	0
y_8	0.1507

Los valores de las variables de decisión son:

DRP_1	9.557693
DRP_2	4.583333
DRP_3	4.500000
DRP_4	3.217949
DRP_5	2.429487
DRP_6	0
DRP_7	1.711538
DRP_8	0