



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

APLICACIONES DE LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA
A LA MECÁNICA ESTADÍSTICA Y A LA
TERMODINÁMICA

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
LUIS FERNANDO ARAGÓN MUÑOZ

DIRECTOR DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN/TUTOR PRINCIPAL: DR. HERNANDO
QUEVEDO CUBILLOS
ICN, UNAM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR: DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS
ICN, UNAM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR: DR. FRANCISCO NETTEL RUEDA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CDMX, MÉXICO, JULIO DE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

... A mi compañera y mejor amiga, la Maestra en Ciencias (y próximamente Doctora) Ana Gabriela, con quien tengo la dicha de compartir mi vida, en todos sus aspectos, incluso en la física. A mi familia, tan grande como es, donde destaco especialmente a mis padres y a mi hermano, quienes con su ejemplo, amor y cuidados, me han formado como persona. A todos los doctores, maestros y profesores que, con su paciencia y amor por el conocimiento, me formaron como físico, y disfrutaron compartiendo su conocimiento y experiencia conmigo. Particularmente a los miembros de mi comité tutor, los doctores Hernando Quevedo y Chryssomalis Chryssomalakos, a mis antiguos asesores los doctores Guillermo Chacón y Héctor Hernández, y, finalmente, al Dr. Louis Hanotel, porque tanto él como Gaby son mis ejemplos a seguir en este mundo de la ciencia.

Agradecimientos

... Agradezco enormemente a los doctores Alessandro Bravetti, José Antonio Zapata, José David Vergara y Alejandro Corichi, quienes revisaron este trabajo y me brindaron valiosos comentarios y observaciones. Por supuesto, también agradezco a mi tutor principal, con quien realicé mi maestría y doctorado, el Dr. Hernando Quevedo, así como a todas las maravillosas personas que conocí en el Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, donde estuve los últimos seis años de mi vida, desde el inicio de mi maestría hasta el fin de este doctorado.

Introducción

El estudio estadístico de los sistemas compuestos por muchas partículas en situaciones muy alejadas a las que usualmente podemos encontrar en el laboratorio, como altas temperaturas y la presencia de campos gravitacionales intensos, ha interesado a físicos de distintas áreas desde hace varias décadas, motivados principalmente por el ideal de confirmar y el reforzar los cimientos mismos de la física. Al respecto, vale la pena mencionar que tan sólo pasaron dos años desde la célebre publicación de los trabajos de Albert Einstein en materia de relatividad especial, para que se publicara el primer estudio donde se analizaban efectos relativistas en un sistema termodinámico [1], inaugurando con esto un amplio debate sobre la naturaleza de conceptos propios de los sistemas de varias partículas, como la temperatura y el calor, que persiste hasta nuestros días¹. No obstante, ha sido recientemente que el tema ha adquirido un nuevo interés gracias a los avances en astrofísica; desde modelos para plasmas muy calientes [5, 6, 7], materia oscura [8, 9, 10, 11, 12] o discos de acreción orbitando agujeros negros y estrellas en formación [13, 14, 15], hasta sistemas que, en la gran escala del universo, modelan galaxias y cúmulos de estrellas como gases ideales [16, 17, 18, 19, 20]. Sin embargo, a pesar de la creciente literatura en el tema, aún queda mucho trabajo que hacer para formular una teoría estadística bien establecida para sistemas multipartitas en fondos curvos².

En este trabajo el tema central de estudio se localiza en la intersección entre la mecánica estadística y la relatividad general, pues investigamos el efecto que tiene, en un sistema de muchas partículas (específicamente un gas ideal), la curvatura de un espaciotiempo estacionario de fondo. Este análisis se realiza desde una perspectiva geométrica, específicamente, empleando herramientas de geometría simpléctica y sistemas hamiltonianos, y basándose en las ideas precursoras de Souriau et al. [22, 23, 24, 25, 26], donde los estados macroscópicos de equilibrio (del sistema de muchas partículas) se formalizan a través de una función de distribución de probabilidad en el espacio fase del sistema, el cual se construye como una variedad simpléctica con una medida inducida por la misma estructura simpléctica y una función hamiltoniana que gobierna la dinámica individual de las partículas.

En el enfoque de Souriau el grupo de simetrías del mencionado sistema hamiltoniano juega un papel central, al permitir caracterizar las mencionadas distribuciones de probabilidad a través de cantidades geométricas con una interpretación simple: integrales de movimiento. En este trabajo recuperamos esta idea al utilizar como grupo de simetría del sistema, el propio grupo de isometrías del espaciotiempo, lo que nos permite incorporar la naturaleza curva del mismo al análisis, permitiéndonos recuperar de esta manera, efectos físicos generados a raíz de la presencia de un campo gravitacional, tales como el llamado efecto Tolman-Ehrenfest³. También resulta importante recalcar que la formulación que construimos en este trabajo se reduce, en el escenario especial del espaciotiempo de Minkowski, la bien conocida descripción estadística en relatividad especial, dada a través de las llamadas funciones de distribución de Jüttner y funciones de distribución modificadas de Jüttner [28, 29, 30].

La estructura de la tesis es la siguiente: en la primera parte revisamos los fundamentos matemáticos y físicos de la formulación, a saber, la teoría de acciones de grupos de Lie en sistemas hamiltonianos (incluyendo la definición y propiedades del momentum map) y la

¹Véase los artículos [2, 3, 4], y las referencias que hay en ellos, para una revisión histórica más adecuada.

²Una discusión completa sobre los problemas que surgen en la estadística de sistemas en el marco de la relatividad general puede encontrarse en la introducción de [21].

³Véase [27] para una completa descripción del efecto.

ya mencionada teoría estadística de grupos de Lie de Souriau.

En la segunda parte introducimos formalmente el modelo hamiltoniano de un gas ideal diluído como N partículas libres e idénticas modeladas mediante geodésicas tipo tiempo dentro de una región del espaciotiempo que, ilustrativamente, pensamos como el tubo de mundo de la caja donde está limitado nuestro análisis. En este sistema hamiltoniano estudiamos cómo actúa el grupo de isometrías del espaciotiempo de fondo, y con base en estos elementos, adaptamos el concepto de estado de equilibrio estadístico para encontrar una descripción estadística del modelo de gas ideal diluído, a partir de distribuciones del tipo Gibbs. Particularmente analizamos un tipo especial de distribución, que aparece al considerar únicamente el subgrupo de traslaciones temporales en el análisis, que puede pensarse como una generalización de las distribuciones modificadas de Jüttner en el espaciotiempo ambiente de Minkowski, y con base en esta distribución tipo- Jüttner modificada, proponemos una función tipo-temperatura que tiene la particularidad de coincidir con la temperatura definida a través del efecto Tolman-Ehrenfest en espaciotiempos asintóticamente planos, conforme el espaciotiempo se vuelve, precisamente, plano. Finalmente presentamos como ejemplos de las distribuciones tipo Jüttner modificadas los casos de gases ideales en el espaciotiempo estático de Minkowski y de Schwarzschild. En el caso de Schwarzschild realizamos una expansión en serie de potencias del llamado radio de Schwarzschild, lo que nos permite analizar la estadística del gas en términos de la estadística del gas en el espaciotiempo de Minkowski.

Para complementar las dos partes de este trabajo, al final se anexa un apéndice donde se desarrolla, con todo lujo de detalles, el cálculo de la función de partición de una partícula. Además incluimos, en esta parte final, los dos artículos que publicamos en el transcurso de esta investigación.

Simbología

U	Variedad suave.
$\mathcal{C}^\infty(U)$	Mapeos suaves sobre U .
$\mathfrak{X}(TU)$	Campos vectoriales sobre U .
$\Lambda^p(U)$	p -formas sobre U .
d	Derivada exterior sobre U .
i_X	Derivada interior respecto a $X \in \mathfrak{X}(TU)$.
F^*	Pullback $F^* = T^*U \rightarrow T^*V$ de $F : V \rightarrow U$.
F_*	Pushforward $F_* : TV \rightarrow TU$ de $F : V \rightarrow U$.
\mathcal{L}_X	Derivada de Lie con respecto a $X \in \mathfrak{X}(TU)$.
$\mathcal{L}_X = i_X d + di_X$	Fórmula mágica de Cartán (válida en $\Lambda^p(U)$).
$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$	Derivada de Lie de $Y \in \mathfrak{X}(TU)$ respecto a $X \in \mathfrak{X}(TU)$.
G	Grupo de Lie.
\mathfrak{g}	Álgebra de Lie.
$\text{Ad}_\Lambda(\chi)$	Acción adjunta de $\Lambda \in G$ en $\chi \in \mathfrak{g}$.
\mathfrak{g}^*	Espacio vectorial dual al álgebra \mathfrak{g} .
$\text{Ad}_\Lambda^*(\alpha)$	Acción co-adjunta de $\Lambda \in G$ en $\alpha \in \mathfrak{g}^*$.
$[\chi_1, \chi_2] = \text{ad}_{\chi_1}(\chi_2)$	Corchete de Lie entre $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{g}$.
D	Derivada exterior sobre \mathfrak{g} .
Ω	Forma simpléctica sobre U .
Ψ	Acción de G en U , i. e. $\Psi : G \times U \rightarrow U$.
ψ_χ	Campo fundamental $\psi_\chi(u) \equiv \frac{d}{ds}(\Psi_{e^{s\chi}}(u))_{s=0} \in T_u U$.
X^F	Campo hamiltoniano de $F \in \mathcal{C}^\infty(U)$, i.e. $-i_{X^F}\Omega = dF$.
μ	Momentum map $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$.
μ_X	Hamiltoniana de $X \in \mathfrak{g}$.
$\mathfrak{B}(U)$	σ -Álgebra de Borel de U .
(M, g)	Espaciotiempo M con tensor métrico g .
g^{-1}	Inverso del tensor métrico.
∇	Derivada covariante respecto a la conexión de Levi-Civita.
$\Gamma^\mu_{\nu\omega}$	Símbolos de Christoffel ($\mu, \nu, \omega = 0, 1, 2, \dots, d$).
τ	Tubo de mundo en (M, g) .

ÍNDICE

I	Antecedentes	1
1	Acciones de grupos de Lie y momentum map	1
1	Acción de un grupo de Lie sobre una variedad	3
2	Momentum map	7
2.1	Levantamientos hamiltonianos de acciones	13
2	Estadística de grupos de Lie	16
1	Estados estadísticos	19
2	Estados estadísticos de Gibbs	22
2.1	Interpretación física de los estados estadísticos de Gibbs	30
3	Estados estadísticos de Gibbs generalizados	32
II	Resultados	42
3	Gas ideal en un espaciotiempo estático	42
1	Descripción hamiltoniana de partículas libres y masivas	44
1.1	Acción del grupo de isometrías	48
2	Gas ideal de partículas libres y masivas	50
3	Estados estadísticos de equilibrio en espaciotiempo estático	54
3.1	Ejemplo: Espaciotiempo de Minkowski	69
3.2	Ejemplo: Espaciotiempo exterior de Schwarzschild	80
4	Conclusiones	102
III	Material complementario	104

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Marius Sophus Lie † (1842-1899).	2
1.2	Generación de campos fundamentales mediante el pushforward.	5
1.3	Diagrama de conmutación de un momentum map equivariante	13
2.1	Jean-Marie Souriau (1922-2012 †).	18
2.2	Diagrama que muestra la convexidad de la función h	25
3.1	Karl Schwarzschild (1873-1916 †).	43
3.2	Fragmento de tubo de mundo τ	52
3.3	Expresión de $\mathcal{L}_X Y$ en el abierto $U \subset \mathbb{R}^D$ con coordenadas (x^μ)	55
3.4	Cortes Σ_t en el tubo de mundo τ	57
3.5	Gráfica de \mathfrak{F} para $0.02 \leq v_0 \leq 0.10$	77
3.6	Cortes de \mathfrak{F} a distintos ω para $0.02 \leq v_0 \leq 0.10$	77
3.7	Potencial efectivo $V(r)$	85
3.8	Descripción de γ_c hecha por un observador estático a través del tiempo t	85
3.9	Toroide $T_{S_{\text{box}}}^2$	86
3.10	Aproximación de la caja para $r_0 \gg 1$	95
3.11	Truncamiento de $\mathfrak{A}_{\text{Sch}}$ como funciones de β para $\zeta_0 = 0.8$	96
3.12	Gráfica para el comportamiento asintótico de $\mathcal{T}(r)$	97

Parte I
Antecedentes

CAPÍTULO

1

ACCIONES DE GRUPOS DE LIE Y MOMENTUM MAP

En este capítulo introduciremos los conceptos de acción de un grupo de Lie sobre una variedad, y de momentum map, que resultarán fundamentales en el resto del documento. Particularmente exploraremos el nexo entre transformaciones en un grupo de Lie, simetrías en un sistema hamiltoniano y cantidades conservadas, lo que en capítulos posteriores podremos usar para desarrollar el concepto de estados estadísticos de Souriau, y aplicarlos al problema particular de sistemas de varias partículas en espacio-tiempos curvos.

En cuanto a la notación, en este capítulo (como a lo largo del resto del documento) utilizaremos la letra G para representar un grupo de Lie, i. e. un grupo donde los elementos son puntos en una variedad suave diferencial de dimensión finita $k = \dim(G)$, y en términos de dicha variedad las operaciones de producto e inverso que definen al grupo son mapeos suaves. Los elementos o puntos de G los representaremos en general con la letra Λ (salvo que se especifique lo contrario). Al respecto del producto de Lie, para mantener la notación lo más simple posible, el producto entre dos elementos cualquiera $\Lambda_1, \Lambda_2 \in G$ lo representaremos simplemente mediante la concatenación $\Lambda_1\Lambda_2$. Asociado al grupo de Lie G tendremos su álgebra de Lie que representaremos como \mathfrak{g} con elementos $\chi \in \mathfrak{g}$. Esta álgebra de Lie se trata de un álgebra donde su operación de álgebra, que se denomina corchete de Lie y suele representarse como $[\chi_1, \chi_2]$ para dos vectores cualquiera $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{g}$, es bilineal, antisimétrica y distribuye acorde a la identidad de Jacobi, i. e. que satisface

$$[\chi_1, [\chi_2, \chi_3]] = [[\chi_1, \chi_2], \chi_3] + [\chi_2, [\chi_1, \chi_3]]. \quad (1.1)$$

Geoméricamente podemos identificar el álgebra de Lie como $\mathfrak{g} \simeq T_e G$, de manera que podemos pensar en ella como el espacio vectorial de generadores infinitesimales del grupo de Lie, con el corchete, siendo la versión infinitesimal del producto de Lie, capturando la estructura del mismo. Finalmente mencionamos que el espacio vectorial dual al álgebra

lo identificaremos como \mathfrak{g}^* . Para mayor información acerca de estos conceptos y objetos matemáticos, puede consultarse [31, 32, 33, 34].



Figura 1.1: Marius Sophus Lie † (1842-1899).

1 Acción de un grupo de Lie sobre una variedad

Sea G un grupo de Lie k -dimensional y U una variedad diferenciable cualquiera de dimensión $\dim(U) = n$. Consideremos tanto el mapeo suave $\Psi : G \times U \rightarrow U$ como los difeomorfismos $\Psi_\Lambda : U \rightarrow U$, definidos para cada elemento $\Lambda \in G$ y punto $x \in U$ a partir de la evaluación

$$\Psi_\Lambda(x) = \Psi(\Lambda, x). \quad (1.2)$$

Decimos que Ψ es una acción izquierda y suave de G en U , si se cumplen dos condiciones; a) al elemento identidad del grupo se le asocia el mapeo identidad de U y b) el difeomorfismo asociado con el producto de dos elementos cualquiera del grupo es la composición de los difeomorfismos de cada elemento, respetando el orden del producto, i. e. [34, 35, 36, 37]

$$\Psi_e = \text{Id}_U : x \mapsto x. \quad (1.3)$$

$$\Psi_{\Lambda_1\Lambda_2} = \Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2}. \quad (1.4)$$

Una consecuencia directa de las propiedades (1.3) y (1.4) es que el difeomorfismo asociado con el elemento inverso $\Lambda^{-1} \in G$, es el inverso del difeomorfismo Ψ_Λ ,

$$\Psi_{\Lambda^{-1}} = \Psi_\Lambda^{-1}. \quad (1.5)$$

En efecto, para darse cuenta de esto basta notar que para cualquier elemento del grupo se tiene $\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = e$ y, por lo tanto, $\text{Id}_U = \Psi_{\Lambda\Lambda^{-1}} = \Psi_\Lambda \circ \Psi_{\Lambda^{-1}}$ implica $\Psi_{\Lambda^{-1}} = \Psi_\Lambda^{-1}$.

El ejemplo más directo de una acción izquierda de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable es, precisamente, la multiplicación por la izquierda que se define sobre G , i. e. $L : G \times G \rightarrow G$ dado por

$$L_{\Lambda_1}(\Lambda_2) = \Lambda_1\Lambda_2. \quad (1.6)$$

En efecto, naturalmente $L_e(\Lambda) = e\Lambda = \Lambda$ para todo $\Lambda \in G$ y en consecuencia la multiplicación por la izquierda satisface la propiedad (1.3); $L_e = \text{Id}_G$, similarmente, por la propiedad asociativa definida en el producto de cualquier grupo [35], L también satisface la propiedad (1.4), i. e.

$$L_{\Lambda_1\Lambda_2}(\Lambda_3) = (\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3 = \Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3) = \Lambda_1(L_{\Lambda_2}(\Lambda_3)) = L_{\Lambda_1} \circ L_{\Lambda_2}(\Lambda_3).$$

Caso contrario a la multiplicación por la izquierda, la multiplicación por la derecha no define una acción izquierda, si no que define una acción derecha¹, pero esto puede cambiarse considerando la multiplicación por la derecha de elementos inversos, i. e. $R : G \times G \rightarrow G$ dado por

$$R_{\Lambda_1}(\Lambda_2) = \Lambda_2\Lambda_1^{-1}. \quad (1.7)$$

Efectivamente, mientras que la identificación $R_e = \text{Id}_G$ es trivial, pues para todo $\Lambda \in G$ tenemos $R_e(\Lambda) = \Lambda e^{-1} = \Lambda e = \Lambda$, la naturaleza *izquierda* de la acción sale a relucir gracias a que la inversión de elementos es un anti-homomorfismo de grupo, i. e.

$$R_{\Lambda_1\Lambda_2}(\Lambda_3) = \Lambda_3(\Lambda_2^{-1}\Lambda_1^{-1}) = (\Lambda_3\Lambda_2^{-1})\Lambda_1^{-1} = R_{\Lambda_1}(\Lambda_3\Lambda_2^{-1}) = R_{\Lambda_1} \circ R_{\Lambda_2}(\Lambda_3).$$

La composición $L \circ R : G \times G \rightarrow G$ de la multiplicación por la izquierda y la multiplicación por el elemento inverso a la derecha, también define una acción izquierda de G en sí mismo

¹Un mapeo diferenciable $\Psi : G \times U \rightarrow U$ que satisfaciendo la propiedad (1.3) no satisface la propiedad (1.4) si no que cumple $\Psi_{\Lambda_1\Lambda_2} = \Psi_{\Lambda_2} \circ \Psi_{\Lambda_1}$ [36].

que denominaremos conjugación, como vemos a continuación: $L \circ R_e(\Lambda) = e\Lambda e^{-1} = \Lambda$ para todo $\Lambda \in G$ y, por lo tanto, $L \circ R_e = \text{Id}_G$, y

$$(L \circ R_{\Lambda_1}) \circ (L \circ R_{\Lambda_2})(\Lambda_3) = L \circ R_{\Lambda_1}(\Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_2^{-1}) = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1} = L \circ R_{\Lambda_1 \Lambda_2}(\Lambda_3).$$

Lo interesante de esta composición $L \circ R$ es que nos ayuda a definir una acción importante de los grupos de Lie sobre sus álgebras de Lie asociadas, al realizar la identificación $\mathfrak{g} \simeq T_e G$.

Proposición 1.1

El mapeo suave $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definido por medio de los pushforward

$$\text{Ad}_\Lambda(\chi) = [L \circ R_\Lambda(e)]_*(\chi) = \left. \frac{d}{ds} (\Lambda e^{s\chi} \Lambda^{-1}) \right|_{s=0}, \quad (1.8)$$

donde $e^{s\chi}$ es la curva en G que, iniciando en $e \in G$ con vector tangente χ , se genera mediante el mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, es una acción suave e izquierda de cualquier grupo de Lie sobre su álgebra de Lie asociada [34].

En efecto, para demostrar que Ad es una acción izquierda y suave es necesario demostrar que los mapeos definidos en (1.8) satisfacen las propiedades (1.3) y (1.4). Comencemos probando la primera de estas condiciones a partir de la definición del mapeo exponencial,

$$\text{Ad}_e(\chi) = \left. \frac{d}{ds} (e e^{s\chi} e^{-1}) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} e^{s\chi} \right|_{s=0} = \chi.$$

Con respecto a la segunda de las condiciones, vale la pena considerar primero que los mapeos (1.8) al estar definidos en torno a pushforwards, son mapeos lineales² definidos sobre el espacio vectorial \mathfrak{g} . Esto nos permite generar una representación del grupo G en términos de matrices cuadradas $k \times k$, que actúan sobre los elementos de \mathfrak{g} (visto como espacio vectorial) tratándolos como vectores columna, donde e se identifica con la matriz identidad [34]. A la vez nos permite definir, por diferenciación de los parámetros del grupo, una representación matricial de su álgebra de Lie, de tal forma que el mapeo exponencial de la matriz que representa un elemento $\chi \in \mathfrak{g}$, es la matriz que representa al elemento del grupo³ $e^\chi \in G$. De esta manera podemos reescribir $\text{Ad}_\Lambda(\chi)$ en notación matricial como

$$\text{Ad}_\Lambda(\chi) = \Lambda \chi \Lambda^{-1}. \quad (1.9)$$

En efecto, bajo las representaciones ya mencionadas podemos multiplicar los elementos matrices del grupo con los elementos matrices del álgebra, de tal forma que la reexpresión (1.9) se deduce directamente: $\left. \frac{d}{ds} (\Lambda e^{s\chi} \Lambda^{-1}) \right|_{s=0} = \Lambda \left. \frac{d}{ds} (e^{s\chi}) \right|_{s=0} \Lambda^{-1} = \Lambda \chi \Lambda^{-1}$. Ahora bien, volviendo a la propiedad izquierda de Ad y pensando las cosas en términos de matrices cuadradas, se vuelve más fácil hacer el cálculo directo de (1.4), i. e.

$$\text{Ad}_{\Lambda_1} \circ \text{Ad}_{\Lambda_2}(\chi) = \text{Ad}_{\Lambda_1}(\Lambda_2 \chi \Lambda_2^{-1}) = \Lambda_1 \Lambda_2 \chi (\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1} = \text{Ad}_{\Lambda_1 \Lambda_2}(\chi). \quad \diamond$$

Finalmente, dada la acción adjunta de G definimos la acción co-Adjunta de G sobre el espacio vectorial dual a \mathfrak{g} , i. e. $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definida a partir de la relación de dualidad

$$\langle \text{Ad}_\Lambda^*(\mu), \chi \rangle = \langle \mu, \text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi) \rangle, \quad (1.10)$$

²Pues el pushforward o diferencial de un mapeo es, precisamente, su mejor aproximación lineal [34].

³Por comodidad y para mantener la notación lo más simple posible, nos referiremos a las matrices asociadas con $\Lambda \in G$ y $\chi \in \mathfrak{g}$ mediante los mismos símbolos.

válida para cualquier $\Lambda \in G$, $\chi \in \mathfrak{g}$ y $\mu \in \mathfrak{g}^*$, donde los paréntesis angulares representan el producto interno entre los espacios vectoriales duales \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* , i. e. $\langle \mu, \chi \rangle = i_\chi \mu$. La demostración de que la acción co-Adjunta, tal como la definimos a través de (1.10), satisface la propiedad (1.3) se construye tomando en cuenta que $\langle \text{Ad}_e^*(\mu), \chi \rangle = \langle \mu, \text{Ad}_e^{-1}(\chi) \rangle = \langle \mu, \chi \rangle$ se satisface para todo $\chi \in \mathfrak{g}$ y, por lo tanto, $\text{Ad}_e^*(\mu) = \mu$, pero esto a su vez se satisface para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$, siendo entonces $\text{Ad}_e^* = \text{Id}_{\mathfrak{g}^*}$. Con respecto a la demostración de la propiedad (1.4), el razonamiento es similar, al notar que

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}_{\Lambda_1 \Lambda_2}^*(\mu), \chi \rangle &= \langle \mu, \text{Ad}_{\Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1}}(\chi) \rangle \\ &= \langle \mu, \text{Ad}_{\Lambda_2^{-1}} \circ \text{Ad}_{\Lambda_1^{-1}}(\chi) \rangle \\ &= \langle \text{Ad}_{\Lambda_2}^*(\mu), \text{Ad}_{\Lambda_1^{-1}}(\chi) \rangle = \langle \text{Ad}_{\Lambda_2}^* \circ \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu), \chi \rangle, \end{aligned}$$

también válido para todo $\chi \in \mathfrak{g}$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $\Lambda_1, \Lambda_2 \in G$, implica $\text{Ad}_{\Lambda_1 \Lambda_2}^* = \text{Ad}_{\Lambda_1}^* \circ \text{Ad}_{\Lambda_2}^*$.

Geoméricamente podemos pensar en una acción como un grupo de difeomorfismos $\{\Psi_\Lambda\}_{\Lambda \in G}$ sobre una variedad, que está G -parametrizado, de manera similar a como pensamos el flujo de un campo vectorial como un grupo monoparamétrico de difeomorfismos. En este sentido podemos generalizar esta idea definiendo los campos fundamentales del álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada al grupo G que actúa sobre U . Sea $\chi \in \mathfrak{g}$ un elemento cualquiera del álgebra de Lie, definimos su campo vectorial fundamental asociado con la acción Ψ (o simplemente su campo fundamental) como el campo vectorial $\psi_\chi \in \mathfrak{X}(TU)$ dado por [34, 37]

$$\psi_\chi(x) = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}}(x) \right|_{s=0}. \quad (1.11)$$

Básicamente el campo fundamental ψ_χ es el campo vectorial cuyo flujo sobre U está dado por el grupo monoparamétrico $\{\Psi_{\exp(s\chi)}\}_{s \in \mathbb{R}}$. Así ψ_χ es el campo de velocidades que se obtiene al mapear la curva $s \mapsto e^{s\chi}$ de G a U , vía la acción Ψ , o dicho de otra manera, el campo fundamental definido en (1.11) es la imagen de χ bajo el pushforward $[\Psi_e(x)]_*$ (véase el diagrama (1.2):

$$\psi_\chi(x) = [\Psi_e(x)]_* \chi. \quad (1.12)$$

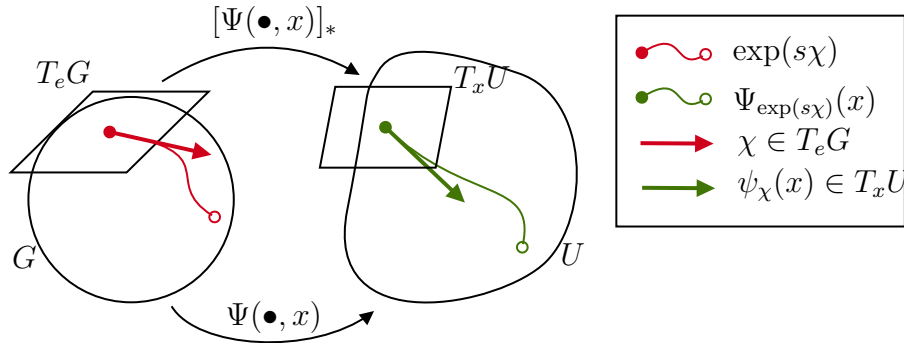


Figura 1.2: Generación de campos fundamentales mediante el pushforward.

De esta manera una acción de un grupo de Lie sobre una variedad diferencial define, para cada punto $x \in U$, un mapeo entre el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G y los campos vectoriales tangentes de la variedad, descrito mediante el pushforward (1.12), de donde se vuelve evidente que

la asignación de campos fundamentales a elementos del álgebra, es una asignación lineal, i. e. para cualesquiera constantes reales $\alpha^i \in \mathbb{R}$ y vectores $\chi_i \in \mathfrak{g}$, se satisface la propiedad

$$\psi_{\alpha^i \chi_i} = \alpha^i \psi_{\chi_i}. \quad (1.13)$$

Como primer ejemplo de campos fundamentales nos encontramos que los asociados con la multiplicación por la izquierda (1.6) en un grupo de Lie son, por definición, los campos izquierdos que encontramos en el estudio de los grupos y álgebras de Lie⁴:

$$\ell_\chi(\Lambda) = \left. \frac{d}{ds} (e^{s\chi} \Lambda) \right|_{s=0}. \quad (1.14)$$

Similarmente los campos fundamentales asociados con la multiplicación derecha de elementos inversos (1.7) son los campos derechos

$$r_\chi(\Lambda) = \left. \frac{d}{ds} (\Lambda e^{s\chi}) \right|_{s=0}, \quad (1.15)$$

y los campos fundamentales de $L \circ R$ son la resta de los campos izquierdos y derechos,

$$\left. \frac{d}{ds} (e^{s\chi} \Lambda e^{-s\chi}) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (e^{s\chi} \Lambda) \right|_{s=0} - \left. \frac{d}{ds} (\Lambda e^{s\chi}) \right|_{s=0} = \ell_\chi(\Lambda) - r_\chi(\Lambda).$$

En cuanto a la asignación de campos fundamentales mediante la versión diferencial de la acción Adjunta (1.8), resulta interesante notar que dicha asignación se encuentra en correspondencia uno a uno con el corchete de Lie del álgebra.

Proposición 1.2

El corchete de Lie $[\chi_1, \chi_2]$ entre dos elementos cualquiera $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{g}$, es el campo fundamental asociado a $\chi_1 \in \mathfrak{g}$, vía la acción Adjunta de G en \mathfrak{g} , en el punto $\chi_2 \in \mathfrak{g}$:

$$\text{ad}_{\chi_1}(\chi_2) = \left. \frac{d}{ds} \text{Ad}_{e^{s\chi_1}}(\chi_2) \right|_{s=0} = [\chi_1, \chi_2]. \quad (1.16)$$

En efecto, la demostración que daremos aquí emplea nuevamente la representación matricial a la que hicimos mención en la proposición (1.1), donde particularmente el corchete de Lie se ve como $[\chi_1, \chi_2] = \chi_1 \chi_2 - \chi_2 \chi_1$ [34]:

$$\text{ad}_{\chi_1}(\chi_2) = \left. \frac{d}{ds} (e^{s\chi_1} \chi_2 e^{-s\chi_1}) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (e^{s\chi_1}) \right|_{s=0} \chi_2 + \chi_2 \left. \frac{d}{ds} (e^{-s\chi_1}) \right|_{s=0} = \chi_1 \chi_2 - \chi_2 \chi_1 = [\chi_1, \chi_2].$$



Otras propiedades de la *versión diferencial* $\psi = [\Psi_e]_*$ de la acción Ψ , que valen la pena remarcar, es que a) en su calidad de mapeo entre el álgebra de Lie de G y el álgebra de Lie⁵ de $\text{Diff}(U)$, se trata de un anti-homomorfismo y b) no sólo le asigna al pushforward de un campo fundamental, bajo la acción de G vía Ψ , otro campo fundamental, si no que se encarga de que el campo fundamental asignado corresponda al elemento original también actuado por G , pero vía la acción Adjunta.

⁴Véase [34] para una exposición más detallada de qué es un campo vectorial izquierdo y uno derecho.

⁵Entendida como el espacio vectorial $\mathfrak{X}(TU)$ de todos los campos tangentes a U , junto al bracket de Lie dado por la derivada de Lie entre vectores [38].

Proposición 1.3

Sea $\Psi : G \times U \rightarrow U$ una acción izquierda y suave de G en U . Los campos fundamentales asociados, construidos con Ψ a partir de la definición (1.11), satisfacen

$$\psi_{[\chi_1, \chi_2]} = -[\psi_{\chi_1}, \psi_{\chi_2}], \quad (1.17)$$

$$[\Psi_\Lambda]_* \psi_\chi = \psi_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda, \quad (1.18)$$

donde en (1.17) el bracket de Lie que aparece en el miembro izquierdo es el del álgebra \mathfrak{g} y el bracket de Lie que aparece en el miembro derecho es la derivada de Lie de ψ_{χ_2} a lo largo del flujo generado por ψ_{χ_1} , i. e. $[\psi_{\chi_1}, \psi_{\chi_2}] = \mathcal{L}_{\psi_{\chi_1}} \psi_{\chi_2}$.

Para demostrar la propiedad (1.17) sólo hace falta recurrir al resultado (1.16), de donde obtenemos la relación $e^{-\text{sad}_{\chi_1}(\chi_2)} = \text{Ad}_{e^{-s\chi_1}}(\chi_2)$, así como a la propiedad izquierda (1.4) de Ψ y a la expresión (1.9). En efecto,

$$\begin{aligned} [\psi_{\chi_1}, \psi_{\chi_2}] &= \mathcal{L}_{\psi_{\chi_1}} \psi_{\chi_2} = \frac{d}{ds} [\Psi_{e^{-s\chi_1}}]_* (\psi_{\chi_2} \circ \Psi_{e^{s\chi_1}}) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \frac{d}{d\lambda} \Psi_{e^{-s\chi_1}} \circ \Psi_{e^{\lambda\chi_2}} \circ \Psi_{e^{s\chi_1}} \Big|_{\lambda=0, s=0} = \frac{d}{ds} \frac{d}{d\lambda} \Psi_{e^{-s\chi_1} e^{\lambda\chi_2} e^{s\chi_1}} \Big|_{\lambda=0, s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \Psi_{e^{-s\chi_1} \chi_2 e^{s\chi_1}} \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Psi_{\text{Ad}_{e^{-s\chi_1}}(\chi_2)} \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Psi_{e^{-\text{sad}_{\chi_1}(\chi_2)}} \Big|_{s=0} = \psi_{-\text{ad}_{\chi_1}(\chi_2)}, \end{aligned}$$

donde debemos recordar que, por la linealidad (1.13), $\psi_{-\text{ad}_{\chi_1}(\chi_2)} = -\psi_{\text{ad}_{\chi_1}(\chi_2)} = -\psi_{[\chi_1, \chi_2]}$. Con respecto a (1.18), la historia es bastante similar, pero esta vez tomando en cuenta el resultado $\Lambda e^{s\chi} \Lambda^{-1} = e^{s\text{Ad}_\Lambda(\chi)}$ que se desprende de la definición (1.8) de acción Adjunta:

$$\begin{aligned} [\Psi_\Lambda]_* \psi_\chi &= \frac{d}{ds} \Psi_\Lambda \circ \Psi_{e^{s\chi}} \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Psi_{\Lambda e^{s\chi}} \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Psi_{\Lambda e^{s\chi} \Lambda^{-1} \Lambda} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \Psi_{\Lambda e^{s\chi} \Lambda^{-1}} \circ \Psi_\Lambda \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\text{Ad}_\Lambda(\chi)}} \circ \Psi_\Lambda \Big|_{s=0} = \psi_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda. \quad \diamond \end{aligned}$$

2 Momentum map

Ya que introducimos el concepto de la acción de un grupo de Lie sobre una variedad diferencial, vamos a estudiar un escenario muy particular, para lo cual introduciremos una estructura simpléctica $\Omega \in \Lambda^2(U)$ sobre la variedad diferencial, i. e. una 2-forma cerrada y no degenerada⁶ [39]. Diremos que una acción suave e izquierda $\Psi : G \times U \rightarrow U$, de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica (U, Ω) , es simpléctica, si la familia de difeomorfismos $\{\Psi_\Lambda\}_{\Lambda \in G}$ definida por ella, está conformada por simplectomorfismos, i. e. para todo elemento $\Lambda \in G$ se satisface [37]

$$\Psi_\Lambda^* \Omega = \Omega. \quad (1.19)$$

⁶Algunas referencias básicas que pueden ser consultadas para atender esta sección son [34, 37], o si se busca mayor profundidad en geometría simpléctica, [39, 40, 41].

Una consecuencia directa de que un grupo de Lie actúe sobre una variedad simpléctica por medio de simplectomorfismos es que sus campos fundamentales son los generadores infinitesimales de las simetrías de la estructura, lo cual queda establecido mediante la expresión

$$\mathcal{L}_{\psi_\chi} \Omega = 0, \quad (1.20)$$

válida para cualquier elemento $\chi \in \mathfrak{g}$. En efecto, para comprobar (1.20) basta recurrir a la definición de la derivada de Lie de una forma diferencial a lo largo del flujo de un campo vectorial, i. e. [34]

$$\mathcal{L}_{\psi_\chi} \Omega = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}}^* \Omega(\Psi_{e^{s\chi}}) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \Omega \right|_{s=0} = 0.$$

El hecho de que los campos fundamentales sean generadores infinitesimales de simetrías simplécticas puede interpretarse de manera más precisa. En particular, empleando la fórmula mágica de Cartan [34] y tomando en cuenta que $d\Omega = 0$, podemos ver que (1.20) nos dice que la 1-forma $i_{\psi_\chi} \Omega$ es una 1-forma cerrada, i. e. $\mathcal{L}_{\psi_\chi} \Omega = d(i_{\psi_\chi} \Omega) = 0$. Si particularmente esta 1-forma $i_{\psi_\chi} \Omega$ es exacta para alguna función $-\mu_\chi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ (módulo constantes), entonces los campos fundamentales no sólo son generadores de simetrías simplécticas si no que, de forma más especial, son campos hamiltonianos con hamiltonianas μ_χ , es decir, satisfacen

$$d\mu_\chi = -i_{\psi_\chi} \Omega. \quad (1.21)$$

A las acciones simplécticas que además generan campos fundamentales hamiltonianos (de manera global), se les denomina acciones hamiltonianas [37], y serán de especial interés para nosotros gracias a que, asociadas a estas acciones, tenemos un mapeo que, bajo condiciones que ya definiremos más adelante, contiene todas las simetrías dinámicas de un sistema hamiltoniano en el que actúa un grupo de Lie. A continuación, definimos dicho mapeo.

Proposición 1.4

Dada la acción suave e izquierda $\Psi : G \times U \rightarrow U$ de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica (U, Ω) , que es hamiltoniana, existe un mapeo $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$, denominado el momentum map de la acción Ψ , tal que para todo elemento $\chi \in \mathfrak{g}$ la evaluación $i_\chi \mu = \langle \mu, \chi \rangle$ genera la hamiltoniana del campo fundamental ψ_χ , es decir, tal que satisface [37, 41, 42]

$$d(i_\chi \mu) = -i_{\psi_\chi} \Omega. \quad (1.22)$$

Lo que establece la proposición (1.4) realmente es que la asignación de hamiltonianas a campos fundamentales, en una acción hamiltoniana, puede hacerse de manera lineal a través de esta función especial μ sobre U , con valores en los covectores del álgebra de Lie. En efecto, sea (T_1, T_2, \dots, T_k) una base cualquiera para el álgebra de Lie \mathfrak{g} , y sea $(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^k)$ la base dual en \mathfrak{g}^* , i. e. $i_{T_i} \sigma^j = \langle \sigma^j, T_i \rangle = \delta_i^j$, veamos que podemos definir $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$ como $\mu = \mu_i \sigma^i$ para las componentes μ_i obtenidas de resolver las ecuaciones

$$d\mu_i = -i_{\psi_{T_i}} \Omega. \quad (1.23)$$

Esto es una consecuencia directa de la linealidad (1.13), pues para $\chi = \chi^i T_i$ tenemos

$$d(i_\chi \mu) = d(\mu_i i_\chi \sigma^i) = d(\mu_i \chi^i) = \chi^i d\mu_i = -\chi^i i_{\psi_{T_i}} \Omega = -i_{\chi^i \psi_{T_i}} \Omega = -i_{\psi_\chi} \Omega. \quad \diamond$$

Un aspecto importante en la proposición anterior es que, si bien asegura la existencia del momentum map, no menciona nada sobre su unicidad, y es que el momentum map asociado a una acción hamiltoniana Ψ no es único en el sentido en que siempre podemos sumarle un covector constante $\tilde{\mu} \in \mathfrak{g}^*$ al momentum map μ para obtener otro momentum map, i. e.

$$d(i_X(\mu + \tilde{\mu})) = d(i_X\mu + i_X\tilde{\mu}) = d(i_X\mu) + d(i_X\tilde{\mu}) = d(i_X\mu) = -i_{\psi_X}\Omega.$$

Dicho de otra forma, sin las k condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (1.23), a lo más que podemos aspirar es a encontrar la familia de primitivas de $-i_{\psi_{T_i}}\Omega$. De esta manera cuando hablemos del momentum map de una acción en realidad nos estamos refiriendo a algún representante de la clase de equivalencia $\{\mu + \tilde{\mu}\}_{\tilde{\mu} \in \mathfrak{g}^*}$.

Quizá el ejemplo más sencillo de una acción hamiltoniana y su momentum map asociado sea el que se da en un sistema hamiltoniano, es decir, una terna (U, Ω, H) donde (U, Ω) es una variedad simpléctica y $H \in \mathcal{C}^\infty(U)$ es un mapeo real, llamado la hamiltoniana del sistema, que define un flujo $\varphi^H : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ sobre la variedad simpléctica, generado por el campo vectorial hamiltoniano X^H que se obtiene como solución de la ecuación

$$dH = -i_{X^H}\Omega. \quad (1.24)$$

En otras palabras, un sistema hamiltoniano es una variedad simpléctica en el que encontramos el sistema de ecuaciones diferenciales (1.24), cuyas soluciones son curvas integrales del campo vectorial X^H , de la forma $\gamma(t) = \varphi^H(t, \gamma(0))$, i. e. $X^H \circ \gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}$. Como ya comentábamos anteriormente el flujo de un campo vectorial es una acción de un grupo monoparamétrico de difeomorfismos, y en particular el flujo del campo vectorial hamiltoniano es, por definición, un generador de simplectomorfismos φ_t^H [39, 37]. De esta manera, siendo φ^H la acción izquierda, suave y hamiltoniano del grupo abeliano $(\mathbb{R}, +) \sim \mathbb{R}$ sobre U , con álgebra de Lie \mathbb{R} y con campos fundamentales

$$\frac{d}{ds}(\varphi_{sa}^H)_{s=0} = a \frac{d}{dt}(\varphi_t^H)_{t=0} = aX^H, \quad (1.25)$$

su momentum map asociado es, precisamente, la hamiltoniana $\mu = H : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde sin problema alguno hemos identificado el espacio dual a \mathbb{R} con \mathbb{R} mismo:

$$d(i_a\mu) = d(aH) = a(dH) = -ai_{X^H}\Omega = -i_{aX^H}\Omega. \quad (1.26)$$

En este sentido la idea detrás del momentum map es generalizar la noción de la acción simpléctica de un grupo abeliano unidimensional, vía una función hamiltoniana, a grupos de Lie más generales (abelianos o no).

Como ejemplo menos trivial consideremos el sistema mecánico simple de un cuerpo rígido en el laboratorio, donde actúa el grupo de rotaciones $\text{SO}(3)$, representado por las matrices R de 3×3 que son ortogonales ($R^{-1} = R^T$) y que tienen determinante $\det(R) = +1$. No vamos a complicarnos mucho la vida y vamos a pensar directamente que el espacio de configuración de este sistema es todo \mathbb{R}^3 , dotado de la acción izquierda y suave $\Psi_R(\vec{q}) = R \cdot \vec{q}$. Como sabemos, su espacio fase o haz cotangente, parametrizado por coordenadas q 's cualesquiera del punto $q \in \mathbb{R}^3$ y coordenadas $p_i = i_{\partial/\partial q^i}p$ para el covector $p \in T_q\mathbb{R}^3$ en la fibra, es una variedad simpléctica (véase [37] o la siguiente subsección) dotada de la forma simpléctica $\Omega = dp_i \wedge dq^i = d(p_i dq^i)$. Ahora veremos que la acción del grupo de rotaciones en el laboratorio, i. e. en el espacio de configuración, induce la acción $\Psi : \text{SO}(3) \times T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow T^*\mathbb{R}^3$ en el espacio fase, definida como $\Psi_R(q, p) = (q', p')$ para q' y p' dadas por

$$q'^i = R^i_j q^j, \quad p'_i = p_j [R^T]^j_i, \quad (1.27)$$

donde R^i_j son las componentes de R en la base $dq^j \otimes \frac{\partial}{\partial q^i}$, i. e. $R = R^i_j dq^j \otimes \frac{\partial}{\partial q^i}$. En efecto, mientras que la transformación de las coordenadas en q corresponde a la expresión local de la acción de $\tilde{\Psi}$ en el espacio de configuración, la transformación en las coordenadas de p es consecuencia de que las componentes de un covector bajo el pullback de ϕ_R transforman mediante la matriz jacobiana inversa $J_{\tilde{\Psi}_R^{-1}} = J_{\tilde{\Psi}_{R^{-1}}} = J_{\tilde{\Psi}_{R^T}}$, matriz que resulta ser precisamente $J_{\tilde{\Psi}_{R^T}} = R^T$, en virtud de que $\tilde{\Psi}_R$ se trata de una transformación lineal. No resulta complicado ver que la acción Ψ_R , inducida o *levantada* al haz cotangente, es una acción simpléctica,

$$\begin{aligned}\Psi_R^* \Omega &= d(p_i (R^T)^i_j d(R^j_k dq^k)) = d(p_i (R^T)^i_j R^j_k dq^k) \\ &= d(p_i (R^T \cdot R)^i_k dq^k) = d(p_i \delta^i_k dq^k) = d(p_i dq^i) = \Omega.\end{aligned}$$

En particular, esta es una acción hamiltoniana, como podemos ver al calcular los campos fundamentales de su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, conformada por todas las matrices 3×3 anti-simétricas y sin traza. Efectivamente, si J_1, J_2, J_3 son tres matrices generadores de dicha álgebra, tal que $R = e^{\alpha^i J_i}$, podemos identificar el campo vectorial fundamental de $\alpha = \alpha^k J_k$ como

$$\psi_\alpha(q, p) = \alpha^k \left([J_k]^i_j q^j \frac{\partial}{\partial q^i} - p_i [J_k]^i_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right), \quad (1.28)$$

donde $[J_k]^i_j$ son las componentes de J_k en la base $dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$, i. e. $J_k = [J_k]^i_j dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$. Así, empleando (1.28), verificamos que para todo $\alpha \in \mathfrak{so}(3)$ existe la hamiltoniana μ_α :

$$-i_{\psi_\alpha} \Omega = \alpha^k (p_i [J_k]^i_j dq^j + dp_i [J_k]^i_j q^j) = d(\alpha^k p_i [J_k]^i_j q^j) = d\mu_\alpha.$$

De la expresión anterior vemos que el momentum map de la acción Ψ está dado, en la base $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ dual a (J_1, J_2, J_3) , tomando en cuenta que $\alpha^k = \sigma^k(\alpha)$, como

$$\mu(q, p) = p_i [J_k]^i_j q^j \sigma^k. \quad (1.29)$$

Para interpretar geoméricamente el momentum map (1.29) volvamos a la expresión $\mu_\alpha = p_i [J_k]^i_j q^j \alpha^k$ y tomemos en cuenta que las matrices antisimétricas y sin traza como $\alpha = \alpha^k J_k$ al multiplicar por la izquierda a un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ cualquiera, arrojan como resultado el vector $\vec{\alpha} \times \vec{u}$, donde $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ [37]. De esta manera, identificando $\mathfrak{so}(3)$ con el espacio vectorial \mathbb{R}^3 (y su bracket de Lie con el producto cruz), μ_α puede leerse como

$$\mu_\alpha(q, p) = \vec{p} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{q}) = \vec{\alpha} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}), \quad (1.30)$$

donde $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ es el vector de momento lineal de la partícula. De esta manera la hamiltoniana asociada al campo fundamental de $\alpha \in \mathfrak{so}(3)$, identificado como $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, es la proyección del vector de momento angular $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$ en $\vec{\alpha}$. Así, concluimos, que el momentum map (1.29) de la acción inducida por el grupo de rotaciones en el laboratorio, es el momento angular de la partícula⁷.

Ya que conocemos al momentum map, discutamos la propiedad que, para los fines de este trabajo, consideramos más interesante: su capacidad de contener las simetrías de un

⁷Por supuesto, al identificar el álgebra de Lie con \mathbb{R}^3 hemos identificado también el dual al álgebra de Lie con $(\mathbb{R}^3)^*$, y a su vez hemos identificado $(\mathbb{R}^3)^*$ con \mathbb{R}^3 a partir del producto punto, de tal manera que propiamente hablando el momentum map se identifica con el vector de momento angular sólo tras hacer todas las consideraciones anteriores.

sistema hamiltoniano. Y es que de manera similar a como la derivada exterior de una función es un objeto que almacena todas las posibles derivadas de dicha función en cualquier dirección, y para conocer una en específico sólo tiene que alimentarse con el vector tangente a dicha dirección, el momentum map es un objeto capaz de almacenar todas las observables conservadas bajo una transformación generada por un grupo de Lie, y para conocer una en específico sólo tiene que alimentarse con el vector tangente a la transformación del grupo de Lie⁸.

Teorema 1.1 (Versión hamiltoniana del teorema de Noether)

Sea (U, Ω, H) un sistema hamiltoniano y sea $\Psi : G \times U \rightarrow U$ una acción suave, izquierda y hamiltoniana con momentum map $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Si la hamiltoniana H del sistema es invariante bajo la acción del grupo G , es decir, Ψ genera simetrías del sistema dinámico al tenerse

$$H \circ \Psi_\Lambda = H, \quad (1.31)$$

para cualquier $\Lambda \in G$, entonces el momentum map es invariante ante el flujo hamiltoniano del sistema:

$$\mu \circ \varphi^H = \mu. \quad (1.32)$$

Para demostrar el teorema anterior basta considerar cualquier curva integral del campo hamiltoniano X^H , i. e. $\gamma(t) = \varphi^H(\gamma(0), t)$ tal que $X^H \circ \gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}$, así como cualquier elemento $\chi \in \mathfrak{g}$, y mostrar que la cantidad $\mu_\chi \circ \gamma(t) = \langle \mu(\gamma(t)), \chi \rangle$ es constante. Para hacer esto último sólo es necesario un poco de álgebra y recordar que la hamiltoniana H satisface la condición (1.31) de G -invarianza:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \mu \circ \gamma(t), \chi \right\rangle &= \frac{d}{dt} \mu_\chi \circ \gamma(t) = (i_{X^H} d\mu_\chi)(\gamma(t)) \\ &= (-i_{X^H} i_{\psi_\chi} \Omega)(\gamma(t)) = (i_{\psi_\chi} i_{X^H} \Omega)(\gamma(t)) \\ &= -(i_{\psi_\chi} dH)(\gamma(t)) = -\frac{d}{ds} H \circ \Psi_{e^{s\chi}}(\gamma(t)) \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} H(\gamma(t)) \Big|_{s=0} = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

Como ejemplo del teorema (1.1) retomemos la acción del grupo de rotaciones $SO(3)$, *levantada* al espacio fase de una partícula clásica, es decir, la acción (descrita localmente en coordenadas y momentos generalizados) (1.27). En este caso encontramos que el momentum map se puede identificar con el momento angular de la partícula, como queda establecido a partir de la expresión (1.30), de manera que si el sistema está gobernado por una función de energía invariante ante rotaciones, durante la evolución del mismo la cantidad conservada será el momento angular del sistema, tal como ya sabíamos de la mecánica clásica [37].

Lo último que discutiremos sobre el momentum map (por ahora) es que satisface una muy particular relación que involucra la forma en que el grupo G actúa sobre U , vía la acción hamiltoniana Ψ , y la forma en que el grupo G actúa sobre \mathfrak{g}^* por medio de la acción co-Adjunta que definimos en (1.10):

⁸El teorema enunciado, y demostrado, de manera más general para cualquier acción de Poisson, puede consultarse en [37]. En cuanto al nombre de *versión hamiltoniana del teorema de Noether*, pone de manifiesto lo que se discute en la introducción de [41]: "(...) Souriau proved that the moment map is a constant of the motion and provided a geometric generalization of Emmy Noether's invariant prop (invariants of E. Noether's prop are the components of the moment map; but where Noether's approach is purely algebraic, Souriau's approach gives geometric roots and meanings to these invariants)(...)".

Proposición 1.5

Para todo elemento $\Lambda \in G$ y punto $x \in U$, el momentum map $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$, de la acción hamiltoniana $\Psi : G \times U \rightarrow U$, satisface la relación

$$\mu \circ \Psi_\Lambda(x) = \text{Ad}_\Lambda^*(\mu(x)) + \vartheta(\Lambda), \quad (1.33)$$

donde $\vartheta(\Lambda)$ es un covector del espacio vectorial dual al álgebra, imagen del cociclo simpléctico $\vartheta : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$, i. e. del mapeo que satisface, para cualquier par de elementos $\Lambda_1, \Lambda_2 \in G$, la propiedad [37, 22, 43]

$$\vartheta(\Lambda_1\Lambda_2) = \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\vartheta(\Lambda_2)) + \vartheta(\Lambda_1). \quad (1.34)$$

En efecto, la propiedad de transformación (1.33) es una consecuencia directa de la propiedad (1.18), que satisfacen los campos fundamentales bajo la acción de G , y de la naturaleza misma de la acción hamiltoniana que es simpléctica, i. e. notemos que para cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(U)$, elemento del álgebra $\chi \in \mathfrak{g}$ y punto $x \in U$, las evaluaciones $i_X d(\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda)$ y $i_X d\mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}$ son iguales

$$\begin{aligned} i_X d(\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda)(x) &= i_X d([\Psi_\Lambda]^* \mu_\chi)(x) = i_X([\Psi_\Lambda]^* d\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda)(x) = i_X(-[\Psi_\Lambda]^* i_{\psi_\chi} \Omega \circ \Psi_\Lambda)(x) \\ &= -\Omega(\Psi_\Lambda(x))(\psi_\chi, [\Psi_\Lambda]_* X) = -([\Psi_\Lambda]^* \Omega \circ \Psi_\Lambda)(x)([\Psi_{\Lambda^{-1}}]_* \psi_\chi, X) \\ &= -\Omega(x)(\psi_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}, X) = i_X(-i_{\psi_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}} \Omega)(x) = i_X d\mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}, \end{aligned}$$

por lo tanto $\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda$ y $\mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}$ como funciones sobre U (con valores en \mathfrak{g}^*) deben diferir por una constante sobre U , i. e. $\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda - \mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)} = \vartheta(\Lambda, \chi)$. Al respecto, no resulta complicado ver que el miembro izquierdo de la ecuación anterior es lineal en χ ,

$$\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda - \mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)} = \langle \mu \circ \Psi_\Lambda, \chi \rangle - \langle \mu, \text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi) \rangle = \langle \mu \circ \Psi_\Lambda - \text{Ad}_\Lambda^*(\mu), \chi \rangle,$$

por lo tanto, el miembro derecho $\vartheta(\Lambda, \chi)$ también debe ser, para cada $\Lambda \in G$, un mapeo lineal en χ , i. e. $\vartheta(\Lambda, \chi) = \langle \vartheta(\Lambda), \chi \rangle$, de donde obtenemos el resultado esperado (1.33). Respecto a la propiedad (1.34) que satisface $\vartheta : \Lambda \mapsto \mu \circ \Psi_\Lambda(x) - \text{Ad}_\Lambda^*(\mu(x))$ (para cualquier $x \in U$), es consecuencia de la naturaleza izquierda de Ψ y Ad^* :

$$\begin{aligned} \vartheta(\Lambda_1\Lambda_2) &= \mu \circ \Psi_{\Lambda_1\Lambda_2}(x) - \text{Ad}_{\Lambda_1\Lambda_2}^*(\mu(x)) = \mu \circ \Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2}(x) - \text{Ad}_{\Lambda_1}^* \circ \text{Ad}_{\Lambda_2}^*(\mu(x)) \\ &= \mu \circ \Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2}(x) - \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu \circ \Psi_{\Lambda_2}(x)) + \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu \circ \Psi_{\Lambda_2}(x)) - \text{Ad}_{\Lambda_1}^* \circ \text{Ad}_{\Lambda_2}^*(\mu(x)) \\ &= (\mu \circ \Psi_{\Lambda_1} - \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu)) \circ \Psi_{\Lambda_2}(x) + \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu \circ \Psi_{\Lambda_2}(x) - \text{Ad}_{\Lambda_2}^*(\mu(x))) \\ &= \vartheta(\Lambda_1) + \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\vartheta(\Lambda_2)). \end{aligned} \quad \diamond$$

Un caso especial de momentum maps se obtiene cuando el cociclo ϑ de (1.33) es cero y se dice que el momentum map es G -equivariante (o simplemente equivariante) [37, 22, 43]:

$$\mu \circ \Psi_\Lambda = \text{Ad}_\Lambda^*(\mu). \quad (1.35)$$

Una forma más directa de entender la equivarianza del momentum map resulta de identificar $\mu \circ \Psi_\Lambda$ como el pullback $[\Psi_\Lambda]^*\mu$, en cuyo caso vemos que dicho pullback actúa por medio de la acción co-Adjunta (véase el diagrama de conmutación (1.3)). Otra forma interesante de entender la equivarianza es pensando en el momentum map como un mapeo que toma las G -órbitas de un punto $x \in U$, i. e.

$$\mathcal{O}_\Psi(x) = \{\Psi_\Lambda(x)\}_{\Lambda \in G}, \quad (1.36)$$

y las mapea en G -órbitas del punto $\mu(x) \in \mathfrak{g}^*$, i. e.

$$\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\mu(x)) = \{\text{Ad}_\Lambda^*(\mu(x))\}_{\Lambda \in G}. \quad (1.37)$$

De esta manera μ identifica regiones de U con regiones de \mathfrak{g}^* : $\mu(\mathcal{O}_\Psi(x)) = \mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\mu(x))$.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \\
 \Psi_\Lambda \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_\Lambda^* \\
 U & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^*
 \end{array}$$

Figura 1.3: Diagrama de conmutación de un momentum map equivariante

En el ejemplo que desarrollamos durante esta sección, del grupo de rotaciones actuando en el espacio fase de una partícula, vemos que el momentum map (1.29) es equivariante, empleando la expresión (1.9) para la acción Adjunta bajo representación matricial, i. e.

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{Ad}_R(\alpha)} \circ \Psi_R(q, p) &= \alpha^k p'_i [\text{Ad}_R(J_k)]^i_j q'^j = \alpha^k p_a [R^T]^a_i R^i_b [J_k]^b_c [R^T]^c_j R^j_d q^d \\
 &= \alpha^k p_a \delta_b^a [J_k]^b_c \delta_c^d q^d = \alpha^k p_a [J_k]^a_c q^c = \mu_\alpha(q, p).
 \end{aligned}$$

2.1 Levantamientos hamiltonianos de acciones

En esta subsección nuestro objetivo es presentar un tipo muy particular de acción hamiltoniana cuyo momentum map satisface (1.35) por construcción, y es que en general la propiedad de equivarianza es un reflejo tanto del grupo de Lie G como de la forma en que actúa sobre una variedad simpléctica⁹.

Para nuestra construcción la variedad simpléctica (U, Ω) será el haz cotangente de una variedad M de dimensión $D = \frac{n}{2}$, i. e. $U = T^*M$ tal que $\dim(U) = n = 2D$, con proyección natural $\pi : T^*M \rightarrow M$ y la forma simpléctica natural de los haces cotangentes [39]

$$\Omega(u) = d\vartheta(u), \quad (1.38)$$

⁹Como caso muy particular, si un grupo de Lie es compacto, siempre puede escogerse un representante en la clase de equivalencia del momentum map que sea equivariante. Una demostración bastante interesante, por el hecho de ser constructiva, se puede revisar en [37].

donde $\vartheta \in \Lambda^1(T^*M)$ es la llamada 1-forma canónica, definida para todo punto $u = (x, p) \in T^*M$, donde $x \in M$ y $p \in T_x^*M$, como [39]

$$\vartheta(u) = \vartheta(x, p) = [\pi(u)]^*p, \quad (1.39)$$

es decir, $\vartheta(u)$ toma un vector $X \in T_u(T^*M)$ y evalúa su proyección $[\pi(u)]_*X \in T_{\pi(u)}M$ en el elemento de la fibra correspondiente a $u = (x, p) \in T^*M$, i. e. en $p \in T_x^*M$.

Un hecho importante de los haces cotangentes es que dado cualquier sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^D) en un abierto de M , sobre su imagen bajo π^{-1} (que es un abierto en T^*M) podemos construir un sistema de coordenadas de Darboux de la forma $(x^1, \dots, x^D, p_1, \dots, p_D)$, donde p_i es la componente i -ésima de los covectores p en las fibras encima de U , en la base cotangente generada por las x 's [39], es decir

$$p_i = i_{\frac{\partial}{\partial x^i}} p. \quad (1.40)$$

En las de coordenadas $(x's, p's)$, (1.39) se ve localmente como $\vartheta(x, p) = p_i dq^i$ y, en consecuencia, $\Omega(x, p) = dp_i \wedge dq^i$, como debe ser en un sistema de coordenadas de Darboux.

Sea ahora $\Psi : G \times M \rightarrow M$ una acción suave e izquierda del grupo de Lie G sobre la variedad M , construimos su *levantamiento* hacia el haz cotangente T^*M como la acción $\Psi : G \times T^*M \rightarrow T^*M$ definida como la familia de diffeomorfismos $\{\Psi_\Lambda\}_{\Lambda \in G}$ dados por

$$\Psi_\Lambda(u) = \Psi_\Lambda(x, p) = (\Psi_\Lambda(x), [\Psi_\Lambda^{-1}]^*p). \quad (1.41)$$

Geoméricamente la acción (1.41) corresponde a la forma natural en que esperamos que cambie una 1-forma sobre M bajo un diffeomorfismo Ψ . En las coordenadas locales $(x's, p's)$ el diffeomorfismo (1.41) aparece como la transformación de coordenadas

$$\Psi_\Lambda(x^1, \dots, x^D, p_1, \dots, p_D) = (\Psi_\Lambda^1(x), \dots, \Psi_\Lambda^D(x), p_i \frac{\partial \Psi_{\Lambda^{-1}}^i}{\partial x^1}(x), \dots, p_i \frac{\partial \Psi_{\Lambda^{-1}}^i}{\partial x^D}(x)). \quad (1.42)$$

Naturalmente vemos que (1.42) es una generalización de la acción (1.27) que utilizamos de ejemplo en la sección anterior, y en este sentido también se trata de una acción hamiltoniana, y lo más interesante, como ya adelantábamos, es que su momentum map asociado resulta ser equivariante.

Proposición 1.6

Sea $\Psi : G \times T^*M \rightarrow T^*M$ el levantamiento cotangente de una acción suave e izquierda $\Psi : G \times M \rightarrow M$, tal como está definida en (1.41); esta acción es suave, izquierda y hamiltoniana, con campos fundamentales que satisfacen la condición

$$[\pi(u)]_*\psi_\chi(u) = \psi_\chi(\pi(u)), \quad (1.43)$$

donde $\psi_\chi(x) = \frac{d}{ds} \Psi_{e^{sx}}(x)|_{s=0} = \xi_\chi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ son los campos fundamentales de la acción Ψ , y con momentum map $\mu : T^*M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ equivariante dado por la expresión [37, 39]

$$\mu_\chi(u) = i_{\psi_\chi} \theta(u) = i_{\psi_\chi} \theta(x, p) = p_i \xi_\chi^i(x). \quad (1.44)$$

La suavidad de Ψ está asegurada por la definición (1.41), tomando en cuenta que $\Psi_\Lambda \in \text{Diff}(M)$ es un difeomorfismo sobre el espacio base M para cada $\Lambda \in G$. Con respecto a la naturaleza izquierda de Ψ , esto tampoco resulta complicado de probar tomando en cuenta que Ψ es izquierda. En efecto, sean $\Lambda_1, \Lambda_2 \in G$ y $u = (x, p) \in T^*M$ elementos cualquiera:

$$\begin{aligned} \Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2}(x, p) &= \Psi_{\Lambda_1}(\Psi_{\Lambda_2}(x), [\Psi_{\Lambda_2}^{-1}]^*p) \\ &= (\Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2}(x), [\Psi_{\Lambda_1}^{-1}]^* \circ [\Psi_{\Lambda_2}^{-1}]^*p) \\ &= (\Psi_{\Lambda_1\Lambda_2}(x), [\Psi_{\Lambda_2^{-1}} \circ \Psi_{\Lambda_1^{-1}}]^*p) = (\Psi_{\Lambda_1\Lambda_2}(x), [\Psi_{\Lambda_1\Lambda_2}^{-1}]^*p) = \Psi_{\Lambda_1\Lambda_2}(x, p). \end{aligned}$$

La naturaleza simpléctica de Ψ se puede corroborar notando que la 1-forma (1.39) es invariante bajo el pullback generado por cualquier difeomorfismo Ψ_Λ , pues siendo $X \in T_{(x,p)}(T^*M)$ un vector cualquiera, se satisface

$$\begin{aligned} i_X([\Psi_\Lambda]^*\vartheta)(x, p) &= \vartheta(\Psi_\Lambda(x, p))([\Psi_\Lambda]_*X) \\ &= ([\Psi_\Lambda^{-1}]^*p)(\Psi_\Lambda(x))(\pi_* \circ [\Psi_\Lambda]_*X) \\ &= p(x)([\Psi_{\Lambda^{-1}}]_* \circ \pi_* \circ [\Psi_\Lambda]_*X) \\ &= p(x)([\Psi_{\Lambda^{-1}} \circ \pi \circ \Psi_\Lambda]_*X) \\ &= p(x)([\Psi_{\Lambda^{-1}} \circ \Psi_\Lambda \circ \pi]_*X) = p(x)(\pi_*X) = i_X\vartheta(x, p), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que la acción Ψ está π -relacionado con la acción Ψ , i. e.

$$\pi \circ \Psi_\Lambda = \Psi_\Lambda \circ \pi. \quad (1.45)$$

Como $[\Psi_\Lambda]^*\vartheta = \vartheta$, entonces $[\Psi_\Lambda]^*\Omega = [\Psi_\Lambda]^*d\vartheta = d([\Psi_\Lambda]^*\vartheta) = d\vartheta = \Omega$, para todo $\Lambda \in G$, como queríamos probar.

Con respecto a los campos fundamentales (1.43), conviene emplear nuevamente la π -relación (1.45), i. e.

$$[\pi(u)]_*\psi_\chi(u) = \left. \frac{d}{ds} \pi \circ \Psi_{e^{s\chi}}(u) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}} \circ \pi(u) \right|_{s=0} = \psi_\chi \circ \pi(u).$$

Para mostrar el carácter hamiltoniano de la acción Ψ y, al mismo tiempo, deducir la expresión (1.44) del momentum map asociado, recordemos que ϑ es invariante ante los difeomorfismos Ψ_Λ , y como consecuencia de ello y de la fórmula mágica de Cartan, tenemos

$$\mathcal{L}_{\psi_\chi}\vartheta = i_{\psi_\chi}d\vartheta + d(i_{\psi_\chi}\vartheta) = 0,$$

es decir,

$$-i_{\psi_\chi}d\vartheta = -i_{\psi_\chi}\Omega = d(i_{\psi_\chi}\vartheta),$$

de donde identificamos el momentum map

$$\mu_\chi(x, p) = i_{\psi_\chi}\vartheta(x, p) = p(x)([\pi]_*\psi_\chi) = p(x)(\psi_\chi) = p_i\xi^i(x).$$

Para finalizar la demostración comprobemos que el momentum map recién obtenido es equivariante, i. e. satisface la ley de transformación (1.35), como consecuencia de estar construido como una evaluación de la 1-forma canónica ϑ :

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda(u) &= (i_{\psi_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)}}\vartheta) \circ \Psi_\Lambda(u) \\ &= (i_{[\Psi_\Lambda]_*\psi_\chi}\vartheta) \circ \Psi_\Lambda(u) = i_{\psi_\chi}([\Psi_\Lambda]^*\vartheta \circ \Psi_\Lambda)(u) = i_{\psi_\chi}\vartheta(u) = \mu_\chi(u). \quad \diamond \end{aligned}$$

CAPÍTULO

2

ESTADÍSTICA DE GRUPOS DE LIE

En este capítulo revisaremos el concepto de estado estadístico de equilibrio que aparece en los trabajos de Souriau et al [22, 23, 24, 25, 26], que conforman la rama de la física matemática conocida como termodinámica de grupos de Lie. Trabajaremos a fondo con este concepto, definido de manera general para cualquier sistema hamiltoniano con simetrías caracterizadas vía la acción hamiltoniana de un grupo de Lie, y en particular veremos que ante el grupo abeliano de traslaciones temporales, generado por el flujo de la función hamiltoniana del sistema, el concepto se reduce al estado estadístico estándar definido, por ejemplo, en [44] a través del concepto de colectividad o *ensamble*, con el cual puede modelarse un sistema en equilibrio termodinámico. La importancia de este concepto se hará manifiesta en la segunda parte de este trabajo cuando lo empleemos para integrar el efecto del espaciotiempo de fondo en un sistema simple de gas ideal, generalizando con esto el trabajo de Souriau en sistemas relativistas al incluir la presencia de campos gravitacionales.

Para llevar a cabo el estudio comentado en el párrafo anterior, es necesario, como el mismo sustantivo en *estado estadístico de equilibrio* lo indica, hacer uso de la probabilidad y estadística, que introduciremos en las variedades simplécticas a partir de la teoría de la medida. Al respecto, el presente trabajo no pretende ser un tratado en teoría de la medida, sólo emplearemos algunos conceptos básicos que vale la pena definir de la manera más sencilla y formal que podamos¹.

Sea, durante esta introducción, X un conjunto cualquiera cuyos subconjuntos representaremos como $x \subset X$. La idea intuitiva de medir a X es poder asignarle un número real o *valor de medida* a cada *parte* (subconjunto) de X , pero esto lo debemos hacer siguiendo una lógica formal bien establecida. En este sentido, el primer elemento que debemos considerar para plantear la idea de una medida sobre X es qué subconjuntos de X vamos a medir. En este sentido deseamos poder medir la noción básica de no tener ningún trozo de X , es decir, poder medir el subconjunto vacío \emptyset . Similarmente queremos poder medir X mismo.

¹Excelente documentación sobre teoría de la medida, probabilidad y estadística, puede encontrarse en [45, 46], y en los trabajos ahí citados.

Para cualquier otro subconjunto de $x \subset X$ que queramos medir, debemos tomar en cuenta que, ya habiendo establecido que podemos medir el todo X , lo natural sería poder darle una medida al complemento $x^c = X - x$, y que dicha medida esté relacionada con la de X y con la de x . Similarmente, juntando cualquier cantidad de subconjuntos a los que ya les hayamos asignado una medida, deberíamos obtener también otro subconjunto con una medida, y dicha medida debería estar relacionada con las medidas individuales de cada subconjunto que lo conforman vía la operación de unión. Este razonamiento se formaliza en el concepto de una σ -álgebra Σ de X , definida como una familia de subconjuntos de X tal que contiene al vacío, es cerrada bajo la toma de complementos y es cerrada bajo la unión numerable² de cualquier sucesión de sus elementos, i. e.

$$\emptyset \in \Sigma, \quad (2.1)$$

$$\forall x \in \Sigma, \quad x^c = X - x \in \Sigma, \quad (2.2)$$

$$\forall x_1, x_2, x_3, \dots \in \Sigma, \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} x_i \in \Sigma. \quad (2.3)$$

De las condiciones (2.1) y (2.2) se deduce que toda σ -álgebra de X contiene a X mismo, así como usando (2.2), (2.3) y las leyes de Morgan³, vemos que las σ -álgebras también son cerradas bajo cualquier intersección numerable de sus elementos.

No es difícil cerciorarse de que dado un conjunto X hay, en general, muchas σ -álgebras infinitas. Por ejemplo, asociado a cualquier conjunto se tiene la σ -álgebra trivial dada por $\Sigma = \{\emptyset, X\}$. No obstante, es común buscar σ -álgebras que de antemano contengan ciertos subconjuntos específicos de X . En este sentido, sea \mathcal{X} una colección de subconjuntos de X . La intersección de todas las σ -álgebras de X que contienen a \mathcal{X} resulta ser también una σ -álgebra que, por construcción, es la menor de todas las σ -álgebras que contiene a la colección \mathcal{X} . A esta construcción la representaremos como $\sigma(\mathcal{X})$ y diremos que es la σ -álgebra construída por \mathcal{X} . Un ejemplo interesante, de hecho, el que vamos a utilizar en este capítulo, se da cuando el conjunto X forma parte de un espacio topológico (X, τ) . La σ -álgebra $\sigma(\tau)$ generada a partir de los abiertos de este espacio topológico resulta tan especial y particular que recibe el nombre particular de σ -álgebra de Borel del espacio topológico (X, τ) , y suele representarse como $\sigma(\tau) = \mathfrak{B}(X)$ [45]. ¿Qué *aspecto* tiene una σ -álgebra de Borel? Por supuesto, depende de la definición misma que da la topología τ de qué entendemos por un conjunto abierto y cerrado en X , pero por construcción contiene al vacío \emptyset así como a X , además de todos los abiertos en τ y, por ende, todos los cerrados. Pero además contiene toda clase de uniones e intersecciones de conjuntos abiertos y cerrados⁴.

Al par (X, Σ) se le conoce como un espacio medible, y a los subconjuntos $x \in \Sigma$ se les denomina conjuntos medibles, en el sentido de que teniendo las piezas necesarias para

²Una sucesión es numerable cuando existe una función inyectiva entre sus elementos y un subconjunto de los números naturales, es decir, cuando es finita o cuando, siendo infinita, cada elemento de la sucesión puede ponerse en correspondencia con un único número natural [45].

³ $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i)^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} x_i^c$ [45].

⁴Aunque la noción de σ -álgebra de Borel es tan amplia como la noción misma de topología, puede resultar útil pensar en el ejemplo sencillo de la recta real como espacio topológico construído por los abiertos de la forma (a, b) para $a < b \in \mathbb{R}$ (así como todas las posibles uniones finitas o infinitas y todas las posibles intersecciones finitas de estos). En $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ encontramos entonces a \emptyset , y a \mathbb{R} , a todos los abiertos (a, b) , pero también a los cerrados $[a, b]$, y a intersecciones del tipo $(a, b]$, $[a, b)$ y cualquier tipo de unión e intersección de los elementos ya descritos.

ser medido en Σ , podemos definir sobre (X, Σ) la medida μ entendida como el mapeo⁵ $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ tal que asigna el valor de medida cero al vacío y es aditiva-numerable bajo la unión de cualquier cantidad de elementos disjuntos a pares en Σ [45], i. e.

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad (2.4)$$

$$\forall x_1, x_2, x_3, \dots \in \Sigma : x_i \cap x_j = \emptyset \quad (i \neq j), \quad \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} x_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(x_i). \quad (2.5)$$

A la terna (X, Σ, μ) , donde (X, Σ) es un espacio medible y μ una medida sobre él, se le conoce como un espacio medido. En particular si la medida μ es tal que $\mu(X) = 1$, entonces se dice que la medida es una medida de probabilidad y que el espacio medido por dicha medida de probabilidad es un espacio probabilístico [45]. En este caso las condiciones (2.4) y (2.5), además de la condición de no negatividad en μ , se conocen como los axiomas de probabilidad de Kolmogorov, y de ellos se deducen las reglas de la probabilidad [45, 46]:

$$\mu(x) \leq \mu(y), \quad \forall x \subset y \in \Sigma, \quad (2.6)$$

$$\mu(x^c) = 1 - \mu(x), \quad (2.7)$$

$$0 \leq \mu(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Sigma, \quad (2.8)$$

$$\mu(x \cup y) = \mu(x) + \mu(y) - \mu(x \cap y). \quad (2.9)$$

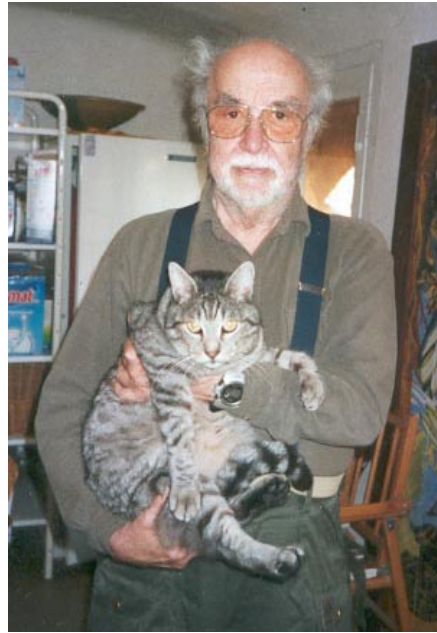


Figura 2.1: Jean-Marie Souriau (1922-2012 †).

⁵El rango de μ es la parte no negativa de la compactificación de un punto en \mathbb{R} , de tal manera que se aplican las reglas $x + \infty = +\infty$ para todo $x \in [0, +\infty]$, así como $x(+\infty) = +\infty$ para $x \in (0, +\infty)$ con $0(+\infty)0$. Las operaciones $(+\infty)(+\infty)$ y $+\infty / +\infty$ no están definidas como operaciones válidas [45].

1 Estados estadísticos

Sea (U, Ω) una variedad simpléctica cualquiera de dimensión $\dim(U) = 2n$. Comencemos por decir que U es una variedad orientable [39]. En efecto, dado que, por definición, la forma simpléctica es una 2-forma no degenerada, a partir de su n -ésima potencia exterior,

$$\Omega^{\wedge n} = \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{n\text{-veces}},$$

siempre podemos construir la top-forma no degenerada

$$\omega_{\Omega} = \frac{\Omega^{\wedge n}}{n!}. \quad (2.10)$$

La top-forma (2.10), que llamaremos de Liouville, es la forma natural de volumen en U , y como tal define una medida tipo-Lebesgue sobre el espacio medible $(U, \mathfrak{B}(U))$, conocida como la medida de Liouville (o medida simpléctica), a través de las integrales [26, 39]

$$\lambda_{\omega}(A) = \int_A \omega_{\Omega}(u). \quad (2.11)$$

En particular, empleando coordenadas de Darboux, notamos que la medida de Liouville del conjunto medible de Borel A es la medida de Lebesgue de su imagen en \mathbb{R}^{2n} bajo el mapeo de la mencionada carta de Darboux, i. e. λ_{ω} localmente se ve como⁶

$$\lambda_{\omega}(A) = \int_A d^n q d^n p, \quad (2.12)$$

donde $d^n q = dq^1 dq^2 \dots dq^n$ y $d^n p = dp_1 dp_2 \dots dp_n$. Esto, más allá de ser una consecuencia del teorema de Darboux que establece que toda variedad simpléctica es localmente equivalente a $(\mathbb{R}^{2n}, dp_i \wedge dq^i)$, es una consecuencia de que la medida de Liouville se define a través de una forma de volumen, y como tal $\lambda_{\omega}(A)$ debe interpretarse como el volumen del conjunto de Borel A . Al respecto de esta forma de calcular volúmenes sobre U , una de las propiedades más interesantes de λ_{ω} es que resulta ser invariante bajo cualquier mapeo que preserve la estructura simpléctica.

Proposición 2.1

Sea $\varphi \in \text{Diff}(U)$ un simplectomorfismo cualquiera de la variedad simpléctica (U, Ω) , i. e. $\varphi^* \Omega = \Omega$, entonces para todo conjunto A que sea λ_{ω} -medible se satisface

$$\lambda_{\omega}(\varphi(A)) = \lambda_{\omega}(A). \quad (2.13)$$

⁶Con el afán de mantener la notación lo más simple posible hemos optado por prescindir de la definición y uso explícito de cartas y atlas en las expresiones que usamos, bajo la simple advertencia de que son *expresiones locales*. De esta manera (2.11) debe entenderse como $\lambda_{\omega}(A) = \int_{\varphi(A)} d^n q \wedge d^n p$, donde $\varphi : V \rightarrow W$ es el mapeo de coordenadas de Darboux de la carta (V, φ) , i. e. es un difeomorfismo entre el abierto $V \subset U$ que contiene a A , y el abierto $W \subset \mathbb{R}^{2n}$, tal que φ pone las coordenadas $\varphi(u) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ sobre los puntos en todo V , tales que $[\varphi(u)]^*(dp_i \wedge dq^i) = \Omega(u)$.

La invarianza de la medida (2.11) ante los simplectomorfismos en (U, Ω) se obtiene a raíz de la propia invarianza de la top-forma de volumen (2.10) bajo simplectomorfismos,

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega_\Omega &= \varphi^*\left(\frac{\Omega^{\wedge n}}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\varphi^*(\Omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega) \\ &= \frac{1}{n!}(\varphi^*\Omega \wedge \varphi^*\Omega \wedge \dots \wedge \varphi^*\Omega) = \frac{1}{n!}(\Omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega) = \frac{\Omega^{\wedge n}}{n!} = \omega_\Omega.\end{aligned}$$

De esta manera, aplicando las propiedades de integración de las formas diferenciales, el resultado (2.13) se obtiene directamente:

$$\lambda_\omega(\varphi(A)) = \int_{\varphi(A)} \omega_\Omega(u) = \int_A \varphi^*\omega_\Omega(u) = \int_A \varphi^*\omega_\Omega \circ \varphi(v) = \int_A \omega_\Omega(v) = \lambda_\omega(A). \quad \diamond$$

Establecida la medida de Borel, definimos un estado estadístico como una medida probabilística λ_ρ sobre el espacio medible $(U, \mathfrak{B}(U))$, definida vía una función de distribución de probabilidad (pdf, por sus siglas en inglés) $\rho : U \rightarrow [0, +\infty)$ tal que está relacionada con la medida de Liouville en la forma⁷ $\lambda_\rho = \rho\lambda_\omega$ [26], i. e.

$$\lambda_\rho(A) = \int_A d\lambda_\omega(u) \rho(u) = \int_A \omega_\Omega(u) \rho(u). \quad (2.14)$$

Las condiciones bajo las cuales un estado estadístico existe, son consideradas en el llamado teorema de Radon-Nikodym, estableciendo que λ_ρ debe ser absoluta y continuamente convergente con respecto a λ_ω : todo conjunto con medida λ_ω cero tenga, también, medida λ_ρ cero, i. e. $\lambda_\rho(A) = 0$ para todo $A \in \mathfrak{B}(U)$ tal que $\lambda_\omega(A) = 0$ [47].

Tal como se intuye desde la definición misma que dimos de estado estadístico, este es complementemente equivalente a la pdf que lo caracteriza, de tal manera que en ocasiones nos referiremos directamente a ρ cuando hablemos de un estado estadístico. Al respecto, veamos que como función de densidad de probabilidad, ρ naturalmente es una función integrable con respecto a la medida de Liouville, que está normalizada a la unidad:

$$1 = \int_U d\lambda_\omega(u) \rho(u). \quad (2.15)$$

Dada la integrabilidad de ρ respecto a la medida de Liouville, para cualquier otra función f que sea integrable, la integral del producto $f\rho$, que denominamos el valor promedio de f en el estado estadístico λ_ρ , está bien definida [26] y se denota como

$$\langle f \rangle_\rho = \int_U d\lambda_\omega(u) \rho(u) f(u). \quad (2.16)$$

Una propiedad importante de los promedios (2.16), que se deduce a partir de las propiedades de linealidad de la integral $\int_U d\lambda_\omega(u)(\dots)$, es que se trata de una asignación lineal en las funciones, es decir, para constantes reales cualquiera $\alpha^i \in \mathbb{R}$ y funciones integrables f_i , se satisface

$$\langle \alpha^i f_i \rangle_\rho = \alpha^i \int_U d\lambda_\omega(u) \rho(u) f_i(u) = \alpha^i \langle f_i \rangle_\rho. \quad (2.17)$$

⁷Con respecto a la referencia [26] lo que hemos definido es lo que ahí mencionan como estado estadístico suave, que son los únicos estados estadísticos que usaremos nosotros.

En un sistema hamiltoniano hay otra interpretación para un estado estadístico, que es particularmente útil en física⁸. Consideremos ahora que (U, Ω) es parte del sistema hamiltoniano (U, Ω, H) que describe la dinámica de un sistema de N partículas a través del flujo hamiltoniano $\varphi^H : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$. En este sentido U es un espacio fase, modelado la mayoría de las veces como un haz cotangente de algún espacio de configuración o, simplemente, de parámetros físicos, cuya dimensión crece de manera considerable conforme el número de partículas aumenta. Por ejemplo, para un sistema mecánico, la dimensión de U suele ser del orden $\sim 6N$. Computacionalmente hablando, esto complica la descripción hamiltoniana del sistema a través del tiempo, ya que para encontrar el estado $u(t) \in U$ al tiempo t , es necesario resolver cerca de $6N$ ecuaciones diferenciales acopladas y aplicarles $6N$ condiciones iniciales (las ecuaciones de Hamilton con posiciones y momentos generalizados iniciales).

Una alternativa que surge al enfoque analítico en sistemas de muchas partículas, es el enfoque estadístico que propone, en vez de obtener de forma exacta $u(t)$, generar suficientes copias (infinitas, de ser necesario [44]) del sistema hamiltoniano, cada una con su propio estado $u'(t)$ que puede diferir del estado real $u(t)$ sólo a nivel microscópico, pero que macroscópicamente refleja las mismas propiedades. Entonces, como si se tratara de un experimento, tomamos cada estado $u'(t)$ de cada copia del sistema al tiempo t como una posible solución al problema real de encontrar $u(t)$, y dado el gran número de copias, podemos hacer una estadística al respecto. La estadística resultante es lo que interpretamos como un estado estadístico del sistema hamiltoniano, es decir, transformamos el estado del sistema $u(t)$ en una variable aleatoria con valores $u'(t)$ que distribuimos sobre U con ayuda de la pdf $\rho(t)$. Así, físicamente, interpretamos $\lambda_\rho(A)$ (localmente $\int_A \rho(q, p) d^{3N}q d^{3N}p$) como la probabilidad de encontrar al sistema en el conjunto medible A .

Si consideramos el enfoque estadístico anterior a todo tiempo, podemos plantear una descripción dinámica a través de una colección infinita de estados estadísticos del sistema hamiltoniano, uno para cada tiempo t . Veamos que estos estados estadísticos evolucionan con el mismo flujo hamiltoniano que el estado real $u(t)$ del sistema.

Teorema 2.1 (Teorema de Liouville)

Sea (U, Ω, H) un sistema hamiltoniano con flujo hamiltoniano $\varphi^H : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$. Consideremos la asignación dinámica $t \mapsto \lambda_{\rho(t)}$ de estados estadísticos de este sistema a cada tiempo $t \in \mathbb{R}$, equivalentemente la asignación $t \mapsto \rho(t)$ de pdf's, que interpretamos como una distribución de probabilidad dependiente del tiempo. Esta distribución satisface la ecuación de evolución de Liouville [44]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathcal{L}_{X^H} \rho, \quad (2.18)$$

donde $X^H \in \mathfrak{X}(U)$ es el campo vectorial hamiltoniano de H , i. e. el generador infinitesimal de φ^H que satisface $-i_{X^H} \Omega = dH$.

El resultado (2.18) es una consecuencia directa de la conservación del volumen de los conjuntos Borel-medibles de U bajo la evolución del sistema, i. e. la invarianza de λ_ω ante el flujo simpléctico φ^H (proposición (2.1)), y de la conservación total de la probabilidad de que, a cualquier tiempo, el estado del sistema se encuentre en U , i. e. el hecho de que para

⁸Esta interpretación se da a través del concepto de *colectividad* o *ensamble*, el cual no definimos explícitamente aquí. Para una discusión más adecuada sobre la teoría de ensambles, véase [44].

toda $t \in \mathbb{R}$ se debe satisfacer

$$\int_U d\lambda_\omega(u) \rho(t, u) = 1.$$

En efecto, tomando en cuenta la expresión anterior y que $\varphi_t^H(U) = U$, encontramos

$$\frac{d}{ds} \int_{\varphi_{s-t}^H(U)} d\lambda_\omega(u) \rho(s, u) \Big|_{s=t} = \frac{d}{ds} \int_U d\lambda_\omega(u) \rho(s, u) \Big|_{s=t} = \frac{d}{ds} (1)_{s=t} = 0,$$

pero por otra parte, el cálculo anterior nos lleva a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\varphi_{s-t}^H(U)} d\lambda_\omega(u) \rho(s, u) \Big|_{s=t} &= \frac{d}{ds} \int_U [\varphi_{s-t}^H]^* (d\lambda_\omega \circ \varphi_{s-t}^H(v) \rho(s, \varphi_{s-t}^H(v))) \Big|_{s=t} \\ &= \frac{d}{ds} \int_U d\lambda_\omega(v) [\varphi_{s-t}^H]^* \rho(s, \varphi_{s-t}^H(v)) \Big|_{s=t} \\ &= \int_U d\lambda_\omega(v) \frac{d}{ds} [\varphi_{s-t}^H]^* \rho(s, \varphi_{s-t}^H(v)) \Big|_{s=t} \\ &= \int_U d\lambda_\omega(v) \left(\frac{d}{ds} \rho(t, \varphi_{s-t}^H(v)) \Big|_{s=t} + \frac{\partial \rho}{\partial s}(s, v) \Big|_{t=0} \right) \\ &= \int_U d\lambda_\omega(v) \left(\mathcal{L}_{X^H} \rho(t, v) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, v) \right) = 0. \end{aligned}$$

La integral anterior se puede interpretar como la integral de la top-forma $(\mathcal{L}_{X^H} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}) \omega_\Omega$, y entonces sólo puede ser cero si ρ satisface (2.18) (pues ω_Ω es no degenerada). \diamond

2 Estados estadísticos de Gibbs

Comencemos esta sección definiendo el soporte de una medida probabilística de Borel μ , en un espacio medido $(U, \mathfrak{B}(U), \mu)$, como el complemento de la unión de todos los conjuntos de Borel con μ -medida cero [45, 46], i. e.

$$W = \text{supp}(\mu) = \left(\bigcup_{A_i \in W_0} A_i \right)^c = \bigcap_{A_i \in W_0} A_i^c, \quad (2.19)$$

donde $W_0 = \{A_i \in \mathfrak{B}(U) : \mu(A_i) = 0\}$. Dicho de otra manera, el soporte W de una medida probabilística μ es el menor de todos los cerrados con medida $\mu(W) = 1$, o equivalentemente, tal que la medida de su complemento es cero: $\mu(W^c) = \mu(U) - \mu(W) = 1 - \mu(W) = 0$.

En términos de estados estadísticos y bajo la interpretación física que hemos hecho del estado dinámico de un sistema como una variable aleatoria, podemos pensar que el soporte de una pdf sobre la variedad simpléctica (U, Ω) del sistema hamiltoniano (U, Ω, H) es la región físicamente accesible al sistema, de tal manera que no teniendo ningún sentido encontrar al sistema fuera de la región W , le asignamos una probabilidad cero a su complemento. Un ejemplo de esto es cuando la energía E del sistema se conserva, de manera que el estado dinámico del sistema está obligado a *vagar* sobre una hipersuperficie de nivel $H^{-1}(E)$ sin

salirse de ella, pero ya hablaremos de esto más adelante. Por el momento dejamos establecido que a partir de este momento todas las distribuciones de las que estaremos hablando tendrán soporte W , de manera que las integrales $\int_U d\lambda_\omega(\dots)$ serán cambiadas a integrales de la forma⁹ $\int_W d\lambda_\omega(\dots)$, y dicho soporte será invariante ante el flujo hamiltoniano del sistema (si es que lo hay):

$$\varphi^H(W) = W. \quad (2.20)$$

Un concepto importante asociado a una distribución de probabilidad es su entropía relativa con respecto a la distribución uniforme y constante en el tiempo t , que representaremos como

$$m(t, u) = \frac{\Theta_W(u)}{\lambda_\omega(W)}, \quad (2.21)$$

donde Θ_W es la función característica de W , i. e.

$$\Theta_W(u) = \begin{cases} 1, & u \in W, \\ 0, & u \notin W. \end{cases} \quad (2.22)$$

Naturalmente, (2.21) representa un estado estadístico λ_m en el que el estado del sistema, ante la falta de evidencia alguna, se distribuye sobre W sin alguna preferencia dinámica oculta. Básicamente todos los puntos en W son equiprobables en un experimento donde se observe el estado del sistema. En este sentido la distribución $m(t, u)$ es la que mayor conocimiento nos permite obtener *a posteriori* tomando en cuenta que es la distribución que más ignora sobre el sistema *a priori* al reconocer únicamente que $u(t)$ debe estar en W y no puede estar fuera de W .

La idea presentada sobre la capacidad que tiene una distribución para entregarnos información de un sistema, puede formalizarse definiendo, sobre el espacio de todas las pdf definidas con soporte W , el llamado funcional de entropía [26]

$$\rho \mapsto s(\rho) = \begin{cases} - \int_W d\lambda_\omega(u) \ln(\rho(u)) \rho(u), & \ln(\rho) \text{ es } \lambda_\rho - \text{integrable}, \\ -\infty, & \ln(\rho) \text{ no es } \lambda_\rho - \text{integrable}, \end{cases} \quad (2.23)$$

donde el integrando se define como 0 para todos los puntos en $\rho^{-1}(0)$, i.e. $\ln(\rho(u))\rho(u) = 0$ si $\rho(u) = 0$. Teniendo siempre en mente que la definición en (2.23) es condicional, podemos referirnos a este funcional simplemente como

$$s[\rho] = \langle -\ln(\rho) \rangle_\rho. \quad (2.24)$$

En cuanto a su interpretación probabilística, podemos entender que $-\ln(\rho(u))$ es una cantidad que, referente a la variable aleatoria u , cuantifica la *sorpres*a¹⁰ de que el resultado del experimento se encuentre en u con probabilidad $\rho(u)$: entre menor sea la probabilidad $\rho(u)$ de tener el evento u , mayor es la sorpresa $-\ln(\rho)$. El funcional de entropía mide entonces la sorpresa promedio que genera una distribución. En teoría de la información, s es una generalización continua de la entropía de Shannon que mide el grado de información o conocimiento que puede otorgarnos una distribución discreta de un experimento¹¹.

⁹Cuando el soporte W se interprete como el encajamiento $\varphi(N) = W$ de una subvariedad N a través del mapeo inyectivo $\varphi : N \rightarrow U$, la medida de Liouville λ_ω inducirá una medida $\lambda_\omega|_W$ sobre W [46].

¹⁰Recomendamos revisar el comentario [48], así como la discusión completa, así como la referencia [49] para tener una mejor idea de la interpretación de s .

¹¹Para abordar este punto de vista, véase [26].

En este sentido, no resulta complicado mostrar que la distribución m definida en (2.21), efectivamente es la que genera mayor oportunidad de obtener información en un sistema, tomando en cuenta que es la que menos información a priori (sin fundamentos o evidencias) introduce, pues se trata de un punto crítico del funcional s .

Proposición 2.2

Sea W el soporte para el espacio de funciones de densidad de probabilidad sobre la variedad simpléctica (U, Ω) , y sea m la pdf definida en (2.21), dicha distribución constante y uniforme es el único máximo del funcional de entropía s .

Comencemos recordando que ρ_* es un punto crítico de s si, para toda curva $\tau \rightarrow \rho_\tau$ con $\rho_\tau|_{\tau=0} = \rho_*$, en el espacio de pdf's con soporte W , se satisface la condición [26]

$$\frac{d}{d\tau} s[\rho_\tau]_{\tau=0} = 0. \quad (2.25)$$

Ahora, como para cada τ , ρ_τ es una distribución de probabilidad, en el cálculo del punto crítico debemos tomar en cuenta la condición $\phi_1(\rho) = 0$, donde

$$\phi_1(\rho) = \int_W d\lambda_\omega(u) \rho_\tau(t, u) - 1, \quad (2.26)$$

y esto lo hacemos considerando el multiplicador de Lagrange α . Aplicando el esquema usual de cálculo de variaciones, esto significa que ρ_* satisface

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (s[\rho_\tau] - \alpha \phi(\rho_\tau)) \Big|_{\tau=0} &= - \int_W d\lambda_\omega(u) \frac{d}{d\tau} (\ln(\rho_\tau(t, u)) + \alpha) \rho_\tau(t, u) \Big|_{\tau=0} \\ &= - \int_W d\lambda_\omega(u) \left(\ln(\rho_*(t, u) + 1 + \alpha) \frac{d\rho_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como la integral anterior coincide con la integral de la top-forma $(\ln(\rho_\tau) + 1 + \alpha) \frac{d\rho_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \omega_\Omega$, y sabemos que ω_Ω es no degenerada, para que dicha integral sea cero es necesario tener $(\ln(\rho_\tau) + 1 + \alpha) \frac{d\rho_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0$. Por otra parte, dada la arbitrariedad de la perturbación ρ_τ , en el caso general tendremos $\frac{d\rho_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \neq 0$, entonces el punto crítico debe satisfacer $\ln(\rho_*) + 1 + \alpha = 0$ sobre W , i. e. $\rho_* = e^{-(1+\alpha)} \Theta_W$. Con respecto al multiplicador de Lagrange α , evaluando la condición de normalización de ρ_* , encontramos

$$\phi_1(\rho_*) = \int_W d\lambda_\omega(u) \rho_*(t, u) - 1 = \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-(1+\alpha)} - 1 = e^{-(1+\alpha)} \lambda_\omega(W) - 1 = 0,$$

i. e. $e^{(1+\alpha)} = \lambda_\omega(W)$, de tal suerte que, efectivamente, los puntos críticos de s son de la forma $\rho_*(t, u) = m(t, u)$. Ahora, con la definición de un punto crítico que hemos dado vemos que se trata de un punto que, hasta perturbaciones de órdenes lineales en un parámetro τ , no afectan el valor de la entropía

$$s[m] = \ln(\lambda_\omega(W)),$$

i. e. $s[m_\tau] = s[m] + \mathcal{O}(\tau^2)$. Para poder verificar que además el punto crítico m es el único máximo de S , tenemos que mostrar que para cualquier otra densidad ρ con soporte en W

tenemos $s[\rho] < s[m] = \ln(\lambda_\omega(W))$. Para hacer esto, emplearemos el método utilizado en [26], comenzando por definir la función $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la expresión

$$h : z \mapsto \begin{cases} -z \ln(z), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

No resulta complicado ver que esta función continua es convexa¹², lo que significa que, para cada punto $0 < z_0 < 1$, la curva $(z, \ell(z))$ para ℓ la recta tangente al punto $h(z_0)$, i. e.

$$\ell : z \mapsto h(z_0) + \frac{dh}{dz}(z_0)(z - z_0) = z_0 - z(1 + \ln(z_0)),$$

se encuentra siempre por encima de la gráfica $(z, h(z))$ (véase la figura (2.2)). Esto se traduce en la desigualdad

$$h(z) \leq (z_0 - z) - z \ln(z_0). \quad (2.28)$$

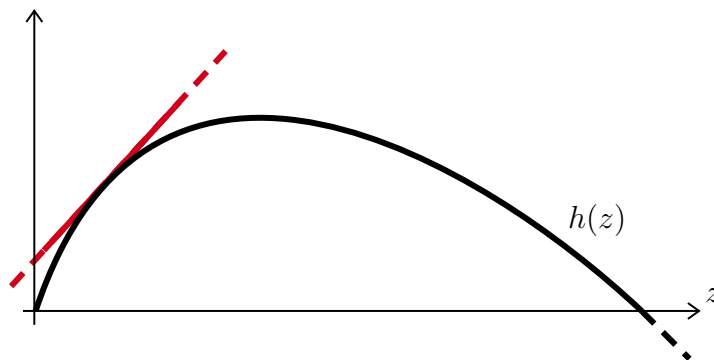


Figura 2.2: Diagrama que muestra la convexidad de la función h .

Ahora veamos que, para cualquier función de distribución de probabilidad ρ sobre U , la composición $h \circ \rho$ es la cantidad que anteriormente llamamos la sorpresa de la distribución ρ , de tal manera que su integral sobre todo U , bajo la medida λ_ω , es el valor que toma el funcional de entropía s en ρ . Tomando entonces $z = \rho(t, u)$ y $z_0 = \rho_0(t, u)$ para dos distribuciones cualquiera, podemos ver que, punto a punto, aplicando el símbolo $\int_W d\lambda_\omega(\dots)$ a ambos lados de (2.28) se satisface la desigualdad [26]

$$s[\rho] \leq - \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(t, u) \ln(\rho_0(t, u)). \quad (2.29)$$

De forma particular, tomando $\rho_0(t, u) = m(t, u)$ en (2.29) vemos que la entropía $s[m]$ nunca es menor que cualquier otra entropía,

$$s[\rho] \leq - \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(t, u) \ln \left(\frac{\Theta_W(u)}{\lambda_\omega(W)} \right) = \ln(\lambda_\omega(W)) \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(t, u) = \ln(\lambda_\omega(W)) = S[m].$$


¹²Esta función tiene un único máximo e^{-1} que se alcanza en $z = e^{-1}$, i. e. su único punto crítico es $z_0 = e^{-1}$, que se obtiene de resolver $\frac{dh}{dz}|_{z=z_0} = -(1 + \ln(z_0)) = 0$, y dicho punto crítico es un máximo pues arroja la evaluación $\frac{d^2h}{dz^2}|_{z=z_0} = -\frac{1}{z_0} = -e < 0$.

Ahora, en cuanto a la igualdad en la expresión anterior, notemos que esta implicaría que las funciones $h \circ \rho$ y $m - \rho(1 + \ln(m))$, que son continuas e integrables en todo¹³ W tienen la misma integral, y por ende son, en casi todos los puntos iguales. Particularmente son iguales en todo W :

$$-\rho(t, u) \ln(\rho(t, u)) = m(t, u) - \rho(t, u)(1 + \ln(m(t, u))).$$

Dividiendo esta igualdad entre $\rho(t, u)$ (cuidando que ρ no sea cero) y reacomodando, llegamos a una expresión del tipo $w - \ln(w) = 1$ para $w = m(t, u)/\rho(t, u)$, i. e.

$$\frac{m(t, u)}{\rho(t, u)} - \ln\left(\frac{m(t, u)}{\rho(t, u)}\right) = 1.$$

Al respecto, notemos que la función anterior $w \mapsto w - \ln(w)$ es convexa con único mínimo global¹⁴ en $w_0 = 1$, con valor $w_0 - \ln(w_0) = 1$. De esta manera vemos que la igualdad $s[\rho] = s[m]$ se alcanza sólo en $w = 1$, i. e., sólo si $\rho(t, u) = m(t, u)$. 

Notemos que los cálculos anteriores los hemos realizado a un tiempo arbitrario pero fijo. Esto se justifica tomando en cuenta que el funcional de entropía tiene la propiedad de ser invariante ante el flujo hamiltoniano del sistema [26].

Consideremos otro escenario distinto donde no desconocemos por completo las propiedades del sistema, al menos las propiedades macroscópicas. Y es que es un hecho corroborado por la experimentación en el laboratorio y por la experiencia del día a día, que los sistemas de muchas (de verdad, *muchas*) partículas suelen estar caracterizados por un número relativamente pequeño de mediciones macroscópicas, en comparación con la infinidad de parámetros microscópicos [44, 50], y que dichas mediciones responden a promedios de los (alrededor de) $6N$ grados de libertad microscópicos, de cantidades físicas usualmente conservadas en virtud de las simetrías del sistema [51].

Consideremos entonces que tras haber estudiado al sistema con la distribución constante e uniforme (2.21), i. e. haber obtenido una estadística tras experimentar con las muchas copias del mismo sistema, encontramos nueva evidencia que nos pueda ayudar a predecir el estado dinámico del sistema, y queremos implementar esa evidencia a la descripción estadística del sistema. Esto se logra optimizando el llamado funcional de Jaynes¹⁵ [56], definido, sobre el espacio de pdf's con soporte W , como [26]

$$s_J[\rho] = \int_W d\lambda_\omega(u) \ln\left(\frac{m(u)}{\rho(u)}\right) \rho(u). \quad (2.30)$$

¹³En [26] se especifica que la función $m - \rho(1 + \ln(m))$ puede no ser continua en los puntos donde $m(u) = 0$, pero dichos puntos son o se encuentra en conjuntos de medida cero, los cuales excluimos del soporte W .

¹⁴ $\frac{d}{dw}(w - \ln(w))|_{w=w_0} = 1 - \frac{1}{w_0} = 0$ implica $w_0 = 1$, notando que $\frac{d^2}{dw^2}(w - \ln(w))|_{w=w_0} = \frac{1}{w_0^2} = 1 > 0$.

¹⁵El funcional s_J puede interpretarse como el negativo de la entropía relativa entre la distribución ρ y la distribución m , i. e. $s_J = -D_{KL}(\rho|m)$, donde en general,

$$D_{KL}(\rho|\rho') = \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(u) \ln\left(\frac{\rho(u)}{\rho'(u)}\right).$$

Geoméricamente $D_{KL}(\rho|\rho')$ mide la cantidad de sorpresa excedente que se obtiene al cambiar de la distribución ρ a ρ' . Para entender cómo hace esto, pueden verse las referencias [52, 53, 54], así como la serie de entradas que hace John Baez, en su blog, sobre geometría diferencial de las variedades estadísticas [55]. Bajo esta interpretación, maximizar s_J conduce a minimizar $D_{KL}(\rho|m)$, i. e. a encontrar la distribución ρ con la que se gana la menor cantidad de sorpresa al ser reemplazada por m , o conversamente, encontrar la distribución ρ que gana mayor cantidad de sorpresa al reemplazar a m .

Antes de entrar de lleno a la cuestión de cómo se extremiza (2.30), vale la pena mencionar un par de propiedades interesantes que tiene, como funcional sobre el espacio de funciones de distribución de probabilidad con soporte en W . En primer lugar, podemos ver que se relaciona con el funcional de entropía, que introdujimos anteriormente en (2.24), en la forma

$$s_J[\rho] = s[\rho] - s[m] = s[\rho] - \ln(\lambda_\omega(W)). \quad (2.31)$$

De esta manera es claro que, a nivel de funcional, los puntos críticos (y su naturaleza de máximos, mínimos o puntos de inflexión) de la entropía s son compartidos por los puntos críticos de s_J y viceversa. En segundo lugar, vale la pena notar que la entropía de Jaynes de cualquier distribución nunca es positiva, i. e.

$$s_J[\rho] \leq 0. \quad (2.32)$$

En efecto, durante la demostración de la proposición (2.2) encontramos que toda distribución ρ , con soporte W , satisface la desigualdad $s[\rho] \leq s[m]$, i. e. $s_J[\rho] = s[\rho] - s[m] \leq 0$.

Consideremos el caso más simple de un sistema hamiltoniano (U, Ω, H) donde interpretamos la función H como la energía del sistema. Sabemos que a lo largo del flujo hamiltoniano del sistema, esta es una cantidad conservada, así que para cualquier estado estadístico, esperamos que su promedio (2.16) sea una constante en el sistema macroscópico. La forma de introducir esta nueva información en el estudio estadístico del sistema es actualizar la distribución m a la distribución que maximiza el funcional (2.30).

Proposición 2.3

Sea (U, Ω, H) un sistema hamiltoniano y m la pdf constante y uniforme definida en (2.21). La distribución $\rho(\beta)$ que maximiza el funcional de entropía s_J , sujeta a la condición $E = \langle H \rangle_{\rho(\beta)}$, se conoce como la distribución de Gibbs y está dada por

$$\rho(\beta; u) = \frac{\Theta_W(u)}{Z(\beta)} e^{-\beta H(u)}, \quad (2.33)$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ y donde $Z(\beta)$ es la llamada función de partición, definida como la integral

$$Z(\beta) = \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\beta H(u)}. \quad (2.34)$$

El procedimiento para extremizar s_J es similar al empleado en (2.2), tomando en cuenta que el espacio de funciones al que restringimos al funcional de Jaynes es el de todas las funciones $\rho : U \rightarrow [0, +\infty)$ que satisfacen las condiciones $\phi_1(\rho) = 0$ y $\phi_2(\rho) = 0$, donde

$$\begin{aligned} \phi_1(\rho) &= \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(u) - 1, \\ \phi_2(\rho) &= \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(u) H(u) - E. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Así, introduciendo además del multiplicador de Lagrange α (para $\phi_1 = 0$) el multiplicador

de Lagrange β (para $\phi_2 = 0$), encontramos que el punto crítico $\rho_* = \rho_\tau|_{\tau=0}$ debe satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(s_J - \alpha\phi_1 - \beta\phi_2)(\rho_\tau)\Big|_{\tau=0} &= \int_W d\lambda_\omega(u) \frac{d}{d\tau} \rho_\tau(t, u) \left[\ln \left(\frac{m(t, u)}{\rho_\tau(t, u)} \right) - \alpha - \beta H(u) \right] \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_W d\lambda_\omega(u) \left[\ln \left(\frac{m(t, u)}{\rho_*(t, u)} \right) - 1 - \alpha - \beta H(u) \right] \frac{\partial \rho_\tau}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \end{aligned}$$

es decir, recurriendo al argumento de que la integral anterior es una integral de una top-forma $f\omega_\Omega$ para $f = \left[\ln \left(\frac{m(t, u)}{\rho_*(t, u)} \right) - 1 - \alpha - \beta H(u) \right] \frac{\partial \rho_\tau}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}$, la cual sólo es cero si $f = 0$, donde por la variabilidad de ρ_τ podemos tomar $\frac{d\rho}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \neq 0$, encontramos

$$\rho_*(\alpha, \beta; t, u) = m(t, u) e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta H(u)}.$$

Aplicando la condición de normalización $\phi_1(\rho_*) = 0$ encontramos una relación entre los multiplicadores de Lagrange α y β , y el volumen $\lambda_\omega(W)$,

$$\phi_1(\rho_*) = \frac{e^{-(1+\alpha)}}{\lambda_\omega(W)} \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\beta H(u)} - 1 = \frac{e^{-(1+\alpha)}}{\lambda_\omega(W)} Z(\beta) - 1 = 0,$$

que nos permite expresar α en función de β , a través de la función de partición,

$$\frac{e^{-(1+\alpha)}}{\lambda_\omega(W)} = Z^{-1}(\beta).$$

De esta manera vemos que el punto crítico ρ_* de s_J , en el espacio de pdf's con soporte W que satisfacen $\langle H \rangle_\rho = E$, es precisamente la distribución de Gibbs (2.33),

$$\rho_*(\alpha, \beta; t, u) = \rho(\beta; u) = \frac{\Theta_W(u)}{Z(\beta)} e^{-\beta H(u)}. \quad \diamond$$

La distribución de Gibbs (2.33) tiene propiedades importantes, particularmente podemos notar que un estado estadístico descrito por $\rho(\beta)$ no depende explícitamente del tiempo, de tal manera que (2.18) nos dice que la distribución es invariante ante el flujo hamiltoniano del sistema, como era de esperarse tomando en cuenta que se construye a partir de la cantidad conservada H , i. e.

$$\mathcal{L}_{X_H} \rho(\beta; u) = 0. \quad (2.36)$$

Un estado estadístico como $\lambda_{\rho(\beta)}$, que no depende explícitamente del tiempo, suele denominarse en la literatura como un estado estadístico de equilibrio [44], y más adelante veremos que el concepto detrás del término tiene importantes interpretaciones físicas. Por el momento veamos otra propiedad un poco menos obvia, que tiene que ver con la naturaleza de $\rho(\beta)$ como punto crítico del funcional s_J .

Proposición 2.4

Sea W el soporte para el espacio de funciones de densidad de probabilidad sobre la variedad simpléctica (U, Ω) , que satisfacen $\int_W d\lambda_\omega(u) \rho(u) H(u) = E$, y sea $\rho(\beta)$ la pdf definida en (2.33), dicha distribución es el único máximo del funcional de entropía s_J .

La demostración de esta proposición es bastante similar a la demostración que hicimos para la proposición (2.2). De hecho, como vimos en (2.31), s y s_J comparten los mismos puntos críticos, de tal manera que, siendo ρ cualquier distribución distinta del mismo espacio que la de Gibbs, podemos partir de la desigualdad¹⁶ (2.29) con $\rho_0 = \rho(\beta)$ para mostrar que $s[\rho]$ siempre es menor que la entropía

$$s[\rho(\beta)] \equiv \mathcal{S}(\beta) = \beta E + \ln(Z(\beta)). \quad (2.37)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} s[\rho] &< - \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(t, u) \ln(\rho(\beta; u)) \\ &= \beta \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(u) H(u) + \ln(Z(\beta)) \int_W d\lambda_\omega(u) \rho(u) \\ &= \beta E + \ln(Z(\beta)) = \mathcal{S}(\beta). \end{aligned} \quad \diamond$$

Finalmente, vale la pena definir, sobre el espacio de parámetros de las distribuciones de Gibbs, las funciones de energía y entropía como

$$E : \beta \mapsto \langle H \rangle_{\rho(\beta)} = - \frac{d}{d\beta} \ln(Z(\beta)), \quad (2.38)$$

$$\mathcal{S} : \beta \mapsto s[\rho(\beta)] = \beta E(\beta) + \ln(Z(\beta)). \quad (2.39)$$

Lo primero que notamos con respecto a estas funciones es que (2.38) es una función decreciente del parámetro β , pues su derivada es el negativo del valor esperado del cuadrado $(H - E(\beta))^2$, i. e.

$$\frac{dE}{d\beta} = - \langle (H - E(\beta))^2 \rangle_{\rho(\beta)}. \quad (2.40)$$

En efecto, empleando la linealidad (2.17),

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\beta} &= - \frac{d^2}{d\beta^2} \ln(Z(\beta)) = - \left(\frac{1}{Z(\beta)} \frac{d^2 Z}{d\beta^2} - \left(\frac{1}{Z(\beta)} \frac{dZ}{d\beta} \right)^2 \right) \\ &= - (\langle H^2 \rangle_{\rho(\beta)} - E(\beta)^2) = - (\langle H^2 \rangle_{\rho(\beta)} - 2E(\beta)^2 + E(\beta)^2) \\ &= - (\langle H^2 \rangle_{\rho(\beta)} - 2\langle H \rangle_{\rho(\beta)} \langle E(\beta) \rangle_{\rho(\beta)} + \langle E(\beta)^2 \rangle_{\rho(\beta)}) \\ &= - (\langle H^2 - 2E(\beta)H + E(\beta)^2 \rangle_{\rho(\beta)}) \\ &= - \langle (H - E(\beta))^2 \rangle_{\rho(\beta)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, es fácil ver que la derivada de S respecto a β está dada por

$$\frac{dS}{d\beta} = \beta \frac{dE}{d\beta} = -\beta \langle (H - E(\beta))^2 \rangle_{\rho(\beta)}. \quad (2.41)$$

¹⁶El resto de la demostración, que $s[\rho] = \mathcal{S}(\beta)$ sólo si $\rho = \rho(\beta)$, es exactamente igual a la presentada en (2.2) tan sólo cambiando m por $\rho(\beta)$, así que directamente decidimos utilizar la desigualdad en (2.29).

2.1 Interpretación física de los estados estadísticos de Gibbs

Para entender físicamente qué significa que un sistema hamiltoniano se encuentre descrito por un estado estadístico de equilibrio de Gibbs, i. e. a través de la distribución (2.33), consideremos el siguiente experimento mental que se propone en [26]. Sean (U_1, Ω_1, H_1) y (U_2, Ω_2, H_2) dos sistemas hamiltonianos cualquiera, cada uno de los cuales se encuentran en equilibrio estadístico descritos, respectivamente, por $\rho(\beta_1)$ y $\rho(\beta_2)$, con valores promedios $E_1(\beta_1) = \langle H_1 \rangle_{\rho(\beta_1)}$ y $E_2(\beta_2) = \langle H_2 \rangle_{\rho(\beta_2)}$.

Acoplemos ambos sistemas de tal manera que sólo puedan intercambiar sólo energía entre sí, generando un nuevo sistema cuyo espacio fase modelamos sobre la variedad simpléctica (U, Ω) para $U = U_1 \times U_2$ y $\Omega = \pi_1^* \Omega_1 + \pi_2^* \Omega_2$, donde $\pi_i : U_1 \times U_2 \rightarrow U_i$ es la proyección natural de $U_1 \times U_2$ en U_i [39]. En cuanto a la descripción dinámica del sistema, siempre podemos tomar el acoplamiento de tal forma que la interacción entre los sistemas sea tan pequeña que pueda despreciarse, permitiéndonos modelar la hamiltoniana del nuevo sistema compuesto como

$$H = H_1 \circ \pi_1 + H_2 \circ \pi_2.$$

Naturalmente el sistema hamiltoniano compuesto (U, Ω, H) es conservativo, de tal manera que el estado estadístico de equilibrio de Gibbs es el mejor candidato para estudiar el estado dinámico del sistema como variable aleatoria, según lo visto en la sección anterior. De esta manera debe existir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(\beta)$ sea la distribución de Gibbs de este sistema compuesto, y la energía del sistema sea la función

$$E(\beta) = E_1(\beta) + E_2(\beta),$$

donde $E(\beta) = \langle H \rangle_{\rho(\beta)}$ y $E_i(\beta) = \langle H_i \rangle_{\rho(\beta)}$. Pero precisamente como la energía conservada de este sistema es, en todo momento, la suma de las energías $E_1(\beta_1) = \langle H_1 \rangle_{\rho(\beta_1)}$ y $E_2(\beta_2) = \langle H_2 \rangle_{\rho(\beta_2)}$, β debe ser tal que se cumpla la ecuación

$$E(\beta) = E_1(\beta) + E_2(\beta) = E_1(\beta_1) + E_2(\beta_2). \quad (2.42)$$

La forma precisa en que β se relaciona con β_1 y β_2 , en el sentido del orden estricto en los números reales, puede deducirse considerando la constricción (2.42) en la conservación de la energía, y el carácter decreciente (2.40) de la función E .

Proposición 2.5

El sistema hamiltoniano compuesto, anteriormente descrito, sólo puede estar en un estado estadístico de equilibrio de Gibbs si $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$, cumpliéndose sólo la igualdad $\beta_1 = \beta = \beta_2$.

Comencemos por ver que si $\beta_1 = \beta$, entonces necesariamente $\beta = \beta_2$, si es que queremos que el sistema compuesto esté descrito por $\lambda_{\rho(\beta)}$. El razonamiento es el siguiente: como E es una función monotonamente decreciente de β , es claro que si $\beta_1 = \beta$, entonces $E_1(\beta_1) = E_1(\beta)$, entonces la energía del primer subsistema no cambia al acoplarlo al segundo en el estado estadístico de equilibrio. Caso contrario al del segundo sistema, pues si $\beta_2 \neq \beta$, entonces $\beta_2 > \beta$ o $\beta_2 < \beta$, en cuyo caso $E_2(\beta_2) < E_2(\beta)$ o $E_2(\beta_2) > E_2(\beta)$. En cualquier escenario la energía del subsistema es distinta antes y después del acoplamiento, pero esto no puede ser posible porque la única forma de que cambiara su energía es ya sea cediendo o aceptado

energía del primer subsistema, cosa que no pasa por la constancia en (2.42). Por supuesto, el mismo argumento funciona intercambiando β_1 por β_2 .

Para el caso en que $\beta_1 \neq \beta$ y $\beta_2 \neq \beta$, notemos que no podemos tener $\beta_1 = \beta_2 = \beta'$, pues entonces de la ecuación (2.42) tendríamos $\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$ donde tanto la cantidad $\Delta E_1 = E_1(\beta) - E_1(\beta')$ como la cantidad $\Delta E_2 = E_2(\beta) - E_2(\beta')$ son ambas, o necesariamente negativas (si $\beta' < \beta$) o positivas (si $\beta' > \beta$), en ningún caso pueden tener signos contrarios para satisfacer $\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$. De esta manera, sin perder generalidad, $\beta_1 < \beta_2$ con $\beta_1 \neq \beta \neq \beta_2$ o $\beta_1 = \beta = \beta_2$. Ahora veamos que en el caso $\beta_1 < \beta_2$, necesariamente se cumple la relación de orden $\beta_1 < \beta < \beta_2$. En efecto, si $\beta > \beta_2 > \beta_1$, entonces ambos sistemas perderían energía al acoplarse, y si $\beta < \beta_1 < \beta_2$ entonces la ganarían, en ambos casos contradiciendo la conservación de la energía en el sistema compuesto. Por lo tanto $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ con la igualdad cumpliéndose sólo en el caso $\beta_1 = \beta = \beta_2$. \diamond

Lo que la proposición anterior nos dice es que el estado estadístico de equilibrio de Gibbs (de ahora en adelante, simplemente estado de Gibbs, para abreviar) que resulta de acoplar dos sistemas inicialmente descritos por estados de Gibbs, se alcanza sólo cuando los subsistemas dejan de intercambiar energía y cada subsistema está descrito por un nuevo estado estadístico de Gibbs con el mismo parámetro β que el estado de Gibbs del sistema compuesto. Es decir, el equilibrio se alcanza cuando deja de fluir energía del subsistema que inicialmente tenía el menor parámetro β al sistema que inicialmente tenía el mayor. Vemos que podemos interpretar el concepto del estado estadístico de equilibrio como una pdf que describe estadísticamente a un sistema en equilibrio termodinámico, cuando tomamos

$$\beta = \frac{1}{T} > 0. \quad (2.43)$$

Tras la identificación (2.43), vale la pena hacer un par de comentarios sobre la función de partición (2.34), y es que si bien la definimos como una función del inverso de la temperatura β , pueden haber otros parámetros¹⁷ involucrados en su definición (por ejemplo el mismo número de partículas o el volumen que ocupa el sistema), que denotaremos como la lista X , y que pueden ser relevantes termodinamicamente hablando. Estos parámetros entran en $Z = Z(\beta; X)$ a partir de la hamiltoniana misma, i. e. $H = H(u; X)$, así como de la construcción y medida del soporte W donde se distribuye el estado dinámico del sistema. En un sentido físico podemos esperar que ante cambios en estos parámetros la función de partición y la distribución de Gibbs no sólo varíen de forma continua, si no que lo hagan suavemente, de tal manera que puedan ser tratadas como variables termodinámicas. En este sentido resulta apropiado redefinir la función de partición directamente como función de la temperatura T y del resto de variables termodinámicas X , es decir, definir la función real $Q = Q(T, X)$ en la forma

$$Q(T, X) = Z(1/T; X). \quad (2.44)$$

De esta manera, identificando el negativo de su logaritmo natural como la función F , y redefiniendo tanto $\mathcal{E}(T, X) = E(1/T; X)$ como $\mathcal{S}(T, X) = \mathcal{S}(1/T; X)$, formamos el sistema

¹⁷En [50] se hace una exploración de la naturaleza microscópicas de estas cantidades, que surgen como promedios a escalas temporales y espaciales mucho mayores a las relevantes para las partículas. También se explora en [51] una interpretación de estos atributos macroscópicos en términos de cantidades conservadas y rupturas de simetrías a nivel microscópico.

de ecuaciones

$$F(T, X) = -T \ln(Q(T, X)), \quad (2.45)$$

$$\mathcal{E}(T, X) = F(T, X) - T \frac{\partial F}{\partial T}(T, X), \quad (2.46)$$

$$S(T, X) = -\frac{\partial F}{\partial T}(T, X). \quad (2.47)$$

Identificando T como la variable termodinámica del sistema, el negativo de S es la variable termodinámica dual si tomamos a F como potencial termodinámico, el cual a su vez se obtiene como el negativo de la transformada de Legendre de la energía interna \mathcal{E} como función de S , i. e. (2.46). En termodinámica al potencial (2.45) se le conoce como la energía libre de Helmholtz, mientras que las funciones \mathcal{E} y S son, respectivamente, la energía interna y la entropía del sistema [44, 50].

3 Estados estadísticos de Gibbs generalizados

Así como en la primera parte de este trabajo generalizamos el concepto de un flujo hamiltoniano sobre un espacio fase a la acción de un grupo de Lie G cualquiera sobre una variedad simpléctica (1.2, 1.3, 1.4), y el concepto de la hamiltoniana misma como cantidad conservada al del momentum map (1.22), ahora vamos a generalizar el concepto de estado estadístico de Gibbs.

Ahora además de la variedad simpléctica (U, Ω) con la que habíamos estado tratando, consideremos una acción hamiltoniana $\Psi : G \times U \rightarrow U$ cerrada sobre $W \subset U$,

$$\Psi_g(W) = W. \quad (2.48)$$

Sea $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$ el momentum map asociado de dicha acción. Como vimos en el teorema (1.1), si sobre (U, Ω) una hamiltoniana describe la evolución dinámica de un sistema, y dicha hamiltoniana es invariante ante la acción del grupo, entonces el momentum map es invariante ante la evolución del sistema hamiltoniano. En este sentido, en términos generales sin tener que introducir hamiltoniana alguna, sigamos considerando a μ como un objeto que contiene todas las simetrías asociadas con la acción de G en (U, Ω) , a través de Ψ , y busquemos el estado estadístico, en su formulación como medida probabilística λ_ρ con soporte W , que mejor incorpore el concepto del momentum map como simetrías de G en (U, Ω) con valores constantes $M(\chi)$ para cada generador infinitesimal $\chi \in \mathfrak{g}$.

De nuestra experiencia obtenida a través de las secciones anteriores, sabemos que dicha distribución se obtiene extremizando el funcional de entropía de Jaynes (2.30) sujeto a la condición de que, para todo $\chi \in \mathfrak{g}$ donde $\int_W d\lambda_\omega(u) \mu_\chi(u) \rho(u)$ exista, se satisfaga la condición $\phi(\rho) = 0$, donde

$$\phi(\rho) = \int_W d\lambda_\omega(u) \mu_\chi(u) \rho(u) - M(\chi). \quad (2.49)$$

Equivalentemente, utilizando una base cualquiera (T_1, T_2, \dots, T_k) para el álgebra de Lie \mathfrak{g}^* , la condición (2.49) resulta equivalente a las k condiciones $\phi_i(\rho) = 0$, con ϕ_i de la forma

$$\phi_i(\rho) = \int_W d\lambda_\omega(u) \mu_i(u) \rho(u) - M_i, \quad (2.50)$$

para μ_i solución de la ecuación diferencial (1.23). En este sentido podemos pensar que el estado estadístico que estamos buscando se obtiene generalizando el procedimiento de multiplicadores de Lagrange que utilizamos para obtener la distribución de Gibbs (2.33). Y aunque la idea es, en esencia, correcta, debemos ser cuidadosos porque no sólo basta aumentar de un multiplicador de Lagrange (β) para la condición de conservar una cantidad (E) a k multiplicadores de Lagrange (χ^i) para la condición de conservar k cantidades (μ_i), porque estos multiplicadores de Lagrange son tales que toman como valores las componentes de elementos en un álgebra de Lie, y para aumentar un poco la complejidad, no de todos los elementos en el álgebra de Lie, si no de sólo aquellos elementos especiales para los cuales las funciones $e^{-\mu x}$ y $\mu x e^{-\mu x}$ sean integrables con respecto a la medida de Liouville.

Con las anteriores objeciones en mente, comencemos definiendo un vector de Souriau¹⁸ como todo vector $\chi \in \mathfrak{g}$ tal que siempre podemos encontrar una vecindad abierta de χ en el álgebra, donde la función $\chi' \mapsto e^{-\mu \chi'}$ está acotada superiormente sobre todo el soporte W por una función integrable, es decir, $\chi \in \mathfrak{g}$ es tal que siempre existe un abierto $A \subset \mathfrak{g}$ que contiene a χ y una función $f : W \rightarrow [0, +\infty)$ Liouville-integrable, tal que para todo $\chi' \in A$ y $u \in W$, se satisface

$$e^{-\mu \chi'(u)} \leq f(u). \quad (2.51)$$

Al subconjunto de todos los vectores de Souriau lo denominamos el subconjunto de Souriau, y lo denotamos como

$$\mathfrak{g}_\star = \{\chi \in \mathfrak{g} : \chi \text{ es un vector de Souriau}\}. \quad (2.52)$$

Por las propiedades de la medida de Liouville, y gracias a la condición (2.51) que satisfacen los elementos de \mathfrak{g}_\star , es posible demostrar que los vectores de Souriau son tales que existen las integrales de $e^{-\mu x}$ y $\mu e^{-\mu x}$. Más aún, se puede definir sobre \mathfrak{g}_\star la función de partición $Z : \mathfrak{g}_\star \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$Z(\chi) = \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\mu \chi(u)}, \quad (2.53)$$

y dicha función es suave, y sus derivadas pueden calcularse bajo el signo de la integral $\int_W d\lambda_\omega(u)(\dots)$ a todo orden [26]. Antes de emplear los vectores de Souriau para resolver el problema de la distribución de Gibbs generalizada, hay un par de cuestiones formales importantes que resolver sobre \mathfrak{g}_\star .

Proposición 2.6

Sea $\mathfrak{g}_\star \subset \mathfrak{g}$ el subconjunto de vectores de Souriau para el álgebra de Lie del grupo G que actúa, hamiltoniamente, sobre U . Si \mathfrak{g}_\star no es vacío, entonces tiene las siguientes propiedades [26]:

1. Es independiente de la elección particular del momentum map en la clase de equivalencia $\mu \sim \mu'$ si $d(\mu - \mu') = 0$.
2. Es un conjunto abierto y convexo.

La propiedad (1) es un reflejo de la invarianza de la propiedad *ser un vector de Souriau* con respecto a la libertad que tenemos de elegir el momentum map (módulo sumarle una

¹⁸En [26] se utiliza el nombre de *temperatura generalizada*. Optamos por no emplearlo nosotros porque más adelante lo usaremos para referirnos a otro objeto en otro contexto distinto.

constante $\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$). En efecto, esto es fácil de ver tomando en cuenta que si $\chi \in \mathfrak{g}$ es un vector de Souriau bajo la condición de satisfacer (2.51) con μ , entonces, para la misma vecindad A pero ahora para la función ¹⁹ $f_\chi = e^{i\chi''\mu_0} f$, donde χ'' es el elemento en A que maximiza a μ_0 , podemos ver que se satisface, para toda $\chi' \in A$ y $u \in W$, la condición

$$\begin{aligned} e^{-i\chi'(\mu+\mu_0)(u)} &= e^{-\mu_{\chi'}(u)} e^{-i\chi'\mu_0} \\ &\leq e^{-\mu_{\chi'}(u)} e^{-i\chi''\mu_0} \leq e^{-i\chi''\mu_0} f(u) = f_\chi(u). \end{aligned}$$

Con respecto a la propiedad (2), vemos que la misma definición de la propiedad de ser un vector de Souriau implica la existencia de una vecindad abierta para cada vector de Souriau, donde sus elementos también son vectores de Souriau. Por lo tanto, si \mathfrak{g}_* no está vacío, se trata de un subconjunto abierto. Para demostrar la convexidad de este abierto, sean χ_1 y χ_2 dos de sus elementos cualquiera, veamos que para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ el vector $\chi_\lambda = (1-\lambda)\chi_1 + \lambda\chi_2$ también es un elemento de \mathfrak{g}_* . Comencemos tomando las vecindades A_1 y A_2 que aparecen en la definición de χ_1 y χ_2 como vectores de Souriau, así como las respectivas funciones f_1 y f_2 . Notemos cómo, para cada λ ,

$$A_\lambda = \{(1-\lambda)\chi'_1 + \lambda\chi'_2 : \chi'_1 \in A_1, \chi'_2 \in A_2\}$$

es una vecindad abierta de χ_λ . Ahora, dada la linealidad del momentum map, para cualquier $0 \leq \lambda \leq 1$ y vector $\chi' \in A_\lambda$, vemos que $\mu_{\chi'}$ es, también, una combinación convexa,

$$\mu_{\chi'} = \langle \mu, (1-\lambda)\chi'_1 + \lambda\chi'_2 \rangle = (1-\lambda)\mu_{\chi'_1} + \lambda\mu_{\chi'_2}.$$

Ahora, como bien sabemos, la combinación convexa anterior está acotada inferiormente por el mínimo $\min\{\mu_{\chi'_1}, \mu_{\chi'_2}\}$ entre $\mu_{\chi'_1}$ y $\mu_{\chi'_2}$, por lo tanto $e^{-\mu_{\chi'}(u)}$ estará acotada superiormente por $e^{-\min\{\mu_{\chi'_1}, \mu_{\chi'_2}\}(u)}$,

$$e^{-\mu_{\chi'}(u)} \leq e^{-\min\{\mu_{\chi'_1}, \mu_{\chi'_2}\}(u)},$$

que a su vez está acotada por $f_0(u)$ o por $f_1(u)$, dependiendo cuál sea el mínimo entre $\mu_{\chi'_1}(u)$ y $\mu_{\chi'_2}(u)$. Naturalmente, por continuidad, la función que elige entre f_1 y f_2 dependiendo si $\mu_{\chi'_1}(u) < \mu_{\chi'_2}(u)$ o viceversa, es una función integrable. De esta manera, para toda $\lambda \in [0, 1]$, toda la recta $\lambda \mapsto (1-\lambda)\chi_1 + \lambda\chi_2$ está compuesta por vectores de Souriau siempre que $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{g}_*$, por lo tanto \mathfrak{g}_* es convexo. \diamond

Ya habiendo aclarado los puntos formalmente delicados, podemos usar el método de multiplicadores de Lagrange para extermizar s_J sobre el espacio de distribuciones con soporte W , sujetas a las condiciones

$$M_i = \langle \mu_i \rangle_\rho,$$

tomando en cuenta que el vector de multiplicadores de Lagrange es un elemento en \mathfrak{g}_* , para obtener una generalización de la distribución de Gibbs, que formalizamos en la siguiente proposición, que no demostramos explícitamente porque el cálculo es exactamente el mismo que ya hemos realizado dos veces:

¹⁹Naturalmente si f es λ_ω -integrable, entonces al multiplicarla por una constante positiva, sigue siendo λ_ω -integrable [45].

Proposición 2.7

Sea (U, Ω) una variedad simpléctica donde actúa hamiltonianamente^a G . Sean además $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$ el momentum map asociado a la acción simpléctica y m la pdf constante y uniforme definida en (2.21). La distribución única $\rho(\chi)$ que maximiza el funcional de entropía s_J , sujeta a la condición $M(\chi) = \langle \mu_\chi \rangle_{\rho(\beta)}$, es la distribución de Gibbs generalizada y está dada por

$$\rho(\chi; u) = \frac{\Theta_W(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi(u)}, \quad (2.54)$$

donde $\chi \in \mathfrak{g}_*$ es un vector de Souriau y donde $Z(\chi)$ es la función de partición (2.53).

^aDado que la acción hamiltoniana es simpléctica, está contemplado que dicha acción preserve el soporte $W \subset U$.

El ejemplo más sencillo de un estado de Gibbs como el presentado en (2.54) se da cuando tomamos la acción hamiltoniana del grupo abeliano $(\mathbb{R}, +) \simeq \mathbb{R}$ sobre la variedad simpléctica (U, Ω) , de tal forma que mapee un subconjunto $W \subset U$ en sí mismo. Como vimos en su momento, resultados (1.25) y (1.26), en este caso la acción hamiltoniana es el flujo del campo vectorial hamiltoniano aX^H de una hamiltoniana aH que se obtiene a partir del momentum map $\mu(x) = H(x)dt$, donde hemos considerado a $\frac{\partial}{\partial t}$ como el generador del álgebra $\mathbb{R} \simeq T_0\mathbb{R}$, y a dt como el único elemento de su base dual en \mathbb{R}^* . En este caso la distribución de Gibbs generalizada se reduce a la distribución de Gibbs (2.33) donde los vectores de tipo Souriau se reducen a escalares reales $\beta \in \mathbb{R}$ tales que, para cada β existe un abierto en \mathbb{R} donde $e^{-\beta H(u)} \leq f(u)$ para todo $u \in W$ y f Liouville-integrable. Si el sistema hamiltoniano (U, Ω, H) describe la evolución del estado físico de un sistema mecánico en su espacio fase, por medio de la función de energía H , podemos interpretar el grupo \mathbb{R} como el de traslaciones temporales y a la región W como la superficie de energía constante $H^{-1}(E)$. Suponiendo un valor constante positivo de E , notamos que para $\beta > 0$ se cumple trivialmente $e^{-\beta H(u)} = e^{-\beta E} \leq 1$, así que $\mathfrak{g}_* \simeq \mathbb{R}_* = (0, +\infty)$. Siguiendo este análisis podemos llegar a la misma conclusión a la que arribamos anteriormente con un experimento mental, y definir una escala de temperaturas $T = \frac{1}{\beta} > 0$. De esta manera vemos que los estados estadísticos de Gibbs son un caso particular de los aquí presentados.

Otros ejemplos interesantes que vale la pena comentar son los presentados por Souriau [22] como parte de su propuesta para entender la física como una teoría geométrica, más específico, como una teoría simpléctica [57], que descansa en tres ideas centrales; el concepto de espacio de movimientos, la forma simpléctica de Lagrange y el principio de Maxwell. A muy grandes rasgos²⁰ el espacio de movimientos es una variedad asociada a cada sistema físico, donde cada punto es un *movimiento total* del sistema, i. e. representa la curva completa de evolución del sistema en su espacio fase, y el principio de Maxwell establece que dicha variedad es simpléctica bajo la conocida como 2-forma de Lagrange²¹ [57].

En cuanto al estudio estadístico que Souriau realiza con su formulación simpléctica de la

²⁰Para una exposición completa la referencia obligada es [22] o los trabajos [23, 24, 25, 26, 57].

²¹Para sistemas mecánicos clásicos con espacio de configuración Q , el espacio de movimientos se identifica canónicamente con el espacio fase extendido $T^*(\mathbb{R} \times Q)$ y el principio de Maxwell se satisface trivialmente con la 2-forma de Lagrange $dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$, donde H es la hamiltoniana del sistema [57]. Para otros sistemas físicos cuánticos y/o relativistas Souriau construye espacios de movimientos más generales (en general, no Hausdorff) e impone el principio de Maxwell como un principio físico fundamental [22, 57].

física, en [22] desarrolla varios ejemplos de sistemas mecánicos aislados y calcula la distribución de Gibbs generalizada para subgrupos del grupo de Galileo, recobrando los modelos utilizados para estudiar gases en centrifugadores, como en el proceso de enriquecimiento del uranio 235 o en la creación de ácidos ribonucleicos [22, 57]. Otro caso importante que se aborda en [22] es el de un gas ideal relativistas, que en el marco de los grupos de Lie se estudia con respecto al grupo de Lorentz y reproduce la conocida distribución relativista de Jüttner, obtenida varias décadas antes por Ferencz Jüttner [58] y rederivada de varias formas desde entonces [58, 28, 29].

A partir de una distribución de Gibbs generalizada definimos, sobre el espacio de vectores de Souriau, los mapeos de energía generalizada $\mathcal{E} : \mathfrak{g}_\star \rightarrow \mathfrak{g}_\star^*$ y entropía generalizada $S : \mathfrak{g}_\star \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{E}(\chi) = \langle \mu \rangle_{\rho(\chi)} = -(D \ln(Z))(\chi), \quad (2.55)$$

$$S(\chi) = s[\rho(\chi)] = -i_\chi(D \ln(Z))(\chi) + \ln(Z(\chi)), \quad (2.56)$$

donde hemos nombrado como D al operador de derivada exterior sobre \mathfrak{g}_\star . El uso de la derivada exterior se justifica tomando en cuenta que los vectores tangentes a un vector de Souriau en \mathfrak{g}_\star se identifican naturalmente con vectores de Souriau, es decir, $T_\chi \mathfrak{g}_\star \simeq \mathfrak{g}_\star$, como pasa en cualquier espacio vectorial. Así la relación $\mathcal{E} = -D \ln(Z)$ surge de la definición misma de derivada exterior en términos de una derivada direccional y las propiedades de linealidad de μ . En efecto, sea $\alpha \in T_\chi \mathfrak{g}_\star$ un vector cualquiera,

$$\begin{aligned} -i_\alpha(D \ln(Z))(\chi) &= -\frac{1}{Z(\chi)} \frac{d}{ds} Z(\chi + s\alpha) \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{1}{Z(\chi)} \int_W d\lambda_\omega(u) \frac{d}{ds} e^{-\mu_{\chi+s\alpha}(u)} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{1}{Z(\chi)} \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi(u)} \frac{d}{ds} \mu_{\chi+s\alpha}(u) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{1}{Z(\chi)} \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi(u)} \mu_\alpha(u) = \langle \mu_\alpha \rangle_{\rho(\chi)} = i_\alpha \mathcal{E}(\chi). \end{aligned}$$

Con respecto a la relación $s[\rho(\chi)] = -i_\chi(D \ln(Z))(\chi) + \ln(Z(\chi))$, esta se deriva directamente utilizando (2.55):

$$\begin{aligned} s[\rho(\chi)] &= -\frac{1}{Z(\chi)} \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi(u)} \ln \left(\frac{e^{-\mu_\chi(u)}}{Z(\chi)} \right) \\ &= \frac{1}{Z(\chi)} \int_W d\lambda_\omega(u) \mu_\chi(u) e^{-\mu_\chi(u)} + \frac{\ln(Z(\chi))}{Z(\chi)} \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi(u)} \\ &= \langle \mu_\chi \rangle_{\rho(\chi)} + \ln(Z(\chi)) = i_\chi \mathcal{E}_\mu(\chi) + \ln(Z(\chi)) = -i_\chi(D \ln(Z))(\chi) + \ln(Z(\chi)). \end{aligned}$$

Un detalle importante que vale la pena tomar en cuenta es que las definiciones (2.53), (2.55) y (2.56) que dimos para los mapeos $Z(\chi)$, $\mathcal{E}(\chi)$ y $S(\chi)$, respectivamente, dependen de la elección que hayamos hecho del momentum map en la clase de equivalencia que se

obtiene al sumarle un covector constante²² $\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$ a μ . En este sentido notemos que ante el cambio $\mu \rightarrow \mu' = \mu + \mu_0$ las función de partición se escala por un factor $\chi \mapsto e^{-i_x \mu_0}$,

$$Z'(\chi) = \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-i_x(\mu+\mu_0)(u)} = e^{-i_x \mu_0} \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-i_x \mu(u)} = e^{-i_x \mu_0} Z(\chi),$$

mientras que la energía generalizada se modifica añadiéndole la misma constante μ_0 ,

$$\mathcal{E}'(\chi) = \langle \mu + \mu_0 \rangle_{\rho(\chi)} = \langle \mu \rangle_{\rho(\chi)} + \langle \mu_0 \rangle_{\rho(\chi)} = \mathcal{E}(\chi) + \mu_0.$$

De forma interesante, las transformaciones en Z y en E permiten que la entropía no dependa de esta elección de momentum map:

$$\begin{aligned} S'(\chi) &= \langle (\mu + \mu_0)_\chi \rangle_{\rho(\chi)} + \ln(e^{-i_x \mu_0} Z(\chi)) \\ &= \langle \mu_\chi \rangle_{\rho(\chi)} + i_x \mu_0 - i_x \mu_0 + \ln(Z(\chi)) = i_x \mathcal{E}(\chi) + \ln(Z(\chi)) = S(\chi). \end{aligned}$$

Similar al caso de la entropía, la distribución generalizada (y por ende la medida $\lambda_{\rho(\chi)}$) tampoco se ve alterada por la libertad al escoger el momentum map:

$$\rho'(\chi) = \frac{e^{-i_x \mu'_\chi(u)}}{Z'(\chi)} = \frac{e^{-i_x \mu_0} e^{-i_x \mu_\chi(u)}}{e^{-i_x \mu_0} Z(\chi)} = \rho(\chi).$$

Salvando la libertad de elección, módulo una constante, que tenemos para definir las mencionadas funciones, resulta más interesante aún ver cómo se comportan ante transformaciones del mismo grupo de Lie, mediante la acción Adjunta y empleando la ley de transformación (1.33) del momentum map.

Proposición 2.8

Sea G un grupo de Lie que actúa hamiltonianamente sobre la variedad simpléctica (U, Ω) , por medio de la acción $\Psi : G \times U \rightarrow U$, y sea $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$ el momentum map asociado a dicha acción, con ley de transformación (1.33) y cociclo simpléctico $\theta : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Bajo la acción adjunta de un elemento $\Lambda \in G$ cualquiera, el conjunto \mathfrak{g}_\star de los vectores de Souriau es invariante,

$$\text{Ad}_\Lambda(\mathfrak{g}_\star) = \mathfrak{g}_\star, \quad (2.57)$$

y los mapeos Z , \mathcal{E} y S transforman en la forma [26]

$$Z(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) = e^{-i_x \text{Ad}_\Lambda^* \theta(\Lambda)} Z(\chi), \quad (2.58)$$

$$\mathcal{E}(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) = \text{Ad}_\Lambda^*(\mathcal{E}(\chi)) + \theta(\Lambda), \quad (2.59)$$

$$S(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) = S(\chi). \quad (2.60)$$

²²Este detalle también se puede rastrear al caso particular de los estados de Gibbs usuales ante un cambio en la escala de energía, es decir, al sumarle o restarle una constante a la hamiltoniana (el momentum map de dicho caso).

Sea $\chi \in \mathfrak{g}_*$ un vector de Souriau. Si A es una vecindad abierta de χ , entonces el conjunto $\text{Ad}_\Lambda(A) = \{\chi' : \text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi') \in A\}$ también es una vecindad abierta de $\text{Ad}_\Lambda(\chi)$. En particular notemos que para cualquier elemento de dicha vecindad, $e^{-\mu_{\chi'}(u)} \leq e^{-\langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi_0) \rangle} f \circ \Psi_\Lambda(u)$ para todo $u \in W$, donde $\chi_0 \in \text{Ad}_\Lambda(A)$ es el elemento tal que la evaluación $\langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi_0) \rangle$ es máxima y donde f es la misma función Liouville-integrable que acota a $e^{-\mu_{\chi''}(u)} \leq f(u)$ en todo W para cualquier $\chi'' \in A$. En efecto, nombremos $u = \Psi_\Lambda(v)$ y tomemos $\chi' = \text{Ad}_\Lambda(\chi'') \in \text{Ad}_\Lambda(A)$, utilizando la ley de transformación²³ (1.33), tenemos

$$\begin{aligned} e^{-\mu_{\chi'}(u)} &= e^{-\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi'')} \circ \Psi_\Lambda(v)} \\ &= e^{-\mu_{\chi''}(v)} e^{-\langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi'') \rangle} \leq e^{-\mu_{\chi''}(v)} e^{-\langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi_0) \rangle} \leq e^{-\langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi_0) \rangle} f \circ \Psi_\Lambda(u). \end{aligned}$$

Con esto mostramos que la imagen de \mathfrak{g}_* bajo la acción adjunta de cualquier elemento $\Lambda \in G$, se encuentra dentro de \mathfrak{g}_* . Si además consideramos que la acción adjunta es invertible, entonces debemos tener $\text{Ad}_\Lambda(\mathfrak{g}_*) = \mathfrak{g}_*$, lo que nos permite hablar de la segunda parte de la proposición. Con respecto a la transformación de la función de partición, basta hacer el cambio de variable $u = \Psi_\Lambda(v)$, tomando en cuenta que $\Psi_\Lambda(W) = W$, para obtener la propiedad (2.58), i. e.

$$\begin{aligned} Z(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) &= \int_W d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)}(u)} = \int_{\Psi_\Lambda(W)} [\Psi_\Lambda]^* d\lambda_\omega \circ \Psi_\Lambda(v) e^{-\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda(v)} \\ &= \int_W d\lambda_\omega(v) e^{-\mu_\chi(v)} e^{-\langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi) \rangle} = e^{-\langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi) \rangle} \int_W d\lambda_\omega(v) e^{-\mu_\chi(v)} = e^{-i_\chi \text{Ad}_\Lambda^* \theta(\Lambda)} Z(\chi). \end{aligned}$$

Con respecto a la transformación (2.59) de la energía generalizada, sea $\alpha \in \mathfrak{g}_*$ un vector de Souriau cualquiera, utilizando apropiadamente la propiedad (2.58) encontramos

$$\begin{aligned} i_\alpha \mathcal{E}(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) &= -\frac{d}{ds} \ln(Z(\text{Ad}_\Lambda(\chi) + s\alpha)) \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{d}{ds} \ln(Z(\text{Ad}_\Lambda(\chi) + s\text{Ad}_\Lambda \circ \text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\alpha))) \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{d}{ds} \ln(Z \circ \text{Ad}_\Lambda(\chi + s\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\alpha))) \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{d}{ds} \ln\left(e^{-\langle \text{Ad}_{\Lambda^{-1}}^* \theta(\Lambda), \chi + s\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\alpha) \rangle} Z(\chi + s\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\alpha))\right) \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{d}{ds} \ln(e^{-s i_\alpha \theta(\Lambda)}) \Big|_{s=0} - \frac{d}{ds} \ln(Z(\chi + s\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\alpha))) \Big|_{s=0} \\ &= i_\alpha \theta(\Lambda) + i_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\alpha)} \mathcal{E}(\chi) = i_\alpha \left(\theta(\Lambda) + \text{Ad}_\Lambda^*(\mathcal{E}(\chi)) \right). \end{aligned}$$

²³Notemos que $\mu \circ \Psi_\Lambda = \text{Ad}_\Lambda^*(\mu) + \theta(\Lambda)$ implica $\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda(u) = \mu_\chi(u) + \langle \theta(\Lambda), \text{Ad}_\Lambda(\chi) \rangle$.

Finalmente, a partir de (2.58) y (2.59), podemos deducir (2.60):

$$\begin{aligned}
S(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) &= i_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)}\mathcal{E}(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) + \ln(Z(\text{Ad}_\Lambda(\chi))) \\
&= i_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)}\text{Ad}_\Lambda^*(\mathcal{E}(\chi)) + i_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)}\theta(\Lambda) - i_\chi\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}^*(\theta(\Lambda)) + \ln(Z(\chi)) \\
&= i_\chi\mathcal{E}(\chi) + i_\chi\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}^*\theta(\Lambda) - i_\chi\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}^*(\theta(\Lambda)) + \ln(Z(\chi)) = S(\chi). \quad \diamond
\end{aligned}$$

Como un pequeño comentario formal sobre la consistencia del resultado (2.58) debemos precisar que, para toda $\chi \in \mathfrak{g}$, si $\Lambda \in G$ es tal que $\text{Ad}_\Lambda(\chi) = \chi$, entonces $\theta(\Lambda)$ satisface la condición

$$i_\chi\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}^*\theta(\Lambda) = 0. \quad (2.61)$$

De esta manera nos aseguramos que en este escenario particular se cumpla

$$Z(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) - e^{-i_\chi\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}^*\theta(\Lambda)}Z(\chi) = Z(\chi) - Z(\chi) = 0.$$

Quisimos hacer aquí esta aclaración porque a primera vista la condición (2.61) puede no ser del todo obvia, pero no es más que una consecuencia de las propiedades del momentum map, en específico, de la siguiente proposición, que pudiendo pertenecer perfectamente a la primera parte de este trabajo, se cuela aquí.

Proposición 2.9

Sea $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$ el momentum map de la acción hamiltoniana $\Psi : G \times U \rightarrow U$ de un grupo de Lie sobre la variedad simpléctica (U, Ω) . La hamiltoniana $\mu_\chi = i_\chi\mu$ del campo fundamental $\psi_\chi \in \mathfrak{X}(U)$ asociado a χ , es invariante bajo las transformaciones generadas por el subgrupo estabilizador de χ , i. e. para todo $\Lambda \in G_\chi$ se satisface

$$\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda = \mu_\chi, \quad (2.62)$$

donde $G_\chi = \{\Lambda \in G : \text{Ad}_\Lambda(\chi) = \chi\}$.

En efecto, comencemos por ver que para cualquier elemento $\Lambda \in G_\chi$, tomando en cuenta que entonces $\Lambda^{-1} \in G_\chi$, se satisface $d(\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda) = d\mu_\chi$. Sean entonces $u \in U$ y $Y \in T_uU$ elementos cualquiera, de la definición (1.22) del momentum map y de la propiedad (1.18) de los campos fundamentales, obtenemos

$$\begin{aligned}
i_Y d(\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda)(u) &= i_Y([\Psi_\Lambda]^* d\mu_\chi)(u) = i_{[\Psi_\Lambda]_* Y} d\mu_\chi(\Psi_\Lambda(u)) = -\Omega(\Psi_\Lambda(u))(\psi_\chi, [\Psi_\Lambda]_* Y) \\
&= -\left([\Psi_\Lambda]^* \Omega \circ \Psi_\Lambda\right)(u)([\Psi_{\Lambda^{-1}}]_* \psi_\chi, Y) = -\Omega(u)(\psi_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}, Y) \\
&= -\Omega(\psi_\chi, Y) = i_Y d\mu(u),
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda$ sólo puede diferir de μ_χ por una constante, pero dado que en la elección de un momentum map siempre hay lugar a esta libertad de agregar constantes, siempre podemos asegurarnos que $\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda = \mu_\chi$. \(\diamond\)

Teniendo entonces (2.62), de la definición $\theta(\Lambda) = \mu \circ \Psi_\Lambda - \text{Ad}_\Lambda^*(\mu)$ obtenemos, para todo elemento $\Lambda \in G_\chi$, el resultado (2.61):

$$i_\chi \text{Ad}_{\Lambda^{-1}}^* \theta(\Lambda) = i_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \theta(\Lambda) = i_\chi \theta(\Lambda) = \mu_\chi \circ \Psi_\Lambda - i_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)} \mu = \mu_\chi \circ \Psi_\Lambda - \mu_\chi = 0.$$

En un escenario más general, podemos notar que cuando el momentum map es equivariente (1.35), i. e. $\theta = 0$ sobre todo el grupo, siempre podemos construir la función de partición Z para que sea invariante ante la acción adjunta del grupo sobre el espacio de vectores de Souriau. Resulta interesante notar cómo estas leyes de transformación pasan desapercibidas para las funciones (2.34), (2.38) y (2.39) del caso abeliano $G \sim \mathbb{R}$, precisamente porque el momentum map asociado a un grupo abeliano siempre es equivariente y la acción adjunta (y por ende, co-adjunta) de cualquier elemento $\alpha \in G$ del grupo abeliano sobre cualquier elemento $\beta \in \mathfrak{g}$ de su álgebra de Lie, es la trivial, i. e.²⁴

$$\text{Ad}_\alpha(\beta) = \frac{d}{ds}(\alpha + s\beta - \alpha)_{s=0} = \beta.$$

Así, en el caso abeliano los vectores de Souriau $\beta > 0$ ni siquiera se ven afectados por las transformaciones del grupo, es decir, la temperatura del sistema no se ve afectada por las traslaciones del tiempo, lo mismo que todas las demás cantidades obtenidas a partir del estado $\lambda_{\rho(\beta)}$, tal como debe ser si buscamos que dicho estado sea un modelo estadístico de un sistema termodinámico. No obstante, en el caso más general donde G no es abeliano los vectores de Souriau sí se ven afectados por las transformaciones del grupo. De manera remarcable, estas transformaciones del grupo no afectan la distribución de Gibbs generalizada, siempre y cuando se tome en cuenta el cambio correspondiente en los vectores de Souriau.

Proposición 2.10

Sea $\rho : \mathfrak{g}_* \rightarrow [0, +\infty)$ la pdf de Gibbs generalizada definida en (2.54), esta resulta invariante ante la acción del grupo de Lie G tanto sobre W como sobre \mathfrak{g}_* , i. e. para todo $u \in W$, $\Lambda \in G$ y $\chi \in \mathfrak{g}_*$, se satisface^a

$$\rho(\text{Ad}_\Lambda(\chi); \Psi_\Lambda(u)) = \rho(\chi; u). \quad (2.63)$$

^aEn [26] se demuestra (2.63) para el subgrupo monoparamétrico $\{e^{s\chi}\}_{s \in \mathbb{R}}$ generado sólo por $\chi \in \mathfrak{g}_*$, considerando que la hamiltoniana μ_χ es invariante ante su flujo hamiltoniano $\Psi_{e^{s\chi}}$. Esta demostración puede verse como un caso particular de la aquí presente tomando, a su vez, un caso particular de la expresión (2.62), tomando en cuenta que $\{e^{s\chi}\}_{s \in \mathbb{R}} \subset G_\chi$, pues

$$\text{Ad}_{e^{s\chi}}(\chi) = \frac{d}{d\lambda} e^{s\chi} e^{\lambda\chi} e^{-s\chi} \Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\chi} e^{s\chi} e^{-s\chi} \Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\chi} \Big|_{\lambda=0} = \chi.$$

De esta manera, el resultado enunciado en [26] se obtiene en este esquema, como

$$\rho(\text{Ad}_{e^{s\chi}}(\chi); \Psi_{e^{s\chi}}(u)) = \rho(\chi; \Psi_{e^{s\chi}}(u)) = \frac{\Theta_W \circ \Psi_{e^{s\chi}}(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda(u)} = \frac{\Theta_W(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi(u)} = \rho(\chi; u).$$

²⁴Como es costumbre en los grupos abelianos, hemos cambiado la notación de concatenación $\alpha\beta$ para representar el producto entre dos elementos α y β , por su suma $\alpha + \beta$. Lo mismo que el inverso α^{-1} por $-\alpha$. En el mismo sentido el mapeo exponencial del álgebra asociada resulta ser el mapeo lineal $\exp(s\alpha) = s\alpha$ donde la identidad del grupo la representamos como 0 [34].

La propiedad (2.63) es una consecuencia de las leyes de transformación (1.33) y (2.58) de las que hemos estado hablando hasta el momento:

$$\begin{aligned} \rho(\text{Ad}_\Lambda(\chi); \Psi_\Lambda(u)) &= \frac{\Theta_W \circ \Psi_\Lambda(u)}{Z(\text{Ad}_\Lambda(\chi))} e^{-\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda(u)} \\ &= \frac{e^{-i_\chi \text{Ad}_{\Lambda^{-1}} \theta(\Lambda)}}{e^{-i_\chi \text{Ad}_{\Lambda^{-1}} \theta(\Lambda)}} \frac{\Theta_W(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi(u)} = \frac{\Theta_W(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi(u)} = \rho(\chi; u). \quad \square \end{aligned}$$

Parte II
Resultados

CAPÍTULO

3

GAS IDEAL EN UN ESPACIOTIEMPO ESTÁTICO

En este capítulo presentaremos un modelo hamiltoniano que describe la evolución de una partícula libre en la variedad simpléctica (T^*M, Ω) donde M hace parte de un espaciotiempo (M, g) estático de dimensión $\dim(M) = D = 1 + d$ (para $d \geq 3$) con tensor métrico lorentziano g con signatura $(-1, +d)$. Veremos que la evolución del sistema está físicamente constreñida a la hipersuperficie de nivel cero de una función real en T^*M (la función de capa de masa) y exploraremos el grupo de simetrías del sistema hamiltoniano, que resulta ser el grupo de isometrías de (M, g) actuando sobre T^*M por medio de un levantamiento cotangente como el que definimos en la parte anterior de este trabajo.

La generalización del modelo a N partículas libres, pero limitadas a una región $\tau \subset M$ para su estudio, como recurso para modelar un gas ideal diluído, nos permitirá plantear la descripción estadística del sistema empleando estados de Gibbs generalizados en un espaciotiempo, donde el soporte de la pdf asociado es el verdadero espacio fase del sistema, sujeto a las constricciones de capa de masa de cada partícula. Al respecto, la propiedad del espaciotiempo de ser estático juega un papel importante, porque por medio de observadores estáticos nos permite definir una noción de equilibrio con la cual interpretar físicamente los resultados.

Por otra parte, como propuesta de espacio fase, ofrecemos un candidato que, satisfaciendo las características básicas de lo que debe esperarse de un espacio fase, es lo suficientemente simple para permitirnos desarrollar de manera explícita las integrales que definen elementos como la función de partición y valores esperados de observables, para casos particulares que analizamos. En particular estudiamos distribuciones de Gibbs generalizadas que recuerdan a la distribución de Jüttner para gases ideales relativistas, y que se reducen a ella en el caso trivial del espaciotiempo de Minkowski.

Como notación para esta sección tomaremos letras griegas para representar índices que corren de 0 a d y letras latinas para los índices que toman valores sólo entre 1 y d , i. e. $\mu =$

$0, 1, 2, \dots, d, i = 1, 2, \dots, d$. Si $g_{\mu\nu}(x) = g(x)(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu})$ son las componentes del tensor métrico g en el punto $x \in M$ en la base $(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d})$ inducida por las coordenadas $(x^\mu) = (x^0, x^1, \dots, x^d)$, representaremos como $g^{\mu\nu}(x) = g^{-1}(x)(dx^\mu, dx^\nu)$ las componentes de su tensor métrico inverso g^{-1} en el punto $x \in M$ y en la base dual $(dx^\mu) = (dx^0, dx^1, \dots, dx^d)$. Con respecto a la norma de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ definida a partir del tensor métrico g , la representaremos por medio del símbolo $\|X\|$ como la función real (sobre M)

$$x \mapsto \|X\|(x) = |g(x)(X, X)|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

También utilizaremos las barras dobles verticales para representar normas de vectores en otros espacios con otros tensores o productos internos. Esto no debería causar confusión con la expresión (3.1) de la g -norma, pues del mismo contexto se podrá deducir si la norma se calcula con otra g o con otra métrica.

Como convención tomaremos unidades de Planck donde $k_B = 1$, $c = 1$ y $h = 2\pi$, y el convenio de suma de Einstein se aplicará a lo largo de todo este documento (índices inferior y superior repetidos representan la suma sobre todos sus posibles valores), a menos que explícitamente se especifique lo contrario. Para mayores detalles acerca de la geometría pseudo-riemanniana del espaciotiempo, así como de relatividad general, en general, recomendamos revisar [59, 60, 61, 62].

Finalmente, para una mayor claridad sobre qué resultados son originales de este trabajo, empleamos tonos verdes para diferenciarlos de los resultados ya publicados anteriormente en la literatura (debidamente citados) que hemos estado mostrando en tonos amarillos.



Figura 3.1: Karl Schwarzschild (1873-1916 †).

1 Descripción hamiltoniana de partículas libres y masivas

Consideremos una partícula de masa m , en un espaciotiempo (M, g) . Sabemos que si dicha partícula es libre, su línea de mundo en M será una curva geodésica de tipo tiempo con respecto a la conexión de Levi-Civita [61]. Expliquemos esto a detalle. Primero, que la línea de mundo de la partícula, representada mediante la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, sea una geodésica, significa que satisface la condición

$$i_{\frac{d\gamma}{d\tau}} \left(\nabla \frac{d\gamma}{d\tau} \right) \Big|_{\gamma(\tau)} = \nabla_{\frac{d\gamma}{d\tau}} \frac{d\gamma}{d\tau} \Big|_{\gamma(\tau)} = 0, \quad (3.2)$$

que geoméricamente describe cómo los vectores tangentes de esta curva son transportados de manera paralela, con respecto a la noción de paralelismo introducida por la conexión de Levi-Civita (i. e. se mantiene constante, según la noción dada por la conexión), a lo largo de sí misma¹ [34].

En coordenadas (x^μ) cualquiera, donde la curva γ se ve como $\gamma : \tau \mapsto (x^\mu(\tau))$, y con las bases tangente y cotangente inducidas, i. e. $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$ y (dx^μ) , (3.2) se ve localmente como

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{d\tau}} \frac{d\gamma}{d\tau} \Big|_{\gamma(\tau)} = \left[\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right]_{\gamma(\tau)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (3.3)$$

donde $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ son los símbolos de Christoffel [61]:

$$\Gamma(x)^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\theta}(x) \left(\frac{\partial g_{\theta\beta}}{\partial x^\gamma}(x) + \frac{\partial g_{\theta\gamma}}{\partial x^\beta}(x) - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\theta}(x) \right). \quad (3.4)$$

Por independencia lineal de la base $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$, cada una de las componentes del vector (3.3) son cero a lo largo de $\gamma(\tau) = (x^\mu(\tau))$, por lo que localmente la condición geodésica (3.2) se expresa a través del sistema de D ecuaciones diferenciales, acopladas y de segundo orden

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0. \quad (3.5)$$

Con respecto a la etiqueta "tipo tiempo" que le hemos dado a la geodésica de la partícula con masa m , nos referimos a que su campo vectorial tangente, i. e. el campo vectorial $U \in \mathfrak{X}(M)$ sobre todo M que, en particular sobre la curva γ satisface

$$U \circ \gamma(\tau) = \frac{d\gamma}{d\tau}(\tau), \quad (3.6)$$

¹Formalmente una conexión es un mapeo bilineal $\Gamma : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ y la derivada covariante es un operador lineal que toma campos vectoriales y regresa campos vectoriales con valores en 1-formas, $\nabla : d + \Gamma : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Lambda^1(M) \otimes \mathfrak{X}(M)$, y satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X.$$

Particularmente el apelativo "de Levi-Civita" caracteriza a la conexión como la única que es antisimétrica y compatible con la métrica, en el sentido de que $\nabla(g(X, Y))(x) = g(x)(\nabla X, Y) + g(x)(X, \nabla Y)$ [34].

es un campo vectorial que tiene norma cuadrada negativa² en los puntos $\gamma(\tau)$ para toda τ :

$$\|U\|^2(\gamma(\tau)) = g(\gamma(\tau))(U, U) < 0. \quad (3.7)$$

Particularmente podemos elegir el parámetro τ de la curva γ de tal forma que el campo de velocidades U tenga norma unitaria. En otras palabras, podemos elegir que la geodésica esté parametrizada por longitud de arco o, como se le conoce en relatividad general, parametrizada a través del llamado tiempo propio³ [61]

$$\|U\|^2(\gamma(\tau)) = g(\gamma(\tau))(U, U) = -1. \quad (3.8)$$

Aclarada la cuestión de cómo es la línea de mundo de una partícula masiva y libre en un espacio-tiempo (M, g) de fondo, busquemos realizar una descripción hamiltoniana de esta historia sobre su haz cotangente T^*M , dotado de su forma simpléctica natural $\Omega = d\vartheta$ (véase la subsección (2.1)). Esto lo haremos a partir de la hamiltoniana

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}g^{-1}(x)(p, p), \quad (3.9)$$

donde, siendo $g^{-1}(x)$ la métrica inversa a $g(x)$, define como tal un producto interno en el espacio vectorial cotangente T_x^*M , dual al espacio vectorial tangente T_xM . Localmente, en un sistema de coordenadas de Darboux (x^μ, p_μ) , donde $p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} p$, la hamiltoniana toma la forma

$$H(x^\mu, p_\mu) = \frac{g^{\mu\nu}}{2m}p_\mu p_\nu. \quad (3.10)$$

En este sentido resulta interesante notar que la hamiltoniana propuesta resulta invariante ante transformaciones de coordenadas que sean *de punto*, es decir, que se obtengan a partir del levantamiento cotangente de un difeomorfismo en M .

Proposición 3.1

Sea $\varphi \in \text{Diff}(T^*M)$ un levantamiento cotangente de un difeomorfismo $\varphi \in \text{Diff}(M)$ en el espaciotiempo, i. e. $\varphi(x, p) = (\varphi(x), (\varphi^{-1})^*p)$, entonces, para la hamiltoniana (3.9) se satisface

$$H \circ \varphi = H. \quad (3.11)$$

²Dada la naturaleza pseudo-riemanniana de g podemos catalogar los vectores tangentes de M en tres categorías: tipo tiempo, si su norma cuadrada es negativa, tipo espacio, si su norma cuadrada es positiva y, finalmente, tipo nulo o tipo luz, si su norma cuadrada es cero. En cada caso las geodésicas con vectores tangentes de cada tipo describen distancias entre puntos, o eventos de M , que, según la estructura causal del propio espaciotiempo, pueden o no estar físicamente relacionados. En este sentido el requerimiento de que las partículas masivas libres no sólo describan geodésicas en M , si no que sean del tipo tiempo, es consecuencia de pedir que la partícula nunca pueda transmitir información más rápido que la luz, rompiendo con esto la estructura causal de la dinámica de la partícula [61].

³Formalmente, definimos el tiempo propio entre dos eventos (puntos) $x_1, x_2 \in M$ conectados por la geodésica tipo tiempo γ , como la integral [61]

$$\tau = \int_\gamma \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu} = \int_\gamma dx^0 \sqrt{-g_{00}(x^\alpha)}|_{\mathcal{O}},$$

donde la segunda integral se calcula en el marco co-móvil \mathcal{O} de la partícula con geodésica γ , donde $dx^i = 0$.

La demostración de la invarianza (3.11) es una consecuencia de que, para cada punto $(x, p) \in T^*M$, la cantidad $H(x, p)$ como una cantidad definida sobre M , es un escalar, i. e. se trata de la evaluación de un 2-vector $g^{-1}(x)$ en el par de covectores formado por $p \in T_x^*M$:

$$\begin{aligned} H \circ \varphi(x, p) &= H(\varphi(x), (\varphi^{-1})^*p) \\ &= \frac{1}{2m} g^{-1}(\varphi(x))([\varphi^{-1}]^*p, [\varphi^{-1}]^*p) = \frac{1}{2m} ([\varphi^{-1}]_*g^{-1} \circ \varphi)(x)(p, p) \\ &= \frac{1}{2m} g^{-1}(x)(p, p) = H(x, p). \end{aligned} \quad \diamond$$

Teniendo el sistema hamiltoniano (T^*M, Ω, H) veamos que, efectivamente, las curvas integrales del campo vectorial hamiltoniano X^H describen curvas que se proyectan en el espaciotiempo M base como geodésicas, cuyas velocidades están relacionadas con los momentos vía el tensor métrico g .

Proposición 3.2

Sea $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow T^*M$ una curva integral del campo vectorial hamiltoniano X^H asociado a (3.9), que parte del punto $\hat{\gamma}(0) = (x_0, p_0)$. Dicha curva se trata de un levantamiento horizontal de una geodésica γ del tipo-tiempo en M , que parte de $\gamma(0) = x_0$, cuya parte vertical identifica la velocidad de γ como m veces el gradiente métrico de la 1-forma de momento de la partícula, i. e.

$$mU(\gamma(\tau)) = \text{grad } p(\gamma(\tau)). \quad (3.12)$$

La curva integral $\hat{\gamma}$ a la que hace referencia la proposición anterior, i. e. la curva sobre M tal que, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, satisface $X^H \circ \hat{\gamma}(\tau) = \frac{d\hat{\gamma}}{d\tau}(\tau)$ con $\hat{\gamma}(0) = (x_0, p_0)$, es una solución al sistema de ecuaciones diferenciales $dH \circ \gamma(\tau) = -i_{X^H}\Omega(\gamma(\tau)) = -i_{\frac{d\gamma}{d\tau}}\Omega(\gamma(\tau))$ bajo la condición $\hat{\gamma}(0) = (x_0, p_0)$, que en coordenadas (x^μ, p_μ) de Darboux se ve como

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{m} g^{\mu\alpha}(x(\tau)) p_\alpha(\tau), \quad (3.13)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}(\tau) = -\frac{1}{2m} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}(x(\tau)) p_\alpha(\tau) p_\beta(\tau), \quad (3.14)$$

donde $\hat{\gamma}(\tau) = (x^\mu(\tau), p_\mu(\tau))$ con $x^\mu(0) = x_0^\mu$ y $p_\mu(0) = p_{0\mu}$. Las primeras D ecuaciones (3.13) nos indican que, sobre $\hat{\gamma}$, las coordenadas sobre la fibra, i. e. las p 's, están relacionadas linealmente con las componentes del vector velocidad de la partícula, de tal manera que se satisface (3.12):

$$mU \circ \gamma(\tau) = m \frac{d\gamma}{d\tau}(\tau) = g^{\mu\alpha}(x(\tau)) p_\alpha(\tau) \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \text{grad } p \circ \gamma(\tau),$$

donde $\gamma(\tau) = (x^\mu(\tau)) = \pi \circ \hat{\gamma}(\tau)$ es la proyección de la curva integral en el espacio base M . Tomando esto en cuenta podemos resolver el resto de D ecuaciones (3.14) multiplicando y

contrayendo con los elementos $g^{\mu\theta}$ de la métrica inversa,

$$g^{\mu\theta} \left(\frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{p_\alpha p_\beta}{2m} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \Big|_{\hat{\gamma}(\tau)} = \left[g^{\mu\theta} \frac{d}{d\tau} \left(m g_{\mu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) + \frac{g^{\mu\theta}}{2m} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \left(m g_{\alpha\omega} \frac{dx^\omega}{d\tau} \right) \left(m g_{\beta\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \right]_{\gamma(\tau)} = 0,$$

para posteriormente desarrollar la derivada $\frac{d}{d\tau}$ del término $m g_{\mu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$, empleando la regla de la cadena $\frac{dg_{\mu\alpha}}{d\tau} = \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$, y recordar la expresión (3.4) para los símbolos de Christoffel, para llegar efectivamente al sistema de ecuaciones (3.3) para la curva γ :

$$\left[m \frac{d^2 x^\theta}{d\tau^2} + m g^{\mu\theta} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} - g^{\mu\theta} \frac{m}{2} \frac{\partial g_{\alpha\omega}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\omega}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right]_{\gamma(\tau)} = m \left[\frac{d^2 x^\theta}{d\tau^2} + \Gamma^{\theta}_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right]_{\gamma(\tau)} = 0. \quad \diamond$$

Para poder decir que el sistema hamiltoniano (T^*M, Ω, H) efectivamente modela la evolución de una partícula libre con masa m , es necesario que introduzcamos a mano la condición (3.8) impuesta a las velocidades de las geodésicas sobre M , que en nuestra formulación hamiltoniana se traduce en una condición geométrica para los posibles valores de posiciones (en espaciotiempo) y momentos (empleando la relación (3.12) para pasar de velocidades a momentos). Específicamente, imponemos que la dinámica del sistema sólo puede darse a través de los puntos $(x, p) \in T^*M$ que satisfagan

$$-m^2 = g(x)(mU, mU) = g(x)(\text{grad } p, \text{grad } p) = p_\alpha g^{\alpha\beta}(x) p_\beta. \quad (3.15)$$

Seamos un poco más formales al respecto. Lo que estamos diciendo es que restringiremos nuestro análisis a estudiar sólo trayectorias, en espacio fase T^*M , que se mantengan sobre la región $\mathcal{P}^{-1}(0)$, i. e. el hiperboloide generado como la hipersuperficie de nivel cero de la llamada función de capa de masa $\mathcal{P} : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\mathcal{P}(x, p) = g^{-1}(x)(p, p) + m^2. \quad (3.16)$$

Esto sólo tiene sentido si nos podemos asegurar que toda geodésica que inicie en la hipersuperficie de nivel cero $\mathcal{P}(x, p) = \mathcal{P}_0$, de (3.16), se mantiene en dicha hipersuperficie.

Proposición 3.3

Las hipersuperficies de nivel de la función de capa de masa (3.16) son invariantes ante el flujo hamiltoniano del sistema (T^*M, Ω, H) , i. e. cualquier curva integral de X^H que sea tangente a $\mathcal{P}^{-1}(c)$ en un punto, lo será en todos sus puntos, donde c es cualquier valor regular de \mathcal{P} :

$$\hat{\gamma}(\tau_0) \in \mathcal{P}^{-1}(c) \quad \implies \quad \text{Im}(\hat{\gamma}) \subset \mathcal{P}^{-1}(c). \quad (3.17)$$

Esto es cierto en virtud de que la función de capa de masa \mathcal{P} es linealmente dependiente a la hamiltoniana (3.9), i. e. $\mathcal{P} = 2mH + m^2$, lo que nos permite ver que se mantiene constante a lo largo del flujo hamiltoniano del sistema, i. e. de las curvas integrales $\hat{\gamma}$ de X^H , i. e. a lo largo de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{P} \circ \hat{\gamma}(\tau) = i_{X^H} d\mathcal{P}(\hat{\gamma}(\tau)) = 2m i_{X^H} dH(\hat{\gamma}(\tau)) = -2m \Omega(\hat{\gamma}(\tau))(X^H, X^H) = 0.$$

De esta manera, si la curva integral de X^H es tangente en $\hat{\gamma}(\tau_0)$ a la hipersuperficie de nivel c de \mathcal{P} , i. e. $\mathcal{P}(\hat{\gamma}(\tau_0)) = c$, entonces para toda $\tau \in \mathbb{R}$ la curva seguirá siendo tangente a $\mathcal{P}^{-1}(c)$, pues $\mathcal{P} \circ \hat{\gamma}$ es independiente de τ ,

$$\mathcal{P}(\tilde{\gamma}(\tau)) = \mathcal{P}(\tilde{\gamma}(\tau_0)) = c \quad \implies \quad \text{Im}(\hat{\gamma}) \subset \mathcal{P}^{-1}(c). \quad \diamond$$

Aplicado esto al caso $\mathcal{P}_0 = 0$, vemos que efectivamente el estado fase de una partícula de masa m está condenado a vagar, hamiltonianamente, por los puntos en $\mathcal{P}^{-1}(0)$.

1.1 Acción del grupo de isometrías

Sea G el grupo de Lie, k -dimensional, formado por las isometrías de la métrica g . Más específicamente, G se trata del conjunto de difeomorfismos $\Lambda \in \text{Diff}(M)$ que, bajo composición, forman un grupo de Lie, tal que para todo punto $x \in M$ en el espacio-tiempo, y vectores tangentes $X, Y \in T_x M$, sus elementos satisfacen la propiedad [34]

$$g(\Lambda(x))(\Lambda_* X, \Lambda_* Y) = g(x)(X, Y), \quad (3.18)$$

o, simplemente, $\Lambda^* g = g$. Naturalmente, el mismo grupo de simetrías aplica para la métrica inversa g^{-1} . Sabemos que cada isometría $\Lambda \in G$ es un difeomorfismo que, por definición, preserva tanto las distancias entre los puntos del espaciotiempo (M, g) así como las normas de sus campos vectoriales, lo que nos permite asegurar que cada isometría mapea geodésicas tipo tiempo en geodésicas tipo tiempo [34]. En este sentido decimos que el grupo de isometrías es un grupo de simetrías de nuestro sistema hamiltoniano de partícula libre con masa m . Exploremos esta idea comenzando por introducir la acción suave e izquierda⁴ (1.2) $\Psi : G \times M \rightarrow M$ dada por la familia de difeomorfismos $\{\Psi_\Lambda\}_{\Lambda \in G}$ definidos trivialmente como

$$\Psi_\Lambda(x) = \Lambda(x). \quad (3.19)$$

Notemos que los campos fundamentales asociados con la acción Ψ , definidos conceptualmente en (1.11) y que representaremos como

$$\xi_x(x) = \psi_x(x) = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{sx}}(x) \right|_{s=0}, \quad (3.20)$$

son, por definición, los campos vectoriales de Killing del tensor métrico g , i. e. los generadores infinitesimales de las isometrías, y como tales satisfacen la condición de Killing [34, 59, 60]

$$\mathcal{L}_{\xi_x} g = 0. \quad (3.21)$$

En efecto, (3.21) se trata sólo de la versión infinitesimal de la condición (3.18) que satisfacen las isometrías, como puede deducirse empleando la definición misma de la derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_{\xi_x} g(x) = \left. \frac{d}{ds} [\Psi_{e^{sx}}]^* g(\Psi_{e^{sx}}(x)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} [e^{sx}]^* g(e^{sx}(x)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} g(x) \right|_{s=0} = 0.$$

Consideremos ahora el levantamiento cotangente (1.41) de la acción (3.19), es decir, la acción hamiltoniana $\Psi : G \times T^*M \rightarrow T^*M$ dada a través de la familia de simplectomorfismos $\{\Psi_\Lambda\}_{\Lambda \in G}$ dados por

$$\Psi(\Lambda, (x, p)) \equiv \Psi_\Lambda(x, p) = (\Lambda(x), [\Lambda^{-1}]^* p), \quad (3.22)$$

⁴Naturalmente, por la misma definición del grupo G , para cualquier par de elementos $\Lambda_1, \Lambda_2 \in G$ tenemos $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \Lambda_1 \Lambda_2$, y por ende $\Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2}(x) = \Psi_{\Lambda_1}(\Lambda_2(x)) = \Lambda_1 \circ \Lambda_2(x) = (\Lambda_1 \Lambda_2)(x) = \Psi_{\Lambda_1 \Lambda_2}(x)$.

cuyos campos fundamentales están π_* -relacionados con los campos de Killing (3.20),

$$[\pi(x)]_*\psi_\chi(x) = \xi_\chi(x) = \xi_\chi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.23)$$

y para la cual existe un momentum map $\mu : T^*M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ equivariante dado por la expresión⁵

$$\mu_\chi(x, p) = i_{\xi_\chi} p(x) = p_\alpha \xi_\chi^\alpha. \quad (3.24)$$

Una propiedad importante de la acción (3.22) es que, además de conservar la estructura simpléctica de (T^*M, Ω, H) , conserva también la hamiltoniana (3.9) y, basándonos en la relación $\mathcal{P} = 2mH + m^2$, también las hipersuperficies de nivel de la función de capa de masa (3.16). En efecto, esto ya lo mostramos de hecho en el resultado (3.11) de la proposición (3.1). De esta manera nuestro modelo hamiltoniano del movimiento en espaciotiempo M de una partícula masiva y libre, es invariante ante el grupo de isometrías de (M, g) , i. e., G es un grupo de simetrías del sistema. Además, tomando en cuenta el teorema (1.1), el momentum map definido a partir de la relación (3.24) resulta ser una cantidad conservada en este modelo. En cuanto a la interpretación física del momentum map y las integrales de movimiento μ_χ , notemos que, sobre el flujo hamiltoniano en el hiperboloide $\mathcal{P}^{-1}(0)$, a raíz de la identificación (3.12), sobre las curvas $\hat{\gamma}$ solución de las ecuaciones de Hamilton, podemos reexpresar (3.24) en términos de la velocidad de la partícula, como

$$\mu_\chi \circ \hat{\gamma}(\tau) = m g(\gamma(\tau))(U, \xi_\chi). \quad (3.25)$$

Así, físicamente, las hamiltonianas construídas a partir de un momentum map, se tratan de las proyecciones de la velocidad de la partícula en la dirección del generador de isometrías, y como tales, estas proyecciones están conservadas [59, 60, 62]. Esta conservación puede corroborarse a nivel del propio espaciotiempo, sin necesidad de invocar el formalismo del momentum map a través del sistema hamiltoniano (T^*M, Ω, H) y la acción Ψ .

Proposición 3.4

Dada la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ consideremos la función real $\tilde{\mu} : \tau \mapsto m g(\gamma(\tau))(\frac{d\gamma}{d\tau}, \xi_\chi)$, donde $\xi_\chi \in \mathfrak{X}(M)$ es cualquier campo vectorial de Killing del espaciotiempo (M, g) . Si γ es una geodésica, i. e. satisface la ecuación (3.2), entonces $\tilde{\mu}$ es constante:

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\tau}(\tau) = 0. \quad (3.26)$$

Para demostrar (3.26) resulta conveniente considerar primero algunas propiedades de la derivada covariante, construída a partir de la conexión de Levi-Civita, que se deducen a partir de su misma definición; (1) la derivada covariante se puede extender a funciones reales sobre M como una derivada exterior⁶, en este sentido $\mathcal{L}_X(g(x)(Y, Z)) = \nabla_X(g(x)(Y, Z))$ para cualquier $x \in M$ y terna de campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, pero al mismo tiempo (2) la conexión de Levi-Civita es compatible con la métrica y satisface [34]

$$\mathcal{L}_X(g(x)(Y, Z)) = \nabla_X(g(x)(Y, Z)) = g(x)(\nabla_X Y, Z) + g(x)(Y, \nabla_X Z), \quad (3.27)$$

⁵Véase la proposición (1.6) y los resultados (1.43) y (1.44) ahí mismo.

⁶Es decir, $\nabla f = df$ tal que $\nabla_X f = i_X df = \mathcal{L}_X f$ para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ [34]

y finalmente (3) tomando en cuenta que la conexión de Levi-Civita además tiene torsión cero, existe la siguiente relación entre derivadas de Lie y derivadas covariantes [34]:

$$\mathcal{L}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \quad (3.28)$$

Con estas tres propiedades, además de la ecuación $\nabla_U U(\gamma(\tau)) = 0$ de las geodésicas y (3.27) y la ecuación de Killing $\mathcal{L}_{\xi_x} g = 0$, podemos hacer fácilmente el cálculo $\frac{d\tilde{\mu}}{d\tau} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{\mu}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} g(\gamma(\tau))(U, \xi_x) = \mathcal{L}_U \left(g(\gamma(\tau))(U, \xi_x) \right) \\ &= g(\gamma(\tau))(\nabla_U U, \xi_x) + g(\gamma(\tau))(U, \nabla_U \xi_x) = g(\gamma(\tau))(U, \nabla_U \xi_x) \\ &= g(\gamma(\tau))(U, \nabla_{\xi_x} U - \mathcal{L}_{\xi_x} U) = g(\gamma(\tau))(U, \nabla_{\xi_x} U) - g(\gamma(\tau))(U, \mathcal{L}_{\xi_x} U) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{\xi_x} (g(\gamma(\tau))(U, U)) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\xi_x} (g(\gamma(\tau))(U, U)) + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\xi_x} g)(\gamma(\tau))(U, U) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{\xi_x} (g(\gamma(\tau))(U, U)) - \frac{1}{2} \nabla_{\xi_x} (g(\gamma(\tau))(U, U)) = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

2 Gas ideal de partículas libres y masivas

Consideremos ahora, sobre el espaciotiempo (M, g) , un sistema de N partículas idénticas pero independientes, con masa m . Dada la independencia entre dichas partículas, y según lo visto en la sección anterior, podemos describir hamiltonianamente este sistema por medio de N copias del sistema hamiltoniano de una partícula con masa m . Veamos esto a detalle.

Para el sistema de N partículas independientes, consideremos el espacio de configuración $M^N = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_N$ formado por N copias idénticas de la variedad del espaciotiempo⁷, i. e. $M_A \simeq M$, donde el subíndice $A = 1, 2, \dots, N$ sólo es una etiqueta que indica la pertenencia del objeto a la descripción de la partícula A -ésima. En este mismo sentido tenemos el haz cotangente $T^*M^N = (T^*M)^N$, con proyección natural $\pi : T^*M^N \rightarrow M^N$ y proyección $\varpi_A : T^*M^N \rightarrow M_A \simeq M$ hacia el espaciotiempo de la partícula etiquetada por el valor A . La estructura simpléctica natural de este haz cotangente, producto cartesiano de los haces cotangentes para cada partícula, se construye como la suma de pullbacks [39]

$${}_T\Omega = \sum_{A=1}^N \varpi_A^* \Omega_A = d({}_T\vartheta), \quad (3.29)$$

donde⁸ ${}_T\vartheta = \sum_{A=1}^N \varpi_A^* \vartheta_A$ para $\vartheta_A \simeq \vartheta$ la 1-forma canónica presentada en (1.39).

⁷Si bien todas las partículas comparten el espaciotiempo, aprovechando la independencia entre ellas vale la pena que consideremos copias de este espaciotiempo único para describir a cada partícula por separado.

⁸La expresión de ${}_T\Omega$ como una 2-forma exacta se deduce de la propiedad de *conmutación* entre la derivada exterior (correspondiente a cada espacio) y los pullback, así como de su linealidad, i. e.

$${}_T\Omega = \sum_{A=1}^N \varpi_A^* \Omega_A = \sum_{A=1}^N \varpi_A^* d\vartheta_A = \sum_{A=1}^N d(\varpi_A^* \vartheta_A) = d\left(\sum_{A=1}^N \varpi_A^* \vartheta_A\right) = d({}_T\vartheta).$$

Para capturar la dinámica de las N partículas independientes, sobre la variedad simpléctica $(T^*M^N, {}_T\Omega)$ generemos el sistema hamiltoniano $(T^*M^N, {}_T\Omega, {}_TH)$ a través de la función real ${}_TH : T^*M^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión

$${}_TH = \sum_{A=1}^N H_A \circ \varpi_A, \quad (3.30)$$

donde $H_A \simeq H$ es la hamiltoniana que definimos en (3.9). No resulta difícil convencerse, dada la separabilidad tanto de la forma simpléctica (3.29) como de la hamiltoniana (3.30), de que el sistema hamiltoniano que hemos descrito genera la dinámica de las N partículas de masa m , cuando estas son independientes. En particular, cada una de las partículas está constreñida, en su propio haz cotangente, a la hipersuperficie de nivel cero $\mathcal{P}_A^{-1}(0)$ de la función de capa de masa (3.16), de manera que, en conjunto, la dinámica sobre el haz cotangente compartido T^*M^N se encuentra limitada a la subvariedad ${}_T\mathcal{P}^{-1}(0) \subset T^*M^N$, de codimensión N , definida como

$${}_T\mathcal{P}^{-1}(0) = \mathcal{P}_1^{-1}(0) \times \mathcal{P}_2^{-1}(0) \times \dots \times \mathcal{P}_N^{-1}(0), \quad (3.31)$$

es decir, $u \in {}_T\mathcal{P}^{-1}(0)$ si, para todo $A = 1, 2, \dots, N$, se proyecta en $\varpi_A(u) \in \mathcal{P}_A^{-1}(0)$.

Con respecto a la acción (3.22) del grupo de isometrías G sobre el espacio fase de una partícula, esta puede extenderse trivialmente a T^*M^N mediante la acción suave e izquierda ${}_T\Psi : G \times T^*M^N \rightarrow T^*M^N$, definida en términos del N producto tensorial de Ψ como

$${}_T\Psi_\Lambda = \underbrace{\Psi_\Lambda \otimes \Psi_\Lambda \otimes \dots \otimes \Psi_\Lambda}_{N \text{ veces}},$$

es decir, ${}_T\Psi^N$ es la acción que genera la familia de difeomorfismos $\{{}_T\Psi_\Lambda\}_{\Lambda \in G}$ dados por

$${}_T\Psi_\Lambda(u) = (\Psi_\Lambda \circ \varpi_1(u), \Psi_\Lambda \circ \varpi_2(u), \dots, \Psi_\Lambda \circ \varpi_N(u)). \quad (3.32)$$

Naturalmente los campos fundamentales de los elementos $\chi \in \mathfrak{g}$, asociados con (3.32), son la suma de los campos fundamentales (3.23) en los espacios fase individuales. Así, siendo un poco flexibles con la notación, los podemos expresar como

$${}_T\psi_\chi(u) = \left. \frac{d}{ds} {}_T\Psi_{e^{s\chi}}(u) \right|_{s=0} = \sum_{A=1}^N \psi_\chi \circ \varpi_A(u). \quad (3.33)$$

Así como en el caso de una sola partícula de masa m , la acción (3.32) define, para cada isometría $\Lambda \in G$, un simplectomorfismo especial, que da lugar a la existencia de un momentum map ${}_T\mu : T^*M^N \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definido a partir de la relación

$$\langle {}_T\mu(u), \chi \rangle = {}_T\mu_\chi(u) = \sum_{A=1}^N \mu_\chi \circ \varpi_A(u), \quad (3.34)$$

donde $\mu_\chi \circ \varpi_A(u) = (i_{\xi_\chi} p_A)(x_A)$ es la hamiltoniana (3.24). Por supuesto la invarianza tanto de la estructura simpléctica (3.29), como de la hamiltoniana (3.30) frente a la acción (3.32), como así mismo la naturaleza de las hamiltonianas (3.34) como integrales de movimiento del sistema, se deducen directamente del caso de una sola partícula, gracias a la separabilidad e independencia de todos los elementos en este caso de N partículas.

Limitemos ahora la región de estudio de nuestro sistema de N partículas, masivas y libres, a la porción $\tau \subset M$ del espaciotiempo, con el fin de poder realizar los cálculos en el modelo estadístico que planeamos desarrollar. Así buscamos modelar un gas diluído *confinado a una caja*, en el sentido de que durante todo nuestro análisis tendremos identificada una región donde, si bien las partículas pueden entrar y salir, consideraremos que en promedio se cumplen las mismas leyes de conservación de las cantidades (3.24) que detallamos en la sección anterior, lo que nos permitirá, como explicaremos con todo detalle más adelante, la formulación de nuestro modelo estadístico. En este sentido τ es una región tubular que contiene a N geodésicas tipo tiempo, que para fines ilustrativos presentamos como el tubo de mundo de una *caja ideal* que se mueve de manera libre⁹ y que contiene a N partículas, con una geodésica guía denotada como¹⁰ $\gamma_{\text{box}} : \tau \mapsto \gamma_{\text{box}}(\tau)$. De forma más específica, si U_{box} es el campo vectorial, unitario y tipo tiempo, tal que es tangente a γ_{box} , i. e. $U_{\text{box}} \circ \gamma_{\text{box}}(\tau) = \frac{d\gamma_{\text{box}}}{d\tau}$, y si Σ_0 es la región que en $\tau = 0$ ocupa la caja, entonces τ es el conjunto de las curvas integrales de U_{box} que tienen condiciones iniciales en Σ_0 , o en otras palabras, la imagen de Σ_0 bajo el flujo $\varphi^{U_{\text{box}}}$ generado por U_{box} :

$$\tau = \varphi_{\mathbb{R}}^{U_{\text{box}}}(\Sigma_0). \quad (3.35)$$

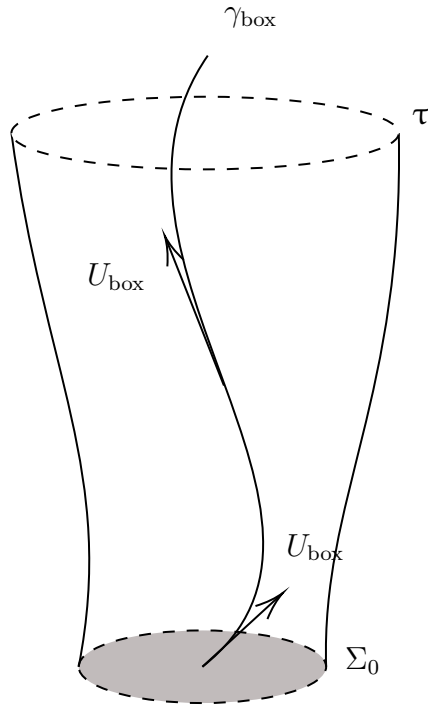


Figura 3.2: Fragmento de tubo de mundo τ .

En este sentido la descripción hamiltoniana que acabamos de realizar debe modificarse para tomar en cuenta el confinamiento que ahora tiene el sistema, haciendo la debida precisión de que la idea de una caja que contiene a las partículas es meramente ilustrativa, pues como veremos en la siguiente línea, no incluimos efectos de frontera en la reformulación

⁹Para analizar el movimiento libre de objetos extendidos en relatividad general, recomendamos consultar [63, 64, 65].

¹⁰No confundir el símbolo τ , parámetro de longitud de arco, con la región τ .

del hamiltoniano de la partícula libre, que expresen la idea de confinamiento por medio de choques elásticos de las partículas con la caja. Concentrémonos entonces en limitar la hamiltoniana (3.30) a la función

$${}_T\mathcal{H} = \sum_{A=1}^N \Theta_\tau \circ \varpi_A H_A \circ \varpi_A, \quad (3.36)$$

donde definimos $\Theta_\tau : M \rightarrow \{0, 1\}$ como la función característica del tubo de mundo τ :

$$\Theta_\tau(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tau, \\ 0, & x \notin \tau. \end{cases} \quad (3.37)$$

Si bien la inclusión de esta función característica no cambia la dinámica hamiltoniana generada por (3.30), sí limita los estados, en la subvariedad (3.31), a los que el gas ideal puede acceder, sustituyendo la subvariedad (3.31) de codimensión N por la nueva subvariedad (también de codimensión N) dada por

$$\mathcal{A} = \left((\pi_1 \circ \varpi_1)^{-1}(\tau) \cap \mathcal{P}_1^{-1}(0) \right) \times \dots \times \left((\pi_N \circ \varpi_N)^{-1}(\tau) \cap \mathcal{P}_N^{-1}(0) \right). \quad (3.38)$$

Pediremos, además, que el confinamiento limite los estados accesibles, de tal forma que el sistema adopte un estado *estático* con respecto a observadores especiales, que definiremos con todo detalle a continuación.

Por otra parte, ya que hemos puesto como barrera para nuestro análisis al tubo de mundo, será conveniente reducir el grupo de isometrías G al subgrupo $G_\tau \subset G$ que deja invariante a τ , es decir, el subgrupo definido en la forma

$$G_\tau = \{ \Lambda \in G : \Lambda(\tau) = \tau \}. \quad (3.39)$$

Recordando que las isometrías mapean geodésicas tipo tiempo en otras geodésicas tipo tiempo [34], podemos entender que limitarnos a isometrías en (3.39) quiere decir que sólo nos interesarán simetrías del sistema hamiltoniano $(T^*M^N, {}_T\Omega, {}_T\mathcal{H})$ que no *metan ni saquen* geodésicas en el tubo de mundo. Naturalmente cada elemento en (3.39) deja también invariante la región \mathcal{A} , pues toda isometría preserva $\mathcal{P}_A^{-1}(0)$, como ya anticipábamos en la sección anterior.

Proposición 3.4

Sea \mathcal{A} la subvariedad de T^*M^N , de codimensión N , ya definida en (3.38), o bajo la notación $\mathcal{A}_A = (\pi_A \circ \varpi_A)^{-1}(\tau) \cap \mathcal{P}_A^{-1}(0)$, definida simplemente como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^N = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_N. \quad (3.40)$$

Esta región es invariante ante la acción (3.32) del subgrupo de isometrías (3.39) que dejan invariante al tubo de mundo τ :

$${}_T\Psi_\tau(\mathcal{A}) = \mathcal{A}. \quad (3.41)$$

Dado que para todo $\Lambda \in G_\tau$ el mapeo ${}_T\Psi_\Lambda$ es, por definición, un difeomorfismo, basta demostrar que la imagen de un punto cualquiera $u \in \mathcal{A}$ se encuentra contenido en \mathcal{A} , i.

e. $T\Psi_\Lambda(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ implica $T\Psi_\Lambda(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Sea entonces $u \in \mathcal{A}$ un punto cualquiera, este se proyecta vía ϖ_A en $\mathcal{P}_A^{-1}(0)$ y vía $\pi_A \circ \varpi_A$ en τ . Mostremos que $T\Psi_\Lambda(u)$ también se proyecta de la misma manera. Comencemos por calcular la proyección en T^*M_A , notando que $\varpi_A \circ T\Psi_\Lambda(u) = \Psi_\Lambda \circ \varpi_A(u)$ y recordando la relación $\mathcal{P}_A \circ \Psi_\Lambda = \mathcal{P}_A$, de tal forma que

$$\mathcal{P}_A \circ \varpi_A \circ T\Psi_\Lambda(u) = \mathcal{P}_A \circ \Psi_\Lambda \circ \varpi_A(u) = \mathcal{P}_A \circ \varpi_A(u) = 0 \quad \implies \quad \varpi_A \circ T\Psi_\Lambda(u) \in \mathcal{P}_A^{-1}(0).$$

Para finalizar mostremos que el punto $T\Psi_\Lambda(u)$ también se proyecta sobre τ en M_A , tomando en cuenta la π -relación $\pi_A \circ \Psi_\Lambda = \Psi_\Lambda \circ \pi_A$ en cualquier levantamiento cotangente:

$$\pi_A \circ \varpi_A \circ T\Psi_\Lambda(u) = \pi_A \circ \psi_\Lambda \circ \varpi_A(u) = \Psi_\Lambda \circ \pi_A \circ \omega_A(u) \in \tau. \quad \diamond$$

3 Estados estadísticos de equilibrio en espaciotiempo estático

En este punto es necesario hacer una hipótesis importante acerca de la naturaleza del espaciotiempo M con el que estamos trabajando: pedimos que M sea estático, es decir, que sobre (casi todo) M exista un campo vectorial de Killing tipo tiempo ξ_0 , cuya distribución ortogonal sea involutiva [59, 60], es decir, tal que para cada punto $x \in M$ y par de vectores $X, Y \in \Pi_x$, $\xi_0 \in \mathfrak{X}(M)$ cumplan las condiciones

$$\mathcal{L}_{\xi_0} g = 0, \quad (3.42)$$

$$\|\xi_0\|^2(x) < 0, \quad (3.43)$$

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \in \Pi_x, \quad (3.44)$$

donde $\Pi_x \subset T_x M$ es el subespacio vectorial de $T_x M$ que contiene a todos los vectores que son ortogonales a $\xi_0(x)$, i. e.

$$\Pi_x = \{X \in T_x M : g(x)(\xi_0, X) = 0\}. \quad (3.45)$$

Dado que la propiedad de involución (3.44) es una condición necesaria y suficiente de integrabilidad de una distribución vectorial¹¹ [37], una propiedad importante de los espaciotiempos estáticos es que su campo vectorial de Killing ξ_0 genera una foliación en todo M , cuyas hojas son tangentes a la distribución ortogonal definida en (3.45) [59, 60]. Geométricamente, entendemos la derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ como una medida a primer orden de la no conmutatividad de los flujos φ^X y φ^Y , asociados a X y Y , respectivamente, o de la falta de cierre de los paralelogramos infinitesimales generados por X y Y en cualquier abierto de cualquier carta [34]. En efecto, si estando en un punto $x \in M$ nos movemos a lo largo del flujo generado por X por un corto lapso ϵ , y posteriormente nos movemos a lo largo del flujo generado por Y por otro corto lapso δ , llegaremos al punto $x' = \varphi_\delta^Y \circ \varphi_\epsilon^X(x)$ con coordenadas locales, hasta órdenes lineales en ϵ , δ y $\epsilon\delta$, de la forma

$$\begin{aligned} x'^\mu &= (\varphi_\delta^Y \circ \varphi_\epsilon^X(x))^\mu \simeq \left(\varphi_\delta^Y(x^\nu + \epsilon X^\nu(x)) \right)^\mu \simeq x^\mu + \epsilon X^\mu(x) + \delta Y^\mu(x^\nu + \epsilon X^\nu(x)) \\ &\simeq x^\mu + \epsilon X^\mu(x) + \delta Y^\mu(x) + \epsilon\delta X^\nu(x) \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu}(x). \end{aligned}$$

¹¹Una asignación suave de subespacios vectoriales tangentes a cada punto en una variedad [66], como el caso $x \mapsto \Pi_x$.

En cambio si ahora nos movemos primero sobre el flujo generado por Y , el mismo lapso δ , y posteriormente sobre el flujo generado por X , el mismo lapso ϵ , llegaremos al punto x'' con coordenadas (hasta órdenes lineales en ϵ , δ y $\epsilon\delta$), de la forma

$$\begin{aligned} x''^\mu &= (\varphi_\epsilon^X \circ \varphi_\delta^Y(x))^\mu \simeq \left(\varphi_\epsilon^X(x^\nu + \delta Y^\nu(x)) \right)^\mu \simeq x^\mu + \delta Y^\mu(x) + \epsilon X^\mu(x^\nu + \delta Y^\nu(x)) \\ &\simeq x^\mu + \delta Y^\mu(x) + \epsilon X^\mu(x) + \epsilon \delta Y^\nu(x) \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}(x). \end{aligned}$$

Restando las coordenadas de los puntos x' y x'' podemos ver que, en el abierto donde tienen coordenadas (x^μ) , la diferencia entre las coordenadas de los puntos es precisamente el vector $\mathcal{L}_X Y(x) = [X(x), Y(x)]$, es decir, en el abierto de \mathbb{R}^D para llegar a (x''^μ) desde (x'^μ) tendríamos que avanzar una cantidad proporcional al vector¹² $[Y(x), X(x)]$ (véase el diagrama (3.3)):

$$(x''^\mu) - (x'^\mu) = \epsilon \delta \left(Y^\nu(x) \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}(x) - X^\nu(x) \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu}(x) \right) = \epsilon \delta ([Y(x), X(x)]^\mu).$$

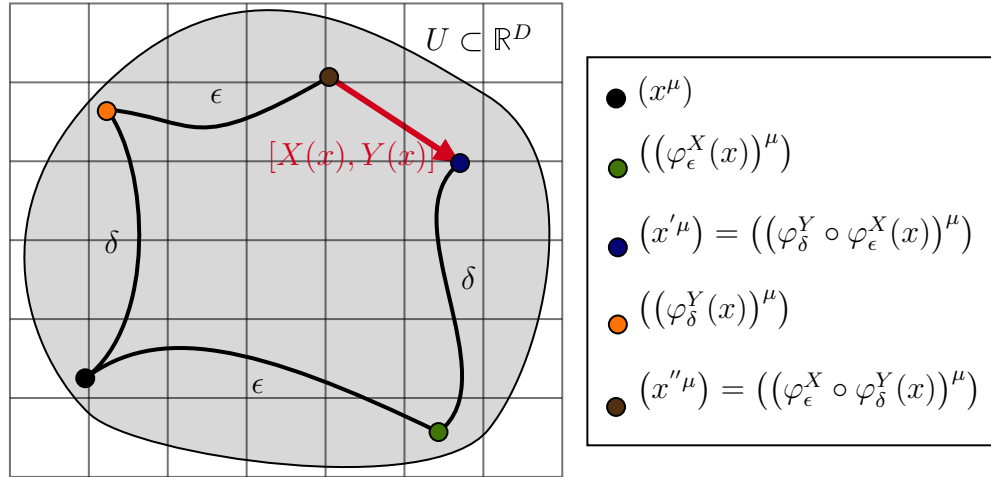


Figura 3.3: Expresión de $\mathcal{L}_X Y$ en el abierto $U \subset \mathbb{R}^D$ con coordenadas (x^μ) .

El hecho de que $[X, Y] \in \Pi_x$ para todo $X, Y \in \Pi_x$, significa que cualquier circuito infinitesimal que hagamos en cualquier punto $x \in M$ de manera tangente a Π_x puede no cerrar, pero se mantendrá siempre tangente a Π_x , lo que intuitivamente nos explica la integrabilidad¹³ de la distribución ortogonal a ξ_0 . Dicha foliación nos permite describir localmente al espaciotiempo como el producto $\mathbb{R} \times S$ donde S es una variedad riemanniana¹⁴ d -dimensional [60, 67]. En este sentido, ξ_0 nos permite encontrar sistemas de coordenadas $(x^\mu) = (x^0 = t, x^1, x^2, \dots, x^d)$ donde $x^0 = t$ está identificada como una coordenada temporal generada por el flujo de ξ_0 , i. e.

$$\xi_0(x) = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.46)$$

¹²Tomando en cuenta que en \mathbb{R}^D podemos hacer transporte paralelo de vectores con la conexión trivial, e identificar puntos con vectores tangentes y viceversa.

¹³Para detalles formales, repetimos, véase el teorema de Frobenius en [37].

¹⁴Que S sea una hipervariiedad riemanniana tiene que ver con el hecho de que los vectores tangentes a las hojas de la foliación son estrictamente de tipo espacio [61].

mientras que $(\vec{x}) = (x^1, x^2, \dots, x^d)$ son coordenadas espaciales sobre las hojas de la foliación, es decir, en la variedad riemanniana S . De esta manera las hojas de la foliación son hipersuperficies de nivel cero de la función coordenada $x \mapsto t(x) = x^0$. En estos sistemas de coordenadas, y en la base cotangente inducida, las componentes del tensor métrico g son independientes de t , como puede deducirse directamente de la ecuación de Killing (3.20):

$$\mathcal{L}_{\xi_0} g = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} dx^\alpha \otimes dx^\beta = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0.$$

Este resultado, aunado a la separabilidad local $\mathbb{R} \times S$ de cualquier abierto de M , nos permite expresar el tensor métrico como [60, 67]

$$g(t, \vec{x}) = -|g_{00}(\vec{x})| dt \otimes dt + g_S(\vec{x}), \quad (3.47)$$

donde $g_S(\vec{x})$ es la mencionada métrica riemanniana sobre S .

Ya habiéndole impuesto al espaciotiempo (M, g) la condición de ser estacionario, podemos comenzar a definir el concepto de un estado estadístico de equilibrio estático, pero para ello primero tenemos que hablar un poco de lo que entendemos por un observador de nuestro sistema. Para esto consideremos la definición formal de un observador como la dupla $\mathcal{O} = (\gamma_{\mathcal{O}}, e_{\gamma_{\mathcal{O}}})$ donde $\gamma_{\mathcal{O}} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva sobre M del tipo tiempo, dirigida hacia el futuro, y $e_{\gamma_{\mathcal{O}}}$ es una vierbein atada a¹⁵ $\gamma_{\mathcal{O}}$ [68], es decir, es una asignación $e_{\gamma_{\mathcal{O}}} : \tau \mapsto e_{\gamma_{\mathcal{O}}}(\tau) = e_\tau$ de isometrías

$$e_\tau : \mathbb{R}^D \rightarrow T_{\gamma_{\mathcal{O}}(\tau)} M, \quad (3.48)$$

entre el espacio tiempo de Minkowski (\mathbb{R}^D, η) y el espacio tangente en cuestión $T_{\gamma_{\mathcal{O}}(\tau)} M$, dotado de su métrica $g(\gamma_{\mathcal{O}}(\tau))$, tal que, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^D$, satisfacen

$$g(\gamma_{\mathcal{O}}(\tau))(e_\tau(X), e_\tau(Y)) = \eta(X, Y). \quad (3.49)$$

Sujetándonos a la definición anterior de observador, podemos ver que en un espaciotiempo estático tenemos una familia de observadores dada por las curvas integrales del campo vectorial de Killing ξ_0 , orientadas de manera que apunten al futuro, donde podemos elegir su marco o vierbein atado de tal forma que e_τ mapee el vector $(1, 0, 0, \dots, 0)$ a ξ_0 , y el resto a bases ortonormales sobre S . Llamamos a estos observadores, observadores estáticos. Esta familia particular de observadores tiene propiedades interesantes, entre las que destacan que cubren (casi) todo el espaciotiempo y de esta manera pueden intercambiar información, siempre localmente, con una noción de un tiempo global dado por la coordenada t generada por el flujo de ξ_0 [67, 68].

Regresando a nuestro modelo de gas ideal diluido, definamos cada intersección del tubo de mundo τ (interpretado como el movimiento geodésico de la caja) con una hoja $t^{-1}(t_0)$ de la foliación generada por ξ_0 , mediante el símbolo

$$\Sigma_0 = t^{-1}(t_0) \cap \tau, \quad (3.50)$$

¹⁵Esta definición formaliza de la manera más sencilla las características principales que esperamos de un observador: en términos de su capacidad para realizar mediciones, el observador se localiza en el espaciotiempo y por ende tiene una línea de mundo, dicha línea de mundo debe ser de tipo tiempo y estar orientada al futuro para no violar la causalidad de (M, g) . Por otra parte, tiene la capacidad de, en cada instante de su existencia, realizar experimentos que localmente constaten el principio de equivalencia, es decir, los experimentos que realice le permiten localmente estudiar cada evento que se le cruce (i. e. en su línea de mundo) como en un espaciotiempo plano [61].

de tal manera que podamos redefinir el tubo de mundo como la unión de todos los cortes (3.50) a todo tiempo (véase el diagrama (3.4)):

$$\tau = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} \Sigma_{t_0}. \quad (3.51)$$

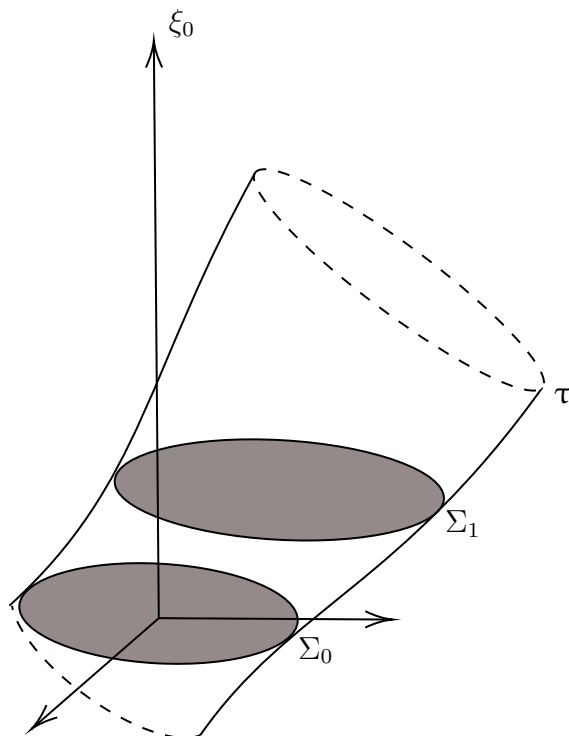


Figura 3.4: Cortes Σ_t en el tubo de mundo τ .

En este sentido el tubo de mundo es invariante ante traslaciones en el tiempo t generado por ξ_0 , identificando a su flujo como un subgrupo monoparamétrico de (3.39),

$$\{e^{t\chi_0}\}_{t \in \mathbb{R}} \subset G_\tau, \quad (3.52)$$

donde hemos identificado como χ_0 al elemento de \mathfrak{g} cuyo campo fundamental asociado a la acción Ψ de G en M es ξ_0 , $\psi_{\chi_0} = \xi_0$, de tal forma que el flujo generado por $\varphi_t^{\xi_0}$ es simplemente la acción del grupo monoparamétrico generado por χ_0 , i. e.

$$\varphi_t^{\xi_0} = \Psi_{e^{t\chi_0}} \simeq e^{t\chi_0}. \quad (3.53)$$

Hablando del grupo de isometrías, las hamiltonianas de los campos fundamentales $\alpha\xi_0$ asociados con el subálgebra $\{\alpha\chi_0\}_{\alpha \in \mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}_\tau$, construídas a partir del momentum map μ vía (3.25) y sobre las soluciones hamiltonianas del sistema, son de la forma

$$\mu_{\alpha\chi_0} \circ \hat{\gamma} = -\alpha E, \quad (3.54)$$

donde E se puede interpretar físicamente, en términos del teorema de Noether (1.1), como la energía de la partícula medida por un observador estático¹⁶, en el entendido de que se

¹⁶Discusiones interesantes sobre la interpretación de la energía de una partícula como una medición global obtenida por el observador de Killing en el *infinito espacial* pueden encontrarse aquí [69] y aquí [70].

trata de la cantidad conservada asociada con las traslaciones generadas por ξ_0 [68]:

$$E = -g(\gamma)(mU, \xi_0). \quad (3.55)$$

Es importante recordar que la existencia de un campo vectorial tipo tiempo en todo un espaciotiempo define una orientación temporal [59, 68]. En este sentido diremos que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ está dirigido al futuro, con respecto a la orientación temporal impuesta por el campo vectorial de Killing ξ_0 , si, siendo tipo tiempo, su proyección en ξ_0 es, en todo punto $x \in M$, negativa¹⁷:

$$g(x)(X, X) < 0, \quad (3.56)$$

$$g(x)(X, \xi_0) < 0. \quad (3.57)$$

Si en cambio es el campo vectorial $-X$ el que apunta al futuro, entonces X apunta al pasado. En este sentido las velocidades de las partículas apuntarán al futuro o al pasado definido por ξ_0 según si consideramos que los observadores estáticos \mathcal{O} registran la historia del gas ideal en el mismo sentido en que se mueven sus relojes o *ven una sucesión de fotografías del sistema en reversa*. Dicho de otra manera, elegir si las partículas viajan al futuro definido por ξ_0 o al pasado, equivale a elegir una orientación en la flecha del tiempo para nuestro sistema. Nosotros elegiremos que las partículas viajen hacia el futuro, de tal manera que la energía (3.55) sea siempre positiva:

$$E > 0. \quad (3.58)$$

Ya que tenemos una familia de observadores estáticos en el espaciotiempo (M, g) , concentrémonos en los estados estadísticos sobre $(T^*M^N, {}_T\Omega)$ y posteriormente en los estados estadísticos estáticos. Al respecto, lo primero que debemos revisar sobre la variedad simpléctica $(T^*M^N, {}_T\Omega)$ es que, como en cualquier otra variedad simpléctica, tiene una la top-forma de volumen asociada. En este caso, y siguiendo con los resultados que anticipan la separabilidad del modelo del gas en términos del modelo de las partículas, dicha top-forma puede entenderse como el producto exterior de las N top-formas de volumen en cada variedad (T^*M_A, Ω_A) , debidamente levantadas hacia T^*M^N vía el pullback ϖ_A^* .

Proposición 3.5

Sea $(T^*M^N, {}_T\Omega)$ la variedad simpléctica construída a partir del producto cartesiano de N variedades simplécticas $(T^*M_A, \Omega_A) \simeq (T^*M, \Omega)$, con ${}_T\Omega$ dada por (3.29), entonces su top-forma de Liouville (2.10) puede expresarse como

$${}_T\omega_{{}_T\Omega} = \varpi_1^*\omega_{\Omega_1} \wedge \varpi_2^*\omega_{\Omega_2} \wedge \dots \wedge \varpi_N^*\omega_{\Omega_N}. \quad (3.59)$$

En efecto, una forma bastante directa de cerciorarse de la validez de la ecuación (3.59) consiste en tomar en cuenta que el producto cuña entre formas diferenciales de grado par es conmutativo, de tal manera que para calcular la ND -potencia exterior de la suma

¹⁷La definición que aquí se hace de campos vectoriales tipo tiempo que apuntan al futuro o pasado, con respecto a una orientación temporal, aprovecha la estructura localmente plana del espaciotiempo y reduce la discusión a la que se hace en la relatividad especial. En este sentido, podemos decir que un campo vectorial tipo tiempo X apunta al futuro definido por otro campo vectorial tipo tiempo Y si sus componentes temporales, en cualquier marco de referencia ortonormal \mathcal{O} , son del mismo signo, i. e. $X^0Y^0 > 0$.

$T\Omega = \sum_{A=1}^N \varpi_A^* \Omega_A$ podemos utilizar una versión del teorema multinomial¹⁸ donde en vez de sumar números reales sumamos formas diferenciales, i. e.

$${}_{T\omega} \tau_\Omega = \frac{T\Omega^{\wedge ND}}{(ND)!} = \frac{1}{(ND)!} \left(\sum_{A=1}^N \varpi_A^* \Omega_A \right)^{\wedge ND} = \sum_{k \in \mathcal{U}_{ND}} \frac{(\varpi_1^* \Omega_1)^{\wedge k_1}}{k_1!} \wedge \dots \wedge \frac{(\varpi_N^* \Omega_N)^{\wedge k_N}}{k_N!},$$

donde \mathcal{U} es la cubierta convexa de los índices $k = (k_1, \dots, k_N)$, es decir, el conjunto de todas las combinaciones convexas de dichos índices que sumen ND :

$$\mathcal{U} = \{k = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N : k_1 + k_2 + \dots + k_N = ND\}. \quad (3.60)$$

Dado que el pullback distribuye con respecto al producto cuña, resulta claro que ninguno de los índices k_i puede ser mayor que D , pues en tal caso $(\varpi_i^* \Omega_i) \wedge k_i = \varpi_i^*(\Omega_i^{\wedge k_i})$ es el pullback de una $(k_i > 2D)$ -forma sobre una variedad de dimensión $2D$, i. e. es el pullback de una forma diferencial exactamente igual a cero. Esto trae como consecuencia que en la suma sólo sobreviva el término identificado con los índices $k_1 = k_2 = \dots = k_N = D$,

$${}_{T\omega} \tau_\Omega = \frac{(\varpi_1^* \Omega_1)^{\wedge D}}{D!} \wedge \dots \wedge \frac{(\varpi_N^* \Omega_N)^{\wedge D}}{D!} = \varpi_1^* \left(\frac{\Omega_1^{\wedge D}}{D!} \right) \wedge \dots \wedge \varpi_N^* \left(\frac{\Omega_N^{\wedge D}}{D!} \right) = \varpi_1^* \omega_{\Omega_1} \wedge \dots \wedge \varpi_N^* \omega_{\Omega_N}.$$



Siguiendo el programa que presentamos en el capítulo (2) de la parte anterior de este trabajo, la top-forma de volumen ${}_{T\omega} \tau_\Omega$ permite definir una medida de Liouville sobre el espacio medible $(T^*M^N, \mathfrak{B}(T^*M^N))$ en la forma

$$\lambda_{T\omega}(A) \equiv \int_A {}_{T\omega} \tau_\Omega(u). \quad (3.61)$$

Esta medida es invariante ante simplectomorfismos (2.13), y por consiguiente ante la acción ${}_T\Psi$ de G en T^*M^N y, localmente, se reduce a la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^{2ND} (2.12).

Siguiendo la definición (2.14), un estado estadístico λ_ρ en T^*M^N es una medida probabilística sobre el espacio medible $(T^*M^N, \mathfrak{B}(T^*M^N))$, definida en torno a una función de distribución de probabilidad $\rho : T^*M^N \rightarrow [0, +\infty)$ a partir de la relación

$$\lambda_\rho(A) = \int_A d\lambda_{T\omega}(u) \rho(u) = \int_A {}_{T\omega} \tau_\Omega(u) \rho(u). \quad (3.62)$$

En cuanto a los valores esperados de los observables, i. e. funciones reales integrables de la forma $f : T^*M^N \rightarrow \mathbb{R}$, utilizaremos la misma notación introducida en (2.16), i. e. $\langle f \rangle_\rho$.

La interpretación física que le daremos a los estados estadísticos es la misma que la que dimos en la sección (1): trataremos el estado dinámico u del sistema hamiltoniano $(T^*M^N, T\Omega, T\mathcal{H})$, especialmente cuando N es muy grande, como una variable aleatoria distribuida sobre T^*M^N acorde con ρ , o para ser más precisos, distribuida sólo sobre la

¹⁸El teorema multinomial establece que para cualquier entero m , número natural n y m -tupla real (x_1, x_2, \dots, x_m) , se cumple [71]

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \prod_{t=1}^m x_t^{k_t}.$$

subvariedad \mathcal{A} que definimos en (3.38). En este sentido, todos los estados estadísticos relevantes para nuestro modelo tendrán soporte en \mathcal{A} . No obstante notemos que en este caso hay una diferencia importante con respecto al estado dinámico de un sistema hamiltoniano clásico donde la hamiltoniana puede identificarse con la energía y el parámetro de evolución es el tiempo: esto no es posible hacerlo en $(T^*M^N, {}_T\Omega, {}_T\mathcal{H})$ donde tanto la hamiltoniana como el parámetro de evolución tienen un son de naturaleza geométrica, i. e. longitud de arco. El tiempo que podríamos medir en un laboratorio no tiene ninguna cualidad especial, ni física ni matemática, que lo distinga en la formulación: es una coordenada más en una infinidad de posibles coordenadas, salvo que el tiempo que midamos esté definido geoméricamente por ξ_0 y nosotros como observadores seamos observadores estáticos. Bajo esta óptica nos interesan estados estadísticos estáticos, es decir, que sean invariantes bajo la acción del subgrupo de traslaciones temporales $\{e^{t\chi_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$:

$$\rho \circ \Psi_{e^{t\chi_0}} = \rho. \quad (3.63)$$

Los estados estadísticos estáticos (estados estáticos, a partir de ahora) tienen la particularidad de distribuir de manera idéntica la variable aleatoria u , del estado dinámico del sistema $(T^*M^N, {}_T\Omega, {}_T\mathcal{H})$, en los cortes (3.50) del tubo de mundo, de tal manera que podemos identificar todos los cortes bajo una relación de equivalencia $\Sigma_0 \sim \Sigma_1$ basada en la distribución de un estado estático, y eligiendo un representante de clase Σ_0 , pasar del soporte \mathcal{A} al soporte

$${}_T\mathcal{M} = \left((\pi_1 \circ \varpi_1)^{-1}(\Sigma_0) \cap \mathcal{P}_1^{-1}(0) \right) \times \dots \times \left((\pi_N \circ \varpi_N)^{-1}(\Sigma_0) \cap \mathcal{P}_N^{-1}(0) \right). \quad (3.64)$$

Es la subvariedad $2N(D-1) = 2Nd$ -dimensional definida en (3.64) lo que identificamos realmente, para estos estados estáticos, como el espacio fase del sistema. Notemos que la forma más sencilla de construir ${}_T\mathcal{M}$ es como el producto cartesiano

$${}_T\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_N, \quad (3.65)$$

donde $\mathcal{M}_A \simeq \mathcal{M}$ es la subvariedad de codimensión 2 en T^*M definida como *la porción del hiperboloide de capa de masa $\mathcal{P}^{-1}(0)$ por encima de Σ_0* :

$$\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \Sigma_0} \mathcal{P}_x^{-1}(0), \quad (3.66)$$

donde $\mathcal{P}_x : T_x^*M \rightarrow \mathbb{R}$ es la constricción de la función de capa de masa (3.16) al espacio cotangente a M en x , i. e.

$$\mathcal{P}_x(p) = \mathcal{P}(x, p). \quad (3.67)$$

La propuesta de (3.65) como espacio fase del sistema hamiltoniano $(T^*M^N, {}_T\Omega, {}_T\mathcal{H})$, es decir, como soporte para las distribuciones que describen estados estáticos del sistema, explota la separabilidad de la medida de Liouville total en las medidas individuales de cada partícula (3.59)), de tal manera que las integrales $\int_{{}_T\mathcal{M}} d\lambda_{{}_T\omega}(\dots)$ pueden separarse como¹⁹

$$\int_{{}_T\mathcal{M}} d\lambda_{{}_T\omega}(u)(\dots) = \int_{\mathcal{M}_1} d\lambda_{\omega_1}|_{\mathcal{M}_1} \circ \varpi_1(u) \int_{\mathcal{M}_2} d\lambda_{\omega_2}|_{\mathcal{M}_2} \circ \varpi_2(u) \dots \int_{\mathcal{M}_N} d\lambda_{\omega_N}|_{\mathcal{M}_N} \circ \varpi_N(u)(\dots), \quad (3.68)$$

¹⁹Básicamente estamos tomando en cuenta que $\lambda_{{}_T\omega}$ es una medida producto del producto de espacios medidos $(T^*M, \mathfrak{B}(T^*M), \omega_\Omega)$ (finitos) con medidas λ_ω , y como tal estamos aplicando el teorema de Fubini al soporte ${}_T\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_N$ [45, 46].

donde $\lambda_{\omega_A}|_{\mathcal{M}_A} \simeq \lambda_\omega|_{\mathcal{M}}$ es la medida inducida, vía λ_ω , en la subvariedad \mathcal{M} vista como un encajamiento. Es esta medida, precisamente, la que incorpora las restricciones del espacio fase a proyectarse sobre un corte del tubo de mundo, a tiempo constante t , y toma en cuenta la naturaleza tipo tiempo de las geodésicas de cada partícula.

Proposición 3.5

Sea λ_ω la medida de Liouville (2.11) del espacio medible $(T^*M, \mathfrak{B}(T^*M))$ y sea \mathcal{M} la subvariedad definida en (3.66). La medida de cualquier subconjunto $A \subset \mathcal{M}$ inducida por λ_ω sobre \mathcal{M} , es

$$\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(A) = \int_A \omega_\Omega|_{\mathcal{M}}(u), \quad (3.69)$$

donde $\omega_\Omega|_{\mathcal{M}}$ es la $2d$ -forma definida como^a

$$\omega_\Omega|_{\mathcal{M}}(x, p) = \frac{i_{\xi_0} \text{vol}_g(x)}{\|\xi_0\|(x)} \wedge \frac{i_{\text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x} \text{vol}_{g(x)^{-1}}(p)}{\|\text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x\|(p)}, \quad (3.70)$$

donde vol_h para un tensor métrico h cualquiera, se define en todo punto w con coordenadas locales (w^1, w^2, \dots, w^n) como la top-forma de volumen invariante [34]

$$\text{vol}_h(w) = |\det(h)|^{\frac{1}{2}} dw^1 \wedge dw^2 \wedge \dots \wedge dw^n = |h(w)|^{\frac{1}{2}} d^n w, \quad (3.71)$$

y donde $\text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x$ es el gradiente métrico, generado por la métrica inversa $g(x)^{-1}$, de la función (3.67). Particularmente en el marco de referencia de un observador estático y en un sistema de coordenadas del tipo (t, \vec{x}) , (3.70) adquiere la expresión local

$$\omega_\Omega|_{\mathcal{M}}(\vec{x}, \vec{P}) = m \frac{|g_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} d^d x \wedge d^d P(\vec{x})}{(m^2 + \|\vec{P}(\vec{x})\|^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.72)$$

donde $P(\vec{x}) = (P(\vec{x})^0, \dots, P(\vec{x})^d) = (P(\vec{x})^0, \vec{P}(\vec{x}))$ son las componentes de los covectores $p \in T_x M$ en el marco ortonormal generado por el veirbein e_{γ_O} del observador, y, como tales,

$$\|\vec{P}(\vec{x})\|^2 = \sum_{i=1}^d [P(x)^i]^2. \quad (3.73)$$

^aRemarcamos: $\|\text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x\|(p) = |g(x)^{-1}(\text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x(p), \text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x(p))|^{\frac{1}{2}}$.

La expresión (3.70) es una consecuencia de la forma en la que construimos las subvariedades 2-codimensionales \mathcal{M} , i. e. como la unión, para cada $x \in \Sigma_0$, de las hipervariedades $\mathcal{P}_x^{-1}(0) \subset T_x^* M$, de tal forma que las integrales $\int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(\dots)$ pueden expresarse como

$$\int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u)(\dots) = \int_{\mathcal{M}} \omega_\Omega|_{\mathcal{M}}(x, p)(\dots) = \int_{\Sigma_0} d\gamma(x) \int_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} d\sigma_x(p)(\dots),$$

donde, si (x^μ, p_μ) es un sistema de coordenadas de Darboux cualquiera con $p_\mu = i_{\partial/\partial x^\mu} p$, $\gamma(x)$ es la medida inducida por $d^D x$ sobre Σ_0 y σ_x es la medida inducida por $d^D p$ sobre $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$. Ahora hagamos la siguiente consideración: tomando en cuenta que en el punto $x \in \Sigma_0$ el tensor métrico regresa la métrica $g(x)$ sobre $T_x M$, por dualidad, también induce

la métrica $g^{-1}(x)$ sobre el espacio dual T_x^*M . De esta manera tanto (M, g) como $(T_x^*M \simeq \mathbb{R}^D, g(x)^{-1})$ son variedades métricas, por lo que resulta conveniente indicar que γ es inducida por la top-forma de volumen invariante vol_g sobre Σ_0 mientras que σ_x es inducida por la top-forma de volumen invariante $\text{vol}_{g(x)^{-1}}$ sobre T_x^*M . En este sentido, teniendo la noción del campo vectorial gradiente $\text{grad}_{g(x)^{-1}}\mathcal{P}_x$ como campo vectorial normal²⁰ a $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$, la medida inducida que estamos buscando está dada por la evaluación²¹ [74]

$$\sigma_x(p) = \frac{i_{\text{grad}_{g(x)^{-1}}\mathcal{P}_x} \text{vol}_{g(x)^{-1}}(p)}{\|\text{grad}_{g(x)^{-1}}\mathcal{P}_x\|(p)}. \quad (3.74)$$

El caso de γ es similar al de σ , siendo bastante claro que, por definición, el campo vectorial normal a la hipervariedad $\Sigma_{t_0} = t^{-1}(t_0) \cap \tau$ es ξ_0 ,

$$\gamma(x) = \frac{i_{\xi_0} \text{vol}_g(x)}{\|\xi_0\|(x)}. \quad (3.75)$$

De esta manera, uniendo los resultados (3.74) y (3.75) obtenemos la expresión (3.70). En cuanto a la expresión particular (3.72), en un sistema de coordenadas del tipo (t, \vec{x}) , y en el marco ortonormal generado por $e_{\gamma_{\mathcal{O}}}$, que acompaña a un observador estático \mathcal{O} , notemos primero que (3.75) se reduce a la expresión local

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{x}) &= \frac{i_{\xi_0} \text{vol}_g(\vec{x})}{\|\xi_0\|(x)} \\ &= \frac{|g(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} i_{\partial/\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^d}{|g_{00}(\vec{x})|^{\frac{1}{2}}} = |g_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} d^d x = \text{vol}_{g_S}(\vec{x}), \end{aligned}$$

donde hemos recordado que en los sistemas del tipo (t, \vec{x}) el tensor métrico adquiere la forma estática (3.47) que naturalmente hace la separación local $\mathbb{R} \times S$ del espaciotiempo. Con respecto a σ_x , o mejor dicho $\sigma_{\vec{x}}$, y simplificando la notación del vierbein asociado al observador \mathcal{O} simplemente como $e_{\tau} = e_x$ en el punto $x = \gamma_{\mathcal{O}}(\tau) \in M$, notemos que si (e_x) es la representación matricial de la isometría (por definición, un isomorfismo entre espacios vectoriales) en la base cartesiana de \mathbb{R}^D y en la base $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$ de $T_x M$, entonces matricialmente la condición (3.49) se ve como el producto

$$\eta = (e_x)^T \cdot g(x) \cdot (e_x), \quad (3.76)$$

²⁰Formalmente, recordemos que el campo vectorial gradiente $\text{grad}_h F \in \mathfrak{X}(U)$ asociado a una función suave $F \in \mathcal{C}^\infty(U)$ en una variedad métrica cualquiera (V, h) , se define como el campo vectorial tal que para todo $w \in U$ y $X \in T_w U$, satisface [34]

$$i_X dF(w) = g(w)(X, \text{grad}_h F).$$

En particular, para cualquier campo vectorial X tangente a una hipervariedad de nivel $F^{-1}(c)$ de la función F , el gradiente de F es ortogonal en cada punto $w \in F^{-1}(c)$ a X : $g(w)(X, \text{grad}_h F) = i_X dF(w) = 0$, de ahí su interpretación como el campo vectorial normal a las hipersuperficies de nivel de F .

²¹Si bien la existencia del tensor métrico en la variedad ayuda a calcular las medidas de volumen inducidas sobre hipersuperficies, esto no es necesario, como se explica en la discusión [72]. La medida de volumen inducida sobre una hipervariedad puede calcularse mediante la evaluación de la top-forma de volumen en cualquier campo vectorial no tangente a la hipersuperficie, y la restricción o pullback de dicha evaluación bajo el encajamiento de la hipersuperficie, no dependerá del vector elegido como "normal". Otra forma de obtener esta medida inducida, basado en un profundo análisis geométrico de la estructura del haz cotangente del espaciotiempo como una variedad con métrica de Sasaki, compatible con la estructura simpléctica, puede encontrarse en [73].

donde hemos empleado los mismos símbolos η y $g(x)$ para las representaciones matriciales de las métricas en sus respectivas bases, i. e. $\eta(X, Y) = X^T \cdot \eta \cdot Y$ y $g(x)(e_x(X), e_x(Y)) = e_x(X)^T \cdot g(x) \cdot e_x(Y)$ para todo $X, Y \in \mathbb{R}$. En efecto, si $e_x(X) = (e_x) \cdot X$ para cualquier $X \in \mathbb{R}^D$, entonces

$$(e_x(X))^T \cdot g(x) \cdot e_x(Y) = X^T \cdot (e_x)^T \cdot g(x) \cdot (e_x) \cdot Y = X^T \cdot \eta \cdot Y.$$

De esta manera la métrica inversa $g(x)^{-1}$ se relaciona con la métrica inversa η^{-1} en la forma

$$g(x)^{-1} = (e_x) \cdot \eta^{-1} \cdot (e_x)^T. \quad (3.77)$$

Ahora, por dualidad, la isometría e_x define también una isometría e_x^* entre el espacio vectorial $(T_x^*M, g(x)^{-1})$ y el espacio vectorial $(\mathbb{R}^D, \eta^{-1})$. Sea $P(x) = e_x^*(p)$ la imagen de $p \in T_x^*M$ bajo dicha isometría, si identificamos dicho covector $P(x)$ sobre \mathbb{R}^D con un vector sobre \mathbb{R}^D , y a su vez identificamos dicho vector con un punto sobre \mathbb{R}^D , la condición (3.77) nos permite expresar la condición de capa de masa, medida por \mathcal{O} , como

$$g(x)^{-1}(p, p) + m^2 = P(x)^T \cdot \eta^{-1} \cdot P(x) + m^2. \quad (3.78)$$

En efecto, identificando $T_xM \simeq \mathbb{R}^D$ a través de la base vectorial $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$, construyendo el vector columna U a partir de sus componentes $U^\mu = i_U dx^\mu$, y posteriormente identificando $T_x^*M \simeq T_xM \simeq \mathbb{R}^D$ vía la base cotangente dual (dx^μ) , utilizando para esto la relación $i_U p = p_\mu U^\mu = p^T \cdot U$, encontramos para cualquier $X \in \mathbb{R}^D$ el resultado

$$p^T \cdot (e_x) \cdot X = p^T \cdot e_x(X) = i_{e_x(X)} p = i_X e_x^*(p) = i_X P(x) = P(x)^T \cdot X,$$

es decir,

$$P(x) = (e_x)^T \cdot p. \quad (3.79)$$

Así, utilizando (3.79), llegamos directo a la expresión²² (3.78). A nivel local esta expresión se entiende, precisamente, como la función \mathcal{P}_x evaluada en las coordenadas²³ $(P(x)^\mu) = (P(x)^0, P(x)^1, \dots, P(x)^d)$, relacionadas con las coordenadas $(p^\mu = p_\mu)$ a partir de (3.79):

$$P(x)^\mu = (e_x)^\mu_\nu p^\nu = \sum_{\nu=0}^d (e_x)^\mu_\nu p^\nu, \quad (3.80)$$

donde $(e_x)^\mu_\nu = ((e_x)^\nu_\mu)^T = (i_{e_x(\frac{\partial}{\partial x^\mu})} dx^\nu)^T$. Empleando este sistema de coordenadas $(P(x)^\mu)$ y la base tangente inducida $(\frac{\partial}{\partial P(x)^\mu})$, el gradiente $\text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x$ se expresa como

$$\text{grad}_{g(x)^{-1}} \mathcal{P}_x = 2P(x)^\mu \frac{\partial}{\partial P(x)^\mu}, \quad (3.81)$$

y su norma está dada, sobre $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$, por la expresión

$$\|\text{grad}_{g^{-1}(x)} \mathcal{P}_x\|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} = 2m, \quad (3.82)$$

mientras que la top-forma de volumen $\text{vol}_{g(x)^{-1}}$ es, en la base cotangente dual $(dP(x)^\mu)$,

$$\text{vol}_{g^{-1}(x)}(P(x)) = d^D P(x) = dP(x)^0 \wedge dP(x)^1 \wedge \dots \wedge dP(x)^d = dP(x)^0 \wedge d^d P(x). \quad (3.83)$$

²² $g(x)^{-1}(p, p) = p^T \cdot g(x)^{-1} \cdot p = p^T \cdot (e_x) \cdot \eta^{-1} \cdot (e_x)^T \cdot p = P(x)^T \cdot \eta^{-1} \cdot P(x)$.

²³Utilizamos índices μ para remarcar que son índices que *corren* sobre bases y componentes en \mathbb{R}^D .

Con las expresiones (3.81), (3.82) y (3.83) podemos hacer el cálculo local de la expresión (3.74), como la vería el observador estático \mathcal{O} , es decir,

$$\sigma_{\vec{x}}(P) = \frac{1}{m} \left(P(\vec{x})^{\mathbf{0}} d^d P(\vec{x}) + \sum_{i=1}^d d_i^D P(x) \right)_{\mathcal{P}_{\vec{x}^{-1}(0)}},$$

donde, para simplificar, hemos definido la notación

$$\begin{aligned} d_i^D P(x) &= (-1)^i P(x)^i dP(x)^{\mathbf{0}} \wedge \dots \wedge dP(x)^{i-1} \wedge dP(x)^{i+1} \wedge \dots \wedge dP(x)^d \\ &= -dP(x)^1 \wedge \dots \wedge dP(x)^{i-1} \wedge P(x)^i dP(x)^{\mathbf{0}} \wedge dP(x)^{i+1} \wedge \dots \wedge dP(x)^d. \end{aligned}$$

Al respecto, notemos que a consecuencia de que $d\mathcal{P}_x|_{\mathcal{P}_{\vec{x}^{-1}(0)}} = 0$, la d -forma anterior puede reexpresarse como en términos de $d^d P(x)$ como

$$\begin{aligned} d_i^D P(x) &= dP(x)^1 \wedge \dots \wedge dP(x)^{i-1} \wedge \frac{P(x)^i}{P(x)^{\mathbf{0}}} (-P(x)^{\mathbf{0}} dP(x)^{\mathbf{0}}) \wedge dP(x)^{i+1} \wedge \dots \wedge dP(x)^d \\ &= dP(x)^1 \wedge \dots \wedge dP(x)^{i-1} \wedge \frac{P(x)^i}{P(x)^{\mathbf{0}}} \left(-\sum_{j=1}^d P(x)^j dP(x)^j \right) \wedge dP(x)^{i+1} \wedge \dots \wedge dP(x)^d \\ &= -dP(x)^1 \wedge \dots \wedge dP(x)^{i-1} \wedge \frac{P(x)^i}{P(x)^{\mathbf{0}}} P(x)^i dP(x)^i \wedge dP(x)^{i+1} \wedge \dots \wedge dP(x)^d \\ &= -\frac{[P(x)^i]^2}{P(x)^{\mathbf{0}}} d^d P(x). \end{aligned}$$

De esta manera, $\Sigma_x(P)$ termina por verse como

$$\sigma_{\vec{x}}(P) = \frac{m}{P(\vec{x})^{\mathbf{0}}} d^d P(\vec{x}) \Big|_{\mathcal{P}_{\vec{x}^{-1}(0)}} = \frac{m d^d P(\vec{x})}{(m^2 + \|\vec{P}(x)\|^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.84)$$

En efecto,

$$\sigma_{\vec{x}}(P) = \frac{1}{m} \left[P(\vec{x})^{\mathbf{0}} - \sum_{i=1}^d \frac{[P(\vec{x})^i]^2}{P(\vec{x})^{\mathbf{0}}} \right] d^d P(\vec{x}) \Big|_{\mathcal{P}_{\vec{x}^{-1}(0)}} = \frac{m^2}{m P(\vec{x})^{\mathbf{0}}} d^d P(\vec{x}) \Big|_{\mathcal{P}_{\vec{x}^{-1}(0)}}.$$

Así, efectivamente, (3.70) se reduce a (3.72) para el observador estático \mathcal{O} . ◇◇

Lo que acabamos de demostrar en la proposición anterior es que las integrales sobre la propuesta (3.65) de espacio fase, con respecto a la medida de Liouville ${}_{T\omega}_T$, se reducen a las integrales anidadas de la forma

$$\int_{T\mathcal{M}} d\lambda {}_{T\omega}(u)(\dots) = m^N \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}_1) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P(\vec{x}_1)}{P(\vec{x}_1)^{\mathbf{0}}} \dots \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}_N) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P(\vec{x}_N)}{P(\vec{x}_N)^{\mathbf{0}}}(\dots), \quad (3.85)$$

donde \vec{x}_A son las coordenadas espaciales, sobre las hojas de la foliación, de la proyección $\pi_A \circ \varpi_A(u)$ del punto $u \in {}_T\mathcal{M}$, y debemos sustituir $P(\vec{x})^{\mathbf{0}}$ por la expresión

$$P(\vec{x})^{\mathbf{0}} = (m^2 + \|\vec{P}(\vec{x})\|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.86)$$

Por otra parte la propuesta de espacio fase ${}_{T}\mathcal{M}$ nos permite recharacterizar el subgrupo G_{τ} de isometrías de interés simplemente como el subgrupo

$$G_0 = \{\Lambda \in G : \Lambda(\Sigma_0) = \Sigma_0\}, \quad (3.87)$$

donde la igualdad $\Lambda(\Sigma_0) = \Sigma_0$ se toma módulo la identificación entre los cortes del tubo de mundo, de tal manera que el mismo subgrupo $\{e^{t\chi_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$ hace parte de (3.87).

Como ya demostramos en el capítulo (2), subsección (3), los estados estadísticos con soporte ${}_{T}\mathcal{M}$ que mejor describen el estado dinámico (como variable aleatoria) de un sistema hamiltoniano $(T^*M^N, {}_{T}\Omega, {}_{T}\mathcal{H})$, donde actúa de manera hamiltoniana un grupo de Lie G , manteniendo invariante a la hamiltoniana ${}_{T}\mathcal{H}$ y, por lo tanto, teniendo al momentum map ${}_{T}\mu$ (3.34) como constante de movimiento, son los estados estadísticos de Gibbs generalizados

$${}_{T}\rho(\chi; u) = \frac{\Theta_{{}_{T}\mathcal{M}}(u)}{Z(\chi)} e^{-{}_{T}\mu_{\chi}(u)}, \quad (3.88)$$

donde el parámetro $\chi \in \mathfrak{g}_{\star} \subset \mathfrak{g}_0$ es un elemento del espacio de vectores de Souriau (2.52) y Z es la función de partición (2.53). Con respecto a los vectores de Souriau, notemos que en este caso se tratan de vectores en el subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_0 \simeq T_e G_0$ tales que están contenidos en alguna vecindad abierto donde todos sus vecinos χ' satisfacen la desigualdad

$$e^{-{}_{T}\mu_{\chi'}(u)} = e^{-\sum_{A=1}^N \mu_{\chi' \circ \varpi_A}(u)} = \prod_{A=1}^N e^{-\mu_{\chi' \circ \varpi_A}(u)} \leq f(u), \quad (3.89)$$

para todo $u \in {}_{T}\mathcal{M}$ y alguna función f integrable. Naturalmente, (3.89) se satisface bajo el caso particular en que $\chi \in \mathfrak{g}_{\star}$ es un vector de Souriau para cada una de las exponenciales $e^{-\mu_{\chi \circ \varpi_A}(u)}$, es decir, si para cada $A = 1, 2, \dots, N$, χ tiene una vecindad abierta y existe una función integrable f_A , donde todos los vecinos χ' de χ satisfacen

$$e^{-\mu_{\chi}(u)} \leq f_A(u), \quad (3.90)$$

para todo $u \in \mathcal{M}_A$, pues en este caso basta tomar la misma vecindad que mencionamos y como función f proponer el producto $f^N = f_1 f_2 \dots f_N$. En particular, siguiendo lo dicho en la proposición (2.6), podemos constatar que \mathfrak{g}_{\star} es no vacío y, por ende, es un subconjunto abierto y convexo de \mathfrak{g}_0 .

Proposición 3.5

Sea $\mathfrak{g}_{\star} \subset \mathfrak{g}_0$ el conjunto de vectores de Souriau para el estado de Gibbs generalizado (3.88) sobre ${}_{T}\mathcal{M}$, definido en (3.65) y en (3.66), y sea $\chi_0 \in \mathfrak{g}_0$ el elemento cuyo campo vectorial de Killing asociado es ξ_0 . Para todo $\beta \geq 0$, $-\beta\chi_0$ es un vector de Souriau:

$$\{-\beta\chi_0\}_{\beta \geq 0} \subset \mathfrak{g}_{\star}, \quad (3.91)$$

y entonces \mathfrak{g}_{\star} es un subconjunto abierto y conexo de \mathfrak{g}_0 .

Comencemos recordando que el subálgebra de traslaciones temporales generada por χ_0 está contenida en \mathfrak{g}_0 , de tal manera que, en particular, la componente $\{-\beta\chi_0\}_{\beta \geq 0}$ también está contenida en \mathfrak{g}_0 , siendo particularmente el caso $\beta = 0$ el que representa la transformación identidad. Ahora, el momentum map total del gas ideal evaluado en un vector de la forma

$-\beta\chi_0$, que representaremos como ${}_T\mu_{(-\beta\chi_0)} = {}_T\mu_\beta$, es, a partir de lo que vimos en (3.55) y (3.58), β veces la energía total del sistema²⁴, una cantidad positiva sobre todo ${}_T\mathcal{M}$:

$${}_T\mu_\beta = \sum_{A=1}^N \mu_\beta = \beta \sum_{A=1}^N E_A > 0. \quad (3.92)$$

De esta manera la exponencial de $-\beta\chi_0$ es una función positiva y estrictamente decreciente sobre ${}_T\mathcal{M}$, acotada superiormente por la unidad:

$$e^{-{}_T\mu_\beta} \leq 1.$$

Ahora para cada $\beta > 0$, y para un número pequeño $0 \leq \epsilon \ll 1$, consideremos la vecindad


$$\mathcal{U}_\beta = \left\{ -\beta\chi_0 + \epsilon\chi : \chi \in \mathfrak{g}_0, \quad 0 \leq dt(\xi_\chi) \leq \frac{\beta}{2} \right\}. \quad (3.93)$$

Naturalmente, como \mathfrak{g}_0 es un subálgebra de Lie y tanto χ_0 como χ son elementos de ella, la combinación lineal $-\beta\chi_0 + \epsilon\chi$ también será un elemento de \mathfrak{g}_0 , i. e. (3.93) efectivamente es una vecindad de $-\beta\chi_0 \in \mathfrak{g}_0$. Con respecto a ϵ como un número pequeño, con esto queremos decir que, hasta órdenes lineales en ϵ , requerimos que el campo de Killing $\xi_{\chi'} = -\beta\xi_0 + \epsilon\xi_\chi$, asociado a $\chi' \in \mathcal{U}_\beta$, sea tipo tiempo y apunte al pasado, igual a como $-\beta\xi_0$ lo hace:

$$\begin{aligned} \|\xi_{\chi'}\|^2(x) &= g(x)(\xi_{\chi'}, \xi_{\chi'}) = g(x)(-\beta\xi_0 + \epsilon\xi_\chi, -\beta\xi_0 + \epsilon\xi_\chi) \\ &= -\beta^2|g_{00}(\vec{x})| + 2\beta\epsilon|g_{00}(\vec{x})|\xi_\chi^0 = -\beta|g_{00}(\vec{x})|(\beta - 2\epsilon\xi_\chi^0) < 0. \end{aligned}$$

Esto nos asegura que el momentum map total de las partículas evaluado en $\xi_{\chi'}$ sea siempre positivo, según la definición de un campo vectorial que apunta al pasado, que dimos en (3.57). De esta manera, para todo $u \in {}_T\mathcal{M}$, $e^{-{}_T\mu_{\chi'}(u)}$, también está acotada superiormente por la unidad:

$$e^{-{}_T\mu_{\chi'}} \leq 1,$$

demostrando con esto que para todo $\beta > 0$, $-\beta\xi_0 \in \mathfrak{g}_0$ es un vector de Souriau. Tomando en cuenta entonces la proposición (2.6), como \mathfrak{g}_\star no es vacío, por el contrario $\{-\beta\xi_0\}_{\beta \geq 0} \subset \mathfrak{g}_\star$, entonces \mathfrak{g}_\star es un abierto conexo de \mathfrak{g}_0 . 

Con respecto a la función de partición Z , siguiendo la definición (2.53), podemos ver que se expresa como el producto

$$Z(\chi) = \frac{z(\chi)^N}{N!}, \quad (3.94)$$

donde $z(\chi)$ se define mediante la integral

$$z(\chi) = \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega |_{\mathcal{M}}(u) e^{-\mu_\chi(u)} = m \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P(\vec{x})}{P(\vec{x})^0} e^{-P(\vec{x})^0 \xi_\chi^0(\vec{x})} e^{-\vec{P}(\vec{x}) \cdot \vec{\xi}_\chi(\vec{x})}, \quad (3.95)$$

donde $\xi_\chi(\vec{x}) = (\xi_\chi^0(\vec{x}), \xi_\chi^1(\vec{x}), \dots, \xi_\chi^d(\vec{x})) = (\xi_\chi^0(\vec{x}), \vec{\xi}_\chi(\vec{x})) \in \mathbb{R}^D$ es la preimagen de ξ_χ bajo el vierbein $e_{x=\gamma_{\mathcal{O}}(\tau)}$ de un observador estático \mathcal{O} , i. e. $e_x(\xi_\chi(\vec{x})) = \xi_\chi(\vec{x})$, y donde debemos recordar aplicar la sustitución (3.86). En efecto, mientras que el factor $\frac{1}{N!}$ proviene de

²⁴Consideramos que cualquier punto en el espacio fase ${}_T\mathcal{M}$ es una N -tupla de puntos en la geodésica de alguna de las partículas, por lo tanto podemos emplear la expresión (3.55) para evaluar μ_{ξ_0} .

considerar que las partículas que constituyen nuestro gas ideal son indistinguibles²⁵, el producto $z(\chi)^N$ se obtiene considerando el resultado (3.85), y la expresión

$$\mu_\chi(x, p) = i_{\xi_\chi(x)}p = i_{e_x(\xi_\chi(x))}p = i_{\xi_\chi(x)}e_x(p) = i_{\xi_\chi(x)}P(\vec{x}) = \xi_\chi^0(\vec{x})P(\vec{x})^0 + \vec{P}(\vec{x}) \cdot \vec{\xi}_\chi(\vec{x}),$$

es decir,

$$\begin{aligned} Z(\chi) &= \frac{1}{N!} \int_{TM} d_T \omega_T(u) e^{-\tau \mu_\chi(u)} \\ &= \frac{m^N}{N!} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}_1) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P(\vec{x}_1)}{P(\vec{x}_1)^0} \cdots \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}_N) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P(\vec{x}_N)}{P(\vec{x}_N)^0} e^{-\sum_{A=1}^N (P(\vec{x}_A)^0 \xi_\chi^0(\vec{x}_A) + \vec{P}(\vec{x}_A) \cdot \vec{\xi}_\chi(\vec{x}_A))} \\ &= \frac{1}{N!} \prod_{A=1}^N \left(m \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}_A) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P(\vec{x}_A)}{P(\vec{x}_A)^0} e^{-P(\vec{x}_A)^0 \xi_\chi^0(\vec{x}_A) - \vec{P}(\vec{x}_A) \cdot \vec{\xi}_\chi(\vec{x}_A)} \right) = \frac{z(\chi)^N}{N!}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la expresión (3.94), notemos que la misma distribución generalizada de Gibbs (3.88) puede expresarse como un producto de funciones de densidad sobre los soportes \mathcal{M} y con respecto a las medidas $\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}$, i. e.

$${}_{T\rho}(\chi; u) = N! \prod_{A=1}^N \frac{\Theta_{\mathcal{M}} \circ \varpi_A(u)}{z(\chi)} e^{-\mu_\chi \circ \varpi_A(u)} = N! \prod_{A=1}^N \rho_A(\chi; \varpi_A(u)). \quad (3.96)$$

A estas distribuciones $\rho_A \simeq \rho$, definidas formalmente como

$$\rho(\chi; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{z(\chi)} e^{-\mu_\chi(u)}, \quad (3.97)$$

las llamaremos distribuciones de una partícula, y en este sentido (3.95) será la función de partición de una partícula.

Con respecto a las distribuciones (3.97), resulta importante mencionar que los estados estadísticos de Gibbs son estáticos si estas distribuciones de una partícula son invariantes ante el flujo de ξ_0 , i. e. ante traslaciones temporales. En efecto, empleando la definición (3.63) de un estado estático, vemos que

$$\begin{aligned} {}_{T\rho}(\chi; \Psi_{e^{t\xi_0}}(u)) &= N! \prod_{A=1}^N \rho_A(\chi; \varpi_A \circ \Psi_{e^{t\xi_0}}(u)) \\ &= N! \prod_{A=1}^N \rho_A(\chi; \Psi_{e^{t\xi_0}} \circ \varpi_A(u)) \\ &= N! \prod_{A=1}^N \rho_A(\chi; \varpi_A(u)) = {}_{T\rho}(\chi; u), \end{aligned}$$

²⁵El argumento por el cual se incluye el factor de Gibbs como una corrección en la función de partición de un sistema de N partículas indistinguibles, sin tomar en cuenta su naturaleza fermiónica o bosónica, se basa en que estados dinámicos que se diferencian únicamente por la permutación de los subestados de sus partículas, i. e. $u = (u_a, u_b)$ y $u' = (u_b, u_a)$ en un ejemplo trivial de dos partículas, son físicamente equivalentes y entonces no representan valores distintos de la variable aleatoria u , si no el mismo. Véase [44, 50] para una discusión más profunda de la distinguibilidad e indistinguibilidad de las partículas.

si y sólo si

$$\rho(\chi; \Psi_{e^{t\chi_0}}(u)) = \rho(\chi; u). \quad (3.98)$$

Veamos ahora como esta condición equivalente para determinar si un estado de Gibbs es estático, nos sirve para caracterizar el equilibrio estático en términos de los vectores de Souriau.

Proposición 3.5

Un estados estadístico de Gibbs (3.88) del sistema hamiltoniano $(T^*M^N, T\Omega, T\mathcal{H})$, es estático si y sólo si el vector de Souriau que lo parametriza conmuta con el generador de traslaciones temporales χ_0 , i. e.

$$[\chi, \chi_0] = 0 \quad \iff \quad T\rho(\chi; \Psi_{e^{t\chi_0}}(u)) = T\rho(\chi; u). \quad (3.99)$$

Utilizando el resultado (3.98), comencemos por reexpresar la condición (3.99) que queremos probar como

$$[\chi, \chi_0] = 0 \quad \iff \quad \rho(\chi; \Psi_{e^{t\chi_0}}(u)) = \rho(\chi; u). \quad (3.100)$$

Por otra parte, del resultado (2.63) de la proposición (2.10) sabemos que (3.98) sólo se cumple si el vector de Souriau resulta ser un punto fijo de la acción adjunta del subgrupo $\{e^{t\chi_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$, es decir,

$$\rho(\chi; \Psi_{e^{t\chi_0}}(u)) = \rho(\text{Ad}_{e^{-t\chi_0}}(\chi); u) = \rho(\chi; u) \quad \iff \quad \text{Ad}_{e^{t\chi_0}}(\chi) = \chi,$$

pero la versión infinitesimal de la condición que acabamos de expresar, que χ sea un punto fijo de la acción adjunta de $\{e^{t\chi_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$, justo es, en virtud del resultado (1.16), equivalente a pedir $[\chi_0, \chi] = 0$, de donde se deduce la condición (3.100). \diamond

Según lo visto en la proposición anterior, el conjunto de estados de Gibbs que describen a nuestro modelo de gas ideal, en equilibrio estático, se genera a partir de la intersección entre el espacio de vectores de Souriau y el llamado centralizador del subálgebra $\{\alpha\chi_0\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$:

$$\mathfrak{g}_\odot = \mathfrak{g}_\star \cap \{\chi \in \mathfrak{g} : [\chi, \chi_0] = 0\}. \quad (3.101)$$

A los vectores de Souriau en (3.101) les agregaremos el adjetivo de estáticos, siendo entonces \mathfrak{g}_\odot el subconjunto de vectores de Souriau estáticos.

Naturalmente el subconjunto $\{-\beta\chi_0\}_{\beta > 0}$ que encontramos anteriormente en \mathfrak{g}_\star , está también en \mathfrak{g}_\odot . Analicemos un poco más los estados estáticos asociados a este subconjunto, comenzando por mencionar que, de manera general, la función de partición de una partícula (3.95), parametrizada por un vector de Souriau de tipo tiempo, puede expresarse en términos sólo de una integral sobre algún corte Σ_0 del tubo de mundo de la caja con nuestro gas ideal (véase la proposición (4.1) del apéndice (III)), de tal manera que la distribución de Gibbs de una partícula asociada a $\chi \in \mathfrak{g}_\star$, tal que $g(x)(\xi_\chi, \xi_\chi) < 0$ para toda $x \in M$, es de la forma

$$\rho(\chi; u) = \left[\int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) k_{\frac{d-1}{2}}(m\|\xi_\chi\|(x)) \right]^{-1} \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u) e^{-\mu_\chi(u)}}{2m^d (2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}. \quad (3.102)$$

Notemos cómo en la integral que hace parte de la función de partición de una partícula el integrando sólo depende de $\vec{x} \in \Sigma_0$ a través de la norma del campo de Killing ξ_χ .

En particular, para un vector $-\beta\chi_0 \in \mathfrak{g}_\odot$ ($\beta > 0$), esta dependencia se simplifica, pues $|g(\vec{x})(\xi_{-\beta\chi_0}, \xi_{-\beta\chi_0})|^{\frac{1}{2}} = |(g\vec{x})(\xi_\beta, \xi_\beta)|^{\frac{1}{2}} = \beta|g_{00}(\vec{x})|^{\frac{1}{2}}$, de manera que (3.102) se reduce a

$$\rho(\beta; u) = \left[\int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) k_{\frac{d-1}{2}}(m\beta|g_{00}(\vec{x})|^{\frac{1}{2}}) \right]^{-1} \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)e^{-\beta E(u)}}{2m^d(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}, \quad (3.103)$$

donde hemos simplificado la notación de la distribución parametrizada por $-\beta\chi_0$ como

$$\rho(-\beta\chi; u) = \rho(\beta; u). \quad (3.104)$$

Para entender mejor la distribución (3.103) sobre \mathcal{M} , así como el papel que juega el parámetro $\beta > 0$ en ciertos escenarios, consideremos dos ejemplos que, además, nos servirá para aterrizar los conceptos que hemos introducido en esta parte del trabajo: el espaciotiempo plano de Minwowski (D -dimensional) y el espaciotiempo fuera de un objeto estático y esféricamente simétrico (espaciotiempo exterior de Schwarzschild en $D = 4$ dimensiones).

3.1 Ejemplo: Espaciotiempo de Minkowski

Sea (\mathbb{R}^D, η) el espaciotiempo de Minwowski. Este espaciotiempo tiene las peculiaridades de ser globalmente plano (\mathbb{R}^D) y, por lo mismo, globalmente orientable mediante el sistema cartesiano $(t, \vec{x}) = (t, x^1, x^2, \dots, x^d)$. Particularmente es estático con $\xi_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ el campo vectorial de Killing tipo tiempo que satisface (3.42), (3.43 y (3.44), y en la descomposición (3.47) la métrica riemanniana η_S sobre las hipersuperficies $S = \mathbb{R}^d$ es la métrica euclidiana [59, 60, 61, 62].

En cuanto al grupo de isometrías de este espaciotiempo, es un grupo de Lie $2d + D$ -dimensional denominado el grupo de Poincaré, que puede construirse a partir del producto semidirecto [75, 76]

$$GP = \text{SO}^+(1, d) \times \mathbb{R}^D, \quad (3.105)$$

donde $\text{SO}^+(1, d)$ es el subgrupo propio de Lorentz, i. e. $L \in \text{SO}^+(1, d)$ es una matriz $D \times D$ con las propiedades²⁶

$$L^T \cdot \eta \cdot L = \eta, \quad (3.106)$$

$$\det(L) = +1, \quad (3.107)$$

$$\Lambda^0 = (1, \vec{0}^T) \cdot \Lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (3.108)$$

y $\mathbb{R}^D \simeq (\mathbb{R}^D, +)$ es el grupo abeliano, que implementa las traslaciones espaciotemporales por un vector $\epsilon \in \mathbb{R}^D$. Esta presentación de GP como un producto semidirecto proviene de su definición operacional en los puntos del espaciotiempo de Minwowski, i. e. es la representación generada a partir de la acción natural

$$\Psi_\Lambda(x) = L \cdot x + \epsilon, \quad (3.109)$$

²⁶Formalmente, la componente conexa, que incluye a la identidad, del grupo de transformaciones ortogonales con respecto a la métrica η , con determinante positivo y que conservan la orientación temporal, es decir, el subgrupo $2d$ dimensional de todas las transformaciones que conservan magnitudes y ángulos entre vectores tangentes a (\mathbb{R}^D, η) , preservando además la orientación de las bases tangentes y la naturaleza de los vectores de tipo tiempo de apuntar al pasado o al futuro [68].

donde ϵ pertenece a \mathbb{R}^D , de tal forma que los elementos $\Lambda \in GP$ pueden pensarse como el par ordenado $\Lambda = (L, \epsilon)$. Imponiendo que la acción (3.109) sea izquierda, es decir, que genere una representación matricial, podemos ver que la estructura del grupo de Poincaré efectivamente es la presentada en (3.105). Al respecto, la representación inducida por (3.109) no es como tal una de matrices $D \times D$ sobre \mathbb{R}^D , pues los mapeos Ψ_Λ son mapeos afines, si no una de matrices $(D + 1) \times (D + 1)$ sobre \mathbb{R}^{D+1} , donde los puntos x del espaciotiempo de Minkowski los representamos mediante el vector columna

$$x \simeq \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.110)$$

así que la matriz $(D + 1) \times (D + 1)$ que representa a Λ y que satisface (3.109), es de la forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L & \epsilon \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.111)$$

Empleando la representación (3.111) resulta fácil identificar el producto de dos elementos cualquiera $\Lambda_1 = (L_1, \epsilon_1), \Lambda_2 = (L_2, \epsilon_2) \in GP$ como

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = (L_1, \epsilon_1)(L_2, \epsilon_2) = (L_1 L_2, L_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1). \quad (3.112)$$

En este sentido el elemento identidad es simplemente $e = (\text{Id}_{D \times D}, 0)$ y, para $\Lambda \in GP$, su elemento inverso es $\Lambda^{-1} = (L^{-1}, -L^{-1} \cdot \epsilon)$.

Con respecto al álgebra de Lie del grupo de Poincaré, $\mathfrak{gp} = \mathfrak{so}^+(1, d) \times \mathbb{R}^D$, la representación afín (3.111) también resulta útil, pues basta calcular su versión infinitesimal para poder identificar el par ordenado $\chi = (\ell, \epsilon) \in \mathfrak{gp}$ con la matriz

$$\chi = \begin{pmatrix} \ell & \epsilon \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.113)$$

donde $\ell \in \mathfrak{so}(1, d)$ es una matriz $D \times D$, antisimétrica respecto al tensor métrico η y sin traza, como resultado de las versiones diferenciales²⁷ de (3.106) y (3.107), i. e.

$$\ell^T \cdot \eta = -\eta \cdot \ell, \quad (3.114)$$

$$\text{Tr}(\ell) = 0. \quad (3.115)$$

Empleando la representación (3.113) podemos encontrar fácilmente el producto de la acción adjunta de GP sobre \mathfrak{gp} ,

$$\text{Ad}_\Lambda(\chi) = \text{Ad}_{(L, \epsilon_1)}(\ell, \epsilon) = (\text{Ad}_L(\ell), L \cdot \epsilon - \text{Ad}_L(\ell) \cdot \epsilon_1), \quad (3.116)$$

así como su versión infinitesimal, i. e. el producto de Lie de esta álgebra,

$$[\chi_1, \chi_2] = [(\ell_1, \epsilon_1), (\ell_2, \epsilon_2)] = ([\ell_1, \ell_2], \ell_1(\epsilon_2) - \ell_2(\epsilon_1)). \quad (3.117)$$

²⁷En efecto, como $\text{SO}^+(1, d)$ es la componente conexa de $\text{SO}(1, d)$ con la identidad, toda matriz de la forma $e^{s\ell}$ satisface tanto (3.106) como (3.107): calculando entonces las derivadas de estas expresiones con respecto a s , y evaluando en $s = 0$, obtenemos

$$\frac{d}{ds}(e^{s\ell^T} \cdot \eta \cdot e^{s\ell})_{s=0} = \ell^T \cdot \eta \cdot e^0 + e^0 \cdot \eta \cdot \ell = \ell^T \cdot \eta + \eta \cdot \ell = 0,$$

$$\frac{d}{ds}(\det(e^{s\ell}))_{s=0} = \frac{d}{ds}e^{s\text{Tr}(\ell)}|_{s=0} = \text{Tr}(\ell) = 0.$$

Si tomamos a los vectores $\vec{\omega}, \vec{\nu} \in \mathbb{R}^d$ como los generadores, respectivamente, de rotaciones espaciales y boost²⁸, entonces podemos parametrizar a las matrices $\ell = \ell_{\vec{\nu}, \vec{\omega}}$ como [76]

$$\ell_{\vec{\nu}, \vec{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\nu}^T \\ \vec{\nu} & j(\vec{\omega}) \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

donde $j(\vec{\omega})$ es la matriz $d \times d$ que, por multiplicación matricial, actúa sobre $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ en la forma $j(\vec{\omega}) \cdot \vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x}$.

Los campos fundamentales asociados a la acción (3.109), i. e. los campos vectoriales de Killing del espaciotiempo de Minkowski, están dados, según lo visto, por los campos vectoriales

$$\xi_\chi(x) = \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}}(x) \Big|_{s=0} = (\epsilon^\mu + [\ell_{\vec{\nu}, \vec{\omega}}]^\mu{}_\nu x^\nu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.119)$$

y, vía el levantamiento cotangente de (3.109), en la variedad simpléctica $(T^*\mathbb{R}^D, \Omega = d\vartheta) = (\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D, dp_\mu \wedge dx^\mu)$, definen funciones hamiltonianas (3.24), para cada elemento $\chi \in \mathfrak{gp}$, de la forma

$$\begin{aligned} \mu_\chi(x^\mu, p_\mu) &= p_\mu [\ell_{\vec{\nu}, \vec{\omega}}]^\mu{}_\nu x^\nu + p_\mu \epsilon^\mu \\ &= (p_0 \vec{x} + t \vec{p}) \cdot \vec{\nu} + (\vec{x} \times \vec{p}) \cdot \vec{\omega} + \epsilon p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.120)$$

donde, en la última expresión, hemos empleado el sistema de coordenadas cartesianas $(x^\mu, p_\mu) = (t, \vec{x}, p_0, \vec{p})$ sobre $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D$, donde $p_\mu = i_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} p$.

Ahora, identificando el álgebra de Lie $\mathfrak{gp} = \mathfrak{so}^+(1, d) \times \mathbb{R}^D$ con el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^D$, de tal forma que el elemento $\chi = (\ell_{\vec{\nu}, \vec{\omega}}, \epsilon)$ se represente como $\chi \simeq (\vec{\nu}, \vec{\omega}, \epsilon)$, e identificando también su espacio vectorial dual $\mathfrak{gp}^* \simeq \mathfrak{gp} \simeq \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^D$ de modo que sus elementos se vean como $\alpha \simeq (\vec{N}, \vec{L}, \epsilon)$ para $\vec{N}, \vec{L} \in \mathbb{R}^d$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^D$ tales que

$$i_\chi \alpha = \vec{N} \cdot \vec{\nu} + \vec{L} \cdot \vec{\omega} + \epsilon_\mu \epsilon^\mu,$$

de la expresión (3.120) podemos leer el momentum map $\mu : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathfrak{gp}^*$, asociado a la acción del grupo de isometrías sobre el haz cotangente del espaciotiempo de Minkowski, como

$$\mu(x, p) \simeq (\vec{N}(x, p), \vec{J}(x, p), p) = (t \vec{p} + p_0 \vec{x}, \vec{x} \times \vec{p}, p), \quad (3.121)$$

donde las funciones vectoriales $\vec{N} \circ \hat{\gamma}$ y $\vec{J} \circ \hat{\gamma}$ se reducen, sobre curvas $\tau \mapsto \hat{\gamma}(\tau)$ que representen el estado dinámico de una partícula, al vector de desplazamiento y al momento angular, respectivamente, esto a partir de considerar los puntos $x \in \mathbb{R}^D$ como los eventos en la historia de la partícula y los puntos $p \in \mathbb{R}^D$ como sus momentos asociados. En este escenario p_0 es el negativo de la energía de la partícula y \vec{p} su momento lineal. Particularmente si la hamiltoniana que describe a la partícula es invariante ante boost, $\vec{N} \circ \hat{\gamma}$ es la cantidad conservada asociada a la simetría de *brincar entre sistemas de referencia inerciales*. Si la simetría proviene de la invarianza bajo rotaciones, la cantidad conservada es el momento angular; la energía y el momento lineal nos hablan, respectivamente, de invarianza ante traslaciones temporales y espaciales [68].

²⁸Es decir, $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^d$ es el vector cuyo eje indica que la rotación se realiza en el hiperplano ortogonal y cuya magnitud euclidiana nos dice cuánto hay que rotar. $\vec{\nu} \in \mathbb{R}^d$ juega el mismo papel si consideramos los boost como rotaciones espaciales con el eje del tiempo como imaginario, i. e. indica la dirección del boost y su magnitud euclidiana la rapidez relativa entre los marcos de referencia.

Hablando de las curvas $\tau \mapsto \hat{\gamma}(\tau)$ que sigue el estado dinámico u de una partícula en el haz cotangente $(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D, dp_\mu \wedge dx^\mu)$, consideremos el caso de la partícula libre, donde la hamiltoniana (3.9) se reduce a la expresión

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}(-p_0^2 + \|\vec{p}\|^2), \quad (3.122)$$

y donde las soluciones a las ecuaciones de Hamilton (3.13) y (3.14) correspondientes se proyectan en las geodésicas $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ que, en este sistema cartesiano, describen líneas rectas

$$\gamma : \tau \mapsto x_0 + \tau U, \quad (3.123)$$

para las condiciones iniciales x_0 , con el vector velocidad $U \circ \gamma(\tau) = \frac{d\gamma}{d\tau} = U^0 \frac{\partial}{\partial t} + U^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ para las constantes U^μ que satisfacen la condición de capa de masa, i. e.

$$-(U^0)^2 + \|\vec{U}\|^2 = -1, \quad (3.124)$$

o, empleando el resultado (3.12), similarmente en términos de los momentos constantes de la partícula, como $\gamma(\tau) = (t_0 - \tau p_0, \vec{x} + \tau \vec{p})$ para las constantes p_μ que satisfacen la misma condición (3.124), i. e.

$$-(p_0)^2 + \|\vec{p}\|^2 = -1. \quad (3.125)$$

Resulta interesante notar que en este caso, dado que el espaciotiempo es plano, las curvas integrales del campo vectorial de Killing ξ_0 son geodésicas (caso particular en que $U_0 = 1$ y $U^i = 0$). De esta manera, sin perder generalidad, podemos trabajar en el marco co-móvil de la caja, que corresponde con la experiencia de un observador estático, donde la caja aparece estática ocupando una región $S_{\text{box}} \subset \mathbb{R}^d$ que coincide con los cortes (3.50) del tubo de mundo (3.35), i. e.

$$\Sigma_0 = S_{\text{box}}. \quad (3.126)$$

En este sentido, naturalmente en el subgrupo (3.87) que deja invariante la región S_{box} contempla al subgrupo de traslaciones temporales, generado por $\chi_0 = (\ell_{\vec{0}, \vec{0}}, (1, \vec{0})) \simeq \frac{\partial}{\partial t}$. El resto de isometrías presentes en GP_0 depende, naturalmente, de la geometría de la caja y, por ende, de la región S_{box} . Por ejemplo, si la caja es una esfera en \mathbb{R}^d , i. e. $S_{\text{box}} = S^d$, entonces naturalmente el grupo de rotaciones dejará invariante dicho corte. En caso más generales pueden haber simetrías rotacionales continuas o discretas sólo en torno de ciertas direcciones. En cuanto a los boost puros, lo que podemos comentar es que están excluidos del conjunto de vectores de Souriau estáticos, que parametrizan a los estados estadísticos estáticos de Gibbs (3.88) para el gas ideal diluido en el espaciotiempo de Minkowski.

Proposición 3.5

El conjunto de vectores de Souriau estáticos, definido en (3.101), para el gas ideal en el espaciotiempo (\mathbb{R}^D, η) , excluye al subálgebra de los boost.

En efecto, utilizando la expresión (3.117) que encontramos para el conmutador de Lie de elementos en \mathfrak{gp} , así como la expresión (3.118) para la matriz $\ell_{\vec{v}, \vec{w}}$, podemos ver que el elemento más general en \mathfrak{gp} que conmuta con $\chi_0 \simeq \frac{\partial}{\partial t}$ es el elemento de la forma $(\ell_{\vec{0}, \vec{w}}, \epsilon)$,

$$[\chi, \chi_0] = [(\ell_{\vec{v}, \vec{w}}, \epsilon), (0, \frac{\partial}{\partial t})] = (0, -\ell_{\vec{v}, \vec{w}}(\frac{\partial}{\partial t})) = (0, \vec{v}) = (0, 0) \quad \implies \quad \vec{v} = 0,$$

de tal forma que los boost no pueden estar en \mathfrak{gp}_\odot , por definición. 

Dentro del conjunto \mathfrak{gp}_\odot parametrizado de estados estáticos de Gibbs consideremos el conjunto particular de estados descritos por los vectores de Souriau estáticos de la forma $-\beta\chi_0 \simeq -\beta\frac{\partial}{\partial t}$, i. e. las distribuciones generadas a partir del producto de N pdf's de la forma

$$\rho(\beta; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)e^{-\beta E(u)}}{2m^d V (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} k_{\frac{d-1}{2}}(m\beta)} = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{2m^d V} \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{e^{-\beta E(u)}}{K_{\frac{d-1}{2}}(m\beta)}, \quad (3.127)$$

donde V es el volumen d -dimensional que ocupa la caja, i. e.

$$V = \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{\eta_S}(\vec{x}) = \int_{S_{\text{box}}} d^d x |\eta_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.128)$$

Interpretando el parámetro $\beta > 0$ en (3.127) como el inverso de la temperatura del gas ideal, la distribución (3.127) aparece nombrada en la literatura como la distribución modificada de Jüttner que, se ha encontrado, modela adecuadamente simulaciones numéricas de gases relativistas en uno, dos y hasta tres dimensiones espaciales, cuando se realiza el conteo de microestados sobre hipersuperficies de tiempo constante [58, 28]. Aunque debemos ser cuidadosos con un detalle técnico, en esta interpretación. Definiendo el parámetro relativista

$$\gamma = \left(1 + \frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{p^0}{m}, \quad (3.129)$$

donde $p^0 = P^0 = -p_0$ para nuestro caso de Minkowski, tal que podemos expresar la energía de la partícula como

$$E = -i_{\xi_0} p = p^0 = m\gamma, \quad (3.130)$$

la distribución modificada de Jüttner de una partícula se enuncia como²⁹ [28, 30]

$$\rho_{\text{MJ}} = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}}{2m^d V} \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{e^{-\beta m\gamma}}{\gamma K_{\frac{d-1}{2}}(m\beta)}, \quad (3.131)$$

donde vemos que hay justo un factor γ^{-1} de diferencia con nuestra distribución (3.127),

$$\rho_{\text{MJ}} = \frac{\rho}{\gamma}. \quad (3.132)$$

Este factor se explica considerando que el término $\frac{1}{\gamma} = \frac{m}{p^0}$ que aparece en $\Sigma_{\vec{x}} = d^d p \frac{m}{p^0}$, la parte (3.84) de los momentos de la medida inducida sobre \mathcal{M} , es absorbido, por definición, en la distribución modificada de Jüttner, con el fin de integrar sobre la medida de Liouville/Lebesgue $d^d x d^d p$ [58, 28, 30]:

$$\int_{\mathcal{M}} d^d x d^d p \rho_{\text{MJ}} = \int_{\mathcal{M}} d^d x d^d p \frac{\rho}{\gamma} = \int_{\mathcal{M}} d^d x d^d p \frac{m}{p^0} \rho. \quad (3.133)$$

De esta manera, tomando en consideración (3.133), bajo la identificación del parámetro $\beta > 0$ con el inverso de la temperatura del gas ideal, el estado estático de Gibbs que hemos

²⁹Sólo hemos considerado que ρ_{MJ} tiene soporte en \mathcal{M} , y hemos dividido las expresiones que aparecen en [28]) y en [30] (caso $\eta = 1$), expresadas en términos de la densidad de partículas $\frac{N}{V}$, entre el número N de partículas para obtener la distribución correspondiente a una sola partícula.

definido está descrito por la distribución modificada de Jüttner, que representaremos con un símbolo especial como $\rho(\beta; u) = \rho_\eta(u)$, es decir,

$$\rho_\eta(\beta; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{2m^d V} \left(\frac{m\beta}{2\pi} \right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{e^{-\beta E(u)}}{K_{\frac{d-1}{2}}(m\beta)}. \quad (3.134)$$

Por supuesto, resulta interesante la identificación del parámetro β en (3.134) como el inverso de la temperatura, pues geoméricamente β es la norma del campo vectorial de Killing $\xi_\beta = -\beta\xi_0$, i. e. $\beta = \|\xi_\beta\|$, y, por lo tanto, el inverso de la temperatura medida por el observador estático \mathcal{O} , co-móvil con la caja, satisface la relación ³⁰

$$\frac{1}{T} \Big|_{\mathcal{O}} = \|\xi_\beta\| = |\eta(\xi_\beta, \xi_\beta)|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.135)$$

Ahora consideremos un ejemplo un poco más específico en $D = 4$ donde suponemos que la caja que contiene a nuestro gas ideal diluido, es un cilindro S_{box} de radio ϱ_0 y altura h . Esta caja exhibe una simetría rotacional con respecto al eje z , así que como ya habíamos mencionado anteriormente, cualquier rotación generada en torno a dicho eje es una isometría que deja invariante cualquier corte S_{box} de tubo de mundo,

$$\{e^{\omega\chi_\phi}\}_{0 \leq \omega \leq 2\pi} \subset GP_0, \quad (3.136)$$

donde $\chi_\phi \in \mathfrak{gp}$ es el elemento del álgebra del grupo de Poincaré que identificamos con la representación matricial 5×5 (3.113)

$$\chi_\phi = \begin{pmatrix} \ell_\phi & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.137)$$

donde ℓ_ϕ es la matriz (3.118) de la forma

$$\ell_\chi = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \omega j(\frac{\partial}{\partial z}) \end{pmatrix}. \quad (3.138)$$

De una forma más apropiada, adaptándonos a la geometría de la caja, conviene trabajar sobre las hojas \mathbb{R}^3 de la foliación estática con coordenadas cilíndricas (z, ϱ, ϕ) , para $z \in \mathbb{R}$, $\phi \geq 0$ y $0 \leq \phi < 2\pi$ dadas a través del cambio de coordenadas

$$(x, y, z) \mapsto \left(z, \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right). \quad (3.139)$$

En este caso podemos identificar $\chi_\phi \in \mathfrak{gp}_0$ como el generador infinitesimal del campo vectorial de Killing

$$\xi_\phi = \xi_{\chi_\phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (3.140)$$

Naturalmente (3.140) es un campo vectorial tipo espacio cuya norma crece conforme nos alejamos del eje z en cualquier dirección, tal como podemos atestiguar al expresar el tensor métrico en la base cotangente $(dt, dz, d\varrho, d\phi)$,

$$\eta(\varrho) = -dt \otimes dt + dz \otimes dz + d\varrho \otimes d\varrho + \varrho^2 d\phi \otimes d\phi. \quad (3.141)$$

³⁰Esta relación entre temperatura y norma de un campo vectorial de Killing ya había sido encontrada dentro de la teoría cinética relativista al trabajar con la distribución (no modificada) de Jüttner. Para más información, véase [58].

No obstante la combinación $\chi = -\beta\chi_0 + \omega\chi_\phi$ da lugar a un campo vectorial de Killing

$$\xi_\chi = -\beta\chi_0 + \omega\xi_\phi = -\beta\frac{\partial}{\partial t} + \omega\frac{\partial}{\partial\phi} \quad (3.142)$$

que es tipo tiempo, y apunta al pasado, sobre la región de (\mathbb{R}^4, η) donde se satisface

$$\left(\frac{\omega}{\beta}\varrho\right)^2 \equiv v^2 < 1. \quad (3.143)$$

En efecto, directamente vemos que $\eta(\varrho)(\xi_0, \xi_\chi) = \eta(\varrho)(\xi_0, \xi_0) = -1$ en todo punto del espaciotiempo, no obstante para tener $\|\xi_\chi\|^2 < 0$ sí es necesario recurrir a (3.143):

$$\|\xi_\chi\|^2(\varrho) = -\beta^2 + \omega^2\varrho^2 < 0 \quad \implies \quad v^2 < 1.$$

Supongamos que el radio ϱ_0 de la caja cilíndrica satisface la condición (3.143). Recurriendo al mismo argumento que dimos en la proposición (3.3), sólo cambiando $-\beta\chi_0$ por χ , vemos que χ es un vector de Souriau. Así identificamos el subconjunto de vectores de Souriau estáticos³¹ como

$$\mathfrak{gp}_\odot = \{-\beta\chi_0 + \omega\chi_\phi : \beta > 0\} \simeq \mathbb{R}_+ \times S^1, \quad (3.144)$$

donde $\mathbb{R}_+ = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta > 0\}$ es la parte positiva de la recta real y al círculo S^1 lo parametrizamos con el ángulo ω .

Con respecto a la función de partición de una partícula (4.4), la calculamos enseguida.

Proposición 3.5

Sea $\chi = -\beta\chi_0 + \omega\chi_\phi \in \mathfrak{gp}_\odot$ un vector de Souriau estático cualquiera. La función de partición $z(\chi) = z(\beta, \omega)$ asociada a χ es

$$z(\beta, \omega) = \left(\frac{8\pi mV}{\omega^2\varrho_0^2}\right) [K_0(\mathfrak{f}(\beta, \omega)) - K_0(m\beta)], \quad (3.145)$$

donde

$$\mathfrak{f}(\beta, \omega) = m\beta[1 - v_0^2]^{\frac{1}{2}} = m\beta \left[1 - \left(\frac{\omega}{\beta}\varrho_0\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.146)$$

Para $\omega = 0$, $z(\beta, \omega)$ se reduce a la función de partición tipo Jüttner modificada:

$$z(\beta, 0) = z_\eta(\beta) = \frac{4\pi m^2 V}{\beta} K_1(m\beta). \quad (3.147)$$

Tomando en cuenta que ξ_χ dado por (3.142) es un campo vectorial tipo tiempo sobre S_{box} , podemos emplear la expresión (4.4) para la función de partición de una partícula, identificando el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas como $\text{vol}_{\eta_S} = dzd\phi d\varrho\varrho$,

$$z(\beta, \omega) = 4\pi m^3 V \left[\frac{2}{\varrho_0^2} \int_0^{\varrho_0} d\varrho\varrho k_1 \left(m\beta [1 - v(\varrho)^2]^{\frac{1}{2}} \right) \right],$$

³¹Las traslaciones espaciales están excluidas, pues aunque conmutan con los generadores de traslaciones temporales no dejan invariantes los cortes S_{box} del tubo de mundo.

donde $V = \pi \varrho_0^2 h$. Con respecto a la integral entre paréntesis rectangulares, consideremos el cambio de variable a $\zeta = m\beta[1 - v(\varrho)^2]^{\frac{1}{2}}$ así como la propiedad $\frac{dK_0}{d\zeta} = -K_1(\zeta)$ [77],

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varrho_0^2} \int_0^{\varrho_0} d\varrho \varrho k_1 \left(m\beta [1 - v(\varrho)^2]^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{2}{\varrho_0^2} \int_{m\beta}^{m\beta(1-v_0^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\zeta}{m^2 \omega^2} (-K_1(\zeta)) \\ &= \frac{2}{m^2 \omega^2 \varrho_0^2} \left[K_0(m\beta[1 - v_0^2]^{\frac{1}{2}}) - K_0(m\beta) \right], \end{aligned}$$

donde $v_0 = v(\varrho_0)$. Insertando este resultado en la expresión para $z(\chi)$, encontramos efectivamente (3.145).

Con respecto a la expresión (3.147) notemos que dada la indeterminación en numerador y denominador que ocurre al evaluar $\omega = 0$, hace falta aplicar la regla de L'Hopital dos veces en la función real de una variable³² $z_\beta : \omega \mapsto z(\beta, \omega)$. En efecto, calculando las derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \omega} = -\frac{(m\varrho_0)^2}{\mathfrak{f}} \omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} K_0(\mathfrak{f}) = -K_1(\mathfrak{f}) \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \omega} = (m\varrho_0)^2 k_1(\mathfrak{f}) \omega,$$

podemos ver que al aplicar la regla de L'Hopital una vez seguimos teniendo la indeterminación del tipo 0/0,

$$z(\beta, 0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} z_\beta(\omega) = \left(\frac{8\pi m V}{\varrho_0^2} \right) \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} K_0(\mathfrak{f})}{\frac{d}{d\omega} \omega^2} = \left(\frac{8\pi m V}{\varrho_0^2} \right) \frac{(m\varrho_0)^2}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k_1(\mathfrak{f}) \omega}{\omega},$$

la cual desaparece al volver a aplicar la regla de L'Hopital, en virtud de la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (k_1(\mathfrak{f}) \omega) = k_1(\mathfrak{f}) + (m\varrho_0)^2 k_2(\mathfrak{f}) \omega^2,$$

es decir,

$$\begin{aligned} z(\beta, 0) &= 4\pi m^3 V \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} (k_1(\mathfrak{f}) \omega)}{\frac{\partial \omega}{\partial \omega}} \\ &= 4\pi m^3 V \lim_{\omega \rightarrow 0} [k_1(\mathfrak{f}) + (m\varrho_0)^2 k_2(\mathfrak{f}) \omega^2] = 4\pi m^3 V k_1(m\beta) = \frac{4\pi m^2 V}{\beta} K_1(m\beta). \quad \diamond \end{aligned}$$

Con respecto a lo dicho en la proposición anterior, vale la pena expresar $z(\beta, \omega)$ en términos de $z_\eta(\beta)$ como

$$z(\beta, \omega) = z_\eta(\beta) \mathfrak{F}(\beta, \omega), \quad (3.148)$$

donde \mathfrak{F} se define como el cociente (véase (3.5) y (3.6)):

$$\mathfrak{F}(\beta, \omega) = \frac{2\beta}{m\omega^2 \varrho_0^2} \frac{K_0(\mathfrak{f}) - K_0(m\beta)}{K_1(m\beta)} = \frac{2}{(m\omega \varrho_0)^2} \frac{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)}{k_1(m\beta)}. \quad (3.149)$$

³²Recordemos que hemos supuesto que z como función sobre \mathfrak{g}_\odot es lo suficientemente suave y bien portada como para poder calcular el límite en ω dejando fija β .

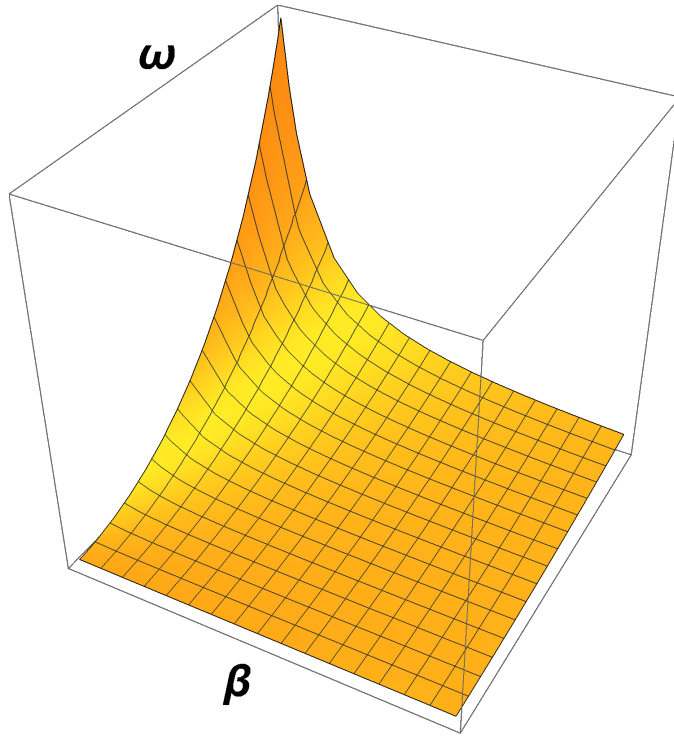


Figura 3.5: Gráfica de \mathfrak{F} para $0.02 \leq v_0 \leq 0.10$.

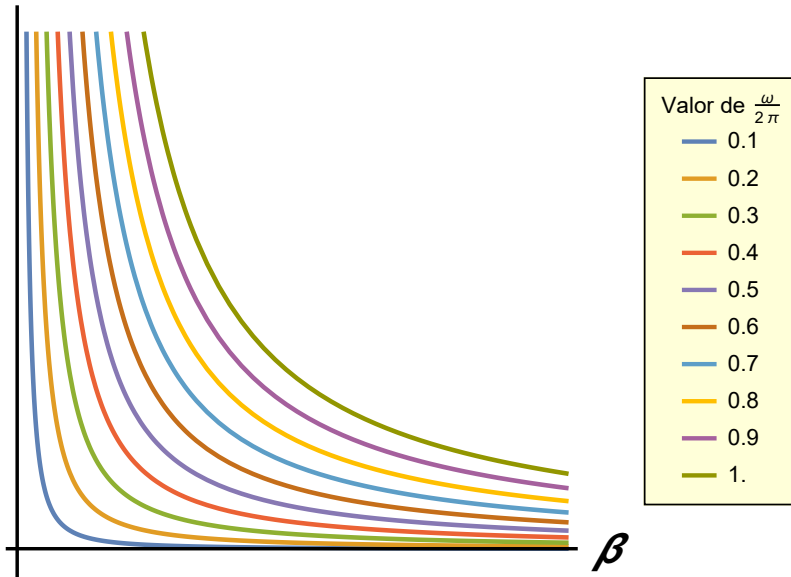


Figura 3.6: Cortes de \mathfrak{F} a distintos ω para $0.02 \leq v_0 \leq 0.10$.

Esta cantidad mide la diferencia que existe entre $z(\beta, \omega)$ y $z_\eta(\beta)$ en términos tanto de β como de ω . En particular podemos notar que como tanto K_0 como K_1 son funciones positivas y monotonamente decrecientes [77], para toda $\beta > 0$ y $0 \leq \omega < 2\pi$, el cociente $(K_0(f) - K_0(m\beta))/K_1(m\beta)$ es siempre positivo, y entonces \mathfrak{F} también lo es,

$$\mathfrak{F}(\beta, \omega) > 0. \quad (3.150)$$

Con respecto a la evaluación del momentum map en los vectores estáticos de Souriau $\chi = -\beta\chi_0 + \omega\chi_\phi$, sobre geodésicas dentro del tubo de mundo τ (donde se satisface la

condición (3.143)), tenemos

$$\mu_\chi \circ \hat{\gamma} = \beta E + \omega L_z, \quad (3.151)$$

donde $L_z = \gamma m \varrho^2 \frac{d\phi}{dt}$ es la componente en z del momento angular de la partícula. En efecto,

$$\mu_\chi \circ \hat{\gamma} = m\eta(\gamma(t))(\xi_\chi, U) = m\beta U^t + m\omega \varrho^2 U^\phi = \beta m\gamma + \omega m\gamma \varrho^2 \frac{d\phi}{dt} = \beta E + \omega L_z.$$

De esta manera la función de distribución de Gibbs de una partícula $\rho(\chi; u) = \rho(\beta, \omega; u)$, parametrizada por $\chi \in \mathfrak{gp}_\odot$, adquiere la forma

$$\rho(\beta, \omega; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{8\pi mV} \frac{\omega^2 \varrho_0^2}{K_0(m\beta[1 - (\frac{\omega \varrho_0}{\beta})^2]^{\frac{1}{2}}) - K_0(m\beta)} e^{-\beta E(u) - \omega L_z(u)}, \quad (3.152)$$

o en términos de la factorización (3.148),

$$\rho(\beta, \omega; u) = \frac{e^{-\omega L_z}}{\mathfrak{F}(\beta, \omega)} \rho_\eta(\beta; u). \quad (3.153)$$

Naturalmente, según lo visto en (3.147), para el caso particular $\omega = 0$, $\rho(\beta, \omega; u)$ se reduce a $\rho_\eta(\beta; u)$,

$$\rho(\beta, 0; u) = \rho_\eta(\beta; u). \quad (3.154)$$

La expresión (3.153) también nos permite interpretar \mathfrak{F} en términos del valor esperado de $e^{-\omega L_z}$ con respecto a la distribución modificada de Jüttner,

$$\mathfrak{F}(\beta, \omega) = \langle e^{-\omega L_z} \rangle_\eta, \quad (3.155)$$

donde, nótese, empleamos el subíndice η en los paréntesis angulares para representar que el promedio se toma con respecto a $\rho_\eta(\beta; u)$. En efecto, tomando en cuenta que tanto $\rho(\beta, \omega)$ como $\rho_\eta(\beta)$ son estados estáticos con respecto a la misma medida de Liouville en el espacio medido $(T^*M, \mathfrak{B}(T^*M), \lambda_\omega)$, tenemos

$$1 = \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u) \rho(\beta, \omega; u) = \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u) \frac{e^{-\omega L_z(u)}}{\mathfrak{F}(\beta, \omega)} \rho_\eta(\beta; u) = \left\langle \frac{e^{-\omega L_z}}{\mathfrak{F}(\beta, \omega)} \right\rangle_\eta = \frac{\langle e^{-\omega L_z} \rangle_\eta}{\mathfrak{F}(\beta, \omega)}$$

↓

$$\mathfrak{F}(\beta, \omega) = \langle e^{-\omega L_z} \rangle_\eta.$$

Habiendo identificado la función $z_\eta : \mathfrak{gp}_\odot \rightarrow \mathbb{R}$ sobre (3.144), naturalmente también hemos encontrado la función de partición

$$Z(\beta, \omega) = \frac{z^N(\beta, \omega)}{N!} = \frac{z_\eta^N(\beta) \mathfrak{F}^N(\beta, \omega)}{N!}$$

como función sobre \mathfrak{gp}_\odot , lo que nos permite calcular las funciones generalizadas de energía y entropía.

Proposición 3.5

La función de energía $\mathcal{E} : \mathfrak{gp}_\odot \rightarrow \mathfrak{gp}_\odot^*$ definida en (2.55), así como la función de entropía $S : \mathfrak{gp}_\odot \rightarrow \mathbb{R}$ (2.56), para la función de partición del gas ideal con función de partición de una partícula (3.145), están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\beta, \omega) = & \mathcal{E}_\eta(\beta) + N \left[(m\beta)^2 \frac{k_1(\mathfrak{f})v_0^2}{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)} - 2 \right] \frac{d\omega}{\omega} \\ & + N \left(m \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} + m^2\beta \left[\frac{k_1(m\beta) - k_1(\mathfrak{f})}{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)} \right] \right) d\beta, \end{aligned} \quad (3.156)$$

$$\begin{aligned} S(\beta, \omega) = & S_\eta(\beta) + N \ln \left(\frac{2}{(m\omega\rho_0)^2} \left[\frac{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)}{k_1(m\beta)} \right] \right) + 2N \\ & + Nm\beta \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} - N(m\beta)^2 \left[\frac{k_1(\mathfrak{f})(1 + v_0^2) - k_1(m\beta)}{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)} \right], \end{aligned} \quad (3.157)$$

donde $\mathcal{E}_\eta(\beta) = \mathcal{E}(\beta, 0)$ y $S(\beta) = S_\eta(\beta, 0)$ son, respectivamente, la energía y la energía generalizadas para el caso particular de la distribución de Jüttner modificada (3.134):

$$\mathcal{E}_\eta(\beta) = -Nm \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} d\beta, \quad (3.158)$$

$$S_\eta(\beta) = -Nm\beta \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} + N \ln \left(\frac{4\pi m^3 V e}{N} k_1(m\beta) \right). \quad (3.159)$$

Para llegar a la expresión (3.156) basta tomar en cuenta que la función de partición del gas ideal es de la forma $Z(\beta, \omega) = \frac{z^N(\beta, \omega)}{N!}$, por lo tanto $\mathcal{E}(\beta, \omega)$ se calcula como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\beta, \omega) &= D \ln \left(\frac{z^N(\beta, \omega)}{N!} \right) = ND \ln(z(\beta, \omega)) = ND \ln(z_\eta(\beta)) + ND \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)) \\ &= \mathcal{E}_\eta(\beta) + ND \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)), \end{aligned}$$

de tal manera que sólo hace falta calcular la derivada exterior del logaritmo natural de (3.149), es decir,

$$\begin{aligned} D(\ln \mathfrak{F}(\beta, \omega)) &= \left[(m\beta)^2 \frac{k_1(\mathfrak{f})v_0^2}{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)} - 2 \right] \frac{d\omega}{\omega} \\ &+ \left(m \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} + m^2\beta \left[\frac{k_1(m\beta) - k_1(\mathfrak{f})}{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)} \right] \right) d\beta. \end{aligned} \quad (3.160)$$

En efecto, recordando que $\frac{\partial i}{\partial \omega} = -(m\rho_0)^2 \frac{\omega}{\mathfrak{f}}$ e identificando $\frac{\partial i}{\partial \beta} = m^2 \frac{\beta}{\mathfrak{f}}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} &= \mathfrak{F}(\beta, \omega) \left(m \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} + m^2\beta \left[\frac{k_1(m\beta) - k_1(\mathfrak{f})}{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)} \right] \right), \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \omega} &= \frac{\mathfrak{F}(\beta, \omega)}{\omega} \left[(m\beta)^2 \frac{k_1(\mathfrak{f})v_0^2}{k_0(\mathfrak{f}) - k_0(m\beta)} - 2 \right]. \end{aligned}$$

Similarmente, al evaluar $-D(\ln(Z(\beta, \omega)))$ en $\chi \in \mathfrak{gp}_\odot$, y sumándole $\ln(Z(\beta, \omega))$ obtenemos la entropía generalizada

$$\begin{aligned} S(\beta, \omega) &= \ln(Z(\beta, \omega)) - i_\chi D(\ln(Z(\beta, \omega))) \\ &= \ln\left(\frac{z_\eta^N(\beta)}{N!}\right) + N \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)) - i_\chi D(\ln\left(\frac{z_\eta^N(\beta)}{N!}\right)) - Ni_\chi D \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)) \\ &= S_\eta(\beta) + N \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)) - Ni_\chi D \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)), \end{aligned}$$

donde, según lo visto en la expresión (3.160), tenemos

$$\begin{aligned} N \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)) - Ni_\chi D \ln(\mathfrak{F}(\beta, \omega)) &= N \ln\left(\frac{2}{(m\omega\rho_0)^2} \frac{k_0(\mathbf{f}) - k_0(m\beta)}{k_1(m\beta)}\right) \\ &\quad - \left[(m\beta)^2 \frac{k_1(\mathbf{f})v_0^2}{k_0(\mathbf{f}) - k_0(m\beta)} - 2 \right] + m\beta \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} \\ &\quad + m^2\beta^2 \left[\frac{k_1(m\beta) - k_1(\mathbf{f})}{k_0(\mathbf{f}) - k_0(m\beta)} \right]. \end{aligned}$$

Acomodando correctamente los términos en esta expresión, y sustituyendo en $S(\beta, \omega)$, obtenemos, efectivamente, (3.157).

Con respecto a la expresión (3.158) para la energía generalizada en el caso particular de Jüttner modificado, el cálculo es bastante similar para $z_\eta(\beta) = 4\pi m^3 k_1(m\beta)$,

$$\mathcal{E}_\eta(\beta) = ND \ln(z_\eta(\beta)) = ND \ln(k_1(m\beta)) = -Nm \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)}.$$

Con respecto a la entropía (3.159), el único detalle a tomar en cuenta es el altísimo número de partículas que componen al gas, que nos permite emplear la llamada aproximación de Stirling $\ln(N!) \approx N \ln(N) - N$ [44, 50]:

$$S_\eta(\beta) = -Nm\beta \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} + N \ln(4\pi m^3 V k_1(m\beta)) - N \ln(N) + N. \quad \diamond$$

3.2 Ejemplo: Espaciotiempo exterior de Schwarzschild

Como segundo ejemplo consideremos el spaciotiempo 4-dimensional generado a partir de una distribución de materia que es estática, esféricamente simétrica y finita, con masa M_0 y radio R_0 . Específicamente, consideremos sólo la región exterior a dicha distribución, que se modela como un spaciotiempo (M, g_{Sch}) estático y asintóticamente plano³³, donde

³³Al pedir que la distribución sea estática estamos indicando que, por definición, hay una familia de observadores cuyas observaciones indican que la distribución de materia no experimenta cambio alguno, y tampoco detectan cambios en las posiciones de sus observadores vecinos. Formalmente este requerimiento se traduce en que el spaciotiempo debe ser estático con un campo vectorial de Killing ξ_0 . Con respecto a la propiedad de ser esféricamente simétrica y finita, esto puede traducirse en que, para cualquier corte a tiempo constante, la distribución de materia es percibida como una esfera de radio finito R_0 encajada en el espacio ambiente euclidiano de los observadores estáticos. Finalmente, que la distribución de materia esté localizada espacialmente y no evolucione, indica que, de nuevo, en cada corte de tiempo constante, a una distancia (riemanniana) espacialmente infinita de cualquier punto en la fuente de materia, el spaciotiempo tiende al spaciotiempo plano de Minkowski [59, 60, 61, 62].

g_{Sch} es el tensor métrico de Schwarzschild que, localmente, se ve como

$$g_{\text{Sch}}(t, r, \theta, \phi) = -R(r)dt \otimes dt + \frac{dr \otimes dr}{R(r)} + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi, \quad (3.161)$$

donde el sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) es un sistema de coordenadas que explota la separabilidad local de M en $\mathbb{R} \times S$ de S , i. e. las curvas coordenadas de t se definen como las curvas integrales del campo vectorial de Killing $\xi_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, y como tal puede interpretarse como *el tiempo medido por un observador en el infinito*, mientras que el resto de coordenadas tienen la siguiente interpretación sobre las hipervariedades S : construyamos una familia de esferas anidadas, concéntricas a la distribución esférica de masa, entonces $R_0 < r < \infty$ es el inverso de la raíz cuadrada de la curvatura gaussiana de dichas esferas y $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$ son sus coordenadas angulares [61].

En (3.161), $R = |g_{\text{Sch}_{00}}|$ es la función dada por

$$R(r) = 1 - \frac{2M_0}{r} = 1 - \frac{r_S}{r}, \quad (3.162)$$

donde al parámetro r_S se le conoce como el radio de Schwarzschild [61], e identificamos a la métrica riemanniana en la descomposición (3.47) como³⁴

$$g_{\text{Sch}}(r, \theta, \phi) = \frac{dr \otimes dr}{R(r)} + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi. \quad (3.163)$$

A diferencia del espaciotiempo de Minkowski (\mathbb{R}^4, η) , el grupo de isometrías de (M, g_{Sch}) no es el grupo de Poincaré 10-dimensional (3.105), si no sólo el subgrupo $G_{\text{Sch}} \subset GP$ generado por las traslaciones temporales y las rotaciones espaciales, i. e.

$$G_{\text{Sch}} = \text{SO}(3) \times \mathbb{R}, \quad (3.164)$$

donde $\text{SO}(3)$ es el subgrupo especial del grupo ortogonal en \mathbb{R}^3 , i. e. $R \in \text{SO}(3)$ es una matriz 3×3 con las propiedades

$$R^T \cdot R = \text{Id}_{3 \times 3}, \quad (3.165)$$

$$\det(R) = +1, \quad (3.166)$$

y donde $\mathbb{R} \simeq (\mathbb{R}, +)$ es el grupo abeliano unidimensional, que implemente las traslaciones espaciotemporales por un escalar real $\epsilon \in \mathbb{R}$. La acción natural de un elemento $\Lambda = (R, \epsilon)$ en (3.164), sobre los puntos $x = (t, \vec{x}) \in M$, se define como

$$\Psi_{\Lambda}(t, \vec{x}) = (t + \epsilon, R \cdot \vec{x}), \quad (3.167)$$

lo que da pie a la representación en matrices 5×5 de la forma

$$\Lambda \simeq \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T & \epsilon \\ \vec{0} & R & \vec{0} \\ 0 & \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.168)$$

³⁴A partir de (3.163) podemos notar cómo la distancia en r no equivale a la distancia radial entre la familia de esferas anidadas, debido a la componente $g_{\text{Sch}_{rr}}$. Por supuesto, la diferencia entre ambas cantidades tiende a cero conforme $r \rightarrow \infty$ y el espacio se comienza a *aplanar*.

donde $\vec{0} = (0, 0, 0)$, que actúan sobre los vectores columna de la forma (3.110) en \mathbb{R}^5 , i. e.

$$(t, \vec{x}) \simeq \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.169)$$

Utilizando la representación afín (3.168) resulta fácil ver que el producto del grupo está dado por

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = (R_1, \epsilon_1)(R_2, \epsilon_2) = (R_1 R_2, \epsilon_1 + \epsilon_2), \quad (3.170)$$

mientras que el elemento identidad es de la forma $e = (\text{Id}_{3 \times 3}, 0)$ y el elemento inverso de Λ es, simplemente, $\Lambda^{-1} = (R^T, -\epsilon)$, como se espera en un producto directo de grupos de Lie.

Los elementos³⁵ $\chi = (\vec{\omega}, \epsilon)$ del álgebra de Lie del grupo de isometrías G_{Sch} , identificada como $\mathfrak{g}_{\text{Sch}} = \mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}$, también tienen una representación afín obtenida a partir de la versión diferencial de (3.169):

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T & \epsilon \\ \vec{0} & j(\vec{\omega}) & \vec{0} \\ 0 & \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.171)$$

donde $j(\vec{\omega})$, como ya comentamos en la sección anterior, es la matriz 3×3 definida a partir de la relación $j(\vec{\omega}) \cdot \vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x}$. Empleando las matrices (3.168) y (3.171) resulta fácil encontrar la acción adjunta de G_{Sch} sobre $\mathfrak{g}_{\text{Sch}}$,

$$\text{Ad}_\Lambda(\chi) = \text{Ad}_{(R, \epsilon_1)}(\vec{\omega}, \epsilon) = (\text{Ad}_R(\vec{\omega}), \epsilon) = (R \cdot \vec{\omega}, \epsilon), \quad (3.172)$$

así como su versión infinitesimal, i. e. el producto de Lie de esta álgebra,

$$[\chi_1, \chi_2] = [(\vec{\omega}_1, \epsilon_1), (\vec{\omega}_2, \epsilon_2)] = ([\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2], 0) = (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2, 0). \quad (3.173)$$

Los campos vectoriales de Killing asociados al álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\text{Sch}}$, vía los campos fundamentales generados por la acción (3.167) se expresan, entonces, como

$$\begin{aligned} \xi_\chi(x) &= \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}}(x) \Big|_{s=0} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^i {}^i_{jk} \omega^j x^k \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} + (c_\phi \omega_y - s_\phi \omega_x) \frac{\partial}{\partial \theta} + [\omega_z - ct_\theta (\omega_x c_\phi + \omega_y s_\phi)] \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (3.174)$$

donde $\epsilon^i {}^i_{jk}$, en la primera línea, son los símbolos alternantes de Levi-Civita, y donde, en la segunda línea, hemos introducido la notación $c_\phi = \cos(\phi)$, $s_\phi = \sin(\phi)$ y $ct_\theta = \cot(\theta)$.

Teniendo los campos vectoriales de Killing y el levantamiento cotangente de (3.109), en la variedad simpléctica $(T^*M, \Omega = dp_t \wedge dt + dp_r \wedge dr + dp_\theta \wedge d\theta + dp_\phi \wedge d\phi)$, podemos encontrar las hamiltonianas (3.24), para cada elemento $\chi \in \mathfrak{g}_{\text{Sch}}$:

$$\mu_\chi(t, r, \theta, \phi, p_t, p_r, p_\theta, p_\phi) = i_{\xi_\chi} p = \epsilon p_t + p_\theta (c_\phi \omega_y - s_\phi \omega_x) + [\omega_z - ct_\theta (\omega_x c_\phi + \omega_y s_\phi)] p_\phi. \quad (3.175)$$

Dada la simetría esférica de las hipervariedades riemannianas, a tiempo constante, del espaciotiempo de Minkowski, se puede deducir que las curvas geodésicas se mueven siempre en planos que contienen al centro de la distribución con masa³⁶ M_0 . Sin perder generalidad

³⁵Nuevamente hemos decidido parametrizar el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ con los vectores $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$.

³⁶Véase, por ejemplo, [61].

podemos tomar dicho plano como $\theta = \frac{\pi}{2}$, de tal manera que, sobre las curvas $\tau \mapsto \hat{\gamma}(\tau)$ en (T^*M, Ω) , soluciones de las ecuaciones de Hamilton (3.13) de la hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \left[-\frac{p_t^2}{R} + Rp_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right], \quad (3.176)$$

que se proyectan sobre las geodésicas de (M, g_{sch}) , las funciones (3.175) se ven como

$$\mu_\chi \circ \hat{\gamma} = \epsilon p_t + \omega_z p_\phi, \quad (3.177)$$

donde, por definición, p_t y p_ϕ son las cantidades conservadas asociadas, respectivamente, con las traslaciones temporales y con las rotaciones sobre el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ de la geodésica de la partícula, i. e. (el negativo de) la energía y la magnitud del momento angular de la partícula:

$$p_t = mg_{\text{Sch}_{tt}} U^t = -RU^t = -E, \quad (3.178)$$

$$p_\phi = mg_{\text{Sch}_{\phi\phi}} U^\phi \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = r^2 U^\phi = |\vec{L}|. \quad (3.179)$$

De la misma forma como en la sección anterior identificamos el álgebra de Lie del grupo de Poincaré, y su espacio vectorial dual, con un espacio vectorial, aquí podemos realizar la identificación $\mathfrak{g}_{\text{Sch}}^* \simeq \mathfrak{g}_{\text{Sch}} \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ en la forma $\chi = (\vec{\omega}, \epsilon)$ y $\alpha = (\vec{L}, \varepsilon)$ tal que $i_\chi \alpha = \varepsilon \epsilon + \vec{L} \cdot \vec{\omega}$. Al respecto de (3.175), el momentum map asociado al grupo de isometrías del espaciotiempo (M, g_{Sch}) , es de la forma

$$\mu(t, \vec{x}, p_t, \vec{p}) = \left(\vec{L}(\vec{x}, \vec{p}), p_t \right), \quad (3.180)$$

donde, de manera general, $\vec{L} \circ \hat{\gamma}(\tau)$ es el momento angular de la partícula [61], en concordancia con las expresiones (3.177) y (3.179).

Con respecto a las curvas geodésicas, que trazan las partículas libres y masivas en el espaciotiempo (M, g_{Sch}) , el sistema de ecuaciones (3.5), en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) , i. e. $\tau \mapsto \gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$, adopta la forma [62]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{r_s}{r^2 R} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{r_s R}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{r_s}{2r^2 R} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - rR \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2(\theta) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right) - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right) + 2 \cot(\theta) \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.181)$$

De la tercera ecuación podemos confirmar lo que los argumentos geométricos, basados en la simetría esférica, ya nos decían: una partícula que inicia con su velocidad tangente al plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ (sin perder generalidad) siempre se mantiene sobre dicho plano, lo que simplifica el

sistema anterior pasando de cuatro ecuaciones a sólo tres:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{r_s}{r^2 R} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{r_s R}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{r_s}{2r^2 R} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - rR \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.182)$$

A diferencia del caso plano del espaciotiempo de Minkowski, las geodésicas en el espaciotiempo (exterior) de Schwarzschild no son, en general, tan sencillas como líneas rectas³⁷. En particular podemos hablar de dos tipos de geodésicas, partículas en caída libre cayendo radialmente hacia la distribución y partículas en caída libre orbitando a la distribución. Enfoquémonos en un caso especial de órbita circular alrededor de la distribución central de masa, i. e. una geodésica de la forma $\gamma_c : \tau \mapsto (t(\tau), r(\tau) = r_0, \theta(\tau), \phi(\tau))$. La existencia de este tipo de geodésicas puede deducirse reescribiendo la hamiltoniana (3.176), evaluada siempre sobre geodésicas γ , en términos de las cantidades conservadas E y $|\vec{L}|$, como

$$H \circ \gamma = -\frac{E^2}{2m} + \frac{|\vec{L}|^2}{2mr^2} + \frac{Rp_r^2}{2m} = -\frac{m}{2},$$

que, tras realizar las identificaciones $p_r = \frac{m}{R} \frac{dr}{d\tau}$ y $\widehat{E} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$, puede terminarse por escribirse como la ecuación de *balance de energía*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{M}{r} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\ell^2}{2r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r) = \widehat{E}, \quad (3.183)$$

donde $e = E/m$ y $\ell = |\vec{L}|/m$ son, respectivamente, la energía y la norma de su momento angular, por unidad de masa. Analizando el potencial efectivo (véase el diagrama (3.7))

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\ell^2}{2r^2}, \quad (3.184)$$

podemos ver que tiene un mínimo finito dado por³⁸ [61]

$$r_0 = \frac{3r_s}{1 - [1 - 3(\frac{r_s}{\ell})^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.185)$$

³⁷Sobra decir que esto no tiene que ver con el empleo de un sistema de coordenadas curvilíneo como (t, r, θ, ϕ) , en contraposición de un sistema cartesiano (t, \vec{x}) , si no con la curvatura en (M, g_{Sch}) , i. e. el campo gravitacional generado por la distribución de masa esférica [61].

³⁸ $\frac{dV}{dr}|_{r=r_0} = \frac{M}{r_0^2} - \frac{\ell^2}{r_0^3} + \frac{3M\ell^2}{r_0^4} = 0$ tiene como soluciones, además de $r \rightarrow \infty$, dos valores finitos, r_0 dado por (3.185) y $r_1 = 3r_s / (1 + [1 - 3(\frac{r_s}{\ell})^2]^{\frac{1}{2}})$. No obstante, la órbita circular interna de radio r_1 es inestable, al contrario de la órbita circular externa de radio r_0 [61], que es la que preferimos utilizar aquí.

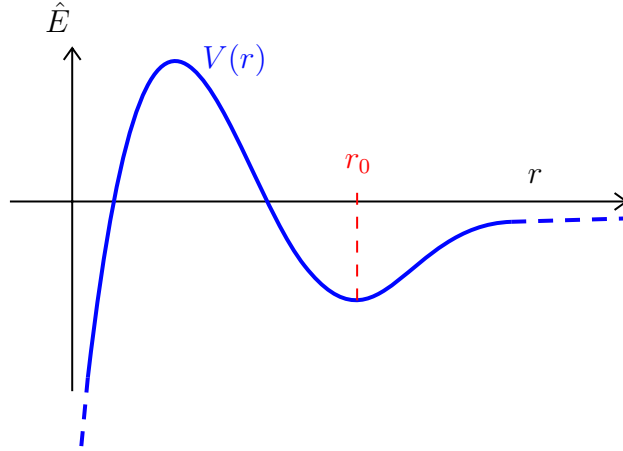


Figura 3.7: Potencial efectivo $V(r)$.

En cuanto a la forma específica de la geodésica circular, notemos que bajo las consideraciones $\frac{dr}{d\tau} = 0$ y $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$, las ecuaciones (3.182) se simplifican de tal forma que, tomando en cuenta además la restricción de capa de masa, se fija la curva γ_c en la forma

$$\gamma_c(\tau) = \left(\frac{\tau}{(1 - 3(\frac{r_s}{r_0}))^{\frac{1}{2}}}, r_0, \frac{\pi}{2}, \left(\frac{r_s}{2r_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{(1 - 3(\frac{r_s}{r_0}))^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (3.186)$$

donde, sin perder generalidad, hemos tomado la condición inicial $\gamma_c(0) = (0, r_0, \frac{\pi}{2}, 0)$. Vale la pena notar que invirtiendo la relación $t = t(\tau)$ y sustituyendo en $\phi = \phi(\tau)$ encontramos que un observador estático observa a la partícula en su geodésica, desplazándose sobre el círculo de radio r_0 en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, con velocidad angular constante, i. e. $\phi(t) = (\frac{r_s}{2r_0^3})^{\frac{1}{2}} t$. De esta manera la geodésica describe una curva helicoidal cuando encajamos el hiperplano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ en \mathbb{R}^4 y dejamos correr el tiempo (véase Fig.(3.8)),

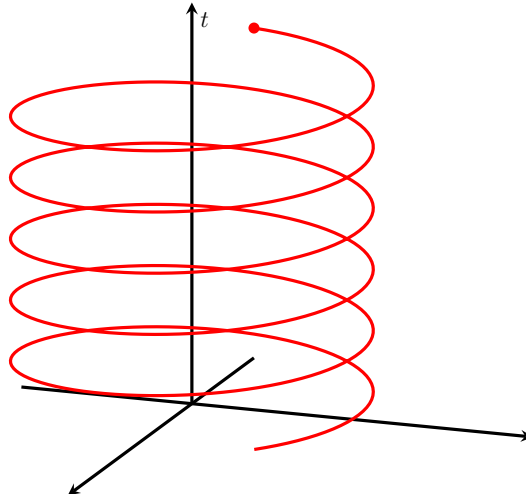


Figura 3.8: Descripción de γ_c hecha por un observador estático a través del tiempo t .

Si tomamos (3.186) como la geodésica γ_{box} de la caja, el tubo de mundo τ puede visualizarse como un cilindro helicoidal (la forma que tiene un muelle helicoidal), y los cortes Σ_0 a distintos tiempos son regiones que representan, precisamente, la región ocupada por la caja en su órbita circular:

$$\Sigma_0 = S_{\text{box}}. \quad (3.187)$$

Resulta interesante que para este caso todos estos cortes se ubican dentro del toroide $T_{S_{\text{box}}}^2$ generado al rotar la caja sobre el hiperplano ecuatorial (véase Fig.(3.9)). De esta manera no resulta complicado identificar el sugrupo de isometrías que dejan intacto el corte Σ_0 (bajo la relación de equivalencia, por supuesto) como el generado por las traslaciones temporales y las rotaciones en el hiperplano $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$G_{\text{Sch}_0} = \mathbb{R} \times S^1. \quad (3.188)$$

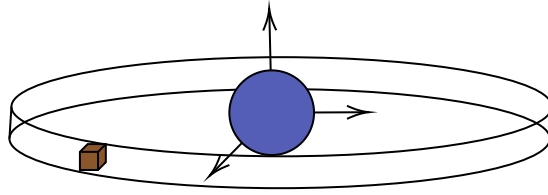


Figura 3.9: Toroide $T_{S_{\text{box}}}^2$.

Con respecto a los estados estáticos parametrizados por los vectores de Souriau de la forma $-\beta\chi_0 \in \mathfrak{g}_{\text{Sch}_0}$, las funciones de partición de una partícula (4.4) adoptan la forma

$$z(\beta) = 4\pi m^3 \int_{S_{\text{box}}} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) R^{-\frac{1}{2}}(r) k_1 \left(m\beta R^{\frac{1}{2}}(r) \right), \quad (3.189)$$

lo que nos permite reescribir la expresión (3.103) de las distribuciones de una partícula como

$$\rho(\beta; u) = \left[\int_{S_{\text{box}}} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) R^{-\frac{1}{2}}(r) k_1 \left(m\beta R^{\frac{1}{2}}(r) \right) \right]^{-1} \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{4\pi m^3} e^{-\beta R(r) E_\eta(u)}, \quad (3.190)$$

donde E_η es la energía (3.130) de la partícula si, en vez de la métrica g_{Sch} , estuviera la métrica de Minkowski de fondo.

Con respecto a la interpretación física de estos resultados, podemos utilizar la otra característica importante del espaciotiempo de Schwarzschild, y es que (M, g_{Sch}) es asintóticamente plano y, por lo tanto, podemos esperar que las expresiones (3.189) y (3.190) se reduzcan, en el límite $r \rightarrow \infty$ donde $R \rightarrow 1$, a las correspondientes expresiones del caso Jüttner modificado para el espaciotiempo de Minkowski en 4 dimensiones.

Para profundizar en la interpretación de $z(\beta)$ y $\rho(\beta; u)$, expandamos sus expresiones en potencias del radio de Schwarzschild r_s , para lo cual resulta conveniente definir el *parámetro de aplanamiento* ζ como la variable adimensional

$$\zeta = \frac{r_s}{r}, \quad (3.191)$$

tal que conforme $\zeta \rightarrow 0$, el espaciotiempo (M, g_{Sch}) tiende a *aplanarse*. Al respecto de este parámetro, aclaremos que sólo trabajaremos con él en el rango $0 < \zeta < 1$, es decir,

excluimos el valor $r = r_s$. Esto lo hacemos porque en dicho valor el campo vectorial de Killing tipo tiempo se anula,

$$\|\xi_0\|_{r=r_s} = R^{\frac{1}{2}}(r_s) = 0. \quad (3.192)$$

Más allá de tratarse de un problema local con las coordenadas que elegimos, podemos justificar esta omisión porque en el escenario astrofísico donde la solución exterior modela estrellas o planetas estáticos, el radio de Schwarzschild es mucho menor que el radio de la distribución de materia ($R_0 \gg r_s$) [61], es decir, el radio de Schwarzschild que le correspondería a la distribución se encuentra dentro de la misma, donde el espaciotiempo ya no es modelado por la solución exterior de Schwarzschild³⁹. Por otro lado, el caso astrofísico extremo de un agujero negro sólo puede ser estudiado por nuestro modelo justo en la región exterior a su horizonte de evento ($r = r_s$), donde existe el campo vectorial de Killing tipo tiempo ξ_0 .

Comencemos entonces por la serie de potencias de $z(\beta)$, donde identificamos el integrando de la integral $\int_{\Sigma_0} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta)(\dots)$ como

$$J(m\beta, \zeta) = \frac{K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta))}{m\beta(1-\zeta)}, \quad (3.193)$$

donde definimos la función

$$f_{\text{Sch}}(\zeta) = m\beta(1-\zeta)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.194)$$

La idea ahora es expandir (3.193) en una serie de potencias del *parámetro de aplanamiento* ζ , para lo cual encontramos conveniente realizar por separado las expansiones de $K_1(f_S(\zeta))$ y de $(1-\zeta)^{-1}$, para después multiplicarlas empleando el producto de Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n, \quad (3.195)$$

donde los coeficientes c_n se calculan como la convolución discreta [78]

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (3.196)$$

Encontrar la expansión en serie de potencias de ζ de la función $(1-\zeta)^{-1}$ resulta fácil pues basta recurrir a la definición de la serie geométrica,

$$(1-\zeta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n. \quad (3.197)$$

Por otro lado, para encontrar la expansión en serie de $K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta))$ no nos queda más que calcular su serie de Taylor alrededor de $\zeta = 0$, para lo cual nos conviene recurrir a la fórmula de Faá di Bruno [79] para la n -ésima derivada de una composición $(f_1 \circ f_2)^{(n)}(\zeta_0)$,

³⁹Para ver más acerca de las soluciones internas de Schwarzschild, véase [60].

adaptada al caso particular $\zeta_0 = 0$ como⁴⁰⁴¹ [80]:

$$(f_1 \circ f_2)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j}}{k!} \binom{k}{j} f_1^{(k)}(f_2(0)) f_2(0)^{k-j} (f_2^j)^{(n)}(0). \quad (3.198)$$

Proposición 3.5

Sea K_1 la función de Bessel modificada de segundo orden definida en (4.2) (para $\nu = 1$) y sea f_{Sch} la función en (3.194). Para $0 < \zeta < 1$, la expansión en serie de Taylor de la composición $K_1 \circ f_{\text{Sch}}(\zeta)$ está dada por

$$K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta)) = K_1(m\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n(m\beta) \zeta^n, \quad (3.199)$$

donde los coeficientes $\tilde{A}_n(1; m\beta)$ están dados por

$$\tilde{A}_n(m\beta) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \left[P_0(k, 1; m\beta) - P_1(k, 1; m\beta) \left(1 - \frac{\beta}{2} \langle E_\eta \rangle_\eta \right) \right], \quad (3.200)$$

para $\langle E_\eta \rangle_\eta = \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega |_{\mathcal{M}}(u) E_\eta(u) \rho_\eta(u)$, así como las cantidades

$$b_{n,k} = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+n} \binom{k}{j} \binom{j}{n}, \quad (3.201)$$

$$P_\kappa(k, \nu; \zeta_0) = \sum_{j_2=0}^k \sum_{j_1=0}^{j_2} \sum_{j_0=0}^{j_1-\kappa} a_\kappa(\nu, k, j_2, j_1, j_0) \zeta_0^{2j_0}, \quad (3.202)$$

$$a_\kappa = \frac{2^{-j_2+2j_1-2j_0} (-1)^{j_2+j_1+j_0} (-\nu)_{k-j_2}}{j_0! j_2! (k-j_2)! (j_2-j_1)!} \frac{(-j_2)_{2(j_2-j_1)} (\nu)_{j_1} (j_1-j_0-\kappa)!}{(1-j_1-\nu)_{j_0} (\nu)_{j_0+\kappa} (j_1-2j_0-\kappa)!}, \quad (3.203)$$

donde $(p)_k$ es el símbolo de Pochhammer definido de manera general como [77]

$$(p)_k = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)}, & p > 0, \\ (-1)^k \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p-k)}, & p < 0. \end{cases} \quad (3.204)$$

⁴⁰En [80] se da una expresión particular para los coeficientes que aparecen en la fórmula de Faá di Bruno (los polinomios incompletos de Bell), luego sólo hace falta sustituir para llegar a (3.198).

⁴¹ $\binom{k}{j}$ es el coeficiente binomial definido como [77]:

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-j+1)}{j!}$$

A partir de la serie de Taylor y la expresión (3.198), básicamente lo que tenemos que hacer es desarrollar la expresión

$$K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j}}{n!k!} \binom{k}{j} K_1^{(k)}(m\beta) (m\beta)^k ((1-\zeta)^{\frac{j}{2}})^{(n)}(0) \zeta^n$$

Comencemos por identificar la derivada n -ésima de $(1-\zeta)^{\frac{j}{2}}$, en $\zeta = 0$, como

$$((1-\zeta)^{\frac{j}{2}})^{(n)}(0) = (-1)^n n! \binom{\frac{j}{2}}{n},$$

lo que nos reduce $K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta))$, empleando (3.201), a

$$\begin{aligned} K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j}}{n!k!} \binom{k}{j} K_1^{(k)}(m\beta) (m\beta)^k (-1)^n n! \binom{\frac{j}{2}}{n} \zeta^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (m\beta)^k K_1^{(k)}(m\beta) \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{n+j} \binom{k}{j} \binom{\frac{j}{2}}{n} \right) \zeta^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (m\beta)^k K_1^{(k)}(m\beta) b_{n,k} \zeta^n. \end{aligned}$$

Con respecto a la derivada $K_1^{(k)}(m\beta)$, tenemos un par de propiedades de las funciones de Bessel modificadas (de segunda clase) que nos son de utilidad. La primera de ellas es la relación entre funciones vecinas [77]

$$K_{\nu-1}(\zeta) = K_{\nu+1}(\zeta) - \frac{2\nu}{\zeta} K_{\nu}(\zeta), \quad (3.205)$$

y la segunda es la expresión⁴²

$$\frac{d^k K_{\nu}}{d\zeta^k} = \frac{(-1)^k k!}{\zeta^k} \left[P_0(k, \nu; \zeta) K_{\nu}(x) + P_1(k, \nu; \zeta) \frac{\zeta}{2} K_{\nu-1}(\zeta) \right], \quad (3.206)$$

que emplea las cantidades definidas en (3.202) y (3.203). Gracias a estas dos propiedades de las funciones modificadas de Bessel (de segunda clase) obtenemos la expresión que buscábamos:

$$K_{\nu}^{(k)}(\zeta_0) = K_{\nu}(\zeta_0) \frac{(-1)^k k!}{\zeta_0^k} \left[P_0(k, \nu; \zeta_0) - \nu P_1(k, \nu; \zeta_0) \left(1 - \frac{\mathcal{E}(\nu; \zeta_0)}{2\nu} \right) \right], \quad (3.207)$$

donde hemos definido el cociente

$$\mathcal{E}(\nu; \zeta) = \zeta \frac{K_{\nu+1}(\zeta)}{K_{\nu}(\zeta)}. \quad (3.208)$$

De esta manera, sustituyendo (3.207) (con $\nu = 1$ y $\zeta_0 = m\beta$) en $K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta))$ llegamos a la expresión final

$$K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta)) = K_1(m\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_{n,k} \left[P_0(k, 1; m\beta) - P_1(k, 1; m\beta) \left(1 - \frac{\mathcal{E}(1; m\beta)}{2} \right) \right] \zeta^n,$$

⁴²Esta expresión es sólo un reacomodo de la identidad encontrada en la referencia [81].

la cual concuerda con (3.199) si identificamos los coeficientes $\tilde{A}_n(1; m\beta)$ como

$$\tilde{A}_n(m\beta) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \left[P_0(k, 1; m\beta) - P_1(k, 1; m\beta) \left(1 - \frac{\mathcal{E}(1; m\beta)}{2} \right) \right],$$

es decir, si $\mathcal{E}(1; m\beta) = \beta \langle E_\eta \rangle_\eta$. Efectivamente, este es el caso:

$$\mathcal{E}(1; m\beta) = \beta \langle E_\eta \rangle_\eta = \frac{\beta}{V} \int_{\Sigma_0} d^3x |\eta_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} E_\eta(\vec{x}), \quad (3.209)$$

y para verlo sólo hace falta emplear identidad $\frac{dk_\nu}{d\alpha} = -\alpha^{-\nu} K_{\nu+1}(\alpha)$ [77], i. e.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(1; m\beta) &= m\beta \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} = -\frac{1}{K_1(m\beta)} \frac{\partial}{\partial(m\beta)} (k_1(m\beta)) \\ &= -\frac{m\beta}{4\pi m^3 V k_1(m\beta)} \frac{\partial(4\pi m^3 V k_1(m\beta))}{\partial(m\beta)} = -\frac{m\beta}{z_\eta(\beta)} \frac{\partial z_\eta}{\partial(m\beta)} \\ &= -\frac{\beta}{z_\eta(\beta)} \frac{\partial}{\partial(m\beta)} \left(m \int_{\Sigma_0} d^3x |\eta_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3P}{P_0} e^{-m\beta E_\eta} \right) \\ &= \frac{\beta}{z_\eta(\beta)} \left(m \int_{\Sigma_0} d^3x |\eta_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3P}{P_0} e^{-m\beta E_\eta} E_\eta \right) \\ &= \frac{\beta}{V} \int_{\Sigma_0} d^3x |\eta_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} E_\eta(\vec{x}) = \beta \langle E_\eta \rangle_\eta. \quad \diamond \end{aligned}$$

Con respecto a los coeficientes \tilde{A}_n en (3.199) vale la pena mencionar que las cantidades $P_\kappa(k, \nu; \zeta_0)$ son polinomios en potencias pares de ζ_0 , de grado $2\lfloor \frac{k-\kappa}{2} \rfloor$, donde $\lfloor p \rfloor$ es la función piso de p , definida como el entero inmediatamente menor o igual a p [77]. En efecto, verificamos que estas P 's son polinomios porque los coeficientes a_κ que aparecen en ellas son cero para $j_0 > \frac{j_1 - \kappa}{2}$, pues son inversamente proporcionales a un factorial,

$$a_\kappa(\nu, k, j_2, j_1, j_0) \propto \frac{1}{(j_1 - 2j_0 - \kappa)!}.$$

Es así que la máxima potencia de ζ_0 en (3.202) es $2(\lfloor \frac{k-\kappa}{2} \rfloor)$. Tomando esto en cuenta, podemos calcular explícitamente el coeficiente $2j$ -ésimo de P_κ como:

$$\frac{1}{(2j)!} \frac{d^{2j} P_\kappa}{d\zeta_0^{2j}} \Big|_{\zeta_0=0} = \sum_{j_2=j+\kappa}^k \sum_{j_1=j+\kappa}^{j_2} a_\kappa(\nu, k, j_2, j_1, j). \quad (3.210)$$

Regresando al integrando (3.193), el producto de Cauchy (3.196) entre los coeficientes $a_n = 1$ y $b_n = \tilde{A}_n$ está dado por (véase la tabla Tab.(3.1) para ver los primeros 6 coeficientes)

$$A_n(m\beta) = \sum_{\ell=0}^n \tilde{A}_\ell(m\beta) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} b_{\ell,k} \left[P_0(k, 1; m\beta) - P_1(k, 1; m\beta) \left(1 - \frac{\beta}{2} \langle E_\eta \rangle_\eta \right) \right]. \quad (3.211)$$

de tal manera que la expansión de $J(m\beta, \zeta)$ en serie de potencias de ζ es de la forma

$$J(m\beta, \zeta) = k_1(m\beta) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m\beta) \zeta^n. \quad (3.212)$$

Introduciendo esta expansión en (3.189) encontramos el resultado que estábamos buscando: la función de partición de una partícula para el gas ideal en espaciotiempo de Schwarzschild puede expresarse en términos de la función de partición modificada de Jüttner, esto como una serie de potencias en el radio de Schwarzschild:

$$z(\beta) = z_\eta(\beta) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{A_n(m\beta)}{r^n} \right\rangle_\eta r_s^n \right], \quad (3.213)$$

donde, como ya mencionamos en la expresión $\langle E_\eta \rangle_\eta$, los paréntesis angulares con el subíndice η representan el cálculo de valores esperados con respecto a la distribución modificada de Jüttner de una partícula, cálculo que se simplifica para cualquier observable en T^*M que no depende de momentos p :

$$\langle f \rangle_\eta = \frac{1}{V} \int_{\Sigma_0} d^3x |\eta_S(\vec{x})| f(\vec{x}). \quad (3.214)$$

n	$A_n(m\beta)$
0	1
1	$\frac{1}{2}(1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta)$
2	$\frac{1}{8}(3 + 6\beta \langle E_\eta \rangle_\eta + m^2 \beta^2)$
3	$\frac{1}{48}(15 + 9m^2 \beta^2 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta (45 + m^2 \beta^2))$
4	$\frac{1}{384}(105 + 90m^2 \beta^2 + m^4 \beta^4 + 4\beta \langle E_\eta \rangle_\eta (105 + 4m^2 \beta^2))$
5	$\frac{1}{3840}(21(45 + 50m^2 \beta^2 + m^4 \beta^4) + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta (4725 + 234m^2 \beta^2 + m^4 \beta^4))$

Cuadro 3.1: Primeros 6 coeficientes $A_n(m\beta)$ en la expansión (3.212).

Continuando con la expansión de la función de distribución de probabilidad de una partícula, (3.190), notemos que la presencia de $1/z(\beta)$ nos lleva a plantearnos el cálculo de

la expansión en serie de potencias de ζ del inverso multiplicativo de una serie de potencias de ζ . Para esto empleamos la fórmula [78]

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n} = \sum_{n=0}^{\infty} J[a_n] \zeta^n, \quad (3.215)$$

válida para $a_0 \neq 0$, donde los coeficientes $J[a_n]$ se definen vía el determinante [78]

$$J[a_n] = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.216)$$

Proposición 3.5

Sea $\rho(\beta; u)$ la pdf de una partícula definida en (3.190), su expansión en serie de potencias del radio de Schwarzschild está dada por

$$\rho(\beta; u) = \rho_\eta(\beta; u) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(m\beta, r) r_s^n \right], \quad (3.217)$$

donde ρ_η es la distribución modificada de Jüttner (3.134), y donde los coeficientes $\mathcal{A}_n(m\beta, r)$ están dados, en términos de los coeficientes $A_\ell(m\beta)$ definidos en (3.211), por

$$\mathcal{A}_n(m\beta, r) = \sum_{\ell=0}^n J \left[\left\langle \frac{A_\ell(m\beta)}{r^\ell} \right\rangle_\eta \right] \frac{(\beta E_\eta)^{n-\ell}}{(n-\ell)! r^{n-\ell}}. \quad (3.218)$$

El cálculo presentado en esta proposición es bastante directo. Identificando la función de distribución de una partícula como $\rho(\beta; u) = \Theta_{\mathcal{M}}(u) e^{-\beta R E_\eta} / z(\beta)$, lo primero que debemos de hacer es expandir la exponencial $e^{-\beta(1-\zeta)E_\eta} = e^{-\beta E_\eta} e^{\beta \zeta E_\eta}$,

$$e^{-\beta(1-\zeta)E_\eta} = e^{-\beta E_\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta E_\eta)^n}{n!} \zeta^n,$$

para posteriormente calcular su producto de Cauchy con la serie de la función $1/z(\beta)$, la cual podemos calcular recurriendo a (3.215). Esto da lugar a los coeficientes (3.218) definidos en la convolución (3.196) (véase la tabla Tab.(3.2) para ver los primeros 3 coeficientes):

$$\mathcal{A}_n = \sum_{\ell=0}^n J \left[\left\langle \frac{A_\ell(m\beta)}{r^\ell} \right\rangle_\eta \right] \frac{(\beta E_\eta)^{n-\ell}}{(n-\ell)! r^{n-\ell}}. \quad \diamond$$

n	$\mathcal{A}_n(m\beta, r)$
0	1
1	$\frac{\beta E_\eta}{r} - \frac{1}{2} \langle r^{-1} \rangle_\eta (1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta)$
2	$\frac{\beta^2 E_\eta^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \frac{\langle r^{-1} \rangle_\eta}{r} \beta E_\eta (1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta)$ $+ \frac{1}{8} (2 \langle r^{-1} \rangle_\eta^2 (1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta)^2 - \langle r^{-2} \rangle_\eta (3 + 6\beta \langle E_\eta \rangle_\eta + m^2 \beta^2))$

Cuadro 3.2: Primeros 3 coeficientes $\mathcal{A}_n(m\beta, r)$ de la expansión (3.217).

Teniendo las expansiones en serie de potencias del parámetro de aplanamiento ζ , tanto de $z(\beta)$ como de $\rho(\beta)$, podemos ir un poco más allá y preguntarnos cómo se ven los valores esperados de observables en T^*M que no dependen de los momentos.

Proposición 3.5

Sea $f : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable que puede, o no, depender del parámetro r_s , y que supondremos también tiene una expansión en serie de potencias de r_s como

$$f(r_s; x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) r_s^n. \quad (3.219)$$

Su promedio con respecto a la distribución de una partícula (3.190), entendido como la integral

$$\langle f \rangle_\rho = \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u) f(r_s; \pi(u)) \rho(\beta; u), \quad (3.220)$$

se expande en serie de potencias del radio de Schwarzschild como

$$\langle f \rangle_\rho = \langle f_0 \rangle_\eta + \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_n \rangle_\eta r_s^n, \quad (3.221)$$

donde los coeficientes $F_n = F_n(m\beta; r, \theta, \phi)$ se definen como

$$F_n(m\beta; r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{f_{\ell-k}(r, \theta, \phi)}{r^k} \mathcal{A}_{n-\ell}(m\beta; r). \quad (3.222)$$

Sea $f = f(r_s; x)$ la mencionada función a promediar por medio de la expresión (3.220). Con respecto a dicha expresión, tomando la expansión en serie que encontramos para ρ ,

y anotándola como $\rho(\beta; u) = \rho_\eta(\beta; u)[\dots]_\eta$ para simplificar la notación, notemos que puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\langle f \rangle_\rho &= \frac{m}{z(\beta)} \int_{\Sigma_0} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) R^{-\frac{1}{2}}(r) f(r_s; r, \theta, \phi) [\dots]_\eta \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3P}{P^0} \rho_\eta \\ &= \frac{1}{V} \int_{\Sigma_0} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) R^{-\frac{1}{2}}(r) f(r_s; r, \theta, \phi) [\dots]_\eta,\end{aligned}$$

donde identificamos el integrando de la integral $\int_{\Sigma_0} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) (\dots)$ como

$$W(m\beta; r_s) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{r_s^n}{r^n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, \theta, \phi) r_s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(m\beta, r) r_s^n \right),$$

donde hemos expresado $(1 - \frac{r_s}{r})^{-\frac{1}{2}}$ como la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{r_s^n}{r^n}$ a partir del teorema binomial de Newton (recordando que $r_s < r$) [77]. En este punto sólo hace falta emplear el producto de Cauchy entre las primeras dos series,

$$W(m\beta; r_s) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{f_{n-k}(r, \theta, \phi)}{r^k} \right] r_s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(m\beta, r) r_s^n \right),$$

y volver a calcular el producto de Cauchy en las últimas dos series,

$$W(m\beta; r_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{f_{\ell-k}(r, \theta, \phi)}{r^k} \mathcal{A}_{n-\ell}(m\beta, r) \right) r_s^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(m\beta; r, \theta, \phi) r_s^n,$$

donde hemos empleado la definición (3.222). Regresando a la integral $\langle f \rangle_\rho$, y empleando la expresión (3.214) para los promedios con respecto a ρ_η , encontramos el resultado esperado:

$$\begin{aligned}\langle f \rangle_\rho &= \frac{1}{V} \int_{\Sigma_0} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) W(m\beta; r_s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{V} \int_{\Sigma_0} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) F_n(m\beta; r, \theta, \phi) \right) r_s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_n(m\beta) \rangle_\eta r_s^n. \quad \diamond\end{aligned}$$

En el caso ya sugerido donde la función f no depende del parámetro r_s , tal que $f(x) = f_0$ en la serie (3.219), notemos que los coeficientes F_n se simplifican en la forma

$$F_n(m\beta; r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{\ell} \frac{\mathcal{A}_{n-\ell}(m\beta, r)}{r^\ell} f(r, \theta, \phi) = \tilde{F}_n(m\beta; r,) f(r, \theta, \phi),$$

de tal manera que el promedio de f resulta en

$$\langle f \rangle_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \tilde{F}_n(m\beta) f \rangle_\eta. \quad (3.223)$$

Como un primer ejemplo muy sencillo consideremos que la caja se encuentra en su órbita circular, sobre el hiperplano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, con parámetro $r_0 \gg 1$ lo suficientemente

grande como para poder ubicar la caja aproximadamente entre las esferas anidadas con curvaturas gaussianas $\frac{1}{(r_0+\delta_r)^2}$ y $\frac{1}{(r_0-\delta_r)^2}$, así como entre los hiperplanos $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \delta\theta$, y los hiperplanos $\phi = \pm\delta\phi$, donde $\delta r \ll 1$, $\delta\theta \ll 1$ y $\delta\phi \ll 1$ (véase el diagrama (3.10)).

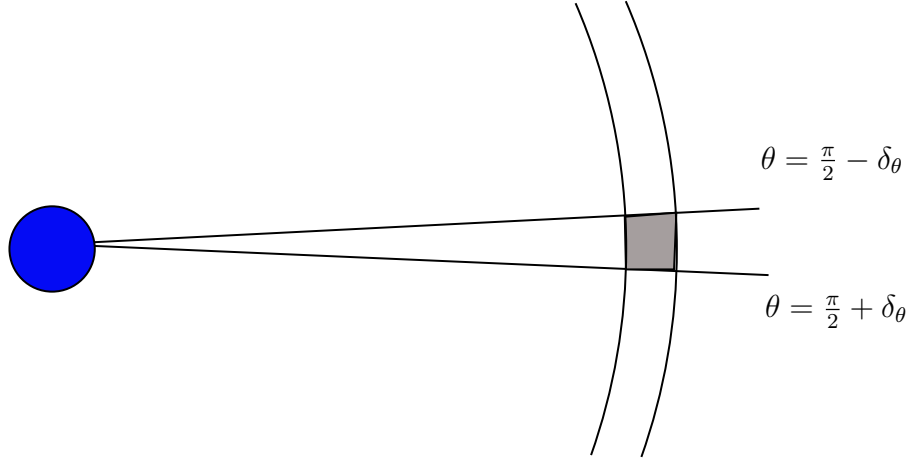


Figura 3.10: Aproximación de la caja para $r_0 \gg 1$

De esta manera los promedios (3.214) para r^n están dados, hasta órdenes lineales en $\delta\theta\delta\phi\delta r$, por

$$\left\langle \frac{1}{r^n} \right\rangle_\eta \approx \frac{1}{r_0^n}. \quad (3.224)$$

Para llegar al resultado (3.224) consideremos que el volumen V de la caja puede aproximarse como

$$V \approx 8\delta\phi\delta r\delta\theta r_0^2, \quad (3.225)$$

en efecto, haciendo el cambio de variable $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ en la integral $\int_{S_{\text{box}}} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta)(\dots)$,

$$\begin{aligned} V &= \int_{S_{\text{box}}} d^3x |\eta_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} = \int_{r_0-\delta r}^{r_0+\delta r} \int_{\frac{\pi}{2}-\delta\theta}^{\frac{\pi}{2}+\delta\theta} \int_{-\delta\phi}^{+\delta\phi} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) \\ &= \frac{4\delta\phi}{3} \sin(\delta\theta) ((r_0 + \delta r)^3 - (r_0 - \delta r)^3) \approx \frac{4\delta\phi\delta\theta}{3} (r_0^3 + 3r_0^2\delta r - r_0^3 + 3r_0^2\delta r) = 8\delta\phi\delta\theta\delta r r_0^2. \end{aligned}$$

De esta manera, para el caso $n \neq 3$, tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^n} \right\rangle_\eta &= \frac{1}{V} \int_{r_0-\delta r}^{r_0+\delta r} \int_{\frac{\pi}{2}-\delta\theta}^{\frac{\pi}{2}+\delta\theta} \int_{-\delta\phi}^{+\delta\phi} dr d\theta d\phi r^{2-n} \sin(\theta) = \frac{4\delta\phi \sin(\delta\theta)}{V} \frac{(r_0 + \delta r)^{3-n} - (r_0 - \delta r)^{3-n}}{3-n} \\ &\approx \frac{4\delta\phi \sin(\delta\theta)}{V(3-n)} [r_0^{3-n} + (3-n)r_0^{2-n}\delta r - r_0^{3-n} + (3-n)r_0^{2-n}\delta r] \approx \frac{8\pi\delta\phi\delta r\delta\theta r_0^2}{V r_0^n} = \frac{1}{r_0^n}, \end{aligned}$$

y para el caso particular $n = 3$, encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_\eta &= \frac{1}{V} \int_{r_0-\delta r}^{r_0+\delta r} \int_{\frac{\pi}{2}-\delta\theta}^{\frac{\pi}{2}+\delta\theta} \int_{-\delta\phi}^{+\delta\phi} dr d\theta d\phi r^{-1} \sin(\theta) \\ &= \frac{4\delta\phi \sin(\delta\theta)}{V} (\ln(r_0 + \delta r) - \ln(r_0 - \delta r)) = \frac{8\delta\phi\delta\theta\delta r}{V r_0} \approx \frac{8\delta\phi\delta\theta\delta r r_0^2}{V} \frac{1}{r_0^3} \approx \frac{1}{r_0^3}. \end{aligned}$$

En este escenario la expresión en serie (3.213) para la función de partición de una partícula se simplifica, como serie de potencias en $\zeta_0 = \frac{r_s}{r_0}$, a la forma

$$z(\beta) = z_\eta(\beta) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(m\beta) \zeta_0^n \right) = z_\eta(\beta) \mathfrak{A}_{\text{Sch}}(m\beta, \zeta_0), \quad (3.226)$$

donde, inspirados en la notación de (3.148), hemos definido (véase (3.11) para ver el comportamiento de $\mathfrak{A}_{\text{Sch}}$, truncado a varios órdenes en n , con respecto a β).

$$\mathfrak{A}_{\text{Sch}}(m\beta, \zeta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m\beta) \zeta_0^n. \quad (3.227)$$

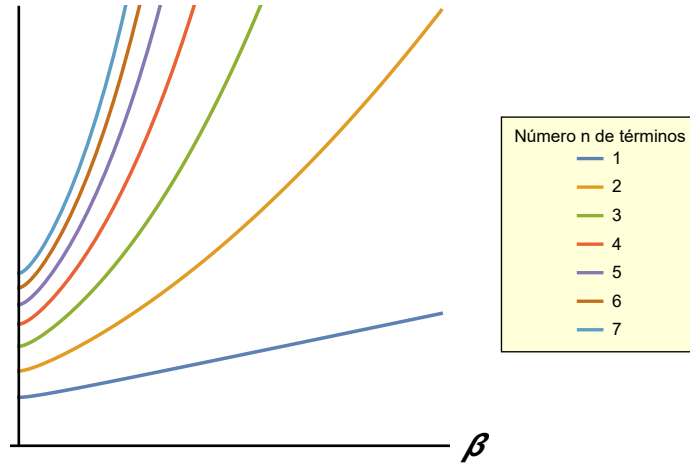


Figura 3.11: Truncamiento de $\mathfrak{A}_{\text{Sch}}$ como funciones de β para $\zeta_0 = 0.8$.

A partir de las expresiones (3.213), (3.217) y (3.221) podemos realizar el análisis del efecto de la curvatura del espaciotiempo con respecto al fondo plano de Minkowski: como esperábamos, conforme $r \rightarrow \infty$ y $\zeta \rightarrow 0$, en las mencionadas series sólo sobreviven las potencias más pequeñas en r_s y recuperamos la estadística modificada de Jüttner. En este sentido, lo mismo pasa con la norma del campo vectorial de Killing, que tiende al valor β que en su momento identificamos como la temperatura de un observador estático comóvil con el gas, en un espaciotiempo de Minkowski. Con esto en mente proponemos definir una función de temperatura generalizada que, al menos en espaciotiempos estáticos y asintóticamente planos, tienda a la temperatura relativista de un gas ideal:

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = \frac{1}{\|\xi_\beta(\vec{x})\|} = |g_{00}(\vec{x})|^{-\frac{1}{2}} T. \quad (3.228)$$

Esta *temperatura* reproduce (con la excepción quizá de constantes de proporcionalidad adecuadas) el llamado efecto Ehrenfest-Tolman en un espaciotiempo estático, que a muy grandes rasgos establece que la temperatura a lo largo de un cuerpo, en un estado térmico de equilibrio, no es uniforme en presencia de un campo gravitacional⁴³ [82].

Proposición 3.5

La función de temperatura generalizada (3.228) definida sobre el espaciotiempo (M, g_{Sch}) y en el rango $r > r_s$, es estática, esféricamente simétrica y tiende asintóticamente a T . Además aumenta conforme nos acercamos a la distribución de materia, de manera proporcional a M_0 :

$$\frac{\text{grad}\mathcal{T}(r)}{\mathcal{T}(r)} = -\frac{M_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3.229)$$

El hecho de que \mathcal{T} sea estática es una consecuencia de la definición hecha, válida para espaciotiempos estáticos, a través de la componente $g_{00}(\vec{x})$ del tensor métrico. En particular, para el espaciotiempo de Schwarzschild

$$\mathcal{T}(r) = R^{-\frac{1}{2}}(r)T = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} T, \quad (3.230)$$

de donde resulta claro que \mathcal{T} es una función con simetría esférica tal que, recordando la definición de la coordenada r como la raíz cuadrada de la curvatura gaussiana de una familia anidada de esferas (centrada en la distribución esférica de radio R_0 y masa M_0), $\mathcal{T}(r)$ es constante sobre cada una de estas esferas anidadas, y tiende a T conforme nos situamos en esferas más y más externas,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{T}(r) = T.$$

Con respecto al gradiente (3.229) tenemos

$$\frac{\text{grad}\mathcal{T}(r)}{\mathcal{T}(r)} = \frac{g_{\text{Sch}}^{rr}}{\mathcal{T}(r)} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{R}{R^{-\frac{1}{2}}(r)T} \frac{\partial}{\partial r} \left(R^{-\frac{1}{2}}(r)T \right) \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{r_s}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{M_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}. \quad \square$$

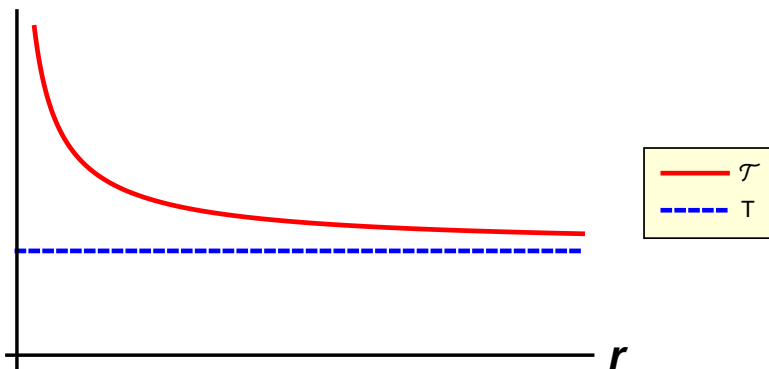


Figura 3.12: Gráfica para el comportamiento asintótico de $\mathcal{T}(r)$.

⁴³Una deducción de este fenómeno basada en la idea del tiempo termal, i. e. la idea de la temperatura como *velocidad del tiempo*, puede encontrarse en [27].

Consideremos ahora otro tipo de vectores de Souriau, valiéndonos del argumento que dimos en la proposición (3.3): siendo $-\beta\chi_0$ ($\beta > 0$) un vector de Souriau, cualquier elemento en su vecindad (3.93) también es un vector de Souriau, pues basta encontrar un subconjunto abierto en \mathcal{U}_β que contenga a dicho vector. En particular consideremos el generador de rotaciones sobre el hiperplano $\theta = \frac{\pi}{2}$, que denotaremos como $\chi_\phi \in \mathfrak{g}_{\text{Sch}_0}$ tal que

$$\Psi_{e^{\omega\chi_\phi}} : (t, r, \theta, \phi) \mapsto (t, r, \theta, \phi + \omega), \quad (3.231)$$

y con él construyamos el vector de Souriau

$$\chi = -\beta\chi_0 + \epsilon\omega\chi_\phi, \quad (3.232)$$

con campo de Killing asociado (por linealidad)

$$\xi_\chi = \xi_\beta + \epsilon\omega\xi_{\chi_\phi} = -\beta\frac{\partial}{\partial t} + \epsilon\omega\frac{\partial}{\partial\phi}. \quad (3.233)$$

Recordemos que, siendo el parámetro $\epsilon \ll 1$ muy pequeño, todos los cálculos donde se vea involucrado pueden restringirse hasta órdenes lineales. De esta manera al agregarle el campo vectorial $\epsilon\omega\frac{\partial}{\partial\phi}$ a ξ_β , el campo vectorial de Killing (3.233) sigue siendo tipo tiempo,

$$\|\xi_\chi\|^2 \approx \|\xi_\beta\|^2 < 0,$$

que apunta al pasado,

$$g(\vec{x})(\xi_\chi, \xi_0) = \beta|g_{00}(\vec{x})| = \beta R(r) > 0.$$

Tomando en cuenta el argumento de expandir hasta términos lineales las expresiones que contengan a ϵ , notemos que la función de partición de una partícula $z(\chi) = z(\beta, \omega)$ sigue siendo $z(\beta)$,

$$z(\beta, \omega) = 4\pi m^3 \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_{\text{Sch}_S}}(\vec{x}) k_1(m\|\xi_\chi\|(\vec{x})) \approx 4\pi m^3 \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_{\text{Sch}_S}}(\vec{x}) k_1(m\|\xi_\beta\|(\vec{x})) = z(\beta),$$

por lo que la única aportación de ω en la expresión $\rho(\chi; u) = \rho(\beta, \omega; u)$ proviene del momentum map

$$\mu_\chi = \beta E + \epsilon\omega L_z,$$

más específicamente, de la exponencial $e^{-\mu_\chi} = e^{-\beta E} e^{-\epsilon\omega L_z} \approx e^{-\beta E} (1 - \epsilon\omega L_z)$, es decir

$$\rho(\beta, \omega; u) = \rho(\beta; u)(1 - \epsilon\omega L_z(u)). \quad (3.234)$$

Dado que tanto $\rho(\beta, \omega; u)$ como $\rho(\beta; u)$ son estados estáticos con respecto a la medida de Liouville λ_ω del espacio medible $(T^*M, \mathfrak{B}(T^*M))$, de la expresión (3.234) concluimos que, al menos para $\epsilon\omega \ll 1$, el valor esperado de la componente L_z del momento angular, con respecto a la distribución $\rho(\beta; u)$, es cero:

$$\langle L_z \rangle_\rho = 0. \quad (3.235)$$

En efecto,

$$1 = \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u) \rho(\beta, \omega; u) = \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u) \rho(\beta; u) (1 - \omega L_z(u)) = 1 - \epsilon\omega \langle L_z \rangle_\rho$$

Identificando al menos un subconjunto de $\mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot}$ como la franja

$$\{-\beta\chi_0 + \epsilon\omega\chi_\phi\}_{\epsilon \ll 1} \subset \mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot}, \quad (3.236)$$

podemos calcular las funciones $\mathcal{E} : \mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot} \rightarrow \mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot}^*$ y $\mathcal{S} : \mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot} \rightarrow \mathbb{R}$ restringidas sobre (3.236), tomando en cuenta que sobre dicha franja $z(\beta, \omega) \simeq z(\beta)$, i. e. $\mathcal{E}(\beta, \epsilon\omega) \simeq \mathcal{E}(\beta)$ y $S(\beta, \epsilon\omega) \simeq S(\beta)$. A su vez, podemos expresar $\mathcal{E}(\beta)$ y $S(\beta)$ en términos de $\mathcal{E}_\eta(\beta)$ y $S_\eta(\beta)$, respectivamente, como series de potencias en r_s , para lo cual introducimos la notación

$$z(\beta) = z_\eta(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{A_n(m\beta)}{r^n} \right\rangle_\eta r_s^n = z_\eta(\beta) \mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta). \quad (3.237)$$

Proposición 3.5

Las restricciones de las funciones de energía $\mathcal{E} : \mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot} \rightarrow \mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot}^*$ (2.55) y entropía $S : \mathfrak{g}_{\text{Sch}_\odot} \rightarrow \mathbb{R}$ (2.56), a la franja (3.236), para la función de partición del gas ideal con función de partición de una partícula (3.213), están dadas por

$$\mathcal{E}(\beta) = \mathcal{E}_\eta(\beta) + \frac{N}{\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{d\beta}{r^n} B_n(m\beta) \right\rangle_\eta r_s^n, \quad (3.238)$$

$$S(\beta) = S_\eta(\beta) + N \ln(\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)) + \frac{N}{\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{\beta}{r^n} B_n(m\beta) \right\rangle_\eta r_s^n, \quad (3.239)$$

donde los coeficientes $B_n(m\beta)$ se definen como

$$B_n(m\beta) = m\hat{A}_n(m\beta) + \frac{\langle E_\eta \rangle_\eta}{2} \left[2 - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{K_2(m\beta)} + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta \right] Q_n(m\beta), \quad (3.240)$$

$$\hat{A}_n(m\beta) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} b_{\ell,k} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[P_0(k, 1; \zeta) - P_1(k, 1; \zeta) \left(1 - \frac{\beta}{2} \langle E_\eta \rangle_\eta \right) \right]_{\zeta=m\beta}, \quad (3.241)$$

$$Q_n(m\beta) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} b_{\ell,k} P_1(k, 1; m\beta). \quad (3.242)$$

Para obtener los resultados (3.238) y (3.239) actuemos de la misma forma en que actuamos en la proposición (3.7), es decir, para calcular \mathcal{E} es necesario obtener el logaritmo natural de $Z(\beta) = \frac{z^N}{N!} = \frac{z_\eta^N(\beta) \mathfrak{F}_{\text{Sch}}^N(\beta)}{N!}$ y calcular su derivada exterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\beta) &= D \ln \left(\frac{z_\eta^N(\beta)}{N!} \right) + ND \ln(\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)) \\ &= D \ln(Z_\eta(\beta)) + \frac{N}{\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)} D \mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta) = \mathcal{E}_\eta(\beta) + \frac{N}{\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{r^n} \frac{\partial A_n}{\partial \beta} \right\rangle_\eta r_s^n d\beta, \end{aligned}$$

donde identificamos $\frac{\partial A_n}{\partial \beta}$, de acuerdo con la definición (3.241), como

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n}{\partial \beta} &= m \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} b_{\ell,k} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[P_0(k, 1; \zeta) - P_1(k, 1; \zeta) \left(1 - \frac{\beta}{2} \langle E_\eta \rangle_\eta \right) \right]_{\zeta=m\beta} \\ &\quad + \left(\sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} b_{\ell,k} \frac{P_1(k, 1; m\beta)}{2} \right) \left(\langle E_\eta \rangle_\eta + \beta \frac{d}{d\beta} \langle E_\eta \rangle_\eta \right) \\ &= m \hat{A}_n(m\beta) + \langle E_\eta \rangle_\eta \left(\sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} b_{\ell,k} \frac{P_1(k, 1; m\beta)}{2} \right) \left(1 + \beta \frac{d}{d\beta} \ln(\langle E_\eta \rangle_\eta) \right). \end{aligned}$$

Ahora, identificando $\ln(\langle E_\eta \rangle_\eta) = \ln(m^2) + \ln(\beta) + \ln(k_2(m\beta)) - \ln(k_1(m\beta))$,

$$\beta \frac{d}{d\beta} \ln(\langle E_\eta \rangle_\eta) = 1 - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{(m\beta)^2 k_2(m\beta)} + m\beta \frac{K_2(m\beta)}{m\beta k_1(m\beta)} = 1 - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{K_2(m\beta)} + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta,$$

y aplicando la definición (3.242), obtenemos,


$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n}{\partial \beta} &= m \hat{A}_n(m\beta) + \frac{\langle E_\eta \rangle_\eta}{2} \left(\sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} b_{\ell,k} P_1(k, 1; m\beta) \right) \left[2 - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{K_2(m\beta)} + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta \right] \\ &= m \hat{A}_n(m\beta) + \frac{\langle E_\eta \rangle_\eta}{2} \left[2 - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{K_2(m\beta)} + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta \right] Q_n(m\beta) = B_n(m\beta), \end{aligned}$$

y, efectivamente, la expresión (3.238):

$$\mathcal{E}(\beta) = \mathcal{E}_\eta(\beta) + \frac{N}{\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{d\beta}{r^n} B_n(m\beta) \right\rangle_\eta r_s^n.$$

Con respecto a la entropía $S(\beta)$, basta evaluar la expresión que obtuvimos para $\mathcal{E}(\beta)$ en $-\chi = \beta\chi_0 - \omega\chi_\phi$ y sumarle $\ln(Z(\beta))$,

$$S(\beta) = \ln(Z_\eta(\beta)) - i_\chi D(\ln(Z_\eta(\beta))) + N \ln(\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)) + \frac{N}{\mathfrak{F}_{\text{Sch}}(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{\beta}{r^n} B_n(m\beta) \right\rangle_\eta r_s^n,$$

donde identificando $\ln(Z_\eta(\beta)) - i_\chi D(\ln(Z_\eta(\beta))) = S_\eta(\beta)$, obtenemos efectivamente la expresión buscada. 

Con respecto a los coeficientes $B_n(m\beta)$, véase la tabla (3.3) para conocer los primeros 5 coeficientes.

n	$B_n(m\beta)$
0	0
1	$\frac{1}{2}\langle E_\eta \rangle_\eta \left(2 - m\beta \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta \right)$
2	$\frac{1}{4} \left(m^2\beta + 3\langle E_\eta \rangle_\eta \left(2 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{K_2(m\beta)} \right) \right)$
3	$\frac{1}{24} \left((9 + \langle E_\eta \rangle_\eta)m^2\beta^2 + \frac{\langle E_\eta \rangle_\eta}{2} (m^2\beta^2 + 45) \left(2 - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{K_2(m\beta)} + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta \right) \right)$
4	$\frac{1}{3840} \left[\langle E_\eta \rangle_\eta \left(2 - m\beta \frac{K_3(m\beta)}{K_2(m\beta)} + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta \right) (4725 + 234m^2\beta^2 + m^4\beta^4) \right]$ $\frac{2m^2\beta}{1920} [525 + 21m^2\beta^2 + (117 + m^2\beta^2) \beta \langle E_\eta \rangle_\eta]$

Cuadro 3.3: Primeros 5 coeficientes $B_n(m\beta)$ en las expansiones (3.238) y (3.239).

CAPÍTULO

4

CONCLUSIONES

En este trabajo mostramos que la influencia de la curvatura de un espaciotiempo de fondo, en un sistema simple de muchas partículas, como un gas ideal diluido, puede introducirse en la teoría clásica de la mecánica estadística a través de las herramientas de la geometría simpléctica y de la llamada termodinámica de Grupos de Lie. En este sentido la conexión con el espaciotiempo se da a través de la naturaleza de una partícula libre y de su trayectoria como una geodésica tipo tiempo, y es formalmente introducida en la forma en que construimos el espacio fase como una región del haz cotangente total del sistema, vía la restricción de capa de masa. En este sentido el mismo tensor métrico aparece a lo largo de la teoría en diferentes expresiones, tanto en la norma de los campos vectoriales de Killing como generadores de las simetrías del sistema, como en la medida empleada para el modelo estadístico. Al respecto de las simetrías del sistema, esta es otra forma en que la influencia del espaciotiempo se hace presente a través de su grupo de isometrías, que da lugar a la aparición del momentum map como una generalización del concepto de energía como una cantidad conservada para una partícula libre.

El concepto utilizado por Souriau et al para definir el estado estadístico de un sistema hamiltoniano de muchas partículas, cuya generalidad nos permite emplearlo en toda clase de modelos, resultó crucial en la formulación presentada en este trabajo. En este sentido consideramos que el presente trabajo generaliza los sistemas en relatividad especial estudiados por el mismo Souriau, al régimen de la relatividad general.

Otro ingrediente fundamental en nuestro modelo lo obtuvimos al restringir nuestro análisis sólo a espaciotiempos estáticos, en donde aprovechamos su rica estructura geométrica para definir una familia de observadores estáticos que nos ayudara a interpretar la generalización, hasta el momento matemática, de la distribución de Gibbs. Así ganamos la intuición física necesaria para generalizar los conceptos de tiempo global y energía, y con ellos definir el concepto de equilibrio estático.

Los ejemplos de gases ideales en espaciotiempos estáticos, es decir, los gases ideales en Minkowski y en Schwarzschild, resultaron, además de esclarecedores para exponer los distintos elementos de la teoría estadística que desarrollamos, interesantes en su propio

sentido. Mientras que en Minkowski recuperamos conceptos anteriormente reportados en la teoría cinética relativista, como la aparición de la distribución modificada de Jüttner, vale la pena recalcar que también logramos dotar de una naturaleza geométrica a los parámetros de la distribución. Dicha interpretación geométrica nos permitió, además, ahondar en otra clase de estados de equilibrio estático, como aquellos caracterizados por una mezcla de generadores de traslaciones en el tiempo y rotaciones. Estudiamos esta *distribución de Jüttner modificada con rotaciones* en términos de la distribución de Jüttner modificada, y logramos caracterizar la desviación entre el comportamiento de ambas distribuciones en términos del valor esperado de la exponencial del momento angular de las partículas.

El caso de Schwarzschild presentó un mayor reto debido a su propia naturaleza curva, a diferencia del espaciotiempo de Minkowski, pero aprovechando que es asintóticamente plano, basándonos en lo aprendido para Minkowski, logramos obtener expresiones para los distintos elementos estadísticos del modelo (función de partición, distribución, valores esperados, funciones de entropía y energía, etc.) como series de potencias, a todos los órdenes, en el parámetro que mide la desviación entre Schwarzschild y Minkowski, el radio de Schwarzschild. En este sentido logramos caracterizar la desviación entre un espaciotiempo plano y uno curvo y asintóticamente plano, de manera exacta y a todo orden de precisión. Similarmente al caso de Minkowski, también presentamos otro ejemplo de estado de equilibrio estático caracterizado por una mezcla de traslaciones en el tiempo y *rotaciones pequeñas*.

Después de haber analizado los casos estáticos de Minkowski y Schwarzschild, definimos una función de temperatura con las características de tender a la temperatura que parametriza a todas las distribuciones de Jüttner (modificadas o no) en un gas ideal relativista en ausencia de campos gravitacionales, cuando el espaciotiempo sea asintóticamente plano, y de además reproducir el llamado efecto Tolman-Ehrenfest. Específicamente para Schwarzschild analizamos cómo se ve y cómo se comporta esta función, encontrando resultados consistentes.

Finalmente nos queda, como trabajo a futuro, estudiar estos sistemas simples de gases ideales diluidos orbitando espaciotiempos más generales como agujeros negros con momento angular y momento angular con carga eléctrica, es decir, en el exterior de las soluciones de Kerr y Kerr-Newman. Aquí resulta importante hacer la mención de que estos espaciotiempos precisan que generalizemos el concepto de estado de equilibrio estático a estado de equilibrio estacionario, dado que estos espaciotiempos presentan efectos de *frame-dragging*.

Parte III

Material complementario

APÉNDICE: FUNCIÓN DE PARTICIÓN DE UNA PARTÍCULA

Proposición 4.0

La función de partición de una partícula (3.95) evaluada en un vector de Souriau $\chi \in \mathfrak{g}_*$ puede expresarse como una integral sólo sobre el corte Σ_0 como

$$z(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\pi m)^{\frac{d+1}{2}}}{\pi k!} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) \xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})^{\frac{1-d}{2}} \left(\frac{m \|\vec{\xi}_{\chi}(\vec{x})\|^2}{2\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})} \right)^k K_{k+\frac{d-1}{2}}(m\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})), \quad (4.1)$$

donde K_{ν} es la función de Bessel modificada de segundo orden, definida como [77]

$$K_{\nu}(w) = \left(\frac{w}{2}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^{\infty} d\zeta e^{-w\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

para las funciones Γ definidas, sobre valores reales no negativos, como [77]

$$\Gamma(w) = \int_0^{\infty} d\zeta e^{-\zeta} \zeta^{w-1}. \quad (4.3)$$

En particular si $\chi \in \mathfrak{g}_*$ es tal que su campo vectorial de Killing asociado $\xi_{\chi} \in \mathfrak{X}(M)$ es tipo tiempo, la expresión (4.1) se simplifica a

$$z(\chi) = 2m^d (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) k_{\frac{d-1}{2}}(m\|\xi_{\chi}\|(x)), \quad (4.4)$$

donde $k_{\nu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función real dada por el cociente

$$k_{\nu}(w) = \frac{K_{\nu}(w)}{w^{\nu}}. \quad (4.5)$$

La demostración de la expresión (4.1) para la función de partición de una partícula se obtiene al calcular la integral de momentos $I(\vec{x}; \chi)$ que aparece en $z(\chi) = m \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) I(\vec{x}; \chi)$, es decir, resolviendo

$$I(\vec{x}; \chi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P(\vec{x})}{P(\vec{x})^{\mathbf{0}}} e^{-P(\vec{x})^{\mathbf{0}} \xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})} e^{-\vec{P}(\vec{x}) \cdot \vec{\xi}_{\chi}(\vec{x})}, \quad (4.6)$$

donde $P(\vec{x})^0$, como función de $(P^1(\vec{x}), \dots, P^d(\vec{x}))$, está dada por la expresión (3.86). La integral (4.6) la podemos resolver haciendo el cambio de coordenadas cartesianas P 's a coordenadas hiperesféricas¹, $(P^1, \dots, P^d) \mapsto (\|\vec{P}\|, \phi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-2})$, dado por²

$$\begin{aligned} P^1 &= \|\vec{P}\| \cos(\theta_1), \\ P^2 &= \|\vec{P}\| \sin(\theta_1) \cos(\theta_2), \\ &\vdots \\ P^{d-1} &= \|\vec{P}\| \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{d-2}) \cos(\phi) \\ P^d &= \|\vec{P}\| \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{d-2}) \sin(\phi), \end{aligned}$$

donde $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$ y $0 \leq \|\vec{P}\| < +\infty$ [83]. Calculando la jacobiana de la transformación anterior, podemos cerciorarnos que el elemento de volumen en la integral (4.6) se transforma como

$$d^d P = d\|\vec{P}\| \|\vec{P}\|^{d-1} \prod_{i=1}^{d-2} (\sin(\theta_i))^{d-1-i} d\theta_i d\phi,$$

lo que nos permite reexpresar la integral $I(\vec{x}; \chi)$ como

$$\begin{aligned} I(\vec{x}; \chi) &= 2\pi \int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d-1} e^{-P^0 \xi_\chi^0} \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2}(\theta_1) e^{-\|\vec{P}\| \|\vec{\xi}_\chi\| \cos(\theta_1)} \\ &\quad \int_0^\pi d\theta_2 \sin^{d-3}(\theta_2) \int_0^\pi d\theta_3 \sin^{d-4}(\theta_3) \int_0^\pi d\theta_4 \sin^{d-5}(\theta_4) \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2} \sin(\theta_{d-2}), \end{aligned}$$

donde la integral sobre ϕ se resuelve trivialmente como 2π , y donde, sin perder generalidad, hemos dispuesto que sea θ_1 el ángulo entre los vectores \vec{P} y $\vec{\xi}_\chi$, i. e. $\vec{P} \cdot \vec{\xi}_\chi = \|\vec{P}\| \|\vec{\xi}_\chi\| \cos(\theta_1)$. En este punto resulta útil considerar la integral definida³

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (\sin(\theta))^{2z-1} (\cos(\theta))^{2w-1}, \quad (4.7)$$

a partir de la cual podemos resolver las $d-3$ integrales de la forma $\int_0^\pi d\theta_k \sin^{d-1-k}(\theta_k)$ que aparecen en I , mediante el cambio de variable $\alpha_k = \theta_k - \frac{\pi}{2}$, i. e.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta_k \sin^{d-1-k}(\theta_k) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha_k \sin^{d-1-k}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha_k \cos^{d-1-k}(\alpha_k) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha_k (\cos(\alpha_k))^{2\left(\frac{d-k}{2}\right)-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-k+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

¹Este método está basado en que emplea en [29] para resolver una integral muy similar en un contexto distinto de teoría cinética relativista.

²Hemos tomado $P(\vec{x})^i = P^i$ para aligerar la notación.

³La expresión dada no es más que la igualdad entre dos identidades de la llamada función beta, i. e. $B(z, w) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (\sin(\theta))^{2z-1} (\cos(\theta))^{2w-1}$ (por definición) y $B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ para $z, w > 0$ (integrando por partes la definición) [77].

de tal forma que en I sólo nos restan dos integrales,

$$\begin{aligned}
I(\vec{x}; \chi) &= 2\pi \int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d-1} e^{-P^0 \xi_x^0} \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2}(\theta_1) e^{-\|\vec{P}\| \|\vec{\xi}_x\| \cos(\theta_1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-2}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-3}{2})}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} \dots \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \\
&= \frac{2\pi\Gamma(\frac{1}{2})^{d-3}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d-1} e^{-P^0 \xi_x^0} \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2}(\theta_1) e^{-\|\vec{P}\| \|\vec{\xi}_x\| \cos(\theta_1)} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d-1} e^{-P^0 \xi_x^0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \cos^{d-2}(\theta) e^{\|\vec{P}\| \|\vec{\xi}_x\| \sin(\theta)},
\end{aligned}$$

donde, al pasar a la última línea, hemos usado el conocido valor $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$ [77] y aplicado el cambio de variable $\theta = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$. Con respecto a la integral en θ , realizando la expansión en serie de Taylor-MacLaurin para e^u con $u = \|\vec{P}\| \|\vec{\xi}_x\| \sin(\theta)$, esta integral puede expresarse como una serie de integrales de la forma (4.7), donde sólo sobreviven las potencias pares debido a que la región de integración es simétrica respecto al cero, i. e.

$$\begin{aligned}
I(\vec{x}; \chi) &= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d-1} e^{-P^0 \xi_x^0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \cos^{d-2}(\theta) \sum_{k=0}^\infty \frac{\|\vec{P}\|^k \|\vec{\xi}_x\|^k}{k!} \sin^k(\theta) \\
&= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{k=0}^\infty \frac{\|\vec{\xi}_x\|^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d+2k-1} e^{-P^0 \xi_x^0} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{2(k+\frac{1}{2})-1}(\theta) \cos^{2(\frac{d-1}{2})-1}(\theta) \\
&= 2\pi^{\frac{d-1}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\|\vec{\xi}_x\|^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d+2k-1} e^{-P^0 \xi_x^0}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para resolver la última integral en $\|\vec{P}\|$, vale la pena considerar el cambio de variable $\zeta = \frac{P^0}{m} = \frac{(m^2 + \|\vec{P}\|^2)^{\frac{1}{2}}}{m}$, para posteriormente emplear la definición (4.2) de las funciones de Bessel modificadas de segundo orden:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d\|\vec{P}\|}{P^0} \|\vec{P}\|^{d+2k-1} e^{-P^0 \xi_x^0} &= m^{2k-1+d} \int_1^\infty d\zeta e^{-(m\xi_x^0)\zeta} (\zeta^2 - 1)^{(k+\frac{d-1}{2})-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2m}{\xi_x^0}\right)^{k+\frac{d-1}{2}} \frac{\Gamma(k+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} K_{k+\frac{d-1}{2}}(m\xi_x^0),
\end{aligned}$$

y con esto obtener la expresión

$$\begin{aligned}
I(\vec{x}; \chi) &= 2\pi^{\frac{d-1}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\|\vec{\xi}_x\|^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(k+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{2m}{\xi_x^0}\right)^{k+\frac{d-1}{2}} K_{k+\frac{d-1}{2}}(m\xi_x^0) \\
&= 2 \left(\frac{2\pi m}{\xi_x^0}\right)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2k)! \Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{2m\|\vec{\xi}_x\|^2}{\xi_x^0}\right)^k K_{k+\frac{d-1}{2}}(m\xi_x^0) \\
&= 2 \left(\frac{2\pi m}{\xi_x^0}\right)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{m\|\vec{\xi}_x\|^2}{2\xi_x^0}\right)^k K_{k+\frac{d-1}{2}}(m\xi_x^0),
\end{aligned}$$

donde, para obtener la última línea, hemos empleado la fórmula de duplicación de Legendre $\Gamma(k)\Gamma(k + \frac{1}{2}) = 2^{1-2k}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2k)$ [77]. De esta manera, sustituyendo esta expresión para $I(\vec{x}; \chi)$ en (3.95), verificamos el resultado (4.1):

$$z(\chi) = (2\pi m)^{\frac{d+1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{-1}}{k!} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) \xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})^{\frac{1-d}{2}} \left(\frac{m \|\vec{\xi}_{\chi}\|^2(\vec{x})}{2\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})} \right)^k K_{k+\frac{d-1}{2}}(m\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})).$$

En el caso particular en que, para todo $x \in M$, el campo vectorial de Killing ξ_{χ} satisface $g(x)(\xi_{\chi}, \xi_{\chi}) = -(\xi_{\chi}^{\mathbf{0}})^2 + \|\vec{\xi}_{\chi}\|^2 < 0$, notemos que podemos aplicar el llamado teorema de multiplicación de las funciones de Bessel modificadas de segundo orden [77]

$$K_{\nu}(\lambda w) = \lambda^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 - 1)^k (\frac{1}{2}w)^k}{k!} K_{\nu+k}(w), \quad (4.8)$$

válido para todo parámetro real λ que satisface la condición

$$|\lambda^2 - 1| < 1. \quad (4.9)$$

En efecto, basta tomar (4.1) con el parámetro $\lambda = \frac{\|\xi_{\chi}\|(x)}{\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}}$, pues esta cantidad satisface la condición (4.9),

$$|\lambda^2 - 1| = \left| \frac{|g(x)(\xi_{\chi}, \xi_{\chi})|}{(\xi_{\chi}^{\mathbf{0}})^2} - 1 \right| = \frac{\|\vec{\xi}_{\chi}\|^2}{(\xi_{\chi}^{\mathbf{0}})^2} < 1,$$

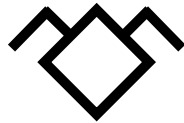
de tal manera que podemos reducir la suma que aparece en z , a la expresión (4.4):

$$\begin{aligned} z(\chi) &= (2\pi m)^{\frac{d+1}{2}} \pi^{-1} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) \xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})^{\frac{1-d}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\|\vec{\xi}_{\chi}\|^2(\vec{x})}{(\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x}))^2} \right)^k \left(\frac{1}{2} m \xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x}) \right)^k K_{\frac{d-1}{2}+k}(m\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})) \\ &= (2\pi m)^{\frac{d+1}{2}} \pi^{-1} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) \xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})^{\frac{1-d}{2}} \frac{\xi_{\chi}^{\mathbf{0}}(\vec{x})^{\frac{d-1}{2}}}{|g(\vec{x})(\xi_{\chi}, \xi_{\chi})|^{\frac{d-1}{4}}} K_{\frac{d-1}{2}}(m\|\xi_{\chi}\|(x)) \\ &= 2m^d (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) k_{\frac{d-1}{2}}(m\|\xi_{\chi}\|(x)). \end{aligned} \quad \diamond$$

ARTÍCULOS

En esta parte del trabajo incluimos, de manera íntegra, los dos artículos que, como parte del trabajo de doctorado, publicamos durante los últimos años. El primer trabajo, titulado “*Symplectic structure of equilibrium thermodynamics*” [84] introduce una formulación simpléctica sobre el haz cotangente del espacio de equilibrio de un sistema termodinámico, i. e. en el conjunto de todos los puntos que representan un estado de equilibrio termodinámico, el cual tiene una estructura de variedad diferencial suave. La formulación simpléctica se induce a partir de la formulación en geometría de contacto, empleada desde mediados del siglo pasado para formalizar distintos aspectos de la termodinámica⁴ y, más allá de ser una reformulación de lo ya reformulado en términos geométricos, permite encontrar una descripción del tipo Hamilton-Jacobi para la determinación de ecuaciones fundamentales, así como una formulación hamiltoniana de los procesos termodinámicos reversibles.

El segundo artículo que incluimos, “*Study of ideal gases in curved spacetimes*” [85], es la síntesis de los resultados que presentamos en la segunda parte de este trabajo.



⁴Por ejemplo, un sistema termodinámico en esta formulación se entiende a partir de un encajamiento del espacio de equilibrio en el *espacio fase termodinámico* como un encajamiento tangente a una distribución de contacto, de tal forma que todos los posibles procesos en el sistema satisfagan una condición geométrica que, localmente, se puede interpretar como la segunda ley de la termodinámica. Para mayor información, véase el artículo citado a continuación.

Symplectic structure of equilibrium thermodynamics

Luis Aragón-Muñoz^{*,‡} and Hernando Quevedo^{*,†,§}

**Instituto de Ciencias Nucleares
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Ciudad de México, México*

*†Dipartimento di Fisica and ICRA
Università di Roma “La Sapienza”
I-00185 Roma, Italy*

‡luis.aragon@correo.nucleares.unam.mx

§quevedo@nucleares.unam.mx

Received 23 May 2022

Accepted 14 June 2022

Published 11 July 2022

The contact geometric structure of the thermodynamic phase space is used to introduce a novel symplectic structure on the tangent bundle of the equilibrium space. Moreover, it turns out that the equilibrium space can be interpreted as a Lagrange submanifold of the corresponding tangent bundle, if the fundamental equation is known explicitly. As a consequence, Hamiltonians can be defined that describe thermodynamic processes.

Keywords: Contact geometry; symplectic geometry; thermodynamics; Hamiltonian systems.

Mathematics Subject Classification 2020: 53D05, 53D10, 80A05

1. Introduction

Different geometric methods have been applied for a long time in thermodynamics to formulate in an alternative manner its fundamental laws and conceptual background. From a geometric point of view, thermodynamic systems and their quasi-static processes can be described by using contact geometry [1–3]. In particular, one can introduce a contact manifold called thermodynamic phase space (TPS), which for each thermodynamic system contains an embedded manifold called equilibrium

[§]Corresponding author.

space, consisting of the topological collection of all equilibrium states represented as points of the space. This allows us, for instance, to understand different thermodynamic representations as expressions of the same theory in different coordinates. Moreover, a differential contact form for the thermodynamic first law appears naturally by demanding that the equilibrium space be a submanifold, where its contact form is zero, called Legendre submanifold.

In this work, we focus on the contact structure of the phase space and the differential structure of the equilibrium space to investigate the possibility of introducing a compatible symplectic structure. We will see that this is possible if we consider the tangent bundle of the equilibrium space. Indeed, it turns out that a procedure called contactization can be applied to this tangent bundle and the resulting manifold can be identified with the phase space with its contact structure. As a byproduct of this procedure, the Hamiltonian description is obtained canonically. Moreover, the Hamilton–Jacobi conceptual basis can also be obtained as a result of the contactization and the analysis of the corresponding Hamilton–Jacobi equation shows that its solutions determine complete families of thermodynamic systems, which are otherwise not related at all.

This work is organized as follows. In Sec. 2, we review the main concepts that are used for formulating a geometric description of equilibrium thermodynamics. In particular, the equilibrium space and the phase space are defined with the level of rigor that is necessary to investigate the underlying symplectic structure. In Sec. 3, we interpret the TPS as a principal fiber bundle and the contact distribution as a horizontal distribution. By calculating the holonomy in horizontal lifted curves, we find an indication of the existence of an underlying symplectic structure. Then, the contactization of the cotangent bundle of the equilibrium space is performed in Sec. 4. The Hamiltonian and Hamilton–Jacobi structures that arise naturally as a result of the contactization are also investigated and applied to particular examples. In Sec. 5, we extend the notion of Legendre’s total transform to the framework of symplectic geometry and analyze the implications. In particular, we find a momentum map associated with the action of the maximal torus of the rotation group in \mathbb{R}^{2n} over the cotangent bundle of the equilibrium space. Finally, in Sec. 6, we discuss our results and comment on possible applications for future works.

2. Thermodynamics

Let A be a thermodynamic system, i.e. a portion of the universe with a set $\{a, b, c, \dots\}$ of special states, called states of equilibrium, in which A is described by a small number $n \in \mathbb{N}$ of bulk measurements (q^1, q^2, \dots, q^n) , called thermodynamic variables, whose values are given according to n equations of the form ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$p_i = p_i(q^1, \dots, q^n) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial q^i}. \quad (1)$$

In Eq. (1), the functions p_i are also known as thermodynamic variables,^a that are specifically identified as the dual variables to q^i and represent control parameters, which are used to determine when two systems that interact and exchange matter would reach the equilibrium as a coupled system [4]. The quantity ϕ is known as the thermodynamic potential and its relationship with the thermodynamic variables in the form of a function $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is the so-called fundamental equation of the system [4]. This election of the terms (dual variable, thermodynamic potential, and fundamental equation) originates from the differential of the function ϕ

$$d\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial q^i} dq^i = \sum_{i=1}^n p_i dq^i. \quad (2)$$

This equation can be interpreted as a conservation law made up by the amount of terms $p_i dq^i$, which are formed by the product of the differential of a thermodynamic variable and its dual, representing infinitesimal flows of matter in the system [4]. The behavior of the function ϕ , taking into account certain restrictions on the thermodynamic variables, determines the final equilibrium state of A [4]. For example, for a simple thermodynamic system with thermodynamic variables $(q^1, q^2, q^3) = (U, V, N)$, where U is the energy, V is the volume, and N is the number of particles in the system, the entropy S represents a thermodynamic potential, $S = S(U, V, N)$, which determines the final state of the system, maximizing the function $S = S(U_0, V, N)$ for $U_0 = \text{const}$.

The description of a thermodynamic system in terms of n real numbers, i.e. the thermodynamic variables (q^1, \dots, q^n) , and a potential $\phi = \phi(q^1, \dots, q^n)$ is not unique in the sense that it is always possible to interchange any coordinate q^i with its dual coordinate p_i , maintaining an extremal principle on the function [4]

$$\phi[p_j] \equiv \phi - p_j q^j, \quad (3)$$

where $q^j = q^j(q^1, \dots, q^{j-1}, p_j, q^{j+1}, \dots, q^n)$. For this interchange to be possible, it is sufficient and necessary that ϕ be a convex function [4–6], a condition that from now on we will assume to be always valid for every thermodynamic potential.

Formally, Eq. (3) represents a partial Legendre transformation of the convex function $\phi = \phi(q^1, \dots, q^n)$ of n real variables with respect to its coordinates q^i [4]. Its generalization can be defined as follows: Let (I, J) be any partition of the index set $\{1, 2, \dots, n\}$, i.e. I and J are disjoint sets such that $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$. The Legendre transformation of the potential ϕ with respect to the interchange of the thermodynamic variables q^i with their dual variables p_i is given by

$$\phi[p_I] \equiv \phi(p_I, q^J) - \sum_{k \in I} p_k q^k, \quad (4)$$

^aIn particular, when the variables (q^1, \dots, q^n) are all extensive, that is, they scale with the size of the system, the dual variables p_i are also known as intensive variables, that is, zero-degree homogeneous functions of the q 's [4].

with $p_I = \{p_k\}_{k \in I}$ and $q^J = \{q^k\}_{k \in J}$. Identifying the change of variables $(q^I, q^J) \rightarrow (q'^I = p_I, q'^J = p_J)$ given by the Legendre transformation (4), it is easy to see that the equations of state are modified according to the rule

$$p'_i \equiv \frac{\partial \phi[p_I]}{\partial q'^i} = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial q^i} = p_i, & i \in J, \\ -\sum_{k \in I} p_k \delta_i^k = -p_i, & i \in I. \end{cases} \quad (5)$$

In this sense, under coordinates changes that interchange variables with its duals, the original thermodynamic potential loses its nature as potential in the new coordinates [4]. This leads us to think that thermodynamics as a mathematical theory is not totally free of coordinates; hence it has to be formulated in terms of a set of equilibrium states $\{a, b, c, \dots\}$ and a specific election of thermodynamic variables and potential

$$[\text{Thermodynamic system}] = (\{a, b, c, \dots\}, \phi(q)). \quad (6)$$

Since there is a total of $2n$ different choices of thermodynamic variables and potentials, there exist $2n$ Legendre transformations that can be applied to describe only one system with n degrees of freedom. We say then that thermodynamics presents a discrete symmetry under Legendre transformations. Nonetheless, it is possible to find a geometric formulation of thermodynamics by using contact geometry and, as we will show in this work, symplectic geometry.

2.1. *Thermodynamic equilibrium space*

For any thermodynamic system A , with n thermodynamic degrees of freedom, we define the *thermodynamic equilibrium space* (TES) \mathcal{E} as a smooth n -dimensional manifold, obtained by giving to the set of equilibrium states of the system a topology $\tau(\mathcal{E})$ and a differential structure [1]. In this manifold, we can introduce a preliminary atlas composed by charts where the coordinates are identified with the usual thermodynamic variables of the system like energy U , volume V , number of particles N , magnetization M , etc., which we will identify particularly as

$$(q^1, \dots, q^n) \stackrel{*}{=} (E^1, \dots, E^n), \quad (7)$$

where the asterisk represents the identification, which has the advantage of having a direct physical interpretation, but that in no way results fundamental. Accordingly, we can generalize the concept of thermodynamic potential as any smooth mapping from \mathcal{E} to \mathbb{R} , $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E})$, whose coordinated restriction given in (7) leads to a convex function. In this sense, the dual coordinates I_i are the components of the 1-forms $d\phi \in \Lambda^1(\mathcal{E})$ with the cotangent basis (dE^1, \dots, dE^n) induced by the corresponding

coordinates so that the equations of state are determined by the relationships

$$d\phi = \sum_{i=1}^n I_i dE^i \Rightarrow I_i = \frac{\partial \phi}{\partial E^i}. \quad (8)$$

As a particular example, consider an ideal gas enclosed in a region of a variable volume with a constant number of particles. This system has only two degrees of freedom so that the corresponding \mathcal{E} becomes a two-dimensional smooth manifold. In this case, the system of physical coordinates (7) can be chosen as the pair $(E^1, E^2) = (U, V)$ and the thermodynamic potential as the entropy S , with the fundamental equation [4]

$$S(U, V) = N k_B \ln(U^{C_V} V), \quad (9)$$

where k_B represents Boltzmann's constant and C_V is the specific heat at constant volume. In this case, the dual thermodynamic variable to U is identified as the inverse of the temperature T , while the dual to V is the combination P/T , with P as the pressure of the system. Moreover, the equations of state are

$$I_1 = \frac{1}{T} = \frac{N k_B C_V}{U}, \quad I_2 = \frac{P}{T} = \frac{N k_B}{V}. \quad (10)$$

2.2. Thermodynamic phase space

The equilibrium space \mathcal{E} can be considered as an n -dimensional submanifold of a larger $2n + 1$ -dimensional manifold called TPS \mathcal{B} that is constructed as the space of all the variables of systems with n degrees of freedom, their duals and the potential $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, \phi)$, removing any possible relations between them so that they can be used as coordinates of a $2n + 1$ -dimensional smooth manifold [1, 7, 8].

We assume that \mathcal{B} is a contact manifold, i.e. there exists a codimension-one distribution that is co-orientable and maximally nonintegrable [9, 10]. In other words, there exists a smooth family of codimension-one subspaces of tangent spaces $T\mathcal{B}$, $\Pi : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{B}$, that can be seen as the kernel $\Pi = \ker(\alpha)$ of the elements of a conformal family^b $[\alpha]$ of 1-forms $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{B})$, called contact 1-forms, satisfying the condition of being maximally nonintegrable [9–11]

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \equiv \alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha}_{n\text{-times}} \neq 0. \quad (11)$$

This condition essentially means that there are maximally integral submanifolds L tangent to the distribution Π that can be interpreted as n -dimensional equilibrium spaces [1–3, 8]. In general terms, the highest dimension that can have a submanifold L is $\dim(L) = \frac{1}{2}(\dim(\mathcal{B}) - 1) = n$ [9, 10]. Such submanifolds are known as Legendrian and they can be characterized through the embedding $\psi : L \hookrightarrow \mathcal{B}$, whose differential $\psi_* : TL \rightarrow \Pi$ is an injective application between tangent spaces.

^bIf $\beta \in \Lambda^1(\mathcal{B})$ is an element of $[\alpha]$, there exists a nonzero function $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that $\beta = f\alpha$.

This indicates the integral nature of L and it simply refers to the fact that every smooth curve over L with nonzero velocity will be mapped into a smooth curve tangent to Π , also with nonzero velocity. Another way to see this condition is to employ the description of distributions in terms of contact 1-forms that lead to the expression

$$\psi^* \alpha = 0. \tag{12}$$

The reason why we can identify \mathcal{E} as a Legendrian submanifold of the TPS is because it is always possible to find coordinates $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ called Darboux coordinates [9, 10], such that the contact 1-form can be expressed as $\alpha = d\phi - \sum_{i=1}^n p_i dq^i$ and the embedding generates thermodynamic relations, i.e. they assign $\phi = \phi(q^1, \dots, q^n)$ the character of a thermodynamic potential

$$\psi^* \alpha = d(\phi(q^1, \dots, q^n)) - \sum_{i=1}^n p_i(q^1, \dots, q^n) dq^i = 0$$

\Downarrow

$$\tag{13}$$

$$\psi : (q) \mapsto \left(q, p = \frac{\partial \phi}{\partial q}, \phi(q) \right).$$

We can think of \mathcal{B} as a $2n + 1$ -dimensional manifold where each embedding of a smooth n -dimensional manifold describes a thermodynamic system.

Darboux coordinates are not unique. Indeed, there exist an infinite number of coordinate changes that map the functional form $\alpha = d\phi - \sum_{i=1}^n p_i dq^i$ in coordinates $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, \phi)$ into the same expression with new coordinates $(q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n, \phi')$ [9, 10]. A particular method to generate Darboux coordinates consists in applying Legendre transformations (4), which can be represented as a discrete transformation of coordinates on \mathcal{B} [5]

$$\mathcal{L}_I(q, p, \phi) = \begin{cases} q'^I = p_I, \\ q'^J = q^J, \\ p'_I = -q^I, \\ p'_J = p_J, \\ \phi' = \phi - \sum_{k \in I} q^k p_k. \end{cases} \tag{14}$$

Legendre transformations can be interpreted as changes of coordinates on \mathcal{B} that preserve the contact distribution Π . Diffeomorphisms on \mathcal{B} that satisfy this property are known as contactomorphisms that turn out to form a Lie group [9, 10], called contact group $\text{Cont}(\mathcal{B}, \Pi) \equiv (\{F \in \text{Diff}(\mathcal{B}) : F_* \Pi = \Pi\}, \circ)$. In this way, every contactomorphism relates Darboux coordinate systems.

Another important feature of the TES has to do with quasi-static thermodynamic processes, which are continuous successions of equilibrium states [4], i.e.

smooth curves over the embedding of \mathcal{E} in \mathcal{B} [8, 12]. Particularly, since \mathcal{E} is a Legendrian submanifold, its curves are always tangent to the distribution Π . In contact geometry, these curves are known as horizontal curves [9, 10].

Considering that two thermodynamic equilibrium states are always connected through a quasi-static process (without considering the sense of orientation of that process) [4], it results necessary that any two points in a neighborhood of \mathcal{B} are always connected through a horizontal curve. This is true by virtue of the Chow theorem, establishing that every bracket-generating distribution in \mathbb{R}^n is horizontal connected [2]. A contact distribution Π locally satisfies the conditions of the Chow theorem. This tells us that the tangential space of \mathcal{B} can be constructed joining all the vector fields in Π and all Lie brackets between them^c

$$T\mathcal{B} = \Pi \oplus [\Pi, \Pi], \quad (15)$$

where $[\Pi, \Pi]$ is the vector space generated by the Lie bracket between all the elements of Π [2, 3]. Indeed, to prove (15), we have to notice that from the vector field induced by Darboux coordinates we can build the basis $(\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n}, \frac{\partial}{\partial q^1} + p_1 \frac{\partial}{\partial \phi}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} + p_n \frac{\partial}{\partial \phi})$, whose bracket generates the only complementary vector field to Π on $T\mathcal{B}$. In this case, $\frac{\partial}{\partial \phi} : [\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial}{\partial \phi}] = \frac{\partial}{\partial \phi} \Rightarrow [\Pi, \Pi] = \text{span}(\frac{\partial}{\partial \phi})$.

3. Frame-Bundle Structure of the TPS

As shown in [13], the TPS \mathcal{B} has a principal fiber bundle structure where the 1-form contact gives rise to a principal connection, i.e. a 1-form over \mathcal{B} with values in the Lie algebra of the structure Lie group.

To better develop this idea, it is important to understand that in a contact manifold the existence of a vector field ξ is guaranteed with the characteristic that, for every point $z \in \mathcal{B}$, $\xi(z)$ is not within the distribution at that point, i.e. $\xi(z) \notin \Pi(z)$. When we choose α as a representative of the 1-form contact family, this vector field ξ can be defined exactly from the conditions

$$i_\xi \alpha = 1, \quad (16)$$

$$i_\xi d\alpha = 0, \quad (17)$$

where (17) arises as a direct consequence of demanding for (16) the condition of maximal nonintegrability (11). Locally, using the tangent base $(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n})$ generated from a set of Darboux coordinates, we can make the identification $\xi = \frac{\partial}{\partial \phi}$.

Given the one-dimensional foliation generated by the integrable curves of the ξ field, called the Reeb field, we find that \mathcal{B} is the total space of a fiber bundle over the quotient space $M \equiv \mathcal{B}/\xi$, where the fibers are isomorphic to the additive group

^c Π is said to be bracket-generating of step 2. In general, a bracket-generating distribution \mathcal{D} of step n is one that satisfies $T\mathcal{B} = [\mathcal{D}, \mathcal{D}]^n$, where $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]^1 = \mathcal{D}$, $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]^2 = \mathcal{D}^1 + [\mathcal{D}^1, \mathcal{D}]$, \dots , $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]^n = \mathcal{D}^{n-1} + [\mathcal{D}^{n-1}, \mathcal{D}]$ [2, 3].

of real numbers, i.e. $G = (\mathbb{R}, +)$ [13]. In this scheme, it is easy to see that the 1-form $\alpha \otimes \xi$ becomes a principal connection on \mathcal{B} , that is, a 1-form over \mathcal{B} with values in the Lie algebra $\mathfrak{g} = \text{span}(\xi)$. Indeed, under the right-action of G on the fibers, i.e. $R_a(z) = z \triangleleft a = (\phi + a, q, p)$, in Darboux coordinates, α transforms appropriately with the adjoint action of the group G , taking into account that the said action is trivial since G is an abelian group

$$\begin{aligned} R_a^*(\alpha \otimes \xi) &= R_a^* \left(d\phi - \sum_{i=1}^n p_i dq^i \right) \otimes \xi \\ &= \left(d(\phi + a) - \sum_{i=1}^n p_i dq^i \right) \otimes \xi \\ &= \left(d\phi - \sum_{i=1}^n p_i dq^i \right) \otimes \xi = \alpha \otimes \xi \\ &= \alpha \otimes \text{Ad}_a \xi = \text{Ad}_a(\alpha \otimes \xi). \end{aligned}$$

Furthermore, also trivially identifying the fundamental fields $(aR)^\# = \frac{d}{dt} R_{at} = aR$, we have the evaluation

$$i_{(aR)^\#}(\alpha \otimes R) = (i_{aR}\alpha)R = (ai_R\alpha)R = aR.$$

An important consequence of the fact that the contact 1-form can be seen as a principal connection is that the horizontal distribution generated by $\alpha \otimes \xi$ from its kernel coincides precisely with the contact distribution of the kernel of α , in such a way that the horizontal lifts of curves on M are always tangent to Π . Using the Darboux coordinates (ϕ, q, p) in \mathcal{B} , the horizontal lift of a curve $\gamma : s \in [0, 1] \rightarrow (q(s), p(s)) \in M$ has the form $\tilde{\gamma} : s \in [0, 1] \rightarrow (\phi(s), q(s), p(x)) \in \mathcal{B}$ for $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, solution of the horizontal lifting equation $i_{\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}}\alpha = 0$, i.e.

$$\phi(s) = \int_0^s d\tau p_i(\tau) \frac{dq^i}{d\tau}. \quad (18)$$

Now, taking into account that any vector field tangent to a Legendrian submanifold is, by definition, a contact field, a Legendrian submanifold is completely foliated by horizontal curves and can thus be understood as a horizontal lifting of a n -dimensional submanifold in M . We know precisely that in these Legendrian curves, equations-type of state $p_i(q) = \frac{\partial \phi}{\partial q^i}$ are satisfied, that when substituted in (18) give rise to the tautology

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \int_0^s d\tau \frac{\partial \phi}{\partial q^i} \frac{dq^i}{d\tau} = \int_\gamma d\phi = \phi \circ \gamma(s) \\ &\Downarrow \\ \tilde{\gamma} &= \left(\phi(s), q(s), \frac{\partial \phi}{\partial q}(s) \right). \end{aligned}$$

In particular, for a closed loop $\gamma = \partial C$ in M , which encloses a region $C \subset M$, note that the holonomy of its horizontal lift, i.e. the vertical difference (on the fiber) between the initial and final value of the lifted curve, is given by the integral

$$\Delta\phi = \int_0^1 ds p_i(s) \frac{dq^i}{ds} = \int_{\partial C} \theta = \int_C d\theta,$$

where $\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$ is a 1-form over the open subset of M containing γ with coordinates (q, p) . Identifying, at least locally, $d\theta = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$ as a symplectic 2-form in C , we see that the condition that horizontal lifted curves close, as it is necessary for Legendrian curves, suggests the existence of a symplectic structure in M .

4. Contactization of the Cotangent Bundle

The introduction of the TPS \mathcal{B} as a geometric environment of the TES \mathcal{E} is not enough to fix the topology of \mathcal{B} , although requesting that \mathcal{B} be a contact manifold is a quite restrictive condition. This allows us to consider different candidates for the topology of \mathcal{B} . We will now present a specific candidate that is particularly interesting because it is naturally built from the TES.

Let be $T^*\mathcal{E}$ the cotangent bundle of the manifold \mathcal{E} , defined as the vector fiber bundle with base space \mathcal{E} , fibers given as the cotangent spaces, and the natural projection $\pi : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ [14]. In terms of the cotangent bundle, the 1-forms on \mathcal{E} , $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{E})$, are interpreted as embeddings of the mentioned TES in $T^*\mathcal{E}$ [14]: $\omega : \mathcal{E} \rightarrow T^*\mathcal{E}$ with $\pi \circ \omega = \text{id}_{\mathcal{E}}$. In fact, if $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{E})$ has components (p_1, \dots, p_n) in the cotangent basis (dq^1, \dots, dq^n) , i.e. $\omega = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$, the $2n$ real numbers $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ turn out to be a natural coordinate system for $T^*\mathcal{E}$.

An important feature of any cotangent bundle is that it has a canonical 1-form $\theta \in \Lambda^1(T^*\mathcal{E})$ [5, 15], defined at any point $\forall (x, \omega) \in T^*\mathcal{E}$ as

$$\theta|_{(x, \omega)} \equiv (\pi^*\omega)|_x, \tag{19}$$

whose exterior derivative defines a symplectic form on $T^*\mathcal{E}$: $\Omega \equiv d\theta$ [5, 15]. Accordingly, we say that every cotangent bundle has an exact symplectic structure in it. Another remarkable property of the canonical 1-form θ is the so-called reproduction property for any $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{E})$

$$\omega^*\theta = \omega, \tag{20}$$

indeed, $\omega^*\theta = \omega^*(\pi^*\omega) = (\pi \circ \omega)^*\omega = \omega$. We note that in the coordinate system $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ that we have just described, the 1-form θ and the 2-form Ω acquire their simplest expression $\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$ and $\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$.

Considering the close relationship between a contact structure and a symplectic structure, we can associate $T^*\mathcal{E}$ with a special construction that we will call its contactization \mathcal{B}_C , and which is roughly speaking a (not unique)^d lineal

^dAlthough this construction is not unique, for the purposes of this paper, this does not prove to be a problem. This question is treated in Appendix A.

and trivial fiber bundle over $T^*\mathcal{E}$ [9, 10, 16] with natural projection given by $\pi_C : \mathcal{B}_C \equiv T^*\mathcal{E} \times \mathbb{R} \rightarrow T^*\mathcal{E}$. A special feature of the contactization \mathcal{B}_C is that it contains a natural, co-orientable and maximally nonintegrable contact structure, built from the symplectic structure of $T^*\mathcal{E}$, described by the family of contact 1-forms $[\alpha_C]$ where $\alpha_C = dz - \pi_C^*\theta$ with $z \in \mathbb{R}$ as the fiber coordinate. Indeed, let us take the top-form over \mathcal{B}_C given by $\alpha_C \wedge d\alpha_C^{\wedge n} = -dz \wedge \pi_C^*(\Omega^{\wedge n})$, and let $(\frac{\partial}{\partial z}, X_1, \dots, X_n)$ be a vector field basis for $T\mathcal{B}_C$. If we evaluate this basis in $\alpha_C \wedge d\alpha_C^{\wedge n}$, we obtain $-\Omega^{\wedge n}(\pi_{C*}X_1, \dots, \pi_{C*}X_{2n}) \neq 0$, because $\Omega^{\wedge n}$ is not null at all $T^*\mathcal{E}$ and represents the so-called Liouville volume top-form [5, 15]. Thus, we see that α_C satisfies condition (12) and is, therefore, a contact 1-form.

An interesting fact about the contactization of an exact symplectic manifold is that it builds a bridge between symplectic geometry and contact geometry. We can highlight that all contactomorphisms F on \mathcal{B}_C result, on any embedding $\ell : T^*\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{B}_C$ with $\pi_C \circ \ell = \text{id}_{T^*\mathcal{E}}$, in a diffeomorphism on $T^*\mathcal{E}$ that leaves invariant the symplectic form Ω , i.e.

$$\begin{aligned} (\pi_C \circ F \circ \ell)^*\Omega &= \ell^* \circ F^* \circ \pi_C^* d\theta \\ &= -\ell^* \circ F^*(d\alpha_C) \\ &= -\ell^* d(F^* \alpha_C) = -\ell^* d\alpha_C \\ &= -\ell^* \circ \pi_C^* \Omega = (\pi_C \circ \ell)^* \Omega = \Omega. \end{aligned}$$

As long as we can embed \mathcal{E} into $T^*\mathcal{E}$, such that Ω is zero on its tangent spaces, we can construct a Legendrian embedding of \mathcal{E} into \mathcal{B}_C using any cross-section of this last fiber bundle. First of all, note that for any 1-form $\gamma \in \Lambda^1(\mathcal{E})$ and $\ell : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}_C$ with $\pi_C \circ \ell = \text{id}_{T^*\mathcal{E}}$, the composition $\psi_\gamma \equiv \ell \circ \gamma$ is an embedding of \mathcal{E} into \mathcal{B}_C . Note that if ψ_γ is a Legendrian map, as defined in Eq. (13), then γ turns out to be an exact 1-form

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^* \alpha_C &= d(\psi_\gamma^* z) - \psi_\gamma^* \circ \pi_C^* \theta \\ &= d(\psi_\gamma^* z) - (\pi_C \circ \ell \circ \gamma)^* \theta \\ &= d(\psi_\gamma^* z) - \gamma^* \theta = d(\psi_\gamma^* z) - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = d(\psi_\gamma^* z), \end{aligned}$$

and therefore, γ embeds \mathcal{E} into $T^*\mathcal{E}$ as a Lagrangian submanifold, that is, an n -dimensional submanifold where the constraint of the symplectic form Ω is zero

$$\gamma^* \Omega = \gamma^*(d\theta) = d(\gamma^* \theta) = d\gamma = d^2(\psi_\gamma^* z) = 0. \quad (21)$$

Lagrangian submanifolds are interesting and well-studied elements of symplectic geometry [5, 15, 17]. Among their properties, we can highlight that given any smooth function $h \in C^\infty(T^*\mathcal{E})$, which we call a Hamiltonian, the flow generated by its associated Hamiltonian field, that is, the vector field $X_h : T^*\mathcal{E} \rightarrow T(T^*\mathcal{E})$, identified

with dh by means of Ω [5, 15]

$$dh = i_{X_H}\Omega, \quad (22)$$

maps a Lagrangian submanifold to another Lagrangian submanifold. Indeed, given the definition (22) it is easy to show that the flow of X_h leaves both h and Ω invariant^e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_h}h &= \langle dh, X_h \rangle = \Omega(X_h, X_h) = 0, \\ \mathcal{L}_{X_h}\Omega &= (i_{X_h}d + di_{X_h})\Omega = d(i_{X_h}\Omega) = d^2h = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Particularly, if a Hamiltonian h is constant along a Lagrangian submanifold \mathcal{E} , $\gamma^*h = \text{const}$, then the flow of the Hamiltonian vector field maps the Lagrangian submanifold onto itself [18]. This can be seen from the fact that X_h is always tangent to \mathcal{E} since X_h is symplectically orthogonal to every vector field Y tangent to \mathcal{E} , that is

$$\Omega(X_h, \gamma_*Y) = i_Y(\gamma^*dh) = i_Yd(\gamma^*h) = i_Y(0) = 0, \quad (24)$$

and in a Lagrangian submanifold one finds, by definition, the largest possible number of symplectically orthogonal tangent fields between each other.^f

4.1. *Hamilton–Jacobi-like equation for thermodynamic systems*

If we take as a TPS candidate the contactization of the cotangent bundle of the TES, as we mentioned earlier,^g we can identify thermodynamic systems first as a Legendrian embedding of \mathcal{E} into $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}_C$, and then as a Lagrangian embedding of \mathcal{E} into $T^*\mathcal{E}$. This perspective allows us to see all the mappings of the cotangent bundle to \mathbb{R} , which are constant on \mathcal{E} , as generators of thermodynamic processes through the flows generated by their associated Hamiltonian vector fields. This is in direct analogy to the use of functions and Hamiltonian vector fields of contact, defined on the TPS, that are used in the framework of contact geometry [7, 19].

If we start identifying the Legendrian map $\psi_\gamma = \ell \circ \gamma$, we note that γ must be the exterior derivative of the thermodynamic potential, $\gamma = d(\psi_\gamma^*z) = d\phi$, which in turn leads us to propose the equation

$$\phi = \psi_\gamma^*z + \phi_0 = K(d\phi) - h_0, \quad (25)$$

where h_0 is a real constant and we define K as the portion of the lifting performed by ℓ of $T^*\mathcal{E}$ to \mathcal{B} , which falls on the fibers: $K \equiv z \circ \ell$. In coordinates (q^1, \dots, q^n)

^e \mathcal{L}_Z is the Lie derivative with respect the flow of the vector field Z .

^fA Lagrangian submanifold is a maximally isotropic submanifold of a symplectic manifold [5, 15, 17].

^gIt is enough to ask that they be contactomorphic to each other, in other words, that there is a contactomorphism from the contact structure of the TPS to the contact structure of $T^*\mathcal{E} \times \mathbb{R}$. Locally such contactomorphism always exists [9, 10] and the discussion reduces to choosing a particular Darboux coordinate system.

on \mathcal{E} , Eq. (25) takes the form of a Hamilton–Jacobi-type equation independent of the evolution parameter [5, 6]

$$\phi(q^1, \dots, q^n) = K \left(q^1, \dots, q^n, \frac{\partial \phi}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial q^n} \right) - h_0. \quad (26)$$

The similarity to the Hamilton–Jacobi equation becomes much more evident when we define the Hamiltonian function $h \equiv K - \pi^* \phi$, constant on \mathcal{E}

$$h \left(q^1, \dots, q^n, \frac{\partial \phi}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial q^n} \right) = h_0. \quad (27)$$

Thus, we find a Hamiltonian description of thermodynamic processes, characterized by all the maps $T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, which are constants over the embedding equilibrium space \mathcal{E} .

4.2. *Hamiltonian thermodynamics of ideal gases*

To show the compatibility of symplectic thermodynamics with the already well-established contact thermodynamics, let us consider thermodynamic processes similar to those presented in [19] for ideal gases, but by means of Hamiltonian vector fields. Then, consider again the physical coordinate system (U, V) on \mathcal{E} and the corresponding local coordinates (U, V, p_U, p_V) in $T^*\mathcal{E}$. In particular, let us work with an ideal gas with a fixed number N of particles and a fundamental equation given by Eq. (9). This means that instead of working on all \mathcal{B}_C , we limit ourselves only to the region described by the embedding

$$dS(U, V) = \left(U, V, p_U = \frac{Nk_B C_V}{U}, p_V = \frac{Nk_B}{V} \right), \quad (28)$$

where $p_U \equiv \frac{1}{T}$ and $p_V \equiv \frac{P}{T}$.

In this region, note that the maps $h_1 \equiv (p_V V)^\alpha$ and $h_2 \equiv (p_U U)^\alpha$, $\alpha \geq 1$, are constants

$$(dS)^* h_1 = \left(\frac{PV}{T} \right)^\alpha = (Nk_B)^\alpha = \text{const.} \quad (29)$$

$$(dS)^* h_2 = \left(\frac{U}{T} \right)^\alpha = (Nk_B C_V)^\alpha = \text{const.},$$

which is the reason why the integral curves $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow dS(\mathcal{E})$ and $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow dS(\mathcal{E})$, associated with its Hamiltonian vector fields $X_{h_1} \circ \gamma_1(t) = \dot{\gamma}_1$ and $X_{h_2} \circ \gamma_2(t) = \dot{\gamma}_2$, respectively, describe an expansion with constant energy and temperature, and an isochoric process

$$\gamma_1(t) = \left(U, V e^{\beta t}, \frac{1}{T}, \frac{P}{T} e^{-\beta t} \right), \quad (30)$$

$$\gamma_2(t) = \left(U e^{\beta C_V^{\alpha-1} t}, V, \frac{1}{T} e^{-\beta C_V^{\alpha-1} t}, \frac{P}{T} \right),$$

where we define the parameter $\beta \equiv \alpha(Nk_B)^{\alpha-1}$. First of all, we notice that effectively both $\gamma_1(t)$ and $\gamma_2(t)$ describe quasi-static processes; therefore, at each value of

the parameter $t \in \mathbb{R}$, the equations of state are satisfied, i.e. the curves do not leave the embedding of \mathcal{E} . Furthermore, we note that along γ_1 the entropy of the ideal gas always increases as expected for a process at constant energy. In both cases, the relation between the parameters t and S is an affine relation, i.e. $S \circ \gamma_1(t) = S_0 + \beta t$ and $S \circ \gamma_2(t) = S_0 + \beta C_V^{\alpha-1} t$, which allows us to rewrite Eq. (30) as

$$\begin{aligned}\gamma_1(S) &= \left(U, V e^{(S-S_0)}, \frac{1}{T}, \frac{P}{T} e^{-(S-S_0)} \right), \\ \gamma_2(S) &= \left(U e^{(S-S_0)}, V, \frac{1}{T} e^{-(S-S_0)}, \frac{P}{T} \right).\end{aligned}\tag{31}$$

Another constant Hamiltonian in the embedding is the map $h_3 = \frac{C_V p_V V}{U} - p_U$

$$(dS)^* h_3 = \frac{C_V P V}{T U} - \frac{1}{T} = 0,\tag{32}$$

with Hamiltonian integral curves γ_3 , given by the expression

$$\gamma_3(t) = \left(U - t, \frac{V}{\left(1 - \frac{t}{U}\right)^{C_V}}, \frac{1}{T} \left(\frac{3U_0 - t}{2U_0 - t} \right), \frac{P}{T} \left(1 - \frac{t}{U_0} \right)^{C_V} \right).\tag{33}$$

In this case, we are in the presence of an isentropic expansion, where the parametrization is again consistent with the physical idea that, at a constant entropy $S \circ \gamma_3(t) = S(t)$, the energy must decrease: $U - t$.

4.3. Hamiltonian flow from an ideal gas to a van der Waals gas

As we have shown, the Hamiltonian flow of any 0-form over $T^*\mathcal{E}$ maps Lagrangian submanifolds into Lagrangian submanifolds, which in the thermodynamic context means that Hamiltonian flows take equilibrium states of a system and relate them to the equilibrium states of another system. Both systems should have the same number of thermodynamic degrees of freedom. As a particular interesting example, consider the Hamiltonian

$$h = -\frac{aV_0}{V^2} p_U + b p_V + \frac{a}{T_0 V}.\tag{34}$$

The corresponding flow takes states of an ideal gas $(U_0, V_0, \frac{1}{T_0}, \frac{P_0}{T_0})$ and for each $t \in \mathbb{R}$ relates them to states of a van der Waals gas characterized by the coordinates $(U(t), V(t), (\frac{1}{T})(t), (\frac{P}{T})(t))$ ($0 < a \ll 1, 0 < b \ll 1$). Indeed, the integration of the Hamiltonian equations associated with (34) yields

$$\begin{aligned}U(t) &= U_0 - \frac{at}{V_0 + bt}, \\ V(t) &= V_0 + bt, \\ \left(\frac{1}{T}\right)(t) &= \frac{1}{T_0}, \\ \left(\frac{P}{T}\right)(t) &= \frac{P_0}{T_0} - \frac{at}{T_0(V_0 + bt)^2}.\end{aligned}\tag{35}$$

Note that from the fundamental equation and equations of state of the ideal gas, both the fundamental equation of a van der Waals gas and its equations of state [4] can be obtained as

$$\begin{aligned} S_0 &= Nk_B \ln(U_0^{C_v} V_0) \\ &= Nk_B \ln \left(\left[U(t) + \frac{at}{V(t)} \right]^{C_v} (V(t) - bt) \right), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} P_0 V_0 &= \left(P(t) + \frac{at}{V(t)^2} \right) (V(t) - bt) \\ &= Nk_B T(t) = Nk_B T_0. \end{aligned} \quad (37)$$

Note that the parameter t has been used here to denote different equilibrium states along a quasi-static process that connects states either of the same system or of different thermodynamic systems. In this sense, the parameter t resembles the role of an affine parameter along a geodesic. Under certain circumstances, it can be interpreted as a “time” parameter that connects different equilibrium states of the same quasi-static process, without breaking the fundamentals of equilibrium thermodynamics, i.e. the process occurs slowly enough for the system to remain in internal physical equilibrium.

In the above examples, we introduced heat capacities as constants that enter the equations of state of simple thermodynamic systems. Nevertheless, they could also be considered in the context of exotic systems like black holes and cosmological models [20, 21]. This means that heat capacities could also be negative or even zero, implying that the physical properties of the corresponding thermodynamic systems could change drastically. For instance, a negative heat capacity seems to lead to contradictory results in the case of simple laboratory systems; however, for systems in which long-range interactions are involved, as in the case of gravitational configurations, exotic heat capacities are perfectly well defined and do not lead to physical contradictions. In general, the heat capacities introduced in this work are limited in their values only by the kind of systems they are associated to.

The relationships presented above between different thermodynamic systems have also been obtained in [19] by using the contact geometry structure of the TPS. Also, they have been applied in the context of black holes in [22].

4.4. *Hamiltonian thermodynamics of black holes*

Since 1973, when Bekenstein discovered that the horizon area A of a black hole behaves as the entropy S of a classical thermodynamic system [23], the so-called thermodynamics of black holes has been subject of intensive research [24–26].

The fundamental equation that relates the mass M , the angular momentum J and the electric charge Q of a Kerr–Newman black hole with the entropy S

(proportional to the horizon area as $S = A/4$) is given by

$$S = 2\pi \left(M^2 - \frac{Q^2}{2} + R \right), \quad (38)$$

where for convenience we define

$$R \equiv \sqrt{M^4 - Q^2 M^2 - J^2}. \quad (39)$$

According to the first law of black hole thermodynamics [24]

$$dS = \frac{1}{T} dM - \frac{\phi}{T} dQ - \frac{\Omega_H}{T} dJ, \quad (40)$$

the thermodynamic dual variables are the Hawking temperature T , which is proportional to the surface gravity on the horizon, the electric potential ϕ , and the angular velocity Ω_H on the horizon. Using (38) and the equations of state we find that T , ϕ , and Ω_H are given as

$$T = \frac{R}{2MS}, \quad \phi = \frac{Q(S + \pi Q^2)}{2MS}, \quad \Omega_H = \frac{\pi J}{MS}. \quad (41)$$

Consider the space of equilibrium states \mathcal{E} of a black hole with the coordinate system (M, Q, J) . In particular, consider the region

$$A = \{(M, Q, J) \in \mathcal{E} : M > 0, R(M, Q, J) \geq 0\},$$

and its embedding $dS(A) \subset T^*\mathcal{E}$ under the cross-section

$$dS(M, Q, J) = \left(M, Q, J, p_M = \frac{2MS}{R}, p_Q = -\frac{Q(S + \pi Q^2)}{R}, p_J = -\frac{2\pi J}{R} \right). \quad (42)$$

It is easily seen that over $dS(A)$ the three Hamiltonians given in (43) are constant; in fact, they are zero, $dS^*h_1 = dS^*h_2 = dS^*h_3 = 0$

$$\begin{aligned} h_1 &= p_M - \frac{2MS}{R}, \\ h_2 &= Mp_M - \frac{2M^2S}{R} + 2Jp_J + \frac{4\pi J^2}{R}, \\ h_3 &= \frac{p_M}{2M} + \frac{p_Q}{2Q} + \frac{p_J}{2J}(M^2 - Q^2) + \frac{2\pi M^2 - (S + \pi Q^2)}{2R}. \end{aligned} \quad (43)$$

As a consequence of these Hamiltonians being zero, as we have already seen, their Hamiltonian flows are trapped on $dS(A)$ and constitute families of thermodynamic processes represented through integral curves.

In the case of h_1 , the integral curve with initial condition $\gamma_1(0) = dS(M, Q, J)$ is (44), where $\tau \in \mathbb{R}$ is a parameter with the same units of M , and we define $R_1 = R(M + \tau, Q, J)$ and $S_1 = S(M + \tau, Q, J)$.

$$\gamma_1(\tau) = \left(M + \tau, Q, J, \frac{2(M + \tau)S_1(\tau)}{R_1(\tau)}, -\frac{Q(S_1(\tau) + \pi Q^2)}{R_1(\tau)}, -\frac{2\pi J}{R_1(\tau)} \right). \quad (44)$$

We can see that this process describes a linear increase in the mass of the black hole, without any change in its electrical charge or in its total angular momentum,

under which the entropy increases, but both the temperature, the electric field and the angular velocity decrease

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\tau} &= -\frac{T(\tau)}{M} \left[1 + 2\frac{M^2}{R(\tau)} \left(1 + \frac{M^2 - Q^2/2}{R(\tau)} \right) \right] < 0, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= -\left[\frac{\phi(\tau)}{M} + \frac{\pi Q^3}{R(\tau)} \right] < 0, \\ \frac{d\Omega_H}{d\tau} &= -\frac{\Omega_H(\tau)}{M} \left[1 + \frac{2M^2}{R(\tau)} \right] < 0.\end{aligned}$$

In the case of h_2 , the solutions of the Hamilton equations under the initial condition $\gamma_2(0) = dS(M, 0, J)$ are given by

$$\gamma_2(t) = \left(Me^t, 0, Je^{2t}, \frac{2MS}{R}e^t, 0, -\frac{2\pi J}{R} \right), \quad (45)$$

where $R_2 = R(Me^t, 0, Je^{2t}) = e^{2t}R(M, 0, J) = e^{2t}R$ and $S_2 = S(Me^t, 0, Je^{2t}) = e^{2t}S(M, 0, J) = e^{2t}S$, and $t \in \mathbb{R}$ is a dimensionless parameter.

In this process, as a result of an exponential increase in electrically neutral matter with nonzero angular momentum, the entropy growth is exponential and, on the contrary, both the temperature and the angular velocity decrease exponentially, whereas the electrostatic potential remains at zero, as expected

$$\begin{aligned}T(t) &= \frac{R}{2MS}e^{-t} = Te^{-t}, \\ \phi(t) &= 0, \\ \Omega_H(t) &= \frac{\pi J}{MS}e^{-t} = \Omega_H e^{-t}.\end{aligned}$$

Finally

$$\begin{aligned}\gamma_3(\lambda) &= \left(\sqrt{M^2 + \lambda}, \sqrt{Q^2 + \lambda}, \sqrt{J^2 + (M^2 - Q^2)\lambda}, \right. \\ &\quad \left. \frac{2\sqrt{M^2 + \lambda}}{R}(S + \pi\lambda), -\frac{\sqrt{Q^2 + \lambda}}{R}(S + 2\pi\lambda + \pi Q^2), \right. \\ &\quad \left. -\frac{2\pi}{R}\sqrt{J^2 + (M^2 - Q^2)\lambda} \right), \quad (46)\end{aligned}$$

is the integral curve for h_3 with initial condition $\gamma_3(0) = dS(M, Q, J)$, where $\lambda > 0$ is a parameter with the same units of M^2 .

The γ_3 -related process

$$\tau(\lambda) = \frac{R}{2\sqrt{M^2 + \lambda}(S + \pi\lambda)},$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q^2 + \lambda}{M^2 + \lambda}} \left(1 + \frac{\pi(Q^2 + \lambda)}{S + \pi\lambda} \right),$$

$$\Omega_H(\lambda) = \frac{\pi}{S + \pi\lambda} \sqrt{\frac{J^2 + (M^2 - Q^2)\lambda}{M^2 + \lambda}},$$

describes an increase in mass, charge, and angular momentum that generates a linear increase in entropy. Indeed, $S(\lambda) = S + \pi\lambda$. The temperature is a monotonically decreasing function of λ , as opposed to ϕ , which increases asymptotically until

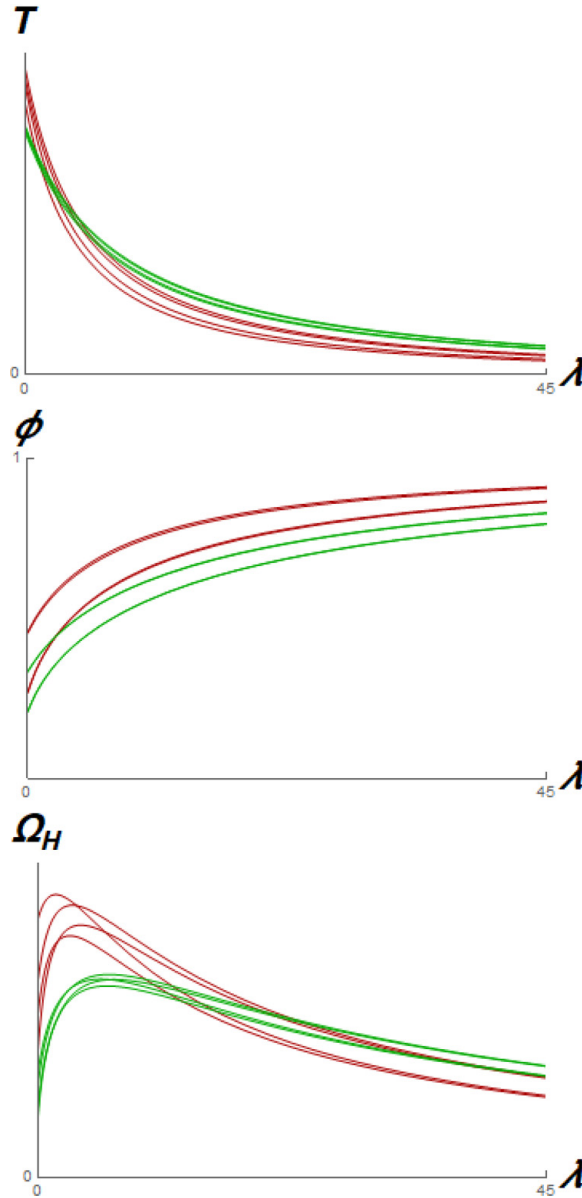


Fig. 1. (Color online) Behavior of T , ϕ and Ω_H in the γ_3 -process, for values (Q, M, J) between $(2, 1, 1)$ (red) and $(2.5, 1.5, 1.5)$ (green).

reaching the maximum value of 1 (in the appropriate units). The angular velocity experiences a brief initial growth but ends up becoming zero. This behavior is illustrated in Fig. 1.

5. The Legendre Group

Earlier we mentioned that Legendre transforms in a thermodynamic system allow us to describe thermodynamic states and processes by new control parameters, for example exchanging volume for pressure, temperature for entropy, etc. Legendre transforms do this by introducing new thermodynamic potentials by taking ϕ and transforming into a function ϕ' of the new control parameters, which contains exactly the same thermodynamic information. In this way, in the framework of contact geometry, these transformations are implemented by means of contactomorphisms of the form (14) in the TPS \mathcal{B} . Although the subset of transformations (14) does not belong to a subgroup of contactomorphisms under composition, the goal of this section is to show that in particular one-dimensional transforms do belong to a larger subgroup of contactomorphisms, which in turn induces a group of symplectomorphisms in $T^*\mathcal{E}$; this after performing the identification $\mathcal{B} = \mathbb{R} \times T^*\mathcal{E}$. This subgroup, which we call in this work the *Legendre group*, is of interest to us because it implements a symplectic action that allows us to characterize by means of n constant quantities the regions whose points are different representations of the same thermodynamic state under different continuous transformations of Legendre.

Let us start by identifying \mathcal{L}_i ($I = [i]$ for $i = 1, 2, \dots, n$) as a particular element of a one-parameter group of infinitesimal transformations: $\{\mathcal{L}_{\alpha^i}\}_{\alpha^i \in S^1}$, where

$$\mathcal{L}_{\alpha^i}(\phi, q, p) = \begin{cases} \phi' = \sin(2\alpha^i) \left[\frac{(q^i)^2 - (p_i)^2}{4} \right] \\ \quad - p_i q^i \sin^2(\alpha^i) + \phi, \\ q'^i = q^i \cos(\alpha^i) - p_i \sin(\alpha^i), \\ q'^k = q^k, \\ p'_i = q^i \sin(\alpha_i) + p_i \cos(\alpha_i), \\ p'_k = p_k. \end{cases}$$

Specifically, $\mathcal{L}_{\alpha^i = \frac{\pi}{2}} = \mathcal{L}_i$. For each value $\alpha^i \in S^1$ these transformations \mathcal{L}_{α^i} are contact transformations [27], which induce symplectomorphisms on $T^*\mathcal{E}$ by pulling back through a cross-section $\ell : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ and then projecting back to $T^*\mathcal{E}$, as we saw above, giving rise to the transformations

$$L_{\alpha^i}(q, p) = \begin{cases} q'^i = q^i \cos(\alpha^i) - p_i \sin(\alpha^i), \\ q'^k = q^k, \\ p'_i = q^i \sin(\alpha^i) + p_i \cos(\alpha^i), \\ p'_k = p_k. \end{cases}$$

These transformations are rotations by an angle α^i in the plane $\text{span}(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_i})$. Similarly, we can compose all transformations L_i to obtain a continuous total Legendre transform

$$L_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)} \equiv L_{\alpha^n} \circ L_{\alpha^{n-1}} \circ \dots \circ L_{\alpha^1}. \quad (47)$$

The set $\{L_\alpha\}_{\alpha \in T^n}$, together with the composition operation, generates an n -parametric subgroup of symplectomorphisms, which we can identify with the maximal torus of the group of rotations in \mathbb{R}^{2n} , that is, the maximum abelian subgroup of $\text{SO}(2n)$ [28]. Indeed, for each $\alpha \in T^n$, L_α generates n simultaneous but independent rotations in the planes $\text{span}(\frac{\partial}{\partial q^1}, \frac{\partial}{\partial p_1})$, $\text{span}(\frac{\partial}{\partial q^2}, \frac{\partial}{\partial p_2})$, \dots , $\text{span}(\frac{\partial}{\partial q^n}, \frac{\partial}{\partial p_n})$, by α^1 , α^2 , \dots , α^n , respectively.

In a more general sense, we can define the left action $L : T^n \times T^*\mathcal{E} \rightarrow T^*\mathcal{E}$ just like $L_\alpha : T^*\mathcal{E} \rightarrow T^*\mathcal{E}$, thus, getting a symplectic action. Regarding the Lie algebra $\mathfrak{t}^n \simeq \mathbb{R}^n$, this also has an action on $T^*\mathcal{E}$ which is inherited from L from its differential version, i.e. each element $\beta = \beta^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \in \mathfrak{t}^n$ can be associated with a vector field on $T^*\mathcal{E}$ defined as

$$\hat{\beta}(q, p) = \frac{d}{ds} L_{s\beta}(q, p)|_{s=0} = \sum_{i=1}^n \beta^i \left(q^i \frac{\partial}{\partial p_i} - p_i \frac{\partial}{\partial q^i} \right). \quad (48)$$

Being L a symplectic action, we can say that, at least locally, the fields (48) are Hamiltonian fields, since $0 = \mathcal{L}_{\hat{\beta}}\Omega = d(i_{\hat{\beta}}\Omega) = 0$ implies that for every $\beta \in \mathfrak{t}^n$ there exists $\mu_\beta \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathcal{E})$ such that $\hat{\beta} \in \mathfrak{X}(T^*\mathcal{E})$ is its Hamiltonian vector field

$$d\mu_\beta = -i_{\hat{\beta}}\Omega.$$

An important characteristic of the fields (48) is that they are linear in the Lie algebra, since in essence they are the pushforwards of the action L in the identity of T^n [29]. This allows us to conclude that the assignment of the Hamiltonians μ_β is also linear in the algebra, i.e. there exists a mapping $\mu : T^*\mathcal{E} \rightarrow (\mathfrak{t}^n)^*$, called the momentum map [29] such that $\langle \mu, \beta \rangle = \mu_\beta$. In our particular case, we can see that this momentum map is given by

$$\mu(q, p) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(q^i)^2 + (p_i)^2] d\alpha^i. \quad (49)$$

Indeed

$$\begin{aligned} d(\langle \mu(q, p), \beta \rangle) + i_{\hat{\beta}}\Omega &= d\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (dp_i \wedge dq^i)\right) + \Omega \left(\sum_{j=1}^n \beta^j \left(q^j \frac{\partial}{\partial p_j} - p_j \frac{\partial}{\partial q^j}\right)\right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \beta^i [q^i dq^i + p_i dp_i] + \sum_{i=1}^n [\beta^i q^i dq^i + p_i dp_i] = 0. \end{aligned}$$

An important feature of the momentum map (49) is that it is equivariant, i.e. it maps the entire orbit $\mathcal{O}_{(q,p)} = \{L_\alpha(q,p)\}_{\alpha \in T^n}$ to an only point $\mu(q,p) \in \mathfrak{t}^n$

$$\begin{aligned} \mu \circ L_\alpha(q,p) &= \mu(q \cos(\alpha) - p \sin(\alpha), q \sin(\alpha) + p \cos(\alpha)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(q^i \cos(\alpha^i) - p_i \sin(\alpha^i))^2 \\ &\quad + (q^i \sin(\alpha^i) + p_i \cos(\alpha^i))^2] d\alpha^i \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(q^i)^2 + (p_i)^2] d\alpha^i = \mu(q,p). \end{aligned}$$

This means that all states in the orbit $\mathcal{O}_{(q,p)}$, which are geometrically equivalent under the generalized notion of Legendre transform that we have introduced, are characterized by the constant n quantities

$$\mu_i = -\frac{1}{2} [(q^i)^2 + (p_i)^2]. \tag{50}$$

6. Conclusions

An important element in a geometrization program of thermodynamics is the contact structure [1, 3, 8]. From this, the symplectic nature of thermodynamics appears naturally when identifying the phase space as a contactization of the cotangent bundle of the equilibrium space, which also has an organic construction attached to the ideas of nongeometric thermodynamics. In this sense, the Hamiltonian description of thermodynamic processes is a natural consequence of the description of these processes via contact Hamiltonians [1, 7, 30]. This is at the same conceptual level, i.e. it is a translation of contact geometry into symplectic geometry. Likewise, the maps that relate one thermodynamic system to another are also part of the phase space with its contact structure [31].

The introduction of the symplectic approach in thermodynamics is interesting for two reasons. The first one has to do with the simplification of the structures involved in the description of thermodynamics. Although contact geometry is an increasingly used tool in physics [3], symplectic geometry offers a simple tool to explore physical systems, for example, following a canonical quantization approach, which is on the border between classical and quantum thermodynamics. As a second aspect to note is that the symplectic perspective gives us a Hamilton–Jacobi-like equation (27) whose general solution is a fundamental equation of an n -parametric family of thermodynamic systems, which in principle would allow us to characterize complete families of thermodynamic systems. However, for an *a priori* given system we should be able to choose among all the Hamiltonians the one that captures the physical behavior of that system. This problem does not seem to be easy to solve because of the large number of available Hamiltonians and thermodynamic systems. Nevertheless, it seems reasonable to conjecture that for any system it is always

possible to find a Hamiltonian from which the corresponding fundamental equation can be derived. Another indication of this freedom is the case of the Hamiltonian h_3 taken as an example of a map that relates different thermodynamic systems. This Hamiltonian flow might be locally interpreted as a generator of transformations that relate different thermodynamic systems. This resembles the Kustaanheimo–Stiefel transformation in classical mechanics that relates a two-body gravitational system with a harmonic oscillator [32,33]. It would be interesting to further investigate this similarity.

In the geometric description of thermodynamics, metric structures have also been introduced and investigated at the level of the phase space and the equilibrium space [8, 12, 34–36]. In the case of symplectic geometry, there are different manners to introduce metric structures that could be applied to study symplectic thermodynamics as formulated in this work. This is a task that we expect to address in subsequent works.

Appendix A. Nonuniqueness of the Contactization Procedure

The key to the contactization procedure on a manifold \mathcal{M} is that given an exact symplectic structure, it is always possible to introduce it in a codimension-one environment, becoming a pre-symplectic structure, which naturally defines a maximum nonintegrable and co-orientable contact distribution. An important detail that stands out in this context is that the distributions are generated by the kernel of the *symplectic potential* θ and not directly by the symplectic form, $\Omega = d\theta$. This means that we can associate with \mathcal{M} not only a single contact manifold $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, but also one for each choice of the 1-form θ in the class of the De Rham’s cohomology of symplectic potentials. Since θ and $\theta + dF$ are 1-forms that generate the same symplectic form, $\Omega = d\theta = d(\theta + dF)$, both 1-forms generate different contact distributions in $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$: $\alpha_C = dz - \pi_C^* \theta \neq dz - \pi_C^* \theta - d(\pi_C^* F) = \alpha'_C$.

At a deeper level, the root of the problem comes from the fact that, when choosing a portion of a tangent space (a distribution), the complementary distribution is not unique; in this case, one chooses the vertical part and has the freedom to define the horizontal part of the distribution. On the other hand, this ambiguity is not so serious in the geometric sense, since we can always define a mapping Φ_F of the contact manifold with 1-form α'_C to the contact manifold with 1-form α_C , such that it relates only contact distributions

$$\Phi_F : (z, x) \mapsto (z' = z + \pi_C^* F, x' = x). \quad (\text{A.1})$$

In effect, (A.1) is basically a vertical translation on the fibers; therefore, $\pi_C \circ \Phi_F = \pi_C$, this being the key of mapping a contact 1-form to a contact 1-form

$$\begin{aligned} \Phi_F^* \alpha'_C &= \phi_F^* dz' - \Phi_F^* \circ \pi_C^* (\theta + dF) \\ &= d(z + \pi_C^* F) - \pi_C^* \theta - d(\pi_C^* F) \\ &= dz - \pi_C^* \theta = \alpha_C. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Thus, for practical purposes, the choice of contactization is the choice of a coordinate system; therefore, without losing generality we can speak of a single contactization associated with \mathcal{M} .

Acknowledgments

This work was partially supported by UNAM-DGAPA-PAPIIT, Grant No. 114520, and Conacyt-Mexico, Grant No. A1-S-31269.

References

- [1] R. Mrugała, Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics, *Rep. Math. Phys.* **4** (1978) 419–427.
- [2] V. Zorich, Thermodynamics and contact geometry, in *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences* (Springer, Berlin, 2011), pp. 91–97.
- [3] A. L. Kholodenko, *Applications of Contact Geometry and Topology in Physics* (World Scientific Publishing Co., Singapore, 2013).
- [4] H. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (Wiley, New York, 1985), pp. 131–137.
- [5] V. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Vol. 60 (Springer Science & Business Media, 2013).
- [6] K. Cahill, *Physical Mathematics* (Cambridge University Press, 2013).
- [7] R. Mrugała, Submanifolds in the thermodynamic phase space, *Rep. Math. Phys.* **21** (1985) 197–203.
- [8] H. Quevedo, Geometrothermodynamics, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 013506.
- [9] H. Geiges, *An Introduction to Contact Topology*, Vol. 109 (Cambridge University Press, 2008).
- [10] J. Etnyre, Introductory lectures on contact geometry, preprint (2001), arXiv:math-ph/0111118.
- [11] D. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds* (Springer Science & Business Media, 2010).
- [12] H. Quevedo and M. N. Quevedo, Fundamentals of geometrothermodynamics, preprint (2011), arXiv:math-ph/1111.5056.
- [13] R. Mrugała, Contact structure in thermodynamic theory, *Rep. Math. Phys.* **29** (1991) 109–121.
- [14] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (CRC Press, 2003).
- [15] A. da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin, 2008).
- [16] K. Feng, Contact algorithms for contact dynamical systems, *J. Comput. Math.* **1** (1998) 1–14.
- [17] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Adv. Math.* **6** (1971) 329–346.
- [18] M. V. Vallina, On the geometry of the Hamilton-Jacobi equation, Ph.D. thesis, Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT Universidad Autónoma de Madrid, UAM (2015).
- [19] R. Mrugała, Continuous contact transformations in thermodynamics, *Rep. Math. Phys.* **33** (1993) 149–154.
- [20] O. Luongo and H. Quevedo, Cosmographic study of the universe's specific heat: A landscape for cosmology? *Gen. Relativ. Gravit.* **46** (2014) 1649.

- [21] A. Aviles, J. L. Cervantes-Cota, J. Klapp, O. Luongo and H. Quevedo, A Newtonian approach to the cosmological dark fluids, in *Selected Topics of Computational and Experimental Fluid Mechanics* (Springer, 2015), pp. 527–539.
- [22] A. Ghosh and C. Bhamidipati, Contact geometry and thermodynamics of black holes in AdS spacetimes, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 126020.
- [23] J. D. Bekenstein, Black holes and entropy, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
- [24] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, *Comm. Math. Phys.* **31** (1973) 161–170.
- [25] S. W. Hawking, Particle creation by black holes, *Comm. Math. Phys.* **43** (1975) 199–220.
- [26] P. C. W. Davies, Thermodynamics of black holes, *Rep. Progr. Phys.* **41** (1978) 1313–1355.
- [27] D. García Peláez and C. S. López-Monsalvo, Infinitesimal Legendre symmetry in the Geometrothermodynamics programme, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 083515.
- [28] J. F. Adams, *Lectures on Lie Groups* (University of Chicago Press, 1969).
- [29] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Vol. 17 (Springer Science & Business Media, 2013).
- [30] A. Bravetti, C. S. López-Monsalvo and F. Nettel, Contact symmetries and Hamiltonian thermodynamics, *Ann. Phys.* **361** (2015) 377–400.
- [31] J. Jurkowski, Canonical deformations of surfaces of equilibrium states in thermodynamic phase space, *Phys. Rev. E* **62** (2000) 1790–1798.
- [32] P. Kustaanheimo and E. Stiefel, Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization, *J. Reine Angew. Math.* **218** (1965) 204–219.
- [33] P. Saha, Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **400** (2009) 228–231.
- [34] F. Weinhold, Metric geometry of equilibrium thermodynamics, *J. Chem. Phys.* **63** (1975) 2479–2483.
- [35] G. Ruppeiner, Thermodynamics: A Riemannian geometric model, *Phys. Rev. A* **20** (1979) 1608–1614.
- [36] D. Sivak and G. Crooks, Thermodynamic metrics and optimal paths, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 190602.

Study of ideal gases in curved spacetimes

Luis Aragón-Muñoz

*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Ciudad de México, México **

Hernando Quevedo[†]

*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Ciudad de México, México * and
Dipartimento di Fisica and ICRA, Università di Roma “La Sapienza”, I-00185 Roma, Italy*

(Dated: February 28, 2023)

The influence of a curved spacetime M on the physical behavior of an ideal gas of N particles is analyzed by considering the phase space of the system as a region of the cotangent bundle T^*M^N and using Souriau’s Lie group thermodynamics to define the corresponding probability distribution function. While the construction of the phase space respects the separability of the system, by forcing each particle to satisfy the so-called mass-shell constraint, the probability distribution is constructed by mixing the natural symplectic structure of the cotangent bundle with a Hamiltonian description of the system. In this way, the spacetime is introduced into the statistics and its isometries turn out to be of special interest because the distributions are parameterized by the elements of the Lie algebra of the isometry group, through the momentum map of the action of the isometries in T^*M^N . We find the Gibbs distribution that, in the simplest case of a flat spacetime, reduces to the so-called modified Jüttner distribution, used to describe ideal gases in the regime of special relativity. We also define a temperature-like function using the norm of a Killing vector, which allows us to recover the so-called Tolman-Ehrenfest effect. As a particular example, we study the outer region of a Schwarzschild black hole, for which a power series expansion of the Schwarzschild radius allows us to represent the partition function and the Gibbs distribution in terms of the corresponding quantities of the Minkowski spacetime.

Keywords: Statistical physics, General Relativity, Symplectic geometry, Momentum map, Souriau’s Lie group statistics, Schwarzschild black hole

I. INTRODUCTION

The study of many-particle systems in situations far from laboratory conditions, such as high temperatures or intense gravitational fields, has interested physicists from various areas for many years, mainly for theoretical reasons to reinforce the foundations of physics itself [1–6]. Recently, it has gained more interest due to the new advances in astrophysics that motivate the statistical discussion of systems such as hot plasmas [7–10] or accretion disks around black holes [11–14]. Even on the large scale of the universe, statistical models for galaxies have been proposed [15–19], which are similar to those that model dark matter in particle physics [20–24]. In this regard, despite the great interest in the subject, there is no a well-established theory for statistical mechanics in curved backgrounds¹.

In this work, we address the problem of the intersection between statistical mechanics and general relativity, and we investigate how the curvature of a background static spacetime affects the properties of a many-particle system (specifically, an ideal gas). Our analysis is oriented from the perspective of symplectic geometry and Hamil-

tonian systems². This perspective is based on the precursor ideas of Souriau et al. [28–32]. In particular, we will focus on the model called Lie groups thermodynamics proposed by Souriau in 1969. The main idea of this model is simple. In classical statistical thermodynamics, a system in equilibrium with a heat bath is usually described by the Gibbs canonical ensemble, which can be defined on the phase space of the corresponding system. Souriau generalized the Gibbs construction to the case of a symplectic manifold equipped with a dynamical group, i.e., a group associated with the symmetries of the system. This generalization allows us to investigate systems that usually cannot be considered in classical statistical thermodynamics. Although this approach implies the application of a rigorous mathematical formalism, the results obtained by using it are as physical as those of classical statistical thermodynamics. To be more specific, in Lie groups thermodynamics the states of a many-particle system are described through probability distribution functions (on a symplectic manifold with Liouville’s natural measure), which are parametrized by the infinitesimal generators of a symmetry of the system, though the exponential of the constant of motion associated with the symmetry. This means that the probability distribution function (pdf) is parametrized by a vector in the Lie algebra of the Lie group of the sym-

* luis.aragon@correo.nucleares.unam.mx

† quevedo@nucleares.unam.mx

¹ See [25], especially the introduction, for a more complete discussion of the problems that arise in the general relativity frame

² Different approaches to study the effect of curved spacetimes on many-particle systems can be found in the articles [25–27].

metries of a Hamiltonian system, by means of the exponential of the (negative) momentum map evaluated on that vector. This framework allows us to work with non-standard Hamiltonian systems in which the evolution is not generated by a function interpreted as the energy of the system, and the evolution parameter is not Newton's absolute and external time. In our case, this is essential because the Hamiltonian system depends on a geometrical-pure-nature function constructed directly by the metric tensor, and time loses the special treatment it receives in non-relativistic physics (in addition, the notion of energy of the system is a bit tricky, which is why we demand that the spacetime be static). Also, this framework allows us to describe physical effects generated by gravitational fields such as the Tolman-Ehrenfest effect that claims the non-constancy of the temperature of a body in a thermal equilibrium state, when is affected by a gravitational field (see [33] for a complete description). In addition, in the limiting case of the Minkowski spacetime, our formulation reduces to the one well known from the works of Jüttner et al [34–36], which is used to describe systems in the framework of special relativity.

This work is organized as follows. In Sec.(II), we review the formalism of Lie group thermodynamics. We first formulate the definition of a statistical state and then show how a Lie group acts on a Hamiltonian system to generate the corresponding symmetries. Finally, we define the generalized statistical states we will use later to study an ideal gas in a static spacetime. In addition, we use this section to introduce most of the mathematical formalism we will use throughout the work, like the momentum map and Souriau's vectors in the Lie algebra.

The results of our work are presented in Secs.(III)–(VIII) and organized as follows. In Sec.(III), we begin by analyzing the Hamiltonian model that describes a free particle of mass m in a spacetime (M, g) , using its cotangent bundle T^*M endowed with its natural symplectic form Ω , a Hamiltonian function H generated by the (inverse of the) metric tensor g and a constraint hypersurface in T^*M , arising from the mass-shell condition that satisfies any massive particle. As part of this section, in subsection (III A) the isometry group G of the spacetime (M, g) is presented, and we define its action on the cotangent bundle of the particle, showing that the isometries group generates symmetries of the proposed Hamiltonian system, following Sec. (II).

In Sec.(IV), we formulate the model of a dilute ideal gas as a set of N identical particles enclosed in a box that travels in a spatially bounded geodesic trajectory. We impose the condition that the particles interact only with the internal walls of the box in very brief moments and in a perfectly elastic manner, in such a way that the Hamiltonian model presented in Sec.(III), including the action from the isometry group, can be generalized to describe this ideal gas by means of a) the separability of the system and b) the spatial restriction of the geodesics to the world tube that surrounds the geodesic of the box. Finally, in Sec. (IV A), we introduce the concepts of

static spacetimes and static states.

In Sec. (V), we define the static states of a diluted ideal gas through the Gibbs pdf introduced in Sec. (II C). We prove the existence of static states, meaning that in the isometry Lie algebra, there are Souriau vectors that parameterize the states. We also show that the definition of static equilibrium allows us to always work at constant time from the perspective of static observers.

A decomposition of the Gibbs pdf of the ideal gas into one-particle distributions is done in Sec.(VI). This decomposition is based on the separability of the ideal gas and on an adequate proposal of phase space as a submanifold within the cotangent bundle of the ideal gas. Related to this phase space, the induced measure is deduced from the Liouville measure, giving rise to formal expressions both for the one-particle partition function and for the Gibbs one-particle distribution. As part of this section, in subsections (VI A) and (VI B), we study a particular case of distributions parametrized by elements ($\beta > 0$) of the Lie subalgebra of the time translation subgroup (subalgebra of the Lie algebra of the whole isometry group) in the Minkowski spacetime and in the Schwarzschild spacetime, respectively. We find a distribution, which is reminiscent of the modified Jüttner distribution, used to describe ideal gases in the framework of special relativity, and a generalization to the case of the curved Schwarzschild spacetime. In the limiting case of the Minkowski spacetime, we interpret the role of β as the inverse of the temperature of a thermodynamic system with statistics given exactly by the modified Jüttner distribution. For the Schwarzschild spacetime outside the event horizon, we perform a power series expansion of the Schwarzschild radius, which allows us to express the statistical elements of the generalized Jüttner distribution in terms of quantities of the flat Minkowski spacetime. In particular, we define a temperature-like function that reduces to the Tolman-Ehrenfest temperature in the asymptotic flat limit.

Finally, in Sec.(VII), we use the equivariance property of the momentum map to show the invariance of the total partition function with respect to a certain class of special isometries that map the phase space onto itself. This leads us to consider the possibility of an equivalence in the measurements of different static observers connected through the aforementioned special isometries, opening a possible new argument in the well-known debate on the law of transformation of temperature between different observers.

For complementarity, we include in four appendices specific calculations used in the development of the sections described above. In Appendix (A), we deduce the so-called equivariance property of (some) momentum maps. In Appendix (B), we calculate the induced measure that synthesizes the physical and geometric properties of our statistical analysis. Appendix (C) deals with the calculation of an integral and the development of the expression of the one-particle partition function, and Appendix (D) develops the series expansion of the one-

particle partition function for the Schwarzschild case.

II. LIE GROUPS THERMODYNAMICS

In physics, the use of statistical distributions to model the state of a system, which is computationally impossible to obtain by analytical methods due to the immense number of degrees of freedom and constituents, has turned out to be a powerful tool. Under the correct assumptions, the statistical approach connects with thermodynamics to such a degree that, in the physics community, it is widely accepted that behind a thermodynamic system there should be a microscopic model of statistical nature [37–39].

More specifically, knowing the statistical model behind a system is reduced to finding a pdf ρ , defined on the space of the microscopic states of the system, which allows us to obtain macroscopic information by averaging over the large number of microscopic degrees of freedom. In particular, after a precise identification of these macroscopic properties, which emerge from the possibly very complex individual dynamics of the particles, the same distribution ρ allows us to find the fundamental equation of a thermodynamic system through the so-called partition function [37–39].

In this way, we will use the Lie group thermodynamics formalism [28–32], where probability density functions are parameterized by vectors in the Lie algebra of the Lie group of symmetries of the physical system. In other words, and very roughly, statistics à la Souriau³ finds statistical models that are invariant with respect to the symmetries of the underlying Hamiltonian model. This approach generalizes the usual statistical model that is only invariant under the Hamiltonian flow of the system itself, generally interpreted as translations in Newtonian time with the Hamiltonian function being the energy function.

We emphasize the fact that this formalism offers a generalization, rather than just a mathematical reformulation, since by its very nature, it can be applied to completely general Hamiltonian systems⁴, where there is no need for a physical interpretation of the Hamiltonian and the evolution parameter in terms of the lab-measurable energy and time. For this reason, we apply in this work the formalism of Lie group thermodynamics to the Hamiltonian of a many-particle system in a

curved spacetime, taking the spacetime isometries as the symmetries of the system, and parameterizing the ρ distribution of the statistical model with the infinitesimal generators of those isometries. To see exactly how this works, first we have to setup some statistical tools.

A. Classical statistical states

Let us consider a physical system modeled as a Hamiltonian system (U, Ω, H) , where the pair (U, Ω) is a symplectic manifold of dimension $2D$ and $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ is the Hamiltonian function, which guides the dynamics of the system through the Hamiltonian flow $\varphi^H : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ generated by the Hamiltonian vector field $X^H \in \mathfrak{X}(U)$, which, in turn, is defined via the relation [41]

$$dH = -i_{X^H}\Omega. \quad (1)$$

In other words, if the state of the system at $\tau = 0$ is given by $u \in U$, at any other instant⁵ $\tau \in \mathbb{R}$ the state of the system will be given by $\varphi^H(\tau, u) \in U$. In this sense, for each $\tau \in \mathbb{R}$ the Hamiltonian flow defines a diffeomorphism on U given by $\varphi_\tau^H : u \mapsto \varphi^H(\tau, u)$, such that it leaves the Hamiltonian system invariant [41]:

$$\varphi_\tau^H(U) = U, \quad (2)$$

$$H \circ \varphi_\tau^H = H, \quad (3)$$

$$[\varphi_\tau^H]^*\Omega \circ \varphi_\tau^H = \Omega, \quad (4)$$

where $[\varphi_\tau^H]^* : T^*U \rightarrow T^*U$ is the pullback of φ^H .

At the local coordinate level, Eq.(1) is displayed as a set of first-order differential equations in the parameter τ , which are known as Hamilton's equations [41], and whose solutions are the integral curves of X^H , that is, curves $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow U$ defined by the conditions

$$\dot{\hat{\gamma}}(\tau) = \varphi_\tau^H(\hat{\gamma}(0)), \quad (5)$$

$$X^H \circ \hat{\gamma}(\tau) = \frac{d\hat{\gamma}}{d\tau}. \quad (6)$$

The manifold U is oriented by virtue of the existence of the Liouville top-form [41, 42]

$$\omega_\Omega = \frac{1}{D!}\Omega^{\wedge D} = \frac{1}{D!}\underbrace{\Omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{D \text{ times}}. \quad (7)$$

Such a top-form induces, on the measurable space $(U, \mathfrak{B}(U))$ with the Borel σ -algebra⁶, the so-called Li-

³ Souriau's work in the field of statistical physics is only a small part of the program he set out to understand physics as a geometric theory, more specifically, as a symplectic theory [28]. For more information on this, we highly recommend consulting [40].

⁴ In this regard, Souriau explores in [28] several important cases as, for example, gases in centrifuges that describe processes such as the enrichment of Uranium 235 or the creation of ribonucleic acids. Souriau also analyzes relativistic systems, obtaining the Jüttner distribution for relativistic ideal gases [28]. On the other hand, the Lie Group thermodynamics is also used in information theory and machine learning. For a more detailed discussion of applications, see [40].

⁵ The τ parameter is not really/needly related to time, so here "instant" is just an expression.

⁶ A σ -algebra of a set is the family of its subsets which, containing the void and the set itself, is closed under the complement and under the countable union [43, 44]. This definition formalizes the idea of how to divide a set to measure its parts. In particular, the Borel algebra $\mathfrak{B}(U)$ of a smooth manifold U is the smallest σ -algebra of U that contains its topology. As such, it is the set of all open sets of U and its complements (the closed sets), as well as any countable unions and intersections of them [43, 44].

ouville measure $\lambda_\omega : \mathfrak{B}(U) \rightarrow [0, +\infty)$ defined by [42]

$$\lambda_\omega(A) = \int_A \omega_\Omega(u), \quad (8)$$

whose principal feature is that it assigns volumes invariant under symplectomorphisms, that is, if $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ is any symplectomorphism, then for all $A \in \mathfrak{B}(U)$ holds

$$\lambda_\omega(f(A)) = \lambda_\omega(A). \quad (9)$$

Indeed, given the invariance of the top-form ω_Ω under the pullback f^* , inherited from the invariance of the symplectic 2-form (see Eq.(4)), we have

$$\lambda_\omega(f(A)) = \int_{f(A)} \omega_\Omega(u) = \int_A f^* \omega_\Omega \circ f(v) = \int_A \omega_\Omega(v) = \lambda_\omega(A).$$

In particular, the Liouville measure is invariant under the Hamiltonian flow φ^H of the system, a fact that is known as Liouville's theorem [41].

With this brief background of measure theory, we can define a statistical state of a physical system as a probability density function (pdf) $\rho : U \rightarrow [0, +\infty)$, related to (8) in the form [32]

$$\lambda_\rho(A) = \int_A d\lambda_\omega(u) \rho(u) = \int_A \omega_\Omega(u) \rho(u), \quad (10)$$

such that it satisfies the normalization condition:

$$\int_U d\lambda_\omega(u) \rho(u) = 1. \quad (11)$$

The physical interpretation of ρ is that of the ensemble theory: when the number of particles of the physical system is large, and the correlations between them are few, the dimension of the phase space U must be even larger in order to capture all the degrees of freedom of the system [38]. For example, in a mechanical system of N particles, the dimension of U is around the order $6N$ [38]. In any case, the system of differential equations (1) that must be solved to find the Hamiltonian flow φ^H , coupled to the set of initial conditions, to fully specify the state of the system, ends up being computationally overwhelming. For this reason it is necessary to use statistical methods. Instead of trying to get exactly the dynamic state u at all times, we can generate enough copies (an infinite number, if necessary) of the system and, simultaneously, perform the measurement of the dynamic state in each of these copies, generating with this a big data set at all times. In this sense, u becomes a random variable and ρ describes the way in which u is distributed over the entire manifold U . Thus, physically we interpret $\lambda_\rho(A)$ as the probability of finding the state of the system in the measurable subset $A \subset U$.

It is common that the dynamic state of a system does not completely visit all U , but for dynamic reasons it is constrained to remain only in a certain region $\mathcal{A} \subset U$, which must be invariant under the Hamiltonian flow:

$$\varphi^H(\mathcal{A}) = \mathcal{A}. \quad (12)$$

In such a case, we look for the statistical state to have support over \mathcal{A} , i.e., the statistical model constraints the system to remain in \mathcal{A} , requiring that there be no distributed probability in the complement $\mathcal{A}^c = U - \mathcal{A}$, that is⁷

$$\lambda_\omega(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} d\lambda_\omega(u) \rho(u) = 1. \quad (13)$$

In this regard, it is a well-known fact that the probability distribution that best describes the state of a system, for which there is no prior information, is the constant and uniform probability distribution [45]

$$\rho_0(u) = \frac{\Theta_{\mathcal{A}}(u)}{\text{Vol}(\mathcal{A})}, \quad (14)$$

where $\text{Vol}(\mathcal{A}) = \lambda_\omega(\mathcal{A})$ is the volume assigned to \mathcal{A} by the Liouville measure, and

$$\Theta_W(u) = \begin{cases} 1, & u \in W, \\ 0, & u \notin W \end{cases}, \quad (15)$$

a notation we will use throughout this work.

Opposite to this situation, we have the case where we are not completely unaware of the properties of the state of the system, because either from an experimental or a theoretical point of view, we know that some macroscopic property comes from a symmetry of the microscopic system [38, 46]. This is the case, precisely, when the evolution of the system is Hamiltonian and the conservation of H is taken into account (see Eq.(3)), in which case the best distribution available to describe the statistics of the system is the Gibbs distribution [32]

$$\rho(\beta; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{A}}(u)}{Z(\beta)} e^{-\beta H(u)}, \quad (16)$$

where $Z(\beta)$ is the so-called partition function,

$$Z(\beta) = \int_{\mathcal{A}} d\lambda_\omega(u) e^{-\beta H(u)}, \quad (17)$$

and $\beta > 0$ is a real parameter that can be identified with the inverse of the temperature of a system in thermodynamic equilibrium from the statistical point of view [32]. We say that a statistical state is an equilibrium statistical state if it is invariant under the Hamiltonian flow of the system [39],

$$\mathcal{L}_{X^H} \rho(u) = 0. \quad (18)$$

Naturally, (16) is an equilibrium state because its only dependence on u is through $\Theta_{\mathcal{A}}$ and H , and both functions are invariant under the Hamiltonian flow of the system (see Eqs.(3) and (12)).

⁷ Formally, the support of a statistical state is the smallest of all closed sets with measure 1 [43, 44].

B. Symmetry groups and momentum map

Consider the more general case in which we do not have only a monoparametric group of symmetries of the system, as is the case of the family $\{\varphi_\tau^H\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ generated by φ^H , instead we have a G -parametric group of symplectomorphisms, where G is a Lie group of dimension $\dim(G) = k$. Concretely, given a Lie group G with the group product represented by concatenation,

$$\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in G, \quad \Lambda_1 \Lambda_2 \in G,$$

and identity element $e \in G$ such that

$$\forall \Lambda \in G, \quad \Lambda e = e\Lambda = \Lambda.$$

Furthermore, we define a smooth left action on U as a map

$$\Psi : G \times U \rightarrow U, \quad (19)$$

which, via the diffeomorphisms $\Psi_\Lambda : u \mapsto \Psi(\Lambda, u)$, satisfies the properties [41, 47, 48]

$$\Psi_e = \text{Id}_U : u \mapsto u, \quad (20)$$

$$\Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2} = \Psi_{\Lambda_1 \Lambda_2}. \quad (21)$$

If for each $\Lambda \in G$ the diffeomorphism Ψ_Λ is a symplectomorphism of the symplectic structure Ω , then we say that the action is symplectic and defines a G -parametric $\{\Psi_\Lambda\}_{\Lambda \in G}$ group of symplectomorphisms. If, in addition, for all $\Lambda \in G$ the Hamiltonian remains unchanged under the symplectomorphism Ψ_Λ ,

$$H \circ \Psi_\Lambda = H, \quad (22)$$

then we say that the action Ψ leaves the Hamiltonian system (U, Ω, H) invariant and, as such, each $\Lambda \in G$ defines a symmetry of the system through Ψ_Λ . In this way, we can precisely understand φ^H as a particular case of the symplectic action of the Abelian group $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ on U that leaves the same Hamiltonian system (U, Ω, H) invariant.

Associated with the concept of a smooth left action we have the concept of fundamental fields of the Lie algebra of the group, which we will denote as \mathfrak{g} . The fundamental vector field $\psi_\chi \in \mathfrak{X}(T^*U)$ of the element $\chi \in \mathfrak{g}$, is the vector field over U generated by the action of the one-parameter subgroup $\{\exp(s\chi)\}_{s \in \mathbb{R}}$ [41],

$$\psi_\chi(u) = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}}(u) \right|_{s=0}, \quad (23)$$

where $\exp : \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \rightarrow G$ is the exponential map that relates group elements near the identity with displacement/tangent vectors in the tangent space of G , under the identification $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ [47].

Another way of understanding the concept of the fundamental field ψ_χ of $\chi \in \mathfrak{g}$, is as the pushforward (see Fig.(1))

$$\psi_\chi(u) = [\Psi_e(u)]_* \chi. \quad (24)$$

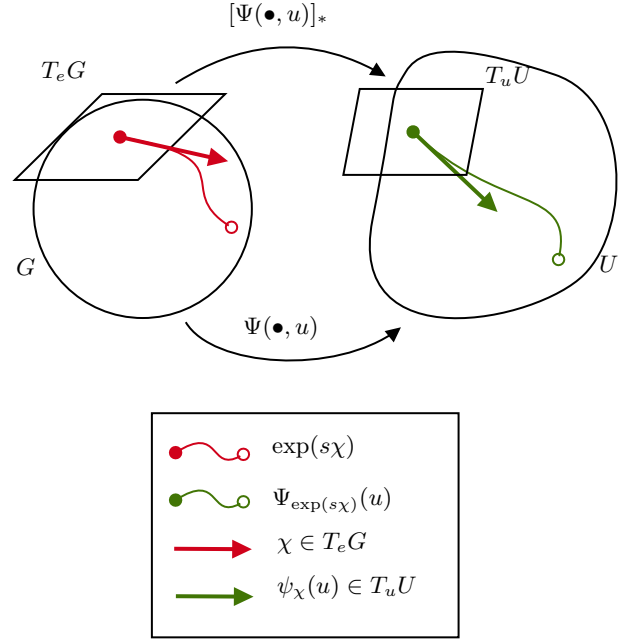


FIG. 1. Fundamental fields as pushforwards.

From this idea we can deduce that the assignment of fundamental fields to elements in the Lie algebra is a linear assignment, that is, for any finite number of elements $\chi_i \in \mathfrak{g}$ and for any equal finite number of real constants $\alpha_i \in \mathbb{R}$, it is fulfilled

$$\psi_{\alpha^i \chi_i}(u) = \alpha^i \psi_{\chi_i}(u). \quad (25)$$

When the action of G on U is symplectic, the fundamental fields (23) are infinitesimal generators of symplectomorphisms, i. e.,

$$\mathcal{L}_{\psi_\chi} \Omega = \left. \frac{d}{ds} [\Psi_{e^{s\chi}}]^* \Omega \circ \Psi_{e^{s\chi}} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \Omega \right|_{s=0} = 0,$$

and, at least locally, are Hamiltonian vector fields for some real functions $\mu_\chi : U \rightarrow \mathbb{R}$, that is, it is satisfied

$$i_{\psi_\chi} \Omega = -d\mu_\chi. \quad (26)$$

Indeed, this result is obtained using Cartan's magic formula considering that all closed forms are, at least locally, exact forms [47]:

$$\mathcal{L}_{\psi_\chi} \Omega = i_{\psi_\chi} d\Omega + d(i_{\psi_\chi} \Omega) = d(i_{\psi_\chi} \Omega) = 0$$

↓

$$i_{\psi_\chi} \Omega = -d\mu_\chi.$$

When the fundamental fields (23) are globally Hamiltonian, Eq.(26) is valid on all U . A particular scenario where this happens is when the symplectic form is exact for a 1-form $\vartheta \in \Lambda^1(U)$, $\Omega = d\vartheta$, and the action Ψ leaves this symplectic potential invariant,

$$[\Psi_\Lambda]^* \vartheta \circ \Psi_\Lambda = \vartheta. \quad (27)$$

Consequently, the action is symplectic,

$$\begin{aligned} [\Psi_\Lambda]^* \Omega \circ \Psi_\Lambda &= [\Psi_\Lambda]^* (d\vartheta) \circ \Psi_\Lambda \\ &= d([\Psi_\Lambda]^* \vartheta \circ \Psi_\Lambda) = d\vartheta = \Omega, \end{aligned}$$

and the fundamental fields are globally Hamiltonian for the functions:

$$\mu_\chi(u) = i_{\psi_\chi} \vartheta(u). \quad (28)$$

Indeed, taking into account that Eq.(27) implies $\mathcal{L}_{\psi_\chi} \vartheta = 0$, and again using Cartan's magic formula, we get

$$\mathcal{L}_{\psi_\chi} \vartheta = i_{\psi_\chi} d\vartheta + d(i_{\psi_\chi} \vartheta) = i_{\psi_\chi} \Omega + d\mu_\chi = 0$$

↓

$$d\mu_\chi = -i_{\psi_\chi} \Omega.$$

Given the linearity in the RHS of (28) in the vectors χ of the Lie algebra (remember Eq.(25)), the function μ_χ in the LHS must also be linear in χ . This observation allows us to define, associated with the symplectic action Ψ of G over U , the map $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$ called the momentum map given by [41]

$$i_\chi \mu(u) = \mu_\chi(u). \quad (29)$$

An important property of the momentum map is that, when G acts on (U, Ω, H) by symmetries, then the functions μ_χ are integral of motion for any element $\chi \in \mathfrak{g}$; this means that they remain constant along the curves $\hat{\gamma}$, which satisfy both Eq.(5) and Eq.(6). This can be proved as follows:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X^H} \mu_\chi)(u) &= (i_{X^H} d\mu_\chi)(u) \\ &= -\Omega(u)(\psi_\chi, X^H) \\ &= \Omega(u)(X^H, \psi_\chi) = -i_{\psi_\chi} (-i_{X^H} \Omega)(u) \\ &= -(i_{\psi_\chi} dH)(u) = -(\mathcal{L}_{\psi_\chi} H)(u) = 0. \end{aligned}$$

In this way, we can interpret the momentum map μ as a geometric object that stores all the constants of motion of the Hamiltonian system (U, Ω, H) , such that to extract the conserved quantity associated with the symmetry generated by the monoparametric group $\{\Psi_{e^{s\chi}}\}_{s \in \mathbb{R}}$, it is enough to evaluate μ in χ .

In the example we are considering with the Abelian group \mathbb{R} , acting on $(U, \Omega = d\vartheta, H)$ through the Hamiltonian flow φ^H , as the Lie algebra associated with \mathbb{R} is just \mathbb{R} , which is trivially identified with its dual vector space \mathbb{R}^* , the momentum map of the action is trivially the same as the Hamiltonian function,

$$\mu = Hd\tau \in \mathbb{R}^*. \quad (30)$$

Then, the fundamental fields $aX^H = \frac{d\varphi^H}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$ of the vectors $a \frac{\partial}{\partial \tau} \in \mathbb{R}$ are associated with the Hamiltonians $aH = i_{a \frac{\partial}{\partial \tau}} Hd\tau$, as we can see from

$$-i_{aX^H} \Omega = -ai_{X^H} \Omega = adH = d(aH).$$

Given the importance of the momentum map in the formalism of Lie groups thermodynamics, we emphasize here the manner it transforms under the action of the group G itself. We will say that the momentum map μ is equivariant if, for any elements $\Lambda \in G$ and $x \in U$, the next relation is fulfilled [28, 41]:

$$\mu \circ \Psi_\Lambda(x) = \text{Ad}_\Lambda^*(\mu(x)), \quad (31)$$

where $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ is the co-Adjoint action (A2) of the group G on the dual of its Lie algebra. See Appendix(A) for a more detailed explanation of this result.

C. Generalized statistical states

Let us summarize the concepts described in the last two subsections. Let ρ be a pdf of a statistical state of a Hamiltonian system $(U, \Omega = d\vartheta, H)$ with a Lie group that implements the symmetries of the system by means of a symplectic action $\Psi : G \times U \rightarrow U$. As a special requirement, suppose that for each $\Lambda \in G$, Ψ_Λ maps the support \mathcal{A} of ρ to itself,

$$\Psi_\Lambda(\mathcal{A}) = \mathcal{A}. \quad (32)$$

The claim that the Gibbs distribution defined in Eq.(16) best fits the statistics of a Hamiltonian system, where the average of the Hamiltonian itself is a macroscopic conserved quantity along the state of the system, can be generalized considering that, for all $\chi \in \mathfrak{g}$, the averages of the functions (28) also must be preserved because they are integrals of motions of the system [32]. As a result of this generalization, we can define the generalized Gibbs states [32]

$$\rho(\chi; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{A}}(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi(u)}, \quad (33)$$

where $Z(\chi)$ is the generalized partition function

$$Z(\chi) = \int_{\mathcal{A}} d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi(u)}, \quad (34)$$

and the element $\chi \in \mathfrak{g}$ is a Souriau vector⁸, which is, roughly speaking, a vector of the Lie algebra that ensures the existence of the integrals $\int_{\mathcal{A}} d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi(u)}$ and $\int_{\mathcal{A}} d\lambda_\omega(u) \mu(u) e^{-\mu_\chi(u)}$ [32].

Given the importance of Souriau vectors, we formulate a rigorous definition as follows. A vector $\chi \in \mathfrak{g}$ is a Souriau vector if and only if there is a neighborhood

$$V_\chi \subset \mathfrak{g} \quad (35)$$

⁸ In the Lie group thermodynamics literature, these vectors are called "generalized temperatures" [32]; however, we will use this name in a more physical context to designate a different concept that will appear later in this work.

and an integrable function $f_\chi : U \rightarrow \mathbb{R}$ over all \mathcal{A} , such that for every point $u \in \mathcal{A}$ and every vector $\chi' \in V_\chi$, the function f_χ is an upper bound of the function $e^{-\mu_{\chi'}(u)}$ [32]:

$$e^{-\mu_{\chi'}(u)} \leq f_\chi(u), \quad \forall u \in \mathcal{A}, \quad \chi' \in V_\chi. \quad (36)$$

We will represent the set of Souriau vectors for a given momentum map as the subset $\mathfrak{g}_\star \subset \mathfrak{g}$, i. e.,

$$\mathfrak{g}_\star = \{\chi \in \mathfrak{g} : \chi \text{ is a Souriau vector}\}. \quad (37)$$

The set \mathfrak{g}_\star has interesting properties. For example, if it is not empty, it is an open convex subset [32]. Furthermore, if the momentum map is equivariant (see Eq.(31)), then \mathfrak{g}_\star is invariant under the adjoint action of the whole group G [32]

$$\text{Ad}_\Lambda(\mathfrak{g}_\star) = \mathfrak{g}_\star. \quad (38)$$

This is true because if $\chi \in \mathfrak{g}$ is a Souriau vector with neighborhood V_χ and function f_χ such that both satisfy the Souriau's condition (36), then $\text{Ad}_\Lambda(\chi)$ also has a neighborhood

$$V_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} = \{\text{Ad}_\Lambda(\chi')\}_{\chi' \in V_\chi},$$

such that Eq.(36) is satisfied by the function f_χ :

$$\begin{aligned} e^{-\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi')}(u)} &= e^{-(\text{Ad}_\Lambda^* \mu)_{\chi'}(u)} \\ &= e^{-\mu_{\chi'} \circ \Psi_{\Lambda^{-1}}(u)} = e^{-\mu_{\chi'}(v)} \leq f(v). \end{aligned}$$

In the case of the Abelian group \mathbb{R} , which acts as a group of symmetry in $(U, \Omega = d\vartheta, H)$ through φ^H , note that $\beta \frac{\partial}{\partial \tau} \in \mathbb{R}$ is a Souriau vector for $\beta > 0$ if H is interpreted as the positive energy of the system. Indeed, in this case, we can define around $\beta \frac{\partial}{\partial \tau}$ the neighborhood

$$V_{\beta \frac{\partial}{\partial \tau}} = \left\{ \beta' \frac{\partial}{\partial \tau} \in \mathbb{R} : \beta - \epsilon \leq \beta' \leq \beta + \epsilon \right\}$$

for $\epsilon \ll 1$ such that $\beta > \epsilon$. Then, for any $\beta' \frac{\partial}{\partial \tau} \in V_\beta$, the function $e^{-i_{\beta' \frac{\partial}{\partial \tau}} H(u) d\tau} = e^{-\beta' H(u)}$ is a positive-definite and decreasing function in all \mathcal{A} , and thus it is bounded from above by any constant function with value $c \geq 1$, satisfying the defining condition (36) for a Souriau vector.

With this preamble of Lie group thermodynamics, we can now build the Hamiltonian system that models a dilute ideal gas in a static spacetime, and determine the corresponding generalized Gibbs statistical states.

III. HAMILTONIAN DESCRIPTION OF A MASSIVE FREE PARTICLE

Consider a particle of mass m in a spacetime (M, g) , where M is a smooth $D = 1 + d$ -dimensional manifold ($d \geq 3$) and g is a Lorentzian metric with signature

$(-1, +d)$. We know that, if the particle is free, its world line in M will be a geodesic curve with respect to the torsionless Levi-Civita connection [49]. This configuration can be described by means of a Hamiltonian system as follows. Let $(T^*M, \Omega = d\vartheta)$ be a symplectic manifold, where T^*M is the cotangent bundle of M , whose points can be taken as ordered pairs $u = (x, p) \in T^*M$ with $x \in M$ and $p \in T_x^*M$, which induce a vector bundle structure over M with natural projection $\pi : (x, p) \mapsto x$ [47]. The symplectic structure $\Omega = d\vartheta$ emerges naturally in these manifolds from the 1-form ϑ defined as [42]

$$\vartheta(u) = \vartheta(x, p) = [\pi(u)]^* p(x), \quad (39)$$

or equivalently for any vector field $X \in \mathfrak{X}(T^*M)$,

$$i_X \vartheta(x, p) = i_{[\pi(u)]_* X} p(x). \quad (40)$$

On this symplectic manifold, the Hamiltonian function is given by [50]

$$H(x, p) = \frac{g^{-1}(x)(p, p)}{2m}, \quad (41)$$

where $g(x)^{-1}$ is the inverse metric of $g(x)$. In this way, the curves $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow T^*M$ that satisfy Eqs.(5) and (6), can be expressed as the pair

$$\tau \mapsto \hat{\gamma}(\tau) = (\gamma(\tau), p \circ \gamma(\tau)), \quad (42)$$

where $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$ is a geodesic curve of the metric tensor g , while the vertical part $p \circ \gamma(\tau)$ is related to the velocity vector field $U \circ \gamma(\tau) = \frac{d\gamma}{d\tau}$ of the geodesic. Thus, $mU \in \mathfrak{X}(M)$ is the metric gradient of p over the geodesics γ [50]:

$$mU \circ \gamma(\tau) = \text{grad } p \circ \gamma(\tau). \quad (43)$$

This means that, for any vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$, we have

$$m g(\gamma(\tau))(U, X) = i_X p \circ \gamma(\tau). \quad (44)$$

As a consequence of the semi-Riemannian nature of the pair (M, g) , there are three different types of distances that can be defined in M through g and, therefore, three different types of geodesics (time-like, space-like and null-like), each with its unique physical and geometric properties [49]. In the case of free massive particles, the trajectories described by means of Eq.(41) are time-like geodesics. Geometrically, this means that the velocity vector field U is a time-like vector field,

$$g(\gamma(\tau))(U, U) < 0.$$

In particular, without losing generality, we can parameterize the geodesic by the arc length to obtain [49]

$$g(\gamma(\tau))(U, U) = -1, \quad (45)$$

and using the relation between p and U (see Eq.(44)) we can lift Eq.(45) to the cotangent bundle T^*M as

$$-m^2 = g(\gamma(\tau))^{-1}(p, p). \quad (46)$$

In other words, once the initial conditions of the particle are given, the generalized positions and momenta of the particle must satisfy [49]

$$-m^2 = g(x)^{-1}(p, p). \quad (47)$$

Eq.(47) fixes, in the cotangent bundle T^*M , a hyperboloid where the trajectory $\hat{\gamma}$ of the particle is constrained to be. Such a hyperboloid can be seen as the zero-level hypersurface of the so-called mass-shell function $\mathcal{P} : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, defined by

$$\mathcal{P}(x, p) = m^2 + g(x)^{-1}(p, p). \quad (48)$$

The fact that the trajectory of the particle is constrained to the zero-level hypersurface of Eq.(48), is based on the fact that the function \mathcal{P} is proportional to the Hamiltonian (41), i. e., $\mathcal{P} = 2mH + m^2$, which allows us to verify that \mathcal{P} remains constant throughout the Hamiltonian flow of the system, just as the Hamiltonian function H itself does (see Eq.(3)).

A. Action and momentum map of the group of isometries of the spacetime

Let G be the k -dimensional Lie group generated by all continuous and smooth isometries of the spacetime (M, g) , that means, the group generated by compositions of all diffeomorphisms $\Lambda \in \text{Diff}(M)$ that satisfies [47]

$$\Lambda^*g \circ \Lambda = g. \quad (49)$$

Note that G acts in a smooth-left way through $\Psi : G \times M \rightarrow M$ as

$$\Psi_\Lambda(x) = \Lambda(x). \quad (50)$$

Thus, the fundamental fields (23) of $\chi \in \mathfrak{g}$,

$$\xi_\chi(x) = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}}(x) \right|_{s=0}, \quad (51)$$

turn out to be Killing vector fields of the spacetime (M, g) [47]:

$$\mathcal{L}_{\xi_\chi}g = 0. \quad (52)$$

Geometrically, each isometry $\Lambda \in G$ is a diffeomorphism that preserves both the distance between points in spacetime (M, g) , as well as the norms of their vector fields [47], therefore, each $\Lambda \in G$ can be thought of as a mapping that takes time-like geodesics and sends them to time-like geodesics. In this way, we will hope that in some sense the isometry group G will be a group of symmetries of the Hamiltonian that we create in the previous section. Let's find out exactly how this works.

The fact that the isometries map solutions of the Hamilton equations (1) into solutions of the same equations, on the same zero-level hypersurface $\mathcal{P}^{-1}(0)$, allows us to define the action $\Psi : G \times T^*M \rightarrow T^*M$ of the Lie

group G on the cotangent bundle T^*M as a cotangent lift of the action defined in Eq.(50), i. e., by [41]

$$\begin{aligned} \Psi_\Lambda(x, p) &= (\Psi_\Lambda(x), [\Psi_{\Lambda^{-1}}]^*p) \\ &= (\Lambda(x), [\Lambda^{-1}]^*p). \end{aligned} \quad (53)$$

Notice that the map Ψ is a smooth left action, because trivially satisfies Eq.(20) as well as Eq.(21):

$$\begin{aligned} \Psi_\Lambda \circ \Psi_{\Lambda'}(x, p) &= \Psi_\Lambda(\Lambda'(x), [\Lambda'^{-1}]^*p) \\ &= (\Lambda\Lambda'(x), [\Lambda^{-1}]^* \circ [\Lambda'^{-1}]^*p) \\ &= (\Lambda\Lambda'(x), [\Lambda'^{-1}\Lambda^{-1}]^*p) \\ &= (\Lambda\Lambda'(x), [(\Lambda\Lambda')^{-1}]^*p) = \Psi_{\Lambda\Lambda'}(x, p). \end{aligned}$$

Besides, the action Ψ is π -related to the action Ψ ,

$$\pi \circ \Psi_\Lambda = \Psi_\Lambda \circ \pi. \quad (54)$$

As a consequence of Eq.(54), the fundamental fields associated with the action Ψ are projected by the push-forward $[\pi]_* : T(T^*M) \rightarrow TM$ into the Killing fields

$$[\pi(u)]_*\psi_\chi(u) = \xi_\chi \circ \pi(u). \quad (55)$$

Indeed,

$$\begin{aligned} [\pi(u)]_*\psi_\chi(u) &= \left. \frac{d}{ds} \pi \circ \Psi_{e^{s\chi}}(u) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s\chi}} \circ \pi(u) \right|_{s=0} = \xi_\chi \circ \pi(u). \end{aligned}$$

Once the action of the isometry group on the cotangent bundle has been defined, as well as the fundamental fields of the isometry algebra, we can see that for each isometry $\Lambda \in G$ the map Ψ_Λ leaves invariant the Hamiltonian system that we introduced in the previous section to describe a free massive particle; this means that it leaves invariant both the symplectic form and the Hamiltonian function defined in Eq.(41), as well as the hyperboloid $\mathcal{P}^{-1}(0)$ generated by the mass-shell function defined in Eq.(48), i. e.,

$$\mathcal{P} \circ \Psi_\Lambda(x, p) = \mathcal{P}(x, p). \quad (56)$$

Indeed, first we show that the 1-form ϑ is conserved along Ψ_Λ and thus Ψ_Λ is a symplectomorphism. To do this we use an arbitrary point $u = (x, p) \in T^*M$ and an arbitrary vector field $X \in \mathfrak{X}(T^*M)$, as well as Eq.(40):

$$\begin{aligned} i_X([\Psi_\Lambda]^*\vartheta \circ \Psi_\Lambda(u)) &= i_{[\Psi_\Lambda]_*}\vartheta \circ \Psi_\Lambda(u) \\ &= ([\Psi_{\Lambda^{-1}}]^*p)(\Psi_\Lambda(x))(\pi_* \circ [\Psi_\Lambda]_*X) \\ &= p(x)([\Psi_{\Lambda^{-1}}]_* \circ \pi_* \circ [\Psi_\Lambda]_*X) \\ &= p(x)([\Psi_{\Lambda^{-1}} \circ \pi \circ \Psi_\Lambda]_*X) \\ &= p(x)([\Psi_{\Lambda^{-1}} \circ \Psi_\Lambda \circ \pi]_*X) \\ &= p(x)(\pi_*X) = i_X\vartheta(u). \end{aligned}$$

Then, let us prove Eq.(22) by taking into account that the isometries of the metric g are also isometries of its inverse metric tensor, i. e., $[\Lambda^{-1}]_*(g \circ \Lambda)^{-1} = g^{-1}$:

$$\begin{aligned} H \circ \Psi_\Lambda(u) &= \frac{1}{2m} g(\Psi_\Lambda(x))^{-1}([\Psi_{\Lambda^{-1}}]^*p, [\Psi_{\Lambda^{-1}}]^*p) \\ &= \frac{1}{2m} \left([\Psi_{\Lambda^{-1}}]^*(g \circ \Psi_\Lambda(x))^{-1} \right)(p, p) \\ &= \frac{1}{2m} \left([\Lambda^{-1}]^*(g \circ \Lambda(x))^{-1} \right)(p, p) \\ &= \frac{g(x)^{-1}(p, p)}{2m} = H(u). \end{aligned}$$

Finally, using both Eq.(22) and the identification $\mathcal{P} = 2mH + m^2$, the validity of Eq.(56) becomes quite clear.

A consequence of the fact that action Ψ leaves invariant the presymplectic potential ϑ is that we can identify the fundamental fields ψ_χ , $[\pi]_*$ -related with ξ_χ via Eq.(55), as Hamiltonian fields of the functions (see Eq.(28))

$$\mu_\chi(x, p) = i_{\psi_\chi} \vartheta(x, p) = i_{\xi_\chi} p(x). \quad (57)$$

Using the relation between p and U along the trajectory of the particle (see. Eq(44), we can re-express the integrals of motion $\mu_\chi \circ \hat{\gamma}$ as projections of the velocity vector of the particle with the infinitesimal generator of isometries, i.e., Killing vector field ξ_χ :

$$\mu_\chi \circ \hat{\gamma}(\tau) = mg(\gamma(\tau))(U, \xi_\chi). \quad (58)$$

This momentum map will be central in the next sections, where we will generalize this one-particle model to an N -particle model. To this end, we first show that indeed it is an equivariant momentum map (see the definition in Eq.(31)) by using the property (see Appendix (A))

$$\Lambda_* \xi_\chi = \xi_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)}. \quad (59)$$

Indeed, for any $\Lambda \in G$ and $(x, p) \in T^*M$, we have

$$\begin{aligned} \mu_\chi \circ \Psi_\Lambda(x, p) &= i_{\xi_\chi} \left([\Lambda^{-1}]^* p \circ \Lambda(x) \right) \\ &= i_{[\Lambda^{-1}]_* \xi_\chi} p(x) = i_{\xi_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}} p(x) \\ &= \mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}(x, p) = (\text{Ad}_\Lambda^* \mu)_\chi(x, p). \end{aligned}$$

IV. IDEAL GAS MADE UP OF MASSIVE FREE PARTICLES

On the spacetime (M, g) , we now consider a system formed by N identical particles of mass m , which do not interact with each other. Given the independence between the particles of the system, it is not difficult to

see that the world line of each of them will be a time-like geodesic, which can be modeled with the Hamiltonian system that we introduced in the previous section. Thus, due to separability of the system, we have a Hamiltonian description formed by N copies of the one-particle Hamiltonian system. That is, the Hamiltonian description of the N -particle system works now on the cotangent bundle T^*M^N , with symplectic form

$$\Omega^{(N)} = \sum_{A=1}^N \varpi_A^* \Omega_A \quad (60)$$

and Hamiltonian

$$H^{(N)} = \sum_{A=1}^N H_A \circ \varpi_A, \quad (61)$$

where the subscript A is a label to differentiate the A -th particle from the rest of the N particles. In this way, Ω_A is the symplectic form defined in the cotangent bundle T^*M_A of the A -th particle and H_A is its Hamiltonian defined, also, in T^*M_A by means of Eq.(41). Moreover, the natural projections from T^*M^N to any T^*M_A are denoted by

$$\varpi_A : T^*M^N \rightarrow T^*M_A, \quad (62)$$

while $\pi_A : T^*M_A \rightarrow M_A$ still standig for the natural projection in one-particle cotangent bundle.

The trajectory of the A -th particle of the N -particle system is constrained to the $\mathcal{P}_A^{-1}(0)$ hyperboloid because such trajectory is a time-like geodesic on M_A . In the description of the complete system of N particles, this means that the trajectory of the total system is constrained to the N -codimension region of the total cotangent bundle T^*M^N , that is defined as

$$A = \mathcal{P}_1^{-1}(0) \times \mathcal{P}_2^{-1}(0) \times \dots \times \mathcal{P}_N^{-1}(0). \quad (63)$$

It is worth mentioning that the action Ψ of the isometry group G on the cotangent bundle T^*M_A (see Eq.(53)) can also be directly generalized to an action of the isometry group on the cotangent bundle T^*M^N when acting with Ψ on each space individually,

$$\Psi_\Lambda^{(N)}(u) = \left(\Psi_\Lambda \circ \varpi_1(u), \dots, \Psi_\Lambda \circ \varpi_N(u) \right). \quad (64)$$

This generalized action has the same symplectic properties as the one-particle action and gives rise to a momentum map $\mu^{(N)} : T^*M^N \rightarrow \mathfrak{g}^*$ defined by the sum

$$\mu^{(N)}(u) = \sum_{A=1}^N \mu \circ \varpi_A(u), \quad (65)$$

such that for any $\chi \in \mathfrak{g}$ we have

$$i_\chi \mu^{(N)}(u) = \mu_\chi^{(N)}(u) = \sum_{A=1}^N \mu_\chi \circ \varpi_A(u). \quad (66)$$

Let us assume that the aforementioned N particles are found inside a box with impenetrable, undeformable and perfectly elastic walls. Suppose that this box is large enough for the particles to continue without interacting with each other. Moreover, the particles interact only in very brief moments (and in a perfectly elastic way) with the internal walls of the box so that the N particles model a dilute ideal gas. Furthermore, let us assume that the box is small enough to also move along a time-like geodesic⁹. We will use $\tau \mapsto \gamma_{\text{box}}(\tau)$ for the time-like geodesic that follows the box, where from now on the τ parameter will exclusively represent the arc-length parameter of γ_{box} .

To model the diluted ideal gas described above, we can consider that each of the N particles has a geodesic trajectory, but is bounded to remain within the world tube $\Sigma \subset M$ that surrounds the geodesic γ_{box} . More specifically, if \mathcal{S}_{box} is the region of spacetime that the box occupies at proper time $\tau = 0$, Σ is the region obtained by letting each point $u \in \mathcal{S}_{\text{box}}$ evolve through the γ_{box} time-like geodesic (see Fig.(2)).

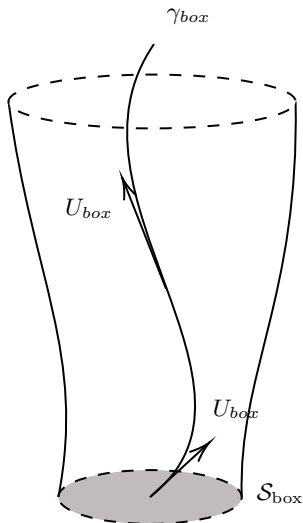


FIG. 2. Piece of the world tube Σ generated in the proper time interval $\tau = 0$ and $\tau = \tau_0$.

In this way, the Hamiltonian description of the N -particle system must be modified to take into account the effect of confinement in the positions imposed by the box. This confinement effect can be achieved by defining a new Hamiltonian by multiplying each Hamiltonian function H_A in $H^{(N)}$ by the composition $\Theta_\Sigma \circ \varpi_A$,

$$\mathcal{H} = \sum_{A=1}^N \Theta_\Sigma \circ \varpi_A H_A \circ \varpi_A. \quad (67)$$

⁹ On the constraints for material objects to move along time-like geodesics, just as massive point particles do, see [51].

Although the presence of the characteristic function Θ_Σ (cf. Eq.(15)) does not affect the Hamiltonian dynamics inside the box, it does limit the states in the cotangent bundle T^*M^N that the ideal gas can reach. Taking this into account, we change the former region defined in Eq.(63) by the new one

$$\mathcal{A} = \left((\pi_1 \circ \varpi_1)^{-1}(\Sigma) \cap \mathcal{P}_1^{-1}(0) \right) \times \dots \times \left((\pi_N \circ \varpi_N)^{-1}(\Sigma) \cap \mathcal{P}_N^{-1}(0) \right). \quad (68)$$

To formulate a statistical approach to the problem, we will consider that the limitation of the accessible states is such that the system adopts a *static state*, in the sense that we will define in the next section. But first, since we have put the world tube Σ as a boundary for our analysis, it will be convenient to reduce the group of isometries G to the subgroup $G_\Sigma \subset G$ that particularly fixes Σ , that is, the subgroup defined by

$$G_\Sigma = \{ \Lambda \in G : \Lambda(\Sigma) = \Sigma \}. \quad (69)$$

Since the isometries map time-like geodesics onto other time-like geodesics [47], limiting ourselves to isometries in G_Σ means that we are only interested in symmetries of the Hamiltonian system $(T^*M^N, \Omega^{(N)}, \mathcal{H})$ that preserve the geodesics inside the world tube, i.e., that do not put or take out particles from the box. Naturally, each $\Lambda \in G_\Sigma$ also leaves invariant the region \mathcal{A} ,

$$\Psi_\Lambda^{(N)}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, \quad (70)$$

since all isometries leave intact $\mathcal{P}_A^{-1}(0)$, as we already said before.

A. The ideal gas in static spacetimes

Before defining what we will understand in this article by a static state, we must consider certain aspects about the nature of the spacetime where the ideal gas lives. Although so far we have not imposed any special conditions on M , from now on we will limit ourselves to working exclusively with static spacetimes, that are spacetimes where almost everywhere there exists a time-like Killing vector field $\xi_0 \in \mathfrak{X}(M)$,

$$g(x)(\xi_0, \xi_0) < 0, \quad (71)$$

$$\mathcal{L}_{\xi_0} g(x) = 0, \quad (72)$$

whose g -orthogonal distribution is involutive [52, 53]. This means that for any point $x \in M$ and any pair of tangent vectors $X, Y \in \Pi_x$ the Lie bracket between X and Y belongs to Π_x ,

$$[X, Y] \in \Pi_x, \quad (73)$$

where $\Pi_x \subset T_x M$ is the vector sub-space of $T_x M$ generated by all vectors, which are orthogonal to $\xi_0(x)$:

$$\Pi_x = \{ X \in T_x M : g(x)(X, \xi_0) = 0 \}. \quad (74)$$

Since the involution property in Eq.(73) is a necessary and sufficient condition of integrability [41], an important property of static spacetimes is that the Killing vector field ξ_0 generates a foliation whose leaves are tangent to the orthogonal distribution defined in Eq.(74) [52, 53], and it allows us to express, at least locally for an open subset $W \subset M$, the W subset as the product $W = \mathbb{R} \times S$, where S is a d -dimensional Riemannian manifold (the leaves of the foliation).

Geometrically, the foliation generated by time-like vector field ξ_0 allows us to find a kind of coordinate system $(x^\mu) = (t, x^1, x^2, \dots, x^d) = (t, \vec{x})$, where $x^0 = t$ is identified as a temporal coordinate generated by the flow of ξ_0 , i. e., $\xi_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, while $(\vec{x}) = (x^1, \dots, x^d)$ are spatial coordinates in the leaves of the foliation. In this way, the leaves of the foliation are level-zero hypersurfaces of the coordinate function t . In such a coordinate system, and in the induced cotangent basis, the components of the metric tensor are independent of the t coordinate, as can be deduced directly from the Killing condition (see Eq.(71)), i. e., $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0$. This allow us to rewrite the metric tensor g as

$$g(\vec{x}) = -|g_{00}(\vec{x})|dt \otimes dt + g_S(\vec{x}), \quad (75)$$

where g_S is a Riemannian metric tensor on the foliation leaves [52].

We will say that the observers that move with the flow of the Killing vector field ξ_0 are static observers. In this sense, we define a static state of the ideal gas of N particles enclosed in a box as a state in which the macroscopic characteristics do not change according to measurements made by any static observer, i. e., the macroscopic characteristics do not change with the coordinate time t . This means that the macroscopic state of the system appears as static in the slices Σ_{t_0} defined as the intersections between the world tube Σ and the level hypersurface $t^{-1}(t_0)$ of the coordinate time function $t = t(x)$ (see Fig.(3)):

$$\Sigma_{t_0} = t^{-1}(t_0) \cap \Sigma. \quad (76)$$

Note that the full world tube can be seen as the union of all the slices,

$$\Sigma = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} \Sigma_{t_0}. \quad (77)$$

In this way, the world tube is invariant under translations in time t generated by ξ_0 , identifying its flow as a monparametric subgroup of G_Σ ,

$$\{e^{t\chi_0}\}_{t \in \mathbb{R}} \subset G_\Sigma. \quad (78)$$

Here, we have identified the vector χ_0 as the element of \mathfrak{g} whose fundamental field associated with the action Ψ of G in M is ξ_0 , $\psi_{\chi_0} = \xi_0$, such that the flux generated by $\varphi_t^{\xi_0}$ is simply the action of the monparametric group generated by χ_0 , i. e.,

$$\varphi_t^{\xi_0} = \Psi_{e^{t\chi_0}} \simeq e^{t\chi_0}. \quad (79)$$

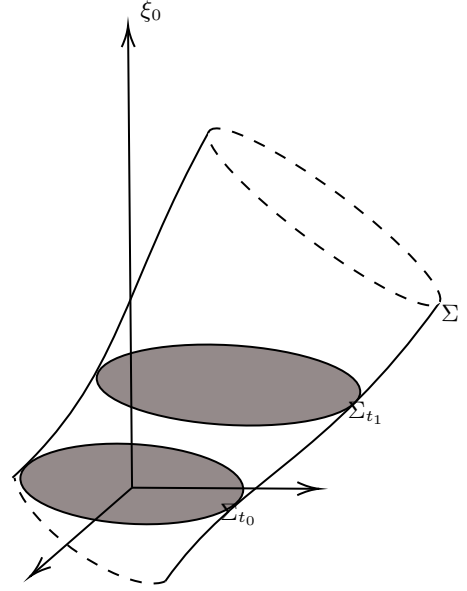


FIG. 3. Slices obtained from the intersection of the world tube with constant-time hypersurfaces.

Returning to the isometry group, over the Hamilton's solutions $\hat{\gamma}$, the Hamiltonian functions of the fundamental fields $\alpha\xi_0 = \psi_{\alpha\chi_0}$ are those given by (see Eq.(57))

$$\mu_{\alpha\chi_0} \circ \hat{\gamma} = -\alpha E, \quad (80)$$

where E can be interpreted physically, using Noether's theorem [32], as the energy of the particle measured by an static observer, with the understanding that it is the conserved quantity associated with the translations generated by ξ_0 [55]:

$$E = -g(\gamma)(mU, \xi_0). \quad (81)$$

It is important to remember that the existence of a time-like vector field in a whole spacetime defines a time orientation [55]. In this sense, we will say that a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ is future pointing, with respect to the temporal orientation imposed by the Killing vector field ξ_0 , if, being a time-like vector field, its projection on ξ_0 is negative at all points $x \in M$ [55]:

$$g(x)(X, X) < 0, \quad (82)$$

$$g(x)(X, \xi_0) < 0. \quad (83)$$

If, instead, the vector field $-X$ is future pointing, then X points to the past. In this sense, the velocities of the particles would point to the future or to the past defined by ξ_0 , depending on whether we consider that the static observers register the history of the ideal gas in the same direction in which their clocks move or *review a reverse succession of photographs of the system*. In other words, choosing whether the particles travel to the future or to the past, is equivalent to choosing an orientation of the arrow of time of the system. We will choose that the particles travel into the future, in such a way that the energy (81) is always positive, $E > 0$.

V. STATISTICAL STATES OF THE IDEAL GAS IN A STATIC SPACETIME

Let $\rho^{(N)} : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ be a statistical state with support \mathcal{A} given by Eq.(68), over the measured space $(T^*M^N, \Omega^{(N)}, \lambda_{\omega^{(N)}})$, where $\lambda_{\omega^{(N)}}$ is the Liouville measure generated from $\Omega^{(N)}$ via the Liouville top-form (see Eq.(8))

$$\omega^{(N)} = \frac{1}{(ND)!} (\Omega^{(N)})^{\wedge ND}. \quad (84)$$

To be more specific, let $\rho^{(N)}$ be a generalized Gibbs statistical state (see Eq.(33)), which is the kind of statistical states that best describe the status of a Hamiltonian system with symmetries in a Lie group G_Σ [32], i. e.,

$$\rho^{(N)}(\chi; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{A}}(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi^{(N)}(u)}, \quad (85)$$

where $Z : \mathfrak{g}_\star \rightarrow \mathbb{R}$ is the partition function

$$Z(\chi) = \int_{\mathcal{A}} d\lambda_{\omega^{(N)}}(u) e^{-\mu_\chi^{(N)}(u)}. \quad (86)$$

First, we show that in the subalgebra $\mathfrak{g}_\Sigma \simeq T_e G_\Sigma$, there exist Souriau vector, so that the definition of $\rho^{(N)}$ is consistent. Indeed, let us check that for any $\beta > 0$, the vector $-\beta\chi_0$, which is already in \mathfrak{g}_Σ by virtue of the definition of χ_0 , is a Souriau vector:

$$-\beta\chi_0 \in \mathfrak{g}_\star. \quad (87)$$

To do this, we have to show that there is a neighborhood $V_{-\beta\chi_0} \subset \mathfrak{g}_\Sigma$ and a function $f_{-\beta\chi_0} : T^*M^N \rightarrow \mathbb{R}$ such that the condition of Souriau (expressed in the Eq.(36)) is fulfilled. The neighborhood is

$$V_{-\beta\chi_0} = \left\{ -\beta\chi_0 + \epsilon\chi : \chi \in \mathfrak{g}_\Sigma, \quad \xi_\chi^0 = dt(\xi_\chi) = \frac{\beta}{2} \right\} \quad (88)$$

where $0 \leq \epsilon \ll 1$, and the function is $f_{-\beta\chi_0} = c$ for any constant $c \geq 1$. Indeed, the condition $0 \leq \epsilon \ll 1$ assures us that, at least up to the linear order, the Killing vector field associated with any vector $\chi' \in V_{-\beta\chi_0}$ is time-like (see Eq.(82)),

$$\begin{aligned} g(x)(\xi_{\chi'}, \xi_{\chi'}) &\simeq -\beta^2 |g_{00}(\vec{x})| + 2\beta\epsilon |g_{00}(\vec{x})| \xi_\chi^0 \\ &= -\beta^2 |g_{00}(\vec{x})| (1 - \epsilon) < 0, \end{aligned}$$

and is past pointing (see Eq.(83)):

$$\begin{aligned} g(x)(\xi_0, \xi_{\chi'}) &\simeq \beta |g_{00}(\vec{x})| - \epsilon |g_{00}(\vec{x})| \xi_\chi^0 \\ &= \beta |g_{00}(\vec{x})| \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) > 0. \end{aligned}$$

So, according to Eq.(81) and with our U -future pointing convention, the function $i_{\chi'} \mu^{(N)}$ is always positive

and the function $\exp(-\mu_{\chi'}^{(N)})$ is a positive-definite and decreasing function everywhere in \mathcal{A} , and thus it is bounded from above by any constant function with value $c \geq 1$. Of course, having $\{-\beta\xi_0\}_{\beta>0} \in \mathfrak{g}_\star$ is enough to proof that \mathfrak{g}_\star is an open convex subset and there is many other Souriau vectors.

Although we can give $\rho^{(N)}$ the same physical interpretation through ensemble theory, let us note that, as we already anticipated at the beginning of this work, the interpretation of the Hamiltonian flow of the system is not that of the action of a group of translations in time, nor is the Hamiltonian itself the energy of the particles in the ideal gas. The Hamiltonian model is entirely geometric and, therefore, the concept of equilibrium statistical state must be interpreted geometrically. In this way, we say that the state ρ is of static equilibrium, if it is invariant under the action of the subgroup $\{e^{s\chi_0}\}_{s \in \mathbb{R}} \subset G_\Sigma$:

$$\rho \circ \Psi_{e^{s\chi_0}} = \rho. \quad (89)$$

The definition of static statistical states (static states, from now on) given in Eq.(89) allows us to show that not all generalized Gibbs states are static, but only those that are parameterized by Souriau vectors that commute with χ_0 . We will call these Souriau vectors static, and we will denote the subset that contains them as

$$\mathfrak{g}_\odot = \{\chi \in \mathfrak{g}_\star : [\chi, \chi_0] = 0\}. \quad (90)$$

Indeed, this is a consequence of the equivariance property (see Eq.(31)) satisfied by $\mu^{(N)}$, inherited from the equivariance of the momentum map defined in Eq.(57). To see this, let us first see that equality

$$\rho^{(N)}(\chi; \Psi_{e^{s\chi_0}}(u)) = \rho^{(N)}(\chi; u) \quad \forall u \in \mathcal{A}, \quad (91)$$

is equivalent to asking for $\text{Ad}_{e^{-s\chi_0}}(\chi) = \chi$,

$$\begin{aligned} \rho^{(N)}(\chi; \Psi_{e^{s\chi_0}}(u)) &= \frac{\Theta_{\mathcal{A}} \circ \Psi_{e^{s\chi_0}}(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi^{(N)} \circ \Psi_{e^{s\chi_0}}(u)} \\ &= \frac{\Theta_{\mathcal{A}}(u)}{Z(\chi)} e^{-(\text{Ad}_{e^{s\chi_0}}^* \mu^{(N)})_\chi(u)} \\ &= \frac{\Theta_{\mathcal{A}}(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_{\text{Ad}_{e^{-s\chi_0}}(\chi)}(u)} = \rho^{(N)}(\chi; u). \end{aligned}$$

Then, it is enough to use the infinitesimal version of the condition $\text{Ad}_{e^{-s\chi_0}}(\chi) = \chi$. Indeed, considering that $\frac{d}{ds} \text{Ad}_{e^{-s\chi_0}}(\chi)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \chi|_{s=0} = 0$ and $\frac{d}{ds} \text{Ad}_{e^{-s\chi_0}}(\chi)|_{s=0} = -[\chi_0, \chi]$, we obtain

$$\rho^{(N)}(\chi; \Psi_{e^{s\chi_0}}(u)) = \rho^{(N)}(\chi; u) \iff [\chi_0, \chi] = 0.$$

An important feature of static states is that we can distribute identically the random variable of the dynamic state of the system in the slices Σ_t of the world tube, so that all these slices can be identified with the equivalence relation $\Sigma_{t_0} \sim \Sigma_{t_1}$, based on the distribution of a static

state. Choosing a representative Σ_0 , we can move from the support \mathcal{A} to the new (and final) support

$$\mathcal{M}^{(N)} = \left((\pi_1 \circ \varpi_1)^{-1}(\Sigma_0) \cap \mathcal{P}_1^{-1}(0) \right) \times \dots \times \left((\pi_N \circ \varpi_N)^{-1}(\Sigma_0) \cap \mathcal{P}_N^{-1}(0) \right). \quad (92)$$

For these static states, we identify the phase space of the system as the $2N(D-1) = 2Nd$ -dimensional submanifold defined in Eq.(92).

The fact that we have an equivalence relationship between the slices at different times, allows us to reduce the group of isometries once again to only those that belong to the subgroup

$$G_0 = \{ \Lambda \in G_\Sigma : \Lambda(\Sigma_0) = \Sigma_0 \}, \quad (93)$$

where the equivalence relation is taken into account in the expression $\Lambda(\Sigma_0) = \Sigma_0$. Naturally, $\chi_0 \in \mathfrak{g}_0 \simeq T_e G_0$ by virtue of its definition. Also, we keep the nested family of sets

$$\mathfrak{g}_\odot \subset \mathfrak{g}_* \subset \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_\Sigma \subset \mathfrak{g}. \quad (94)$$

Redefining the support \mathcal{A} as $\mathcal{M}^{(N)}$, and taking into account the new structure given in Eq.(94), we will work from now on with the generalized-Gibbs-static states given by

$$\rho^{(N)}(\chi; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}^{(N)}}(u)}{Z(\chi)} e^{-\mu_\chi^{(N)}(u)}, \quad (95)$$

where $Z : \mathfrak{g}_\odot \rightarrow \mathbb{R}$ is the partition function

$$Z(\chi) = \int_{\mathcal{M}^{(N)}} d\lambda_{\omega^{(N)}}(u) e^{-\mu_\chi^{(N)}(u)}. \quad (96)$$

VI. THE ONE-PARTICLE DISTRIBUTION

Note that the top-form $\omega^{(N)}$ (see Eq.(84)) can be expressed as a product of the one-particle Liouville top-forms:

$$\omega^{(N)} = \varpi_1^* \omega_{\Omega_1} \wedge \varpi_2^* \omega_{\Omega_2} \wedge \dots \wedge \varpi_N^* \omega_{\Omega_N}. \quad (97)$$

The easiest way to prove this statement is using a version of the multinomial theorem, with differential 2-forms instead of real numbers, taking into account that the wedge product between differential forms of even degree is commutative [47]:

$$\begin{aligned} \omega^{(N)} &= \frac{1}{(ND)!} \left(\sum_{A=1}^N \varpi_A^* \Omega_A \right)^{\wedge ND} \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_N \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_N = ND}} \frac{(\varpi_1^* \Omega_1)^{\wedge k_1}}{k_1!} \wedge \dots \wedge \frac{(\varpi_N^* \Omega_N)^{\wedge k_N}}{k_N!} \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_N \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_N = ND}} \varpi_1^* \left(\frac{\Omega_1^{\wedge k_1}}{k_1!} \right) \wedge \dots \wedge \varpi_N^* \left(\frac{\Omega_N^{\wedge k_N}}{k_N!} \right). \end{aligned}$$

Now, taking into account that no index k_i can be greater than D , since that would give rise to a $2k > 2D$ -form on a manifold of dimension $2D$, then necessarily $k_1 = k_2 = \dots = k_N = D$, and so we find the desired result:

$$\begin{aligned} \omega^{(N)} &= \varpi_1^* \left(\frac{\Omega_1^{\wedge D}}{D!} \right) \wedge \dots \wedge \varpi_N^* \left(\frac{\Omega_N^{\wedge D}}{D!} \right) \\ &= \varpi_1^* \omega_{\Omega_1} \wedge \dots \wedge \varpi_N^* \omega_{\Omega_N}. \end{aligned}$$

The separability of the Liouville top-form of the Hamiltonian system $(T^*M^N, \Omega^{(N)}, \mathcal{H})$ is the result of the construction of the system itself. In the same way, note that the simplest way to construct $\mathcal{M}^{(N)}$ is by using the Cartesian product

$$\mathcal{M}^{(N)} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_N, \quad (98)$$

where $\mathcal{M}_A \simeq \mathcal{M}$ is the submanifold of codimension 2 in T^*M , defined as *the portion of the mass-shell hyperboloid $\mathcal{P}^{-1}(0)$ above Σ_0 ,*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \Sigma_0} \mathcal{P}_x^{-1}(0), \quad (99)$$

where $\mathcal{P}_x : T_x^*M \rightarrow \mathbb{R}$ is the constraint on the mass-shell function (see Eq.(48)) to the cotangent space to M in x :

$$\mathcal{P}_x(p) = \mathcal{P}(x, p). \quad (100)$$

The Cartesian product (98), which determines the phase space of the Hamiltonian system $(T^*M^N, \Omega^{(N)}, \mathcal{H})$, exploits the separability of the total Liouville measure into the individual measures of each particle, in such a way that the integrals $\int_{\mathcal{M}^{(N)}} d\lambda_{\omega^{(N)}}(\dots)$ can be separated as¹⁰

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}^{(N)}} d\lambda_{\omega^{(N)}}(u)(\dots) &= \int_{\mathcal{M}_1} d\lambda_{\omega_1} |_{\mathcal{M}_1} \circ \varpi_1(u) \dots \\ &\quad \int_{\mathcal{M}_N} d\lambda_{\omega_N} |_{\mathcal{M}_N} \circ \varpi_N(u)(\dots), \end{aligned} \quad (101)$$

where $\lambda_{\omega_A} |_{\mathcal{M}_A} \simeq \lambda_\omega |_{\mathcal{M}}$ is the induced measure, via λ_ω , in the submanifold \mathcal{M} seen as an embedding:

$$\lambda_\omega |_{\mathcal{M}}(A) = \int_A \omega_\Omega |_{\mathcal{M}}(u). \quad (102)$$

Precisely, this induced measure incorporates the restrictions of the phase space to be projected onto slices of the world tube, and takes into account the time-like nature of the geodesics of each particle.

¹⁰ Basically, we are taking into account that $\lambda_{\omega^{(N)}}$ is a measure product of the product of (finite) measured spaces $(T^*M, \mathfrak{B}(T^*M), \omega_\Omega)$ with measures λ_ω , such that we can use Fubini's theorem in the support $\mathcal{M}^{(N)} = \mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_N$ [44].

In Appendix (B) we show that in a coordinate system (t, \vec{x}) , where the metric tensor g splits into the sum (75), the induced volume top-form $\omega_\Omega|_{\mathcal{M}}$ reduces to

$$\omega_\Omega|_{\mathcal{M}}(\vec{x}, \vec{P}) = \frac{m|g_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} d^d x \wedge d^d P}{(m^2 + \|\vec{P}\|^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (103)$$

where $|g_S|$ stands for the absolute value of the determinant of g_S , and $P = (P^0, \dots, P^d) = (P^0, \vec{P})$ are the components of the covectors $p \in T_x M$ in the orthonormal frame of a static observer, satisfying

$$\|\vec{P}\|^2 = \sum_{i=1}^d [P^i]^2. \quad (104)$$

Taking into account the results (101) and (103), we can express the integrals $\int_{\mathcal{M}^{(N)}} d\lambda_{\omega^{(N)}}(u)(\dots)$ as

$$\int_{\mathcal{M}^{(N)}} d\lambda_{\omega^{(N)}}(u)(\dots) = m^N \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}_1) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P_1}{P_1^0} \dots \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}_N) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P_N}{P_N^0}(\dots), \quad (105)$$

where \vec{x}_A are the coordinates of the projection $\pi_A \circ \varpi_A(u)$ on Σ_0 for a point $u \in \mathcal{M}^{(N)}$, \vec{P}_A are Cartesian coordinates in \mathbb{R}^d , and $P_A^0 = (m^2 + \|\vec{P}_A\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Using the separation of integrals stated in Eq.(105), we can re-express the generalized Gibbs distribution $\rho^{(N)}$ as the product

$$\rho^{(N)}(\chi; u) = N! \prod_{A=1}^N \rho(\chi : \varpi_A(u)), \quad (106)$$

where $N!$ appears as a corrective factor associated with the no-distinguishability of the particles [38]. Moreover, $\rho : \mathfrak{g}_\odot \times T^*M \rightarrow [0, +\infty)$ is the one-particle Gibbs distribution defined by

$$\rho(\chi; u) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{z(\chi)} e^{-\mu_\chi(u)}, \quad (107)$$

where $z : \mathfrak{g}_\odot \rightarrow \mathbb{R}$ is the one-particle partition function $Z(\chi) = \frac{z(\chi)^N}{N!}$ with

$$z(\chi) = m \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d P}{P^0} e^{-P^0 \xi_\chi^0 - \vec{P} \cdot \vec{\xi}_\chi}. \quad (108)$$

Here, $P^0 = (m^2 + \|\vec{P}\|^2)^{\frac{1}{2}}$, $(\xi_\chi^0, \vec{\xi}_\chi)$ are the components of the Killing vector field in the orthonormal basis generated by the Cartesian coordinates (P^0, \vec{P}) , and

$$\vec{P} \cdot \vec{\xi}_\chi = \sum_{i=1}^d P^i \xi_\chi^i. \quad (109)$$

As a particular case of an one-particle Gibbs function, in Appendix (C), we show that when the Killing vector

field ξ_χ is time-like, the corresponding one-particle partition function simplifies to

$$z_g(\chi) = 2m^d (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) k_{\frac{d-1}{2}}(m \|\xi_\chi(\vec{x})\|), \quad (110)$$

where $k_\nu(\alpha)$ is defined as the quotient

$$k_\nu(\alpha) = \frac{K_\nu(\alpha)}{\alpha^\nu}, \quad (111)$$

with K_ν as the modified Bessel function of the second kind and order ν , given by [56]

$$K_\nu(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty d\zeta e^{-\alpha\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}. \quad (112)$$

Here Γ is the gamma-function defined by [56]

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty d\zeta \zeta^{\alpha-1} e^{-\zeta}. \quad (113)$$

In this scenario, inside the integral given in Eq.(110) the dependency on the Killing fields is given through their norms. An interesting case, as we will see later, is when we work with the static Souriau vector $-\beta\chi_0 \in \mathfrak{g}_\odot$ for $\beta > 0$, because then the Killing field is proportional to $-\xi_0$ through a real positive constant $\beta > 0$,

$$\xi_{-\beta\chi_0}(x) \equiv \xi_\beta(x) = -\beta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (114)$$

then $\rho(-\beta\chi_0; u) \equiv \rho_\beta(u)$, and (107) reduces to

$$\rho_\beta(u) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{z(\chi)} e^{-\beta E(u)}, \quad (115)$$

with partition function $z(-\beta\chi_0) = z(\beta)$ given by

$$z(\beta) = 2m^d (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) k_{\frac{d-1}{2}}(m\beta |g_{00}(\vec{x})|^{\frac{1}{2}}). \quad (116)$$

To understand the role of the constant $\beta > 0$ in the statistical ρ_β -description of the dilute ideal gas, we will describe in detail two examples. First, we will consider the trivial case of the flat Minkowski spacetime, modeled by the Cartesian space \mathbb{R}^D and endowed with the flat Lorentzian metric η . Then, we will study the Schwarzschild spacetime (M, g_{Sch}) , which describes a spacetime with a static, finite, and spherically symmetric distribution of matter.

A. Modified Jüttner one-particle distributions in Minkowski spacetime

In the Minkowski spacetime (\mathbb{R}^D, η) , the isometry group is the Poincaré group, defined as the semi-direct product

$$GP = \text{SO}^+(1, d) \ltimes \mathbb{R}^D \quad (117)$$

between the restricted Lorentz group, formed by spatial rotations and boosts, and the Abelian group of space-time translations $(\mathbb{R}^D, +) \sim \mathbb{R}^D$ [52]. In this sense, it is clear that this spacetime is static. In fact, because it is flat, the Cartesian coordinate system (t, \vec{x}) extends to all spacetime and allows us to write η as

$$\eta = -dt \otimes dt + \sum_{i=1}^d dx^i \otimes dx^i, \quad (118)$$

and the norm of Killing vectors of the type ξ_β is $\|\xi_\beta\| = \beta$. This simplifies the calculation of the partition function from Eq.(116) to

$$z(\beta) = 2m^d V \left(\frac{2\pi}{m\beta} \right)^{\frac{d-1}{2}} K_{\frac{d-1}{2}}(m\beta), \quad (119)$$

where V is the volume of the slice Σ_0 of the world tube Σ ,

$$V = \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{\eta_S}(\vec{x}) = \int_{\Sigma_0} d^d x. \quad (120)$$

With respect to the world tube Σ of the box containing the gas, we know that all Minkowski spacetime geodesics are expressed in coordinates (t, \vec{x}) as straight lines [49, 52, 53]. Thus, without losing generality, we can work in the co-moving frame of the box with these coordinates, which is a valid frame for a static observer because in this geometry the integral curves of ξ_0 are time-like geodesics. This means that the world tube of the box is generated as $\mathbb{R} \times S_{\text{box}}$, where S_{box} is the region occupied by the box \mathbb{R}^d . Then,

$$\Sigma_0 = S_{\text{box}}, \quad (121)$$

and V is actually the real volume of the box.

In this way, translations in time t leave S_{box} invariant because the slices of Σ at different times are all the same. The remaining isometries present in GP_0 (see Eq.93) depend on the geometry of the box and, therefore, on the region S_{box} . For example, if the box is a sphere in \mathbb{R}^d , then the subgroup of spatial rotations leaves the slice S_{box} invariant. For more general cases, there can be continuous or discrete rotational symmetries only around certain directions or axes of symmetry of the box.

The boosts are not elements of \mathfrak{g}_\odot because, although they could leave S_{box} invariant in some cases, and thus be placed in $\mathfrak{gp}_0 \simeq T_e GP_0$ an even in $\mathfrak{gp}_* \simeq T_e GP_*$, the infinitesimal boost generators do not commute with the time translations generator χ_0 [52].

What is important in this example is that by identifying $\beta > 0$ with the inverse of the ideal gas temperature T , the partition function (119) leads to the partition function $z_\eta(\beta)$ of the so-called modified Jüttner distribution¹¹

¹¹ Technically, the modified Jüttner distribution described in refer-

[34–36]

$$\rho_\eta(\beta) = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}}{2m^d V} \left(\frac{m\beta}{2\pi} \right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{e^{-\beta E_\eta}}{K_{\frac{d-1}{2}}(m\beta)}, \quad (122)$$

where $E_\eta = mU^t$ specially stands for the particle energy in the Minkowski scenario.

The ρ_η distribution models with high precision the data obtained from simulations of gases in one, two, and three dimensions, when the counting of microstates is performed on a hypersurface of constant time [34, 35].

Of course, it is interesting to identify the parameter $\beta > 0$ with the inverse of the temperature of the relativistic ideal gas, since geometrically β is the norm of the Killing vector fields $\xi_\beta = -\beta\xi_0$ and, therefore, the inverse of the temperature measured by the static observer \mathcal{O} , co-moving with the box, satisfies the relation

$$\frac{1}{T} \Big|_{\mathcal{O}} = \|\xi_\beta\|. \quad (123)$$

In the framework of relativistic kinetic theory, this relationship has already been reported in [35], when working with the (unmodified) Jüttner distribution.

B. Modified Jüttner-like one-particle distributions in Schwarzschild spacetime

As a second non-trivial example of a statistical system, consider a diluted ideal gas inside a box that travels along a (spatially bounded) time-like geodesic in a $D = 4$ -dimensional spacetime, generated by a static and spherically symmetric distribution of matter with mass M_0 and radius R_0 . Specifically, let us study only the region outside the matter distribution described via the Schwarzschild spacetime, which is static, spherically symmetric, and asymptotically flat [49]. The metric tensor

ences [34–36] is

$$\rho_{\text{MJ}} = \frac{\Theta_{\mathcal{M}}(u)}{2m^d V} \left(\frac{m\beta}{2\pi} \right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{e^{-\beta m\gamma}}{\gamma K_{\frac{d-1}{2}}(m\beta)},$$

where $\gamma = (1 + \frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{p^0}{m}$. The modified Jüttner distribution presented here differs by a factor γ^{-1} ,

$$\rho_{\text{MJ}} = \frac{\rho}{\gamma}.$$

The reason for this discrepancy is that this factor $\frac{1}{\gamma} = \frac{m}{p^0}$, which appears in our integral of moments with the top-form $\sigma_x = d^d p \frac{m}{p^0}$, is absorbed into the definition of ρ_{MJ} in order to integrate over the Liouville/Lebesgue measures $d^d x d^d p$ and not over the measure $d^d x d^d p \frac{m}{p^0}$ we use here, i. e.,

$$\int_{\mathcal{M}} d^d x d^d p \rho_{\text{MJ}} = \int_{\mathcal{M}} d^d x d^d p \frac{\rho}{\gamma} = \int_{\mathcal{M}} d^d x d^d p \frac{m}{p^0} \rho_\beta.$$

is

$$g_{\text{Sch}} = -Rdt \otimes dt + \frac{dr \otimes dr}{R} + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi, \quad (124)$$

where R is the shorthand notation for $R = 1 - \frac{r_s}{r}$ and $r_s = 2M$ is the so-called Schwarzschild radius [49].

Physically, in the region defined by the two inequalities $r > r_s$ and $r > R_0$, the coordinates $(x^\mu) = (t, r, \theta, \phi)$ used in the last expression have the following interpretations: t is the time measured by a static observer at a spatial distance that is infinitely large (with respect to the center of the matter distribution), θ and ϕ are the azimuthal and polar angles, respectively, and r is the inverse square root of the Gaussian curvature of a family of nested spheres centered on the matter distribution [49].

Unlike the Minkowski spacetime, in the Schwarzschild spacetime the isometry group is not the full Poincaré group composed of rotations, boosts, and translations (see Eq.(117)). The Schwarzschild group of isometries is, in fact, only the subgroup formed by the spatial rotations and the temporal translations (hence the properties of being spherically symmetric and static [49, 52, 53]). We will denote this group of isometries as

$$G_{\text{Sch}} = \mathbb{R} \times \text{SO}(3), \quad (125)$$

with the associated Lie algebra

$$\mathfrak{g}_{\text{Sch}} = \mathbb{R} \times \mathfrak{so}(3). \quad (126)$$

In the Schwarzschild spacetime, unlike the Minkowski spacetime, geodesics are not, in general, as simple as straight lines. However, from the time and spherical symmetries, together with the asymptotic flatness property, we can derive the following properties for geodesics. Firstly, we can have particles falling radially towards the central distribution, and particles orbiting the distribution. Secondly, a geodesic curve remains in the same hyperplane that contains the center of the distribution, which without losing generality we can take as $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Furthermore, in the Schwarzschild spacetime, circular geodesics describe the motion of test particles orbiting the mass distribution on the equatorial hyperplane¹² $\theta = \frac{\pi}{2}$. Note that if we choose this circular geodesic for our box, then a static observer would identify the world tube as a cylindrical helix (like a coil spring). In any case, the

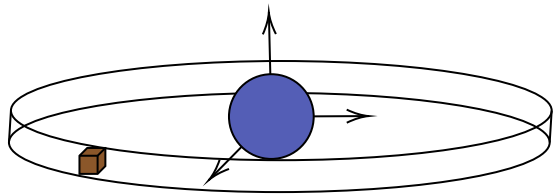


FIG. 4. Slice Σ_0 of the box world tube as a toroid $T^2_{S_{\text{box}}}$.

slices at some time are, again, 3-dimensional regions S_{box} defined by the shape of the box. In these way, all slices of the world tube are inside a toroid $T^2_{S_{\text{box}}}$, generated by the rotation of the box on the equatorial hyperplane (see Fig.(4)). In this case, the subgroup G_{Sch_0} of isometries that leaves invariant (considering the equivalence relation between slices) Σ_0 is the subgroup that maps the toroid in itself, i.e., the rotations on the $\theta = \frac{\pi}{2}$ -hyperplane:

$$G_{\text{Sch}_0} = \mathbb{R} \times S^1. \quad (127)$$

In this case, the infinitesimal generator χ_ϕ of the subgroup S^1 of rotations commutes with the time-translation generator χ_0 [49]. Then, if χ_ϕ is a Souriau vector, then it is also a static Souriau vector .

Regarding the ideal gas states described by one-particle Gibbs distributions parameterized by elements of the type $-\beta\chi_0 \in \mathfrak{g}_\odot$, we note that in this case the norm of the Killing vector fields ξ_β is given by

$$\|\xi_\beta\| = \beta R^{\frac{1}{2}} = \beta \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (128)$$

while the volume $\text{vol}_{g_{\text{Sch}_S}}$ induced on S_{box} is expressed as

$$\text{vol}_{g_{\text{Sch}_S}}(r, \theta, \phi) = \frac{r^2 \sin \theta}{R^{\frac{1}{2}}} dr \wedge d\theta \wedge d\phi, \quad (129)$$

resulting in the one-particle partition function

$$z(\beta) = 4\pi m^3 \int_{S_{\text{box}}} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) \frac{k_1(m\beta R^{\frac{1}{2}})}{R^{\frac{1}{2}}}. \quad (130)$$

To study the properties of the partition function $z(\beta)$, it is convenient to perform an expansion in power series of the Schwarzschild radius. As we will see at the end of this subsection, this will allow us to express $z(\beta)$ in terms of the aforementioned powers in r_s and the partition function of the Minkowski flat spacetime, i. e., in terms of $z_\eta(\beta)$ defined in Eq.(119) for $\beta = \frac{1}{T}$.

Let us start by expanding the integrand of Eq.(130) into a power series of $\frac{r_s}{r}$, in the case in which $\frac{r_s}{r} < 1$,

$$r^2 \sin(\theta) \frac{k_1(m\beta R^{\frac{1}{2}})}{R^{\frac{1}{2}}} = r^2 \sin(\theta) k_1(m\beta) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m\beta) \left(\frac{r_s}{r}\right)^n, \quad (131)$$

¹² This geodesic, as a curve on M , is perfectly described without any ambiguity other than that associated with spherical symmetry and the personal identification that we made of the plane of the geodesic as the hyperplane $\theta = \frac{\pi}{2}$. This is because, even by fixing the coordinates θ and r , three of the four coordinate equations of the geodesic do not vanish. Furthermore, it is necessary to take into account the mass-shell condition and the fact that the radius r_0 of the orbit itself is not arbitrary, but depends on the parameters of the system: the Schwarzschild radius and the angular momentum of the particle. For a more complete explanation see [49].

where the coefficients A_n are defined as

$$A_n(x) = \sum_{\ell \geq k \geq 0}^n b_{\ell,k} \left[P_0(k; x) - P_1(k; x) \left(1 - \frac{\mathcal{E}(x)}{2} \right) \right], \quad (132)$$

for the quantities \mathcal{E} , $b_{n,k}$, P_κ and a_κ given by

$$\mathcal{E} = x \frac{K_2(x)}{K_1(x)}, \quad (133)$$

$$b_{n,k} = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+n} \binom{k}{j} \binom{j}{n}, \quad (134)$$

$$P_\kappa(k; x) = \sum_{j_2=0}^k \sum_{j_1=0}^{j_2} \sum_{j_0=0}^{j_1-\kappa} a_\kappa(k, j_2, j_1, j_0) x^{2j_0} \quad (135)$$

$$a_\kappa(k, j_2, j_1, j_0) = \frac{(-1)^{j_2+j_1+j_0} (-j_2)_{2(j_2-j_1)}}{2^{j_2-2j_1+2j_0} (k-j_2)! (j_2-j_1)!} \times \quad (136)$$

$$\frac{(-1)_{k-j_2} (1)_{j_1} (j_1-j_0-\kappa)!}{j_0! j_2! (j_1-2j_0-\kappa)! (-j_1)_{j_0} (1)_{j_0+\kappa}},$$

where the symbol $\binom{k}{j}$ stands for the binomial coefficient defined as $\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}$ and $(x)_k$ is the Pochhammer symbol defined as [56]

$$(x)_k = \begin{cases} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}, & x > 0, \\ (-1)^k \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(1-x-k)}, & x < 0. \end{cases} \quad (137)$$

In Appendix (D), we include details of these calculations. Moreover, the first five coefficients A_n are given in Table (D). It is only important to mention that the evaluation of \mathcal{E} in $m\beta$ is physically identified as β times the expected value of the Minkowski energy, calculated with respect to the Minkowski-Gibbs distribution ρ_η , i. e.,

$$\mathcal{E}(m\beta) = \beta \langle E_\eta \rangle_\eta = \frac{\beta}{V} \int_{S_{\text{box}}} d^3x E_\eta(\vec{x}). \quad (138)$$

Indeed, using the identity $\frac{dk_\nu}{d\alpha} = -\alpha^\nu K_{\nu+1}(\alpha)$ [56], first we verify the relation

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(m\beta) &= m\beta \frac{K_2(m\beta)}{K_1(m\beta)} = -\frac{1}{K_1(m\beta)} \frac{\partial}{\partial(m\beta)} (k_1(m\beta)) \\ &= -\frac{m\beta}{4\pi m^3 V k_1(m\beta)} \frac{\partial(4\pi m^3 V k_1(m\beta))}{\partial(m\beta)} \\ &= -\frac{m\beta}{z_\eta(\beta)} \frac{\partial z_\eta}{\partial(m\beta)}, \end{aligned}$$

and then, employing the definition of the one-particle

partition function (see Eq.(108)), we find

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(m\beta) &= -\frac{\beta}{z_\eta} \frac{\partial}{\partial(m\beta)} \left(m \int_{S_{\text{box}}} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3P}{P^0} e^{-m\beta E_\eta} \right) \\ &= \frac{\beta}{z_\eta} \left(m \int_{S_{\text{box}}} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3P}{P^0} e^{-m\beta E_\eta} E_\eta \right) \\ &= \frac{\beta}{V} \int_{S_{\text{box}}} d^3x E_\eta(\vec{x}) = \beta \langle E_\eta \rangle_\eta. \end{aligned}$$

In Eq.(131), we note that the integrand $r^2 \sin(\theta) k_1(m\beta)$ of the Minkowski partition function $z_\eta(\beta)$ multiplies the power series of $\frac{r_s}{r}$. Therefore, we can express the one-particle partition function of the Schwarzschild case as a power series of average values,

$$z(\beta) = z_\eta(\beta) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{A_n(m\beta)}{r^n} \right\rangle_\eta r_s^n \right], \quad (139)$$

where the averages values are calculated with respect to the modified Jüttner distribution, that is, they can be represented as the integrals

$$\left\langle \frac{A_n(m\beta)}{r^n} \right\rangle_\eta = \frac{1}{V} \int_{S_{\text{box}}} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta) \frac{A_n(m\beta)}{r^n}, \quad (140)$$

where the volume V of the box is now given by

$$V = \int_{S_{\text{box}}} dr d\theta d\phi r^2 \sin(\theta). \quad (141)$$

Similarly, we can expand the Gibbs factor $e^{-\mu\beta}$ into power series of r_s , taking into account that the energy E , defined earlier in Eq.(81), can be expressed in terms of E_η as

$$E = -g_{00} E_\eta = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) E_\eta. \quad (142)$$

Thus, for the Gibbs factor $e^{(1-\frac{r_s}{r})E_\eta}$ we find the series expansion

$$e^{-\mu\beta} = e^{-\beta E_\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta E_\eta)^n}{n! r^n} r_s^n. \quad (143)$$

Now, calculating the quotient of the series (143) and the series (139), as explained in reference [58], we find an expression for the Schwarzschild one-particle Gibbs pdf in terms of the modified Jüttner distribution as

$$\rho(\beta) = \rho_\eta(\beta) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(m\beta, r) r_s^n \right], \quad (144)$$

where the coefficients \mathcal{A}_n are defined by¹³

$$\mathcal{A}_n(m\beta, r) = \sum_{\ell=0}^n J \left[\left\langle \frac{A_\ell(1; m\beta)}{r^\ell} \right\rangle_\eta \right] \frac{(\beta E_\eta)^{n-\ell}}{(n-\ell)! r^{n-\ell}}, \quad (145)$$

and the expression $J[\langle A_\ell(m\beta)/r^\ell \rangle_\eta]$ stands for

$$J \left[\left\langle \frac{A_\ell}{r^\ell} \right\rangle_\eta \right] = (-1)^\ell \det \begin{pmatrix} \left\langle \frac{A_1}{r} \right\rangle_\eta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \left\langle \frac{A_2}{r^2} \right\rangle_\eta & \left\langle \frac{A_1}{r} \right\rangle_\eta & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{A_{\ell-1}}{r^{\ell-1}} \right\rangle_\eta & \left\langle \frac{A_{\ell-2}}{r^{\ell-2}} \right\rangle_\eta & \left\langle \frac{A_{\ell-3}}{r^{\ell-3}} \right\rangle_\eta & \dots & 1 \\ \left\langle \frac{A_\ell}{r^\ell} \right\rangle_\eta & \left\langle \frac{A_{\ell-1}}{r^{\ell-1}} \right\rangle_\eta & \left\langle \frac{A_{\ell-2}}{r^{\ell-2}} \right\rangle_\eta & \dots & \left\langle \frac{A_1}{r} \right\rangle_\eta \end{pmatrix}. \quad (146)$$

The first three coefficients defined of the series (145) can be seen in Table (D) of Appendix (D).

From Eqs.(139), (142), and (144), it is clear that the behavior of the statistical description of the ideal gas is similar to that of the modified Jüttner function in the Minkowski spacetime, in the limit $r \rightarrow \infty$. As we move away from the distribution of matter, the Schwarzschild spacetime *begins to flatten*, i. e., when $r \gg r_s$ is satisfied and only the first few terms in the given series survive. This is also the case with the norm of the Killing vector ξ_β (see Eq.(128)), which tends (at infinity $r \rightarrow \infty$) to the inverse of the temperature defined for the Minkowski spacetime (see Eq.(123)).

With this idea in mind, we can define a generalized temperature function that, at least in static and asymptotically flat spacetimes, tends to the thermodynamic concept of the temperature of a relativistic ideal gas:

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = \frac{1}{\|\xi_\beta(\vec{x})\|} = \frac{|g_{00}(\vec{x})|^{-\frac{1}{2}}}{\beta} = |g_{00}(\vec{x})|^{-\frac{1}{2}} T, \quad (147)$$

which is (barring perhaps suitable constants of proportionality) the way in which the Ehrenfest-Tolman effect shows up in a static spacetime [33]. As follows from Eq.(147), the temperature is a positive definite quantity. In the particular case of Schwarzschild spacetime, (147) looks like

$$\mathcal{T}(r, \theta, \phi) = \mathcal{T}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} T. \quad (148)$$

Calculating the gradient of the function \mathcal{T} , we find the expression

$$\frac{\text{grad}\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = -\frac{r_s}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{M}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (149)$$

¹³ This closed-form for the coefficients of a series quotient, instead of the recursive form described in [58], is obtained by considering the inverse of the series in the denominator and multiplying it, using the Cauchy product [58, 59], with the numerator series.

which tells us that the temperature increases as we go deeper and deeper into the family of nested spheres, i. e., when we get closer to the central distribution of matter. This result is in accordance with our physical expectations.

VII. EQUIVALENCE OF THE TEMPERATURE-LIKE FUNCTIONS

Let us return to the one-particle function of the dilute ideal gas, $z : \mathfrak{g}_\odot \rightarrow \mathbb{R}$, which we defined in Eq.(116), to discuss an important property concerning the momentum map μ and the $\|\xi_\chi\|$ -norms of the Killing fields, related to the $\chi \in \mathfrak{g}_\odot$ parameters of the ρ distribution. Due to the equivariance of the momentum map μ (see Eq.(31) to remember the concept), the partition function turns out to be invariant under the subgroup $\{e^{s\chi}\}_{\chi \in \mathfrak{g}_\odot}$, that is,

$$z(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) = z(\chi). \quad (150)$$

Before proving Eq.(150), it is important to first establish that the subset \mathfrak{g}_\odot of the family of nested sets in Eq.(94), i. e., the subset of all Souriau static vectors, is invariant under the adjoint action of the subgroup $\{e^{s\chi}\}_{\chi \in \mathfrak{g}_\odot}$:

$$\text{Ad}_{e^{s\chi}}(\mathfrak{g}_\odot) = \mathfrak{g}_\odot. \quad (151)$$

This is due to the fact that \mathfrak{g}_\star is Ad-invariant (see Eq.(38)), and also because if $\text{Ad}_{e^{-\tau\chi_0}}(\chi') = \chi'$, then

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{e^{-\tau\chi_0}}(\text{Ad}_{e^{s\chi}}(\chi')) &= \text{Ad}_{e^{-\tau\chi_0}e^{s\chi}}(\chi') \\ &= \text{Ad}_{e^{-\tau\chi_0}e^{s\chi}e^{\tau\chi_0}e^{-\tau\chi_0}}(\chi') \\ &= \text{Ad}_{\exp(s\text{Ad}_{e^{-\tau\chi_0}}(\chi))e^{-\tau\chi_0}}(\chi') \\ &= \text{Ad}_{e^{-\tau\chi_0}}(\chi') = 0, \end{aligned}$$

so that if $[\chi', \chi_0] = 0$, then $[\text{Ad}_{e^{s\chi}}(\chi'), \chi_0] = 0$.

To prove Eq.(150), we use

$$\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} = (\text{Ad}_\Lambda^* \mu)_\chi = \mu_\chi \circ \Psi_{\Lambda^{-1}},$$

in the integral that defines z ,

$$\begin{aligned} z(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) &= \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)}(u)} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega(u) e^{-(\text{Ad}_\Lambda^* \mu)_\chi(u)} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi \circ \Psi_{\Lambda^{-1}}(u)}, \end{aligned}$$

and then we apply the change of variable $v = \Psi_{\Lambda^{-1}}(u)$, taking into account that $\Psi_{\Lambda^{-1}}$ is a diffeomorphism that

leaves invariant \mathcal{M} and, more specifically, it is a symplectomorphism that also leaves λ_ω invariant:

$$\begin{aligned} z(\text{Ad}_\Lambda(\chi)) &= \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega(u) e^{-\mu_\chi \circ \Psi_{\Lambda^{-1}}(u)} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega(v) e^{-\mu_\chi(v)} = z(\chi). \end{aligned}$$

To study the physical implications of the invariance (150), let us return to the special case in which the static Souriau vector $\chi = -\beta\chi_0 \in \mathfrak{g}_\odot$ generates time-like Killing vector fields, whose norms $\|\xi_\beta\|$ are the inverse of temperature-like function (147). We first notice that for any isometry if ξ_β is a time-like vector field, then $\xi_{\text{Ad}_\Lambda(\beta)} = \Lambda_*\xi_\beta$ is also a time-like vector field,

$$\begin{aligned} g(\Lambda(x))(\Lambda_*\xi_\beta, \Lambda_*\xi_\beta) &= (\Lambda^*g \circ \Lambda)(x)(\xi_\beta, \xi_\beta) \\ &= g(x)(\xi_\beta, \xi_\beta) < 0. \end{aligned}$$

In second place, if we interpret $z(\beta)$ as an average of quantity $e^{-\mu_\beta}$, where μ_β is β -times the energy of the particle with geodesic γ , measured by the observer with velocity ξ_0 ,

$$\mu_\beta \circ \gamma = -g(\gamma)(mU, \xi_\beta) = -\beta g(\gamma)(mU, \xi_0) = \beta E,$$

then we can interpret $z(\text{Ad}_\Lambda(\beta))$ as the same average but now from the quantities $e^{-\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\beta)}}$, where $\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\beta)}$ can be understood as β -times the energy measured by an observer with velocity $\Lambda_*\xi_0$ (see Eq.(A4)),

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Ad}_\Lambda(\beta)} &= -g(mU, \xi_{\text{Ad}_\Lambda(\beta)}) \\ &= -g(mU, \Lambda_*\xi_\beta) = -\beta g(mU, \Lambda_*\xi_0). \end{aligned}$$

Thus, we can say that in the family of inverse temperatures-like functions $\{\|\xi_{\text{Ad}_\Lambda(\beta)}\|\}_{\Lambda \in \{e^{s\chi}\}_{\chi \in \mathfrak{g}_\odot}}$, the one-particle partition function of the ideal gas is the same. Also, we can say that under measurements of the family of static observers with velocity in $\{\Lambda_*\xi_0\}_{\Lambda \in \{e^{s\chi}\}_{\chi \in \mathfrak{g}_\odot}}$, the ideal gas one-particle partition function is the same.

VIII. CONCLUSIONS

In this work, we show that the influence of the curvature of a background spacetime on a simple many-particle system, such as a dilute ideal gas, can be introduced into the classical theory of statistical mechanics through the tools of symplectic geometry and through ideas found in the so-called Lie group thermodynamics developed by Souriau et al [28–32]. In this sense, the connection with spacetime occurs through the nature of a free particle and its trajectory as a time-like geodesic, and it is formally introduced into the phase space formulation through the so-called mass-shell constraint. In this way, the metric

tensor is encapsulated in the different expressions that appear in the theory. A second way in which spacetime is glimpsed in the ideal gas model is through its isometry group, which gives us the concept of the momentum map as a generalization to the idea of energy as a conserved quantity of a free particle.

The Souriau concept of statistical state to describe a Hamiltonian system of many particles, which in its generality can be applied to all kinds of Hamiltonian systems, is also crucial in the formulation presented here. In this sense, we consider that the present work generalizes the relativistic systems studied by Souriau, from the regime of special relativity to the regime of general relativity.

The example of the Schwarzschild spacetime is simple enough to present these static statistical states without falling into a trivial case, which is recovered with the Minkowski spacetime. In this sense, the appearance of the modified Jüttner distributions is interesting in the context of the old debate on what is the correct distribution for a relativistic ideal gas [34–36], and should be analyzed in more detail in future works. Also, it would be interesting to consider more general cases of ideal gases orbiting black holes with angular momentum and both angular momentum and electric charge, i. e., the outer cases of Kerr and Kerr-Newman black holes. It is worth mentioning that these more general spacetimes raise the need to generalize the concept, presented here, of a static equilibrium state to a steady one, since these spacetimes are stationary (not static) and there are frame-dragging effects in them [49, 52, 57].

Finally, we highlight the result (150) that tells us about the invariance of the partition function under the action of certain isometries in the parameter space, i. e., the Lie algebra of the group of isometries. In the particular case where these parameters are interpreted in terms of the inverse of a temperature, this property of the partition function indicates that all the static states of the system are equivalent for all the temperatures connected through the Adjunct action. In other words, the measurements made by static observers related by means of these special isometries, could be macroscopically equivalent.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by PAPIIT-DGAPA-UNAM, Grant No. 114520, and Conacyt-Mexico, Grant No. A1-S-31269.

Appendix A: Equivariance of the momentum map

Let μ be the momentum map of some left and symplectic action $\Psi : G \times U \rightarrow U$, in some symplectic manifold (U, Ω) . Then, for any elements $\Lambda \in G$ and $x \in U$, the next relation is fulfilled [28, 41, 60]:

$$\mu \circ \Psi_\Lambda(x) = \text{Ad}_\Lambda^*(\mu(x)) + \vartheta(\Lambda), \quad (\text{A1})$$

where $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ is the co-Adjoint action of the group G on the dual of its Lie algebra, defined for any $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $\beta \in \mathfrak{g}$ and $\Lambda \in G$ as

$$\langle \text{Ad}_\Lambda^*(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\beta) \rangle, \quad (\text{A2})$$

and where $\vartheta : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ is a symplectic 1-cocycle, that is, a map that satisfies the property [28, 41, 60]

$$\vartheta(\Lambda_1 \Lambda_2) = \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\vartheta(\Lambda_2)) + \vartheta(\Lambda_1). \quad (\text{A3})$$

The result (A1) is a direct consequence of the definition of the momentum map and of the fact that the pushforward under the action Ψ of a fundamental field is identified with another fundamental field, specifically, with the fundamental field of the same element but under the Adjoint action of G . Indeed, let us first prove [41]

$$[\Psi_\Lambda]_* \psi_\chi = \psi_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \quad (\text{A4})$$

in a few lines:

$$\begin{aligned} [\Psi_\Lambda]_* \psi_\chi &= \left. \frac{d}{ds} \Psi_\Lambda \circ \Psi_{e^{s\chi}} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{\Lambda e^{s\chi}} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \Psi_{\Lambda e^{s\chi} \Lambda^{-1}} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \Psi_{\Lambda e^{s\chi} \Lambda^{-1}} \circ \Psi_\Lambda \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \Psi_{e^{s \text{Ad}_\Lambda(\chi)}} \circ \Psi_\Lambda \right|_{s=0} = \psi_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda. \end{aligned}$$

This result can be used to derive (A1). Indeed, for any vector field $Y \in \mathfrak{X}(U)$, remembering that Ψ acts through symplectomorphisms, we have

$$\begin{aligned} i_Y d(\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda) &= i_Y \Psi_\Lambda^*(d\mu_\chi) \\ &= i_Y \Psi_\Lambda^*(-i_{\psi_\chi} \Omega) = \Omega([\Psi_\Lambda]_* Y, \psi_\chi) \\ &= (\Psi_\Lambda^* \Omega)(Y, [\Psi_{\Lambda^{-1}}]_* \psi_\chi) = \Omega(Y, [\Psi_{\Lambda^{-1}}]_* \psi_\chi) \\ &= \Omega(Y, \psi_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}) = i_Y (d\mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}). \end{aligned}$$

Since the above is valid for all $Y \in \mathfrak{X}(U)$, then it is satisfied at the level $d(\mu_\chi \circ \Psi_\Lambda - \mu_{\text{Ad}_{\Lambda^{-1}}(\chi)}) = 0$, i. e.,

$$\langle \mu \circ \Psi_\Lambda - \text{Ad}_\Lambda^*(\mu), \chi \rangle = f(\Lambda, \chi),$$

where $f(\Lambda, \chi)$ is some constant over U . In fact, given the linearity in $\langle \mu \circ \Psi_\Lambda - \text{Ad}_\Lambda^*(\mu), \chi \rangle$ with respect to χ , it is clear that $f(\Lambda, \chi)$ must be linear in χ , so we can define $f(\Lambda, \chi) = \langle \vartheta(\Lambda), \chi \rangle$ and with it arrive at the expression (A1). On the other hand, the property (A3) follows after a bit of algebra, taking into account that both Ψ and Ad^*

are left actions:

$$\begin{aligned} \vartheta(\Lambda_1 \Lambda_2) &= \mu \circ \Psi_{\Lambda_1 \Lambda_2} - \text{Ad}_{\Lambda_1 \Lambda_2}^*(\mu) \\ &= \mu \circ \Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2} - \text{Ad}_{\Lambda_1}^* \circ \text{Ad}_{\Lambda_2}^*(\mu) \\ &= \mu \circ \Psi_{\Lambda_1} \circ \Psi_{\Lambda_2} - \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu \circ \Psi_{\Lambda_2}) \\ &\quad + \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu \circ \Psi_{\Lambda_2}) - \text{Ad}_{\Lambda_1}^* \circ \text{Ad}_{\Lambda_2}^*(\mu) \\ &= (\mu \circ \Psi_{\Lambda_1} - \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu)) \circ \Psi_{\Lambda_2} \\ &\quad + \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\mu \circ \Psi_{\Lambda_2} - \text{Ad}_{\Lambda_2}^*(\mu)) \\ &= \vartheta(\Lambda_1) + \text{Ad}_{\Lambda_1}^*(\vartheta(\Lambda_2)). \end{aligned}$$

A special case of momentum map is that where the 1-cocycle ϑ of Eq.(A1) is zero. Such an expression can be reinterpreted as

$$\mu_{\text{Ad}_\Lambda(\chi)} \circ \Psi_\Lambda(x) = \mu_\chi(x). \quad (\text{A5})$$

We call these momentum maps equivariants [28, 41, 60]. Formally, an equivariant momentum map satisfies the commutation diagram

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \\ \Psi_\Lambda \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_\Lambda^* \\ U & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

FIG. 5. Commutation diagram of an equivariant momentum map.

Geometrically, an equivariant momentum map sends the G -orbit $\{\Psi_\Lambda(x)\}_{\Lambda \in G}$ initiated at a point $x \in U$, to the G -orbit $\{\text{Ad}_\Lambda^*(\mu(x))\}_{\Lambda \in G}$ initiated at the point $\mu(x) \in \mathfrak{g}^*$.

Appendix B: Induced measures in \mathcal{M} hypermanifolds

Let $\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}$ be the induced measure defined in Eq.(102). As a consequence of the definition of the submanifold \mathcal{M} as a union of $\mathcal{P}_x^{-1}(0) \subset T_x^* M$ for all $x \in \Sigma_0$ (see Eq.(99)), we can note that the integrals $\int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u)(\dots)$ can be expressed as

$$\int_{\mathcal{M}} d\lambda_\omega|_{\mathcal{M}}(u)(\dots) = \int_{\Sigma_0} d\gamma(x) \int_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} d\sigma_x(p)(\dots),$$

where, if (x^μ, p_μ) is a coordinate system in which we have $p_\mu = i_{\partial/\partial x^\mu} p$, $\gamma(x)$ is the measure induced, over Σ_0 , by

the top-form on M

$$d^D x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d,$$

while σ_x is the measure, over $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$, induced by the top-form on $T_x^* M$:

$$d^D p = dp_0 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_D.$$

Indeed, this is true because the coordinates (x^μ, p_μ) are Darboux coordinates [42], in which $\Omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$ and thus the Liouville measure locally looks like the Lebesgue measure on \mathbb{R}^{2D} [42]:

$$\int_A d\lambda_\omega(u)(\dots) = \int_{\varphi(A)} d^D x d^D p(\dots).$$

Taking into account that at the point $x \in \Sigma_0$ the metric tensor returns the metric $g(x)$ on $T_x M$, by duality, it also induces the metric $g(x)^{-1}$ on the dual space $T_x^* M$. Thus, both $(T_x M, g(x))$ and $(T_x^* M \simeq \mathbb{R}^D, g(x)^{-1})$ are metric vector spaces. Therefore, it is convenient to state that γ is induced, instead of $d^D x$, by the volume-invariant top-form

$$\text{vol}_g(x) = |g(x)|^{\frac{1}{2}} d^D x, \quad (\text{B1})$$

while σ_x is induced, instead of $d^D p$, by the volume-invariant top-form¹⁴

$$\text{vol}_{g(x)^{-1}}(p) = |g(x)^{-1}|^{\frac{1}{2}} d^D p. \quad (\text{B2})$$

Considering that we can calculate the gradient field¹⁵ $\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x$ of the function defined in (100), thanks to the metric g^{-1} , and recognizing that this field is normal to $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$ at every point¹⁶, we can express σ_x as [61]

$$\sigma_x(p) = \frac{i_{\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x} \text{vol}_{g^{-1}}(p)}{\|\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x\|} \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)}. \quad (\text{B3})$$

Now, the easiest way to compute the gradient of \mathcal{P}_x and perform the evaluation over $\text{vol}_{g^{-1}}$ is to pass to an orthogonal basis over $T_x^* M$, where the metric g^{-1} becomes $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$, which is equivalent to using a Cartesian system $(P^0, P^1, \dots, P^d) = (P^0, \vec{P})$, where

$$\mathcal{P}_x(P) = -(P^0)^2 + \|\vec{P}\|^2 + m^2.$$

¹⁴ An equivalent, but formally more developed mathematical approach, using Sasaskian structures on $T^* M$, can be found in reference [27].

¹⁵ To simplify the notation, we drop the argument of $g^{-1}(x)$.

¹⁶ Let X be a tangent vector field to the zero-level hypersurface $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$, i. e., $i_X d\mathcal{P}_x(p) = 0$. By definition of the gradient field, we have that $\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x$ is orthogonal to X : $g^{-1}(\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x, X) = i_X d\mathcal{P}_x = 0$. Since this is the case for all tangent fields to $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$, $\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x$ is normal to $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$.

Hence, the normalized gradient field (over $\mathcal{P}_x^{-1}(0)$) is just

$$\frac{\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x}{\|\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x\|} \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} = \frac{P^\mu}{m} \frac{\partial}{\partial P^\mu}, \quad (\text{B4})$$

with

$$P^0 = \left(m^2 + \|\vec{P}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B5})$$

and the D -form $\text{vol}_{g^{-1}}$ is given by

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g^{-1}} \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} &= dP^0 \wedge dP^1 \wedge \dots \wedge dP^d \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} \\ &= dP^0 \wedge d^d P \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)}. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

Indeed, by definition, in the vector basis $(\frac{\partial}{\partial P^0}, \frac{\partial}{\partial P^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial P^d})$ generated by the Cartesian coordinates (P^0, \vec{P}) , we have

$$\begin{aligned} \text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x &= \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{P}_x}{\partial P^\mu} \frac{\partial}{\partial P^\nu} \\ &= -2\eta^{00} P^0 \frac{\partial}{\partial P^0} + 2 \sum_{i=1}^d \eta^{ii} P^i \frac{\partial}{\partial P^i} \\ &= 2P^0 \frac{\partial}{\partial P^0} + 2P^i \frac{\partial}{\partial P^i} \\ &= 2P^\mu \frac{\partial}{\partial P^\mu}, \end{aligned}$$

such that

$$\begin{aligned} \|\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x\| \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} &= |\eta(\text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x, \text{grad}_{g^{-1}} \mathcal{P}_x)|^{\frac{1}{2}} \\ &= 2|(P^0)^2 - \|\vec{P}\|^2|^{\frac{1}{2}} = 2m, \end{aligned}$$

while the expression (B6) for Eq.(B2) is the result of the invariance of the volume form with respect to diffeomorphisms $(p_\mu) \mapsto (P^\mu)$.

By substituting the expressions (B4) and (B6) into Eq.(B3), we find

$$\sigma_x(P) = \frac{1}{m} \left(P^0 d^d P + \sum_{i=1}^d d_i^D P \right) \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)},$$

where, just seeking to simplify the notation, we have defined

$$\begin{aligned} d_i^D P &= (-1)^i P^i dP^0 \wedge \dots \wedge dP^{i-1} \wedge dP^{i+1} \wedge \dots \wedge dP^d \\ &= -dP^1 \wedge \dots \wedge dP^{i-1} \wedge P^i dP^0 \wedge dP^{i+1} \wedge \dots \wedge dP^d. \end{aligned}$$

In this regard, we note that, as a consequence of $d\mathcal{P}_x|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} = 0$, this last d -form can be rewritten as

$$d_i^D P \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} = -\frac{(P^i)^2}{P^0} d^d P \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)},$$

in such a way that, going back to σ_x , we find

$$\sigma_x(P) = \frac{m}{P^0} d^d P \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} = \frac{m d^d P}{(m^2 + \|\vec{P}\|^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B7})$$

Indeed,

$$\begin{aligned} \sigma_x(P) &= \frac{1}{m} \left(P^0 d^d P - \sum_{i=1}^d \frac{(P^i)^2}{P^0} d^d P \right) \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} \\ &= \frac{1}{m P^0} \left((P^0)^2 - \|\vec{P}\|^2 \right) d^d P \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)} \\ &= \frac{m}{P^0} d^d P \Big|_{\mathcal{P}_x^{-1}(0)}. \end{aligned}$$

The case of γ is even simpler since, by definition of the slices Σ_0 , the normal vector field is the Killing vector field ξ_0 . Then, using a coordinate system (t, \vec{x}) , where the metric g splits into the sum given by Eq.(75), in which case $|g|^{\frac{1}{2}} = |g_{00}|^{\frac{1}{2}} |g_S|^{\frac{1}{2}}$, we find that

$$\gamma(x) = |g_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} d^d x = \text{vol}_{g_S}(\vec{x}). \quad (\text{B8})$$

Indeed,

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{i_{\xi_0} \text{vol}_g}{\|\xi_0\|} \\ &= \frac{|g(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} i_{\frac{\partial}{\partial t}} dt \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d}{|g_{00}(\vec{x})|^{\frac{1}{2}}} \\ &= |g_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} d^d x = \text{vol}_{g_S}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Putting together the results (B7) and (B8), we effectively obtain the expression (103):

$$\omega_{\Omega}|_{\mathcal{M}}(\vec{x}, \vec{P}) = \gamma(\vec{x}) \wedge \sigma_x(P) = \frac{m |g_S(\vec{x})|^{\frac{1}{2}} d^d x \wedge d^d P(\vec{x})}{(m^2 + \|\vec{P}(\vec{x})\|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Appendix C: One-particle partition function for time-like Killing fields

It is interesting to note that we can perform the integration with respect to the moments in the integral that defines the one-particle partition function $z(\chi)$ (see Eq.(108)) for any parameter $\chi \in \mathfrak{g}_*$ with an associated time-like Killing vector field ξ_χ . Indeed, to show this, let us start by defining the integral of moments as

$$\mathcal{I}(\chi) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d P \frac{e^{-P^0 \xi_\chi^0}}{P^0} e^{-\vec{P} \cdot \vec{\xi}_\chi}, \quad (\text{C1})$$

where $P^0 = (m^2 + \|P\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

The trick¹⁷ consists in changing the Cartesian coordinates (P^1, \dots, P^d) by the hyperspherical coordinates $(P, \phi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-2})$ through the transformation [62]

$$\begin{aligned} P^1 &= P \cos(\theta_1), \\ P^2 &= P \sin(\theta_1) \cos(\theta_2), \\ P^3 &= P \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\phi_3), \\ &\vdots \\ P^{d-1} &= P \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{d-2}) \cos(\phi), \\ P^d &= P \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{d-1}) \sin(\phi), \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

where $P \in [0, \infty)$ symbolizes the radial coordinate, while $\phi \in [0, 2\pi)$ is the polar angle and $\theta_i \in [0, \pi]$ are azimuth angles [62]. With this change of coordinates, the volume element $d^d P$ becomes $dP P^{d-1} d\Omega^d$, where Ω^d is the solid angle in d dimensions, i. e., [62]

$$d\Omega^d = d\phi \prod_{i=1}^{d-2} d\theta_i \sin^{d-i-1}(\theta_i). \quad (\text{C3})$$

Thus, choosing θ_1 to be the angle between the vectors $\vec{\xi}_\chi$ and \vec{P} , $\vec{P} \cdot \vec{\xi}_\chi = P \|\vec{\xi}_\chi\| \cos(\theta_1)$, we can express Eq.(C1) as

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\infty dP P^{d-1} \frac{e^{-P^0 \xi_\chi^0}}{P^0} \int_0^\pi d\theta_1 \frac{\sin^{d-2}(\theta_1)}{e^{P \|\vec{\xi}_\chi\| \cos(\theta_1)}}.$$

Expanding now the exponential $e^{-P \|\vec{\xi}_\chi\| \cos(\theta_1)}$ in powers of $u = -P \|\vec{\xi}_\chi\| \cos(\theta_1)$ around $u = 0$, we arrive at the result

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\xi}_\chi\|^n}{n!} \times \\ &\int_0^\infty dP P^{d+n-1} \frac{e^{-P^0 \xi_\chi^0}}{P^0} \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2}(\theta_1) \cos^n(\theta_1), \end{aligned}$$

where the integral in θ_1 is nonzero only for even values of n , in which case it takes the value

$$\int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2}(\theta_1) \cos^{2n}(\theta_1) = \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \frac{d}{2})}. \quad (\text{C4})$$

Plugging Eq.(C4) into the last expression for \mathcal{I} , we get

$$\mathcal{I} = 2\pi^{\frac{d-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{\xi}_\chi|^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \frac{d}{2})} \int_0^\infty dP P^{d+2n-1} \frac{e^{-P_0(P) \xi_\chi^0}}{P_0(P)}.$$

To solve the remaining integral, now in P , it is worth considering the change of variable from P to $\zeta = \frac{P_0}{m}$, via

¹⁷ This trick is found in reference [35], where it is used for a very similar calculation, but from the perspective of kinetic theory.

the mass-shell condition, i. e.,

$$\mathcal{I} = 2\pi^{\frac{d-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{\xi}_\chi|^2 n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{(2n)! \Gamma(n + \frac{d}{2})} m^{d+2n-1} \times \int_1^\infty d\zeta e^{-(m\xi_\chi^0)\zeta} (\zeta^2 - 1)^{(\frac{d-1}{2}+n)-\frac{1}{2}}.$$

Then, we use the definition of the modified Bessel functions of the second kind (see Eq. (112)):

$$\mathcal{I} = 2 \left(\frac{2\pi m}{\xi_\chi^0} \right)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{m|\vec{\xi}_\chi|^2}{2\xi_\chi^0} \right)^n K_{\frac{d-1}{2}+n}(m\xi_\chi^0).$$

It is at this point that the time-like nature of the Killing vector field ξ_χ becomes crucial, since then the parameter $\lambda = \|\xi_\chi\|/\xi_\chi^0$ satisfies the inequality

$$|\lambda^2 - 1| = \frac{\|\vec{\xi}_\chi\|^2}{(\xi_\chi^0)^2},$$

which allows us to use the so-called multiplication theorem given by [56]

$$\frac{K_\nu(\lambda a)}{\lambda^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{a(1-\lambda^2)}{2} \right)^k K_{\nu+k}(a). \quad (\text{C5})$$

Finally, we arrive at the result

$$\mathcal{I} = 2m^{d-1} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} k_{\frac{d-1}{2}}(m\|\xi_\chi\|), \quad (\text{C6})$$

which is used in the expression (108) to arrive at the desired result of Eq.(110):

$$z(\chi) = 2m^d (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \int_{\Sigma_0} \text{vol}_{g_S}(\vec{x}) k_{\frac{d-1}{2}}(m\|\xi_\chi(\vec{x})\|).$$

Appendix D: Series expansion of the Schwarzschild one-particle partition function

Let us start by rewriting the integrand of Eq.(130) as

$$\Gamma_{\text{Sch}} = \frac{r^2 \sin(\theta)}{m\beta R} K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta)), \quad (\text{D1})$$

where we have introduced the notation $\zeta = \frac{r_s}{r}$ and have defined the function

$$f_{\text{Sch}}(\zeta) = m\beta R^{\frac{1}{2}}(\zeta) = m\beta(1-\zeta)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{D2})$$

The idea is to expand Eq.(D1) into a power series of ζ , for which we will focus exclusively on the case $r > r_s$, i. e., $\zeta < 1$. Our plan is to calculate separately the expansions of R^{-1} and $K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta))$, and then multiply them using the Cauchy product, which is defined for any pair of series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ as the series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ with coefficients given by the discrete convolution [58, 59]

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}. \quad (\text{D3})$$

While the series expansion of R^{-1} is simply the geometric series, that is, $R^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$, the series expansion of $K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta))$ can be calculated by means of the Taylor-MacLaurin series

$$K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_1 \circ f_{\text{Sch}}^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n, \quad (\text{D4})$$

where the derivatives $K_1 \circ f_{\text{Sch}}^{(n)}(0) = \frac{dK_1 \circ f_{\text{Sch}}}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0}$ can be computed using the Faà di Bruno's formula for the n -th derivative of a composition of functions [63], i. e.,

$$(K_1 \circ f_{\text{Sch}})^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n K_1^{(k)}(f_{\text{Sch}}(0)) B_{n,k}(\{f_{\text{Sch}}^{(s)}(0)\}_{s \in I}), \quad (\text{D5})$$

where $I = \{1, 2, \dots, n-k+1\}$ and $B_{n,k}$ are the incomplete Bell polynomials, formally defined as [64]

$$B_{n,k}(\{a_s\}_{s \in I}) = \sum_{j'_s} \frac{n \prod (a_s/s!)^{j_s}}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!}, \quad (\text{D6})$$

with $\sum_{i \in I} j_i = k$ and $\sum_{i \in I} i j_i = n$. Fortunately, when the series in the argument of Bell's incomplete polynomials is a series of derivatives evaluated to zero, as is the case with $a_s = f_{\text{Sch}}^{(s)}(0)$, then the polynomials can be expressed as [64]

$$\begin{aligned} B_{n,k}(\{f_{\text{Sch}}^{(s)}(0)\}_{s \in I}) &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j}}{k!} \binom{k}{j} f^{k-j}(0) (f^j)^{(n)}(0) \\ &= (-1)^k \frac{n!}{k!} (m\beta)^k b_{n,k}, \end{aligned} \quad (\text{D7})$$

where the quantities $b_{n,k}$ were already defined previously in Eq.(134) as

$$b_{n,k} = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+n} \binom{k}{j} \binom{j}{n}.$$

Regarding the n -th derivative of the modified Bessel function K_1 , there are some properties that are useful to us. The first of these properties is the relationship between neighboring functions, i. e., [56]

$$K_{\nu-1}(\zeta) = K_{\nu+1}(\zeta) - \frac{2\nu}{\zeta} K_\nu(\zeta). \quad (\text{D8})$$

The second property allows us to express the derivative

$K_\nu^{(k)}$ in terms of K_ν and $K_{\nu-1}$ as [65]

$$\begin{aligned} \frac{d^k K_\nu}{d\zeta^k} &= \zeta^{-k} \sum_{j_2=0}^k (-1)^{j_2+k} \binom{k}{j_2} (-\nu)_{k-j_2} \\ &\sum_{j_1=0}^{j_2} \frac{(-1)^{j_1} 2^{2j_1-j_2} (-j_2)_{2(j_2-j_1)} (\nu)_{j_1}}{(j_2-j_1)!} \\ &\left(\sum_{j_0=0}^{j_1} \frac{(j_1-j_0)! (-\zeta^2/4)^{j_0} K_\nu(\zeta)}{j_0! (j_1-2j_0)! (1-j_1-\nu)_{j_0} (\nu)_{j_0}} \right. \\ &\left. + \sum_{j_0=0}^{j_1-1} \frac{(j_1-j_0-1)! (-\zeta^2/4)^{j_0} (\zeta K_{\nu-1}(\zeta)/2)}{j_0! (j_1-2j_0-1)! (1-j_1-\nu)_{j_0} (\nu)_{j_0+1}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D9})$$

For the case $\nu = 1$, this last property can be rewritten in a more convenient notation as

$$\frac{d^k K_1}{dx^k} = \frac{(-1)^k k!}{\zeta^k} \left[P_0(k; \zeta) K_1(x) + P_1(k; \zeta) \frac{\zeta}{2} K_{\nu-1}(\zeta) \right], \quad (\text{D10})$$

where $P_\kappa(k; \zeta)$ has been defined already in Eq.(135). Now, combining the properties (D8) and (D10), we get the expression we were looking for $K_1^{(k)}(m\beta)$, i. e.,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k K_1}{d\zeta^k} \right|_{m\beta} &= K_1(m\beta) \frac{(-1)^k k!}{\zeta^k} \times \\ &\left[P_0(k; m\beta) - P_1(k; m\beta) \left(1 - \frac{\mathcal{E}(m\beta)}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{D11})$$

where the quantity \mathcal{E} was already defined in Eq.(133).

Using these results in the Taylor-MacLaurin series (D4), we obtain, as an expansion of $K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta))$, the series

$$K_1(f_{\text{Sch}}(\zeta)) = K_1(m\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n(m\beta) \zeta^n, \quad (\text{D12})$$

where the coefficients \tilde{A}_n are defined as

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(1; m\beta) &= \\ &\sum_{k=0}^n b_{n,k} \left[P_0(k, 1; m\beta) - P_1(k, 1; m\beta) \left(1 - \frac{\beta}{2} \langle E_\eta \rangle_\eta \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D13})$$

Finally, calculating the Cauchy product between the geometric series $R^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ and the series Eq.(D12) we

obtain, after multiplying by $r^2 \sin(\theta)$, the series Eq.(131) with the coefficients Eq.(132), formally defined by means of the discrete convolution Eq.(D3) as

$$A_n(m\beta) = \sum_{\ell=0}^n \tilde{A}_\ell(m\beta).$$

As an example of the application of the above results, in the following tables we present the explicit values of some coefficients.

n	$A_n(1; m\beta)$
0	1
1	$\frac{1}{2}(1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta)$
2	$\frac{1}{8}(3 + 6\beta \langle E_\eta \rangle_\eta + m^2 \beta^2)$
3	$\frac{1}{48}(15 + 9m^2 \beta^2 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta (45 + m^2 \beta^2))$
4	$\frac{1}{384}(105 + 90m^2 \beta^2 + m^4 \beta^4 + 4\beta \langle E_\eta \rangle_\eta (105 + 4m^2 \beta^2))$

TABLE I. First five coefficients $A_n(m\beta)$.

n	$\mathcal{A}_n(m\beta, r)$
0	1
1	$\frac{\beta E_\eta}{r} - \frac{1}{2} \langle r^{-1} \rangle_\eta (1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta)$
2	$\frac{\beta^2 E_\eta^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \frac{\langle r^{-1} \rangle_\eta}{r} \beta E_\eta (1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta) + \frac{1}{4} \times$ $\left(\langle r^{-1} \rangle_\eta^2 (1 + \beta \langle E_\eta \rangle_\eta)^2 - \langle r^{-2} \rangle_\eta \left(\frac{3}{2} + 3\beta \langle E_\eta \rangle_\eta + \frac{m^2 \beta^2}{2} \right) \right)$

TABLE II. First three coefficients $\mathcal{A}_n(m\beta, r)$.

- [1] Tolman, RC. [1934]. Relativity, thermodynamics, and cosmology. Dove Publications, New York.
[2] Bergmann, P. [1951]. Generalized statistical mechanics.

- Physical Review (5), vol. 84, p.p. 10-26, APS.
[3] van Kampen, NG. [1968]. Relativistic thermodynamics of moving systems. Physical Review, 173 (1), p.p. 295-301.

- [4] Horváth, JI. [1968]. Contributions to the Relativistic Generalization of the Kinetic Theory of Gases and Statistical Mechanics. *Symposia on Theoretical Physics and Mathematics* 8, p.p. 47-60, Springer.
- [5] Israel, W. [1976]. Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory. *Annals of Physics*, vol. 100, 1-2, p.p. 310-331, Elsevier.
- [6] Lipparini, E. [2008]. *Modern many-particle physics: atomic gases, nanostructures and quantum liquids*. World Scientific Publishing Company.
- [7] Pomeau, Y. [2007]. *Statistical Mechanics of a Gravitational Plasma*. *Advances in Chemical Physics*, vol. 135, p.p. 153-172, Wiley Online Library.
- [8] Livadiotis, G. [2018]. Derivation of the entropic formula for the statistical mechanics of space plasmas. *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 25 (1), p.p. 77-88, Copernicus GmbH.
- [9] Mati, P. [2020]. Statistical theory of photon gas in plasma. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2020 (2). IOP Publishing
- [10] Bauche, J., Bauche-Arnoult, C., and Peyrusse, O. [2015]. *Atomic properties in hot plasmas: From levels to superconfigurations*. Springer.
- [11] Uzdensky, D. & Goodman, J. [2008]. Statistical description of a magnetized corona above a turbulent accretion disk. *The Astrophysical Journal*, vol. 682 (1), p.p. 608, IOP Publishing.
- [12] Bar-Or, B. & Tal, A. [2014]. The statistical mechanics of relativistic orbits around a massive black hole. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 31 (24), p.p. 244003, IOP Publishing.
- [13] Herpich, J. & Tremaine, S. & Rix, H. [207]. Galactic disc profiles and a universal angular momentum distribution from statistical physics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 467 (4), p.p. 5022-5032, Oxford University Press.
- [14] Faraji, S., Trova, A., and Quevedo, H. [2022]. Relativistic equilibrium fluid configurations around rotating deformed compact objects. *The European Physical Journal C*, 82(12), 1149.
- [15] Ogorodnikov, KF. [1957]. *Statistical Mechanics of the Simplest Types of Galaxies*. *Soviet Astronomy*, vol. 1, p.p. 748.
- [16] Binney, J. & Tremaine, S. [1987]. *Galactic Dynamics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1st ed.
- [17] Pietronero, L. & Labini, F. [2005]. Statistical physics for cosmic structures. *Complexity, Metastability and Nonextensivity*, p.p. 91-101, World Scientific.
- [18] Hameeda, M. & Plastino, A. & Rocca, MC. [2021]. Galaxies clustering generalized theory. *Physics of the Dark Universe*, vol. 32, p.p. 100816, Elsevier.
- [19] Ourabah, K. [2022]. Generalized statistical mechanics of stellar systems. *Physical Review E*, vol. 105 (6), p.p. 064108, APS.
- [20] Pietronero, L. & Sylos, F. [2007]. The problem of cosmological dark matter and statistical physics. *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 143 (1), p.p. 223-230, Springer.
- [21] Féron, C. & Hjorth, J. [2008]. Simulated dark-matter halos as a test of nonextensive statistical mechanics. *Physical Review E*, vol. 77 (2), p.p. 022106, APS.
- [22] Patwardhan, A. [2008]. *Statistical Physics of Dark and Normal Matter Distribution in Galaxy Formation: Dark Matter Lumps and Black Holes in Core and Halo of Galaxy*. arXiv preprint arXiv:0805.2360.
- [23] Chavanis, P. & Lemou, M. & Méhats, F. [2015]. Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The fermionic King model. *Physical Review D*, vol. 92 (12), p.p. 123527, APS.
- [24] Howard, M., Kosowsky, A., and Valogiannis, G. [2022]. *Galaxy Cluster Statistics in Modified Gravity Cosmologies*. arXiv preprint arXiv:2205.13015.
- [25] Sato, N. [2021]. The effect of spacetime curvature on statistical distributions. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 36 (16), p.p. 165003, IOP Publishing.
- [26] Kolekar, S. & Padmanabhan, T. [2011]. Ideal gas in a strong gravitational field: Area dependence of entropy. *Physical Review D*, vol. 83 (6), p.p. 064034, APS.
- [27] Cárdenas, A. & Rubén, O. & Gabarrete, C. & Sarbach, O. [2022]. An introduction to the relativistic kinetic theory on curved spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, vol. 54, 3, pp. 1-120, Springer.
- [28] Souriau, J. [1997]. *Structure of dynamical systems: a symplectic view of physics*. Vol. 149. Springer Science & Business Media.
- [29] Barbaresco, F. [2014]. Koszul information geometry and Souriau geometric temperature/capacity of Lie group thermodynamics. *Entropy*, vol. 16 (8), p.p. 4521-4565, MDPI.
- [30] Marle, C. [2016]. From tools in symplectic and poisson geometry to J.-M. Souriau's theories of statistical mechanics and thermodynamics. *Entropy*, vol. 18 (10), p.p. 370, MDPI.
- [31] Barbaresco, F. [2019]. Lie groups thermodynamics & Souriau-Fisher metric. SOURIAU 2019 conference, Institut Henri Poincaré, 31st May.
- [32] Charles-Michel, M. [2020]. On Gibbs states of mechanical systems with symmetries. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, vol. 58, p.p. 45-85, Bulgarian Academy of Sciences, Institute of Mechanics.
- [33] Rovelli, C. & Smerlak, M. [2011]. Thermal time and Tolman-Ehrenfest effect: 'temperature as the speed of time'. *Classical and Quantum Gravity*. 28 (7): 075007.
- [34] Cubero, D. & Casado-Pascual J. & Dunkel J. & Talkner P. & Hanggi P. [2007]. *Phys. Rev. Lett.* 99 170601.
- [35] Chacón-Acosta, G. & Dagdug, L. & Morales-Técotl, H. [2009]. Manifestly covariant Jüttner distribution and equipartition theorem. *Phys. Rev. E., Statistical, nonlinear, and soft matter physics*.
- [36] Aragón-Muñoz, L. & Chacón-Acosta, G. [2018]. Modified relativistic Jüttner-like distribution functions with η -parameter. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1030, No. 1, p.p. 012004, IOP Publishing.
- [37] Aleksandr, I. & Khinchin, A. [1949]. *Mathematical foundations of statistical mechanics*. Courier Corporation.
- [38] Callen, H. [1985]. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [39] Tuckerman, M. [2010]. *Statistical mechanics: theory and simulation*. Oxford university press.
- [40] Barbaresco, F. & Nielsen, F. et al. [2021]. *Geometric Structures of Statistical Physics, Information Geometry, and Learning*. Springer.
- [41] Marsden, J. & Ratiu, E. & Tudor, S. [1999]. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, p.p. 165-180.
- [42] da Silva, A. [2008]. *Lectures on symplectic geometry*. Vol. 3575, Springer.
- [43] Ritchie, M. & Guillemin, V. [1996]. *Measure theory and*

- probability. Springer.
- [44] Athreya, K. & Soumendra, N. [2006]. Measure theory and probability theory. Springer, vol. 19.
- [45] Jaynes, E. [1957]. Information theory and statistical mechanics. Physical review, vol. 106 (4).
- [46] Callen, H. [1974]. Thermodynamics as a science of symmetry. Foundations of Physics, vol. 4 (4), p.p. 423-443.
- [47] Nakahara, M. [2018]. Geometry, topology and physics. CRC press.
- [48] Azcárraga, JA. & Izquierdo, JM. [1998]. Lie groups, Lie algebras, homology and some applications in physics. Cambridge University Press.
- [49] Moore, T. [2013]. A general relativity workbook. University Science Books Mill Valley.
- [50] Ehlers, J. [1973]. Survey of general relativity theory. Relativity, Astrophysics and Cosmology: Proceedings of the Summer School Held, 14-26 August, 1972 at the Banff Centre, Banff, Alberta. Springer, p.p. 1-125.
- [51] Ehlers, J. & Geroch, R. [2004]. Equation of motion of small bodies in relativity. Ann. Phys. 309 (2004) 232-236.
- [52] Kriele, M. [1999]. Spacetime: foundations of general relativity and differential geometry. Springer Science & Business Media.
- [53] Wald, R. [2010]. General relativity. University of Chicago Press.
- [54] Jaynes, E. [1957]. Information theory and statistical mechanics: I. Physical Review 106, 620.
- [55] Sachs, R. & Wu, HH. [2012]. General relativity for mathematicians. Springer Science & Business Media.
- [56] Abramowitz, M. & Stegun, I. [1968]. Handbook of Mathematical Functions. Dover.
- [57] Carroll, S. [2019]. Spacetime and geometry. Cambridge University Press.
- [58] Gradshteyn, I. & Ryzhik, I. [2014]. Table of integrals, series, and products. Academic Press.
- [59] Apostol, T. [1997]. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, p.p. 24.
- [60] Beckett, A. Homogeneous Symplectic Spaces and Central Extensions. Physical Sciences Forum, vol. 5 (1), p.p. 24, MDPI.
- [61] Lee, J. [2012]. Smooth manifolds. Springer.
- [62] Blumenson, L. [1960]. A Derivation of n-Dimensional Spherical Coordinates. The American Mathematical Monthly. 67 (1), p.p. 63-66.
- [63] Warren, J. [2002]. The curious history of Faà di Bruno's formula. The American mathematical monthly, vol. 109 (3), p.p. 217-234.
- [64] Zhang, Z. & Jizhen, Y. [2012]. Notes on some identities related to the partial Bell polynomials. Tamsui Oxf. J. Inf. Math Sci. vol. 28 (1), p.p. 39-48.
- [65] Seen in <http://functions.wolfram.com/03.04.20.0021.01>.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kurd von Mosengeil. Theorie der stationären strahlung in einem gleichförmig bewegten hohlraum. *Annalen der Physik*, 327(5):867–904, 1907.
- [2] Chuang Liu. Is there a relativistic thermodynamics? a case study of the meaning of special relativity. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 25(6):983–1004, 1994.
- [3] RG Newburgh. Relativistic thermodynamics: Temperature transformations, invariance and measurement. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 52(2):219–228, 1979.
- [4] EV Veitsman. Some problems in relativistic thermodynamics. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 105(5):1057–1067, 2007.
- [5] Yves Pomeau. Statistical mechanics of a gravitational plasma. *Advances in Chemical Physics*, 135:153–172, 2007.
- [6] George Livadiotis. Derivation of the entropic formula for the statistical mechanics of space plasmas. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 25(1):77–88, 2018.
- [7] Péter Mati. Statistical theory of photon gas in plasma. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2020(2):023102, 2020.
- [8] L Pietronero and F Sylos Labini. The problem of cosmological dark matter and statistical physics. *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):223–230, 2007.
- [9] Chloé Féron and Jens Hjorth. Simulated dark-matter halos as a test of nonextensive statistical mechanics. *Physical Review E*, 77(2):022106, 2008.
- [10] Ajay Patwardhan. Statistical physics of dark and normal matter distribution in galaxy formation: Dark matter lumps and black holes in core and halo of galaxy. *arXiv preprint arXiv:0805.2360*, 2008.

- [11] Pierre-Henri Chavanis, Mohammed Lemou, and Florian Méhats. Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The fermionic king model. *Physical Review D*, 92(12):123527, 2015.
- [12] Pierre-Henri Chavanis, Mohammed Lemou, and Florian Méhats. Models of dark matter halos based on statistical mechanics: The classical king model. *Physical Review D*, 91(6):063531, 2015.
- [13] Dmitri A Uzdensky and Jeremy Goodman. Statistical description of a magnetized corona above a turbulent accretion disk. *The Astrophysical Journal*, 682(1):608, 2008.
- [14] Ben Bar-Or and Tal Alexander. The statistical mechanics of relativistic orbits around a massive black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 31(24):244003, 2014.
- [15] Jakob Herpich, Scott Tremaine, and Hans-Walter Rix. Galactic disc profiles and a universal angular momentum distribution from statistical physics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 467(4):5022–5032, 2017.
- [16] KF Ogorodnikov. Statistical mechanics of the simplest types of galaxies. *Soviet Astronomy*, 1:748, 1957.
- [17] James Binney and Scott Tremaine. *Galactic dynamics*, volume 13. Princeton university press, 2011.
- [18] Luciano Pietronero and Francesco Sylos Labini. Statistical physics for cosmic structures. In *Complexity, Metastability and Nonextensivity*, pages 91–101. World Scientific, 2005.
- [19] M Hameeda, Angelo Plastino, and MC Rocca. Galaxies’ clustering generalized theory. *Physics of the Dark Universe*, 32:100816, 2021.
- [20] Kamel Ourabah. Generalized statistical mechanics of stellar systems. *Physical Review E*, 105(6):064108, 2022.
- [21] Naoki Sato. The effect of spacetime curvature on statistical distributions. *Classical and Quantum Gravity*, 38(16):165003, 2021.
- [22] Jean-Marie Souriau and Ch Cushman. *Structure of dynamical systems: a symplectic view of physics*, volume 149. Springer Science & Business Media, 1997.
- [23] Frédéric Barbaresco. Koszul information geometry and souriau geometric temperature/capacity of lie group thermodynamics. *Entropy*, 16(8):4521–4565, 2014.
- [24] Charles-Michel Marle. From tools in symplectic and poisson geometry to j.-m. souriau’s theories of statistical mechanics and thermodynamics. *Entropy*, 18(10):370, 2016.
- [25] Frédéric Barbaresco. Lie groups thermodynamics & souriau-fisher metric. In *SOURIAU 2019 conference, Institut Henri Poincaré, 31st May*, 2019.
- [26] Charles-Michel Marle. On gibbs states of mechanical systems with symmetries. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, 57:45–85, 2020.

- [27] Carlo Rovelli and Matteo Smerlak. Thermal time and tolman–ehrenfest effect: ‘temperature as the speed of time’. *Classical and Quantum Gravity*, 28(7):075007, 2011.
- [28] David Cubero, Jesús Casado-Pascual, Jörn Dunkel, Peter Talkner, and Peter Hänggi. Thermal equilibrium and statistical thermometers in special relativity. *Physical Review Letters*, 99(17):170601, 2007.
- [29] Guillermo Chacon-Acosta, Leonardo Dagdug, and Hugo A Morales-Tecotl. Manifestly covariant jüttner distribution and equipartition theorem. *Physical Review E*, 81(2):021126, 2010.
- [30] L Aragón-Muñoz and G Chacón-Acosta. Modified relativistic jüttner-like distribution functions with η -parameter. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1030, page 012004. IOP Publishing, 2018.
- [31] Arkadiu L Onishchik, EB Vinberg, and V Minachin. *Lie groups and Lie algebras*. Springer, 1993.
- [32] Alexander A Kirillov. *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, volume 113. Cambridge University Press, 2008.
- [33] Robert Gilmore. *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Courier Corporation, 2006.
- [34] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [35] Josi A de Azcárraga and Josi M Izquierdo. *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [36] Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb. *Structure and geometry of Lie groups*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [37] Jerrold E Marsden and Tudor S Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [38] Augustin Banyaga. *The structure of classical diffeomorphism groups*, volume 400. Springer Science & Business Media, 2013.
- [39] Ana Cannas Da Silva and A Cannas Da Salva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 2. Springer, 2008.
- [40] Paulette Libermann and Charles-Michel Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*, volume 35. Springer Science & Business Media, 2012.
- [41] Jean Louis Koszul and Yi Ming Zou. *Introduction to symplectic geometry*. Springer, 2019.
- [42] Victor Guillemin, Yael Karshon, and Viktor L Ginzburg. *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*. Number 98. American Mathematical Soc., 2002.

- [43] Andrew Beckett. Homogeneous symplectic spaces and central extensions. In *Physical Sciences Forum*, volume 5, page 24. MDPI, 2022.
- [44] Mark Tuckerman. *Statistical mechanics: theory and molecular simulation*. Oxford university press, 2010.
- [45] Malcolm Ritchie Adams and Victor Guillemin. *Measure theory and probability*. Springer, 1996.
- [46] Krishna B Athreya and Soumendra N Lahiri. *Measure theory and probability theory*, volume 19. Springer, 2006.
- [47] Encyclopedia of Mathematics. Encyclopedia of Mathematics absolutely continuous measures, 2016.
- [48] kjetil b halvorsen ([https://stats.stackexchange.com/users/11887/kjetil-b halvorsen](https://stats.stackexchange.com/users/11887/kjetil-b-halvorsen)). Statistical interpretation of maximum entropy distribution. Cross Validated. URL:<https://stats.stackexchange.com/q/245198> (version: 2020-04-05).
- [49] Douglas Samuel Jones. *Elementary information theory*. Clarendon Press, 1979.
- [50] Herbert B Callen. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics, 1998.
- [51] Herbert Callen. Thermodynamics as a science of symmetry. *Foundations of Physics*, 4(4):423–443, 1974.
- [52] David JC MacKay and David JC Mac Kay. *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge university press, 2003.
- [53] Christopher M Bishop and Nasser M Nasrabadi. *Pattern recognition and machine learning*, volume 4. Springer, 2006.
- [54] John C Baez and Tobias Fritz. A bayesian characterization of relative entropy. *arXiv preprint arXiv:1402.3067*, 2014.
- [55] Azimuth. Project Azimuth information geometry (part 6), 2011.
- [56] Bruno Arderucio Costa and Pedro Pessoa. Statistical mechanics of unconfined systems: Challenges and lessons. In *Physical Sciences Forum*, volume 3, page 8. MDPI, 2021.
- [57] Frédéric Barbaresco, Frank Nielsen, et al. *Geometric Structures of Statistical Physics, Information Geometry, and Learning*. Springer, 2021.
- [58] Guillermo Chacón-Acosta. Cien años de la función de distribución de jüttner para el gas relativista. *Revista mexicana de física*, 58(2):117–126, 2012.
- [59] Marcus Kriele. *Spacetime: foundations of general relativity and differential geometry*, volume 59. Springer Science & Business Media, 1999.
- [60] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [61] Thomas Andrew Moore. *A general relativity workbook*. University Science Books Mill Valley, 2013.

- [62] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [63] Jürgen Ehlers and Robert Geroch. Equation of motion of small bodies in relativity. *Annals of Physics*, 309(1):232–236, 2004.
- [64] Abraham I Harte. Motion in classical field theories and the foundations of the self-force problem. *Equations of Motion in Relativistic Gravity*, pages 327–398, 2015.
- [65] Adam Pound. Motion of small objects in curved spacetimes: An introduction to gravitational self-force. *Equations of Motion in Relativistic Gravity*, pages 399–486, 2015.
- [66] Encyclopedia of Mathematics. Encyclopedia of Mathematics involutive distribution, 2022.
- [67] Miguel Sánchez. On the geometry of static spacetimes. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 63(5-7):e455–e463, 2005.
- [68] Rainer Kurt Sachs and H-H Wu. *General relativity for mathematicians*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2012.
- [69] FenderLesPaul (<https://physics.stackexchange.com/users/53077/fenderlespaul>). Particle energy in general relativity? Physics Stack Exchange. URL:<https://physics.stackexchange.com/q/194728> (version: 2015-07-18).
- [70] Valter Moretti (<https://physics.stackexchange.com/users/35354/valter-moretti>). Conservation of energy and killing-field. Physics Stack Exchange. URL:<https://physics.stackexchange.com/q/218147> (version: 2015-11-13).
- [71] Encyclopedia of Mathematics. Encyclopedia of Mathematics multinomial coefficient, 2020.
- [72] Kajelad (<https://math.stackexchange.com/users/354840/kajelad>). Restricting a measure to a codimension 1 submanifold. Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/4522096> (version: 2022-08-31).
- [73] Rubén O Acuña-Cárdenas, Carlos Gabarrete, and Olivier Sarbach. An introduction to the relativistic kinetic theory on curved spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, 54(3):23, 2022.
- [74] John M Lee and John M Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2012.
- [75] Robert Geroch and ET Newman. Application of the semidirect product of groups. *Journal of Mathematical Physics*, 12(2):314–314, 1971.
- [76] Wu-Ki Tung. *Group theory in physics*, volume 1. World Scientific, 1985.
- [77] Milton Abramowitz, Irene A Stegun, and Robert H Romer. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, 1988.
- [78] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [79] Raymond Mortini. The faa di bruno formula revisited. *Elemente der Mathematik*, 68(1):33–38, 2013.

- [80] Zhizheng Zhang, Jizhen Yang, et al. Notes on some identities related to the partial bell polynomials. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28(1):39–48, 2012.
- [81] Wolfram research. The Wolfram functions site modified bessel function of the second kind, 2007.
- [82] Richard C Tolman and Paul Ehrenfest. Temperature equilibrium in a static gravitational field. *Physical Review*, 36(12):1791, 1930.
- [83] LE Blumenson. A derivation of n-dimensional spherical coordinates. *The American Mathematical Monthly*, 67(1):63–66, 1960.
- [84] Luis Aragón-Muñoz and Hernando Quevedo. Symplectic structure of equilibrium thermodynamics. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 19(11):2250178, 2022.
- [85] Luis Aragon-Munoz and Hernando Quevedo. Study of ideal gases in curved spacetimes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, DOI:10.1142/S0219887823501505, 2023.