



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SOBRE LA ZONA DE EMISIÓN DE RAYOS GAMMA
EN LA MAGNETÓSFERA DE PULSARES
DIPOLARES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

Axel Morales Buendia



Bajo la asesoría del:

Dr. Néstor Enrique Ortiz Madrigal
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.

Ciudad Universitaria, CDMX, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.

Morales

Buendía

Axel

55 11 48 75 90

Universidad Nacional Autónoma

de México

Facultad de Ciencias

Física

315196100

2. Datos del tutor.

Dr

Nestor Enrique

Ortiz

Madrigal

3. Datos del sinodal 1

Dr

Dany Pierre

Page

Rollinet

4. Datos del sinodal 2

Dr

Gerardo

Ruiz

Chavarría

5. Datos del sinodal 3

Dra

Verónica

Lora

Castellanos

6. Datos del sinodal 4

Dra

Nora Eva

Bretón

Báez

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor, el Dr. Néstor Ortiz por su paciencia y valiosas enseñanzas durante el desarrollo de este trabajo.

*Agradezco a mis padres Wilma y Sergio,
a mi novia Alejandra,
y a mis abuelos Wilma y José Luis
por todo su amor y apoyo,
a ellos dedico esta tesis.*

*Agradezco a las becas otorgadas para realizar esta tesis por los proyectos:
PAPIIT IA100721,
“Fenomenología de estrellas de neutrones en la astronomía de ondas gravitacionales”,
y PAPIIT IA101123,
“Estrellas de neutrones en relatividad general y en teorías alternativas de gravitación”.*

*Agradezco a la UNAM por brindarme una educación de calidad.
Agradezco al Instituto de Ciencias Nucleares por facilitarnos el uso del clúster Tochtli.*

Índice general

1. Introducción	9
2. Preliminares	11
2.1. Conceptos Básicos	11
2.1.1. Cálculo diferencial vectorial	12
2.2. Teoría Electromagnética Clásica	13
2.3. Ondas electromagnéticas	16
2.3.1. El Espectro Electromagnético	16
3. Púlsares y Estrellas de Neutrones	19
3.1. Formación	19
3.2. Tipos de Estrellas de Neutrones	20
3.3. Púlsares	21
3.3.1. Descubrimiento:	21
3.3.2. Un púlsar es una estrella de neutrones en rotación	22
3.4. El modelo dipolar de púlsares	23
3.4.1. El dipolo oblicuo en magnetósferas vacías	26
3.4.2. El dipolo alineado en magnetósferas densas	29
4. Emisión de radiación en la magnetósfera de púlsares	33
4.1. Mecanismos de Emisión	33
4.2. Modelos de emisión derivados del dipolo en el vacío	34
4.3. El Modelo Separatrix Layer y la aproximación Force-Free	35
4.3.1. La función de corriente λ en la aproximación Force-Free	36

4.3.2. La Hoja de Corriente	40
5. Herramientas Computacionales	45
5.1. Software xSky	45
5.1.1. Entrada o Input	45
5.2. Rutina Cap finder	46
5.2.1. Entrada o Input	46
5.2.2. Ejecución	47
5.3. Biblioteca Cap-package	49
5.4. Rutina Fieldline Finder	50
5.4.1. Entrada o Input	50
5.4.2. Ejecución	51
5.5. Paralelización	52
5.6. Rutina Current Finder	54
5.6.1. Entrada o Input	54
5.6.2. Ejecución	55
5.6.3. Interpolador	55
5.6.4. Proyección de λ en una esfera	55
5.6.5. Proyección de λ en un plano	56
5.6.6. Construcción de coordenadas adaptadas a planos de interés	56
5.6.7. λ en el plano ortogonal a $\vec{\mu}$	58
5.7. Rutina Fieldline Asociation	59
5.7.1. Input o entrada	59
5.7.2. Ejecución	59
5.8. Entorno gráfico de Mathematica y Python	59
6. Asociación del campo magnético con la Hoja de Corriente	61
6.1. Flujo de corriente en la vecindad de un púlsar	61
6.1.1. Flujo de corriente cerca de la superficie estelar	61
6.1.2. Flujo de Corriente en la Magnetósfera	63
6.1.3. La función λ en la Hoja de Corriente	66
6.2. Asociación de líneas de campo con la Hoja de Corriente	70

6.2.1. El valor de λ_{\min}	73
7. Conclusiones	77
A. Estudios de convergencia cualitativa de las funciones λ y ρ	79
A.0.1. La función de corriente λ en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$	80
A.0.2. La densidad de carga ρ en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$	81

Capítulo 1

Introducción

Las estrellas de neutrones son objetos astronómicos de gran interés para la física. Desde la primera sugerencia de su existencia, hecha en 1934 por Baade y Zwicky, poco después del descubrimiento del neutrón, hasta el evento en 2017 de fusión de estrellas binarias de neutrones (BNS) GW170817, en donde se demostró el espectacular poder de observaciones gravitacionales y electromagnéticas combinadas.

Décadas después de la sugerencia hecha por Baade y Zwicky, las estrellas de neutrones se volvieron relevantes gracias a la primera observación de los púlsares, hecha por Jocelyn Bell y Antony Hewish en 1967. En estas observaciones, midieron pulsos de radiación electromagnética en la banda del radio, aunque ahora se observan púlsares en la mayor parte del espectro electromagnético. Dichos pulsos se encuentran espaciados en precisos periodos temporales, del orden de segundos. Ahora sabemos que las señales de púlsares son generadas por estrellas de neutrones magnetizadas en rotación.

Entre los tipos de estrellas de neutrones más interesantes están los púlsares de rayos gamma, pues las emisiones de altas energías que emiten estos objetos pueden ser una valiosa fuente de información sobre la estructura magnetosférica de los púlsares.

Desde el descubrimiento de Bell y Hewish, se han propuesto una serie de modelos que intentan explicar las emisiones electromagnéticas de los púlsares, entre ellos están, el *modelo dipolar de púlsares* y el modelo de emisión de rayos gamma en púlsares *Separatrix Layer*. Durante el desarrollo de estos modelos, se ha observado que las predicciones de emisión de radiación electromagnética son muy sensibles a la zona de la magnetósfera en donde se originan. Por esto, la zona de emisión de radiación de altas energías de un púlsar ha sido un tema de debate a lo largo de los años.

En este trabajo buscamos aplicar criterios numéricos para determinar aquellas líneas de campo magnético asociadas a la emisión de rayos gamma en la magnetósfera de

pulsares dipolares. Dentro del modelo *Separatrix-Layer*, la emisión ocurre en una región particular de la magnetósfera llamada *Hoja de Corriente* y estudiaremos su relación con el campo magnético de la estrella para delimitar la zona de emisión.

En este trabajo, primero repasamos, en el capítulo 2, algunos conocimientos preliminares, incluyendo a la teoría electromagnética. Posteriormente, en el capítulo 3, describimos las características generales de las estrellas de neutrones y los pulsares. Con éstas herramientas, describimos, al primer modelo del del pulsar: *El modelo dipolar*, en donde se modela a un dipolo magnético en rotación como la fuente del campo magnético de una estrella de neutrones. Expondremos los resultados del modelo dipolar en el vacío y después, el interesante resultado de Goldreich y Julian de 1969, en donde demostraron que los pulsares necesariamente están dotados de una magnetósfera densa, es decir, no pueden estar rodeados del vacío.

A partir de este resultado, en el capítulo 4, estudiamos la aproximación de la magnetósfera densa *Libre de Fuerzas*, o por su nombre en inglés *Force-Free*, y su aplicación al modelo del dipolo dentro del modelo de emisión *Separatrix Layer* de Bai y Spitkovsky. Mencionamos que dicho modelo predice de forma robusta las emisiones de altas energías de un pulsar, suponiendo que la emisión de radiación se genera mayoritariamente en una zona llamada *Hoja de Corriente*, región asociada a un dipolo magnético en rotación dentro de una magnetósfera densa. En la *Hoja de Corriente* las partículas cargadas se aceleran a velocidades ultra-relativistas, y emiten radiación en la banda de los rayos gamma.

Enseguida, estudiamos la relación de la función de corriente λ con la *Hoja de Corriente* y explicamos su significado físico.

Para determinar la asociación del campo magnético del pulsar con la *Hoja de Corriente*, hemos optimizado varias rutinas y algoritmos dentro de un entorno de software preexistente llamado *xSky*, que explicamos en detalle en el capítulo 5.

En el capítulo 6, validamos nuestras herramientas computacionales comparando nuestros resultados con la literatura, y estudiamos la función de corriente λ en la magnetósfera de estrellas de neutrones, estimando su valor cerca de la *Hoja de Corriente*. Finalmente, desarrollamos un algoritmo que determina, usando nuevos criterios numéricos, la asociación de ciertas líneas de campo magnético con la *Hoja de Corriente* y así, somos capaces de determinar una región de la superficie de la estrella de donde emergen las líneas de campo magnético asociadas con la zona de emisión de rayos gamma de acuerdo con el modelo *Separatrix Layer*.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo, mencionaremos, sin profundizar en ellos, algunos conceptos preliminares relevantes para este trabajo. Algunos de estos son elementos de cálculo vectorial, unidades, las Ecuaciones de Maxwell y el Espectro Electromagnético, entre otros.

2.1. Conceptos Básicos

La teoría electromagnética, central para el desarrollo de este trabajo, se formula en un lenguaje matemático vectorial. Enseguida vamos a repasar ciertas herramientas matemáticas elementales, entre ellas están: los vectores, las derivadas, la divergencia y el rotacional, el gradiente, etcétera. Veamos algunos de estos conceptos matemáticos.

Espacio vectorial: Un espacio vectorial V sobre un campo F es un conjunto en el que se definen 2 operaciones, la adición y la multiplicación por escalares, tal que para cada par de elementos \mathbf{u} y \mathbf{v} en V exista un único elemento $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ que pertenezca a V , y para cada elemento a en F y \mathbf{v} en V , exista un único $a\mathbf{v}$ en V , de manera que se cumplan las propiedades de distributividad, asociatividad, entre otras.^a A los elementos de V se les llama vectores (que denotaremos por \vec{v} o \mathbf{v}), mientras que los elementos de F se denominan escalares. A lo largo de este trabajo, nuestro campo F será el conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Campo vectorial: Sea \mathcal{M} el espacio-tiempo de Minkowski descrito en coordenadas cartesianas (t, x, y, z) . En este trabajo, un campo vectorial \mathbf{v} sobre \mathcal{M} es una función $\mathbf{v} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asigna un vector de componentes (v_x, v_y, v_z) a cada evento en \mathcal{M} . Por ejemplo, \mathbf{v} puede representar un campo de velocidades de un fluido o un campo de fuerzas en general.^b

^aPara ahondar en detalles, consúltese la referencia [1]

^bUsualmente se usa intercambiabilmente el concepto de vector \mathbf{v} con un campo vectorial \mathbf{v} . Recordemos que campo vectorial se refiere a la función \mathbf{v} , mientras que vector se refiere a un elemento de su imagen, $\mathbf{v}(x, y, z)$, en este caso en coordenadas cartesianas.

2.1.1. Cálculo diferencial vectorial

Para introducir los conceptos siguientes, por simplicidad consideramos campos vectoriales definidos sobre la parte espacial de \mathcal{M} , es decir, \mathbb{R}^3 en coordenadas cartesianas (x, y, z) . Suponiendo que el lector está familiarizado con las operaciones usuales en \mathbb{R}^3 , repasaremos ahora algunas nociones básicas del cálculo vectorial sin profundizar en ellas, ya que no forman parte extensiva del objetivo de este trabajo.

Recordemos brevemente el significado de la derivada en cálculo de funciones de una variable,¹ si tenemos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f(x)$, su derivada, denotada por $\frac{df}{dx}$ o $f'(x)$, cuantifica la variación de f al cambiar su argumento x una cantidad infinitesimal dx . La interpretación geométrica es que la derivada f' es la pendiente de la gráfica de $f(x)$ en cada punto x [3].

Para extender la noción de derivada a funciones de varias variables, definimos ∇ como un *operador diferencial vectorial* representado en coordenadas cartesianas (x, y, z) como:

$$\nabla := \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.1)$$

siendo $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ la base ortonormal cartesiana que genera \mathbb{R}^3 , en la literatura también son representados por $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$, y $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ los operadores diferenciales en la dirección x , y y z , respectivamente.² Vale la pena enfatizar que, estrictamente, ∇ no es un vector, sino un operador

¹Para leer la definición formal de derivada, consúltese la referencia [2].

²En la literatura también son representados por $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

diferencial.

El Gradiente

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \rightarrow T(x, y, z)$. Se define el gradiente de T como:

$$\nabla T := \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.2)$$

Notemos que 2.2 nos dice que el gradiente es un vector y lo podemos ver como una generalización del concepto de derivada en el espacio tridimensional. *El gradiente ∇T es un vector que apunta en la dirección de máximo incremento de la función T . Asimismo, La magnitud del gradiente $|\nabla T|$ determina la tasa de crecimiento a lo largo de esta dirección.* [3]

La Divergencia

De la definición de ∇ , construimos la divergencia de un campo vectorial \mathbf{v} , con componentes (v_x, v_y, v_z) . Se define, en coordenadas cartesianas (x, y, z) como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} := \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.3)$$

Notemos que es una cantidad escalar y representa la medida de cuánto *diverge* o se va apartando \mathbf{v} del punto en el que se evalúa.

El Rotacional

El rotacional del campo vectorial \mathbf{v} se construye como:

$$\nabla \times \mathbf{v} := \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (2.4)$$

Nótese que el rotacional es un vector. Geométricamente se interpreta como una medida de la circulación de \mathbf{v} , es decir un vector cuya magnitud y dirección indica el cambio de dirección del campo vectorial alrededor de un punto.

2.2. Teoría Electromagnética Clásica

Esta teoría describe una de las cuatro interacciones fundamentales, la electromagnética, que estudia los fenómenos eléctricos y magnéticos de forma unificada. Específicamente, estudia la interacción de campos eléctricos y magnéticos. En este trabajo, nos interesa estudiar al campo

magnético de Púlsares, que son objetos astrofísicos compactos que describiremos en la sección 3.3. Por esta razón, la teoría electromagnética será la base de la mayor parte del desarrollo teórico de este texto.

Esta teoría fue formalizada en 1865 por James Clerk Maxwell y actualmente, puede ser condensada en las cuatro Ecuaciones de Maxwell en conjunto con la expresión de la Fuerza de Lorentz. Enseguida explicaremos brevemente el significado físico de estas ecuaciones, pero antes hacemos un par de definiciones.

Carga Eléctrica

La carga es una propiedad intrínseca de la materia. Tiene dos posibles tipos o polaridades, puede ser positiva (+) o negativa (-). Las cargas de signos iguales se repelen, mientras que las de signos opuestos se atraen. Es común asumir que la carga neta de objetos astrofísicos es cero, pues se espera que cualquier exceso de carga tienda a neutralizarse.

La carga se conserva, no puede ser creada ni destruida. La carga también se conserva *localmente*, esto quiere decir que debe seguir un camino continuo para cambiar su distribución (ver referencia [3]).

Unidades

Existen varios sistemas de unidades para escribir las leyes del electromagnetismo. En este trabajo usaremos las unidades gaussianas, por ser una práctica común en la literatura consultada. Alternativamente se puede usar otro sistema (como el Sistema Internacional [SI]) para expresar las mismas ecuaciones. Referimos al lector a la tabla C.2 en el apéndice C de la referencia [3] para consultar las equivalencias entre las expresiones en el SI y en unidades gaussianas.³

Ley de Gauss para campos Eléctricos y Magnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.6)$$

con \mathbf{E} y \mathbf{B} campos eléctricos y magnéticos, respectivamente. Los cuales, matemáticamente corresponden a campos vectoriales, es decir, $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde \mathcal{M} es el espacio-tiempo de Minkowski. Finalmente, ρ es la *densidad volumétrica de carga eléctrica*.

La ecuación 2.5 establece la relación entre el campo eléctrico y sus fuentes (o sumideros, según

³La *regla* para convertir las ecuaciones de Maxwell de SI a gaussianas es intercambiar la permitividad del vacío ϵ_0 por 4π y la constante magnética μ_0 por $4\pi/c$.

el signo), es decir, la densidad ρ de carga eléctrica.

La ecuación 2.6 nos dice que la estructura más simple del campo magnético \mathbf{B} será dipolar, en otras palabras, no existen análogos magnéticos para las cargas eléctricas (ni fuentes ni sumideros), mostrando una diferencia fundamental entre los campos eléctrico y magnético.

Ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

donde c es la *velocidad de la luz*. La Ley de Faraday 2.7 establece que *Un campo magnético cambiante en el tiempo induce un campo eléctrico* [3]. En otras palabras es posible inducir una *Fuerza Electromotriz* al hacer cambiar en el tiempo el flujo magnético sobre la superficie encerrada por un circuito.

Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

donde \mathbf{j} es la *Densidad de corriente volumétrica*. El primer término a la derecha de la ecuación 2.8 nos dice que el campo magnético es generado por corrientes eléctricas, mientras que el segundo nos dice que un campo eléctrico cambiante induce un campo magnético, generando una simetría entre los campos cambiantes en el tiempo con la ley de Faraday 2.7.

Ley de la Fuerza Electromagnética

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}/c \times \mathbf{B}). \quad (2.9)$$

Esta ecuación describe la fuerza ejercida sobre una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} , provocada por su interacción con los campos eléctricos y magnéticos presentes.

En conjunto con estas ecuaciones, la descripción del electromagnetismo incluye la *Ley de Ohm*, que establece que para generar un flujo de corriente se necesita una fuerza para mover a las cargas. En la referencia [3] se menciona que para la mayoría de sustancias, la densidad de corriente \mathbf{j} es proporcional a la fuerza por unidad de carga \mathbf{f} ,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{f}, \quad (2.10)$$

donde σ representa un factor de proporcionalidad, una constante empírica que cambia según el material y se llama la *conductividad* del medio. En general, la fuerza por unidad de carga \mathbf{f} que genera aceleración (y por lo tanto movimiento) en las cargas puede ser de cualquier tipo: gravitacional, química, etcétera. Sin embargo, usualmente ésta corresponde a la fuerza electromagnética,

obteniendo una ley de Ohm escrita de la siguiente forma

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}). \quad (2.11)$$

Aquí hemos repasado las bases de la teoría electromagnética. Nos referiremos a ellas más adelante a lo largo del trabajo.

2.3. Ondas electromagnéticas

Al combinar las Ecuaciones de Maxwell para el vacío, se obtiene que los componentes de \mathbf{E} y \mathbf{B} satisfacen la ecuación de onda en tres dimensiones. La interpretación física de este resultado es que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se propagan en el vacío en forma de onda. Además, siguiendo la referencia [3], se puede obtener que la velocidad de estas ondas en el SI de unidades es

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad (2.12)$$

que corresponde a la velocidad de la luz c , que había sido medida experimentalmente antes del hallazgo de Maxwell. Este fue uno de los argumentos a favor de la naturaleza ondulatoria y electromagnética de la luz.

2.3.1. El Espectro Electromagnético

El espectro electromagnético es el rango de frecuencias de onda posibles para las ondas electromagnéticas. Este espectro abarca frecuencias tan bajas como las ondas de radio (10^3 Hz) y tan altas como los *rayos gamma* ($10^{20} - 10^{22} \text{ Hz}$) [3], que constituyen las ondas electromagnéticas más energéticas, ver la figura 2.1

En el universo, existen una variedad de fuentes astrofísicas de emisión de ondas electromagnéticas. Por ejemplo, una estrella como el Sol, emite principalmente en las bandas del infrarrojo, la luz visible y el ultravioleta. Por otro lado, la acreción de materia de un agujero negro emite en la banda de los rayos X.

Más adelante, en la sección 3.3, veremos que los púlsares, emiten ondas electromagnéticas en prácticamente todo el espectro electromagnético. Particularmente, veremos que aquellos púlsares que emiten en rayos gamma pueden proporcionar información sobre la estructura de su campo magnético, ya que dichas emisiones requieren de una liberación de enormes cantidades de energía, que solo unos pocos mecanismos son capaces de generar.

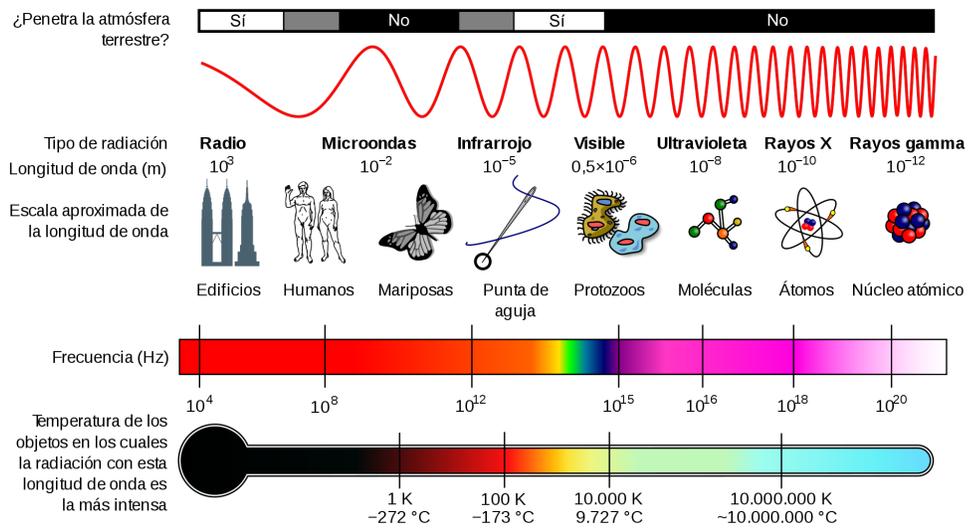


Figura 2.1: El espectro electromagnético, imagen tomada de la referencia [4]

Capítulo 3

Púlsares y Estrellas de Neutrones

3.1. Formación

Una estrella activa o de *secuencia principal*¹ es un objeto astrofísico esferoidal autogravitante compuesto de plasma. Su estabilidad es mediada por su gravedad y su presión interna, generada por la liberación de energía de su núcleo. Una estrella genera energía mediante un proceso llamado *fusión nuclear*. No es el objetivo de este trabajo explicar a profundidad el tópico y mencionaremos que la *fusión nuclear* es un proceso que se lleva a cabo dentro de los núcleos estelares, en donde se libera energía al *fusionar* átomos sencillos formando átomos más pesados [5].

Principalmente se fusiona hidrógeno (H) en helio (He) durante la vida de una estrella. Al terminarse el hidrógeno, se comienzan a fusionar el helio y otros elementos cada vez más pesados hasta llegar al hierro (Fe), la estructura de este átomo es tal que el proceso de fusión usa energía en vez de liberarla. Al no poder generar una presión interna, la estrella cede ante su propio peso y esto causa una caída libre de material e inevitablemente el colapso de la estrella, liberando una enorme cantidad de energía gravitacional en forma de una explosión violenta llamada *supernova*. Una supernova genera energía luminosa suficiente para opacar a todas las demás estrellas presentes en su galaxia por un corto período de tiempo [5].

Al estallar la supernova, la estrella expulsa su material externo dejando un núcleo *ultra-compactado* como remanente. Para condiciones específicas de masa de la estrella progenitora (entre 8 y 10 M_{\odot})² este remanente se conoce como *estrella de neutrones*. [6] En este trabajo nos referiremos a ellas por su nombre o por NS, por sus siglas en inglés para *Neutron Star*.

En 1939, Baade y Zwicky sugirieron la existencia de estos objetos astronómicos a partir de

¹Una estrella se considera *activa* o en *secuencia principal* si en su núcleo se está llevando a cabo el proceso de fusión.

²El símbolo M_{\odot} empleado aquí se refiere a la unidad de Masa Solar, que en el SI es 1.989×10^{30} kg.

sus estudios de supernovas y el descubrimiento del neutrón, en 1932. El primer modelo de estrellas de neutrones fue construido por Openheimer y Volkoff en 1939, suponiendo un gas ideal de neutrones libres a altas densidades, y encontraron, usando relatividad general y la ecuación de estado de un gas frío de Fermi, que existía por lo menos una solución estable de las ecuaciones de estructura en donde la presión del gas de neutrones y su gravedad mantienen el equilibrio en vez de colapsar. Abriendo así la posibilidad de la existencia de este tipo de objetos.

En los años posteriores, las estrellas de neutrones fueron mayormente ignoradas por la dificultad de detectarlas, hasta que en 1967 se descubrieron los púlsares [7], señales pulsantes de radiación electromagnética que describiremos en la sección 3.3. Las estrellas de neutrones se convirtieron en fuentes candidatas para explicar estas señales.

3.2. Tipos de Estrellas de Neutrones

Existen diversos tipos de objetos reconocidos por ser subcategorías de estrellas de neutrones, entre ellos están los púlsares (que se describen en la siguiente sección, 3.3).

Como menciona la referencia [8], estas categorías no son exclusivas, es decir, un objeto puede ocupar varios puntos de las clasificaciones mencionadas a continuación, y dependiendo del contexto se clasifican de una u otra manera.

Magnetares: Son NS con un campo magnético muy intenso ($10^{14} - 10^{15}$ Gauss) que emiten radiación electromagnética en altas energías, desde los rayos X a los rayos gamma. Otra diferencia respecto a los púlsares típicos, es que rotan más lentamente, con periodos de 1 a 10 segundos. En la siguiente sección veremos que el periodo de un púlsar puede ser del orden de milisegundos 3.3.

Fast radio bursts (FRBs): Una posible traducción al español es una *Ráfaga rápida de radio*. Se caracterizan por ser emisiones de ondas de radio de milisegundos de duración. Su alta dispersión sugiere fuentes extragalácticas. Se descubrieron reexaminando datos observacionales en 2007 [9].

Binarias de Rayos X: Son sistemas de acreción³ en donde una estrella de neutrones acreta material de su compañera, una estrella activa de alrededor de $20 M_{\odot}$ o de masa comparable a la masa solar. El mecanismo de emisión se debe a la fricción del gas de la estrella cayendo en la NS.

Central compact objects (CCOs): Su traducción es *Objetos Centrales Compactos* y se refiere a puntos brillantes en rayos X en el centro de remanentes de una supernova. Se detectan como fuentes termales en las bajas frecuencias dentro de la banda de rayos X.

³Este mecanismo es definido por la RAE como: *Crecimiento por adición de materia* debido a las inmensas fuerzas de marea generadas por un objeto compacto.

3.3. Púlsares

3.3.1. Descubrimiento:

El nombre de éstos objetos proviene del inglés *Pulsar* y a su vez de *Pulsating star*. Fueron descubiertos por Jocelyn Bell y Antony Hewish (en la referencia [10] se puede consultar el artículo de su descubrimiento). Ellos, usando radiotelescopios, notaron un patrón de emisiones de radio con púlsos muy precisos. El púlsar que observaron pertenece a la subcategoría de púlsares de radio impulsados por rotación (con las siglas en inglés RPP's). Por una razón técnica, los primeros detectores observaban las emisiones de estos objetos en la banda del radio, sin embargo muchos de los objetos más estudiados producen la mayoría de sus emisiones en rayos gamma, rayos X, y partículas energizadas.

En el artículo del descubrimiento [10], la duración de la emisión podía ser acotada a ser de 0.016 segundos. Si la fuente está emitiendo coherentemente desde un área dada, el tamaño de la misma no puede ser mayor que la distancia que puede viajar la luz durante la duración de la emisión. Por lo tanto, menciona la referencia [8], la fuente de emisión no puede ser mayor a $\delta r = c \cdot \delta t \approx 4,800\text{km}$ de diámetro, recordemos que el diámetro terrestre es $R_T \approx 12,000\text{km}$. Por lo tanto, la fuente debe ser compacta⁴, ya sea un agujero negro o una estrella pequeña. Así, quedan tres posibles fuentes para las emisiones descubiertas: un sistema binario compacto, una estrella pequeña oscilante o un objeto compacto en rotación.

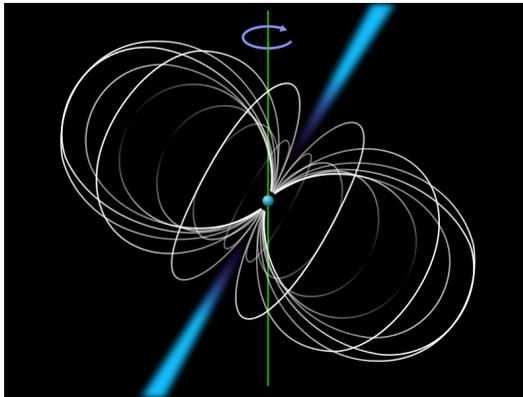


Figura 3.1: Vista esquemática de un púlsar. La esfera del medio representa la estrella de neutrones, las curvas indican las líneas del campo magnético, y los conos que sobresalen representan las zonas de emisión. Obtenida de Wikimedia Comons [11]

⁴Un objeto compacto en el contexto de la astrofísica es un objeto con un cociente de masa-radio grande, es decir con una gran densidad y por lo tanto diferente estructura que la materia común. Por ejemplo: agujeros negros de masa estelar, estrellas de neutrones o enanas blancas.

3.3.2. Un púlsar es una estrella de neutrones en rotación

Desde el descubrimiento de los púlsares se sabía que la señal provenía de un objeto compacto, pero todavía no se determinaba la fuente concretamente. A continuación reproduciremos el razonamiento mediante el cual se llega a la conclusión de que los púlsares son estrellas de neutrones, expuesto en la referencia [8].

Ya habiéndose descartado estrellas oscilantes como las *Cefeidas*⁵ y los agujeros negros por carecer de materia para acelerar de tal forma que la emisión se ajustara a las observaciones (ver referencia [8]), exploramos la opción de una estrella compacta. Supongamos un cuerpo esférico de radio R y masa M en rotación. Es posible estimar su frecuencia angular máxima ω_{\max} igualando la fuerza centrífuga con la gravitacional ejercida sobre una partícula de masa m en el ecuador de la esfera,

$$mR\omega_{\max}^2 = G\frac{Mm}{R^2}. \quad (3.1)$$

Escribiendo ω_{\max} en términos de las demás variables se obtiene

$$\omega_{\max} = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}. \quad (3.2)$$

Notemos que el período mínimo de rotación es

$$P_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}}, \quad (3.3)$$

y, en términos de ω_{\max} obtenemos

$$P_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (3.4)$$

Esta cantidad depende del tipo de estrella compacta. Las enanas blancas tienen un radio similar al terrestre ($R \approx R_{\text{T}}$) y una masa menor o parecida a la masa solar ($M \lesssim 1M_{\odot}$). Las estrellas de neutrones tienen un radio mucho menor, de alrededor de 10 km, y una masa mayor ($1.1M_{\odot} \lesssim M \lesssim 2.1M_{\odot}$).

Sustituyendo los parámetros de una enana blanca típica, el orden de magnitud del período mínimo P_{\min} está entre 10^1 y 10^2 s. Las características de las NS (más masivas y más compactas) permiten cotas mucho más bajas para P_{\min} . Dado que se han observado púlsares con períodos de milisegundos, las NS constituyen el único tipo de estrella compacta que podría emitir en períodos tan cortos. Así, los púlsares se reconocen actualmente como estrellas de neutrones en rotación.

⁵Una estrella Cefeida es una estrella que pulsa radialmente variando en temperatura y diámetro produciendo cambios de brillo con un período y amplitud estables y muy regulares.

3.4. El modelo dipolar de púlsares

A continuación consideramos a un púlsar en rotación. El modelo más simple de púlsares supone una estrella de neutrones dotada de un campo magnético dipolar, aunque bien podrían existir púlsares dotados de campos no dipolares. En la figura 3.2, $\vec{\mu}$ representa el vector de momento dipolar magnético; $\vec{\Omega}$ es el vector de velocidad angular y α es el ángulo entre los vectores $\vec{\mu}$ y $\vec{\Omega}$. Se llama *Cilindro de luz*, abreviado LC por las siglas en inglés de *Light Cylinder*, a la superficie cilíndrica imaginaria que rodea al púlsar, definida por ser la zona más alejada en la cual las partículas pueden co-rotar con la estrella sin alcanzar la velocidad de la luz. En la figura 3.2 representamos un corte del LC con líneas punteadas y denotamos su radio por

$$R_{\text{LC}} := \frac{c}{\Omega}, \quad (3.5)$$

donde Ω es la magnitud del vector de velocidad angular $\vec{\Omega}$.

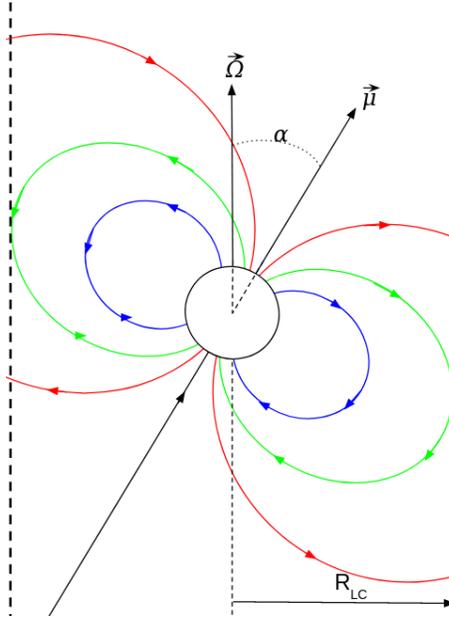


Figura 3.2: Diagrama de corte transversal de un modelo de un púlsar. Las curvas continuas representan las líneas de campo magnético dipolar que emergen de la estrella. Las líneas rojas representan líneas de campo abiertas, consideradas así porque atraviesan el LC. Las líneas verdes representan LOFLs (definidas en 3.4), pues son tangentes al LC. Las líneas azules representan líneas de campo cerradas, pues nunca cruzan el LC.

Como veremos pronto, las LOFLs y sus líneas vecinas son altamente relevantes en los modelos de emisión de radiación electromagnética en púlsares.

Definiciones

Siguiendo a la referencia [12], a continuación definimos algunos conceptos relacionados a los púlsares que nos servirán en los siguientes capítulos.

Magnetósfera: Región del espacio en la vecindad de un objeto astrofísico en donde las partículas cargadas son influenciadas por el campo magnético del objeto.

Últimas líneas de campo abiertas (LOFLs): por sus siglas en inglés de *Last Open Fieldlines*. Suponiendo que las líneas de campo que emergen de regiones cercanas a los polos magnéticos son abiertas en el sentido que cruzan el LC, entonces las LOFLs son las líneas tangentes al LC en algún punto. Ver la figura 3.2.

Separatriz (Separatrix): Zona de separación entre líneas de campo \mathbf{B} abiertas y cerradas. Está íntimamente relacionada con las LOFLs.

Casquetes polares (Polar caps): Los casquetes polares o, más comunmente, los *casquetes* o *caps*, son vecindades de los polos magnéticos sobre la superficie de un púlsar. Todas las líneas de campo magnético que emergen de estas vecindades son abiertas, y su frontera es definida por los puntos de donde emergen las LOFLs.

Mapa sidereal (skymap): Es un histograma en color del número de fotones que llegan al observador desde un púlsar. Depende del ángulo de inclinación α del púlsar, así como de la fase de rotación ϕ en la que sea observado.

Curva de luz: Es una gráfica de la intensidad de radiación detectada de un púlsar a un ángulo de observación dado, en función de la fase de rotación.

El origen del campo magnético de estrellas de neutrones

Actualmente el origen del campo magnético para NS está en debate y en la literatura se encuentran tres posibles orígenes para su campo magnético.

1. La hipótesis de conservación de flujo magnético.

La estrella hereda el campo magnético en donde se cumple que

$$BR = \text{constante}, \quad (3.6)$$

con R el radio de la estrella, de forma que si R disminuye un factor de 10^5 , el campo magnético B de su remanente aumentará 10^{10} , para más información, ver la referencia [13].

2. Campos generados por corrientes eléctricas circulantes o un dínamo en la estrella progenitora, durante las primeras etapas de supernova, un ejemplo de dínamo conocido es el que produce el campo magnético terrestre.
3. El efecto termomagnético presente en la corteza de la NS.

La referencia [14] contiene una comparación más exhaustiva de los diferentes orígenes, favoreciendo el segundo caso para la formación de campos magnéticos de púlsares y magnetares.

El modelo dipolar de púlsares supone la configuración magnética más sencilla para el campo de la NS, el dipolo perfecto, expresado como

$$\mathbf{B} = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\vec{\mu} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \vec{\mu}}{r^3}, \quad (3.7)$$

con $r \in (0, \infty)$, en donde $\vec{\mu}$ es el vector de momento dipolar magnético y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en dirección radial. Podemos expresar la anterior ecuación en términos de coordenadas esféricas auxiliares (r, θ, ϕ) como

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{r^3} \left(2 \cos(\theta) \hat{\mathbf{r}} + \sin(\theta) \hat{\theta} \right), \quad (3.8)$$

con $\theta \in [0, \pi]$ y, definido en las coordenadas esféricas usuales (r, ϑ, φ) como $\theta := \vartheta - \alpha$, con α el ángulo entre el vector de velocidad angular $\vec{\Omega}$ y $\vec{\mu}$. En la ecuación 3.8 μ representa la magnitud del vector $\vec{\mu}$ y $\hat{\theta}$ es el vector unitario, ortogonal a $\hat{\mathbf{r}}$, correspondiente al ángulo θ . Notemos que en estas coordenadas auxiliares, el campo \mathbf{B} no depende del ángulo ϕ , esto sucede porque provenimos de la expresión 3.7, construyendo a nuestro sistema coordenado a partir del vector $\vec{\mu}$, es decir, estas coordenadas están siempre alineadas con el dipolo sin importar el valor del ángulo α . En el caso *oblicuo* o donde el vector de momento magnético no está alineado al vector de velocidad angular, $\vec{\mu}$ y \mathbf{B} serán dependientes del tiempo y tendrán términos en las coordenadas esféricas usuales (r, ϑ, φ) . Notemos que podemos obtener la magnitud de \mathbf{B} usando el producto punto $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ en la ecuación 3.8 y resulta

$$B = \left[\frac{\mu}{r^3} \right] \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}. \quad (3.9)$$

Esta expresión de la magnitud del campo \mathbf{B} nos servirá en las siguientes secciones.

A continuación, revisaremos dos casos interesantes: cuando el dipolo se encuentra inmerso en el vacío y cuando se encuentra en una región abundante en plasma.

3.4.1. El dipolo oblicuo en magnetósferas vacías

En esta versión del modelo, se supone una NS rotando de forma uniforme en el vacío con velocidad angular $\vec{\Omega}$, y con un momento magnético $\vec{\mu}$ que forma ángulo α respecto a $\vec{\Omega}$, es decir respecto al eje de rotación (ver figura 3.2). En esta tesis seguiremos el desarrollo presentado en la referencia [7]. De la ecuación 3.7, vemos que en el polo magnético de la estrella de radio R , $\vec{\mu}$ está alineado a \mathbf{r} , independientemente de las coordenadas, la magnitud de \mathbf{B} es

$$B_p = 2 \frac{\mu}{R^3}. \quad (3.10)$$

La evolución temporal de $\vec{\mu}(t)$ será, en coordenadas cartesianas y, expresando a μ en términos de B_p ,

$$\vec{\mu}(t) = \frac{B_p R^3}{2} \left(\sin \alpha \cos \Omega t \hat{\mathbf{i}} + \sin \alpha \sin \Omega t \hat{\mathbf{j}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (3.11)$$

La solución conocida de \mathbf{B} para el caso de un dipolo en rotación es

$$\mathbf{B} = - \left[\frac{\ddot{\vec{\mu}}(t)}{r^3} + \frac{\dot{\vec{\mu}}(t)}{cr^2} + \frac{\vec{\mu}(t)}{c^2r} \right] + \mathbf{r} \left(\mathbf{r} \cdot \left[3 \frac{\ddot{\vec{\mu}}(t)}{r^3} + 3 \frac{\dot{\vec{\mu}}(t)}{cr^2} + \frac{\vec{\mu}(t)}{c^2r} \right] \right), \quad (3.12)$$

donde el punto sobre cada cantidad representa la derivada temporal. Esta solución, nada trivial de obtener, recibe el nombre de dipolo retardado [15] y se puede consultar en la referencia [16], en donde se obtiene a partir de la expresión del vector de potencial magnético para un momento magnético dependiente del tiempo.

En la referencia [3] encontramos la fórmula de Larmor para obtener la potencia (energía por unidad de tiempo) radiada por un dipolo eléctrico oscilante. Aquí la escribiremos como se muestra en [8]:

$$\dot{E} = -\frac{2}{3c^3} q^2 \dot{v}^2, \quad (3.13)$$

donde E es la energía y \dot{E} es la potencia, q es la carga que oscila y \dot{v} es su aceleración. En términos del momento dipolar eléctrico $d = qr$ obtenemos

$$\dot{E} = -\frac{2}{3c^3} \dot{d}^2. \quad (3.14)$$

La fórmula de Larmor puede ser aplicada tanto a un dipolo eléctrico como a uno magnético, de forma análoga escribimos

$$\dot{E} = -\frac{2}{3c^3} \dot{\vec{\mu}}^2. \quad (3.15)$$

Para sustituir la expresión de la ecuación 3.11 en la ecuación anterior, obtenemos primero la segunda derivada de $\vec{\mu}$,

$$\ddot{\vec{\mu}}(t) = -\frac{B_p R^3 \Omega^2}{2} \left(\sin \alpha \cos \Omega t \hat{\mathbf{i}} + \sin \alpha \sin \Omega t \hat{\mathbf{j}} \right),$$

y obtenemos su magnitud al cuadrado con el producto $\ddot{\vec{\mu}} \cdot \ddot{\vec{\mu}} = \ddot{\mu}^2$, lo cual conduce a

$$\ddot{\mu}(t) = \frac{B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin^2 \alpha}{4}. \quad (3.16)$$

Sustituyendo esto en la ec. 3.15, la potencia \dot{E}_B (en donde colocamos B como subíndice para enfatizar que proviene del campo magnético \mathbf{B}) resulta

$$\dot{E}_B = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin^2 \alpha}{6c^3}. \quad (3.17)$$

Notemos que tiene signo negativo, es decir que el sistema va perdiendo energía y es proporcional a la magnitud de la velocidad angular Ω elevada a la cuarta potencia.

Estudiamos ahora a la energía cinética rotacional de la NS,

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \Omega^2, \quad (3.18)$$

en donde I representa el momento de inercia de la estrella. Derivando la ecuación anterior obtenemos

$$\dot{E}_{\text{rot}} = I \Omega \dot{\Omega}. \quad (3.19)$$

Siguiendo a la referencia [8], ignoramos (para este modelo sencillo) las demás contribuciones al balance de energías y suponemos que la pérdida de energía rotacional 3.19 corresponde únicamente a la potencia radiada del dipolo magnético 3.17, es decir $\dot{E}_{\text{rot}} = -\dot{E}_{\text{B}}$ de esta forma obtenemos una ecuación diferencial para $\dot{\Omega}$.

$$\dot{\Omega} = -K \Omega^3, \quad (3.20)$$

donde $K = -B_p^2 R^6 \sin^2 \alpha / 16c^3$. Notemos que la ecuación 3.20 es una estimación del cambio de la velocidad angular, establece que el púlsar va perdiendo energía rotacional y cada vez gira más lento.

Aunque queda fuera del objetivo de este trabajo, es importante mencionar que, siguiendo esta línea de pensamiento, se puede llegar definir una edad característica para los púlsares. Integrando la ecuación 3.20, que proviene de igualar 3.17 y 3.19 se puede estimar la edad de un púlsar. En la referencia [7] se menciona que empleando este modelo, Groth y Gullahorn, en 1972, estimaron una edad de 1243 años para el púlsar del Cangrejo, remanente de la supernova observada desde varias regiones de la Tierra en el año 1054 [17], el cual tenía una edad de 918 años en 1972. A pesar de que la estimación no concuerda con la edad, ofrece una aproximación razonable a pesar de la simplicidad del modelo. Hay que tomar en cuenta que el modelo está aproximando a un púlsar como un dipolo en rotación (en el vacío) que pierde energía rotacional en forma de radiación electromagnética, ignorando otras posibles contribuciones.

Sustituyendo en 3.18 y 3.19 los datos del púlsar del cangrejo, Gunn y Ostriker en 1969 obtuvieron

$$E = 2.45 \times 10^{49} \text{ergs}, \quad (3.21)$$

y para la potencia,

$$\dot{E} = 6.4 \times 10^{38} \text{ergs s}^{-1}. \quad (3.22)$$

Estos resultados son una aproximación razonable a las mediciones reportadas de la nébula del cangrejo, aproximadamente $\dot{E} = 5 \times 10^{38} \text{ergs s}^{-1}$ [7]. Este primer modelo logra dar resultados y predicciones muy interesantes a pesar de su sencillez.

3.4.2. El dipolo alineado en magnetósferas densas

En esta sección mostraremos el desarrollo que hicieron Goldreich y Julian, publicado en 1969 [18]. En esa referencia, ellos argumentan que un campo eléctrico intenso cerca de la superficie de la estrella arrancaría continuamente partículas cargadas, dotando a un púlsar de una magnetósfera densa.

Consideremos una NS esférica de radio R en rotación, con un campo magnético dipolar \mathbf{B} , con vector de momento dipolar $\vec{\mu}$, alineado al eje de rotación (ver la figura 3.2 considerando $\alpha = 0^\circ$, es decir, el caso donde la dirección de $\vec{\mu}$ coincide con $\vec{\Omega}$).

En el modelo de Goldreich & Julian y, *virtualmente en todos los modelos clásicos de púlsares* [7], el campo \mathbf{B} es primordialmente dipolar en la zona cercana a la estrella, es decir a distancias menores que R_{LC} . Entonces para $R < r < R_{\text{LC}}$ y cerca del ecuador de la estrella, con $\theta \approx \pi/2$, recordando las ecuaciones 3.9 y 3.10, podemos escribir que,

$$B \approx \frac{|\vec{\mu}|}{r^3} \approx B_p \left(\frac{R}{r} \right)^3. \quad (3.23)$$

Por otro lado, el campo magnético estará dividido por la superficie de la estrella, usaremos la notación ^(in/out) para denotar el valor de los campos dentro y fuera de la estrella respectivamente. El campo magnético fuera de la estrella es

$$\mathbf{B}^{(\text{out})} = \frac{B_p R^3}{r^3} \left(\cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \vartheta}{2} \hat{\vartheta} \right). \quad (3.24)$$

Suponiendo que no existen corrientes superficiales, ambas componentes de \mathbf{B} , la normal y la tangencial son continuas a través de la superficie estelar. Con este razonamiento el campo dentro de la esfera es

$$\mathbf{B}^{(\text{in})} = B_p \left(\cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \vartheta}{2} \hat{\vartheta} \right). \quad (3.25)$$

Debido a la alineación de la rotación con el momento dipolar, el campo externo es estático y existe una simetría axial respecto al vector $\vec{\Omega}$. En la superficie de la estrella las partículas estarán sometidas a una fuerza de Lorentz de la forma

$$F \propto \frac{\Omega \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (3.26)$$

Goldreich y Julian mencionan en [18]: *Suponemos que la materia estelar, tanto en el interior degenerado como en la atmósfera no degenerada, es un excelente conductor eléctrico. Por lo tanto, la estrella estará polarizada, de forma que tendrá un campo eléctrico interior que satisface 3.27.* Recordemos la Ley de Ohm 2.11, que al suponer lo anterior, se cumplirá para conductores, en donde $J/\sigma \rightarrow 0$, es decir

$$\mathbf{E}^{(\text{in})} + \frac{\vec{\Omega} \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{in})} = 0. \quad (3.27)$$

Sustituyendo el valor de $\mathbf{B}^{(\text{in})}$ de la ec. 3.25 obtenemos que

$$\mathbf{E}^{(\text{in})} = -\frac{B_p}{c} \left[\cos \vartheta (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \vartheta}{2} (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \hat{\vartheta} \right], \quad (3.28)$$

donde $|\mathbf{r}| = R \sin \vartheta$. Realizando los productos vectoriales, y notando que estamos en el interior de la estrella obtenemos

$$\mathbf{E}^{(\text{in})} = -\frac{B_p R \sin \vartheta \Omega}{c} \left[\frac{\sin \vartheta}{2} \hat{\mathbf{r}} - \cos \vartheta \hat{\vartheta} \right]. \quad (3.29)$$

Recordemos que en estas condiciones alineadas, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ y, suponiendo por un momento el exterior vacío podemos definir un potencial eléctrico V tal que

$$E^{(\text{out})} = -\nabla V, \quad (3.30)$$

y que cumple la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 V = 0, \quad (3.31)$$

en donde la condición de frontera es $r = R$, entonces la solución a esta ecuación es

$$V = -\frac{B_p \Omega R^5}{r^3 3c} P_2(\cos \vartheta) = -\frac{B_p \Omega R^5}{r^3 6c} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad (3.32)$$

en donde P_2 se refiere al Polinomio de Legendre de orden 2. Para ahondar en este tema y las soluciones de la ecuación de Laplace, consultar las referencias [3] y [19]. El potencial tiene naturaleza cuadrupolar, y el hecho de que la componente tangencial de \mathbf{E} sea continua a través de la superficie nos permite escribir que justo fuera de la superficie de la estrella

$$E_{\vartheta}^{(\text{out})} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{R^2 \Omega B_p}{3c} P_2(\cos \vartheta) \right]. \quad (3.33)$$

Así evaluando \mathbf{E} y \mathbf{B} fuera de la estrella obtenemos de 3.24, 3.30 y 3.32 que

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{-R\Omega}{c} \left(\frac{R}{r} \right)^7 B_p^2 \cos^3 \vartheta, \quad (3.34)$$

y entonces la magnitud del campo eléctrico paralela a \mathbf{B} $E_{||}$, en la superficie, con $r = R$ y $\theta = 0$ es

$$E_{||} \approx \frac{R\Omega}{c} B_p^2, \quad (3.35)$$

para un púlsar típico como el de Cangrejo con $B_p = 5.2 \times 10^{12} \text{G}$ [7],

$$E_{\parallel} \approx 2 \times 10^8 P^{-1} B_{12} [\text{V cm}^{-1}]$$

donde $P = 2\pi/\Omega$ es el período de rotación y B_{12} es la intensidad de campo magnético en unidades de 10^{12} Gauss [7],[6]. Este campo eléctrico sería lo suficientemente intenso como para desprender partículas cargadas de la superficie de la estrella, de forma que la estrella tendría una magnetósfera necesariamente densa, ya que una vacía sería inestable. Como concluyen Goldreich y Julian [18]: *Una estrella de neutrones magnetizada en rotación, no puede estar rodeada del vacío.*

Capítulo 4

Emisión de radiación en la magnetósfera de pulsares

Existen diversos modelos de emisión de radiación electromagnética de altas energías, como los rayos gamma, provenientes de pulsares. Algunos de los modelos más populares en la literatura son conocidos como *Polar cap* [20], *Outer gap*, *Two-pole caustic* [21] y *Separatrix Layer* [22]. En este capítulo, explicaremos brevemente las diferencias entre estos modelos. Primordialmente revisaremos el modelo *Separatrix Layer* en la sección 4.3, en donde estudiaremos algunos de sus elementos importantes como la *Hoja de Corriente* y la función de corriente λ .

4.1. Mecanismos de Emisión

De acuerdo con la referencia [12]. "La emisión de alta energía que modelamos no es térmica¹ y es producida por *radiación de curvatura*, *radiación de sincrotrón* y *dispersión de Compton inversa* de partículas ultrarrelativistas que se aceleran en la magnetósfera. Tales partículas se mueven a lo largo de líneas abiertas de campo magnético en un marco de referencia donde el campo eléctrico es cero". Para entender la terminología, primero describimos los mecanismos de emisión mencionados

Radiación de Curvatura: Es generada cuando partículas cargadas fluyen a velocidades relativistas a lo largo de líneas de campo que se curvan. Así se aceleran de forma transversal a las líneas de campo. Este es el mecanismo más viable para explicar las emisiones de radio en pulsares. Para más información, consultar [23].

Radiación de sincrotrón: Es radiación emitida por un haz de partículas relativistas cargadas en un acelerador circular. Su nombre proviene de su detección en el Sincrotrón General Electric

¹Se dice que un tipo de radiación es no térmica si no puede ser descrita por la radiación de cuerpo negro.

a una energía de 70 MeV [24]. En el contexto de los púlsares la radiación de sincrotrón emitida es más energética (queda en el espectro óptico, rayos-X y rayos γ) que otros procesos.

Dispersión de Compton inversa: Este proceso ocurre cuando electrones ultra-relativistas dispersan fotones de más baja energía. De esta forma, los fotones ganan energía mientras que los electrones la pierden. Por ejemplo, fotones en el espectro del radio pueden llegar a ser energizados hasta alcanzar frecuencias del ultravioleta o rayos-X [25]. ² Este efecto cobra importancia en regiones de la magnetósfera densas en fotones y puede aumentar radicalmente la emisión de altas energías en púlsares.

4.2. Modelos de emisión derivados del dipolo en el vacío

Una vez mencionados algunos éxitos moderados del dipolo en el vacío, mencionaremos brevemente, sin ahondar en ellos, algunos de los modelos de emisión posteriores que parten de la aproximación en el vacío. Al inicio se detectaron púlsares en la banda del radio. Posteriormente con mejoras en la tecnología y observatorios dedicados a otras bandas, como el *Observatorio de rayos gamma de Compton* (CGRO por sus siglas en inglés), al inicio del presente milenio, se detectaron púlsares que emiten en altas energías, como los rayos gamma [22].

Para explicar las mediciones de este tipo de púlsares surgieron modelos de emisión con modificaciones al dipolo en el vacío. En estos modelos, las partículas son aceleradas en zonas llamadas en inglés, *gaps* (una traducción posible es *brechas*), definidas por ser regiones en donde las partículas se aceleran lo suficiente para originar fotones de altas energías [26]. Una componente esencial y de diferenciación de cada modelo es la localización de las *gaps*. Por ejemplo el modelo *Two-Pole Caustic* o (TPC)[26] supone emisión en una *gap* próxima a las LOFL's 3.4, que va desde la superficie de la estrella hasta el LC. El modelo TPC puede predecir en buena medida una característica importante y distintiva de las curvas de luz 3.4 de rayos gamma: dos intensos picos de luz en fases distintas del púlsar.

Otro modelo es el *Outer Gap* (OG) en donde se supone una emisión dentro de una *gap* formada por un tubo de líneas abiertas que se extienden desde una superficie de carga nula³ al LC. Se pueden encontrar diagramas al respecto en la referencia original [27].

Ambos modelos reproducen de buena forma las *cáusticas*⁴ en su mapa sideral de emisión de radiación. Sin embargo, vimos en el capítulo anterior 3.4.2 que las magnetósferas de púlsares son necesariamente densas y hay modelos que mejoran las predicciones introduciendo magnetósferas más realistas 4.3.

²La dispersión de Compton canónica (no inversa) es el proceso mediante el cual los fotones transfieren energía a los electrones.

³Una superficie de carga nula cumple que $\rho = 0$ en la ecuación que veremos más adelante 4.16.

⁴Se le denomina así a los picos en la curva de luz

4.3. El Modelo Separatrix Layer y la aproximación Force-Free

Como explicamos anteriormente, en la literatura existen una serie de modelos de emisión para los púlsares que pueden reducirse a la aproximación en el vacío. Varios de estos modelos lograban reproducir en buena medida los mapas siderales 3.4 de emisiones de radiación en bandas como la del radio o hasta los rayos gamma. Sin embargo, Bai y Spitkovsky [15] encontraron incertidumbres importantes en la predicción de la emisión de rayos gamma a partir de dichos modelos. Partiendo de que los mapas siderales son muy sensibles a la estructura de la magnetósfera y a la geometría de la zona de emisión, encontraron dos incertidumbres importantes. La primera es que el dipolo en el vacío se desvía de la estructura densa de la magnetósfera, generando mapas siderales que no corresponden claramente a las observaciones. Segundo, la forma de los *casquetes polares* 3.4 depende de la estructura del campo cerca del LC y esto genera una gran incertidumbre ya que las zonas de emisión dependen directamente de la forma del *casquete*. Ellos, usando el resultado de la existencia magnetósferas densas explicada en la anterior sección 3.4.2, introdujeron el modelo *Separatrix Layer*. Como un primer recurso, Bai y Spitkovsky suponen que el plasma en la magnetósfera se puede describir empleando la llamada aproximación *Force-Free* de la electrodinámica clásica, el cual describimos enseguida.

La aproximación Force-Free de la electrodinámica

Siguiendo la definición de la referencia [28], esta aproximación describe un régimen particular de plasmas dominados magnéticamente y juega un papel clave en la física de las estrellas de neutrones.

El plasma se aproxima suponiendo que es tenue y despreciando todas las fuerzas no magnéticas, además, la fuerza de Lorentz se hace cero localmente. Así, el plasma no es afectado por ninguna fuerza y por ello se llama *Force-Free* o, como posible traducción, *Libre de fuerzas*. En ecuaciones, la aproximación Force-Free, o FF, consiste en la teoría de la electrodinámica clásica (Ecs. 2.5-2.8) con la condición añadida

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0, \quad (4.1)$$

donde ρ es la densidad de carga y \mathbf{j} representa la densidad corriente. Esta condición se traduce en que, localmente, la fuerza de Lorentz se anula [28] (ver ecuación 2.9). En púlsares es aplicada en la magnetósfera de la estrella y proviene de la magnetohidrodinámica^a ideal. En esta aproximación se cumple que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. En la referencia [30] se propone como un modelo válido de magnetósfera aquel que cumple con la ecuación 4.1. Es razonable usar esta primera aproximación para simular magnetósferas densas para púlsares partiendo del resultado de Goldreich y Julian 3.4.2.

^aAbreviada MHD, estudia el comportamiento de fluidos conductores en presencia de campos eléctricos y magnéticos, ya sea externamente aplicados o generados por el mismo fluido [29].

El nombre *Separatrix Layer* proviene de que en este modelo, la emisión de radiación ocurre en un conjunto de líneas abiertas que se encuentran en la vecindad de la separatriz 3.4, incluyendo a la *Hoja de Corriente* afuera del LC y la *Strong Current Layer* dentro del LC (regiones muy importantes dentro de este trabajo que definiremos más adelante). En el caso de la magnetósfera FF las líneas de campo son consideradas abiertas si se extienden infinitamente o si se cierran más allá del LC. Más adelante mencionaremos que aquellas líneas están relacionadas con la *Hoja de Corriente* y la función de corriente λ , que describimos a continuación.

4.3.1. La función de corriente λ en la aproximación Force-Free

Como vimos en la sección 4.1, los mecanismos de emisión involucran la aceleración de partículas cargadas. En esta sección estudiamos la función de corriente $\lambda(x, y, z)$, que relaciona al campo magnético con la densidad de corriente en la magnetósfera de púlsares. Veremos que esta función está relacionada con la región de emisión de rayos gamma dentro del modelo *Separatrix Layer*. Siguiendo el apéndice A del artículo de Bai y Spitkovsky [22], usamos dos suposiciones: (1) el campo electromagnético es Force-Free, y (2) el plasma y su patrón de campo electromagnético co-rotan con la estrella a una velocidad angular $\tilde{\Omega}$.

Partiendo de las Ecuaciones de Maxwell, en la aproximación FF tenemos que la magnetósfera cumple con la ecuación 4.1. A su vez, en éste régimen, se cumple que (ver la referencia [31])

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4.2)$$

en donde

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{c}, \quad (4.3)$$

es la velocidad de co-rotación de una partícula a una distancia r de la estrella, normalizada por la velocidad de la luz c . Siguiendo las referencias [32] y [22], sabemos que para algún campo \mathbf{A} que co-rota con la estrella a una velocidad angular $\vec{\Omega}$ se cumple

$$[\partial_t + (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (4.4)$$

Usaremos esta ecuación para obtener expresiones para $\partial_t \mathbf{E}$ y $\partial_t \mathbf{B}$. Para el campo eléctrico, tenemos de 4.4,

$$\partial_t \mathbf{E} = \vec{\Omega} \times \mathbf{E} - [(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{E}. \quad (4.5)$$

A continuación mostraremos que esta expresión es equivalente a

$$\partial_t \mathbf{E} = \nabla \times [(\vec{\Omega} \times r) \times \mathbf{E}] - 4\pi\rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (4.6)$$

es decir, mostraremos que

$$\vec{\Omega} \times \mathbf{E} - [(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{E} = \nabla \times [(\vec{\Omega} \times r) \times \mathbf{E}] - 4\pi\rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

Desarrollando el rotacional del lado derecho de la ecuación anterior, tenemos que

$$\nabla \times [(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}] = (\mathbf{E} \cdot \nabla)(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) - [(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{E} + (\vec{\Omega} \times \mathbf{r})(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}[\nabla \cdot (\vec{\Omega} \times \mathbf{r})]$$

de la Ley de Gauss para el campo \mathbf{E} 2.6 y, notando que la divergencia de $\vec{\Omega} \times \mathbf{r}$ se anula, se sigue que

$$\nabla \times [(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}] = (\mathbf{E} \cdot \nabla)(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) - [(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{E} + 4\pi\rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.7)$$

Solo falta probar que

$$\vec{\Omega} \times \mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \nabla)(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.8)$$

Definiendo $\bar{\mathbf{S}}$ como el tensor de la derivada aplicada al vector \mathbf{v} , podemos escribir, en notación de índices, que los componentes de este tensor son

$$S_{lm} = \partial_l v_m,$$

en donde los índices l y m van de x a z , representando las coordenadas (x, y, z) , y v las componentes del vector $\mathbf{v}' = \vec{\Omega} \times \mathbf{r}$. Entonces, tenemos que los componentes de $(\mathbf{E} \cdot \nabla)(\Omega \times r)$ son

$$E_l S_{lm} = E_x \partial_x v_m + E_y \partial_y v_m + E_z \partial_z v_m.$$

Comparamos enseguida con $\vec{\Omega} \times \mathbf{E}$. Para la componente x ,

$$(\vec{\Omega} \times \mathbf{E})_x = \omega_y E_z - \omega_z E_y,$$

$$[(\mathbf{E} \cdot \nabla)(\vec{\Omega} \times \mathbf{r})]_x = E_y \partial_y (w_y z - w_z y) + E_z \partial_z (w_y z - w_z y) = \omega_y E_z - \omega_z E_y.$$

Observamos que son idénticos en las otras componentes, por lo que demostramos 4.8 y por lo tanto 4.6.

De forma totalmente análoga (usando la ecuación 2.6) se llega a que

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [(\vec{\Omega} \times r) \times \mathbf{B}]. \quad (4.9)$$

Sustituyendo la ecuación 4.6 en la ley de Ampere 2.8, y usando la expresión 4.2 obtenemos

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times [\mathbf{B} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] = \mathbf{j} - \rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

En la literatura usualmente las unidades se toman de tal forma que $c = 1$, y tanto ρ como \mathbf{j} son multiplicadas implícitamente por 4π , por ejemplo $\rho = 4\pi \varrho$. Una vez aclarado esto, escribiremos la ecuación anterior como

$$\nabla \times [\mathbf{B} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] = \mathbf{j} - \rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.10)$$

Veamos ahora que el vector $(\mathbf{j} - \rho(\vec{\Omega} \times r))$ es paralelo al campo \mathbf{B} . Esto se sigue de la ecuación (2) de la referencia [33] en la aproximación FF, en donde escriben la ley de Ohm de la siguiente forma

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \left[\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right] + \frac{c}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}{B^2} \right] \mathbf{B}, \quad (4.11)$$

entonces vemos que la densidad de corriente \mathbf{j} tiene un componente paralelo a \mathbf{B} (término derecho de la suma) que denotaremos $j_{||}$, y un componente proporcional a $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Por otro lado, podemos usar la ecuación 4.2 para descomponer a \mathbf{v} en una componente paralela a \mathbf{B} , $\mathbf{v}_{||}$ y una que es proporcional a $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, de la siguiente forma. Primero aplicamos el producto cruz con \mathbf{B} en la ec. 4.2 para obtener

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B},$$

de lo que se sigue que

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{B^2} := \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \mathbf{v}_{||}, \quad (4.12)$$

y entonces, recordando que $\vec{\Omega} \times \mathbf{r} = c\mathbf{v}$ (ec. 4.3),

$$\mathbf{j} - \rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \left[\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right] + \mathbf{j}_{\parallel} - \rho c\mathbf{v},$$

$$\mathbf{j} - \rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) = \rho c \left[\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right] + \mathbf{j}_{\parallel} - \rho c \left[\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \mathbf{v}_{\parallel} \right] = \mathbf{j}_{\parallel} + \rho c\mathbf{v}_{\parallel},$$

en donde \mathbf{j}_{\parallel} y $-\mathbf{v}_{\parallel}$ son términos de \mathbf{j} y \mathbf{v} paralelos a \mathbf{B} . Este resultado, junto con la ecuación 4.10, implica que existe una función λ tal que

$$\nabla \times [\mathbf{B} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] = \mathbf{j} - \rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) = \lambda \mathbf{B}. \quad (4.13)$$

Dado que $\mathbf{j} - \rho(\vec{\Omega} \times \mathbf{r})$ es la densidad de corriente en el marco de referencia corrotante con la estrella, \mathbf{j}^c [34],

$$\lambda \mathbf{B} = \mathbf{j}^c. \quad (4.14)$$

Entonces $\lambda \mathbf{B}$ se interpreta como la densidad de corriente en ese sistema. Esto indica que la corriente y la línea de campo magnético son paralelas y λ establece la proporcionalidad entre el campo \mathbf{B} y la corriente \mathbf{j}^c . El signo de λ determina la dirección del flujo de corriente: positivo irá en el sentido del campo \mathbf{B} y negativo irá en sentido contrario.

Esta estrecha relación de λ con la corriente se utilizará más adelante para determinar la asociación del campo magnético con la *Hoja de Corriente* (que se definirá en la siguiente sección). En las zonas donde λ alcance sus valores (absolutos) máximos, la corriente será más intensa. Veremos que esta zona es precisamente donde se localiza la *Hoja de Corriente*.

Ahora, para calcular la función λ en términos de \mathbf{B} y \mathbf{v} , primero escribimos el triple producto vectorial como,

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - v^2\mathbf{B},$$

siendo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$. Definamos campos auxiliares relacionados con \mathbf{B} y \mathbf{v} :

$$\mathbf{C} = v^2\mathbf{B},$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}.$$

Después, aplicando el producto punto con \mathbf{B} a ambos lados de la ecuación 4.13 obtenemos

$$\lambda B^2 = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}))] - \mathbf{B} \cdot [\nabla \times v^2\mathbf{B}],$$

y finalmente sustituyendo los campos auxiliares podemos llegamos a una expresión útil para

calcular a λ en la práctica:

$$\lambda = \frac{1}{B^2} [\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{D}]. \quad (4.15)$$

Ahora, notemos de la ecuación 4.13, que la función de corriente λ está relacionada con la densidad de carga ρ , y nos permite calcularla en términos del campo magnético \mathbf{B} y la velocidad angular Ω como

$$\rho = \frac{\nabla \cdot \mathbf{E}}{4\pi} = -\frac{1}{c} \frac{\Omega \cdot \mathbf{B}}{2\pi} + \frac{\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi}. \quad (4.16)$$

Goldreich y Julian en la referencia [18] enfatizan que la expresión anterior es válida únicamente para la porción corrotante de la magnetósfera.

4.3.2. La Hoja de Corriente

A continuación definiremos el concepto de la *Hoja de Corriente* o CS, por sus siglas en inglés *Current Sheet*.

En un plasma magnetizado, eléctricamente conductor, los movimientos de distribuciones de carga no mantienen, en general, un campo magnético uniforme. Estas zonas en donde el campo deja de ser uniforme dan lugar a láminas u hojas que transportan corriente. Estos lugares se conocen como *Hojas de corriente*, ésta y más información del tema puede ser consultado en la referencia [35].

Las líneas de campo magnético que atraviesan al *Cilindro de luz*, bajo el esquema de Force-Free, son propensas a pasar por un proceso llamado *Reconexión Magnética*, a través del cual reordenan su estructura de acuerdo a la forma de la *Hoja de Corriente*.

Una CS está constituida por una corriente confinada a una superficie delgada y es una característica genérica de los fenómenos magnetohidrodinámicos. Por ende está presente en objetos astronómicos con magnetósfera, especialmente en las estrellas de neutrones, que poseen campos magnéticos muy intensos. Como mencionamos en la subsección anterior, en modelos de púlsares, la *Hoja de Corriente* está fuertemente asociada a la función λ 4.3.1. En los siguientes capítulos, estudiaremos la geometría de la *Hoja de Corriente*. Por ahora basta con decir que es la región de la magnetósfera en donde $|\lambda|$ alcanza sus mayores valores.

En el contexto de modelos para púlsares, en la literatura se hace la distinción en dos regiones, la *Hoja de Corriente* y a la Capa de corriente fuerte, o en inglés *Strong Current layer*, que se define como la CS que conecta con la superficie de la estrella. Veremos a continuación que dicha conexión depende del ángulo α .

A continuación mostraremos esquemáticamente el desarrollo del Apéndice B de la referencia [22], en donde Bai y Spitkovsky demuestran que la *Hoja de Corriente* fuera del LC no necesariamente se conecta a la superficie de la estrella. Este resultado será muy relevante al final del presente trabajo cuando presentemos la asociación de líneas de campo magnético con la CS. Para mostrarlo vamos a usar el campo magnético de Bogovalov [36], el cual describe un monopolo magnético dividido (que puede pensarse como un dipolo degenerado), en rotación y a distancias lejanas del origen, que presenta una estructura de campo magnético que se aproxima asintóticamente al campo Force-Free.

El campo magnético del monopolo dividido encontrado por Bogovalov es

$$\mathbf{B}_m = \frac{c_0}{r^2} [\hat{\mathbf{r}} - (r \sin \vartheta) \hat{\varphi}] \eta(r, \vartheta, \varphi), \quad (4.17)$$

donde c_0 es una constante arbitraria, $R = r \sin \vartheta$ es el radio cilíndrico y la función $\eta(r, \vartheta, \varphi)$ se define como

$$\eta(r, \vartheta, \varphi) = F(\sin \alpha \sin \vartheta \sin(\varphi + r/R_{LC}) + \cos \alpha \cos \vartheta). \quad (4.18)$$

Si llamamos x al argumento de F , entonces

$$\eta(r, \vartheta, \varphi) := F(x),$$

donde $F(x) = 1$ cuando $x > 0$ y $F(x) = -1$ cuando $x < 0$ y la *Hoja de Corriente* corresponde a la superficie descrita por $x = 0$, ya que, como menciona Bogovalov, se asume que la *Hoja de Corriente* es una discontinuidad matemática en soluciones magnetohidrodinámicas. Entonces esta superficie es tal que

$$\sin \alpha \sin \vartheta \sin(\varphi + r/R_{LC}) + \cos \alpha \cos \vartheta = 0,$$

o equivalentemente

$$\cot \vartheta = \tan \alpha \sin(\varphi + r/R_{LC}). \quad (4.19)$$

Si se define A como

$$A = [1 + \tan^2 \alpha \sin^2(\varphi + r/R_{LC})] \tan \alpha \cos(\varphi + r/R_{LC}) \quad (4.20)$$

se puede encontrar que la dirección normal a la superficie de interés, determinada por $F(0)$, es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2A^2}} (A\hat{\mathbf{r}} - \hat{\vartheta} + A\hat{\varphi}). \quad (4.21)$$

El sistema de coordenadas natural para calcular la corriente en la CS es el sistema co-rotante con la estrella, en donde la corriente está dada por la ecuación 4.10. Notemos que la corriente en este

sistema, además del rotacional de \mathbf{B} , incluye una contribución del rotacional de $\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m)$. Por esta razón es útil definir un campo magnético compuesto por \mathbf{B}_m y por dicho término como

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{B}_m + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m) = \frac{c_0}{r^2} [(1 - R^2)\hat{\mathbf{r}} - R\hat{\boldsymbol{\varphi}}] \eta(r, \vartheta, \varphi). \quad (4.22)$$

Así, la densidad de corriente superficial de la *hoja de corriente* en el sistema co-rotante está dada por

$$\mathbf{J} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_m^+ - \mathbf{H}_m^-), \quad (4.23)$$

donde los signos + y - denotan a los valores de campo \mathbf{H}_m justo arriba y abajo de la *Hoja de Corriente*.

Es útil ver dos casos especiales: el caso del dipolo alineado ($\alpha = 0^\circ$) y el dipolo oblicuo ortogonal ($\alpha = 90^\circ$). Para el caso alineado tenemos que $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{k}}$ (la misma dirección que $\vec{\Omega}$), y de las ecuaciones anteriores se puede deducir que \mathbf{J} tiene componentes radial y azimutal. En este caso la radial conecta la corriente λ a la estrella y decae como $1/r$. La componente azimutal se aproxima asintóticamente a una constante. Como se menciona en la referencia [22], si se integra sobre un círculo de radio r se obtiene que la corriente neta, llevada por la *Hoja de Corriente* que se conecta a la estrella es de la forma

$$I_0 = \int_0^{2\pi} J_r|_{\alpha=0} r d\varphi = 4\pi c_0. \quad (4.24)$$

Notemos que I_0 es una constante, mostrando conservación de corriente. Se puede verificar también que I_0 es la corriente fluyendo de la estrella (fuera de la *Hoja de Corriente*), integrando la densidad de corriente, dada por 4.10 en términos del campo \mathbf{H} de la expresión 4.22

$$I_{\text{estrella}} = \oint_{\vartheta \neq \pi/2} (\nabla \times \mathbf{H}|_{\alpha=0}) \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = -I_0. \quad (4.25)$$

Por otro lado, para el caso ortogonal, $\alpha = 90^\circ$, se tiene que $A \rightarrow \infty$ y $\mathbf{n} = (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\varphi}})/\sqrt{2}$. \mathbf{J} solo tiene componente en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, esto quiere decir que la corriente de la *Hoja de Corriente* no se conecta a la estrella, en vez de eso, forma circuitos o *loops* poloidales en dirección $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, por lo que no hay *Hoja de Corriente* en la magnetósfera interna en el caso de $\alpha = 90^\circ$.

La expresión general de la corriente asociada a la *Hoja de Corriente* como función de α [22] es

$$\frac{I_{\text{CS}}(\alpha)}{I_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 + 2A^2}} \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (4.26)$$

en donde ϑ está definida por la condición 4.19. Aquí, $I_{\text{CS}}(\alpha)$ es normalizada por el valor constante I_0 , y, como se espera, no depende de r . Por otro lado,

$$\frac{I_{\text{estrella}}(\alpha)}{I_0} = -\frac{1}{2\pi} \oint \cos \vartheta \sin \vartheta F(x) d\vartheta d\varphi. \quad (4.27)$$

El resultado importante proviene de la ecuación 4.26, que integramos y reproducimos en la figura 4.1. El resultado concuerda con el apéndice B de la referencia [22]. En esta figura observamos una caída de la corriente de la *Hoja de Corriente* conectada a la estrella a medida que aumenta el ángulo α , esto sucede por una degradación de la CS dentro del cilindro de luz en los casos no alineados.

Este resultado es muy importante para el objetivo principal de esta tesis, que es determinar cuáles son las líneas de campo asociadas a la CS. En congruencia con este resultado, veremos como hay más asociación de líneas de campo a la CS en el caso $\alpha = 0^\circ$, mientras que en $\alpha = 90^\circ$, habra menor asociación. Esto se debe a una mayor conexión de corriente con la estrella en el caso alineado, en donde las líneas de campo magnético siguen de cerca a la CS desde que salen de la superficie estelar, mientras las líneas de casos oblicuos se encuentran con la *Hoja de Corriente* más lejos de la superficie estelar.

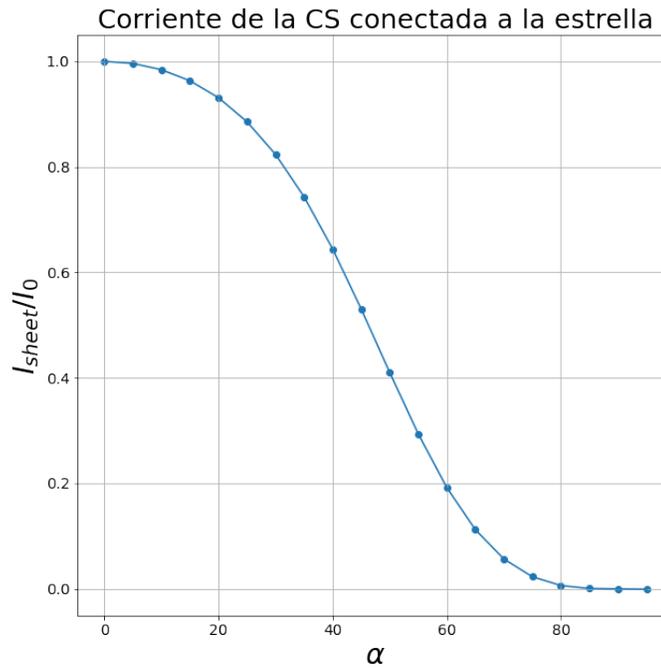


Figura 4.1: Corriente de la *Hoja de Corriente* conectada a la superficie estelar en función del ángulo de inclinación α .

Capítulo 5

Herramientas Computacionales

En este capítulo describimos las herramientas y recursos computacionales utilizados, creados y adaptados para la realización de este trabajo.

5.1. Software xSky

El entorno de software que utilizamos en este trabajo se denomina **xSky**. Comenzó a desarrollarse en Octubre de 2014 por Stephen Green, Néstor Ortiz y Steve Liebling. Dicho entorno es un compendio de rutinas en diferentes lenguajes de programación (**Fortran**, **Mathematica** y **Python**). Su funcionalidad se puede resumir en:

'Dados los campos magnetosféricos de modelos de estrellas de neutrones provenientes de simulaciones externas, xSky puede encontrar los casquetes polares magnéticos correspondientes, crear mapas siderales y curvas de luz de la radiación emitida de acuerdo de un modelo de emisión dado'.

5.1.1. Entrada o Input

Para la ejecución en **Fortran**, el software **xSky** necesita los campos eléctricos y magnéticos asociados a una magnetósfera y parámetros de entrada que se expresan dentro de un archivo de texto. Tales parámetros especifican la rutina a ejecutar, el tipo de campos electromagnéticos a procesar (es decir, dados de forma analítica o numérica), la resolución de la malla numérica y parámetros generales de la estrella como: su radio, el radio del LC y la dirección de su eje de rotación en coordenadas cartesianas. Especificaremos los parámetros particulares de cada rutina en sus respectivas secciones.

Código ONION

Como mencionamos anteriormente, `xSky` requiere como entrada los campos eléctricos y magnéticos asociados a la magnetósfera de una estrella de neutrones. En nuestro caso, estos campos provienen de simulaciones numéricas realizadas con un software llamado `ONION`, un código magnetohidrodinámico relativista [28], que se especializa en resolver dinámicamente las ecuaciones de la electrodinámica en la aproximación Force-Free, en la magnetósfera de estrellas de neutrones, en un espacio-tiempo fijo.

Para estas simulaciones existen tres tipos de resoluciones: resolución baja (`res41`), media (`res61`) y alta (`res81`). Los autores del código, Federico Carrasco (a quien agradecemos el proporcionarnos los datos de sus simulaciones) y Oscar Reula, en la referencia [28], describen la geometría de la malla computacional, la cual usa el enfoque de bloques múltiples para cubrir esferas con parches de coordenadas cartesianas, de forma que se construye una foliación del espacio usando esferas concéntricas. La resolución de la malla está determinada por el número de puntos en que se discretiza cada coordenada angular sobre las esferas. Entonces la notación `res41` indica que cada dirección angular se ha discretizado con 41 puntos. En el apéndice A realizamos una comparación de las dos resoluciones que usamos en este trabajo, la resolución media y alta.

5.2. Rutina Cap finder

Rutina perteneciente a `xSky`, escrita en `Fortran`. Esta rutina encuentra las fronteras de los *casquetes polares* en la superficie de la estrella, cuya definición se encuentra en la sección 3.4.

5.2.1. Entrada o Input

Esta rutina integra líneas de campo magnético que emanan de la superficie de la estrella de neutrones, que suponemos esférica de radio R_{NS} (explicaremos a detalle su funcionamiento en la siguiente subsección). Para esto, requiere usar una malla con las coordenadas esféricas usuales (r, ϑ, φ) , con $r = R_{\text{NS}}$, $\vartheta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$, requiere como parámetros de entrada los ángulos iniciales (ϑ_i, φ_i) , a partir de los cuales comenzar a integrar y finalmente, requiere el refinamiento de la malla, en nuestro caso, dividimos la malla en grados, es decir, el número de pasos serán $N_\vartheta = 180$ y $N_\varphi = 360$, respectivamente para ϑ y φ . En la figura 5.1 mostramos un resumen del funcionamiento de esta rutina.

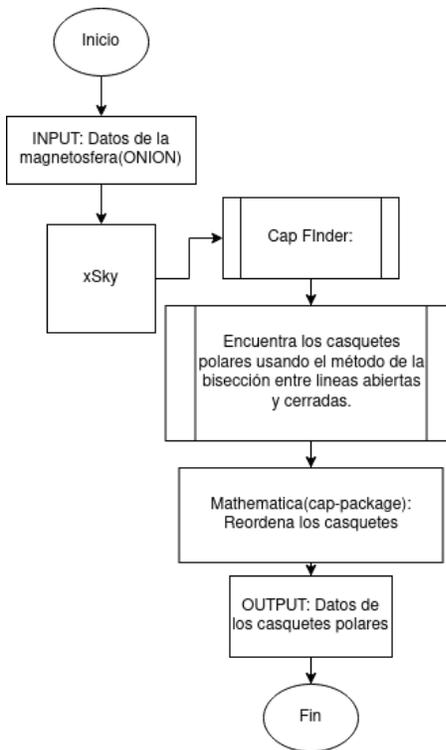


Figura 5.1: Diagrama de código de la rutina Cap Finder

5.2.2. Ejecución

Primero, `xSky` lee los parámetros de entrada y llama a la rutina `Cap finder`. Lee los datos de la magnetósfera en un arreglo llamado `B` (por ser el campo magnético). Después, en un ciclo doble varían, a partir de sus valores iniciales, las coordenadas esféricas (ϑ, φ) sobre la superficie de la estrella. La rutina integra las líneas de campo magnético (usando el método de Runge-Kutta de orden 4 o RK4, descrito en la referencia [37]) a partir de estas coordenadas y determina si tales líneas son abiertas o cerradas. El código determina las LOFL's (ver definición en la sección 3.4) identificando transiciones de líneas abierta a cerradas empleando el método de la bisección. Finalmente guarda los puntos de la superficie de la estrella de donde emergen las LOFL's, es decir las fronteras de los *casquetes polares* (cuya definición está en la sección 3.4).

La forma de los *casquetes* depende del ángulo de inclinación α del vector de dipolo magnético $\vec{\mu}$ (ver figura 3.2). Se puede observar un ejemplo en la figura 5.2, en donde observamos dos *casquetes* en la superficie de la estrella, cada una asociada a un polo magnético de la estrella, el norte y el sur.

Dado que esta rutina es la que más tiempo de ejecución demanda, para realizar este trabajo de-

cidimos paralelizarla de forma híbrida (ver sección 5.5). Logramos una mejora notable de tiempo de ejecución (ver figuras 5.8-5.9), con una reducción dependiente del número de procesadores usados, con un máximo de 80% menos tiempo de ejecución.

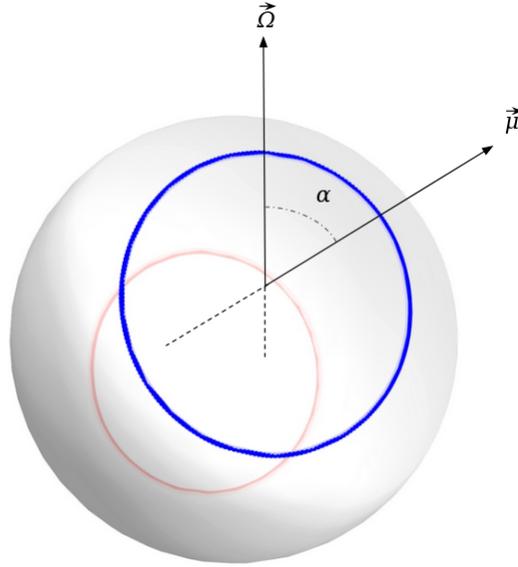


Figura 5.2: *Casquetes polares* delimitados por curvas continuas, cada uno correspondiente a un polo magnético, de un modelo esférico de estrella de neutrones cuyo vector de momento dipolar $\vec{\mu}$ se encuentra inclinado un ángulo $\alpha = 30^\circ$ respecto al eje de rotación estelar $\vec{\Omega}$.

Antes de continuar, es importante definir una coordenada denotada por r_{ov} , que será relevante en este trabajo. Seguimos la convención de parametrizar los puntos sobre la superficie de la estrella con coordenadas de *Volumen abierto* (ϕ_m, r_{ov}) , que recorren la superficie estelar, ϕ_m es el azimut magnético y r_{ov} es la *colatitud magnética*¹ θ_m , normalizada por la *colatitud magnética* θ_m^{LOFLs} de las LOFLs (ver figura 5.3), ver referencia [22]. Así, $r_{ov} = 1$ corresponde a la frontera del *casquete polar*. De esta forma, todos los puntos con $r_{ov} < 1$ pertenecen al *casquete* y de ellos emergen líneas de campo abiertas. Los puntos con $r_{ov} > 1$ quedan fuera del *casquete polar* y de ellos emergen líneas de campo cerradas. El modelo *Separatrix Layer*, descrito en la sección 4.3 supone una emisión de radiación a partir de líneas de campo que emergen de *anillos* con r_{ov} cercano a $r_{ov} = 1$.

¹La *colatitud* está definida como el ángulo complementario de la latitud ϑ en coordenadas esféricas.

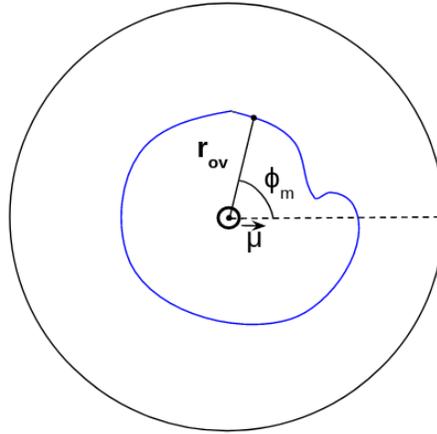


Figura 5.3: Vista perpendicular al vector $\vec{\mu}$ del modelo esférico de la estrella. En azul ilustramos la frontera de un *casquete polar* arbitrario, con $\vec{\mu}$ al centro, y las coordenadas de volumen abierto (ϕ_m, r_{ov}) en donde ϕ_m es el ángulo azimutal magnético y r_{ov} es la colatitud magnética.

5.3. Biblioteca Cap-package

Es una biblioteca desarrollada en Wolfram Mathematica² dentro de xSky, desarrollada para procesar y visualizar algunos archivos de datos producidos por las rutinas de Fortran, descritas en este capítulo. En particular, dentro de esta librería se definen funciones necesarias para el procesamiento y visualización de los casquetes polares. En esta sección mencionaremos únicamente aquellas funcionalidades de cap-package relacionadas a este trabajo. Una de ellas es Order cap, que parametriza las fronteras de los casquetes y produce curvas que constan de puntos equidistantes entre ellos, lo cual es fundamental para los modelos de emisión de radiación.

Otra función de cap-package, es Cap shrinking, cuyo objetivo es encoger los casquetes polares, conservando su forma. Dado un valor $r_{ov} < 1$ asignado como entrada, esta rutina construye un anillo con la misma forma de la frontera del casquete original, pero que queda dentro del casquete polar. De esta forma podemos construir colecciones de anillos distintas, con coordenada $r_{ov} < 1$ (ver figuras 5.4 y 5.5). De tales anillos emergen líneas de campo magnéticas abiertas, relacionadas con la emisión electromagnética dentro del modelo Separatrix Layer.

²Wolfram Research, Inc., Mathematica 12.3, Champaign, IL (2022)

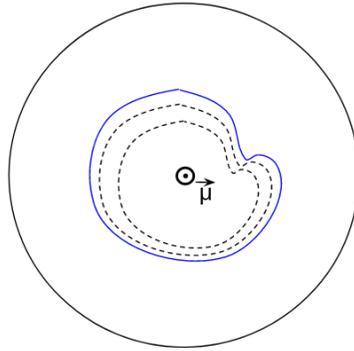


Figura 5.4: Diagrama de la estrella en vista perpendicular a $\vec{\mu}$. Se muestra en azul la frontera del casquete (con una forma arbitraria) con $r_{ov} = 1$ representada como una línea continua, mientras que los *anillos* con $r_{ov} < 1$ se representan con líneas punteadas.

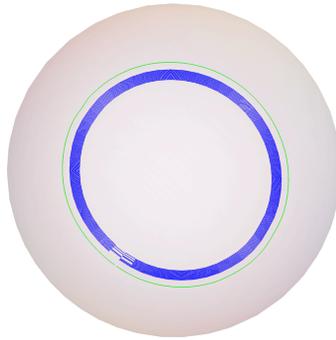


Figura 5.5: Colección de *anillos* (en azul) con $r_{ov} < 1$ en la superficie de la NS en el caso de $\alpha = 30^\circ$. La línea verde es la frontera del *casquete polar*, con $r_{ov} = 1$.

5.4. Rutina Fieldline Finder

5.4.1. Entrada o Input

Esta rutina integra y guarda las coordenadas cartesianas de los puntos de las líneas de campo magnético que emergen de anillos con un mismo valor de r_{ov} .

Necesita como entrada las coordenadas de todos los puntos que constituyen el *anillo*. Estos datos servirán como puntos iniciales de donde emergerán las líneas de campo magnético.

5.4.2. Ejecución

Dado un conjunto de puntos iniciales sobre la superficie de la estrella, la rutina integra las líneas de campo usando el integrador RK4 y guarda el conjunto de puntos $\{(x, y, z)\}$ de cada línea. Por ejemplo, si $r_{ov} = 1$, es decir, los N puntos iniciales son parte de la frontera de los *casquetes polares*, la rutina dará como resultado N archivos con las coordenadas de las N LOFLs integradas. En las figuras 5.6 y 5.7 mostramos un modelo esférico de NS junto a una muestra de las líneas de campo con $r_{ov} = 0.99$ para el caso de $\alpha = 30^\circ$.

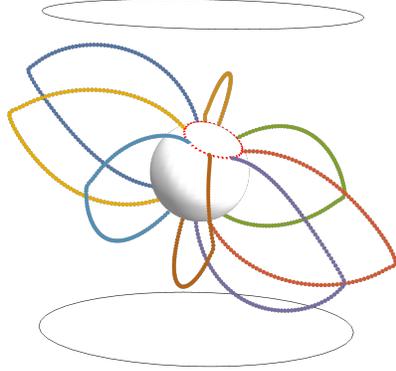


Figura 5.6: Muestra de las líneas de campo magnético en el caso de $\alpha = 30^\circ$ con $r_{ov} = 0.99$, también se grafican los bordes del *Cilindro de luz*, cuyo radio corresponde a R_{LC} .

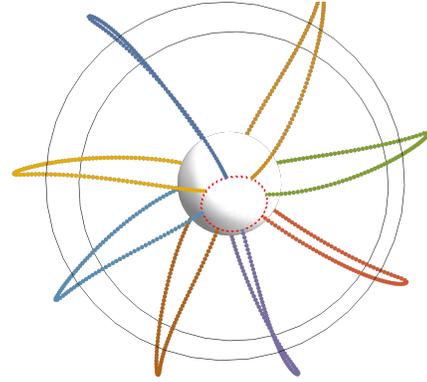


Figura 5.7: Vista superior del mismo caso. Notar que las líneas se cierran ligeramente fuera del LC, esto es porque se trata de líneas abiertas, pues $r_{ov} < 1$.

5.5. Paralelización

En una fase preliminar de este trabajo, comenzamos mejorando la eficiencia de algunas de las rutinas existentes de `xSky` en `Fortran`. Para ello implementamos la programación en paralelo con los protocolos `MPI` y `OpenMP`.

MPI (Interfaz de paso de mensajes)

La *Interfaz de paso de mensajes*, `MPI` por sus siglas en inglés para *Message Passing Interface*, es un protocolo de programación en paralelo que distribuye el computo entre procesadores o `CPU`'s³ que se comunican remotamente.⁴ La implementación del protocolo `MPI` a una rutina ya existente de `xSky` consiste en una reestructuración total. En este protocolo se debe indicar a cada `CPU` el trabajo a realizar. La paralelización consiste en distribuir el trabajo de la forma más eficiente posible. Esta interfaz de mensajes está optimizada para usarse en una computadora personal de varios núcleos, o bien en una supercomputadora o *clúster*,⁵ y se implementó en la rutina `Cap finder`, explicada previamente 5.2.

OpenMP (Plataforma abierta de multi-proceso)

Por su nombre en inglés, *Open Multi-Processing*, esta API⁶ se ejecuta en la programación paralela en memoria compartida. Funciona en hilos. Un hilo es la unidad mínima de procesamiento que existe dentro de los `CPU`'s. A comparación del protocolo `MPI`, `OpenMP` es más sencillo de implementar en rutinas existentes. Basta con añadir instrucciones de paralelización dentro de estructuras preexistentes, como ciclos dentro de un algoritmo. Su diferencia más notoria, es que `OpenMP` solo permite la paralelización si los hilos comparten memoria. Por lo tanto, está optimizado para ejecutarse en dispositivos en donde los `CPU`'s comparten memoria.

Ambos protocolos, `MPI` y `OpenMP`, pueden ser implementados por separado o de forma híbrida, es decir, en forma conjunta. Siguiendo esta estrategia, en la rutina `Cap Finder`, de forma local, es decir, en una computadora personal, se consiguió una mejora en el tiempo de ejecución de hasta 50 %, mientras que en el cluster `Tochtli`, del Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) de la UNAM, se consiguió una mejora aún mayor, reduciendo el tiempo de ejecución hasta un 80 %, aproximadamente. En las demás rutinas, se consiguió una mejora más modesta, al únicamente utilizar el protocolo `OpenMP`. En la figura 5.8, mostramos el tiempo de ejecución de la rutina más compleja en términos de tiempo de ejecución (`Cap Finder`) en función del número de procesa-

³Por sus siglas en inglés, se traduce como *Unidad Central de Procesamiento*.

⁴Es decir, no tienen memoria compartida. Pueden ubicarse en nodos de una supercomputadora.

⁵*Clúster* se traduce como *grupo*, su uso viene de *computer cluster* (grupo de computadoras), y es esencialmente una supercomputadora.

⁶Siglas para *Application Programming Interface*, es decir, interfaz de programación de aplicaciones.

dores (para MPI) o hilos (para OpenMP) en una computadora personal de cuatro procesadores. Se muestran los tres protocolos posibles: OpenMP muestra la mejora más modesta, mientras que MPI genera una mayor eficiencia en el tiempo de ejecución. El protocolo híbrido muestra ser el más eficiente.

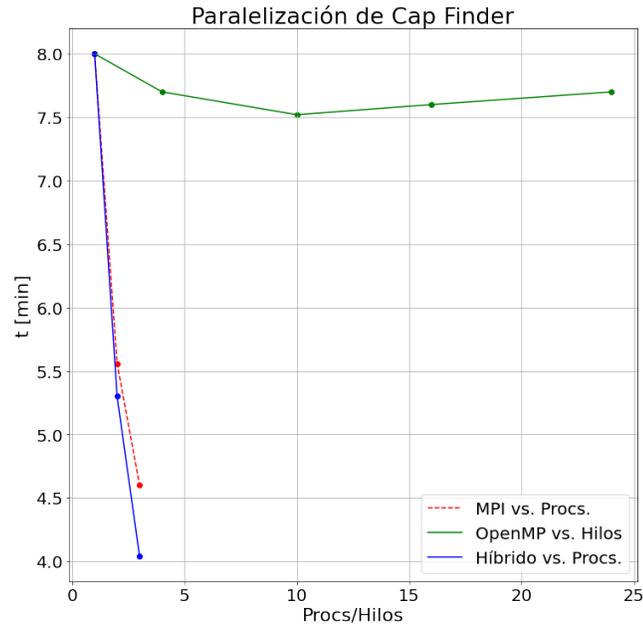


Figura 5.8: Tiempo de ejecución (en minutos) de la rutina `Cap Finder`, en función de los procesadores (o hilos) en una computadora personal de 4 procesadores y 24 hilos (con procesador AMD A12-9720P RADEON R7). Notemos que la eficiencia máxima se alcanza usando ambos protocolos de forma híbrida.

En la figura 5.9, mostramos la ejecución de la rutina `Cap Finder` en el cluster `Tochtli` del ICN. usamos el protocolo híbrido. Usando un nodo con ocho CPU's, logramos una eficiencia mayor. Como era de esperarse, observamos que el tiempo de ejecución decae entre más procesadores se usen, sin embargo, la mejora en el tiempo es menor respecto de la anterior cada que aumentamos el número de procesadores. Así, lograr un menor tiempo de ejecución se vuelve más costoso cada vez que aumenta el número de CPU's.

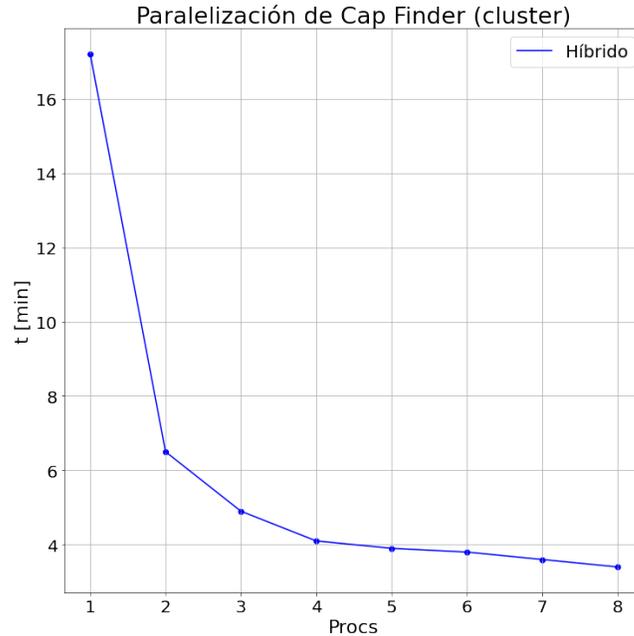


Figura 5.9: Tiempo de ejecución (en minutos) de la rutina *Cap Finder*, paralelizada de forma híbrida, en función del número de procesadores. Esta figura corresponde a la ejecución dentro de un nodo con ocho CPU's del cluster *Tochtli* del ICN. Notemos que el tiempo de ejecución decrece casi un 80% de su valor original, pero tiende a una saturación.

5.6. Rutina Current Finder

Esta rutina calcula los valores de las funciones escalares λ o ρ en una región cúbica del espacio alrededor de la estrella, estas funciones corresponden a la corriente y a la densidad de carga, respectivamente. Sus expresiones analíticas fueron obtenidas y discutidas en la sección 4.3. Posteriormente, esta rutina llama a una subrutina que proyecta las funciones en una superficie bidimensional para ser visualizadas.

5.6.1. Entrada o Input

Esta rutina requiere como entrada el tamaño de la zona en donde se calcula la función $\lambda(x, y, z)$, la cual se escoge dependiendo del tipo de proyección buscado. Cuando se busca visualizar a λ sobre la superficie de una esfera, como la superficie de la estrella, por ejemplo, el cubo debe contener a la esfera (el espacio a calcular será ligeramente mayor al radio de la NS). Cuando buscamos visualizar λ en una región cercana al *Cilindro de luz*, calculamos λ en un cubo de lado $4R_{LC}$.

5.6.2. Ejecución

Dentro de esta rutina, usamos las ecuaciones 4.15 y 4.16 para obtener las funciones $\lambda(x, y, z)$ y $\rho(x, y, z)$ en el dominio cúbico discreto mencionado anteriormente, centrado en $(0, 0, 0)$ y que contiene a la NS. Se obtiene y se guarda en la memoria el arreglo discreto $\lambda(x, y, z)$ en todo el cubo. Una vez guardado el arreglo de λ y/o ρ , la rutina llama a alguna de las siguientes subrutinas de proyección para obtener datos para su visualización. Dentro de estas subrutinas, se interpola el valor de λ en la superficie seleccionada.

5.6.3. Interpolador

Antes de hablar de cómo se proyecta lambda en superficies, describiremos brevemente el funcionamiento de la interpolación de λ .⁷ El método usado fue interpolación polinomial. Para obtener el valor de la función en un punto, se usa un polinomio interpolante. Supongamos que tenemos un arreglo discreto F de N valores que a su vez depende de una variable discreta x .

El polinomio interpolante de grado N-1 que pasa a través de los N puntos, $y_1 = F(x_1)$, $y_2 = F(x_2)$... $y_N = F(x_N)$, está dado por la fórmula clásica de Lagrange,

$$P(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_N)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_N)}y_1 + \dots + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{N-1})}{(x_N - x_1)(x_N - x_2)\dots(x_N - x_{N-1})}y_N, \quad (5.1)$$

donde x es el punto donde interpolamos y y_i es el valor de F en su correspondiente coordenada conocida x_i .

Hay N términos, cada uno un polinomio de grado N-1 y cada uno construido para ser cero en todos los x_i excepto uno, en el que se construye para ser y_i . Ésta y más información sobre interpolación se puede consultar en la referencia [37].

El algoritmo de interpolación de un campo escalar como λ y ρ en xSky funciona de la siguiente forma: Dado un punto (x_1, y_1, z_1) , encuentra la celda de la malla que lo contiene. Una vez conocida la celda, se interpola el campo separadamente en cada una de las coordenadas, usando los valores de λ de las fronteras de la celda y dos puntos más, usando la ecuación 5.1. Es decir, se interpola primero el campo escalar λ en z_1 para cada par (x, y) , después en y_1 para cada x y finalmente en el punto x_1 hasta obtener el valor del campo $\lambda(x_1, y_1, z_1)$.

5.6.4. Proyección de λ en una esfera

Esta sección del código toma los valores de $\lambda(x, y, z)$ y los interpola en una esfera de tamaño $1.25R_{NS}$, es decir, en una esfera más grande que el radio de la estrella de neutrones. La razón de

⁷La interpolación, en pocas palabras, es la estimación de valores de una función a partir de un conjunto discreto de valores dados de esa función.

esto es que la función $\lambda(x, y, z)$, en nuestras simulaciones, no está definida dentro de la estrella. Interpolar la función λ en la superficie de la estrella sería problemático porque requiere de puntos el interior de la estrella.

La subrutina hace un doble ciclo de interpolación en las coordenadas esféricas ϑ y φ sobre la superficie de la esfera. Generamos proyecciones de λ en una esfera cercana a la superficie de la estrella y obtuvimos las figuras 6.1-6.4, las cuales explicamos en el siguiente capítulo.

5.6.5. Proyección de λ en un plano

Esta subrutina de **Current Finder** proyecta $\lambda(x, y, z)$ sobre un plano para mostrar esta función de corriente en una región más amplia, lejos de la estrella, incluyendo su comportamiento cerca del LC, para estudiar así la *Hoja de Corriente*. Escogemos el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$, ver figuras 6.5-6.8. Para estudiar la estructura de la *Hoja de Corriente* desarrollamos algoritmos para proyectar lambda en diferentes planos.

5.6.6. Construcción de coordenadas adaptadas a planos de interés

Para visualizar mejor la función de corriente $\lambda(x, y, z)$ en una región grande de la magnetósfera (una región del orden de R_{LC}), y mejorar nuestro entendimiento de la *Hoja de Corriente*, es útil visualizar a la función λ en superficies bidimensionales. Para ello, en esta sección, construimos los planos en donde proyectamos λ .

El vector de momento magnético dipolar $\vec{\mu}$ nos servirá para construir dichos planos. Dado $\vec{\mu}$, nos damos a la tarea de construir un sistema de coordenadas ortonormal con vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|}$, $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$. Con estos $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ cumpliendo las dos siguientes propiedades. Primero, la propiedad 5.2 con diagrama en la figura 5.10, en donde observamos que el vector $\hat{\mathbf{u}}$ está inclinado un ángulo α respecto del vector unitario $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$ usual en coordenadas cartesianas.

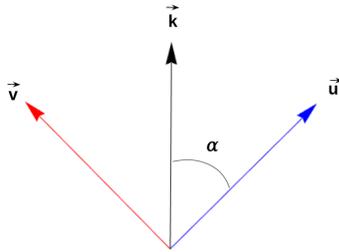


Figura 5.10: Propiedad 1, ortogonalidad de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$. Graficamos también el vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$.

$$\hat{\mathbf{u}} \perp \hat{\mathbf{v}}. \quad (5.2)$$

Al encontrarnos en el espacio tridimensional, existen una infinidad de vectores $\hat{\mathbf{v}}$ que cumplen la propiedad anterior (basta con imaginar el hacer rotar la figura anterior sobre el eje generado por $\hat{\mathbf{u}}$). Para darle unicidad a nuestro sistema, requerimos que $\hat{\mathbf{v}}$ cumpla con la siguiente propiedad,

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{k}}}{\|\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{k}}\|} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{v}}}{\|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{v}}\|}. \quad (5.3)$$

Esta segunda propiedad garantiza varias cosas. Primero que el vector $\hat{\mathbf{v}}$ se encuentre en el plano $\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{u}}$. Por otro lado, la dirección del producto cruz de $\hat{\mathbf{u}}$ con $\hat{\mathbf{k}}$ debe ser igual a la dirección de $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{v}}$. Finalmente definimos $\hat{\mathbf{w}} := \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}$. De esta forma $\hat{\mathbf{w}}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{u}}$ y a $\hat{\mathbf{v}}$ (ver figura 5.11).

Usando estas propiedades obtenemos la componente de cada vector en términos de las componentes de \mathbf{u} ,

$$v_x = \frac{-u_x u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \quad (5.4)$$

$$v_y = \frac{-u_y u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \quad (5.5)$$

$$v_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \quad (5.6)$$

Las componentes de $\hat{\mathbf{w}}$ son

$$w_x = (u_y v_z) - (u_z v_y), \quad (5.7)$$

$$w_y = -(u_x v_z) + (u_z v_x), \quad (5.8)$$

$$w_z = (u_x v_y) - (u_y v_x), \quad (5.9)$$

siendo u_x y v_x las componentes en dirección x de $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$, respectivamente, al igual que y y z . Notemos que las componentes de $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ se construyeron a partir del vector $\vec{\mu}$. Así obtenemos una base ortonormal $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ como se muestra en la figura 5.11.

Estamos interesados en proyectar $\lambda(x, y, z)$ en planos generados por parejas de vectores de la base $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$. Un vector de posición \mathbf{P} en el sistema de referencia cartesiano generado por esta base, con coordenadas (u, v, w) tiene la forma

$$\mathbf{P} = u\hat{\mathbf{u}} + v\hat{\mathbf{v}} + w\hat{\mathbf{w}}. \quad (5.10)$$

Aparte, en la base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, tiene coordenadas (x, y, z) , de forma que

$$\mathbf{P} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}. \quad (5.11)$$

Entonces tenemos que

$$u\hat{\mathbf{u}} + v\hat{\mathbf{v}} + w\hat{\mathbf{w}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad (5.12)$$

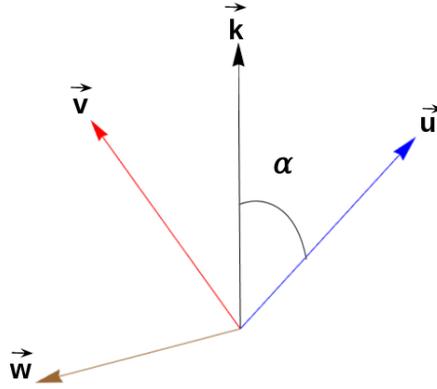


Figura 5.11: Base ortonormal $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ construida, graficada junto con el vector $\hat{\mathbf{k}}$

pero a su vez, $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ se expresan en términos de $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, de forma que

$$x = uu_x + vv_x + ww_x, \quad (5.13)$$

$$y = uu_y + vv_y + ww_y, \quad (5.14)$$

$$z = uu_z + vv_z + ww_z, \quad (5.15)$$

donde las componentes (v_x, v_y, v_z) y (w_x, w_y, w_z) son todas funciones de (u_x, u_y, u_z) y están dadas por las ecuaciones 5.4- 5.9. De esta forma, tenemos una expresión de las coordenadas (x, y, z) , de la base canónica en términos de (u, v, w) en la base $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$. Enseguida usamos este resultado para proyectar λ en un plano particular.

5.6.7. λ en el plano ortogonal a $\vec{\mu}$

Recordemos que el objetivo principal de este trabajo, es determinar de donde emergen las líneas de campo magnético asociadas con la *Hoja de Corriente*. Para construir un criterio de asociación, es útil tomar la proyección de λ en el plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$. En el siguiente capítulo discutiremos la importancia física de este plano.

Construimos un algoritmo que interpola la función de corriente λ en dicho plano, que en la base $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$, está generado por $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$. Además, esta subrutina cuenta con herramientas para calcular los máximos de $\lambda(x, y, z)$.

Para el plano ortogonal a $\vec{\mu}$, las expresiones 5.13-5.15 se reducen a

$$x = x(v, w) = vv_x + ww_x, \quad (5.16)$$

$$y = y(v, w) = vv_y + ww_y, \quad (5.17)$$

$$z = z(v, w) = vv_z + ww_z, \quad (5.18)$$

así, usamos estas coordenadas (x, y, z) para interpolar $\lambda(x, y, z)$ en el plano ortogonal ⁸ a $\vec{\mu}$ parametrizado por coordenadas (u, v) , obteniendo las figuras 6.13-6.20.

5.7. Rutina Fieldline Asociation

Esta rutina determina la asociación de los puntos (x, y, z) de las líneas de campo magnético con la *Hoja de Corriente* mediante el valor de $\lambda(x, y, z)$.

5.7.1. Input o entrada

Esta rutina necesita el valor del arreglo λ en el cubo de lado $4R_{LC}$. También requiere los datos de la posición de las líneas de campo magnético que emanan de un anillo sobre la superficie de la estrella con un valor $r_{ov} \leq 1$ dado.

5.7.2. Ejecución

Esta rutina llama a la rutina **Current Finder** para conocer los valores discretos de la función λ . Primeramente, se obtiene el valor máximo de la función de corriente, $\lambda_{\max}(x, y, z)$ dentro del cubo de lado $4R_{LC}$, en cuyo centro se encuentra la estrella.⁹ En un ciclo, se leen los datos de cada una de las líneas que emanan de un anillo con $r_{ov} \leq 1$ dado, para cada valor (x, y, z) , se interpola $\lambda(x, y, z)$, y se compara con un valor arbitrario dado que llamamos λ_{\min} , este valor, representa el valor absoluto mínimo de la función λ para ser considerado un punto asociado a la CS. Si se cumple que $|\lambda(x, y, z)| > \lambda_{\min}$, entonces ese punto (x, y, z) estará asociado a la CS y se guardará junto con su $\lambda(x, y, z)$ en un archivo de datos. Cada línea termina con un número total de puntos asociados y cada conjunto de líneas que comparten la misma r_{ov} tienen un número total N de puntos asociados. La figura 6.21 muestra los resultados de N para cada r_{ov} en cada caso del ángulo de inclinación α . En el siguiente capítulo, discutiremos los resultados y la arbitrariedad del parámetro λ_{\min} . En la figura 5.12 se muestra un resumen del funcionamiento de esta rutina.

5.8. Entorno gráfico de Mathematica y Python

Para obtener las figuras del siguiente capítulo, fue necesario el uso y/o la creación de cuadernos (o en inglés notebooks) tanto en Mathematica como en Python. En Mathematica, se utilizó el

⁸En realidad λ es interpolada y mostrada únicamente el disco de radio $R = 2R_{LC}$ para mantener la figura limpia en los bordes, en donde λ no es calculada.

⁹Esto nos da una únicamente la ubicación del máximo global.

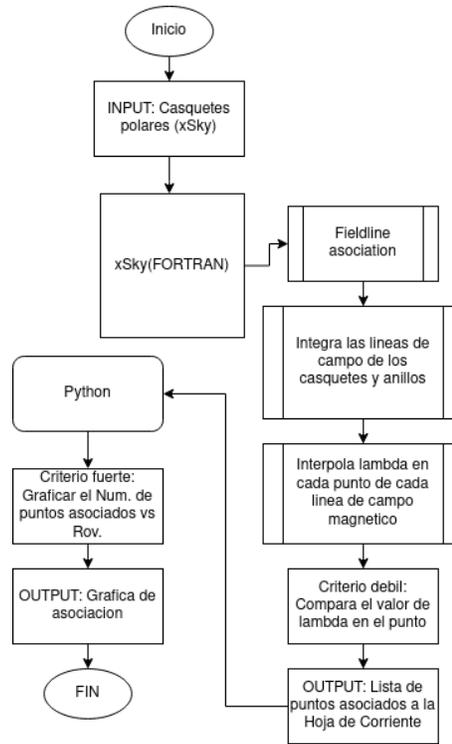


Figura 5.12: Diagrama rutina Fieldline Finder

cuaderno previamente existente LAMBDA.NB, que se usa para proyectar λ en una superficie esférica y se adaptó para obtener las figuras 6.1-6.4. Usamos un mapa de color que va de azul (en el mínimo) a rojo (en el máximo) para λ en cada uno de los casos. Proyectamos sobre el mapa de color los puntos de los *casquetes polares* 5.3.

En *Python*, se crearon rutinas para visualizar las funciones λ y ρ en diferentes planos, para visualizar la *Hoja de Corriente* y entonces, realizar los estudios de asociación de las líneas de campo con la CS. La base de ambas es la biblioteca MATPLOTLIB. Para la visualización de λ y ρ , tomamos los datos de salida de las rutinas anteriores y les asignamos a los valores de $\lambda(x, y, z)$ y $\rho(x, y, z)$ una escala de color idéntica a la anteriormente mencionada de azul (mínimo) a rojo (máximo). Finalmente los proyectamos junto con una representación de la dirección del campo magnético \mathbf{B} en las figuras 6.13-6.19.

Capítulo 6

Asociación del campo magnético con la Hoja de Corriente

En este capítulo presentamos la validación de nuestras herramientas numéricas comparando nuestros resultados con la literatura. También mostramos los resultados que nos conducen a determinar la asociación de ciertas líneas de campo magnético con la *Hoja de Corriente*, así como su origen en los *casquetes polares*.

6.1. Flujo de corriente en la vecindad de un púlsar

Como vimos anteriormente, en la sección 4.3.1, la función λ está fuertemente asociada a la corriente, pues su valor representa la relación de proporcionalidad entre el campo magnético y la densidad de corriente en el sistema de referencia co-rotante. Así, la *Hoja de Corriente*, es la zona de la magnetósfera en donde λ alcanza sus valores absolutos máximos.

6.1.1. Flujo de corriente cerca de la superficie estelar

Para conocer cualitativamente la forma y distribución de la *Hoja de Corriente*, comenzamos realizando una proyección de la función $\lambda(x, y, z)$ en la vecindad cercana a la estrella. Se obtuvieron las siguientes figuras como resultado, 6.1-6.4. En estas figuras interpolamos y proyectamos a la función λ en una región esférica cercana a la estrella, el radio de la estrella es $R_{\text{NS}} = 0.2R_{\text{LC}}$, proyectamos entonces a λ en una esfera con $R = 0.25R_{\text{LC}}$. La razón de proyectarla en una vecindad de la estrella y no en su superficie fué para hacer posible su visualización, pues en nuestras simulaciones λ no está definida dentro de la NS y para la interpolación tridimensional en la superficie, es necesario contar con λ definida en un conjunto de celdas internas, ver el capítulo 5.

La escala de color va de azul (en el mínimo con $\lambda < 0$) a rojo (en el máximo con $\lambda > 0$), y en negro se colocaron los *casquetes polares*. Es importante mencionar que en estas figuras usamos la resolución alta (*res81*) de las simulaciones provenientes de ONION, código que describimos en el capítulo anterior. Observamos una dependencia de la distribución de $\lambda(x, y, z)$ con la inclinación α del vector $\vec{\mu}$ del dipolo magnético de la estrella. Para los intereses de nuestro trabajo, es muy importante notar que estas figuras indican una fuerte asociación entre las fronteras de los casquetes polares y las regiones de flujo más intenso de corriente, representado por la función λ . En las figuras, el flujo de corriente saliente (positivo), se representa en rojo, y entrante (negativo) en azul.

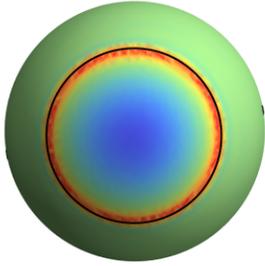


Figura 6.1: *Casquete polar* y función de corriente λ proyectada cerca de la superficie estelar, en el caso de inclinación $\alpha = 0^\circ$

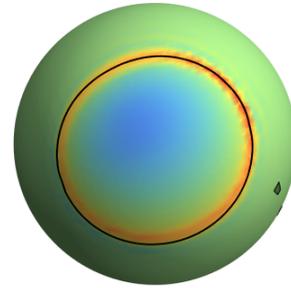


Figura 6.2: *Casquete polar* y función de corriente λ proyectada cerca de la superficie estelar, en el caso de $\alpha = 30^\circ$

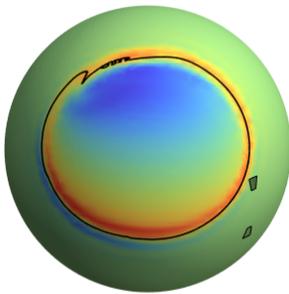


Figura 6.3: *Casquete polar* y función de corriente λ , en el caso de $\alpha = 60^\circ$

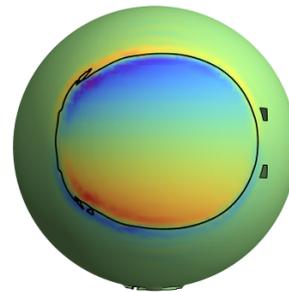


Figura 6.4: *Casquete polar* y función de corriente λ , en el caso de $\alpha = 90^\circ$

Al aumentar el ángulo α , observamos una división cada vez más pronunciada de las regiones de flujo de corriente, comenzando en $\alpha = 0^\circ$, en la figura 6.1, en donde (en azul, $\lambda < 0$) la corriente entra a la estrella en el centro del *casquete polar*, hasta mostrar una región dividida entrante y saliente, aparentemente simétrica en el caso de $\alpha = 90^\circ$, en la figura 6.4.

Estas figuras reproducen cualitativamente el resultado de la figura 4 del artículo de Bai y Spitkovsky, en la referencia [22], lo cual es notable ya que esta correlación funciona como validación tanto del código ONION, de donde provienen los datos magnetosféricos, como de las demás herramientas numéricas usadas en el software xSky.

6.1.2. Flujo de Corriente en la Magnetósfera

Además de estudiar la función de corriente $\lambda(x, y, z)$ cerca de la estrella, es útil obtener información del flujo de corriente en la magnetósfera a través de λ y así, visualizar la *Hoja de Corriente*, caracterizada por tener los valores extremos de la función $\lambda(x, y, z)$, desde su mínimo negativo hasta su valor máximo positivo. Para facilitar la visualización de la función λ , recordando que $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, proyectamos a la función de corriente $\lambda(x, y, z)$ en superficies bidimensionales, que por practicidad serán planos.

Se realizaron diferentes figuras para $\lambda(x, y, z)$ y $\rho(x, y, z)$ proyectadas en un plano, en cada uno de los casos de inclinación ($\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Se graficó la función λ en una escala de color de azul (mínimo) a rojo (máximo) en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$.¹ También se muestra la dirección del campo \mathbf{B} en cada punto usando flechas (se puede observar una comparación a diferentes resoluciones en el Apéndice A), se seleccionó un número arbitrario de flechas en el plano con el objetivo de visualizar λ y a la densidad de carga ρ de la mejor manera.

Notemos que en las figuras 6.5-6.8, la *Hoja de Corriente* se caracteriza por una mayor intensidad de color, de esta forma es fácil identificar su ubicación en cada una de ellas. Es muy importante remarcar que en estas figuras se observa una relación entre la dirección del campo magnético \mathbf{B} y la *Hoja de Corriente*, pues observamos que la CS se encuentra entre regiones en donde \mathbf{B} cambia de dirección. Dicha región se extiende a distancias mayores o iguales al *Cilindro de luz*.

Complementando estas figuras con las anteriormente discutidas 6.1-6.4, observamos en el caso de $\alpha = 0^\circ$, una fuerte asociación de la *Hoja de corriente* con la superficie estelar. Notamos claramente los dos polos de la estrella y que, en la frontera del *casquete polar* norte sale corriente ($\lambda > 0$), mientras que en la frontera del casquete sur entra corriente ($\lambda < 0$). Recordemos que esto coincide con la Figura[6.1] en donde se ve también que al centro del casquete norte entra corriente (con $\lambda < 0$) pero con menos intensidad que en su propia frontera. Finalmente se observa a la *Hoja de Corriente* fuera del *Cilindro de luz* comportarse de forma axialmente simétrica.

¹En el caso $\alpha = 0^\circ$ $\vec{\Omega}$ y $\vec{\mu}$ tienen la misma dirección, sin embargo este caso es axialmente simétrico y se toma al plano generado por $\vec{\Omega}$ y el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ de la base canónica.

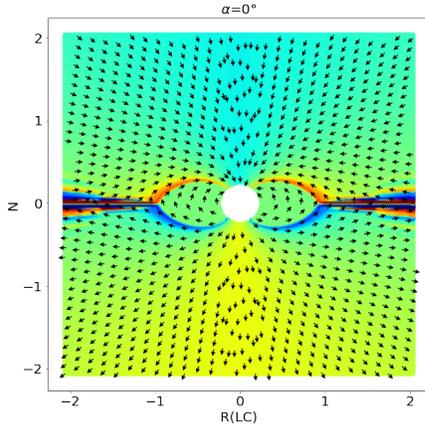


Figura 6.5: Función λ y campo \mathbf{B} proyectados en el plano $\vec{\Omega}-\vec{\mu}$, para el caso de $\alpha = 0^\circ$

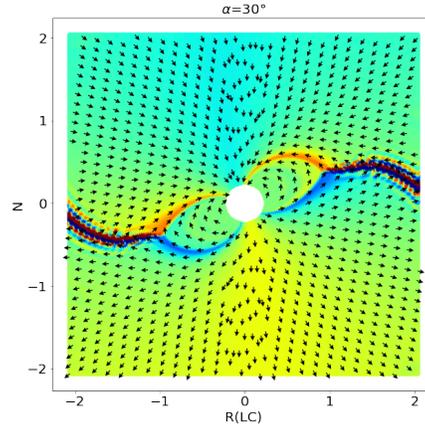


Figura 6.6: Función λ y campo \mathbf{B} proyectados en el plano $\vec{\Omega}-\vec{\mu}$, para el caso de $\alpha = 30^\circ$

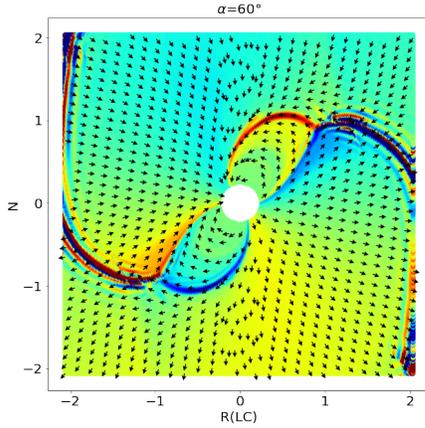


Figura 6.7: Función λ y campo \mathbf{B} en el plano $\vec{\Omega}-\vec{\mu}$, para el caso de $\alpha = 60^\circ$

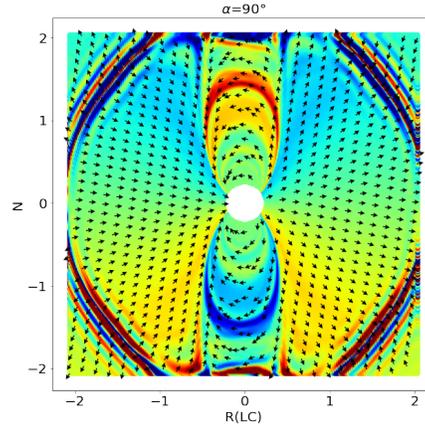


Figura 6.8: Función λ y campo \mathbf{B} en el plano $\vec{\Omega}-\vec{\mu}$, para el caso de $\alpha = 90^\circ$

Existen dos casos similares ($\alpha = 30^\circ, 60^\circ$) en donde se observa una similitud en la torsión de la *Hoja de Corriente* que aumenta con α . Al no estar alineados $\vec{\mu}$ y $\vec{\Omega}$, se espera un rompimiento en la simetría axial, que discutiremos más adelante. Se observa un cambio en el campo \mathbf{B} y por lo tanto un cambio notable en la distribución de λ .

Finalmente, en el caso de $\alpha = 90^\circ$, observamos un caso degenerado (ver la figura 6.8) en el que no vemos una conexión de la *Hoja de Corriente* con la estrella, lo cual concuerda con el resultado de la sección 4.3.2. Se observan (correspondiendo a la *Strong Current Layer*, ver sección 4.3.2) dos aros mayormente desconectados de la CS, uno arriba con $\lambda > 0$, y otro abajo en donde la corriente entra con $\lambda < 0$. La corriente entra a lados contrarios de cada casquete de la estrella, lo cual concuerda con la figura 6.4. En una región más lejana se observa, en color intenso, un anillo

que corresponde a la *Hoja de Corriente*.

Estas figuras concuerdan cualitativamente con la figura 1 del artículo [22] de Bai y Spitkovsky por lo que también consideramos estos resultados como validación de nuestras herramientas numéricas.

A continuación mostramos, usando la misma escala de color, de azul (mínimo) a rojo (máximo), a la densidad de carga $\rho(x, y, z)$, cuya expresión es 4.16 (Ver figuras 6.9-6.12).

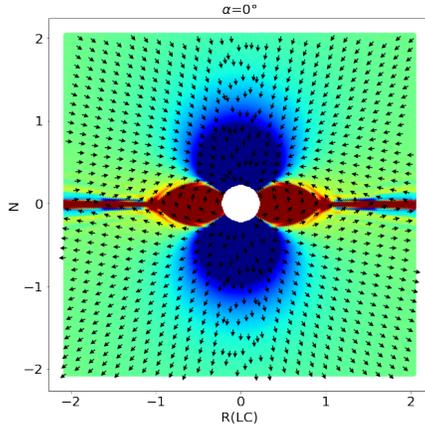


Figura 6.9: Proyección de la densidad de carga ρ y el campo \mathbf{B} en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$ en el caso de $\alpha = 0^\circ$

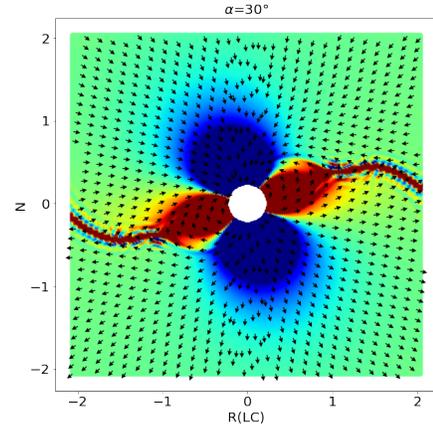


Figura 6.10: Proyección de la densidad de carga ρ y el campo \mathbf{B} en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$ en el caso de $\alpha = 30^\circ$

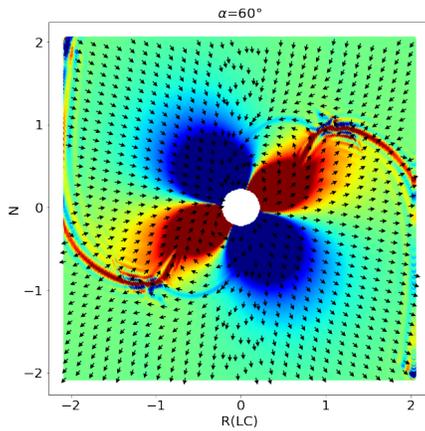


Figura 6.11: Proyección de ρ y \mathbf{B} en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$ en el caso de $\alpha = 60^\circ$

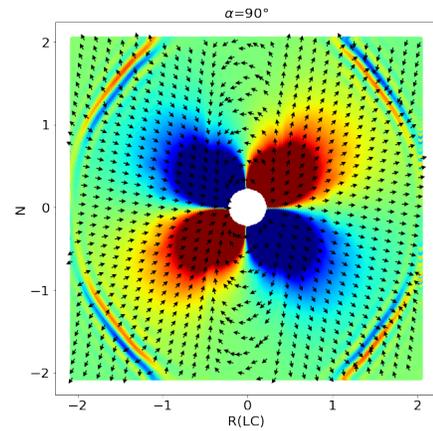


Figura 6.12: Proyección de ρ y \mathbf{B} en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$ en el caso de $\alpha = 90^\circ$

En estas figuras mostramos una proyección de la densidad de carga ρ , en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$, correspondiente a cada caso de la inclinación α . A medida que el ángulo α crece, las cuatro regiones de mayor densidad de carga rotan en sentido antihorario con los polos de la estrella. Existe una

concentración mayor de carga cerca de la estrella, tanto positiva como negativa, dentro del LC. En las figuras de los casos $\alpha = 0^\circ - 60^\circ$, observamos una delgada capa, que emerge de la estrella, en donde la densidad de corriente ρ es intensa. Esta capa se encuentra en la misma posición que ocupa la *Hoja de Corriente* en las gráficas de la función λ , entonces, como es de esperarse, la CS se caracteriza también por tener una mayor densidad de corriente.

Estos resultados coinciden de manera cualitativa con los reportados en la figura 2 de la referencia [22]. Consideramos esta correspondencia como validación de las herramientas de xSky.

6.1.3. La función λ en la Hoja de Corriente

En la subsección 6.1.2, obtuvimos información cualitativa de la *Hoja de Corriente*. Al proyectar la función $\lambda(x, y, z)$ en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$, observamos que la *Hoja de Corriente* se caracteriza por contener los valores máximos de $|\lambda|$ en la magnetósfera. Para estudiar la función λ en la CS, es necesario monitorear su valor dentro de la *Hoja de Corriente*. En las figuras 6.5-6.8, vimos que la *Hoja de Corriente* se encuentra en una región cercana al plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$, lo que hace que este plano sea interesante en todos los casos de α .

En esta sección presentamos la proyección de la función $\lambda(x, y, z)$ en el plano ortogonal a $\vec{\mu}$ que pasa por el centro de la estrella. Es importante recordar que de la ecuación 4.13 obtenemos que las unidades de λ son $[\lambda] = A^2/J$.

En las figuras 6.13-6.20 se puede observar, a la izquierda, un mapa de colores que representa el valor absoluto de λ en todo el plano perpendicular a $\vec{\mu}$, donde el color azul corresponde al mínimo y el rojo al máximo de λ , respectivamente, y a la derecha una gráfica del valor máximo de $|\lambda|$ como función de r correspondiente al mismo plano. La escala espacial de ambas gráficas está en unidades de R_{LC} . En la figura 6.13 observamos un disco donde λ es azimutalmente simétrica, la razón de esto es que la simetría no se rompe si $\vec{\mu}$ no depende del tiempo, como sucede este caso de $\alpha = 0^\circ$. Consecuentemente, en la figura 6.14 observamos el mismo valor máximo en los cuatro cuadrantes cartesianos del plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$, lo que es consistente con la expectativa.

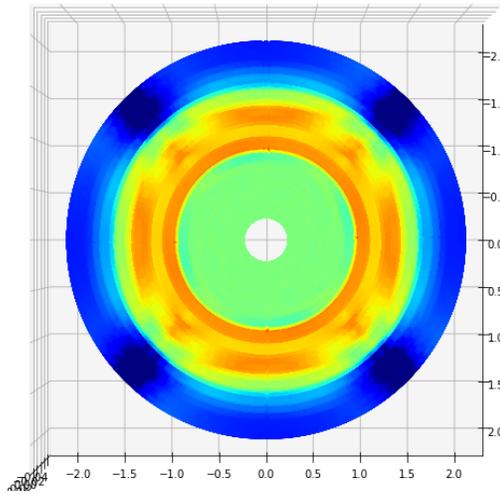


Figura 6.13: Función de corriente λ en el plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$ en el caso alineado, es decir, con $\alpha = 0^\circ$.

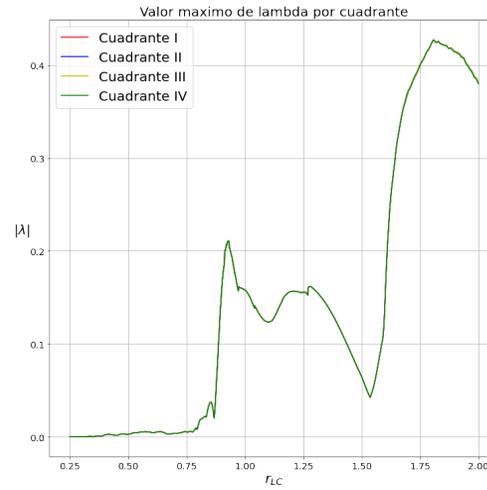


Figura 6.14: Máximo de $|\lambda(r)|$ en cada cuadrante del plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$ de la figura 6.13.

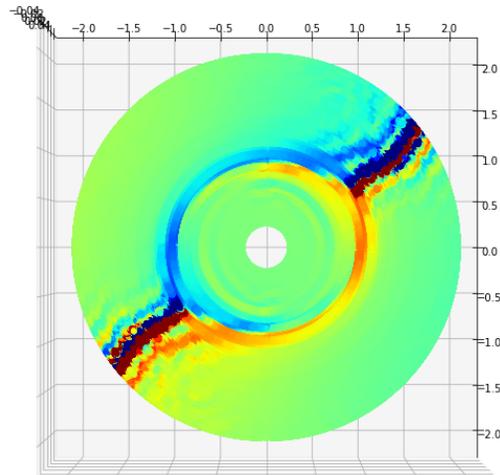


Figura 6.15: Función de corriente λ en el plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$ en el caso de $\alpha = 30^\circ$.

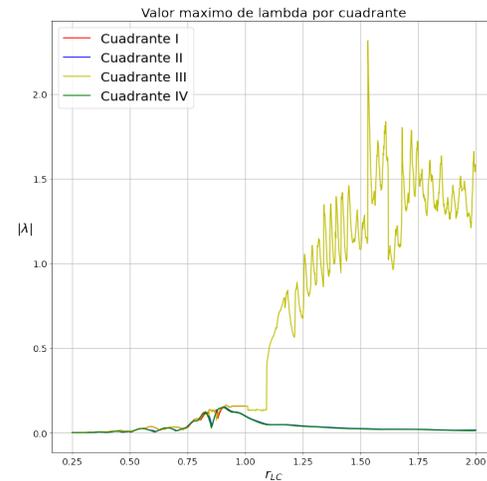


Figura 6.16: Máximo de $|\lambda(r)|$ por cada cuadrante del plano en la figura 6.15.

El siguiente caso corresponde a una inclinación $\alpha = 30^\circ$ del vector dipolar magnético $\vec{\mu}$. Como puede verse en las figuras 6.15 y 6.16, en este caso hay una diferencia cualitativa importante respecto al caso de $\alpha = 0^\circ$: observamos un claro rompimiento de la simetría azimutal para dar lugar a una antisimetría opuesta por el vértice² en el mapa de color. Esta antisimetría se mantiene

²Es decir, si en un punto $\lambda = \lambda_0$, en su correspondiente opuesto por el vértice, $\lambda = -\lambda_0$.

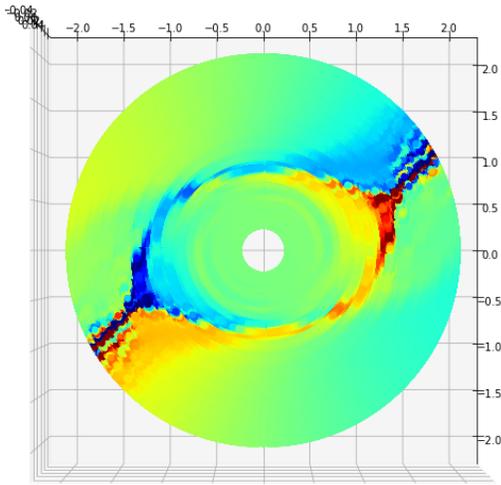


Figura 6.17: Función de corriente λ en el plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$ en el caso de $\alpha = 60^\circ$.

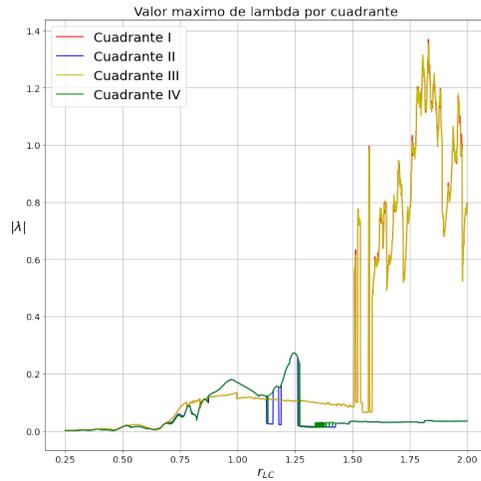


Figura 6.18: Máximo de $|\lambda(r)|$ por cuadrante de la figura 6.17. Nótese que las curvas roja y amarilla están superpuestas, igual que la azul y la verde. La razón se explica en el texto.

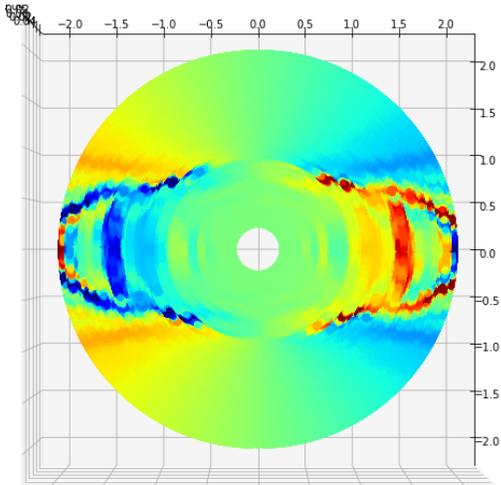


Figura 6.19: Función de corriente λ en el plano ortogonal al vector $\vec{\mu}$ en el caso de $\alpha = 90^\circ$.

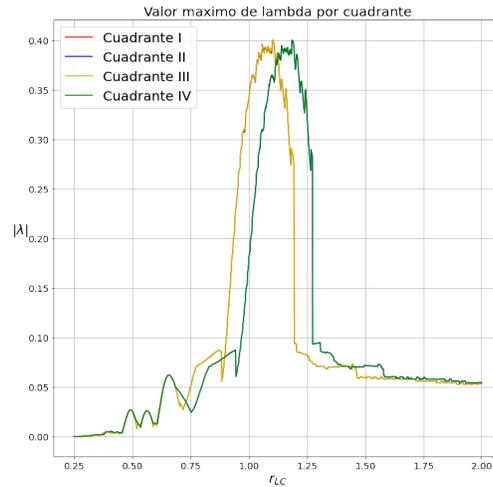


Figura 6.20: Máximo de $|\lambda(r)|$ por cuadrante del plano de la figura 6.19.

en los demás casos de $\alpha \neq 0^\circ$, en los cuales, al no ser $\vec{\mu}$ paralelo a $\vec{\Omega}$, el campo magnético no es axialmente simétrico y entonces la corriente λ es distinta en dos pares de cuadrantes, como se ve en las figuras 6.16, 6.18 y 6.20, donde dicha antisimetría se manifiesta a través de la superposición de las curvas roja y amarilla, así como de las curvas azul y verde.

Es de esperarse que haya una sucesión continua en la distribución de λ entre los casos de $\alpha = 0^\circ$ y $\alpha = 30^\circ$ (el rompimiento del disco), pero, por ser demasiado costosas (computacionalmente hablando), no contamos con las simulaciones de la magnetósfera con ángulos intermedios para mostrar evidencia.

En el mapa de color de las figura 6.15, se observa claramente una región casi anular de corriente intensa cercana al *Cilindro de luz*, delimitado por los valores 1 y -1 en ambos ejes de la gráfica. De ese *anillo* de corriente intensa asociada al LC³ se desprenden dos regiones de corriente muy intensa. Observando la figura 6.16 sabemos que λ alcanza su máximo en ellas, a una distancia cercana de $1.5R_{LC}$. La *Hoja de Corriente* corresponde a aquellas regiones de intenso color, es decir aquellas donde $|\lambda|$ se acerca al máximo.

En el caso de $\alpha = 60^\circ$ (ver figuras 6.17 y 6.18) observamos una deformación mayor del anillo que rodea al LC. Sin embargo, observamos un resultado muy parecido al caso anterior, con un máximo de λ menor que el caso de $\alpha = 30^\circ$ a una distancia $r \approx 1.8R_{LC}$.

Finalmente observamos el caso de $\alpha = 90^\circ$, (ver figuras 6.19 y 6.20). En este caso, el vector $\vec{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{k}}$, eje del *Cilindro de luz*, apunta en dirección horizontal, y está en el plano ortogonal a $\vec{\mu}$, de esta forma el LC tiene como eje a la coordenada horizontal en el diagrama.

Observamos una simetría con λ 's intensas cerca de R_{LC} , con regiones mayoritariamente azules en los cuadrantes II y III, mientras que en I y IV es mayoritariamente rojo.

Este conjunto de vistas en corte de λ en el plano perpendicular a $\vec{\mu}$ nos arrojan información muy útil sobre la localización de la *Hoja de Corriente* en el espacio, sobretodo mas allá del LC, donde λ alcanza sus valores máximos.

Una observación de importancia crítica es notar que en todos los casos, pero especialmente en $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 60^\circ$, el valor de $|\lambda|$ tiene un *salto* (ver figuras 6.15-6.16 y 6.17-6.18) importante en su valor en los cuadrantes I y III para algún $r > R_{LC}$. Este salto supera en estos dos casos de α a $|\lambda| = 0.5$, valor que usaremos más adelante como cota mínima para considerar que una línea de campo \mathbf{B} se encuentra cerca de la *Hoja de corriente*.

Cabe aclarar que estas imágenes son resultado de una simulación a un tiempo dado. Es decir, el sistema evoluciona porque la estrella se encuentra en rotación, sin embargo los campos electromagnéticos se extraen a un tiempo suficientemente largo para que el sistema sea estacionario y por lo tanto la *Hoja de corriente* se mantenga con cambios morfológicos despreciables.

³No confundir con los anillos definidos sobre los *casquetes polares* de la estrella a través de la coordenada r_{ov} .

6.2. Asociación de líneas de campo con la Hoja de Corriente

Bai y Spitkovsky, en su modelo de emisión electromagnética *Separatrix layer* (ver la referencia [22]), suponen que la emisión ocurre a lo largo de líneas de campo abiertas justo dentro de la separatriz (cuya localización corresponde a la *Hoja de Corriente*) que delimita la zona de líneas abiertas y cerradas de campo \mathbf{B} . Bai y Spitkovsky, acotaron visualmente aquellas líneas de campo magnético asociadas a la CS. Entiéndase por *asociación* el seguimiento de cerca de algunas líneas de campo magnético a la *Hoja de Corriente*.

Es importante recordar que la región de emisión de radiación electromagnética en la magnetósfera de los púlsares es un tema de debate en la literatura. En esta sección, determinamos, con nuevos criterios numéricos, aquellas líneas de campo magnético asociadas a la *Hoja de Corriente*, y acotamos la región de donde éstas emergen en los casquetes polares.

Para determinar la asociación de ciertas líneas de campo con la *Hoja de Corriente* para un ángulo α fijo, seguimos el siguiente procedimiento (que más adelante discutiremos en profundidad).

1. Una vez obtenida la frontera del *casquete polar* ($r_{\text{ov}} = 1$), generamos una serie de *anillos* con $r_{\text{ov}} < 1$ manteniendo la misma forma del *casquete polar*. Para la mayoría de casos de α usamos el máximo rango disponible $r_{\text{ov}} \in [0.85, 1)$, que garantiza que las líneas de campo magnético que emergen de este rango se encuentran dentro del dominio en donde calculamos $\lambda(x, y, z)$.
2. Integramos las líneas de campo que emergen desde los *anillos* y la frontera del *casquete polar* en la superficie de la NS.
3. Interpolamos $\lambda(x, y, z)$, en cada punto de cada línea de campo magnético, y si el punto cumple con

$$\lambda(x, y, z) \geq \lambda_{\text{min}}, \quad (6.1)$$

tomaremos ese punto como asociado a la *Hoja de Corriente*. Al criterio 6.1 lo llamaremos *criterio débil*. Discutiremos el valor de λ_{min} más adelante.

4. Obtenemos el número de puntos asociados para aquellas líneas de campo \mathbf{B} que emergen de un anillo de coordenada r_{ov} . Determinamos el máximo de puntos asociados N_{max} entre todas las líneas.
5. Finalmente, definiendo el número de puntos asociados de las líneas que emergen de cada anillo como N_{anillo} , lo comparamos con N_{max} y determinamos que un grupo de líneas, provenientes del anillo con r_{ov} , están asociadas si cumplen el *criterio de asociación fuerte*

$$N_{\text{anillo}} \geq \frac{1}{2} N_{\text{max}}. \quad (6.2)$$

Para determinar la asociación de los puntos de cada una de las líneas de campo magnético con la *Hoja de Corriente*, comparamos el valor de $|\lambda|$ en el punto evaluado con una cota mínima λ_{\min} . Un punto (x, y, z) está asociado si se cumple la expresión 6.1. Discutiremos y justificaremos el valor de λ_{\min} más adelante, por lo pronto podemos decir que la guía para escoger a la cota mínima $\lambda_{\min} = 0.5$ fueron los valores de $|\lambda|$ en aquellas regiones cercanas al máximo en las figuras 6.14-6.20. Recordemos que en dichas figuras se muestran los valores de $|\lambda(r)|$ en el plano perpendicular al vector $\vec{\mu}$, superficie relevante porque ahí se encuentra una buena parte de la *Hoja de Corriente* (ver figuras 6.5-6.8) y es razonable que a partir de ese valor mínimo de λ se tomen los puntos como asociados con la CS.

En la figura 6.21 está el resultado central de este trabajo, donde mostramos el número de puntos de las líneas de campo magnético asociados a la *Hoja de corriente* para cada r_{ov} ⁴ en los diferentes casos de α previamente estudiados. Esta figura nos muestra el grado de asociación de las líneas de campo (de cada r_{ov}) con la *Hoja de Corriente*, de acuerdo a ambos criterios, 6.1 y 6.2.

Recordemos que, en general, entre menor sea el valor de r_{ov} , las líneas contienen un mayor número de puntos al ser más extensas. Esto parecería dar pie a que la asociación sea mayor entre menor sea r_{ov} , sin embargo, en la figura 6.21 se observa un máximo de asociación para cada α en un $r_{ov} \neq \min(r_{ov})$ con suficiente margen para que esto no sea un problema.

El criterio 6.2, lo mostramos en forma de una línea punteada en cada caso de α , esto nos sirve para determinar (de forma arbitraria) un rango de valores de la coordenada r_{ov} tales que las líneas cumplen con el criterio 6.2 y por lo tanto se consideran *fuertemente asociadas* a la CS (no solamente asociadas), en el sentido de que una parte considerable de sus puntos están en las vecindades de la *Hoja de Corriente* al cumplir primeramente el criterio 6.1. Esta línea de 50% ó 6.2, sirve para comparar el grado de asociación entre grupos de líneas, y así poder visualizar aquellos grupos de líneas más fuertemente asociados y determinar el rango de la coordenada r_{ov} de donde estas emergen.

En lo particular, se observa que el caso mayormente asociado es el caso alineado ($\alpha = 0^\circ$), en $r_{ov} = 0.85$, ya que tiene un máximo cercano a 60 mil puntos, mientras que todos los demás valores de r_{ov} se sitúan por debajo de la línea de 50% y disminuye rápidamente una vez que aumenta r_{ov} .

En el siguiente caso, $\alpha = 30^\circ$, se observa el segundo máximo *global* en $r_{ov} = 0.89$, con valor de alrededor de 25 mil puntos, con la diferencia de un mayor número de puntos (en líneas de campo que emergen de anillos con coordenada r_{ov}) arriba de su correspondiente línea de 50%, el intervalo es $r_{ov} \in [0.845 - 0.93]$.

En $\alpha = 60^\circ$ se observa un máximo en $r_{ov} = 0.965$ y el intervalo de 50% es $r_{ov} \in [0.93 - 0.99]$,

⁴Es decir, el conjunto de líneas que comparten un mismo valor de r_{ov}

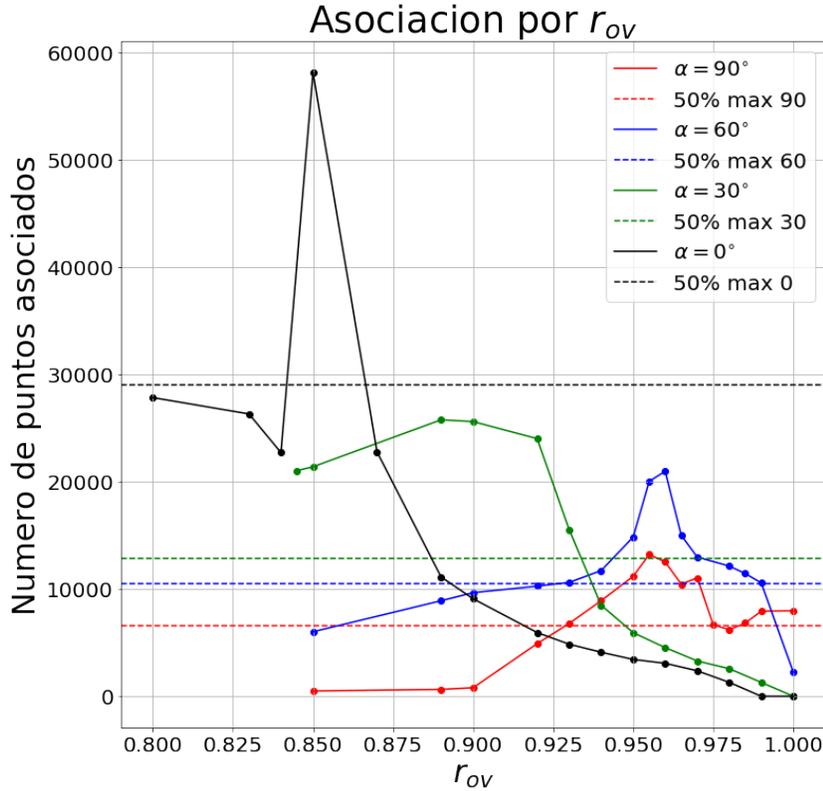


Figura 6.21: Asociación total en número de puntos asociados contra r_{OV} 's en los diferentes casos del ángulo α . Consideramos a las líneas, con número de puntos mayor al 50 % de su respectivo máximo (representado con una línea punteada), como *fuertemente asociadas* a la *Hoja de Corriente*.

lo cual coincide en buena medida con lo reportado para este caso en [22], en donde Bai & Spitkovsky, únicamente visualizando λ , asumen una asociación en $r_{OV} \in [0.95 - 1.03]$.

Finalmente en el caso $\alpha = 90^\circ$ el máximo se encuentra en $r_{OV} = 0.955$ y su intervalo de 50 % es para $r_{OV} \in [0.93 - 1.0]$.

Otro resultado importante es que el máximo de puntos asociados disminuye a medida que α aumenta de 0° a 90° , lo cual concuerda con lo presentado anteriormente en la sección 4.3.2, específicamente en la figura 4.1, en donde mostramos que la *Hoja de Corriente* no siempre se conecta con la superficie de la estrella. Específicamente, la corriente de la CS disminuye al aumentar α . Nuestro resultado es congruente con esto, pues para α 's grandes obtenemos menos puntos asociados a la CS, ya que existen menos puntos de la línea que cumplen el criterio de estar relacionadas a la Hoja de Corriente. Esta consistencia de nuestros resultados con la literatura también abona a la validación de nuestras herramientas numéricas.

La contribución más importante de este trabajo fue haber dado un criterio numérico que nos indica el grado de asociación de las líneas de campo magnético con la CS. Interpolamos el valor de λ para cada punto de las líneas de campo, determinamos su asociación con la *Hoja de Corriente* y determinamos un rango para r_{ov} tal que las líneas de campo *siguen de cerca* a la CS. Con nuestros criterios 6.1 y 6.2, podemos encontrar aquellos grupos de líneas de campo magnético más fuertemente asociados con la CS en la magnetósfera, de modo que podemos determinar los valores óptimos de r_{ov} tales que la emisión electromagnética es más intensa.

La perspectiva futura del trabajo que desarrollamos es aplicar el algoritmo previamente explicado en magnetósferas más complicadas, como son las no dipolares, para determinar aquellos grupos de líneas de campo magnético asociadas a la *Hoja de Corriente* de dichas configuraciones.

6.2.1. El valor de λ_{\min}

El valor que asignamos a la cota mínima de la función λ , aunque sustentado en las figuras 6.14-6.20, es arbitrario. Para verificar la fiabilidad de nuestros resultados se realizaron gráficas aisladas para dos casos de α con un valor λ_{\min} diferente. En la figura 6.22 mostramos el caso de $\alpha = 0^\circ$ con $\lambda_{\min} = 0.3$ (una cota menos estricta que $\lambda_{\min} = 0.5$). En esta figura observamos un comportamiento prácticamente idéntico al caso de $\lambda_{\min} = 0.5$.

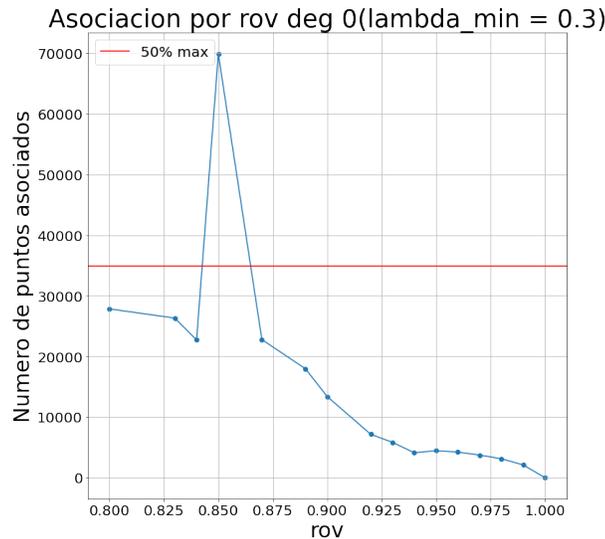


Figura 6.22: Asociación de las líneas de campo \mathbf{B} asociadas a la CS en el caso de $\alpha = 0^\circ$, obtenidos con $\lambda_{\min} = 0.3$.

En la siguiente figura, 6.23, mostramos el caso de $\alpha = 0^\circ$ con una cota más estricta, $\lambda_{\min} = 0.7$. En esta figura vemos un comportamiento prácticamente igual en la asociación, la diferencia es el

total de puntos asociados encontrados, que, como es de esperarse, es menor.

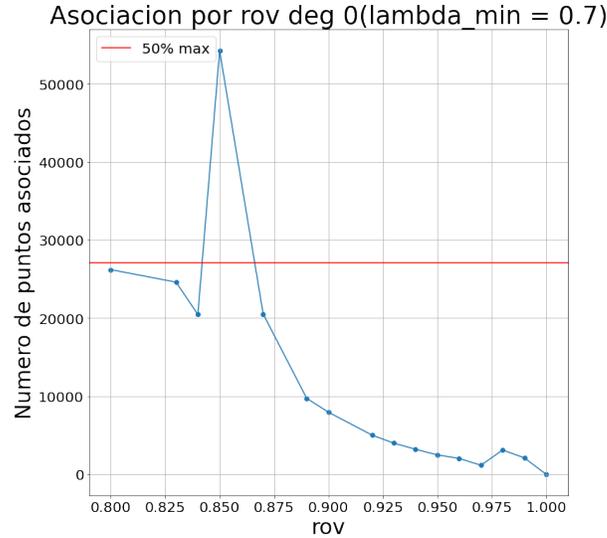


Figura 6.23: Asociación de las líneas de campo \mathbf{B} a la CS en el caso de $\alpha = 0^\circ$ obtenidos con $\lambda_{\min} = 0.7$.

Observemos dos casos diferentes a los anteriores en otra alineación, con $\alpha = 60^\circ$. Primero observemos la figura 6.24 con $\lambda_{\min} = 0.3$. Aquí como la cota es menos estricta se observa un comportamiento muy similar a $\alpha = 60^\circ$ en la figura 6.21. Observamos un mayor número de puntos asociados con una distribución prácticamente igual. Finalmente decidimos hacer un caso extremo con $\lambda_{\min} = 10.0$. Mostramos los resultados en la figura 6.25. En esta figura observamos un caso extremo en donde se reduce el rango de grupos de líneas asociadas a $r_{ov} \in [0.95, 0.965]$, las más fuertemente asociadas.

En conclusión, el valor de λ_{\min} depende de qué tan estrictamente queramos definir la asociación de las líneas de campo a la CS. Estas figuras siempre muestran un rango de líneas asociadas a la *Hoja de Corriente* y el tamaño de este rango dependerá del valor de la cota mínima asignada al valor de λ . El valor de $\lambda_{\min} = 0.5$, basado en lo discutido en la sección 6.1.3, muestra un comportamiento razonable.

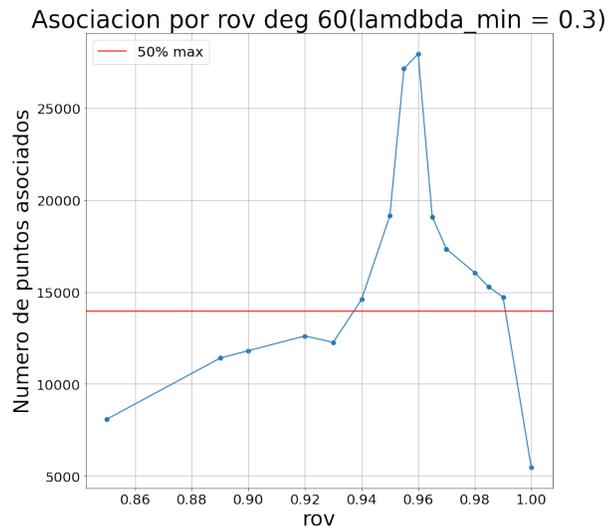


Figura 6.24: Asociación de las líneas de campo \mathbf{B} a la CS en el caso de $\alpha = 60^\circ$, obtenidos con $\lambda_{min} = 0.3$.

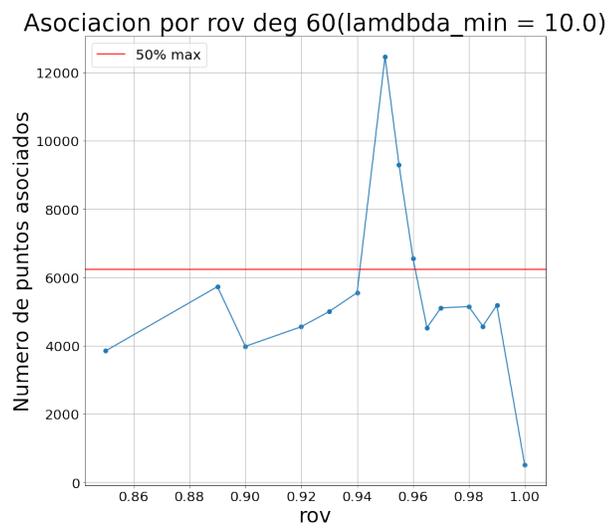


Figura 6.25: Asociación de las líneas de campo \mathbf{B} a la CS en el caso de $\alpha = 60^\circ$, obtenidos con $\lambda_{min} = 10$.

Capítulo 7

Conclusiones

La zona de emisión de radiación electromagnética de altas energías en la magnetósfera de púlsares ha sido motivo de discusión en la literatura, y hasta hoy, el determinarla, sigue siendo un problema abierto. En este trabajo contribuimos a determinar con criterios numéricos la relación de ciertas líneas de campo magnético con la *Hoja de Corriente*. De esta forma, acotamos la región de la magnetósfera en donde se encuentran las líneas fuertemente asociadas a la emisión de altas energías en la vecindad de un púlsar dipolar. Más aún, acotamos la región de los *casquetes polares* de donde emergen dichas líneas de campo.

Para llegar a estos resultados, repasamos brevemente conceptos preliminares, desde elementos de cálculo vectorial, hasta las características generales de los púlsares, y presentamos el modelo del dipolo magnético para púlsares, mostrando algunos de sus resultados, como la estimación de la edad de un púlsar. Posteriormente, presentamos el resultado de Goldreich y Julian de 1969, en donde demuestran que la magnetósfera de un púlsar es necesariamente densa. A partir de este hecho, discutimos el modelo de emisión *Separatrix Layer* de Bai y Spitkovsky, en donde observan que la magnetósfera densa se puede simular en un régimen del electromagnetismo llamado *Libre de Fuerzas* con un buen grado de fidelidad. Mencionamos que su modelo predice de manera robusta los *mapas siderales* de radiación de púlsares de altas energías, y que asumen que la emisión se produce en la *Hoja de Corriente*, región que estudiamos detalladamente a partir de su relación con la función de corriente λ .

Motivados por esta relación, que consiste en que el valor de la función $|\lambda|$ es mayor (y alcanza su máximo) en la *Hoja de Corriente*, usamos dos criterios para determinar la asociación de las líneas de campo magnético: el criterio débil $\lambda(x, y, z) > \lambda_{\min}$ garantiza que un punto de una línea de campo magnético se encuentra cerca de la *Hoja de Corriente*; después, clasificando el grupo de líneas de campo que emergen de un mismo anillo por medio de su coordenada r_{ov} , determinamos

aquellas líneas con el máximo número de puntos asociados, y si un conjunto de líneas cumple el criterio fuerte, es decir tiene el 50 % del número máximo de puntos asociados, determinamos que sus líneas de campo magnético están fuertemente asociadas a la CS. Este segundo criterio es arbitrario, sin embargo, garantiza que las líneas que lo cumplen tienen un grado de asociación mayor. Este criterio fuerte nos dota de un rango en la coordenada r_{ov} para líneas que están fuertemente asociadas a la *Hoja de Corriente*.

Con base en estos criterios, hemos determinado un rango en la coordenada r_{ov} que acota la región de los *casquetes polares* de donde emergen las líneas de campo a lo largo de las cuales ocurre la emisión de radiación más intensa en el modelo *Separatrix Layer*. Por ejemplo, en el caso de $\alpha = 60^\circ$, obtuvimos que las líneas fuertemente asociadas emergen de $r_{ov} \in [0.93 - 0.99]$, rango que concuerda en buena medida con lo reportado en la literatura.

Para darle robustez a nuestros resultados, hemos validado las herramientas computacionales utilizadas reproduciendo varios resultados de la referencia [22], discutidos en el capítulo anterior. Además para el desarrollo de este trabajo, optimizamos algunas herramientas computacionales presentes en el software *xSky*, expandiendo sus funcionalidades con los procedimientos anteriormente explicados.

Las interesantes observaciones del *Explorador de la composición interior de estrellas de neutrones* (NICER¹, por sus siglas en inglés para *Neutron Star Interior Composition Explorer*, sugieren una estructura de campo magnético complejo dentro de la NS que también podría afectar la emisión de radiación de altas energías [38]. Este descubrimiento nos encamina para, a partir de lo desarrollado este trabajo, aplicar las herramientas construidas a magnetósferas no dipolares y acotar, en estos casos más complicados, la región de emisión de rayos gamma en la magnetósfera de púlsares.

Uno de los temas más interesantes actualmente, es el estudio de sistemas binarios de estrellas de neutrones o de una estrella de neutrones con un agujero negro, popularizados con la detección (de la colaboración LIGO/Virgo), gravitacional y electromagnética, de la colisión de dos estrellas de neutrones en 2017 [39].

Consideramos de gran interés optimizar y aplicar las herramientas aquí desarrolladas a sistemas binarios, en donde la radiación electromagnética es capaz de aportar información complementaria en aquellas etapas de evolución del sistema en donde la información que se obtiene de las ondas gravitacionales es limitada.

¹Consultar www.nasa.gov/nicer)

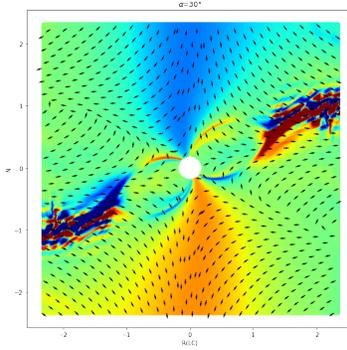
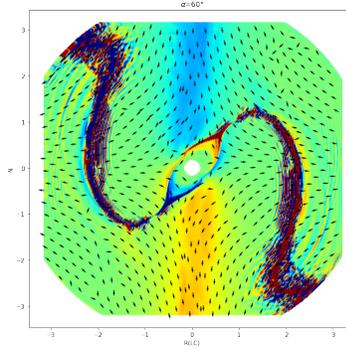
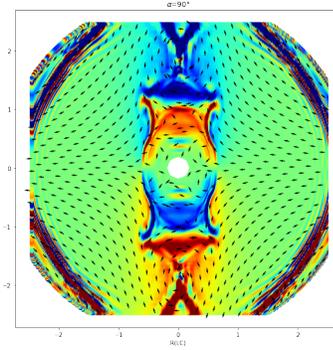
Apéndice A

Estudios de convergencia cualitativa de las funciones λ y ρ

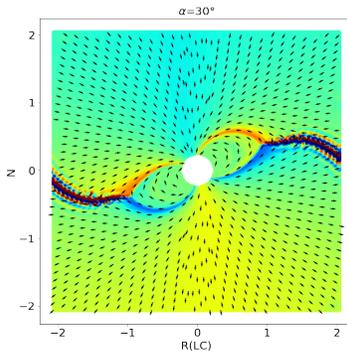
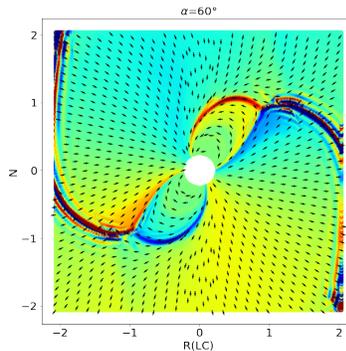
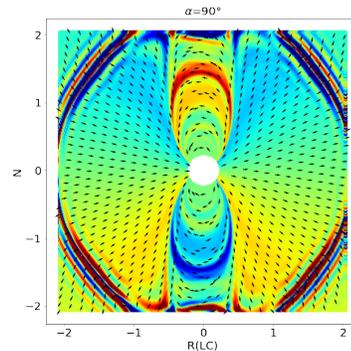
Realizamos estudios cualitativos de convergencia con las dos resoluciones numéricas disponibles para el campo magnético de la estrella. Enseguida graficamos las funciones $\lambda(x, y, z)$ y $\rho(x, y, z)$ en las dos resoluciones disponibles: media (**res61**) y alta (**res81**). En el capítulo 5 discutimos el significado de estas resoluciones, correspondientes a simulaciones magnetohidrodinámicas realizadas con el código **ONION**.

A.0.1. La función de corriente λ en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$

Res61

Figura A.1: $\lambda : \alpha = 30^\circ$ Figura A.2: $\lambda : \alpha = 60^\circ$ Figura A.3: $\lambda : \alpha = 90^\circ$

Res81

Figura A.4: $\lambda : \alpha = 30^\circ$ Figura A.5: $\lambda : \alpha = 60^\circ$ Figura A.6: $\lambda : \alpha = 90^\circ$

Observando las figuras anteriores, vemos que aquellas proyecciones de resolución media (ver figuras A.1-A.3), captan la información general de la función λ . Sin embargo no se distingue la *Hoja de Corriente* de una forma clara como en las figuras A.4-A.6. Es importante aclarar que los datos en la malla de **res61** son diferentes a **res81** en $\alpha = 30^\circ, 90^\circ$ y por eso se observa una región más grande en el primer caso. A pesar de ello, se ilustra una propiedad interesante, el caso de **res81** es más suave en todas las regiones de la magnetósfera. Por esta razón en nuestro trabajo, usamos la resolución más alta disponible, para tener datos más confiables, recordemos que dependemos de esta función λ para determinar la asociación del campo magnético \mathbf{B} con la CS.

A.0.2. La densidad de carga ρ en el plano $\vec{\Omega} - \vec{\mu}$

Res61

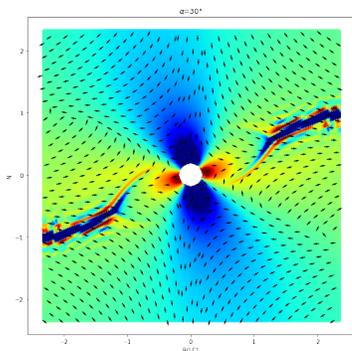


Figura A.7: $\rho : \alpha = 30^\circ$

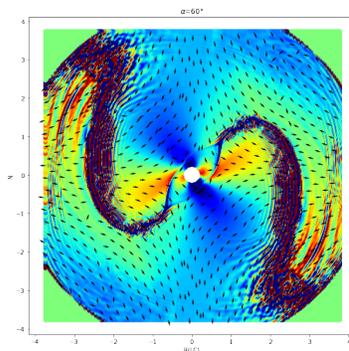


Figura A.8: $\rho : \alpha = 60^\circ$

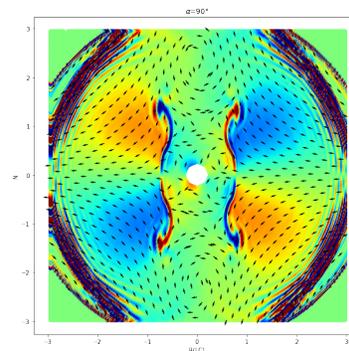


Figura A.9: $\rho : \alpha = 90^\circ$

Res81

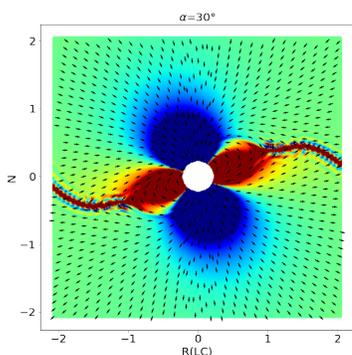


Figura A.10: $\rho : \alpha = 30^\circ$

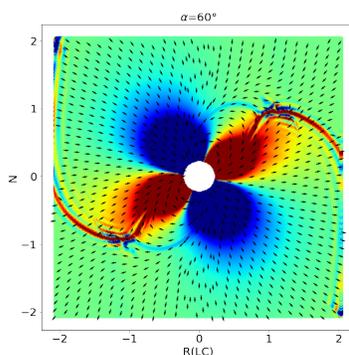


Figura A.11: $\rho : \alpha = 60^\circ$

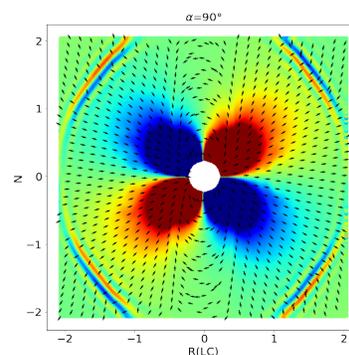


Figura A.12: $\rho : \alpha = 90^\circ$

Aquí vemos la distribución de la densidad de carga ρ . En estas figuras se muestra una clara diferenciación en ambas resoluciones. La resolución **res81** muestra una mayor densidad de carga en la zona dentro del LC y una región de densidad de carga más definida en la zona más allá del LC.

En conclusión, para este trabajo, la resolución de nuestros datos es crítica para que el valor de λ sea lo más fiable posible, y por lo tanto, podamos determinar correctamente la asociación de las líneas de campo magnético con la *Hoja de corriente*. Por esta razón trabajaremos con datos de la resolución alta **res81**.

Referencias

- [1] S.H. Friedberg, A.J. Insel, and L.E. Spence. *Linear Algebra*. Featured Titles for Linear Algebra (Advanced) Series. Pearson Education, 2003.
- [2] Michael Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, fourth edition, 2008.
- [3] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017.
- [4] Wikipedia contributors. Espectro electromagnético – Wikipedia, la enciclopedia libre, 2022. [Imagen online; consultado: 3-Nov-2022].
- [5] Arnab Rai Choudhuri. *Astrophysics for Physicists*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] P. Meszaros. *High-energy radiation from magnetized neutron stars*. University of Chicago Press, 1992.
- [7] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. 1983.
- [8] Jürgen Schaffner-Bielich. *Compact Star Physics*. Cambridge University Press, 8 2020.
- [9] D. R. Lorimer, M. Bailes, M. A. McLaughlin, D. J. Narkevic, and F. Crawford. A Bright Millisecond Radio Burst of Extragalactic Origin. *Science*, 318(5851):777, November 2007.
- [10] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, 217:709–713, 1968.
- [11] Wikipedia contributor: Mysid. Pulsar schematic.svg, 2022. [Imagen online; consultado: 11-Ene-2023].
- [12] Néstor Ortiz, Federico Carrasco, Stephen R. Green, Luis Lehner, Steven L. Liebling, and John Ryan Westernacher-Schneider. Gamma-radiation sky maps from compact binaries. *JCAP*, 02(02):027, 2022.
- [13] Vladimir M. Lipunov. *Astrophysics of Neutron Stars*. 1992.

-
- [14] H. C. Spruit. Origin of neutron star magnetic fields. *AIP Conf. Proc.*, 983(1):391–398, 2008.
- [15] Xue-Ning Bai and Anatoly Spitkovsky. Uncertainties of Modeling Gamma-Ray Pulsar Light Curves with Vacuum Dipole Magnetic Field. *Astrophys. J.*, 715:1270–1281, 2010.
- [16] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. New York, NY, 3rd ed. edition.
- [17] George W. Collins II, William P. Claspy, and John C. Martin. A reinterpretation of historical references to the supernova ofscpa.d./scp1054. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111(761):871–880, jul 1999.
- [18] Peter Goldreich and William H. Julian. Pulsar electrodynamics. *Astrophys. J.*, 157:869, 1969.
- [19] H. W. Wyld. *Mathematical methods for physics*. 1976.
- [20] A. K. Harding, E. Tadamaru, and L. W. Esposito. A curvature - radiation - pair-production model for gamma -ray pulsars. , 225:226–236, October 1978.
- [21] J. Arons and E. T. Scharlemann. Pair formation above pulsar polar caps: structure of the low altitude acceleration zone. , 231:854–879, August 1979.
- [22] Xue-Ning Bai and Anatoly Spitkovsky. Modeling of Gamma-Ray Pulsar Light Curves with Force-Free Magnetic Field. *Astrophys. J.*, 715:1282–1301, 2010.
- [23] P. F. Wang, C. Wang, and J. L. Han. Curvature radiation in rotating pulsar magnetosphere. , 423(3):2464–2475, July 2012.
- [24] R. P. Walker. Synchrotron radiation. *Conf. Proc. C*, 9209071:437–459, 1992.
- [25] Alessia Tortosa. *Comptonization mechanisms in hot coronae in AGN. The NuSTAR view*. PhD thesis, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA, 2016.
- [26] J. Dyks and B. Rudak. Two-pole caustic model for high-energy light curves of pulsars. *The Astrophysical Journal*, 598(2):1201, dec 2003.
- [27] K. S. Cheng, C. Ho, and M. Ruderman. Energetic Radiation from Rapidly Spinning Pulsars. I. Outer Magnetosphere Gaps. , 300:500, January 1986.
- [28] Federico Carrasco and Oscar Reula. Novel scheme for simulating the force-free equations: Boundary conditions and the evolution of solutions towards stationarity. *Phys. Rev. D*, 96(6):063006, 2017.
- [29] Keith Moffatt Sergei Molokov, René Moreau. *Magnetohydrodynamics*. Springer Dordrecht, 2007.

-
- [30] Ioannis Contopoulos, Demosthenes Kazanas, and Christian Fendt. The axisymmetric pulsar magnetosphere. *Astrophys. J.*, 511:351, 1999.
- [31] Andrei Gruzinov. Stability in force-free electrodynamics. 2 1999.
- [32] Andrei Gruzinov. Pulsar magnetosphere: variation principle, singularities, estimate of power. *Astrophys. J. Lett.*, 647:L119–L122, 2006.
- [33] Anatoly Spitkovsky. Time-dependent force-free pulsar magnetospheres: axisymmetric and oblique rotators. *Astrophys. J. Lett.*, 648:L51–L54, 2006.
- [34] Ø. Grøn. Application of schiff’s rotating-frame electrodynamics. *International Journal of Theoretical Physics*, 23(5):441–448 – 448, 1984.
- [35] Dieter Biskamp. *Current sheets*, page 29–80. Cambridge Monographs on Plasma Physics. Cambridge University Press, 2000.
- [36] S. V. Bogovalov. On the physics of cold mhd winds from oblique rotators. *Astron. Astrophys.*, 349:1017–1026, 1999.
- [37] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing. pages 705–708, 9 1992.
- [38] A. V. Bilous, A. L. Watts, A. K. Harding, T. E. Riley, Z. Arzoumanian, S. Bogdanov, K. C. Gendreau, P. S. Ray, S. Guillot, W. C. G. Ho, and D. Chakrabarty. A NICER View of PSR J0030+0451: Evidence for a Global-scale Multipolar Magnetic Field. , 887(1):L23, December 2019.
- [39] B. P. Abbott and et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101, Oct 2017.