



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

ESTUDIOS DE ONDAS DE CHOQUE HIDRODINÁMICAS Y
GRAVITACIONALES FUERTES EN ESPACIO-TIEMPOS
ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:

MARIO FELIPE DE JESÚS GONZÁLEZ

TUTORES PRINCIPALES:

DR. SERGIO MENDOZA RAMOS (IA-CU)
DR. ISMAEL DELGADO GASPAS (IA-CU)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX.
JULIO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Introducción	xi
1 Elementos de relatividad general	1
§1.1 Principio de equivalencia	1
§1.2 Tensor métrico	2
§1.3 Derivada covariante y símbolos de Christoffel	4
§1.4 Ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein.	5
2 Hipersuperficies	9
§2.1 3-hipersuperficies espaciales	10
§2.2 Condiciones de salto en una hipersuperficie	11
3 Ondas de choque hidrodinámicas no-relativistas	17
§3.1 Ecuaciones conservativas no-relativistas	17
§3.2 Discontinuidades tangenciales y ondas de choque	19
§3.3 Adiabática del choque	20
4 Ondas de choque relativistas	23
§4.1 Ecuación de estado	25
§4.2 Condiciones de salto en espacio plano	26
§4.3 Condiciones de salto en espacio-tiempo curvo	30
§4.4 Solución de las condiciones de salto	33

§4.4.1	Fluido tipo Bondi-Wheeler en el espacio-tiempo de Minkowski . . .	33
§4.4.2	Fluido tipo Bondi-Wheeler en espacio curvo	37
§4.4.3	Fluido tipo Bondi-Wheeler en espacio-tiempo de Schwarzschild . . .	38
§4.4.4	Ondas de choque en un fluido politrópico para un espacio-tiempo curvo	39
5	Ondas de choque gravitacionales	43
§5.1	Planteamiento	43
§5.1.1	Tensor de energía-momento superficial	45
6	Conclusiones	51
A	Velocidad relativa entre fluido pre-choque y post-choque	55
B	Condiciones de salto para un espacio-tiempo curvo con métrica diagonal.	59
C	Velocidades relativas al choque en espacio-tiempo curvo con métrica diagonal	63
D	Salto de cantidades hidrodinámicas para fluido politrópico	67

Índice de figuras

2.1	Geometría de la 3-hipersuperficie Σ y su vector normal n^μ	12
3.1	Adiabática de Hugoniot.	22
4.1	Onda de choque en un fluido relativista.	24
4.2	Zona pre y post-choque de una onda de choque.	27
4.3	Onda de choque en un sistema de referencia en donde el fluido pre-choque está en reposo.	32
4.4	Velocidad v_Σ de la onda de choque en Minkowski.	35
4.5	Salto en las densidades de energía para fluido barotrópico en Minkowski. . .	36
4.6	Velocidad de la onda de choque en el espacio-tiempo de Schwarzschild. . . .	40
4.7	Salto en las presiones p_1/p_2 para fluido politrópico en Schwarzschild.	42

Agradecimientos

Quiero empezar agradeciendo a la institución que durante estos dos años de mi maestría me apoyó económicamente para que yo pudiera desempeñar mis actividades diarias en el Instituto de Astronomía de la UNAM. Un agradecimiento muy especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por otorgarme una beca (CVU: 687174). Este trabajo se llevó acabo con el apoyo de los proyectos DGAPA-UNAM PAPIIT IN112019, IN110522, Consejo Nacional de Ciencia y Teconología (CONACyT) (CB-2014-01 No. 240512).

Agradezco con mucho cariño al Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por todo lo que me brindó durante mi estancia como estudiante de posgrado. A los directivos y al personal administrativo pues de ellos no he recibido más que apoyo y orientación en cada uno de mis procesos como estudiante.

A los investigadores, la Dra. Tula Bernal Marín, la Dra. Ana Laura García Perciante, el Dr. Héctor Olivares, el Dr. César Simón López Monsalvo y el Dr. Emilio Tejeda Rodríguez por aceptar formar parte de mi sínodo de maestría. Gracias por su tiempo y comentarios que sin duda me ayudarán a mejorar.

Mi más grande reconocimiento y agradecimientos a cada uno de los profesores que me impartieron clases durante la maestría. De ellos he aprendido no solo los valiosos conocimientos que un científico en formación debe poseer, si no también compartieron conmigo su experiencia, sus contactos, historias y hasta uno que otro consejo personal. A todos ellos, muchas gracias.

Quiero agradecer también de una forma muy especial a mis dos tutores principales, el Dr. Sergio Mendoza Ramos y el Dr. Ismael Delgado Gaspar. Ambos durante todo el proceso de mi formación como estudiante de posgrado me han apoyado tanto en lo académico como en lo personal. He adquirido los valiosos conocimientos en astrofísica relativista que ellos como grandes expertos en la materia me han podido transmitir. Sus consejos no solo alentaron mi crecimiento como profesional sino también como ser humano. A los dos,

muchas gracias.

A mis compañeros de generación y en especial a Karla e Ivan, pues a pesar de haber estudiando la mayor parte de nuestro posgrado de forma virtual como consecuencia de la pandemia de Covid-19, siempre estuvieron ahí, apoyándome tanto en lo académico como en lo emocional. Gracias.

Finalmente, con todo el amor de mi corazón quiero agradecer a mi familia por estar siempre conmigo. A mi padre que fue el que me inculcó el amor por la ciencia. A mi hermano, porque siempre ha estado ahí cuando lo necesito. A mi madre, ese gran ser humano que es todo amor y alegría y que sin ella no hubiese podido ni siquiera acabar la carrera. Muchas gracias mamá, te quiero.

Resumen

El estudio de las ondas de choque en relatividad general requiere no solamente comprender la hidrodinámica y termodinámica del problema, pues ahora entra en juego un nuevo concepto, la geometría del espacio-tiempo. Es importante por lo tanto comprender el concepto de una hipersuperficie Σ , pues ésta jugará el rol de onda de choque tres-dimensional en un espacio-tiempo cuatro-dimensional \mathcal{M} . Como consecuencia de esta situación, se verá que Σ divide a nuestro espacio-tiempo \mathcal{M} en dos regiones, la zona pre-choque \mathcal{M}^- y la zona post-choque \mathcal{M}^+ , por lo que es de interés conocer los valores de las cantidades hidrodinámicas en \mathcal{M}^2 a partir del estado de las cantidades en la zona pre-choque. En el presente trabajo se estudian las principales características de las ondas de choque hidrodinámicas y gravitacionales en un espacio-tiempo curvo con métrica diagonal y en el régimen de choque fuerte, es decir, cuando la energía térmica del fluido es mucho mayor que la energía en reposo del mismo. Para ello se generalizan las ecuaciones de las velocidades del fluido en las zonas pre y post-choque en un sistema de coordenadas en el que la onda de choque Σ se encuentra en reposo, encontrándose que dichas velocidades dependen solo de la ecuación de estado del fluido y de las componentes g_{00} y g_{11} de la métrica diagonal. Se generaliza también la expresión para la velocidad de Σ respecto a un marco de referencia en el que es ahora el fluido en la zona post-choque el que se encuentra en reposo. Con estas herramientas se desarrolla un modelo analítico exacto para encontrar el salto en las cantidades hidrodinámicas, tales como las densidades de energía y la presión. Se obtienen de igual manera gráficas para observar la dependencia de la velocidad de la onda de choque en función a la velocidad del fluido en la zona pre-choque. Se hace una comparación de todos estos resultados para la métrica de Schwarzschild a diferentes valores del radio de Schwarzschild contra el caso del espacio-tiempo plano de Minkowski. Finalmente se muestra la aparición de ondas de choque gravitacionales debidas a las condiciones de salto de las ondas hidrodinámicas.

Introducción

Las ondas de choque relativistas son una característica de gran importancia para varios modelos de fenómenos astrofísicos. Por ejemplo, el aumento repentino en la luminosidad de una estrella en muchos ordenes de magnitud, $(10^8 - 10^{10}) L_{\odot}$, a través de una explosión de supernova produce una onda de choque. Las estrellas con masas entre 8 y 100 masas solares, terminan sus vidas en explosiones, supernova tipo II. El mecanismo más viable para producir la explosión es el colapso gravitacional y el pronto rebote de la estrella produciendo una explosión (van Riper, 1979). Al final de su evolución estelar, la estrella desarrolla un núcleo compuesto principalmente por núcleos de elementos cercanos al pico de hierro y de electrones libres, con una masa cercana al límite de Chandrasekhar. Debido a la captura de electrones y a la desintegración parcial de los núcleos, se crea una inestabilidad dinámica y el núcleo comienza a colapsar hasta que se vuelve a establecer un equilibrio hidrostático. En este momento, el núcleo esférico de la estrella sobrepasa la configuración de equilibrio y rebota actuando como un pistón. Esto hace que se forme una onda de choque fuera del núcleo interno que se propaga hacia afuera de la estrella alcanzando velocidades supersónicas (Anile, 1990). Si el choque es lo suficientemente fuerte, podrá expulsar la mayor parte de la atmósfera estelar y dejar un remanente compacto y al paso del tiempo se convertirá en una estrella de neutrones o en un agujero negro.

Por otro lado, en la teoría de la gravitación de Einstein, las ecuaciones de conservación de energía y de momento están descritas por la divergencia covariante del tensor de energía-momento. En un sistema de coordenadas específico, estas ecuaciones de campo determinan un sistema hiperbólico que describen simultáneamente la evolución y la interacción en el tiempo de los sistemas de coordenadas inerciales locales (Groah et al., 2007), así como la evolución en el tiempo de un fluido. Debido a que la relatividad general es independiente de las coordenadas, siempre podemos ver la evolución de las ecuaciones de campo en coordenadas inerciales locales en cualquier punto del espacio-tiempo, en cuyo caso la

divergencia del tensor de energía-momento se reduce a las ecuaciones relativistas de Euler en un espacio-tiempo plano para un punto dado. En una onda de choque, las cantidades hidrodinámicas de un fluido como la presión, la densidad y la velocidad son discontinuas. De las ecuaciones de campo de Einstein se deduce entonces que el tensor de Einstein será discontinuo en cualquier punto donde el tensor de energía-momento lo sea. Y dado que el tensor de Einstein contiene las segundas derivadas del tensor métrico, las ondas de choque hidrodinámicas nos conducen a la creación de ondas de choque gravitacionales en las segundas derivadas del tensor métrico. Así, en estas ondas de choque gravitacionales es el tensor de curvatura de Riemann, y por tanto el tensor y el escalar de Ricci quienes presentan discontinuidades en la estructura del espacio-tiempo. El tensor métrico se mantiene continuo a través de una onda de choque gravitacional, lo cual es coherente con las bien conocidas “junction-conditions” de la relatividad general (e.g. Poisson, 2004).

En esta tesis se estudiarán algunas de las configuraciones más simples posibles para el estudio de las ondas de choque en relatividad general. El objetivo es deducir las condiciones de salto más generales bajo estas suposiciones y poderlas aplicar a varios sistemas astrofísicos con ecuación de estado politrópica. Esto hará que aparezcan distintas condiciones de salto para las variables hidrodinámicas a partir de las condiciones de salto para la métrica a través de una hipersuperficie (Poisson, 2004).

La tesis está organizada de la siguiente manera. En los capítulos 1 y 2 se describen las herramientas básicas de relatividad general y geometría diferencial para entender la dinámica de una tres-hipersuperficie y sus principales características. Es importante mencionar que cuando se estudian las ondas de choque se debe estudiar la manera en la que las cantidades hidrodinámicas cambian de un lado de la hipersuperficie al otro. Aparecerán entonces ciertas condiciones de unión para que en la hipersuperficie se lleve a cabo una transición suave entre las métricas que describen las variedades separadas por la onda de choque. En el capítulo 3 se estudian tópicos de hidrodinámica relativista y se hará una revisión general de las ecuaciones de conservación de masa y energía-momento, así como sus consecuencias. Las ondas de choque relativistas son abordadas en el capítulo 4 donde se hace una generalización de las condiciones de salto mediante la adiabática de Taub (Landau & Lifshitz (1975)), además de expresar en forma general las velocidades de un fluido en ambos lados de la onda de choque para un espacio-tiempo curvo con tensor métrico diagonal. En el capítulo 5 se describe la aparición de las ondas de choque gravitacionales a partir de las condiciones de salto de las ondas de choque hidrodinámicas. Finalmente en el capítulo 6 se hacen comentarios finales y las conclusiones.

Capítulo 1

Elementos de relatividad general

La teoría de la relatividad general es sin lugar a dudas la teoría física más fascinante que ha sido construida. Esta construcción se llevó a cabo por Einstein (1916) de manera totalmente matemática bajo el supuesto de que la gravitación es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por las masas y energías que existen en el espacio. En este capítulo daremos una introducción muy breve a la relatividad general con la intención de utilizar algunos de los resultados aquí presentados en la formulación de ondas de choque hidrodinámicas y gravitacionales en los capítulos subsecuentes.

§1.1 Principio de equivalencia

El principio de equivalencia de Einstein es la base de las teorías de la gravedad “métricas” incluida la teoría de la relatividad general. El principio de equivalencia débil establece que si un cuerpo de prueba sin carga o eléctricamente neutro, con energía autogravitacional despreciable (es decir, no existen efectos gravitacionales dentro del mismo cuerpo) y suficientemente pequeño, se coloca en un evento inicial en el espacio-tiempo y se le imparte una velocidad inicial, entonces su trayectoria posterior será independiente de su estructura y composición interna (Will, 2018). De esta manera, el Principio de Equivalencia de Einstein (PEE) establece que:

- El principio de equivalencia débil es válido.
- El resultado de cualquier experimento de prueba local no gravitacional es independiente de la velocidad del instrumento de medición, el cual está en caída libre.

- El resultado de cualquier experimento de prueba local no gravitacional es independiente de dónde y cuándo se realiza en el universo.

Este principio es fundamental para la teoría gravitacional, ya que es posible argumentar que si el PEE es válido, entonces la gravitación debe ser un fenómeno de espacio-tiempo curvo, es decir, se deben cumplir los postulados de las teorías métricas de la gravitación (Will, 2018). Estos postulados afirman:

- El espacio-tiempo está dotado de una métrica.
- Las líneas de mundo de los cuerpos de prueba son geodésicas en esa métrica.
- En los marcos de referencia en caída libre, las leyes de la física no gravitacionales son los de la relatividad especial.

§1.2 Tensor métrico

Un concepto muy usual en geometría euclidiana y que tendrá mucha importancia en espacios curvos es el producto escalar. Debido a que un vector es una combinación lineal de los vectores de alguna base dada, el producto escalar entre dos vectores arbitrarios puede ser definido especificando los valores de todos los productos escalares entre los vectores base en una base \mathbf{e}_μ .

De esta manera, el producto escalar entre dos vectores arbitrarios \mathbf{u} y \mathbf{v} se define como un mapeo bilineal simétrico que nos da como resultado un escalar. De la definición de tensores se puede deducir que este mapeo es un tensor covariante y simétrico de rango dos. Matemáticamente se expresa por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu, \quad (1.1)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu, \quad (1.2)$$

es el tensor métrico.

De esta manera se define la norma $|\mathbf{u}|$ de un vector \mathbf{u} de la siguiente forma:

$$|\mathbf{u}| := (\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}))^{1/2} = (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Por otro lado, las componentes contravariantes $g^{\mu\nu}$ del tensor métrico se definen como los elementos de la matriz inversa a la formada por los elementos de la matriz de componentes covariantes, es decir

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.4)$$

Una utilidad más del tensor métrico es que con él podemos definir mapeos lineales inyectivos entre tensores covariantes y contravariantes del mismo rango. En el caso de un vector u_{μ} esto se representa como:

$$u_{\mu} = g(u^{\nu}e_{\nu}, e_{\mu}) = u^{\nu}g(e_{\nu}, e_{\mu}) = u^{\nu}g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}u^{\nu}. \quad (1.5)$$

Este mapeo es informalmente conocido como “bajada” de índice y existe su contra parte

$$u^{\mu} = g^{\mu\nu}u_{\nu}, \quad (1.6)$$

a la que se le denomina “subida” de índice.

Todo lo anterior puede generalizarse a tensores de rango arbitrario, e.g.

$$T_{\mu\beta\gamma} = g_{\mu\alpha}T_{\beta\gamma}^{\alpha}. \quad (1.7)$$

Dado que el tensor métrico define un producto escalar en un espacio-tiempo \mathcal{M} arbitrario, construyamos una pseudo-distancia infinitesimal ds entre dos puntos sobre una curva $x^{\mu}(\tau)$ parametrizada por τ , es decir, entre dos puntos x^{μ} y $x^{\mu} + dx^{\mu}$ correspondientes a los valores τ_0 y $\tau + d\tau$, de forma que si \mathbf{v} es un campo vectorial tangente a la curva, entonces:

$$ds^2 = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})d\tau^2 = g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \quad (1.8)$$

En el último paso de la relación anterior se utilizó el hecho de que el vector tangente a la curva está dado por: $v^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$. La cantidad ds es conocida como el elemento de línea asociado al tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

La pseudo-distancia finita a lo largo de una curva entre dos puntos τ_0 y τ es entonces:

$$s = \int_{\tau_0}^{\tau} |g_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}|^{1/2} d\tau. \quad (1.9)$$

§1.3 Derivada covariante y símbolos de Christoffel

En coordenadas curvilíneas un resultado general es:

$$e_{\mu,\nu} := \frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} \neq 0. \quad (1.10)$$

Dicho resultado nos conduce a introducir un nuevo elemento geométrico adicional para los casos en los que la métrica es no trivial, la conexión. Dicho objeto está definido mediante (Ramos-Sánchez & Vidal, 2018)

$$e_{\mu,\nu} := \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha, \quad (1.11)$$

donde se ha usado el hecho de que las derivadas de los vectores base son un combinación lineal de los vectores base. Dado que se cumple en general (1.10), los vectores base contribuyen entonces a la derivada de un vector en general. Tomando $\mathbf{v} = v^\mu e_\mu$ su derivada es:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\nu} = v_{,\nu}^\mu e_\mu + v^\mu e_{\mu,\nu} = v_{,\nu}^\mu e_\mu + v^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha = v_{,\nu}^\mu e_\mu + v^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu e_\mu = (v_{,\nu}^\mu + v^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu) e_\mu. \quad (1.12)$$

La derivada (1.12) es similar a la expresión $\mathbf{v}_{,\nu} = v_{,\nu}^\mu e_\mu$ que se obtiene en un espacio-tiempo plano, con la diferencia de que la nueva derivada tiene ahora términos de corrección proporcionales a $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$. De esta manera se puede interpretar al término entre paréntesis de la expresión (1.12) como la expresión completa de la derivada de un vector en un sistema coordenado cualquiera. Es conveniente definir entonces

$$\nabla_\nu v^\mu = v_{;\nu}^\mu := v_{,\nu}^\mu + v^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu, \quad (1.13)$$

como la derivada covariante de un vector v^μ . La derivada covariante no solo actúa sobre campos vectoriales y escalares, si no en general en cualquier tensor. Las componentes de la derivada covariante de un vector \mathbf{v} son entonces $v_{;\mu}^\alpha$, mismas que corresponden a las componentes de un tensor. De esta manera:

$$v_{\mu;\nu} = g_{\mu\alpha} v_{;\nu}^\alpha = (g_{\mu\alpha} v^\alpha)_{;\nu} = g_{\mu\alpha} v_{;\nu}^\alpha + v^\alpha g_{\mu\alpha;\nu}. \quad (1.14)$$

Debido a la compatibilidad métrica, podemos imponer las condiciones

$$g_{\mu\alpha;\nu} = 0, \quad \text{y} \quad g_{;\nu}^{\mu\alpha} = 0. \quad (1.15)$$

Usando este último hecho y aplicando la derivada covariante al tensor métrico llegamos a

$$g_{\mu\alpha,\nu} = g_{\beta\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + g_{\mu\beta}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}. \quad (1.16)$$

De forma que si se hacen algunas permutaciones en los índices tenemos

$$g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu} = g_{\beta\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + g_{\mu\beta}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + g_{\beta\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} + g_{\nu\beta}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} - g_{\beta\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - g_{\alpha\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\beta}, \quad (1.17)$$

así que usando la simetría de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \Gamma_{\nu\mu}^{\beta}$ se obtiene:

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\mu}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu}). \quad (1.18)$$

§1.4 Ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein.

Las ecuaciones de campo de la gravitación relativista de Einstein fueron primeramente producidas por Hilbert (1915) utilizando un principio variacional. En su construcción Hilbert utilizó la idea de Einstein de que la presencia de materia produce curvatura en el espacio y por lo tanto gravitación. En otras palabras, las variaciones nulas de una acción gravitacional S_g más una acción de materia S_m deben producir las ecuaciones de campo buscadas. En un espacio-tiempo curvo descrito por coordenadas arbitrarias x^{α} , la densidad lagrangiana \mathcal{L} es función del campo gravitacional $g_{\alpha\beta}$ y de sus derivadas $g_{\alpha\beta,\lambda}$. En otras palabras (Landau & Lifshitz, 1975)

$$S_g = \int \mathcal{L}(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\gamma}; x^{\mu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.19)$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\alpha\beta}$. La acción anterior es una integral escalar extendida a todo el espacio y a todos los valores de la coordenada temporal entre dos valores dados. Las ecuaciones de campo gravitacional deben contener derivadas de los "potenciales" de orden no superior al segundo (de manera análoga a como ocurre en el caso del campo electromagnético.) Y debido a que las ecuaciones de campo se obtienen variando la acción, es necesario que el integrando contenga derivadas de las $g_{\mu\nu}$ de orden no superior al primero; de esta manera el escalar en el integrando debe contener solamente el tensor $g_{\mu\nu}$ y las cantidades $\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}$. Existe un escalar que cumple con todo lo anterior, el

escalar de curvatura $R := R^\mu{}_\mu^*$ que si bien además de contener el tensor $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas primeras y segundas es lineal respecto a estas. De esta maneas las variaciones de la parte geométrica implican que:

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \int \delta(\sqrt{-g}R)d^4x = \int \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})d^4x \\ &= \int (\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}))d^4x.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Y como:

$$\frac{g_{,\nu}}{g} = g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu}, \quad (1.21)$$

entonces

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Dado que el tensor de Ricci está dado por:

$$R_{\nu\rho} = \Gamma_{\alpha\nu,\rho}^\alpha - \Gamma_{\nu\rho,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha\Gamma_{\nu\rho}^\mu, \quad (1.23)$$

entonces si escogemos un sistema de coordenadas localmente plano, los símbolos de Christoffel se anulan (mas no sus derivadas) y por lo tanto:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha. \quad (1.24)$$

Así:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha. \quad (1.25)$$

En dicho sistema coordenado, la métrica es plana y entonces:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha(g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = \partial_\alpha\omega^\alpha, \quad (1.26)$$

donde hemos definido el vector $\omega^\alpha := g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, de esta manera la cantidad $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ representa la divergencia de dicho vector.

Para poder obtener la expresión anterior en un sistema arbitrario, es factible cambiar

*El escalar de curvatura es la contracción el tensor de Ricci que a su vez es una traza del tensor de Riemann

las derivadas por derivadas covariantes, obteniendo así:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \omega_{;\alpha}^{\alpha}. \quad (1.27)$$

Esta relación es válida en cualquier sistema de referencia debido a que la ecuación resultante es una ecuación tensorial la cual representa la divergencia covariante de un vector ω^{α} y por lo tanto:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\omega^{\alpha})_{;\alpha}. \quad (1.28)$$

En otras palabras:

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int (\sqrt{-g}\omega^{\alpha})_{;\alpha}d^4x. \quad (1.29)$$

Haciendo uso del teorema de Gauss, la integral anterior es una integral de ω^{α} sobre la hipersuperficie que rodea el espacio-tiempo completo. Exigiendo que los campos físicos y sus derivadas se anulen a distancias y tiempos infinitos, el término de frontera llega a anularse. Por lo tanto la variación de la parte geométrica de la acción es

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}d^4x. \quad (1.30)$$

Por otro lado, la acción de materia está dada por (Mendoza & Silva, 2021)

$$S_m = \pm \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_{\text{matt}}\sqrt{-g}d^4x, \quad (1.31)$$

donde $\mathcal{L}_{\text{matt}}$ representa el Lagrangiano de materia. El tensor de energía-momento está definido a través de la variación δS_m de la acción de materia (1.31) con respecto a $\delta g^{\alpha\beta}$ y está dado por (Mendoza & Silva, 2021)

$$T_{\alpha\beta} = \pm \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{matt}})}{\delta g^{\alpha\beta}}. \quad (1.32)$$

Con este último resultado la variación de S_m queda como (Landau & Lifshitz, 1975)

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = -\frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \quad (1.33)$$

Por lo tanto, del principio de mínima acción se encuentra

$$-\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (1.34)$$

y en vista de que $\delta g^{\mu\nu}$ es arbitrario si sigue que

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.35)$$

las cuales son las ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein para el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$. Con la ecuación (1.35) y con las identidades de Bianchi

$$R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma} + R_{\mu\nu\gamma\alpha;\beta} + R_{\mu\nu\beta\gamma;\alpha} = 0, \quad (1.36)$$

se puede mostrar que el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ satisface (Poisson, 2004):

$$G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.37)$$

De esta manera, usando las ecuaciones de campo de Einstein (1.35) se obtiene también:

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.38)$$

Capítulo 2

Hipersuperficies

Una hipersuperficie singular es una tres-hipersuperficie a través de la cual las variables de campo que caracterizan a un medio y sus derivadas sufren una discontinuidad. Cuando los campos mismos son continuos pero algunas de sus derivadas no lo son, la hipersuperficie se denomina hipersuperficie de discontinuidad débil.

La gran ventaja del concepto de hipersuperficie singular es que permite un tratamiento matemáticamente exacto de la evolución de la misma (Anile, 1990). El estudio de las hipersuperficies singulares se ha venido desarrollando durante un largo tiempo. Trabajos como los de O'Brien & Synge (1952) e Israel (1966) sentaron las bases para el análisis completo de las hipersuperficies singulares no nulas. Años más tarde fueron generalizados por Papapetrou & Hamoui (1968) cuyos resultados permitieron estudiar a detalle algunas aplicaciones físicas. La parte singular del tensor de energía-momento está relacionada con el salto de la curvatura extrínseca (o segunda forma fundamental) a través de una hipersuperficie singular (Poisson, 2004). Taub (1980) utilizó el formalismo de la teoría de la distribución para dar una descripción general que puede ser aplicada tanto a hipersuperficies nulas como no nulas. En lo que nos interesa en este trabajo, una onda de choque gravitacional es un ejemplo de una hipersuperficie a través de la cual la primera y segunda derivada del tensor métrico presentan discontinuidades finitas a través de hipersuperficies singulares embebidas en el espacio-tiempo.

§2.1 3-hipersuperficies espaciales

Una hipersuperficie es una sub-variedad Σ tres-dimensional encajada en un espacio-tiempo \mathcal{M} cuatro-dimensional. Dicha sub-variedad puede ser como-tiempo, como-espacio o nula*. Una hipersuperficie Σ en particular está determinada por restricción en las coordenadas x^μ de la forma

$$\Phi(x^\mu) = 0, \quad (2.1)$$

para una función específica Φ , sobre dicha hipersuperficie puede ser construida de forma paramétrica

$$x^\mu = x^\mu(y^\mu), \quad (2.2)$$

donde y^μ son las coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie (Poisson, 2004).

De acuerdo a la definición (2.1), el valor de Φ varía solo en dirección ortogonal a Σ , por lo que el vector $\Phi_{,\mu}$ es un vector normal a Σ . De esta manera, podemos definir un vector normal unitario n_μ para hipersuperficies no nulas de la forma

$$n_\alpha = \frac{\epsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{1/2}}, \quad (2.3)$$

en donde el valor de ϵ es

$$n^\mu n_\mu := \epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma \text{ es como-espacio,} \\ -1 & \text{si } \Sigma \text{ es como-tiempo.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Para hipersuperficies nulas, la cantidad $g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}$ es igual a cero, por lo que en este caso el vector normal unitario no es posible definirlo como unitario. Definimos entonces la cantidad

$$k_\mu = -\Phi_{,\mu}, \quad (2.5)$$

como el vector normal a una hipersuperficie nula.† Este vector resulta ser también un vector tangente a la hipersuperficie nula Σ ya que $k^\mu k_\mu = 0$, es decir, es ortogonal a sí mismo.

En los siguientes capítulos hablaremos de ondas de choque vistas como hipersuperficies

*Para un espacio-tiempo con producto escalar $A^\mu B_\mu = -a^0 b_0 + a^i b_i$ se define un vector A^μ como-tiempo, como-espacio o nulo si su pseudo-norma es tal que $A^\mu A_\mu > 0$, $A^\mu A_\mu < 0$ o $A^\mu A_\mu = 0$ respectivamente. De esta manera, una hipersuperficie Σ en este espacio se dice que es como-tiempo, como-espacio o nula si el vector normal en cada punto de Σ es como-espacio, como-tiempo o nulo respectivamente.

†El signo menos se elige para que k^μ esté dirigido hacia el futuro cuando Φ aumente hacia el futuro.

sumergidas en espacios-tiempo con métrica $g_{\mu\nu}$ no plana. Por lo que es de suma importancia encontrar una forma de medir intervalos dentro de la hipersuperficie Σ . Para encontrar la métrica intrínseca a Σ debemos restringir el elemento de línea a desplazamientos ds_Σ confinados dentro de la sub-variedad, i.e.:

$$ds_\Sigma^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} dy^b \right) = h_{ab} dy^a dy^b, \quad (2.6)$$

en donde

$$h_{ab} := g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \quad (2.7)$$

es la métrica inducida sobre la hipersuperficie. Dicha métrica se comporta como escalar con respecto a las transformaciones $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ de las coordenadas del espacio-tiempo y como tensor bajo las transformaciones $y^a \rightarrow y^{a'}$ de las coordenadas de la hipersuperficie. Además las cantidades

$$e_a^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \quad (2.8)$$

son vectores tangentes a las curvas contenidas en Σ . De las relaciones anteriores se sigue que la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ en el caso de hipersuperficies no nulas está dada por

$$g^{\mu\nu} = \epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab} e_a^\mu e_b^\nu, \quad (2.9)$$

en donde h^{ab} es la inversa de la métrica inducida, es decir, $h^{ab} h_{bc} = \delta_c^a$. Para el caso nulo, se debe introducir en todas partes de Σ un vector nulo N^μ tal que $N_\mu k^\mu = 1$ y $N_\mu e_A^\mu = 0$. Aquí y en lo subsecuente las letras latinas mayúsculas en los índices de un tensor o vector representan coordenadas sobre la hipersuperficie Σ . Por lo tanto la métrica en este caso puede expresarse como

$$g^{\mu\nu} = -k^\mu N^\nu - N^\mu k^\nu + \sigma^{AB} e_A^\mu e_B^\nu, \quad (2.10)$$

donde σ^{AB} es la matriz inversa de σ_{AB} dada por

$$\sigma_{AB} = g_{\mu\nu} e_A^\mu e_B^\nu. \quad (2.11)$$

§2.2 Condiciones de salto en una hipersuperficie

Consideremos una sub-variedad Σ que divide el espacio-tiempo \mathcal{M} en dos regiones \mathcal{M}^+ y \mathcal{M}^- como se muestra pictóricamente en la Figura 2.1. El tensor métrico en la región

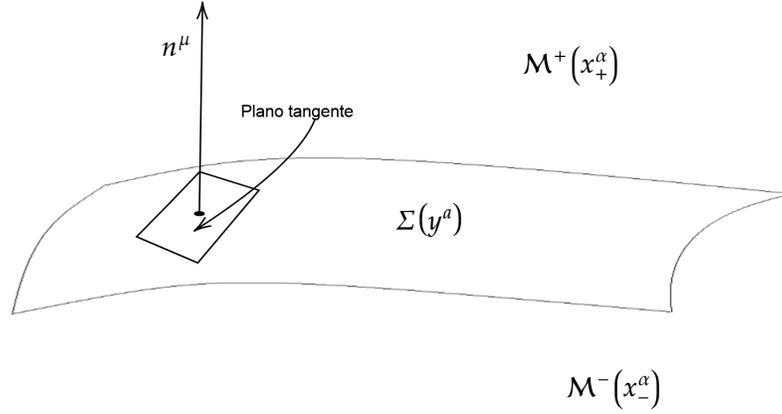


Figura 2.1: La 3-hipersuperficie Σ divide el espacio tiempo \mathcal{M} en dos partes \mathcal{M}^\pm . El vector normal a la hipersuperficie se representa por n^μ y es escogido de tal manera que apunta de \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ . Las coordenadas x_\pm^α y las y^a son las coordenadas del espacio-tiempo \mathcal{M} y las coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie respectivamente.

\mathcal{M}^+ está dado por $g_{\mu\nu}^+$ y expresado en un sistema de coordenadas x_+^μ . En \mathcal{M}^- la métrica será $g_{\mu\nu}^-$ y estará expresada en coordenadas x_-^μ . Analicemos bajo qué condiciones los dos lados de la hipersuperficie se unen adecuadamente justo en Σ y las condiciones que deben de cumplir los tensores métricos o alguna otra cantidad relacionada con la geometría de Σ . En lo subsecuente solo se tomará el caso para cuando la hipersuperficie es no-nula. Es importante mencionar además que las coordenadas locales de Σ son validas para ambos lados \mathcal{M}^\pm . Construyamos ahora un vector unitario n^μ normal a la sub-variedad Σ que apunte de \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ . Si Σ es atravesada por una congruencia de geodésicas de forma ortogonal podemos denotar como l a la distancia propia (o tiempo propio) a lo largo de las geodésicas y ajustar la parametrización de tal forma que $l = 0$ corresponde al valor para cuando las geodésicas atraviesan la hipersuperficie (Poisson, 2004)[‡]. De esta manera:

$$n_\mu = \epsilon \partial_\mu l. \quad (2.12)$$

Las condiciones de unión entre \mathcal{M}^- y \mathcal{M}^+ a través de Σ requieren el uso de la distribución escalón de Heaviside $\Theta(l)$, que toma valores $\Theta(l) = 1$ para $l > 0$, $\Theta(l) = 0$ si $l < 0$ e

[‡]En esta convención l es negativo en \mathcal{M}^- y positivo en \mathcal{M}^+

indeterminado si $l = 0$. Además (Arfken et al., 2013):

$$\Theta^2(l) = \Theta(l), \quad \Theta(l)\Theta(-l) = 0, \quad \frac{d}{dl}\Theta(l) = \delta(l), \quad (2.13)$$

donde $\delta(l)$ es la distribución delta de Dirac.

Para una función $f(x)$ que es continua en todos los puntos y continuamente diferenciable en todos los puntos excepto quizás en $x = 0$ se cumple que:

$$f(x) = f^+(x)\Theta(x) + f^-(x)\Theta(-x), \quad (2.14)$$

y por lo tanto:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df^+}{dx}\Theta(x) + \frac{df^-}{dx}\Theta(-x) + [f]\delta(x). \quad (2.15)$$

En lo sucesivo definimos *el salto* o *el brinco* de cualquier cantidad tensorial f como:

$$[f] := f(\mathcal{M}^+) - f(\mathcal{M}^-) = f^+ - f^-, \quad (2.16)$$

donde f es el valor de la cantidad f valuada en \mathcal{M}^\pm , i.e. $f^\pm = f(\mathcal{M}^\pm)$.

El tensor métrico a lo largo de una congruencia particular que atraviesa a la hipersuperficie Σ ortogonalmente está dado por:

$$g_{\mu\nu} = \Theta(l)g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-l)g_{\mu\nu}^-, \quad (2.17)$$

y su derivada es:

$$g_{\mu\nu,\alpha} = \Theta(l)g_{\mu\nu,\alpha}^+ + \Theta(-l)g_{\mu\nu,\alpha}^- + \epsilon\delta(l)[g_{\mu\nu}]n_\alpha. \quad (2.18)$$

Debido a que el lado derecho de la expresión anterior es singular y causa problemas cuando se trata de calcular los símbolos de Christoffel (generando términos proporcionales a $\Theta(l)\delta(l)$) es natural anularlas mediante la condición $[g_{\mu\nu}] = 0$. Por lo tanto usando la ecuación (2.7), la métrica inducida en Σ es continua, i.e.:

$$[h_{ab}] = 0. \quad (2.19)$$

La relación (2.19) se conoce como la primer condición de unión.

Con los resultados anteriores los símbolos de Christoffel quedan determinados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Theta(l)\Gamma_{\mu\nu}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\mu\nu}^{-\alpha}, \quad (2.20)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^{\pm\alpha}$ son los símbolos de Christoffel asociados a $g_{\mu\nu}^{\pm}$. De esta manera el tensor de Riemann se ve como

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \Theta(l)R_{\mu\nu\beta}^{+\alpha} + \Theta(-l)R_{\mu\nu\beta}^{-\alpha} + \delta(l)A_{\mu\nu\beta}^{\alpha}, \quad (2.21)$$

donde $A_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \epsilon \left([\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}] n_{\beta} - [\Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}] n_{\nu} \right)$. El término $\delta(l)A_{\mu\nu\beta}^{\alpha}$ representa una singularidad de curvatura en Σ (Poisson, 2004).

Debido a que el tensor métrico es continuo a través de Σ en las coordenadas x^{α} , las derivadas tangenciales deben ser también continuas, lo que significa que si $g_{\alpha\mu,\nu}$ es discontinuo, dicha discontinuidad deben estar dirigidas en dirección del vector normal n^{α} por lo que debe existir un vector $k_{\alpha\mu}$ tal que

$$[g_{\alpha\mu,\nu}] = k_{\alpha\mu}n_{\nu}, \quad (2.22)$$

y cuya forma explicita es

$$k_{\alpha\mu} = \epsilon [g_{\alpha\mu,\nu}] n^{\nu}. \quad (2.23)$$

Estos resultados conducen a

$$[\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}] = \frac{1}{2} (k_{\mu}^{\alpha}n_{\nu} + k_{\nu}^{\alpha}n_{\mu} + k_{\mu\nu}n^{\alpha}), \quad (2.24)$$

y por lo tanto a

$$A_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \frac{\epsilon}{2} (k_{\beta}^{\alpha}n_{\mu}n_{\nu} - k_{\nu}^{\alpha}n_{\mu}n_{\beta} - k_{\mu\beta}n^{\alpha}n_{\nu} + k_{\mu\nu}n^{\alpha}n_{\beta}). \quad (2.25)$$

Con todos estos resultados y con las ecuaciones de campo de Einstein, la expresión para el tensor de energía-momento es

$$T^{\mu\nu} = \Theta(l)T_{-}^{\mu\nu} + \Theta(-l)T_{-}^{\mu\nu} + \delta(l)S^{\mu\nu} \quad (2.26)$$

donde $S_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento superficial asociado a una delgada distribución

de materia (capa superficial o capa delgada) en Σ (Poisson, 2004). Y está dado por

$$S_{\mu\nu} := \frac{1}{8\pi} \left(A_{\mu\nu} - \frac{1}{2} A g_{\mu\nu} \right), \quad (2.27)$$

La cantidad $\delta(l)A_{\mu\nu\beta}^\alpha$ representa una singularidad de curvatura en Σ . Puede mostrarse que el tensor $S_{\mu\nu}$ está dado por (Poisson, 2004):

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}), \quad (2.28)$$

donde $S_{ab} = S_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu$, $K_{ab} := \nabla_\nu n_\mu e_a^\mu e_b^\nu$ es la curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ y $K := h^{ab} K_{ab}$. La expresión (2.28) relaciona el tensor de energía-momento superficial con el salto en la curvatura extrínseca de un lado de Σ al otro para el caso más general. De esta manera el tensor de energía-momento $T_\Sigma^{\mu\nu}$ de la delgada distribución de materia está dado por

$$T_\Sigma^{\mu\nu} = \delta(l) S^{ab} e_a^\mu e_b^\nu. e_b^\nu \quad (2.29)$$

Así pues, para que se lleve a cabo una transición suave a través de Σ se requiere que la curvatura extrínseca sea la misma en ambos lados de la hipersuperficie, i.e.

$$[K_{ab}] = 0, \quad [K] = 0, \quad (2.30)$$

lo que implicará que el tensor de Riemann completo no sea no-singular en Σ (Poisson, 2004) y que el tensor de energía-momento superficial desaparezca. En los capítulos 3 y 4 se trabaja con esta condición, mientras que para el capítulo 5 se toma en cuenta el tensor de energía-momento superficial para el análisis de horizontes nulos. La continuidad de la curvatura extrínseca a través de la hipersuperficie Σ representada en la ecuación anterior se conoce como la segunda condición de unión.

Los resultados anteriores muestran que el tensor de energía-momento en su forma de distribución está dado por

$$T^{\mu\nu} = \Theta(l) T_-^{\mu\nu} + \Theta(-l) T_-^{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

y por lo tanto utilizando la ecuación (1.42), la tercera propiedad de (2.13) y la ecuación

(2.12) se obtiene

$$0 = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \epsilon [T^{\mu\nu}] n_\mu \delta_\Sigma + \nabla_\mu T_+^{\mu\nu} \Theta(l) + \nabla_\mu T_-^{\mu\nu} \Theta(-l)., \quad (2.32)$$

Para evitar divergencias en la relación anterior es necesario establecer que:

$$[T^{\mu\nu}] n_\mu = 0. \quad (2.33)$$

De forma general, el tensor de energía-momento puede contener información de cualquier tipo de materia como sólidos y fluidos que puedan ser caracterizados como medios continuos (Ramos-Sánchez & Vidal, 2018). El tipo de fluido más simple de describir es el fluido perfecto. Se define un fluido perfecto como un fluido compuesto de partículas en el cual no hay conducción de calor ni viscosidad. Para que el tensor de energía-momento de un fluido perfecto sea válido para marcos de referencia en movimiento en cualquier espacio-tiempo, puede mostrarse que (Landau & Lifshitz, 1987)

$$T^{\mu\nu} = (e + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

donde u^μ es la cuatro-velocidad del fluido, ρ la densidad de energía y p la presión. Las cantidades termodinámicas como la densidad de energía total e , i.e. la suma de la densidad de energía en reposo más la densidad de energía interna del fluido, la presión p , la densidad de masa ρ , la entalpía por unidad de volumen ω , la entropía por unidad de volumen σ , etc. son medidas en el sistema de referencia propio del fluido en cuestión (Landau & Lifshitz, 1987).

Siguiendo un razonamiento similar al hecho para el tensor de energía-momento, usando la ecuación de continuidad:

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0 \quad (2.35)$$

se deduce la expresión para el salto en la densidad de materia del fluido que interactúa con la hipersuperficie Σ .

$$[\rho u^\mu] n_\mu = 0. \quad (2.36)$$

Capítulo 3

Ondas de choque hidrodinámicas no-relativistas

En un fluido pueden llegar a crearse distintas superficies de discontinuidad: ondas de choque y discontinuidades de contacto. Esencialmente algunas de las cantidades hidrodinámicas de un fluido cambian de manera discontinua a medida que el fluido cruza dichas superficies. Debido entonces a que las superficies de discontinuidad producen saltos en las cantidades hidrodinámicas, se deben cumplir ciertas condiciones de frontera no-arbitrarias que deben satisfacer las ecuaciones de conservación de masa, energía y momento (Landau & Lifshitz, 1987). El resultado inmediato de esto es que una onda de choque es una discontinuidad normal a la superficie y la discontinuidad tangencial produce un cambio en las cantidades hidrodinámicas de manera tangencial. (Landau & Lifshitz, 1987).

§3.1 Ecuaciones conservativas no-relativistas

Las ecuaciones de la hidrodinámica no-relativistas y relativistas, incluso en espacio-tiempo curvos son ecuaciones conservativas las cuales satisfacen:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S}, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{q} , \mathbf{F} y \mathbf{S} representan respectivamente carga, flujo y fuente. Se observa en la ecuación (3.1) que si \mathbf{q} es un escalar entonces \mathbf{S} también lo es y \mathbf{F} es un vector. Sin embargo, si \mathbf{q} es un vector (tensor de rango 1) entonces \mathbf{S} también es un vector pero el flujo \mathbf{F} es un

tensor de rango 2 y así sucesivamente. Para el caso de hidrodinámica de un fluido ideal, i.e. sin viscosidad ni conducción de calor, la fuente $\mathbf{S} = 0$. En general en hidrodinámica no-relativista \mathbf{q} y \mathbf{F} de la ecuación (3.1) son (Landau & Lifshitz, 1991):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \epsilon + \frac{1}{2}v^2 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + pI \\ \mathbf{v}(\epsilon + p) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

donde ρ es la densidad del fluido, p es la presión, \mathbf{v} su velocidad y ϵ es la energía interna específica (energía interna por unidad de masa). La forma más sencilla de calcular las condiciones de salto a través de una discontinuidad es considerando un sistema de referencia en el cual la superficie de discontinuidad esté en reposo. Es claro entonces que en dicho sistema los flujos deben mantenerse constantes a través de la superficie de discontinuidad (Landau & Lifshitz, 1991) *, es decir:

$$[\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}] = 0, \quad (3.4)$$

es decir,

$$\mathbf{F}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 - \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0 \quad (3.5)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican el lado derecho e izquierdo de la superficie de discontinuidad respectivamente. De esta manera, para un fluido uni-dimensional cartesiano en donde el vector normal es en la dirección x de tal forma que $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_x$, con \mathbf{e}_x un vector unitario en la dirección x las condiciones de salto son:

$$[\rho v_x] = 0, \quad (3.6)$$

*La manera más formal de calcular las condiciones de salto a través de una onda de choque para un espacio-tiempo plano consiste en utilizar un diagrama espacio-tiempo (tipo Minkowski) para aprovechar de manera útil el teorema de la divergencia alrededor de una superficie que contenga a la onda de choque en el límite en que dicha superficie tiende a cero. Sin embargo, como se verá más adelante la forma más moderna y cómoda para realizar esto es utilizando el vector normal a la onda de choque y proyectar la ecuación de conservación en la dirección de dicho vector.

$$\left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right) \right] = 0 \quad (3.7)$$

y

$$[p + \rho v_x^2] = 0. \quad (3.8)$$

§3.2 Discontinuidades tangenciales y ondas de choque

De la ecuación (3.6) se sigue que:

$$\rho_1 v_{x1} = \rho_2 v_{x2}, \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.6)-(3.8) forman un sistema completo de condiciones de frontera en la superficie de discontinuidad (Landau & Lifshitz, 1987). De este sistema surgen dos posibles escenarios. El primero es aquel en el cual no existe un flujo de masa a través de la superficie, es decir:

$$\rho_1 v_{x1} = \rho_2 v_{x2} = 0. \quad (3.10)$$

Dado que ρ_1 y ρ_2 son distintos de cero entonces $v_{x1} = v_{x2} = 0$. La ecuación (3.8) junto con este último resultado significa que $p_1 = p_2$, es decir, la componente de la velocidad normal y la presión del fluido son continuas en la superficie de discontinuidad, mientras que las velocidades tangenciales v_y y v_z junto con la densidad y demás cantidades termodinámicas a excepción de la presión son discontinuas en la superficie. A este tipo de superficies de discontinuidad se les conoce como discontinuidades tangenciales (Landau & Lifshitz, 1987). Resulta que las discontinuidades tangenciales en general son inestables y producen turbulencia a menos que las velocidades tangenciales sean también continuas. Dicha inestabilidad se le conoce como la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (Landau & Lifshitz, 1975). En el caso estable, cuando la presión y la velocidad tangencial son continuas, (pero no así la densidad de masa ni ninguna otra cantidad termodinámica) a través de la superficie de discontinuidad se dice que la superficie es una discontinuidad de contacto.

Por otro lado, cuando sí existe un flujo de masa a través de la superficie v_{x1} y v_{x2} son distintos de cero. Y dado que el flujo de momento por unidad de área es $p n_i + \rho v_i v_k n_k$, entonces

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0, \quad (3.11)$$

y por lo tanto de las ecuaciones (3.6) y (3.11) se llega a

$$[v_y] = 0, \quad [v_z] = 0, \quad (3.12)$$

es decir, la velocidad tangencial es continua en la superficie de discontinuidad. La presión, la densidad y la velocidad normal, sin embargo, son cantidades discontinuas, mismas que están relacionadas por (3.6)-(3.8). A este tipo de discontinuidad se le conoce como onda de choque.

§3.3 Adiabática del choque

Debido a que las componentes tangenciales de la velocidad del fluido son continuas en una onda de choque, es posible tomar un sistema de referencia en el cual la onda de choque se encuentre en reposo y las componentes tangenciales de la velocidad del fluido sean cero en ambos lados (Landau & Lifshitz, 1987). De esta manera las ecuaciones (3.6)-(3.8) pueden ser escritas como

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 := j, \quad (3.13)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (3.14)$$

$$\frac{v_2^3}{2} + \omega_1 = \frac{v_1^3}{2} + \omega_2, \quad (3.15)$$

donde la componente normal de la velocidad v_x se ha escrito como v y j presenta la densidad del flujo de masa en la superficie de discontinuidad. Usando los volúmenes específicos $V_1 := 1/\rho_1$ y $V_2 := 1/\rho_2$ de (3.13) se sigue que:

$$v_1 = jV_1, \quad v_2 = jV_2, \quad (3.16)$$

y sustituyendo en (3.14) se obtiene

$$j^2 = \frac{(p_2 - p_1)}{(V_1 - V_2)}. \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.17) en $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$ se llega a que:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \quad (3.18)$$

La ecuación (3.15) puede ser escrita como

$$\omega_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2} = \omega_2 + \frac{j^2 V_2^2}{2}, \quad (3.19)$$

de manera que si sustituimos j^2 de (3.17) en la relación anterior se obtiene:

$$\omega_1 - \omega_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0, \quad (3.20)$$

o bien:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0, \quad (3.21)$$

donde hemos usado el hecho que la entalpía específica ω está dada por:

$$\omega = \epsilon + p/\rho. \quad (3.22)$$

La ecuación (3.21) es conocida como la adiabática del choque no-relativista o adiabática de Hugoniot (Landau & Lifshitz, 1987) y relaciona la presión y velocidad post-choque p_2 y v_2 para una p_1 y v_1 dadas. En la gráfica (3.1) se observa la curva de la adiabática de choque que pasa por el punto dado (p_1, v_1) correspondiente al estado del fluido en la zona pre-choque (punto inicial). En el siguiente capítulo se describe la generalización de éste y otros resultados para el caso relativista.

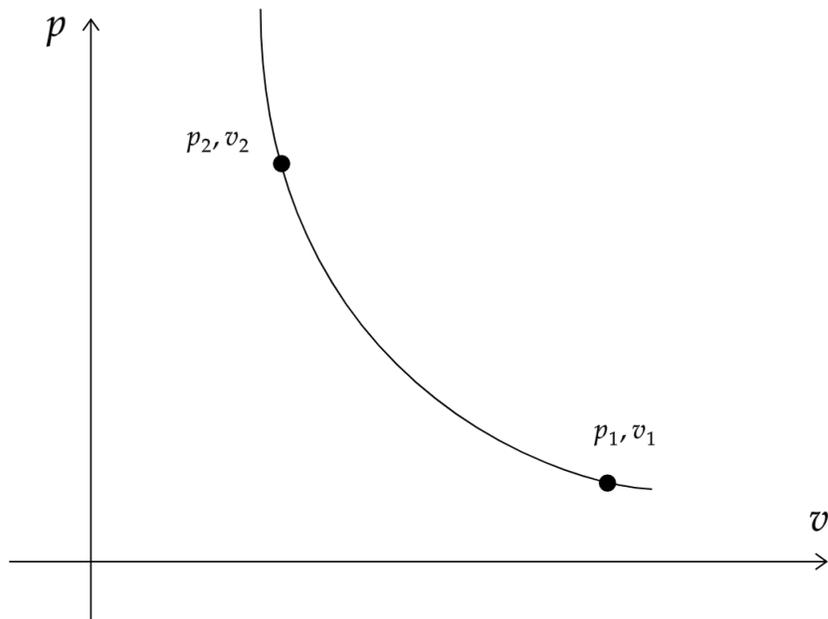


Figura 3.1: En el plano $p - V$ la adiábata de Hugoniot se representa por medio de una línea curva que pasa por el punto dado (p_1, v_1) correspondiente al estado del fluido en la zona pre-choque (punto inicial). Los valores de (p_2, v_2) en la zona post-choque son mayores a los del punto inicial debido a que la entropía se incrementa a través de la onda de choque como consecuencia de la segunda ley de la termodinámica (Landau & Lifshitz, 1987).

Capítulo 4

Ondas de choque relativistas

Como se discutió en el capítulo anterior, uno de los fenómenos físicos más importantes en hidrodinámica que ocurren en un fluido el cual se mueve a velocidades supersónicas, es la presencia de ondas de choque, i.e. discontinuidades que aparecen en sus cantidades hidrodinámicas. Estas discontinuidades satisfacen ciertas condiciones de frontera en el fluido que las rodea (cf. ecuaciones (3.13)-(3.15)). Dado su tratamiento infinitesimal, las discontinuidades pueden ser estudiadas como superficies de discontinuidad tres-dimensionales en un espacio-tiempo \mathcal{M} cuatro-dimensional. En este capítulo se discuten las condiciones de salto necesarias que deben cumplir las ondas de choque y las discontinuidades de contacto, de manera que se cumplan las leyes de conservación en dinámica de fluidos relativista.

Debido a que las cantidades hidrodinámicas presentan un salto en la superficie de discontinuidad, deben cumplirse condiciones de frontera no-arbitrarias satisfaciendo las ecuaciones de conservación de un lado y del otro de la discontinuidad (Landau & Lifshitz, 1987). El origen de estas discontinuidades son los grandes cambios en los gradientes de densidad, presión y velocidad del fluido, es decir, son estas las cantidades físicas que varían discontinuamente cuando cruzan las superficies de discontinuidad. En hidrodinámica relativista, se puede eyectar un fluido lo suficientemente fuerte de tal forma que su velocidad pueda alcanzar valores cercanos a los de la velocidad de la luz. Los gradientes de presión son tan grandes debido a la divergencia abrumadora entre las velocidades del fluido y el medio circundante, generando de este modo una superficie de discontinuidad delante del fluido eyectado (pre-choque) denominado onda de choque (Figura 4.1).

En este capítulo, se abordará el estudio de las ondas de choque hidrodinámicas en espacios-tiempo curvos, y se describirán los pasos a seguir para alcanzar dicho objetivo. En primer

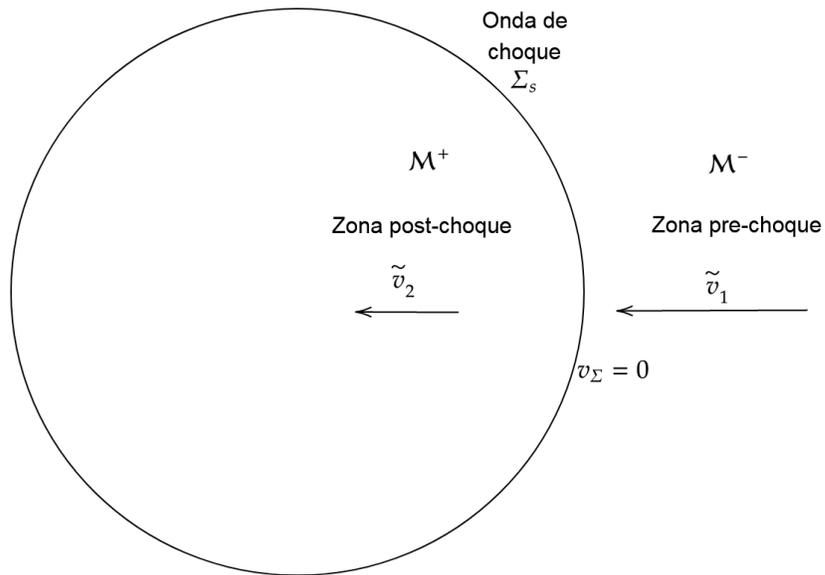


Figura 4.1: Superficie de discontinuidad fuerte (onda de choque esférica) formada al eyectar de manera isotrópica un fluido a velocidades relativistas en un medio circundante. M^- y M^+ representan la zona pre y post-choque respectivamente, \tilde{v}_1 la velocidad del fluido en M^- , \tilde{v}_2 en M^+ , v_Σ la velocidad de la onda de choque y Σ la onda de choque.

lugar, se explorarán las condiciones de salto para una onda de choque en un espacio-tiempo plano. Este primer paso tiene como objetivo establecer una base teórica sólida sobre las ondas de choque en un espacio-tiempo simple y fácilmente modelable, lo cual permitirá una comparación posterior con el caso de un espacio-tiempo curvo. Posteriormente, se generalizarán las condiciones de salto para un fluido no autogravitante en un espacio-tiempo de fondo esféricamente simétrico con simetría espacial $O(3)$ y estático. Este paso es esencial para entender cómo los efectos gravitatorios afectan las ondas de choque en un espacio-tiempo curvo. En tercer lugar, se trabajará en el espacio-tiempo plano en un sistema de referencia en el cual la velocidad del fluido en la zona pre-choque es cero. En este caso, se calculará la dependencia de la velocidad post-choque con respecto a la velocidad de la onda de choque. Es importante entender cómo se relacionan la velocidad de la onda de choque y la velocidad del fluido antes y después del choque. Para continuar, se procederá de manera análoga al paso tres, pero en un espacio-tiempo curvo con las características antes mencionadas. Finalmente, se resolverá de forma analítica un ejemplo en el espacio-tiempo de Schwarzschild con dos diferentes ecuaciones de estado para el fluido de prueba no autogravitante. Este paso permitirá una aplicación concreta de los conocimientos adquiridos en los pasos anteriores y una mejor comprensión de la física de las ondas de choque en un espacio-tiempo curvo. Se presenta de esta manera un plan de trabajo detallado para el estudio de las ondas de choque hidrodinámicas en espacios-tiempo curvos. A través de los diferentes pasos propuestos, se espera obtener un mayor conocimiento sobre la dinámica de los fluidos en condiciones extremas y su relación con las propiedades geométricas del espacio-tiempo curvo.

§4.1 Ecuación de estado

La ecuación de estado más general para un gas politrópico relativista en donde $p \propto \rho^\gamma$ que experimenta un proceso adiabático es (Tooper, 1965):

$$e = \rho c^2 + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad (4.1)$$

donde e es la densidad de energía por unidad de volumen total específica, ρ es la densidad de masa que satisface la ecuación de continuidad, p es la presión y γ es el índice politrópico del fluido. En la ecuación (4.1) existen dos límites de gran interés al momento de estudiar algunos fenómenos astrofísicos. El primer límite es el caso para el cual la densidad de masa

en reposo del fluido es mucho mayor que su presión, i.e. $\rho c^2 \gg p$, y por lo tanto la ecuación de estado de este gas “frío” se ve como:

$$e = \rho c^2. \quad (4.2)$$

El segundo límite y el que nos interesa estudiar a nosotros en este trabajo es en el cual la presión es mucho mayor que la densidad de masa en reposo del fluido, es decir, $p \gg \rho c^2$. La relación en (4.1) obtenida con esta aproximación es conocida como la ecuación de estado de Bondi-Harrison-Thorne-Wakano-Wheeler para flujos ultra-relativistas (Tooper, 1965):

$$e = \frac{p}{\gamma - 1}. \quad (4.3)$$

Por otro lado, de la definición de la velocidad del sonido en un fluido (Landau & Lifshitz, 1987; Mendoza, 2000)

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\sigma, \quad (4.4)$$

se sigue que para este caso de gas caliente, $c_s^2 = \gamma - 1$. De esta manera la ecuación (4.3) puede ser expresada en términos de la velocidad del sonido en el fluido como:

$$p = c_s^2 e. \quad (4.5)$$

Y el caso más sencillo a analizar es en el cual la velocidad del sonido c_s^2 permanece constante en ambos lados de una onda de choque.

§4.2 Condiciones de salto en espacio plano

Las condiciones de salto para un fluido en hidrodinámica no-relativista están dadas por las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot mostradas en las ecuaciones (3.13)-(3.15), las cuales describen la relación entre las cantidades hidrodinámicas en ambos lados de la onda de choque. Taub (1948) generalizó tales condiciones para el caso relativista en un espacio-tiempo plano, con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. En el caso general, todas las parte de una onda de choque están en movimiento y tienen velocidades distintas de cero tal como se muestra en la figura (4.2) . Como se verá más adelante para resolver las ecuaciones de salto se considerará un marco de referencia en el cual la onda de choque está en reposo. De esta manera, la hipersuperficie Σ u onda de choque, divide el espacio-tiempo en una región

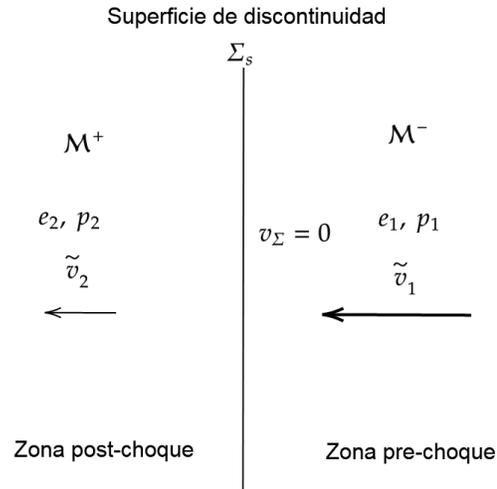


Figura 4.2: La hipersuperficie Σ en un espacio-tiempo \mathcal{M} es una 3-hipersuperficie de discontinuidad que hace que el fluido pase de la zona pre-choque a la zona post-choque.

pre-choque \mathcal{M}^- y en una post-choque \mathcal{M}^+ , como se muestra en la Figura 4.2. De forma tal que el fluido se mueve de la zona pre-choque y pasa por Σ hacia la zona post-choque. Por simplicidad como mencionamos anteriormente, escojamos un sistema de referencia tal que $v_\Sigma = 0$ y así la 4-velocidad de una partícula de fluido específica está dada por:

$$u^\mu = \Gamma(1, v, 0, 0), \tag{4.6}$$

donde se considera que el flujo se mueve únicamente en una dirección normal a Σ_s y v representa la velocidad en esa dirección. El factor de Lorentz asociado a v está dado por $\Gamma = 1/(1 - v^2)^{1/2}$. De la expresión para el tensor de energía-momento (2.34), se tiene que T^{0i} representa el vector de flujo de energía, $\text{diag}(T_{ij})$ es el tensor de flujo de 3-momento y nu^μ es el 4-vector de flujo de partículas. Debido a la continuidad de los respectivos flujos

a través de la superficie Σ_s se obtiene que:

$$(N_\mu u^\mu) = u^1, \quad (4.7)$$

y

$$(N_\mu T^{\mu\nu}) = (T^{\nu 1}) = [\omega u^\nu u^1 + p g^{\nu 1}] = 0, \quad (4.8)$$

donde N_μ es un vector normal a Σ_s . De este modo, para las componentes 00 y 01 se tiene

$$[n u^1] = [n \gamma v] = 0, \quad (4.9)$$

$$[T^{11}] = [\omega u^1 u^1 + p g^{11}] = [\omega v^2 \Gamma^2 + p] = 0, \quad (4.10)$$

y

$$[T^{01}] = [\omega u^0 u^1 + p g^{01}] = [\omega v \Gamma^2] = 0, \quad (4.11)$$

de tal forma que

$$\frac{v_1 \Gamma_1}{\mathcal{V}_1} = \frac{v_1 \Gamma_1}{\mathcal{V}_2} := j, \quad (4.12)$$

$$\omega_1 v_1^2 \Gamma_1^2 + p_1 = \omega_2 v_2^2 \Gamma_2^2 + p_2, \quad (4.13)$$

y

$$\omega_1 v_1 \Gamma_1^2 = \omega_2 v_2 \Gamma_2^2, \quad (4.14)$$

donde $\mathcal{V}_{1,2} := 1/n_{1,2}$ representa el volumen por partícula asociado a las regiones 1 y 2 respectivamente y j es el flujo de masa. Las condiciones (4.9) y (4.10) implican que las velocidades tangenciales u^2 y u^3 a la onda de choque son continuas. Con las ecuaciones (4.12) y (4.14) se deduce que el flujo del número de partículas j está dado por:

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{\omega_1 \mathcal{V}_1^2 - \omega_2 \mathcal{V}_2^2}. \quad (4.15)$$

La manipulación algebraica de las ecuaciones (4.12)-(4.14) conlleva a la siguiente relación entre las variables termodinámicas en ambos lados de la onda de choque:

$$\omega_1^2 \mathcal{V}_1 - \omega_2^2 \mathcal{V}_2 + (p_2 - p_1)(\omega_1 \mathcal{V}_1^2 + \omega_2 \mathcal{V}_2^2) = 0, \quad (4.16)$$

conocida como la adiabática de choque de Taub (1948). Esta ecuación junto con una ecuación de estado y fijando el estado de la región pre-choque puede representarse en un

plano $p - \omega\mathcal{V}$, donde el lugar geométrico de todos los estados post-choque pueden ser conectados con el estado pre-choque a través de una onda de choque. De esta forma, dado un estado (p_1, \mathcal{V}_1) , la adiabática del choque da una relación entre p_2 y \mathcal{V}_2 . Es posible también deducir las velocidades del fluido en ambos lados del choque de las ecuaciones (4.13) y (4.14). Usando estas ecuaciones y haciendo el cambio de variable $v = \tanh(\phi)$ y $\Gamma = \cosh(\phi)$ se obtiene (Landau & Lifshitz (1987), véase Apéndice A):

$$v_1^2 = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}, \quad v_2^2 = \frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)}, \quad (4.17)$$

con una velocidad relativa v_{12} entre estas velocidades dada por:

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(e_2 + p_2)(e_2 + p_1)}}, \quad (4.18)$$

de acuerdo a la regla de adición de velocidades relativistas. Además de que se cumple la relación

$$v_1 v_2 = \frac{p_2 - p_1}{e_2 - e_1}. \quad (4.19)$$

A las cantidades discontinuas en el choque se les tiene que agregar la entropía por unidad de volumen σ la cual solo puede crecer a lo largo de la superficie de discontinuidad como consecuencia de la segunda ley de la termodinámica. En Landau & Lifshitz (1987) se muestra que la onda de choque es una onda de compresión, es decir $p_2 > p_1$ siempre y cuando el factor de compresibilidad

$$\left(\frac{\partial^2(\omega\mathcal{V}^2)}{\partial p^2} \right)_{\sigma\mathcal{V}} > 0, \quad (4.20)$$

lo cual ocurre siempre para un sistema físico. De esta manera se cumple que $v_1 > v_2$ y $\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2$ cuando $p_2 > p_1$. Es decir, la desigualdad (4.20) se cumple cuando la onda de choque satisface

$$p_2 > p_1, \quad \mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2 \quad y \quad v_1 > v_2. \quad (4.21)$$

Se puede mostrar también bajo argumentos generales sobre la estabilidad de las ondas de choque, para cualesquiera que sean las condiciones termodinámicas del fluido que el flujo

pre-choque es supersónico y el post-choque subsónico, es decir:

$$v_1 > c_{s1}, \quad v_2 < c_{s2}, \quad (4.22)$$

donde $c_{s1,2}$ representa las velocidades del fluido en los medios 1, 2. Todos estos resultados se encuentran en un marco de referencia en el cuál la onda de choque se encuentra en reposo, y es por eso que es posible encontrar expresiones para la velocidad del flujo en ambos lados de Σ . Además, estos resultados se basan en la suposición de una métrica tipo Minkowski*.

§4.3 Condiciones de salto en espacio-tiempo curvo

En el capítulo 2 se vio que en relatividad general las condiciones de salto están determinadas por las ecuaciones (2.33) y (2.36). Estas ecuaciones dan información de la hidrodinámica del problema y de la geometría de la hipersuperficie Σ pues se considera el vector normal n^μ . Si a todo esto se le agrega una ecuación de estado para el fluido que se desea estudiar, se podrán entonces determinar los saltos en las cantidades hidrodinámicas tales como la densidad, la presión y las velocidades de los fluidos. Uno de los objetivos de esta tesis es generalizar los resultados de las ondas de choque no-relativistas al caso de ondas de choque relativista para una métrica arbitraria diagonal que represente un espacio-tiempo esféricamente simétrico, con simetría espacial $O(3)$ y estacionario, tal que:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (4.23)$$

cuyo tensor métrico asociado es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

*Sin embargo, es posible encontrar condiciones de salto en fluidos con simetría $O(3)$. Esta construcción realizada por McKee & Colgate (1973) la cual fue basada en los cálculos primeramente hechos en Johnson & McKee (1971) se basa en considerar la línea de mundo de la onda de choque trazada en el espacio-tiempo de Minkowski y las ecuaciones de conservación hidrodinámicas.

Para esta geometría, la 4-velocidad y el vector normal a una hipersuperficie Σ esféricamente simétrica con centro en el origen de coordenadas están dados por (Ver Apéndice B):

$$u^\mu = \Gamma (N^{-1}, B^{-1}v, 0, 0), \quad (4.25)$$

y

$$n_\mu = \Gamma_\Sigma (-v_\Sigma, 1, 0, 0), \quad (4.26)$$

respectivamente, donde Γ es el factor de Lorentz asociado a la velocidad v y Γ_Σ el asociado a la velocidad v_Σ de la onda de choque. Además: $N := \sqrt{-g_{00}}$ y $B := \sqrt{g_{11}}$. Bajo estas suposiciones, las ecuaciones (2.33) y (2.36) conducen al siguiente sistema de ecuaciones (véase Apéndice B):

$$v_\Sigma [\omega\Gamma^2 - p] = \frac{N}{B} [\omega\Gamma^2 v], \quad (4.27)$$

$$v_\Sigma [v\omega\Gamma^2] = \frac{N}{B} [\omega\Gamma^2 v^2 + p], \quad (4.28)$$

$$v_\Sigma [\rho\Gamma N^{-1}] = [\rho\Gamma B^{-1}v], \quad (4.29)$$

que revela en teoría (junto a la ecuación de estado), la información de como cambian las cantidades hidrodinámicas de un lado de la hipersuperficie (zona pre-choque) al otro (zona post-choque). Por otro lado, las velocidades normales del fluido tanto delante como atrás de la onda de choque Σ están definidas por (Anile, 1990):

$$\tilde{v}_{1,2} = \frac{u^\alpha n_\alpha}{h^{\mu\nu} n_{\mu\nu}}, \quad (4.30)$$

donde $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ es un tensor de proyección en la hipersuperficie ortogonal a la 4-velocidad u^μ . Por lo que sustituyendo los valores de u^μ y n_μ , las velocidades se ven como (ver Apéndice C):

$$\tilde{v}_{1,2} = \frac{v_{1,2}B^{-1} - v_\Sigma N^{-1}}{B^{-1} - v_{1,2}v_\Sigma N^{-1}}. \quad (4.31)$$

De aquí en adelante se estudian las condiciones de salto en sistemas de referencia para los cuales algunas velocidades de los fluidos en diversas regiones se hacen cero y por lo tanto las ecuaciones son más fáciles de resolver. Para tales fines, se toma primero un sistema de referencia en el cual el fluido en la zona pre-choque se encuentra en reposo como se muestra en la Figura (4.3). En este sistema y con ayuda de la ecuación (4.31) las velocidades $\tilde{v}_{1,2}$

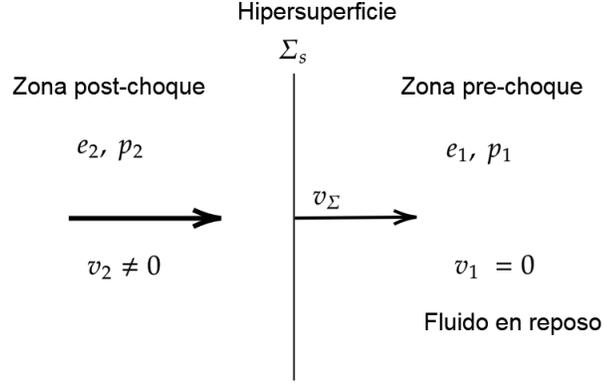


Figura 4.3: Onda de choque vista desde un sistema de referencia en el cual el fluido en la zona pre-choque se encuentra en reposo. Bajo ciertas suposiciones es posible calcular la velocidad del choque v_Σ en términos de v_2 .

se ven como:

$$\tilde{v}_1 = -\frac{B}{N}v_\Sigma, \quad (4.32)$$

y

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2 B^{-1} - v_\Sigma N^{-1}}{B^{-1} - N^{-1}v_2 v_\Sigma}, \quad (4.33)$$

que son las velocidades relativas entre la onda de choque Σ y el flujo pre-choque y el flujo post-choque respectivamente. La velocidad normal del fluido post-choque está representada por v_2 . Las condiciones de salto (4.27) son entonces:

$$\omega_2 \Gamma_2^2 (N^{-1}v_\Sigma - B^{-1}v_2) = N^{-1}v_\Sigma (e_1 + P_2) \quad (4.34)$$

$$\omega_2 \Gamma_2^2 (N^{-1}v_\Sigma - B^{-1}v_2)v_2 = B^{-1}(p_2 - p_1) \quad (4.35)$$

$$\rho_2 \Gamma_2 (N^{-1}v_\Sigma - B^{-1}v_2) = \rho_1 v_\Sigma N^{-1}. \quad (4.36)$$

§4.4 Solución de las condiciones de salto

Para ilustrar todo lo anterior de mejor manera, se consideran algunos ejemplos en los cuales es posible calcular de forma analítica la velocidad del choque Σ denotada por v_Σ para una ecuación de estado en concreto.

§4.4.1 Fluido tipo Bondi-Wheeler en el espacio-tiempo de Minkowski

Consideremos un fluido con ecuación de estado tipo Bondi-Harrison-Thorne-Wakano-Wheeler dado por la relación (4.3) en donde supondremos que c_s la velocidad del sonido en el fluido es constante y e es la densidad de energía total. En lo que concierne al marco de referencia, se trabaja en el marco inercial en el cual el fluido en la zona pre-choque permanece en reposo ($v_1 = 0$). En este marco el vector normal n_μ a la hipersuperficie Σ está dado por:

$$n_\mu = \Gamma_\Sigma(-v_\Sigma, 1, 0, 0), \quad (4.37)$$

pues $N = B = 1$. En la relación anterior v_Σ es la velocidad de propagación normal de la hipersuperficie Σ con respecto al fluido post-choque, Además $\Gamma_\Sigma = 1/(1 - v_\Sigma^2)^{1/2}$. Para este sistema de referencia los los 4-vectores de velocidad pre y post-choque son respectivamente:

$$u_1^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (4.38)$$

y

$$u_2^\mu = \Gamma_1(1, v_2, 0, 0), \quad \Gamma_1 := (1 - v_2^2)^{1/2}. \quad (4.39)$$

Aquí se ha considerado que la única dirección de propagación del fluido es en la dirección x_1 , y de esta manera

$$u_1^\mu n_\mu = -\Gamma_\Sigma v_\Sigma \quad (4.40)$$

y

$$u_2^\mu n_\mu = \Gamma_2 \Gamma_\Sigma (v_2 - v_\Sigma). \quad (4.41)$$

Dada la definición para $\tilde{v}_{1,2}$ en la ecuación (4.31) además de que $\Gamma_{1,2}^2 = 1 + (u_{1,2}^\mu n_\mu)^2$ entonces:

$$(1 + (u_1^\mu n_\mu)^2) \tilde{v}_1^2 = \Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma^2, \quad (4.42)$$

y por lo tanto:

$$\tilde{v}_1^2 = \frac{\Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma^2}{1 + \Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma^2}, \quad (4.43)$$

lo que se reduce a:

$$\tilde{v}_1^2 = v_\Sigma^2. \quad (4.44)$$

De forma similar podemos calcular:

$$(1 + (u_2^\mu n_\mu)^2) \tilde{v}_2^2 = (u_2^\mu n_\mu)^2, \quad (4.45)$$

esto es:

$$\tilde{v}_2^2 = \frac{\Gamma_2^2 \Gamma_\Sigma^2 (v_2 - v_\Sigma)^2}{1 + \Gamma_2^2 \Gamma_\Sigma^2 (v_2 - v_\Sigma)^2}, \quad (4.46)$$

y así

$$\tilde{v}_2^2 = \frac{(v_2 - v_\Sigma)^2}{(1 - v_2 v_\Sigma)^2}. \quad (4.47)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.44) y (4.47) en la ecuación (4.19)

$$\tilde{v}_2 \tilde{v}_1 = \frac{p_2 - p_1}{e_2 - e_1}, \quad (4.48)$$

y sustituyendo la ecuación de estado (4.5) en cada uno de los lados del choque se obtiene:

$$\frac{v_\Sigma (v_2 - v_\Sigma)}{1 - v_2 v_\Sigma} = \pm c_s^2, \quad (4.49)$$

es decir:

$$v_\Sigma = \frac{v_2 (1 \pm c_s^2) \pm \sqrt{(1 \pm c_s^2)^2 v_2^2 \mp 4c_s^2}}{2}. \quad (4.50)$$

Para el caso negativo de la ecuación (4.49) se observa que v_2 puede tomar cualquier valor desde 0 a 1, sin embargo, estamos interesados únicamente en el caso en el que $v_2 < c_{s2}$ y esto ocurre solamente para el caso negativo de (4.49). En este caso, para tener soluciones reales se debe cumplir $v_2 > 2c_s/(1 + c_s^2)$. La ecuación (4.49) implica que:

$$v_\Sigma^2 - (1 + c_s^2) v_2 v_\Sigma + c_s^2 = 0, \quad (4.51)$$

esto es:

$$v_\Sigma = \frac{v_2 (1 + c_s^2) + \sqrt{(1 + c_s^2)^2 v_2^2 - 4c_s^2}}{2}, \quad (4.52)$$

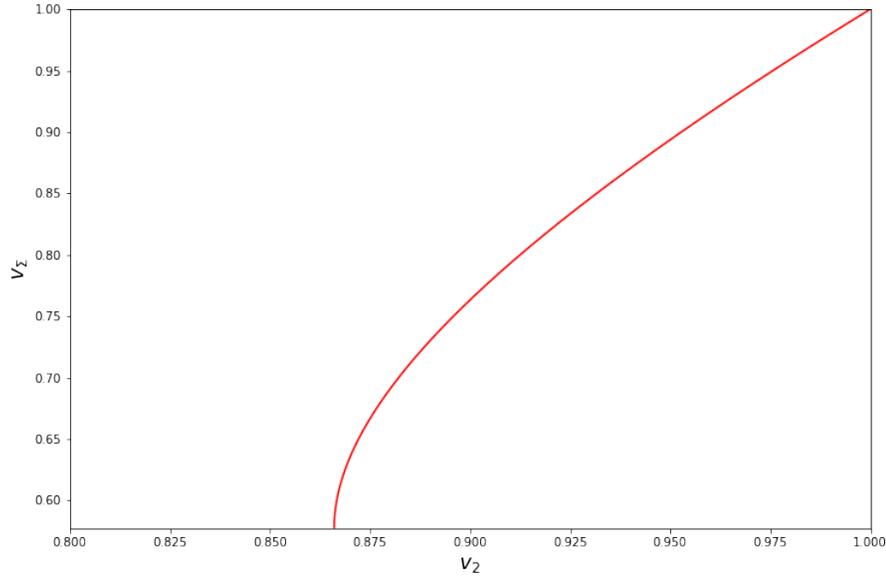


Figura 4.4: Velocidad v_Σ de la onda de choque en función de la velocidad v_2 del fluido post-choque en un espacio-tiempo de Minkowski, para un fluido ultra-relativista cuya velocidad del sonido es $c_s = 1/\sqrt{3}$.

dependencia que puede observarse en la Figura (4.4) para un valor de $c_s^2 = 1/3$. A medida que la velocidad del fluido post-choque es mayor, se incrementa también la velocidad de la onda de choque Σ . Por el otro lado, en el caso límite $v_2 = 2c_s/(1 + c_s^2)$ la velocidad v_Σ tiene un valor igual a c_s , es decir, $v_\Sigma = 1/\sqrt{3}$. Se analiza ahora la dependencia de las discontinuidades de las densidades de energía con la velocidad del fluido post-choque. De las dos primeras ecuaciones de (4.34) se tiene:

$$\frac{\omega_2 \Gamma_2^2 (N^{-1} v_\Sigma - B^{-1} v_2) v_2}{\omega_2 \Gamma_2^2 (N^{-1} v_\Sigma - B^{-1} v_2)} = \frac{B^{-1} (p_2 - p_1)}{N^{-1} v_\Sigma (e_1 + p_2)}. \quad (4.53)$$

Para el espacio-tiempo de Minkowski y considerando una ecuación de estado tipo Bondi-Wheeler (4.3) se tiene:

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{v_\Sigma v_2 + c_s^2}{c_s^2 - c_s^2 v_\Sigma v_2}, \quad (4.54)$$

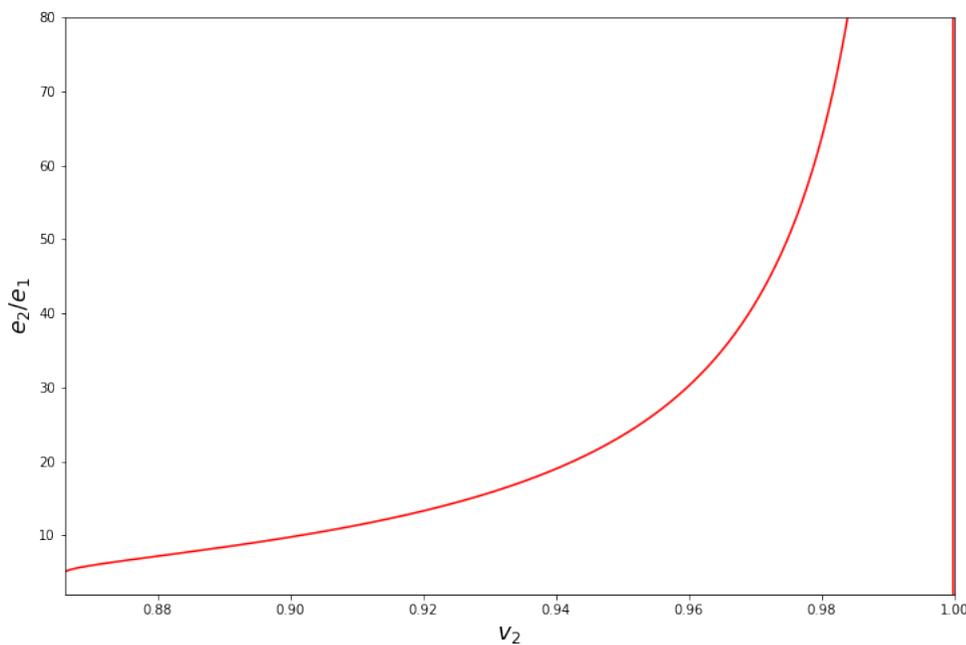


Figura 4.5: Salto en las densidades de energía e_2 y e_1 en función de la velocidad post-choque v_2 para el caso de un espacio-tiempo plano y un fluido ultra-relativista cuya velocidad del sonido es $c_s = 1/\sqrt{3}$.

cuya dependencia se muestra en la Figura (4.5). Nótese que e_2/e_1 diverge cuando $v_2 = 1/v_\Sigma$. De la expresión anterior se sigue que:

$$v_2 = \frac{c_s^2 \left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)}{v_\Sigma \left(\frac{e_1}{e_2} + c_s^2\right)}, \quad (4.55)$$

cuya expansión en serie corresponde a

$$v_2 v_\Sigma = \left(1 - 4 \left(\frac{e_1}{e_2}\right) + 12 \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2 - 36 \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^3 + O\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^4\right). \quad (4.56)$$

De tal manera que si consideramos la aproximación de choque fuerte, i.e., $(e_1/e_2) \ll 1$ podemos despreciar términos cuadráticos y de orden superior, entonces:

$$v_2 v_\Sigma = 1 - 4 \frac{e_1}{e_2}. \quad (4.57)$$

§4.4.2 Fluido tipo Bondi-Wheeler en espacio curvo

El paso natural para el ejemplo anterior es una generalización a un espacio-tiempo con simetría espacial $O(3)$. De tal forma que trabajando en el mismo sistema de referencia, los 4-vectores de velocidad están dados por

$$u_1^\mu = (1/N, 0, 0, 0) \quad (4.58)$$

y

$$u_2^\mu = \Gamma_2(N^{-1}, v_2 B^{-1}, 0, 0), \quad (4.59)$$

para las regiones pre y post-choque respectivamente. En este sistema de referencia el vector normal a la hipersuperficie Σ sigue dado por la ecuación (B.7).

Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior usando la ecuación (4.32) tenemos

$$\tilde{v}_1 = -\frac{B}{N} v_\Sigma, \quad (4.60)$$

y

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2 B^{-1} - v_\Sigma N^{-1}}{B^{-1} - N^{-1} v_2 v_\Sigma}. \quad (4.61)$$

De esta manera

$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \left(-\frac{B}{N} v_\Sigma \right) \frac{v_2 B^{-1} - v_\Sigma N^{-1}}{B^{-1} - N^{-1} v_2 v_\Sigma}, \quad (4.62)$$

lo que se transforma en

$$\frac{v_\Sigma v_2 - v_\Sigma^2 A^{-1}}{A - v_2 v_\Sigma} = \pm c_s^2, \quad (4.63)$$

con $A := N/B$. La solución a la ecuación cuadrática (4.63) para el signo positivo es:

$$v_\Sigma = A \frac{(1 + c_s^2) v_2 + \sqrt{(1 + c_s^2)^2 v_2^2 - 4c_s^2}}{2}, \quad (4.64)$$

es decir,

$$v_\Sigma = \frac{N}{B} v_\Sigma^0, \quad (4.65)$$

donde v_Σ^0 representa la velocidad de la onda de choque en el caso del espacio-tiempo de Minkowski. Por otro lado, usando las dos primeras ecuaciones de (4.34) tenemos:

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{N^{-1} v_\Sigma v_2 + B^{-1} c_s^2}{B^{-1} c_s^2 - c_s^2 N^{-1} v_\Sigma v_2}, \quad (4.66)$$

esto es el salto en las densidades de energía para un espacio-tiempo curvo con métrica con simetría espacial $O(3)$. Sustituyendo (4.65) en (4.66) se tiene finalmente:

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{v_\Sigma v_2 + c_s^2}{c_s^2 - c_s^2 v_\Sigma v_2}, \quad (4.67)$$

que es justamente el mismo valor que para el caso plano. De esta manera se tiene que:

$$v_2 = v_2^{(0)}, \quad (4.68)$$

en donde $v_2^{(0)}$ es la velocidad pre-choque para una onda de choque fuerte en el espacio de Minkowski.

§4.4.3 Fluido tipo Bondi-Wheeler en espacio-tiempo de Schwarzschild

A modo de ejemplo, consideremos el espacio-tiempo de Schwarzschild, cuyo elemento de línea está dado en coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) por (Townsend, 1997; Landau & Lifshitz, 1987; Hobson et al., 2006):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.69)$$

donde el radio de Schwarzschild $r_s := 2GM$. Cabe hacer notar que el uso de un espacio-tiempo estático no es del todo real pues el fluido en principio tendría que curvar el espacio y en general habría que resolver el problema de una manera semejante a la de Tolman Oppenheimer Volkoff (Oppenheimer & Volkoff, 1939; Oppenheimer & Snyder, 1939). Sin embargo, a primera aproximación podemos considerar al fluido como de prueba y que no modifique la estructura del espacio. Así, la velocidad de la onda de choque en función de

la velocidad pre-choque v_1 queda expresada como

$$v_\Sigma = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{v_2(1 + c_s^2) + \sqrt{(1 + c_s^2)^2 v_2^2 - 4c_s^2}}{2}. \quad (4.70)$$

La figura (4.6) muestra esta dependencia. De la ecuación (4.70) se sigue que $v_\Sigma/v_2 \rightarrow 0$ cuando $r/r_s \rightarrow 1$ y que v_Σ/v_2 tiende al valor del espacio-tiempo de Minkowski de la ecuación (4.52) cuando $r \rightarrow \infty$ pues el espacio-tiempo de Schwarzschild es asintóticamente plano. Lo anterior muestra que en un espacio-tiempo sencillo como el de Schwarzschild el cual es estático y esféricamente simétrico, la gravedad juega un rol importante en los cálculos de las velocidades del fluido y de la onda de choque misma, mientras que los saltos en las cantidades hidrodinámicas a través de la onda de choque permanecerán invariantes. Para métricas aún más complejas y fluidos que no solo se muevan en forma radial, las condiciones de salto y su dependencia con los coeficientes de la métrica harán que sus expresiones sean aún más complejas. Por esta razón, si se quiere estudiar sistemas astrofísicos reales y compararlos con datos observacionales se deben considerar las correcciones correspondientes a espacios-tiempo curvos en las ondas de choque hidrodinámicas.

§4.4.4 Ondas de choque en un fluido politrópico para un espacio-tiempo curvo

Consideremos ahora un fluido con ecuación de estado politrópica general dada por (4.1) y con $c = 1$. En este caso sustituyendo la ecuación de estado (4.1) en las condiciones de salto (4.27) y (4.28) se obtiene:

$$p_2 = \frac{N^{-1}v_\Sigma v_2 e_1 + B^{-1}p_1}{B^{-1} - N^{-1}v_\Sigma v_2}, \quad (4.71)$$

y de la ecuación (4.28) y (4.29) se obtiene:

$$\frac{1 + \epsilon_2}{\Gamma_2} = \frac{N}{B} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{v_2}{N^{-1}v_\Sigma} + 1 + \epsilon_1. \quad (4.72)$$

En el apéndice (D) se muestra que la manipulación de las ecuaciones (4.71) y (4.72) lleva a que:

$$A \left(\frac{1}{\Gamma_2^2} \right) + D \left(\frac{1}{\Gamma_2} \right) + C = 0, \quad (4.73)$$

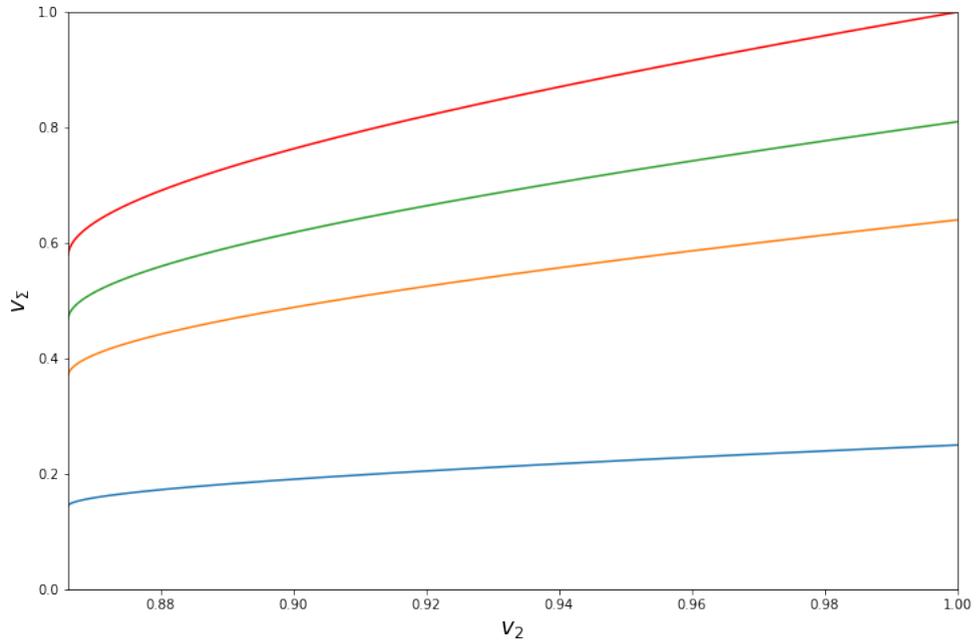


Figura 4.6: La Figura muestra la velocidad v_Σ de la onda de choque Σ en función de la velocidad post-choque v_2 para diferentes radios de Schwarzschild r_s para un fluido con ecuación de estado tipo Bondi-Wheeler con velocidad del sonido $c_s = 1/\sqrt{3}$. De arriba hacia abajo las curvas muestran esta dependencia funcional para el espacio-tiempo de Minkowski y luego para el de Schwarzschild con valores de $r/r_s = 10, 5, 2$. Es importante hacer notar que el cociente v_2/v_Σ tiende a valor del espacio de Minkowski a medida que r/r_s tiende a infinito pues el espacio-tiempo de Schwarzschild es asintóticamente plano.

donde

$$A := \left(1 + \frac{q}{\gamma-1}\right) \left(1 - \mu \left(q + \frac{1}{\gamma-1}\right)\right), \quad (4.74)$$

$$D := q - 1 \quad (4.75)$$

y

$$C := \frac{-q\gamma}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\mu\gamma}{\gamma-1}\right), \quad (4.76)$$

y además:

$$q = \frac{p_2}{p_1}, \quad \mu = \frac{p_1}{\rho_1}, \quad \xi = \frac{v_2}{v_\Sigma}. \quad (4.77)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\Gamma_1} = \frac{1 - q \pm \sqrt{(q-1)^2 - 4 \left(1 + \frac{q}{\gamma-1}\right) \left(1 - \mu \left(q + \frac{1}{\gamma-1}\right)\right) \frac{-q\gamma}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\mu\gamma}{\gamma-1}\right)}}{2 \left(1 + \frac{q}{\gamma-1}\right) \left(1 - \mu \left(q + \frac{1}{\gamma-1}\right)\right)} \quad (4.78)$$

Así, dada una q y una μ queda determinado Γ_2^{-1} y por lo tanto, la dependencia de v_Σ en función de la velocidad del fluido post-choque v_2 queda determinada. La Figura (4.7) muestra el logaritmo de la razón $q = p_1/p_2$ en función de la velocidad normal post-choque v_2 . Al igual que el ejemplo anterior, para una ecuación de estado politrópica el salto en las presiones es independiente de los coeficientes de la métrica. Sin embargo, la velocidad de la onda de choque en función de la velocidad del fluido pre-choque queda determinada por las expresiones

$$v_\Sigma = \frac{N}{B} \frac{q-1}{v_2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma-1} + q\right)} \quad (4.79)$$

y

$$\xi = \frac{\frac{1}{\Gamma_2} + \frac{\mu(q-1)}{\gamma-1} - 1}{\frac{N\mu}{B} \left(1 + \frac{q}{\gamma-1}\right)} \quad (4.80)$$

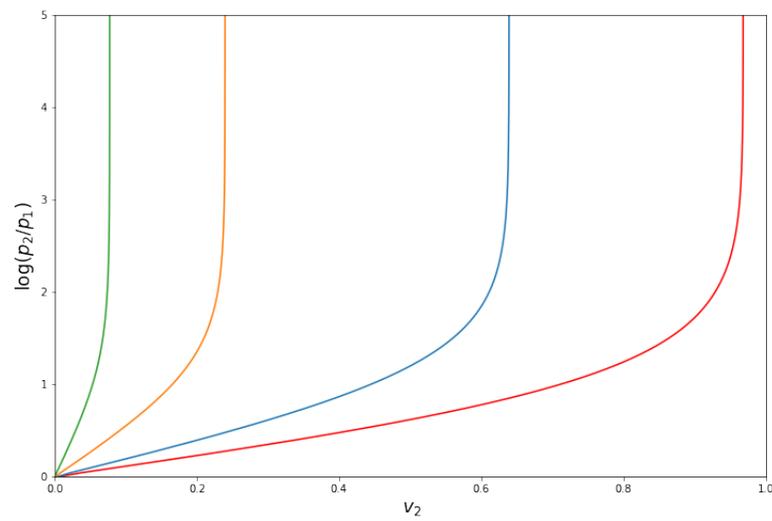


Figura 4.7: La figura muestra el logaritmo del cociente p_1/p_2 en función de la velocidad normal post-choque v_2 para un fluido con índice politrópico $\gamma = 4/3$. De derecha a izquierda las gráficas muestran valores $\mu = p_2/\rho_2 = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ respectivamente.

Capítulo 5

Ondas de choque gravitacionales

§5.1 Planteamiento

Hasta ahora en este trabajo se ha asumido la configuración más simple posible de la propagación de ondas de choque en relatividad general, a saber, el caso de un fluido de prueba en un espacio-tiempo de fondo curvo y con simetría espacial $O(3)$, para un fluido politrópico. En esta sección analizamos la parte geométrica del problema, es decir, veremos que un salto en las cantidades hidrodinámicas del fluido a través de una onda de choque produce también un salto en el escalar de Ricci. Para el caso de simetría esférica con coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) la métrica está dada por la ecuación (4.23). Así, sustituyendo esta métrica en las ecuaciones de campo de Einstein (1.35), se produce un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales acopladas (Landau & Lifshitz, 1987) dadas por

$$\frac{g_{00}}{r^2 g_{11}} \left(r \frac{g'_{11}}{g_{11}} + g_{11} - 1 \right) = \kappa g_{00}^2 T^{00}, \quad (5.1)$$

$$-\frac{\dot{g}_{11}}{r g_{11}} = \kappa g_{00} g_{11} T^{01}, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(r \frac{g'_{00}}{g_{00}} - (g_{11} - 1) \right) = \kappa g_{11}^2 T^{11}, \quad (5.3)$$

$$-\frac{1}{r g_{00} (g_{11})^2} (\ddot{g}_{11} - g''_{00} + \Phi) = \frac{2\kappa r}{g_{11}} T^{22}, \quad (5.4)$$

donde

$$\Phi := -\frac{g_{11}\dot{g}_{00}\dot{B}}{2g_{00}g_{11}} - \frac{g_{11}}{2} \left(\frac{\dot{g}_{11}}{g_{11}}\right)^2 - \frac{g'_{00}}{r} + \frac{g_{00}g'_{11}}{rg_{11}} + \frac{g_{00}}{2} \left(\frac{g'_{00}}{g_{00}}\right)^2 + \frac{g_{00}g'_{11}g'_{00}}{2g_{00}g_{11}}. \quad (5.5)$$

En las relaciones anteriores y en lo sucesivo $[\]' := \partial/\partial r$ y $[\]\dot{\ } := \partial/\partial t$, además de que $\kappa = 8\pi G$ es la constante de acoplamiento del sistema (5.1)-(5.4).

Por otro lado, el tensor métrico diagonal asociado a (4.23), puede expresarse en términos del tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski, $\eta_{\alpha\beta}$ mediante la expresión:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta}, \quad (5.6)$$

donde $(e_{\mu})^{\alpha} := e_{\mu}^{\alpha}$ es la componente α del vector e_{μ} . De esta manera el elemento de línea asociado a $g_{\mu\nu}$ puede verse como:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} e^{\alpha} e^{\beta}, \quad (5.7)$$

donde $e^{\alpha} := e_{\mu}^{\alpha} dx^{\mu}$ y $e^{\beta} := e_{\nu}^{\beta} dx^{\nu}$. Comparando (5.7) con (4.23) podemos identificar que:

$$e_{\alpha}^{\beta} = \text{diag} \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{B}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin \theta} \right), \quad (5.8)$$

razón por la cual, las componentes del tensor $T^{\mu\nu}$ asociado a un espacio-tiempo curvo con métrica diagonal en términos de las componentes del tensor de energía-momento $T_{\text{M}}^{\mu\nu}$ para el espacio-tiempo de Minkowski están dadas por:

$$T^{\alpha\beta} = e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta} T_{\text{M}}^{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

es decir,

$$T^{00} = \frac{1}{N^2} T_{\text{M}}^{00}, \quad (5.10)$$

$$T^{01} = \frac{1}{NB} T_{\text{M}}^{01}, \quad (5.11)$$

$$T^{11} = \frac{1}{B^2} T_{\text{M}}^{11}. \quad (5.12)$$

Las componentes de $T_{\text{M}}^{\mu\nu}$ son:

$$T_{\text{M}}^{00} = \frac{e + pv^2}{1 - v^2}, \quad (5.13)$$

$$T_M^{01} = \frac{(e+p)v}{1-v^2}, \quad (5.14)$$

$$T_M^{11} = \frac{ev^2+p}{1-v^2}. \quad (5.15)$$

La presión p y $v := dr/dt$ quedan determinadas por la ecuación de estado del gas a estudiar. Por otro lado la traza de las ecuaciones de campo de Einstein (1.35) es

$$-R = R - 2R = \kappa T, \quad (5.16)$$

donde $T = T_\mu^\mu = (e+p)u^\mu u_\mu + p\delta_\mu^\mu = -e + 3p$. Para el caso de un fluido con ecuación de estado tipo Bondi-Wheeler con ayuda de las ecuaciones (4.3) y (4.4), la expresión (5.16) se reduce a

$$R = \kappa(1 - 3c_s^2)e. \quad (5.17)$$

De este modo, si la densidad de energía experimenta discontinuidades en sus valores tal como ocurre en una onda de choque, el tensor de energía-momento también lo hará y con él, el escalar de curvatura del tensor de Einstein. A este tipo de discontinuidades en el tensor de Riemann y por ende en el tensor de Ricci y el escalar de curvatura se les denomina ondas de choque gravitacionales.

§5.1.1 Tensor de energía-momento superficial

En el capítulo 2 se habló de como una hipersuperficie singular surge al “unir” las geometrías de dos regiones diferentes del espacio-tiempo \mathcal{M}^+ y \mathcal{M}^- en su frontera mutua Σ , donde el tensor métrico y las coordenadas de las dos regiones coinciden, pero las segundas derivadas de la métrica en general no lo hacen. Son estas discontinuidades en las segundas derivadas de la métricas que conducen a un tensor de energía-momento superficial distribucional de función δ localizado en una capa límite infinitesimal idealizada en Σ . En el enfoque de Israel (1966) este tensor está relacionado con la discontinuidad de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies espaciales incrustadas en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones a cada lado de ella. Este formalismo es adecuado para vectores normales no nulos y presenta dificultades para vectores nulos como se mostró en el capítulo 2. Resulta útil por lo tanto, tratar de encontrar un formalismo que funcione tanto para vectores no nulos como para nulos. El objetivo de esta sección es revisar y reproducir los cálculos de un nuevo formalismo para tratar los horizontes nulos hechos por Mazur & Mottola (2015),

dichos cálculos son desarrollados y comentados a mayor detalle que lo hecho por Mazur & Mottola (2015) para comprender de forma más clara como es que se llega a esos resultados. Para construir el tensor de energía-momento superficial, consideramos primero el elemento de línea esféricamente simétrico de la ecuación (4.23). Por simplicidad (Mazur & Mottola, 2015) considera el caso $B = B(m(r))$, donde B está expresada en términos de la función de masa de Misner-Sharp $m(r)$. Se consideran entonces las posibles contribuciones de la función delta de Dirac al tensor de Einstein para una hipersuperficie dada por la condición

$$\Phi(x^\mu) = 0, \quad (5.18)$$

donde $\Phi = r - R$ para un hipersuperficie a un radio $r = R$ fijo. Se puede ubicar un horizonte de la métrica en $g_{00} = 0$, condición con la cuál el elemento de línea (4.23) indica que $r = R_H$. La métrica inducida en este horizonte está dado por

$$ds_{\Sigma}^2 = R_H (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.19)$$

y corresponde a la 3-esfera. Además

$$\sqrt{-g} = NBR_H^2 \sin \theta, \quad (5.20)$$

tiene un valor finito siempre que $r \rightarrow R_H$ donde $g_{00}(R_H) = 0$ y g_{11}^{-1} tienda a cero también, pero g_{00}/g_{11} tiende a un valor finito en ambos lados del horizonte. Es importante notar el hecho de que $g_{00}(R_H) = 0$ y $g_{11}^{-1}(R_H) = 0$ hace que tanto g_{00} como g_{11}^{-1} sean continuas de forma separada en el horizonte, sin embargo, el término g_{00}/g_{11} y por lo tanto el factor de volumen no necesariamente deben ser continuos, o tender al mismo límite cuando se aproximan al horizonte por ambos lados. Esto aunque parezca insignificante, en realidad es de gran ayuda a la hora de encontrar los saltos en la métrica. Se analiza ahora el caso en el cual la geometría interior al horizonte $r < R_H$ está unida al horizonte mismo en $r = R_H$ usando la misma métrica inducida (5.20) pero en general con las derivadas de la métrica con discontinuidades. Esto es, las funciones métricas N y $H := B^{-2}$ son continuas y diferenciables por partes

$$N(r) = N^+(r)\Theta(r - R_H) + N^-(r)\Theta(r - R_H), \quad (5.21)$$

$$H(r) = H^+(r)\Theta(r - R_H) + H^-(r)\Theta(r - R_H), \quad (5.22)$$

y

$$N^+(R_H) = N^-(R_H), \quad H^+(R_H) = H^-(R_H), \quad (5.23)$$

la definición de H se debe a que en los cálculos siguientes aparecerán términos proporcionales a $1/g_{11}$ por lo que buscamos simplificar algunas expresiones. Se pueden calcular las derivadas de (5.21) y (5.22) de manera análoga a como se calcularon las condiciones de unión en el capítulo 2 usando la ecuación (2.15). De esta manera, se observa que las primeras derivadas de los coeficientes métricos N^2 y H no contienen términos divergentes pues tanto N^2 como H son funciones diferenciables por partes y continuas. Sin embargo, el permitir que las primeras derivadas de estas funciones puedan ser discontinuas trae como consecuencia que al aplicar nuevamente (2.15) a dN^2/dr y dH/dr se generan términos con funciones delta proporcionales a $[dN^2/dr]$ y a $[dH/dr]$. Usando las ecuaciones (5.1)-(5.4) con la métrica (4.23) se tiene que las componentes del tensor de Einstein son

$$G^{00} = -N^{-2} \left(\frac{1}{r} \frac{dB^{-2}}{dr} + \frac{1}{r^2} (B^{-2} - 1) \right), \quad (5.24)$$

$$G_0^0 = G^{00} g_{00} = \frac{1}{r} \frac{dB^{-2}}{dr} + \frac{1}{r^2} (B^{-2} - 1), \quad (5.25)$$

$$G^{11} = B^{-2} \left(\frac{B^{-2}}{rN^{-2}} \frac{dN^2}{dr} + \frac{1}{r^2} (B^{-2} - 1) \right), \quad (5.26)$$

$$G_1^1 = \frac{B^{-2}}{rN^{-2}} \frac{dN^2}{dr} + \frac{1}{r^2} (B^{-2} - 1), \quad (5.27)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{B^{-2}}{2N^2} \frac{d^2 N^2}{dr^2} + \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} \left(B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} - N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \right) + \frac{B^{-2}}{2r} \left(B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} + N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \right). \quad (5.28)$$

Y la razón por la cual ocupamos las componentes G_ν^μ es que dicho tensor puede verse como una matriz 4×4 y por lo tanto puede ser diagonalizada de tal forma que sus eigenvalores sean invariantes bajo rotaciones del sistema de referencia local, y por lo tanto libres de singularidades de coordenadas. Es importante notar que la regla (2.15) no puede ser aplicada a la ecuación para los términos G_2^2 y G_3^3 en horizontes nulos, pues a pesar de que la segunda derivada de la función N^2 aparece solo en (5.28) y por lo tanto las singularidades de la función delta sobre la superficie aparecen solo en las componentes angulares del tensor de Einstein, hay factores divergentes tales como $1/N^{-2}$ y B^2 multiplicados por las primeras derivadas de N^2 o H^2 , además de que existe la posibilidad de que el factor B^{-2}/N^2 sea

discontinua en el horizonte. De esta manera tal como lo propone Mazur & Mottola (2015), se debe definir una distribución δ respecto a una medida de integración, además de que la integración sobre un pequeño intervalo de r que encierre a la superficie en el punto fijo $\Phi = r - R_H = 0$ involucra el elemento del 3-volumen

$$d^3S_{\Sigma_\mu} = \delta_\mu^1 \sqrt{-g} dr d\theta d\phi, \quad (5.29)$$

que a la vez contiene un factor $\sqrt{-g}$ dada por (5.20). Por lo tanto, dado que esta es la medida adecuada con la que se va a integrar la distribución δ , se requiere que al calcular el tensor T_ν^μ singular de función δ se use la cantidad $\sqrt{-g}G_\nu^\mu$ y no G_ν^μ como se lo hace (Mazur & Mottola, 2015) en una hipersuperficie nula en $r = R_H$. Por todo lo anterior, se considera entonces la cantidad

$$\begin{aligned} NBG_2^2 = NBG_3^3 &= NB \left[\frac{B^{-2}}{2N^2} \frac{d^2N^2}{dr^2} + \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} \left(B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} - N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^{-2}}{2r} \left(B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} + N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \right) \right] \\ &= NB \frac{B^{-2}}{2N^2} \frac{d^2N^2}{dr^2} + NB \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} - NB \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \\ &\quad + NB \frac{B^{-2}}{2r} B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} + NB \frac{B^{-2}}{2r} N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \\ &= NB \frac{B^{-2}}{2N^2} \frac{d^2N^2}{dr^2} + NB \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} - NB \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \\ &\quad + \frac{NB}{2r} \frac{dB^{-2}}{dr} + \frac{1}{NB} \frac{1}{2r} \frac{dN^2}{dr} \\ &= NB \frac{B^{-2}}{2N^2} \frac{d^2N^2}{dr^2} + NB \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} B^2 \frac{dB^{-2}}{dr} - NB \frac{B^{-2}}{4N^2} \frac{dN^2}{dr} N^{-2} \frac{dN^2}{dr} \\ &\quad + \frac{1}{2r} \left(NB \frac{dB^{-2}}{dr} + (NB)^{-1} \frac{dN^2}{dr} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left((NB)^{-1} \frac{dN^2}{dR} \right) + \frac{1}{2r} \left(NB \frac{dB^{-2}}{dr} + (NB)^{-1} \frac{dN^2}{dr} \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

El factor $r^2 \sin \theta$ es un factor finito y continuo en el horizonte, mientras que las derivadas de N^2 y B^{-2} así como el término $N^2 B^{-2}$ tienen permitido ser discontinuos. En (5.30) se observa que ahora tenemos dos partes los cuales aportarán al cálculo del tensor de energía-momento superficial, por un lado tenemos la parte de los términos $N^{-2} dN^2/dr$ y $B^2 dB^{-2}/dr$ potencialmente singulares (pues contienen la primera derivada de la métrica)

junto con un nuevo término que contiene la derivada total respecto a la coordenada radial r . Es por eso entonces que el último término del lado derecho de (5.30), aunque posiblemente discontinuo, no contiene ninguna distribución de la función delta al tensor de energía-momento superficial en el horizonte. Se considera entonces únicamente el primer término del lado derecho de (5.30)

$$NBG_2^2 = NBG_3^3 = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left((NB)^{-1} \frac{dN^2}{dR} \right) + \dots \quad (5.31)$$

de manera que al diferenciar esta última expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left((NB)^{-1} \frac{dN^2}{dR} \right) &= \frac{d(NB)^{-1} \frac{dN^2}{dR}}{dr} \Theta(r - R_H) \Big|_+ + \frac{d(NB)^{-1} \frac{dN^2}{dR}}{dr} \Theta(-r + R_H) \Big|_- \\ &+ \left[(NB)^{-1} \frac{dN^2}{dR} \right] \delta(r - R_H), \end{aligned} \quad (5.32)$$

lo que lleva a la expresión

$$NBG_2^2 = NBG_3^3 = \frac{1}{2} \left[(NB)^{-1} \frac{dN^2}{dR} \right] \delta(r - R_H) + \dots \quad (5.33)$$

donde los tres puntos suspensivos nos indican términos no singulares que no contienen funciones δ .

De esta manera, la discontinuidad de (5.33) y la contribución de la disitribución δ en la superficie singular están bien definidas incluso si la métrica es singular y la cantidad $N^2 B^2$ es discontinua en el horizonte. La gravedad superficial queda entonces determinada por los coeficientes de la métrica (4.23) mediante:

$$\kappa = \frac{1}{2NB} \frac{dN^2}{dr}. \quad (5.34)$$

En (Mazur & Mottola, 2015) a través del tensor de Einstein se determinó el tensor de energía-momento superficial en la superficie del horizonte, dado por la expresión

$$T_B^A NB = S_B^A \delta(r - R_H), \quad (5.35)$$

donde,

$$S_B^A = \frac{[\kappa]}{8\pi G} \delta_B^A, \quad (5.36)$$

con $A, B = \theta, \phi$ y κ dado por (5.34). De esta manera podemos construir un tensor de energía-momento superficial para una superficie nula. Basta con encontrar k en el exterior del horizonte y proponer un modelo para los factores de la métrica dentro del horizonte, calcular $[k]$ y sustituirla en la expresión (5.35). Para ilustrar esto (Mazur & Mottola, 2015) calcula $[k] = 1/r_s$ para una superficie del colapso de una estrella esféricamente simétrica donde las métricas interiores y exteriores están dadas por la métrica de Schwarzschild y r_s representa el radio de Schwarzschild. De esta manera el tensor de energía-momento para este ejemplo queda terminado por:

$$T_B^A = \frac{1}{8\pi G r_s} \delta(r - r_s) \delta_B^A. \quad (5.37)$$

Este resultado muestra que a pesar de que la mayor parte de la literatura especializada en el tema usa el formalismo de Israel (1966), se pueden considerar nuevos formalismos a la hora de estudiar los horizontes nulos. Es de sumo interés para un trabajo a futuro considerar todas estas posibilidades. Este trabajo de tesis pretende continuar explorando estos fenómenos físicos a mayor detalle en el futuro, empleando incluso código numérico para incorporar a todos estos formalismos la mayor cantidad de variables posibles. Se pretende en el futuro cercano explorar las ondas de choque hidrodinámicas y gravitacionales de forma numérica para fenómenos astrofísicos tan complejos como los destellos de rayos gamma largos.

Capítulo 6

Conclusiones

El estudio de las ondas de choque hidrodinámicas y gravitacionales en relatividad general, trae como consecuencia la incorporación de la geometría del espacio-tiempo a los saltos en las cantidades hidrodinámicas del fluido en cuestión. Se estudió el caso en el cual un fluido no autogravitante en un espacio-tiempo de fondo esféricamente simétrico y estático producía ondas de choque con su medio circundante. Las condiciones de unión en las métricas en ambos lados de la hipersuperficie Σ permiten que las componentes del tensor métrico sean iguales en Σ y eso hace posible simplificar el sistema de ecuaciones (4.9)-(4.11) y posteriormente resolverlas en un sistema de referencia en el cuál la onda choque está en reposo. De esta manera se puede calcular la dependencia entre la velocidad pre-choque v_1 y el salto en las densidades de energía e_2/e_1 o las de las presiones p_2/p_1 . Tanto en el caso del fluido con ecuación de estado (4.3) como el del caso general con ecuación de estado politrópica, para una velocidad pre-choque cada vez mayor, es necesaria una diferencia de energías o presiones de igual manera cada vez más grande. Por otro lado, para un espacio-tiempo curvo, esféricamente simétrico a medida que el fluido se acerca al radio de Schwarzschild se requieren velocidades de la onda de choque cada vez más grandes para aumentar la velocidad pre-choque comparado con el escenario de Minkowski. Dicho de otro modo, a distancias cercanas al radio de Schwarzschild el fluido sufre una disminución de velocidad para una velocidad de la onda de choque dada. Esta disminución se debe a la geometría del espacio-tiempo considerado. Es importante mencionar que dicho efecto es un efecto físico y no uno debido a la elección de las coordenadas pues todo el tratamiento utilizado en esta parte se desarrolló para un sistema de referencia fuera de la onda de choque Σ , en particular, en uno en donde el fluido pre-choque se encuentra en reposo

y para una métrica en general esféricamente simétrica. Podemos concluir entonces que: la velocidad de una onda de choque puede cambiar con los coeficientes métricos de un espacio-tiempo curvo y esféricamente simétrico de fondo. El movimiento de partículas, ondas y otros fenómenos físicos en este espacio-tiempo está afectado por el tensor métrico, que codifica las propiedades geométricas del espacio-tiempo, como la curvatura y las distancias entre eventos. A medida que cambian los coeficientes del tensor métrico, también cambia la curvatura del espacio-tiempo, lo que puede afectar la propagación de una onda de choque. La velocidad de la onda de choque dependerá de cómo el medio y la propia onda de choque responden a la curvatura del espacio-tiempo descrita por el tensor métrico. En resumen, la velocidad de una onda de choque puede verse influenciada por los coeficientes métricos de un espacio-tiempo curvo, ya que estos coeficientes definen la geometría subyacente y afectan la propagación de fenómenos físicos en ese espacio-tiempo. El estudio de estas variaciones entre un espacio-tiempo plano y uno curvo cobra sutil relevancia a la hora de hacer estudios en sistemas astrofísicos reales, pues actualmente la comunidad astronómica usa la transformaciones de Lorentz en un espacio-tiempo plano para estudiar los saltos en las cantidades hidrodinámicas tal como lo proponen Katz (1994) y Sari & Piran (1995) en el estudio de los destellos de rayos Gamma (ver también Piran (1999) y Piran (2005)). Razón suficiente para empezar a proponer correcciones analíticas de un espacio-tiempo curvo a los cálculos de las propiedades hidrodinámicas de una onda de choque. Para tomar en cuenta aún más correcciones al caso del espacio-tiempo plano se puede proponer un escenario en el que el fluido se encuentra en un espacio-tiempo dinámico, por ejemplo con una métrica tipo FLRW, en donde las componentes de la métrica ya no solo dependen de la componente radial, si no además dependerán ahora del tiempo. La forma paramétrica de resolver el caso para un fluido politrópico con ecuación de estado $p = K\rho^\gamma$ nos indica que para obtener las dependencias de las presiones en función de la velocidad pre-choque es necesario asumir como conocidas alguna de las cantidades hidrodinámicas del problema, e.g. $\mu = p_2/\rho_2$ o incluso v_Σ . Para choques fuertes se observa que incluso para velocidades post-choque pequeñas, la diferencias de presiones entre p_1 y p_2 es considerable, la dependencia al principio es lineal y a media que aumenta v_2 , el cociente p_2/p_1 crece de forma exponencial llegando a un límite asintótico. Respecto a la velocidad v_Σ en función de la velocidad post-choque v_2 , se observa que a medida que nos acercamos al radio de Schwarzschild el valor de la velocidad de la onda de choque disminuye y que se requieren velocidades v_2 cada vez mayores para aumentar el valor de v_Σ , por ejemplo en el caso del fluido con ecuación de estado tipo Bondi-Wheeler a un un radio de $r = 2r_s$ el valor de v_2 tiene que ser muy grande

($v_2 \rightarrow 1$) para que $v_\Sigma = 0.2$ mientras que para cuando $r \rightarrow \infty$ el valor de v_Σ es grande (comparado con $r = 2r_s$) incluso para valores pequeños de v_2 , por ejemplo $v_\Sigma = 1/\sqrt{3}$ para $v_2 = 2c_s/(1 + c_s^2)$. Con todo esto, podemos esperar que el estudio de las ondas de choque para sistemas astrofísicos reales en las cuales las ecuaciones de estado son aún más complejas (pues emplean muchas más condiciones iniciales tales como el campo magnético o momento angular) y la geometría del espacio-tiempo no es plana, se necesiten contemplar términos aún más complejos en las ecuaciones de salto de las ondas de choque.

De igual manera, una vez calculadas las discontinuidades en las presiones o densidades de energía, surge la incógnita del comportamiento de los saltos en el escalar de curvatura de las ecuaciones de Einstein. Aunque Israel (1966) propone un formalismo para estudiar las discontinuidades en una hipersuperficie singular no nula, en esta tesis se discutió la necesidad de una teoría que englobe las hipersuperficies nulas. Hay propuestas como la de Mazur & Mottola (2015) (la cual fue revisada y reproducida en este trabajo) que describen la estructura de los coeficientes métricos dentro de un horizonte nulo. Y de esta manera poder hacer una unión de la parte interior con la parte exterior del horizonte. Sin embargo, aún no queda claro si con la nueva definición del tensor de energía-momento superficial que surge del formalismo para horizontes nulos, es posible unir cualquier métrica en el interior del horizonte con una en el exterior, por ejemplo para un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático.

Apéndice A

Velocidad relativa entre fluido pre-choque y post-choque

El siguiente cálculo y la manera de realizarlo se sugiere en el libro de Landau & Lifshitz (1987) y fue realizado por Sergio Mendoza en 1997. Dada la complejidad del mismo, se reproduce en este apéndice. De las ecuaciones (4.13) y (4.14) se tiene

$$w_1 \gamma_1^2 v_1^2 + p_1 = w_2 \gamma_2^2 v_2^2 + p_2, \quad (\text{A.1})$$

y

$$w_1 \gamma_1^2 v_1 = w_2 \gamma_2^2 v_2. \quad (\text{A.2})$$

Con el cambio de variable

$$v = \tanh \phi, \quad \gamma = \cosh \phi, \quad (\text{A.3})$$

las expresiones anteriores toman la forma

$$w_1 \sinh^2 \phi_1 + p_1 = w_2 \sinh^2 \phi_2 + p_2, \quad (\text{A.4})$$

$$w_1 \cosh \phi_1 \sinh \phi_1 = w_2 \cosh \phi_2 \sinh \phi_2. \quad (\text{A.5})$$

De esta manera, al elevar (A.5) al cuadrado y usando la identidad trigonométrica $\cosh^2 \phi = 1 + \sinh^2 \phi$ se obtiene

$$w_1^2 \cosh^2 \phi_1 \sinh^2 \phi_1 = w_2^2 (1 + \sinh^2 \phi_2) \sinh^2 \phi_2, \quad (\text{A.6})$$

i.e.:

$$\sinh^4 \phi_2 + \sinh^2 \phi_2 - \frac{w_1^2}{w_2^2} \sinh^2 \phi_1 \cosh^2 \phi_1 = 0, \quad (\text{A.7})$$

y por tanto:

$$\sinh^2 \phi_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{w_1^2}{w_2^2} \sinh^2 \phi_1 \cosh^2 \phi_1}}{2}. \quad (\text{A.8})$$

La sustitución de (A.8) en (A.4) implica que:

$$w_1 \sinh^2 \phi_1 + (p_1 - p_2) + \frac{w_2}{2} = \frac{w_2}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{w_1^2}{w_2^2} \sinh^2 \phi_1 \cosh^2 \phi_1}. \quad (\text{A.9})$$

Si se eleva al cuadrado esta ultima expresión, se obtiene

$$w_1^2 \sinh^4 \phi_1 + 2w_1 \sinh^2 \phi_1 [(p_1 - p_2) + \frac{w_2}{2}] + [(p_1 - p_2) + \frac{w_2}{2}]^2 = \frac{w_2^2}{4} (1 + 4 \frac{w_1^2}{w_2^2} \sinh^2 \phi_1 \cosh^2 \phi_1), \quad (\text{A.10})$$

con lo cual:

$$w_1^2 \sinh^2 \phi_1 (-1) + 2w_1 \sinh^2 \phi_1 [(p_1 - p_2) + \frac{w_2}{2}] + [(p_1 - p_2) + \frac{w_2}{2}]^2 = \frac{w_2^2}{4}, \quad (\text{A.11})$$

y así:

$$2w_1^2 \sinh^2 \phi_1 \left[p_1 - p_2 + \frac{w_2 - w_1}{2} \right] + (p_1 - p_2)^2 + w_2(p_1 - p_2) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Ahora bien, debido a que $w_2 = e_2 + p_2$, la expresión anterior toma la forma

$$w_1^2 \sinh^2 \phi_1 [2p_1 - p_2 + e_2 - w_1] = (p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2, \quad (\text{A.13})$$

es decir:

$$\cosh^2 \phi_1 - 1 = \sinh^2 \phi_1 = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2}{(e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 - w_1 + e_2)}, \quad (\text{A.14})$$

por lo que:

$$\cosh^2 \phi_1 = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2 + (e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 - w_1 + e_2)}{(e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 - w_1 + e_2)}. \quad (\text{A.15})$$

La división de (A.14) entre (A.15) es entonces:

$$\tanh^2 \phi_1 = \frac{\sinh^2 \phi_1}{\cosh^2 \phi_1} = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2}{(p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2 + (e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 - w_1 + e_2)} := \frac{C_1}{C_2}, \quad (\text{A.16})$$

en donde las cantidades C_1 y C_2 representan el numerador y denominador respectivamente de a relación anterior, y están dadas por:

$$\begin{aligned} C_1 &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2, & (\text{A.17}) \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_2 - p_1)(p_2 - p_1), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_2 - p_2 + p_1), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2 + (e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 - w_1 + e_2), & (\text{A.18}) \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2 + (e_1 + p_1)(2p_1 - p_2 - e_1 - p_1 + e_2), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_2) - (p_1 - p_2)^2 + (e_1 + p_1)(p_1 - p_2 - e_1 + e_2), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_2 - p_2 + p_1) + (e_1 + p_1)(p_1 - p_2) + (e_1 + p_1)(e_2 - e_1), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_1) + (e_1 + p_1)(p_1 - p_2) + (e_1 + p_1)(e_2 - e_1), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_1) - (e_1 + p_1)(p_2 - p_1) + (e_1 + p_1)(e_2 - e_1), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 + p_1 - e_1 - p_1) + (e_1 + p_1)(e_2 - e_1), \\ &= (p_2 - p_1)(e_2 - e_1) + (e_1 + p_1)(e_2 - e_1), \\ &= (e_2 - e_1)(p_2 - p_1 + e_1 + p_1), \\ &= (e_2 - e_1)(p_2 + e_1). \end{aligned}$$

De esta manera, sustituyendo (A.17) y (A.18) en (A.16) se llega a

$$v_1^2 = \tanh^2 \phi_1 = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(p_2 + e_1)}. \quad (\text{A.19})$$

Apéndice B

Condiciones de salto para un espacio-tiempo curvo con métrica diagonal.

De las ecuaciones (2.31) y (2.34) se tiene

$$[T^{\mu\nu}] n_\mu = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$[\rho u^\mu] n_\mu = 0, \quad (\text{B.2})$$

donde $T^{\mu\nu}$ está dado por la ecuación (2.34).

Por otro lado dado que para cualquier tensor, en particular para u^μ se cumple que:

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_M^\alpha} u_M^\alpha, \quad (\text{B.3})$$

donde x_M^α denota las coordenadas relacionadas a la métrica de Minkowski y u_M^α representa la cuatro-velocidad en el espacio-tiempo de Minkowski local. De la métrica general (4.23) se obtiene:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x_M^\alpha} = \text{diag} (N^{-1}, B^{-1}, 1/r, 1/r \sin \theta), \quad (\text{B.4})$$

y como:

$$u_M^\alpha = (\Gamma, \Gamma v, 0, 0), \quad (\text{B.5})$$

entonces de esta última ecuación además de las expresiones (B.3) y (B.5) se obtiene:

$$u^\mu = \Gamma (N^{-1}, B^{-1}v, 0, 0). \quad (\text{B.6})$$

En simetría $O(3)$, un vector normal a la hipersuperficie Σ que se mueve radialmente con velocidad v_Σ es:

$$n_\mu = \Gamma_\Sigma (-v_\Sigma, 1, 0, 0), \quad (\text{B.7})$$

y por lo tanto, la ecuación (B.1) toma la forma

$$[wu^\nu (u^\mu n_\mu) + pn^\nu] = 0. \quad (\text{B.8})$$

Ahora bien, dado que:

$$u^\mu n_\mu = u^0 n_0 + u^1 n_1 = \Gamma \Gamma_\Sigma (vB^{-1} - v_\Sigma N^{-1}) \quad (\text{B.9})$$

entonces, (B.8) toma la forma:

$$[wu^\nu \Gamma \Gamma_\Sigma (vB^{-1} - v_\Sigma N^{-1}) + pn^\nu] = 0. \quad (\text{B.10})$$

La componente temporal $\nu = 0$ de la relación anterior es:

$$[w\Gamma^2 \Gamma_\Sigma v N^{-1} B^{-1} - w\Gamma^2 \Gamma_\Sigma v_\Sigma N^{-2} + pN^{-2} \Gamma_\Sigma v_\Sigma] = 0 \quad (\text{B.11})$$

y por lo tanto:

$$\frac{N}{B} [w\Gamma^2 v] = v_\Sigma [w\Gamma^2 - p]. \quad (\text{B.12})$$

La componente espacial $\nu = 1$ de la expresión (B.10) es:

$$\Rightarrow [w\Gamma^2 \Gamma_\Sigma v^2 B^{-2} - w\Gamma^2 \Gamma_\Sigma v v_\Sigma B^{-1} N^{-1} + pB^{-2} \Gamma_\Sigma] = 0, \quad (\text{B.13})$$

y así:

$$\frac{N}{B} [w\Gamma^2 v^2 - p] = v_\Sigma [w\Gamma^2 v] \quad (\text{B.14})$$

De forma análoga, la ecuación (B.2) es

$$[\rho \Gamma N^{-1} (-\Gamma_\Sigma v_\Sigma) + \rho \Gamma B^{-1} v \Gamma_\Sigma] = 0, \quad (\text{B.15})$$

y por lo tanto:

$$v_{\Sigma}[\rho\Gamma] = \frac{N}{B} [\rho\Gamma^2 v]. \quad (\text{B.16})$$

Apéndice C

Velocidades relativas al choque en espacio-tiempo curvo con métrica diagonal

Para un espacio-tiempo curvo con métrica diagonal, en el apéndice (B) se obtuvieron las relaciones para la cuatro velocidad u^μ el vector normal a la hipersuperficie Σ , dadas por las ecuaciones (B.6) y (B.7) respectivamente. De esta manera:

$$u^\mu n_\mu = \Gamma\Gamma_\Sigma (vB^{-1} - v_\Sigma N^{-1}). \quad (\text{C.1})$$

Además de Anile (1990)

$$\tilde{v} = \frac{u^\mu n_\mu}{(h^{\mu\nu} n_\mu n_\nu)^{1/2}}. \quad (\text{C.2})$$

Dado que la velocidad relativa \tilde{v} está dada por la ecuación (C.2) y el tensor de proyección $h^{\mu\nu}$ se definió en la ecuación (4.30), entonces:

$$h^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = h^{0v} n_{0\nu} + h^{1v} n_{1\nu}, \quad (\text{C.3})$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 h^{\mu\nu}n_\mu n_\nu &= h^{0v}n_0n_v + h^{1v}n_1n_v \\
 &= h^{00}n_0n_0 + 2h^{01}n_0n_1 + h^{11}n_1n_1 \\
 &= (g^{00} + u^0u^0)(n_0)^2 + 2(g^{01} + u^0u^{11})n_0n_1 + (g^{11} + u^1u^1)(n_1)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{g_{00}} + \frac{\Gamma^2}{N^2}\right)(\Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma^2) + 2\Gamma^2 N^{-1} B^{-1} v (-\Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{g_{11}} + \Gamma^2 v^2 B^{-2}\right)(\Gamma_\Sigma^2) \\
 &= \left(-\frac{1}{N^2} + \frac{\Gamma^2}{N^2}\right)(\Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma^2) - 2\Gamma^2 \Gamma_\Sigma^2 v v_\Sigma N^{-1} B^{-1} \\
 &\quad + (B^{-2} + \Gamma^2 v^2 B^{-2})(\Gamma_\Sigma^2) \\
 &= (1 - \Gamma^2) \left(\frac{\Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma^2}{-N^2}\right) - 2\Gamma^2 \Gamma_\Sigma^2 v v_\Sigma N^{-1} B^{-1} \\
 &\quad + (1 + \Gamma^2 v^2) \Gamma_\Sigma^2 B^{-2}, \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

sin embargo, como

$$1 - \Gamma^2 = -v^2 \Gamma^2, \tag{C.5}$$

$$1 + \Gamma^2 v^2 = \Gamma^2, \tag{C.6}$$

entonces, la relación (C.4), es:

$$h^{\mu\nu}n_\mu h_\nu = (-v^2 \Gamma^2) \left(\frac{\Gamma_\Sigma^2 v_\Sigma^2}{-N^2}\right) - 2\Gamma^2 \Gamma_\Sigma^2 v v_\Sigma N^{-1} B^{-1} + (\Gamma^2) \Gamma_\Sigma^2 B^{-2} \tag{C.7}$$

$$= \Gamma^2 \Gamma_\Sigma^2 (v^2 v_\Sigma^2 N^{-2} - 2v v_\Sigma N^{-1} B^{-1} + B^{-2}), \tag{C.8}$$

$$= \Gamma^2 \Gamma_\Sigma^2 (B^{-1} - v v_\Sigma N^{-1})^2. \tag{C.9}$$

De esta forma, usando las expresiones (C.1) y (C.7) en la ecuación para la velocidad relativa (C.2) se llega finalmente a

$$\tilde{v} = \frac{\Gamma \Gamma_\Sigma (v B^{-1} - v_\Sigma N^{-1})}{\Gamma \Gamma_\Sigma (B^{-1} - v v_\Sigma N^{-1})} \tag{C.10}$$

esto es:

$$\tilde{v} = \frac{v - B^2 v_\Sigma / N^2}{1 - v B^2 v_\Sigma / N^2} \tag{C.11}$$

Es importante ver que para un sistema de referencia en el cual el fluido se encuentre en reposo $v = 0$, esto reduce la ecuación anterior a

$$\tilde{v} = -\frac{B}{N}v_{\Sigma} \tag{C.12}$$

Apéndice D

Salto de cantidades hidrodinámicas para fluido politrópico

De las ecuaciones (4.28) y (4.29) se sigue que:

$$p_2 = \frac{N^{-1}v_\Sigma v_2 e_1 + B^{-1}p_1}{B^{-1} - N^{-1}v_\Sigma v_2}. \quad (\text{D.1})$$

La sustitución de (4.1) en (D.1) implica que:

$$p_2 (B^{-1} - N^{-1}v_\Sigma v_2) = \rho_2 N^{-1}v_\Sigma v_2 \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \right) + B^{-1}p_1. \quad (\text{D.2})$$

La división de esta relación por $v_2^2 p_1$ es entonces:

$$\frac{1}{q} \left(\frac{B^{-1}}{v_1^2} - \frac{N^{-1}}{\xi} \right) = N^{-1} \frac{1}{\mu \xi} \left(1 + \frac{\mu}{\gamma - 1} \right) + \frac{B^{-1}}{v_2^2}, \quad (\text{D.3})$$

en donde:

$$q = \frac{p_1}{p_2}, \quad \mu = \frac{p_1}{\rho_1}, \quad \xi = \frac{v_2}{v_\Sigma}. \quad (\text{D.4})$$

Y por lo tanto:

$$\xi = \frac{\left(1 - \frac{1}{\Gamma_2^2} \right) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{q} \right) \frac{B}{N}}{1/q - 1}. \quad (\text{D.5})$$

Por otro lado, de las ecuaciones (4.1) y (D.1) se tiene que:

$$\frac{1}{\Gamma_2} \left(1 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{N}{B} \mu \xi + \frac{\mu}{\gamma-1} + 1. \quad (\text{D.6})$$

Sustituyendo la ecuación (4.34) en (D.6) se llega a:

$$\frac{1}{\Gamma_2} + \frac{\mu}{q(\gamma-1)} - 1 - \frac{\mu}{\gamma-1} = \xi \frac{N}{B} \left(\mu + \frac{\mu}{q(\gamma-1)} \right), \quad (\text{D.7})$$

y por lo tanto:

$$\xi = \frac{B}{N} \frac{\frac{1}{\Gamma_2} + \frac{\mu}{q(\gamma-1)} - 1}{\mu + \frac{\mu}{q(\gamma-1)}}. \quad (\text{D.8})$$

Por lo tanto, igualando (D.5) con (D.8) se obtiene

$$\frac{A}{\Gamma_2^2} + \frac{D}{\Gamma_2} + \frac{\mu(\frac{1}{q} - 1)^2}{\gamma-1} - (\frac{1}{q} - 1) - A = 0, \quad (\text{D.9})$$

donde se ha definido $A = \left(1 + \frac{\mu}{\gamma-1} + \frac{\mu}{q} \right) \left(1 + \frac{1}{q(\gamma-1)} \right)$ y $D = \frac{1}{q} - 1$. La ecuación (D.9) es ya una cuadrática para Γ_2 . El término constante

$$C := \frac{\mu(q-1)^2}{\gamma-1} - (q-1) - A, \quad (\text{D.10})$$

esta tal que:

$$C = \frac{\mu(\frac{1}{q} - 1)^2}{\gamma-1} - (\frac{1}{q} - 1) - \left(1 + \frac{\mu}{\gamma-1} + \frac{\mu}{q} \right) \left(1 + \frac{1}{q(\gamma-1)} \right), \quad (\text{D.11})$$

$$= \frac{\mu}{q^2(\gamma-1)} - \frac{2\mu}{q(\gamma-1)} + \frac{\mu}{\gamma-1} - \frac{1}{q} + 1 - \left(1 + \frac{\mu}{\gamma-1} + \frac{\mu}{q} \right) \left(1 + \frac{1}{q(\gamma-1)} \right), \quad (\text{D.12})$$

$$= \frac{2\mu}{q(\gamma-1)} - \frac{1}{q} - \frac{1}{q(\gamma-1)} - \frac{\mu}{q(\gamma-1)^2} - \frac{\mu}{q}, \quad (\text{D.13})$$

$$= -\frac{1}{q} \left(\frac{\gamma^2 - \gamma + \mu\gamma^2}{(\gamma-1)^2} \right). \quad (\text{D.14})$$

Bibliografía

- ANILE, A. M., 1990. *Relativistic Fluids and Magneto-fluids: With Applications in Astrophysics and Plasma Physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- ARFKEN, G. B., WEBER, H. J. & HARRIS, F. E., 2013. Chapter 20 - Integral Transforms. In G. B. Arfken, H. J. Weber & F. E. Harris, eds., *Mathematical Methods for Physicists (Seventh Edition)*, 963–1046. Academic Press, Boston, seventh edition ed. ISBN 978-0-12-384654-9. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123846549000207>.
- GROAH, J., SMOLLER, J. & TEMPLE, B., 2007. Shock Wave Interactions in General Relativity: A Locally Inertial Glimm Scheme for Spherically Symmetric Spacetimes.
- HOBSON, M., P, E., EFSTATHIOU, G., LASENBY, A. & PRESS, C. U., 2006. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. General Relativity: An Introduction for Physicists. Cambridge University Press. ISBN 9780521829519. URL <https://books.google.com.mx/books?id=5dryXCWR7EIC>.
- ISRAEL, W., 1966. SINGULAR HYPERSURFACES AND THIN SHELLS IN GENERAL RELATIVITY. *Nuovo Cimento (10)*, 44B: 1-14(July 11, 1966).. URL <https://www.osti.gov/biblio/4478666>.
- JOHNSON, M. H. & MCKEE, C. F., 1971. Relativistic Hydrodynamics in One Dimension. *Phys. Rev. D*, **3**, 858–863. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.3.858>.
- KATZ, J. I., 1994. Two Populations and Models of Gamma-Ray Bursts. , **422**, 248.

- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1991. *Mecánica de fluidos*. Curso de física teórica. Editorial Reverte. ISBN 9788429140873. URL <https://books.google.com.mx/books?id=AM0jKSi03kUC>.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M., 1975. CHAPTER 11 - THE GRAVITATIONAL FIELD EQUATIONS. In L. D. Landau & E. M. Lifshitz, eds., *The Classical Theory of Fields (Fourth Edition)*, vol. 2 of *Course of Theoretical Physics*, 259–294. Pergamon, Amsterdam, fourth edition ed. ISBN 978-0-08-025072-4. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080250724500186>.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M., 1987. *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)*. Course of theoretical physics / by L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 6. Butterworth-Heinemann, 2nd ed. ISBN 0750627670. URL <http://www.worldcat.org/isbn/0750627670>.
- MAZUR, P. O. & MOTTOLA, E., 2015. Surface tension and negative pressure interior of a non-singular ‘black hole’. *Classical and Quantum Gravity*, **32**(21), 215024. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/21/215024>.
- MCKEE, C. R. & COLGATE, S. A., 1973. Relativistic Shock Hydrodynamics. , **181**, 903–938.
- MENDOZA, S., 2000. *Shocks and Jets in Radio Galaxies and Quasars*. Ph.D. thesis, Cavendish Laboratory, Cambridge University U.K.
- MENDOZA, S. & SILVA, S., 2021. The matter Lagrangian of an ideal fluid. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **18**(4), 2150059–1470.
- OPPENHEIMER, J. R. & SNYDER, H., 1939. On Continued Gravitational Contraction. *Phys. Rev.*, **56**, 455–459. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.455>.
- OPPENHEIMER, J. R. & VOLKOFF, G. M., 1939. On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.*, **55**, 374–381. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>.
- O’BRIEN, S. & SYNGE, J., 1952. Jump Conditions at Discontinuities in General Relativity.
- PAPAPETROU, A. & HAMOUI, A., 1968. SURFACE LAYERS OF MATTER IN GENERAL RELATIVITY. *Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A*, **9**: 179-211(1968).. URL <https://www.osti.gov/biblio/4806678>.

- PIRAN, T., 1999. Gamma-ray bursts and the fireball model. , **314**(6), 575–667.
- PIRAN, T., 2005. The physics of gamma-ray bursts. *Rev. Mod. Phys.*, **76**, 1143–1210. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.76.1143>.
- POISSON, E., 2004. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press.
- RAMOS-SÁNCHEZ, S. & VIDAL, O., 2018. *Relatividad para futuros físicos*. Textos contemporáneos. Copit-Arxives. ISBN 9781938128189. URL <https://books.google.com.mx/books?id=mulfDwAAQBAJ>.
- SARI, R. & PIRAN, T., 1995. Hydrodynamic Timescales and Temporal Structure of Gamma-Ray Bursts. , **455**, L143.
- TAUB, A. H., 1948. Relativistic Rankine-Hugoniot Equations. *Phys. Rev.*, **74**, 328–334. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.328>.
- TAUB, A. H., 1980. Space-times with distribution valued curvature tensors. *Journal of Mathematical Physics*, **21**(6), 1423–1431. URL <https://doi.org/10.1063/1.524568>.
- TOOPER, R. F., 1965. Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity. , **142**, 1541.
- TOWNSEND, P. K., 1997. Black Holes. *arXiv e-prints*, gr-qc/9707012.
- VAN RIPER, K. A., 1979. General relativistic hydrodynamics and the adiabatic collapse of stellar cores. , **232**, 558–571.
- WILL, C. M., 2018. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 2nd ed.