



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIÓN TIPO LANGEVIN DE GRANDES  
EXCURSIONES: UN ANÁLISIS TEÓRICO,  
NUMÉRICO Y DE DATOS EMPÍRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

MANUEL FERNANDO LÓPEZ RODRÍGUEZ

TUTOR:

DR. JUAN VALENTÍN ESCOBAR SOTOMAYOR



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Hoja de datos del jurado

## 1. Datos del alumno

López  
Rodríguez  
Manuel Fernando  
fernando.lr@ciencias.unam.mx  
fernaaando@proton.me  
Universidad Nacional  
Autonoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física

## 2. Datos del tutor

Dr.  
Juan Valentín  
Escobar  
Sotomayor

## 3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Rolando Crisóstomo  
Castillo  
Caballero

## 4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Carlos  
Málaga  
Iguñiz

## 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Victor Manuel  
Rivero  
Mercado

## 6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Mario  
Martínez  
Salgado

## 7. Datos del trabajo escrito

Ecuación tipo Langevin de grandes excursiones  
Un análisis teórico, numérico y de datos empíricos  
99 p.  
2023



# Dedicatoria

Este trabajo de tesis surgió entre la pandemia de Covid-19, la empresa personal de restaurar por primera vez yo mismo un auto antiguo, el dolor del abandono, la búsqueda de sueños de velocidad y mucha voluntad personal. Pero concretar la investigación que está plasmada en este libro requirió de más.

Estas líneas nacen al calor de haber completado esta tesis y las aprovecho para dedicar este logro a mi comunidad de amor, a mi familia.

A mi madre y a mi padre, personas que siempre me han dado su apoyo incondicional y completo, y que han hecho un enorme esfuerzo por entenderme en todos los momentos de mi vida; claros y oscuros. Sin ustedes yo no existiría y este trabajo tampoco. Los amo.

Papá, gracias por todos los momentos de ocio, tan necesarios para después poder pensar, que hemos compartido: Las rodadas y carreras de mañana, las tardes y noches de mecánica, los días de juegos y todos esos ratos de plática y discusión.

Mamá, gracias por todas tus enseñanzas que, aún que a veces son entregadas con rudeza, guardan una delicadeza y cuidado al detalle increíbles, en cada una de las páginas de este libro podrás encontrar detalles de ese esmero que te he aprendido.

A mi amada hermana, increíble persona que a diario me regala una porción de su afecto de diversos modos. Que atiende mis extrañas pláticas de física y mis curiosos intereses, y que en más de una ocasión me escuchó y me ayudó a avanzar con este trabajo y con mi vida a pesar de que la noche y el cansancio la alcanzaran.

Hermana, gracias por siempre escucharme, estoy seguro de que conoces este trabajo tanto como yo aunque asegures no entender nada. Sigue venciendo con la sagacidad y firmeza que te caracterizan.



# Agradecimientos

El logro que constituye este libro fue nutrido por diversas personas. Quiero usar este espacio para agradecerles.

A mi padre, a mi madre y a mi hermana, gracias una vez más. Son indescriptibles todos los niveles en los que contribuyeron para que pudiese construir este trabajo.

A mi asesor Juan Valentín Escobar Sotomayor. Que confió en mi desde un principio y me extendió la mano para instruirme en la búsqueda de respuestas científicas. Que siempre tuvo buena voluntad y disposición para escucharme, complementarme y corregirme. Gracias Juan, gracias por creer en mi.

A mis amigos y amigas, para ustedes también es este trabajo. Daniela, gracias por mostrarme aquello que no siempre supe ver de mí, gracias por tu ser. Adán, qué sería de la vida sin un buen rato de juego y otro tanto de discusión, gracias por todo tu tiempo y tu amistad. Gabriela, gracias por tu amistad y por brindarme siempre una nueva perspectiva, más de un diálogo contigo contribuyó a este trabajo. Adriana, para mi eres una declaración de voluntad, gracias por tu apoyo. Enki, porque los idiomas más que un barrera son una excusa para platicar. A todes ustedes reciban a manera de gracias este párrafo. A quienes no mencioné, les pido una disculpa, el papel se acaba pero sus recuerdos en mi mente no. Gracias igualmente, ustedes saben quienes son.

A Hugo, que en medio de la pandemia me brindó acceso a equipo de computo de última generación y aceleró las simulaciones necesarias para este trabajo. Gracias una vez más Hugo, tú siempre me has apoyado.

A Lourdes, quien con su aguda visión y precisas palabras me conduce en mi. Gracias Lourdes.

A todos mis profesores de la carrera que, a su modo, me entrenaron en el quehacer científico. En particular a dos, al Dr. José Manuel Alvarado Reyes y al Dr. Victor Manuel Romero Rochín, que más que quehacer científico, me entregaron auténticas muestras de ética y moral. Gracias *docs*.

A la UNAM, compleja institución de este país, en la cual me desarrollé no sólo como científico pero como persona. Gracias UNAM.



A mi país México, esperando contribuir a generar alegrías en ti pues me has dado varias. Gracias México.

Adicionalmente agradezco el apoyo de los proyectos DGAPA-PAPIIT IT-101820 y IT-102023.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Movimiento browniano . . . . .	1
1.1.1. El modelo de Black-Scholes . . . . .	4
1.2. Objetivo . . . . .	5
<b>2. La ecuación modificada de Langevin</b>	<b>9</b>
2.1. Leyes de potencia y fenómenos libres de escala . . . . .	9
2.1.1. La distribución de ley de potencias y cómo ajustarla . . . . .	13
2.2. La modificación . . . . .	17
<b>3. Retornos</b>	<b>25</b>
3.1. Retornos y leyes de potencia . . . . .	25
<b>4. La ecuación modificada con disipación</b>	<b>31</b>
4.1. Considerando disipación disipación . . . . .	31
<b>5. La transición</b>	<b>43</b>
5.1. De normal a ley de potencia . . . . .	43
<b>6. Solución numérica</b>	<b>51</b>
6.1. Ecuación de Langevin y la ecuación cinética asociada . . . . .	51
6.1.1. Probando el método con la ecuación de Langevin . . . . .	52
6.2. Nuestra ecuación modificada y su ecuación cinética . . . . .	54
<b>7. Solución analítica</b>	<b>59</b>
7.1. Las ecuaciones estocásticas . . . . .	59
7.2. La ecuación cinética asociada a la ecuación modificada . . . . .	60
<b>8. La ecuación modificada con deriva</b>	<b>63</b>
8.1. Agregando <i>drift</i> . . . . .	63
8.2. La solución analítica en el régimen $\xi \leq 1$ . . . . .	68
<b>9. Bitcoin</b>	<b>71</b>
9.1. Una aplicación de leyes de potencias en finanzas . . . . .	71

<b>10. Conclusiones</b>	<b>81</b>
10.1. Revisando el objetivo . . . . .	81
<b>Apéndice A. Una buena aproximación al valor absoluto</b>	<b>83</b>
A.1. La aproximación . . . . .	83
<b>Apéndice B. Consecuencias dimensionales en la diferencial</b>	<b>85</b>
B.1. Sobre la importancia de lo <i>infinitesimalmente</i> pequeño . . . . .	85
<b>Apéndice C. Código para la simulación de las realizaciones</b>	<b>91</b>
<b>Apéndice D. Código de la solución numérica</b>	<b>95</b>

# 1 Introducción

## 1.1. Movimiento browniano

En 1827 el botánico, de origen escocés, Robert Brown se interesó en observar bajo el microscopio el movimiento de pequeñas partículas de polen pues le interesaba el proceso reproductivo de plantas y flores. Sus observaciones hoy se conocen como Movimiento Browniano y dicho concepto describe el siguiente fenómeno: partículas de polen oblongas y quasi-esféricas que al ser suspendidas en agua se mueven como consecuencia de las fluctuaciones mecánicas relacionadas con la temperatura de dicho medio.

En su momento, el doctor Brown ignoraba la razón del movimiento de las partículas de polen. Su primera teoría era “La Vida” pero rápidamente la demostró errada al comprobar que partículas de polen de plantas de cien años de antigüedad se comportaban igual, lo mismo encontró para partículas vidrio, madera quemada y limadura de metales. Una característica en común tenían todos los materiales que Brown empleó: el tamaño de las partículas había de ser “considerablemente” pequeño para poder observar dicho fenómeno.

En la descripción del doctor Brown encontramos una observación importante de carácter físico: “... el movimiento [observado] consistía no sólo en el cambio de posición de las partículas en el fluido, también incluía cambios en la forma de las partículas...”[14]. La observación anterior es de carácter físico y señala cambios de posición y de forma. Desde la física sabemos que tales cambios ocurren por la acción de fuerzas, de modo que Brown daba pie a que sus observaciones se analizaran desde los conceptos de la mecánica que en el siglo XIX ya era bien conocida.

De manera independiente y casi cien años después, Albert Einstein, en 1905, publica *On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat* en donde hace una deducción de la mecánica del Movimiento Browniano y sus características empleando termodinámica y física de fluidos. El propio Einstein dudaba de haber encontrado la mecánica de dicho fenómeno en los años posteriores inmediatos a la publicación de su artículo. Sin embargo, en 1948, Einstein escribe a Michele Besso comentando que en efecto en dicho artículo había logrado describir el Movimiento browniano sin saber que observaciones sólidas de dicho fenómeno ya eran conocidas [14]. A la par, Paul Langevin, también se interesó en investigar el fenómeno del movimiento Browniano y en 1908 publica *Sur la théorie*

*du mouvement brownien* en donde logra deducir, empleando técnicas distintas y más simples que las de Einstein, la mecánica que Einstein había encontrado tres años antes [6]. El desarrollo histórico que nace con los trabajos de Brown, Einstein y Langevin es valioso por diversos motivos, en este trabajo empleo muchos de sus conceptos escritos en la formulación explicada a continuación.

La mecánica descrita por Einstein para el Movimiento Browniano se puede expresar empleando una variable estocástica  $X(t)$  que cumple con la siguiente ecuación

$$X(t + dt) - X(t) = \sqrt{\delta^2 dt} N_t^{t+dt}(0, 1) , \quad (1.1)$$

donde  $N_t^{t+dt}(0, 1)$  representa un número aleatorio tomado de una distribución normal con varianza 1 y media 0, el índice y super índice que se emplean en esta notación sirven para indicar que el número aleatorio empleado sólo es valido para el paso del caminante aleatorio dando en el intervalo de tiempo  $[t, t + dt]$ ,  $\delta$  es conocido como coeficiente de difusión. La ecuación (1.1) es una ecuación estocástica que en teoría de probabilidad se conoce como proceso de Wiener. Es importante notar que Einstein plantea resolver el problema escribiendo una ecuación diferencial estocástica para la velocidad y así determinar posiciones. De resolver la ecuación (1.1) se obtiene la función de densidad de probabilidad para las posiciones de la ecuación (1.1), también conocida como el caminante aleatorio de Einstein.

Por otro lado, la mecánica descrita por Langevin para el Movimiento browniano se expresa en

$$V(t + dt) - V(t) = -\gamma V(t)dt + \sqrt{\beta^2 dt} N_t^{t+dt}(0, 1) , \quad (1.2)$$

donde  $N_t^{t+dt}(0, 1)$  representa un número aleatorio tomado de una distribución normal con varianza 1 y media 0,  $\beta$  es conocido como coeficiente de difusión y  $\gamma$  es el coeficiente de disipación. En la formulación de Langevin se estudian aceleraciones para determinar velocidades. De resolver la ecuación (1.2) se obtiene la función de densidad de probabilidad para las velocidades. En este caso, es necesario apuntar que la ecuación de Langevin se apoya de la siguiente ecuación complementaria para la posición

$$X(t + dt) - X(t) = V(t)dt . \quad (1.3)$$

La ecuación (1.3) es importante pues notemos que si pedimos  $\gamma = 0$  en (1.2), dicha ecuación adopta la forma de la ecuación (1.1). La diferencia sustancial en el tratamiento de Langevin recae en que plantea un balance de fuerzas donde la fuerza está dada por el término aleatorio.

Dejando de lado la diferencia señalada, existe un elemento en común en ambas ecuaciones y es que existe un término estocástico que está definido por el coeficiente  $N_t^{t+dt}(0, 1)$ . Este elemento de la ecuación es de crucial importancia. Desde la matemática, el coeficiente estocástico es un número aleatorio, dicho coeficiente entrega números aleatorios tomados de una distribución normal con media 0 y varianza 1. Sin embargo,

la interpretación física de dicho término es clave en el desarrollo de Einstein y Langevin, y también de mi trabajo.

La manera de entender desde la física a dicho término estocástico es la siguiente: se formula la hipótesis de que el origen del movimiento de las partículas suspendidas en agua son aceleraciones que se producen debido a fuerzas generadas a partir de la suma de un gran número de contribuciones de las partículas de líquido. Las partículas de líquido, que se encuentra a una temperatura  $T_{fluido}$ , producen rápidas fluctuaciones, aleatorias todas, consecuencia de encontrarse a temperatura  $T_{fluido}$ . Dichas fluctuaciones son pequeñas y ocurren en una escala de tiempo  $\tau^*$ . En consecuencia, todas los impulsos de las partículas de agua cambian la posición de las partículas de polen rodeadas de líquido, dicho cambio de posición ocurre en una escala de tiempo  $\tau$ . Como parte de la hipótesis pedimos que  $\tau^* \ll \tau$ .

Lo anterior tiene una consecuencia matemática importante y es la que permite la formulación moderna, mostrada en las ecuaciones (1.1) y (1.2), del problema del Movimiento Browniano. A pesar de que el tiempo  $\tau^*$  es corto, durante ese intervalo de tiempo ocurre un número enorme de fluctuaciones aleatorias de las partículas de líquido y dan origen a fuerzas sobre las partículas de polen. Esto hace posible emplear el teorema de límite central para representar a la fuerza total usando un número aleatorio tomado de una distribución normal como la que expresa el término  $N_t^{t+dt}(0, 1)$ .

Por lo tanto, en el fenómeno del Movimiento browniano existen tres escalas de tiempo a considerar. Existe el tiempo  $\tau^*$  en el que ocurren el gran número de fluctuaciones mecánicas del agua, el tiempo  $\tau$  en el que ocurre el movimiento de la partícula de polen y finalmente  $T$  el tiempo total de observación del fenómeno. La relación entre los tres tiempos anteriores es la siguiente:  $\tau^* \ll \tau \ll T$ .

La explicación anterior está también muy ligada con la observación de Brown sobre la necesidad de elementos suficientemente pequeños a suspender en el agua. Si las partículas suspendidas son grandes, respecto de la magnitud de las fluctuaciones de las moléculas de agua, las partículas no se moverán. Esto implica que existe un tamaño máximo de partícula sobre el cual las fluctuaciones del agua tienen un efecto. De modo que la relación entre la escala de las partículas y la magnitud de las fuerzas es tal que de no cumplirse sería imposible observar el fenómeno físico del Movimiento browniano. Esta es la primera vez que señalo la importancia de la magnitud de las cantidades físicas en este trabajo pero no será la última pues para explorar tales relaciones en este trabajo hago amplio uso del análisis dimensional.

La cualidad que más llamó mi atención de la fenomenología y teoría detrás de los trabajos mencionados es la relación que muestra entre la termodinámica, la mecánica, la estadística y la probabilidad. Estas dos últimas áreas se han empleado, y se emplearán, en todo aquel problema del que sea imposible hacer una descripción completa al estilo de la mecánica clásica. En mecánica clásica en el momento que resolvemos las ecuaciones de movimiento de un problema mecánico podemos conocer el pasado y futuro del

movimiento de un objeto siempre que no sea perturbado, es decir, es posible predecir la evolución temporal del fenómeno.

Por otro lado, ecuaciones del tipo (1.1) y (1.2) se resuelven de manera más limitada. Una vez resueltas tales ecuaciones de movimiento se obtiene la estadística de la frecuencia de los valores de posición y velocidad, se encuentra la función de densidad de probabilidad.

El alcance de la solución para los problemas planteados en las ecuaciones (1.1) y (1.2) parece no ofrecer una solución completa. Sin embargo conocer la función de densidad de probabilidad es equivalente y basta, en alguna medida, para cubrir con la necesidad de predicción. Soluciones de dicho tipo no solo son empleadas en problemas físicos. La famosa ecuación de *Black-Scholes* es un ejemplo de ello.

### 1.1.1. El modelo de Black-Scholes

En 1968 Fischer Black y Myron Scholes publicaron el modelo de *Black-Scholes*. Dicho modelo busca encontrar una función  $C(S, t)$  con  $S$  una variable estocástica que representa el precio del activo sobre el cual se formula un contrato de opción y  $t$  el tiempo. La función  $C(S, t)$  es el precio al cual debe ser vendido ó comprado un tipo de instrumento financiero conocido como Opción Europea. Brevemente, una opción es un contrato que establece un precio fijo de venta ó compra de un activo particular esto se conoce como derecho de opción, el poder ejercer el derecho que da la opción no es obligatorio, de ahí el nombre de opción. En un punto en el tiempo conocemos el precio del activo  $S$  y el problema es determinar cuál es el valor correcto del contrato dado por  $C = C(S, t)$ . La hipótesis que conecta a este modelo financiero con el trabajo de Einstein y Langevin es que la variable aleatoria  $S$  es un caminante aleatorio cuya ecuación diferencial estocástica es de la forma

$$S(t + dt) - S(t) = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)N_t^{t+dt}(0, 1), \quad (1.4)$$

con  $\mu(S, t)$  una función asociada a la media del proceso y  $\sigma(S, t)$  una función asociada a la varianza del proceso. Notemos que la ecuación (1.4) es de la forma de las ecuaciones que motivan a este trabajo (1.1) y (1.2). La hipótesis principal del modelo de *Black-Scholes* es que la variable  $S$  que corresponde al precio de un activo financiero sigue un proceso de Wiener tal como en el caso del Movimiento Browniano. La famosa ecuación de *Black-Scholes* se obtiene de formular al caminante de la ecuación (1.4) y luego se apoya en el desarrollo de la derivada de *Ito* para poder aplicar la regla de la cadena a una función que depende de una variable aleatoria  $S$ , detalles de este procedimiento se pueden encontrar en la referencia [4]. Finalmente se deriva una ecuación cinética asociada que da lugar a la ecuación diferencial parcial de *Black-Scholes*

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial t} + rS \frac{\partial C(S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} = rC(S, t). \quad (1.5)$$

La solución a la ecuación anterior es la función  $C(S, t)$  y describe el precio al cual vender o comprar una opción europea sobre un activo cuyo precio es  $S$  en el tiempo.

El acercamiento a este problema es importante pues en el capítulo 6, 7 y 8 de este trabajo se hace uso de ecuaciones cinéticas asociadas para resolver el problema que se plantea en la siguiente sección.

Recapitulando, hace más de cien años el problema original de Brown tenía una motivación completamente biológica y las herramientas usadas para solucionar dicho problema se obtuvieron de la física que describe el movimiento de cuerpos inertes. El poder de la solución es tal que en tiempos modernos ha servido para describir y modelar un sistema artificial, creado por la humanidad, como lo es la bolsa de valores. Con lo anterior en mente podemos preguntarnos ¿Qué resultará de explorar una modificación a la ecuación original formulada por Paul Langevin, qué nuevo sistema físico es posible describir, qué sistema de origen humano?

## 1.2. Objetivo

El objetivo de esta tesis es estudiar una ecuación tipo Langevin modificada para presentar grandes excursiones. Dicha ecuación se formula en tres versiones: en ausencia de fuerzas adicionales a la fuerza estocástica, considerando fuerza de disipación y considerando fuerza de deriva. La investigación contempla un estudio estadístico de las realizaciones asociadas a la ecuación, un estudio analítico empleando la ecuación cinética asociada y lo anterior se complementa obteniendo la solución a la ecuación empleando un método numérico. Como resultados se tienen tres soluciones analíticas a la ecuación y un parámetro adimensional  $\xi$  que permite cambiar la estadística que siguen las realizaciones de la ecuación de una estadística de ley de potencia a una estadística de distribución normal.

A continuación un esquema de la estructura general de este trabajo y cómo lo abordaremos:

En el capítulo 2 se introduce la ecuación modificada. Dicha modificación es una reformulación de la función que acompaña al coeficiente de difusión del término estocástico de la ecuación de Einstein y tiene como motivación obtener caminatas con grandes excursiones. La ecuación modificada es

$$V(t + dt) - V(t) = \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa}} \beta^2 dt N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) está escrita caracterizando cambios en la velocidad, el planteamiento recuerda a la formulación de Langevin pero la estructura de la ecuación es la del caminante aleatorio de Einstein, la ecuación (1.1). En este mismo capítulo se exponen las matemáticas de la distribución de ley de potencias apoyado en la revisión teórica



de M. E. J. Newman [8], pues la estadística de la ecuación modificada corresponde a esta distribución. Esto se determina empleando un método de ajuste a ley de potencias descrito en la referencia [8]. Un elemento importante que es posible señalar desde ahora en la ecuación (1.6) es que la modificación involucra un parámetro  $\kappa$  que permite recuperar la forma de la ecuación (1.2) sin disipación, si pedimos  $\kappa = 0$ . Adicionalmente, el valor de  $\kappa$  tiene un efecto en la distribución asociada a las realizaciones y se explora a fondo en este capítulo.

En el capítulo 3 se analiza a detalle el concepto de retorno financiero ó diferencia relativa. La intención es revisar los retornos asociados a las realizaciones de la ecuación modificada. El resultado notorio es que, sin importar el valor del parámetro  $\kappa$ , la distribución de retornos es constante y son distribuciones de ley de potencia. Considerando este resultado se comparó con lo mostrado en las referencias [2] y [3], donde muestran que es posible catalogar procesos estocásticos según la ley de potencia asociada a sus retornos. En particular para algunos activos financieros resulta  $\alpha = 3$ .

En el capítulo 4 se explora la modificación pero ahora incorporada al planteamiento formulado por Langevin para el problema del movimiento browniano,

$$V(t + dt) - V(t) = -\gamma V(t)dt + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa}} \beta^2 dt N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (1.7)$$

El esquema para investigar esta versión de la ecuación es el mismo que en el capítulo 1. El resultado importante de este capítulo es que agregar disipación genera que la estadística de los procesos cambie de una distribución normal a una distribución de ley de potencias según la magnitud de  $\gamma$  respecto de  $V_0$ . A partir de este capítulo se emplea análisis dimensional para formular versiones adimensionales de las ecuaciones, de ese modo se simplifica la exploración de los parámetros que aparecen en las ecuaciones (1.6) y (1.7). A partir de este punto toda la investigación se desarrolla de forma adimensional. Las ecuaciones en sus versiones adimensionales son

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = \sqrt{\left|1 - V^*(t^*)\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1), \quad (1.8)$$

con  $V^*(t^*) = \frac{V(t)}{V_0}$  y  $t^* = \frac{\beta t}{V_0}$  las respectivas variables adimensionales. Y también

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V^*(t^*)}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) \quad (1.9)$$

con  $V^*(t^*) = \frac{\gamma V(t)}{\beta}$  y  $t^* = \gamma t$  las variables adimensionales. El símbolo \* colocado a manera de superíndice indica que las cantidades en las ecuaciones son adimensionales, de modo que  $V^*$  es la velocidad adimensional y  $t^*$  el tiempo adimensional, el término  $\xi$  representa el factor adimensional de la ecuación (1.9) y se define como  $\xi = \frac{V_0 \gamma^{1/2}}{\beta}$ .

En el capítulo 5 se investiga la transición encontrada en el capítulo anterior. Aquí cobran relevancia las versiones adimensionales de las ecuaciones pues la ventaja que ofrecen es simplificar todos los parámetros por explorar en un solo número adimensional  $\xi$  que es función de todos los parámetros físicos del problema: la disipación, la difusión y la velocidad de referencia.

Dado que dicha transición resulta novedosa, mi asesor me guió en una búsqueda en la literatura donde descubrí trabajos que encuentran fenómenos analizados desde la estadística que presentan una transición similar. En [5] encontramos que la distribución de momentos de átomos en gases ultra fríos presenta una transición de distribución normal a distribución de ley de potencias en función del tipo de *lattice* en el que se atrapan dichos átomos. En la referencia [1] hay una descripción que se apoya en las observaciones de [5] y una expresión para la distribución de átomos de la forma

$$\rho(P) = C(1 - \beta(1 - q)P^2)^{\frac{1}{1-q}}, \quad (1.10)$$

donde  $C$  es una constante de normalización,  $\beta$  y  $q$  parámetros asociados a las características del *lattice* y  $P$  los momentos de los átomos. La ecuación (1.10) es la distribución de momentos de los átomos descritos en [1] y [5]. Es importante mencionar que esta búsqueda en la literatura la realicé meses después de haber encontrado la solución analítica a mis ecuaciones, pues las soluciones que eventualmente mostraré tienen una forma similar.

En el capítulo 6 se desarrolla la solución numérica de la ecuación de Langevin modificada (1.9). La motivación de buscar la solución de este modo surge de no poder aplicar el método de solución analítica a la ecuación de Langevin que es ampliamente expuesto en el capítulo 8 del libro de Don S. Lemons [7]. Sin embargo, mientras desarrollaba la búsqueda de la solución por métodos computacionales mi asesor de tesis y yo encontramos rápidamente la solución a la ecuación sin termino de arrastre empleando otra técnica analítica: la ecuación asociada de *Fokker-Planck*. La relevancia de la solución numérica recae en que es la única manera en que se resuelve ese problema en este trabajo.

En el capítulo 7 se exponen los pasos para llegar a la solución analítica de la ecuación (1.6) empleando la ecuación asociada de *Fokker-Planck*.

En el capítulo 8 se estudia la ecuación modificada de Langevin (1.9) bajo el efecto de un término de deriva (*drift* en inglés)

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -(V^*(t^*) - \xi)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^* + dt^*}(0, 1). \quad (1.11)$$

Se analiza del mismo modo que las primeras dos ecuaciones estudiadas y una solución analítica también es encontrada. Un resultado importante de agregar el arrastre es que la transición entre distribuciones desaparece. En este capítulo se ofrece una explicación a este resultado. La solución analítica que se encuentra para esta ecuación surge de los

resultados mostrados en el capítulo 5 y la solución analítica del capítulo 7. Las formas de la solución que se encuentran para la distribución de velocidades son

$$\rho(v^*) = C|1 - v^*|^{-2\kappa} \quad (1.12)$$

y

$$\rho(v^*) = C \left| 1 - \frac{v^*}{\xi} \right|^{-1}. \quad (1.13)$$

La ecuación (1.12) es la solución al caminante aleatorio inicial formulado en (1.8). La ecuación (1.13) es la solución a (1.11) que es la formulación del caminante modificado y bajo el efecto de disipación y arrastre para  $\kappa = 1/2$ .

En este punto de mi trabajo se vuelve casi obligado buscar una aplicación del sistema que he formulado, decidí buscar series de tiempo que presentaran las características que presentan las realizaciones de mi caminante original. La serie de tiempo que elegí fue la serie del precio de *Bitcoin*.

Finalmente en el capítulo 9 se estudia la serie de tiempo de *Bitcoin* a manera de aplicación. Encuentro que el modelo desarrollado hasta ahora no es aplicable a la serie de tiempo pero son aplicadas las técnicas desarrolladas para distribuciones de leyes de potencias pues la distribución de los retornos del precio de *Bitcoin* resultan seguir una ley de potencias.

Todo el trabajo se complementa con cuatro apéndices: en el apéndice A se discuten la importancia del tamaño del  $dt$  asociado a las simulaciones empleadas durante esta investigación. En el apéndice B se encuentran anotaciones acerca de la función valor absoluto y maneras de aproximar dicha función computacionalmente. En el apéndice C se encuentran los códigos computacionales en FORTRAN 90 para las realizaciones de las tres ecuaciones estocásticas que hemos mencionado. Finalmente, en el apéndice D, se encuentra el código para resolver la ecuación (1.9) en el lenguaje *Mathematica*

## 2 La ecuación modificada de Langevin

En este capítulo desarrollaremos las herramientas necesarias para el ajuste a distribuciones de probabilidad de ley de potencias. Una vez desarrolladas las herramientas pasaremos a revisar a la modificación a la ecuación de Langevin que queremos estudiar. La ecuación se plantea desde la formulación de Langevin del problema del movimiento Browniano sin considerar el término de disipación. El capítulo cierra una vez que queda determina la potencia de las distribuciones de ley de potencia que siguen las realizaciones de la ecuación modificada.

### 2.1. Leyes de potencia y fenómenos libres de escala

Medir es el complemento obligado de la observación científica, y consiste en comparar las observaciones sobre un sistema físico con una unidad de referencia. A esta unidad de referencia se le conoce, de manera rigurosa, como escala natural y depende del fenómeno de interés. Es usual que al reportar mediciones en una tabla se anote en la parte superior la unidad de referencia, esta es la escala natural que se ha elegido. La escala natural es una elección, hasta cierto punto, arbitraria.

La escala natural es un concepto que puede ser abordado desde el análisis dimensional. La idea central de esta rama de la física es, en palabras sencillas: las leyes físicas no dependen de unidades elegidas arbitrariamente para medir. Es decir, sin importar las unidades de medición, las magnitudes que se obtienen luego de cálculos son siempre equivalentes entre sistemas de unidades. Usando este simple hecho, y elegida una escala natural, el análisis dimensional permite conocer la forma de términos en una ecuación siempre que estén asociados a fenómenos físicos.

Cuando ya se cuenta con un conjunto de mediciones hacer un análisis estadístico es útil, pues permite obtener datos para describir el comportamiento del sistema. Una herramienta útil que brinda la estadística son los histogramas. Un histograma, en su versión más sencilla, es una gráfica de barras que permite observar la frecuencia de valores en un conjunto de datos.

Por otro lado, una función de densidad de probabilidad asocia probabilidades a valores posibles. Graficar una de estas funciones revela la forma de la distribución de probabilidad asociada a esta función. Volviendo al conjunto de mediciones, cuando el número de mediciones (muestras) tiende a infinito, al generar un histograma de esta gran cantidad de muestras se está generando la distribución de probabilidad de nuestras mediciones. Si este histograma adopta una forma familiar, es de interés conocer con qué grado de precisión se ajusta el histograma a alguna distribución de probabilidad conocida. La manera más simple de hacer esto es superponer nuestro histograma y la gráfica de nuestra función de densidad de probabilidad.

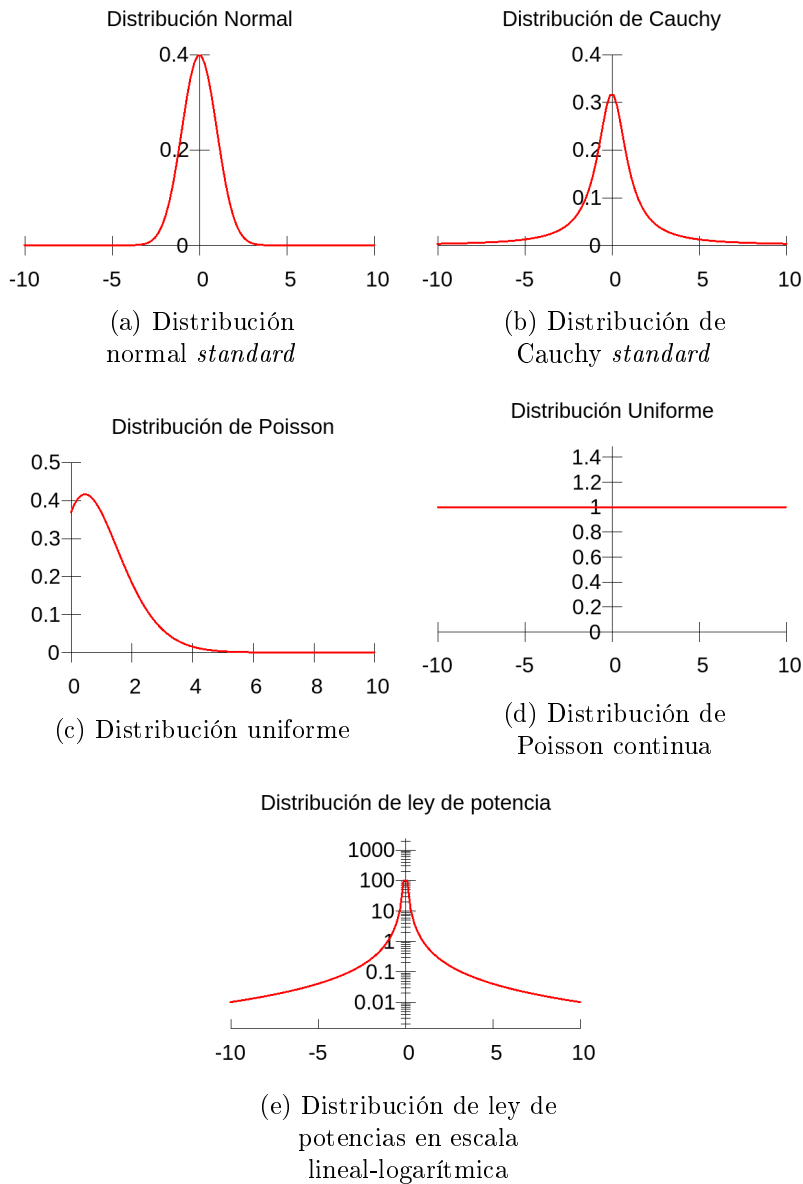


Figura 2.1: Gráficas de distintas funciones de densidad de probabilidad en el intervalo  $[-10, 10]$ .

En la figura 2.1 tenemos las distribuciones de probabilidad asociadas a 5 funciones de densidad de probabilidad. Fijémonos en la figura 2.1e, esta es la gráfica de la función de densidad de probabilidad de una ley de potencias. Para el estudio posterior es de interés. Regresando a las mediciones que podemos realizar de un fenómeno, cuando afirmamos, desde el punto de vista estadístico, que un conjunto de mediciones sigue una ley de potencia, es debido a que los valores corresponden a una distribución de ley de potencia. La forma de esta distribución se ilustra en la figura 2.1e. Matemáticamente esta distribución tiene asociada la siguiente función:

$$\rho(x) = Cx^{-\alpha} \quad (2.1)$$

Con  $C$  una constante de normalización que queda determinada una vez se escoge  $\alpha$ , y  $\alpha > 0$ . Esta función de densidad de probabilidad tiene una cualidad intrínseca: es libre de escala. Una definición rápida de este concepto: un fenómeno lucirá, bajo una representación gráfica, siempre igual sin importar la escala natural en la que se observe. De manera matemática podemos expresar dicho concepto de la siguiente forma, comencemos por proponer una función  $\rho(x)$  que cumpla

$$\rho(bx) = g(b)\rho(x) , \quad (2.2)$$

para cualquier  $b$ . De manera que, si escalamos  $b$ -veces la magnitud de  $x$ , la forma de la distribución permanece igual salvo por un factor función de  $b$ . Resulta que la distribución de ley de potencia es la única distribución que cumple esto. En la sección 3.5 de [8] se ofrece una prueba y referencias sobre la unicidad de la distribución.

Por ahora nos interesa probar que en efecto la distribución de ley de potencia cumple la propiedad impuesta en (2.2). Sea

$$\begin{aligned} \rho(bx) &= C(bx)^{-\alpha} \\ &= Cb^{-\alpha}x^{-\alpha} . \end{aligned}$$

Dado que  $b$  es una constante conocida pues es el número de veces que decidimos aumentar la magnitud de nuestros elementos  $x$ , la constante

$$Cb^{-\alpha} \quad (2.3)$$

está completamente determinada pues  $C$  es la constante de normalización de la distribución y  $\alpha$  la potencia de la distribución. Lo anterior es la propiedad de libertad de escala de la ley de potencias, la distribución no cambia de forma sin importar la escala natural con la que se eligen las muestras  $x$  de la distribución.

Ahora volvamos a la escala natural que mencionamos al inicio. Acabamos de probar que cuando los valores de una medición son libres de escala podemos cambiar la escala natural de nuestro fenómeno sin afectar la distribución de magnitudes en nuestras mediciones. Existe una manera gráfica de apreciar este particular resultado. Para ilustrarla comencemos por plantear las condiciones de un experimento hipotético:

Pensemos por un momento que hemos seleccionado un fenómeno a observar, la escala en la cual lo vamos a medir y que ya hemos conseguido un número suficiente (a discreción del observador) de mediciones. El siguiente paso es graficar estas mediciones en una gráfica *número de medición (eje  $x$ ) vs. valor de la medición (eje  $y$ )*. Lo que tendremos será una representación gráfica del comportamiento de nuestro sistema.

Ahora pensemos que, de alguna manera, ya hemos constatado que nuestras mediciones son libres de escala. Si decidimos cambiar la escala en la cual medimos nuestro fenómeno y lo volvemos a graficar estas nuevas mediciones en una gráfica *número de medición (eje  $x$ ) vs. valor de la mediciones (eje  $y$ )*. Lo que obtendremos será una representación gráfica idéntica, o por lo menos muy parecida, a la que obtuvimos previamente. El ejemplo más a mano que se tiene de esto son los fractales. En la figura 2.2 tenemos un ejemplo de un fractal.

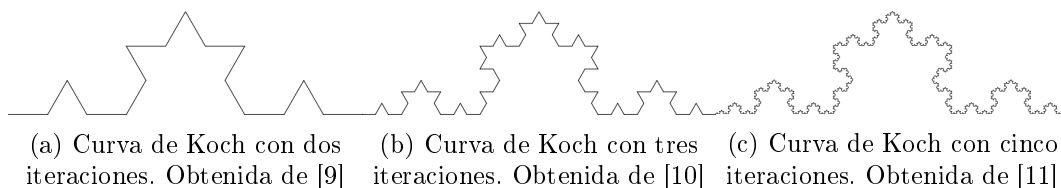


Figura 2.2: Curva de Koch, ampliamente usada como ejemplo de una curva fractal. Notemos que al ampliar un segmento de la figura 2.2c, devuelve la gráfica de una sección como la de la figura 2.2b. A su vez, de ampliar la figura 2.2b obtenemos un segmento cuya gráfica corresponde a la mostrada en la figura 2.2a

Poniendo en palabras lo que las imágenes anteriores explican por sí solas: la representación básica del fenómeno se repetirá sin importar la cantidad de mediciones que tengamos y la escala natural con la cual decidamos obtener nuestros datos. Esto puede parecer una característica trivial. Sin embargo, son pocos los fenómenos que se conocen que presentan un comportamiento libre de escala y que siguen una distribución de ley de potencia en su valores medidos.

Notemos que ahora contamos con dos acepciones al concepto de libertad de escala. La acepción estadística que nos dice que un fenómeno tiene una estadística libre de escala si sigue una distribución de ley de potencias y la acepción física que nos dice que un fenómeno es libre de escala si la representación gráfica de dicho fenómeno no cambia al cambiar la escala natural en la que se observa.

### 2.1.1. La distribución de ley de potencias y cómo ajustarla

Miremos más de cerca cómo luce la distribución de ley de potencias. En la figura 2.3 tenemos tres gráficas todas mostrando la distribución de ley de potencias. La diferencia entre cada una de ellas radica en la escala en la que se muestran los ejes. En la figura 2.3a tenemos la distribución de ley de potencias en escala lineal-lineal, es evidente que nos estamos perdiendo de contenido como resultado del violento crecimiento de la gráfica respecto del eje  $y$ . Esta forma recuerda una delta de Dirac.

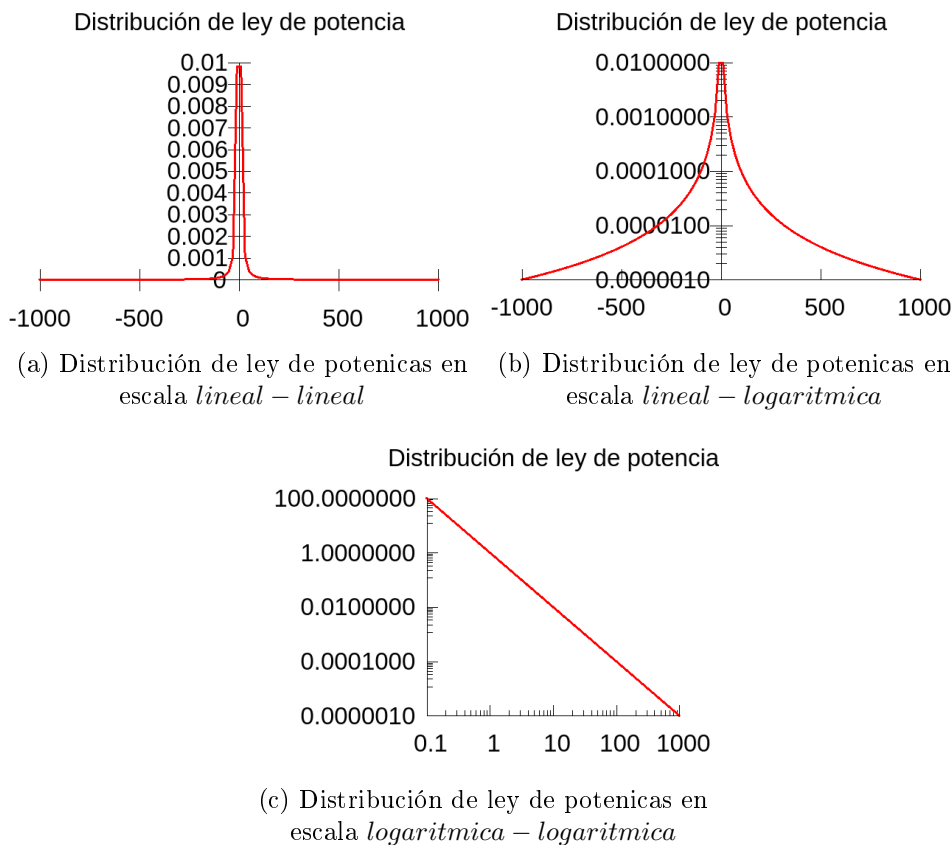


Figura 2.3: Gráficas de la densidad de probabilidad de ley de potencia en el intervalo  $[-1000, 1000]$ .

En la figura 2.3b tenemos la distribución de ley de potencias ahora en escala lineal-logarítmica, de manera que es más claro lo que ocurre con la distribución respecto del eje  $y$ . El cambio acelerado, respecto del eje  $y$ , ocurre a lo largo de, al menos, 4 ordenes de magnitud. En un sentido más cualitativo, la forma de la distribución recuerda a la arquitectura nativo americana, a un tipi (*teepee*). Finalmente, al graficar la distribución en escala logarítmica-logarítmica podemos apreciar que en el intervalo  $(0, 1000]$  la distribución de ley de potencias luce como una línea recta con pendiente negativa y que se extiende por 8 ordenes de magnitud, antes de intersectar a ambos ejes coordenados. Esto último se muestra en la figura 2.3c. El intervalo de esta última gráfica es  $[0.1, 1000]$  puesto que el logaritmo de un número menor ó igual a cero está indefinido. La forma



de esta última gráfica es la razón por la cual a la función (2.1) se le conoce como ley de potencias.

La figura 2.3 muestra un análisis gráfico detallado de la forma de una distribución de ley de potencias. En conjunto estas tres gráficas definen (lo que he decidido llamar) **la firma gráfica de una distribución de ley de potencias**.

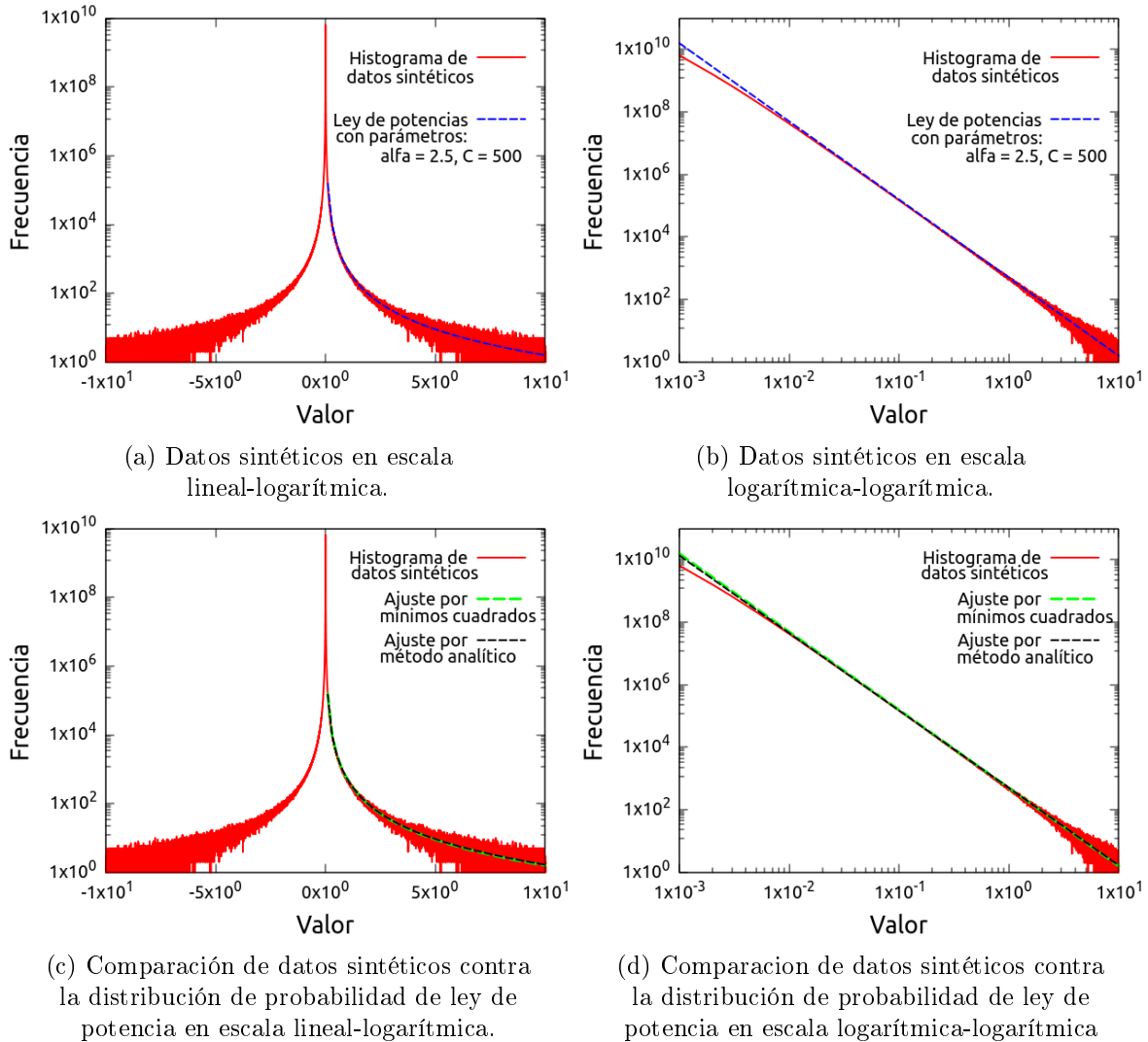


Figura 2.4: Histograma de  $10^{10}$  datos sintéticos generados a partir de una distribución de ley de potencias empleando el método de *Box-Muller*, tamaño del cajón (*bin* en inglés) 0.001. En las primeras dos figuras se observa una comparación de los datos sintéticos contra la función de densidad de probabilidad de la forma (2.1) con parámetros  $C = 500$  y  $\alpha = 2.5$  y considerando que el valor mínimo a obtener de la distribución es  $x_{min} = 0.001$ . En las siguientes dos figuras tenemos los datos sintéticos comparados con dos ajustes obtenidos por distintos métodos. El método de ajuste por mínimos cuadrados y el método de ajuste analítico (función de versomilitud), ambos descritos en los párrafos siguientes.

Veamos ahora dos métodos de ajuste para determinar si el histograma de un conjunto de datos corresponde a una distribución de ley de potencias. En la figura 2.4a y 2.4b se muestra el histograma de datos sintéticos generados aleatoriamente de la función de densidad de probabilidad de ley de potencias empleando el método de *Box-Muller*. Los cajones (ó *bins* en inglés) del histograma son de tamaño 0.001, se muestran de color rojo y sólo el borde superior. La figura 2.4a muestra el histograma en escala *lineal-logarítmica*, en ella apreciamos ya la firma gráfica de *teepee*. En la figura 2.4b observamos el histograma ahora en escala logarítmica-logarítmica y es una recta a lo largo de 4 ordenes de magnitud, la segunda firma gráfica.

Las firmas gráficas son sugerentes, notemos que en las figuras 2.4a y 2.4b tenemos superpuesta la gráfica de la función de densidad de probabilidad cuya forma es  $p(x) = 500x^{-2.5}$ . Vemos que, en efecto, la forma de la distribución de ley de potencias ajusta a la perfección con el histograma durante algún intervalo en el eje  $y$  y finalmente el ruido en la cola del histograma genera *bins* con frecuencias mayores y menores respecto de las frecuencias teóricas que se espera observar. Como era de esperarse, los datos sintéticos coinciden en algún intervalo con la forma teórica de la distribución de probabilidad.

Pasemos ahora al primer método de ajuste que consiste en ajustar la pendiente de la recta que se muestra en las gráficas del tipo de la figura 2.4d. Tomando como base el ejemplo que ilustramos anteriormente, para realizar el ajuste se consideran los puntos  $(x, y)$  que caen en el intervalo  $[0.001 : 3]$ . La pendiente  $m$  de la recta punteada en verde que se obtiene con el ajuste corresponde, en principio, a la  $\alpha$  que buscamos. El ajuste arroja que:  $\alpha = 2.478 \pm 1.293$ . Es un valor cercano al exponente que, *a priori*, conocemos de  $\alpha = 2.5$ . Sin embargo no es totalmente correcto y el error es grande. Nos referiremos a este método como **técnica de reconstrucción por ajuste lineal**. Es importante notar que este método depende del tamaño de *bin* para realizar el ajuste.

El segundo método es un poco más complejo, pero más preciso. Para explicarlo es necesario comenzar con la derivación de una ecuación que calcula de manera analítica el valor de  $\alpha$ . Comencemos por recordar la forma general de la función de densidad de probabilidad de ley de potencias y agregemos la forma de la constante de integración normalizada a uno como se explica en la sección 3.1 de la referencia [8]

$$\rho(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left( \frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha}, \quad (2.4)$$

donde  $C$  es de la forma  $C = (\alpha - 1)x_{min}^{\alpha-1}$ , con  $x_{min}$  el dato más pequeño de la muestra obtenida. Ahora calculamos la forma explícita de la probabilidad de obtener una valor particular de  $x$  dada una  $\alpha$  considerando que tenemos  $x_i$  elementos de donde elegir

$$P(x|\alpha) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left( \frac{x_i}{x_{min}} \right)^{-\alpha}. \quad (2.5)$$

La ecuación anterior, ecuación (2.5), es conocida como función de verosimilitud. Ahora

obtenemos el logaritmo natural de esta función de verosimilitud

$$L = \ln(P(x|\alpha)) = \ln \left[ \prod_{i=1}^n \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left( \frac{x_i}{x_{min}} \right)^{-\alpha} \right]. \quad (2.6)$$

Desarrollando la ecuación anterior tenemos

$$L = n \ln(\alpha - 1) - n \ln(x_{min}) + \sum_{i=1}^n -\alpha \ln \left( \frac{x_i}{x_{min}} \right). \quad (2.7)$$

Ahora calculamos el valor más probable para  $\alpha$ , esto se efectúa calculando el máximo de la función con respecto de  $\alpha$ , es decir calculamos  $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$  e igualamos a 0. Tenemos

$$\frac{n}{\alpha - 1} - \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{x_{min}} \right) = 0, \quad (2.8)$$

de donde finalmente obtenemos que

$$\alpha = 1 + n \left[ \sum_i \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right]^{-1}. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, con la ecuación (2.9) tenemos una ecuación que permite calcular  $\alpha$  de manera analítica y haciendo uso del conjunto de datos de interés que genera el histograma dado por la figura 2.4b. Es importante no perder de vista que esta expresión analítica de  $\alpha$  es para el caso en que tenemos un número finito de mediciones. Nos referiremos a este método como **técnica de reconstrucción analítica** ó **técnica de reconstrucción de alfa via la función de verosimilitud**.

Con este método tomando el conjunto de datos que genera el histograma 2.4b y usando la ecuación (2.9) obtenemos  $\alpha = 2.499 \pm 2.1 \times 10^{-15}$ .

Descritas las dos técnicas resta compararlas. Con la técnica de reconstrucción por ajuste lineal obtenemos  $\alpha = 2.478 \pm 1.293$ . Mientras que con la técnica de reconstrucción analítica obtenemos  $\alpha = 2.499 \pm 2.1 \times 10^{-15}$ . La técnica de reconstrucción analítica es superior considerando el alfa que determina y el error con el que se determina. Ahora contamos con dos métodos que nos permiten evaluar si un conjunto de datos que presenta las firmas gráficas de leyes de potencia es en efecto una distribución de este tipo y conocer qué exponente corresponde en caso de ser una de estas distribuciones. Esta habilidad es crucial para el desarrollo de los capítulos posteriores.

## 2.2. La modificación

La sección anterior que trata sobre leyes de potencia tiene una motivación bien clara, y es la siguiente ecuación

$$V(t + dt) - V(t) = \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa} \beta dt} N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) tiene la estructura de un proceso de Wiener como los que se comentaron en la introducción, en particular tiene la estructura del caminante aleatorio de Einstein pero la ecuación caracteriza velocidades. La intención es poder comparar las realizaciones de (2.10) con las de la ecuación una vez consideremos disipación. Ahora, notemos que la modificación se incorpora dentro de la raíz cuadrada acompañando al coeficiente de difusión y es la función

$$g(V(t)) = \left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa}. \quad (2.11)$$

Es importante mencionar que un proceso Markoviano es aquel cuyas iteraciones futuras y actual no dependen de las iteraciones previas del proceso. La función (2.11) depende de  $V(t)$  y como consecuencia ahora los pasos del caminante modificado dependen explícitamente del paso previo. El proceso aleatorio descrito por la ecuación (2.10) ya no es un proceso Markoviano.

Sin embargo, la característica a notar es que en la ecuación (2.10) cuando el parámetro  $\kappa = 0, \beta = 1$  recuperamos la ecuación de movimiento Browniano en el caso particular en que  $\delta = 1$  veamos.

$$V(t + dt) - V(t) = \sqrt{1dt} N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (2.12)$$

$$X(t + dt) - X(t) = \sqrt{1dt} N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (2.13)$$

La ecuación (2.12) tiene la misma estructura que la ecuación del caminante aleatorio de Einstein, la ecuación (2.13). Y en este caso el proceso modificado sí es Markoviano pues se pierde la dependencia en las iteraciones previas. Ahora constatemos que, en efecto, cuando  $\kappa = 0$  obtenemos un comportamiento como el del caminante de Einstein. Para hacerlo generaremos una realización de la ecuación: generaremos  $10^7$  números aleatorios siguiendo la regla de iteración dada por la ecuación (2.10) fijando los respectivos parámetros  $\beta, \kappa, V_0$  y  $dt$ . En la figura 2.5 tenemos una realización de la ecuación (2.10) con  $\kappa = 0$ , y en efecto tenemos un comportamiento que asemeja a un caminante aleatorio de Einstein.

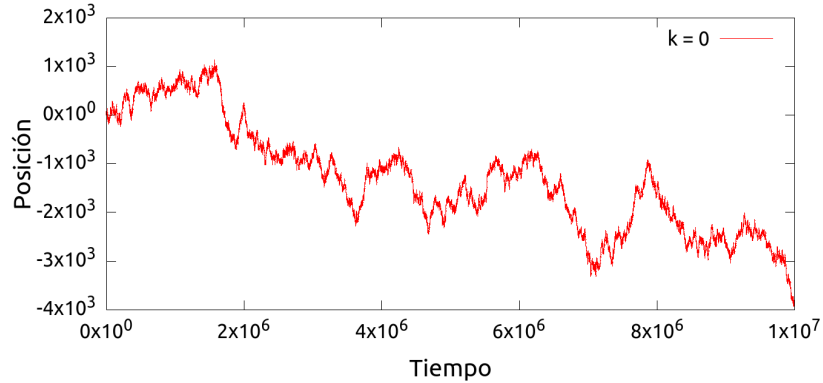


Figura 2.5: Gráfica de  $V(t)$  para una realización de la ecuación (2.10) con parámetros  $\kappa = 0, \beta = 1, V_0 = 1, dt = 1$  y con  $10^7$  iteraciones.

Luego nos fijamos en una realización del proceso (2.10) con  $\kappa = 1/2$ , como mostramos en la figura 2.6. Lo que notamos es contrastante con el comportamiento mostrado en la figura previa. Ahora el caminante aleatorio, parece poropenso a cruzar el eje horizontal sin que se pierda la posibilidad de que esta tendencia hacia una sección del eje  $y$  pueda cambiar.

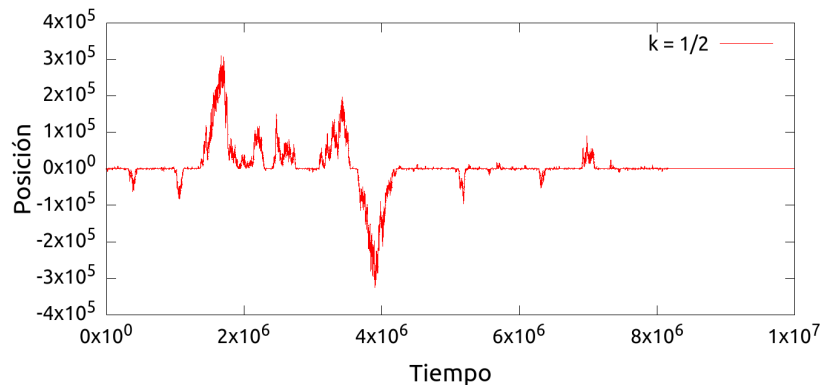


Figura 2.6: Gráfica de  $V(t)$  para una realización de la ecuación (2.10) con parámetros  $\kappa = \frac{1}{2}, V_0 = 1, dt = 1$  y con  $10^7$  iteraciones.

Más aún surge una pista que nos devuelve a la discusión sobre fenómenos libres de escala pues parece que estamos ante uno de estos fenómenos. Si efectuamos acercamientos a la figura 2.6 encontramos que al acercarnos incluso varios ordenes de magnitud (en el eje  $x$ ) seguimos observando caminatas aleatorias parecidas, es decir, existe un comportamiento estadísticamente autosimilar, tenemos un comportamiento libre de escala. Estos acercamientos se muestran figura 2.7. Una **nota importante**, llamaremos de manera genérica **caminata** a la representación gráfica de una realización de la ecuación (2.10), por ese motivo los ejes verticales de las gráficas llevan el nombre de posición. Lo anterior sin perder de vista que la ecuación (2.10) caracteriza velocidades.

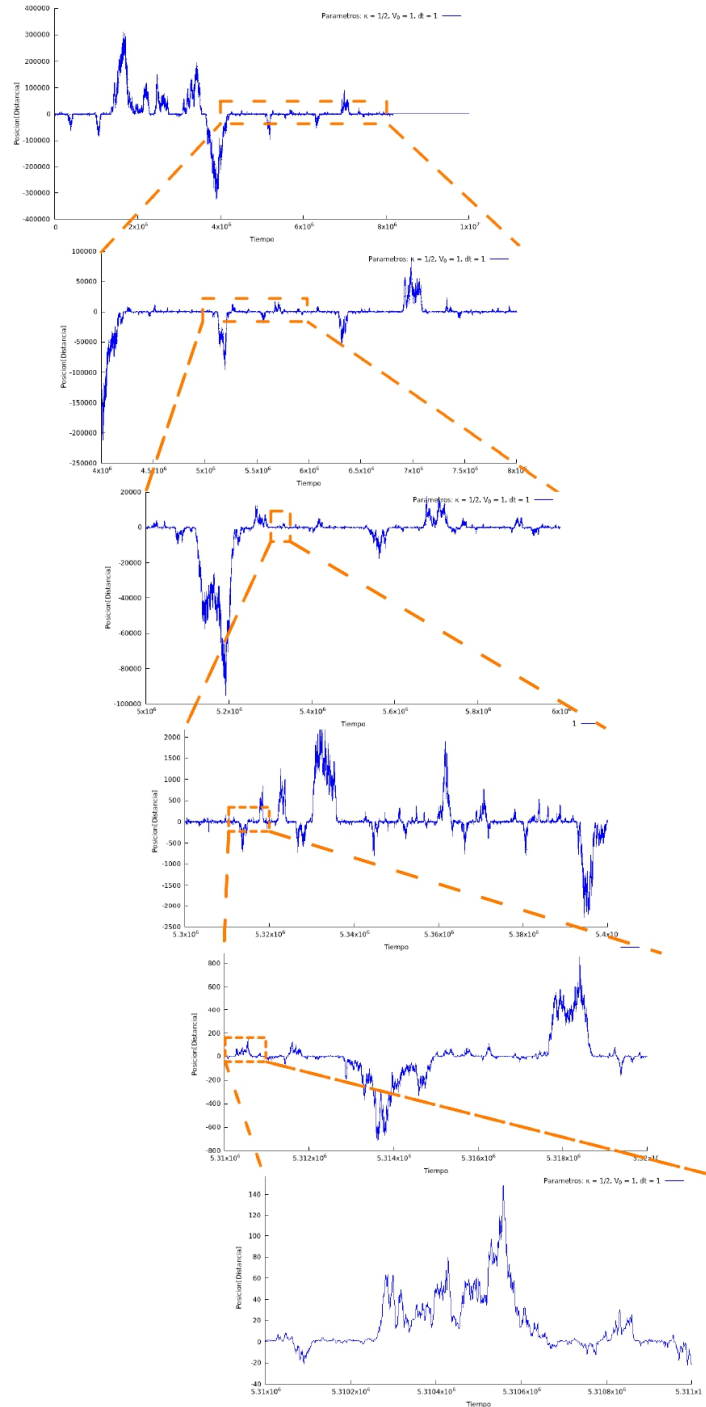


Figura 2.7: Acercamientos a la figura 2.6 que permiten visualizar que nos encontramos ante un fenómeno libre de escala

Ahora sabemos que el valor de  $\kappa$  está asociado a un cambio en el comportamiento de las caminatas. Veamos que ocurre para más realizaciones con distintas  $\kappa$ . Para estas realizaciones numéricas de la ecuación es necesario dar cuatro parámetros  $V_0$ ,  $\kappa$ ,  $dt$  y  $\beta$ . En la figura 2.8 se muestran la realizaciones para  $10^7$  pasos (ó iteraciones) con los parámetros  $V_0 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $dt = 1$  y  $\kappa = 0, 1/5, 1/3, 1/2, 2/3, 8/10$

respectivamente.

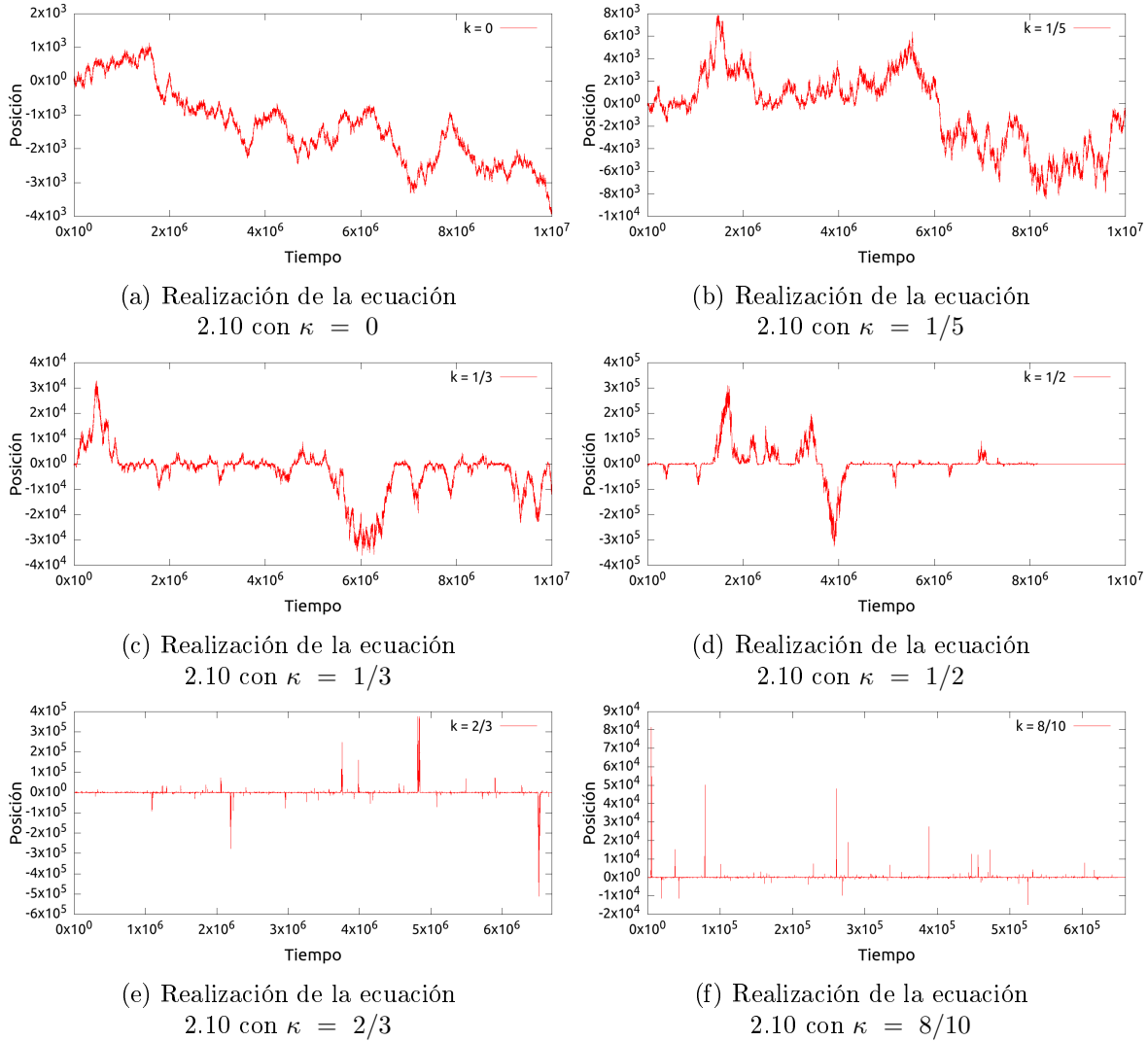


Figura 2.8: Comparación de las realizaciones de la ecuación 2.10 considerando  $10^7$  iteraciones, para distintas  $\kappa$  y con mismos parámetros  $V_0 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $dt = 1$ .

Notemos que según el valor de  $\kappa$ , el comportamiento de la caminata cambia drásticamente. Como dijimos antes, para  $\kappa = 0$  se recupera la ecuación de movimiento browniano clásica pero conforme  $\kappa$  aumenta las caminatas muestran excursiones excesivamente grandes respecto de  $V_0$ .

Notemos también que existe un atractor al rededor de  $V_0$ , es decir el caminante aleatorio tiene una tendencia a volver al valor  $V(t) = V_0$ . Sin importar el tamaño de la excursión esta siempre vuelve a cruzar el valor  $V_0$ . Estas excursiones no son periódicas, son completamente aleatorias tanto en frecuencia como en magnitud y duración. Ahora, avanzando sobre la línea estadística de principio de capítulo, revisaremos los histogramas asociados a las realizaciones pues es nuestro objetivo conocer qué tipo de

distribución siguen. En la figura 2.9a se muestran los histogramas superpuestos de 6 realizaciones de  $10^{10}$  iteraciones, para los parámetros en común  $dt = 1$ ,  $V_0 = 1$ ,  $\beta = 1$  y con  $\kappa = 0, 1/2, 1/3, 1/5, 2/3, 7/10$  respectivamente.

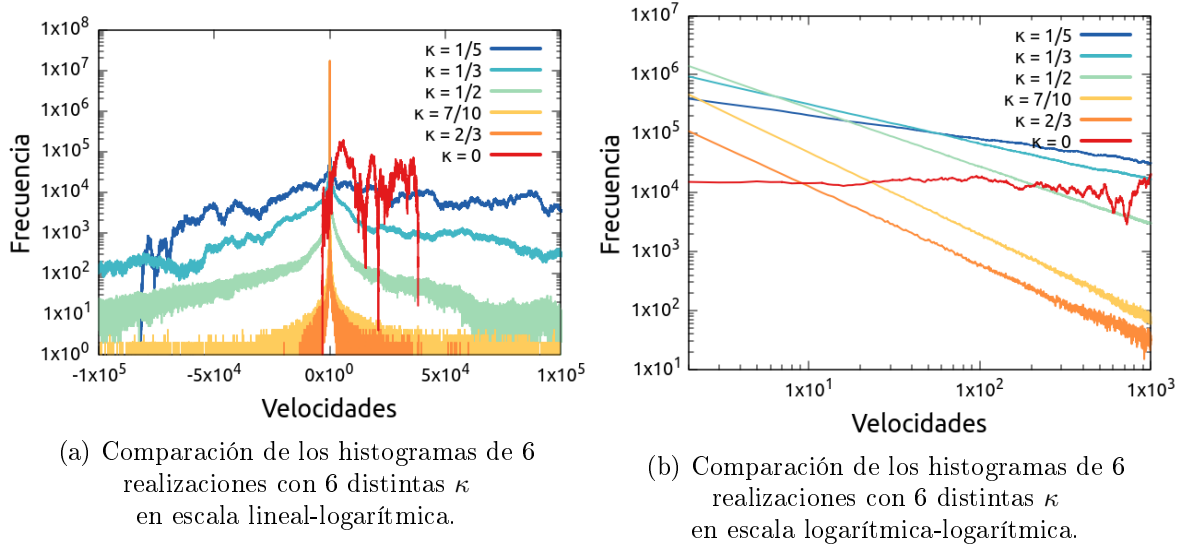


Figura 2.9: Comparación de 6 histogramas cada uno asociado a una realización con  $\kappa$  distinta. Todos los histogramas tienen cajones de tamaño 1 y por simplicidad sólo se muestra el borde superior de dichos cajones.

Inmediatamente se observa la firma gráfica de una distribución de ley de potencias. En la figura 2.9a aparece la forma de *teepee* para 5 de los 6 histogramas. En la figura 2.9b aparece una recta que atraviesa por varios órdenes de magnitud según el  $\kappa$  correspondiente. Ahora emplearemos la técnica de regresión lineal en conjunto con la técnica de reconstrucción analítica de  $\alpha$  mediante la ecuación (2.9). El objetivo es conocer exactamente cuáles son las densidades de probabilidad de ley de potencia que dan lugar a la distribución de valores para las realizaciones de la ecuación 2.10. Antes de avanzar notemos que el caso  $\kappa = 0$  es el caso particular que recupera la versión original de la ecuación de Langevin y para este caso la firma gráfica de ley de potencias se pierde.

En la tabla 2.1 tenemos las estimaciones de alfa para cada realización según el método utilizado.

Caminata - Método	Caminata 1 $\kappa = 1/5$	Caminata 2 $\kappa = 1/3$	Caminata 3 $\kappa = 1/2$	Caminata 4 $\kappa = 2/3$	Caminata 5 $\kappa = 7/10$
$\alpha$ estimada con la ecuación (2.9)	$0.40390 \pm 8.68 \times 10^{-3}$	$0.59453 \pm 5.43 \times 10^{-2}$	$0.69352 \pm 0.117$	$0.47682 \pm 3.49 \times 10^{-3}$	$0.59961 \pm 7 \times 10^{-3}$
$\alpha$ estimada con la regresión lineal	$0.406 \pm 0.00105$	$0.668 \pm 0.00107$	$1 \pm 0.0011$	$1.34 \pm 0.00361$	$1.4 \pm 0.00168$

Tabla 2.1: Estimación de  $\alpha$  usando el método de regresión lineal y el método de reconstrucción analítica



Lo que muestra el cuadro 2.1 parece no coincidir con la conclusión de nuestros ejercicios de ajuste de datos sintéticos de la sección anterior. El cuadro muestra que en este caso el ajuste por método de regresión lineal (renglón inferior del recuadro) determina de mejor modo el exponente de distribución. El detalle bastante elusivo, y que no será claro hasta el capítulo 7 de este trabajo, es que la función empleada para determinar  $\alpha$ , la ecuación (2.9), supone que la forma de la distribución es como la de la ecuación (2.1). La solución que mostraremos en el capítulo 7 encuentra que es una distribución distinta y por tanto es necesario emplear otra ecuación si queremos aplicar este método de ajuste.

Por otro lado, que el ajuste lineal funcione de manera tan precisa se debe a que estamos ante un fenómeno libre de escala y que cuenta con un número enorme de realizaciones. La región del histograma donde el ruido aparece se recorre cada vez más y más a la derecha de manera proporcional a la cantidad de datos. Es decir, mientras más datos tengamos las rectas que vemos en la figura 2.9b se extienden por más ordenes de magnitud respecto del eje  $y$ , esto a su vez extiende los ordenes de magnitud que la recta cubre en el eje  $x$ . Notemos que esto no altera la pendiente de la recta. Aún así es importante considerar que para este ajuste es necesario trabajar con el logaritmo de número de *bin* y el logaritmo de su respectiva altura y por tanto el error considerado en el cuadro es mayor de lo que la cifra puede aparentar.

Gráficamente podemos ver el formidable desempeño de la técnica de reconstrucción por ajuste lineal en la figura 2.10. En esta figura mostramos de manera individual los histogramas de la figura 2.9b (en su respectivo color según la leyenda de la misma figura) junto con su respectiva recta de ajuste lineal en líneas punteadas y de color negro.

Por lo tanto, hemos probado que la realizaciones de la ecuación (2.10) son un fenómeno libre de escala y que sigue una ley de potencias. Lo primero lo probamos con la figura 2.2, lo segundo lo probamos con el desarrollo previo a este párrafo, la primer evidencia estuvo en la firma gráfica que era evidente a la vista de las figuras 2.9a (forma de *teepee*) y 2.9b (recta por varios órdenes de magnitud.). Terminamos de constatarlo una vez que los ajustes revelaron la forma de las densidades de probabilidad que gobiernan a cada una de las distribuciones de datos asociados a las realizaciones. Esto se aprecia en la figura 2.10

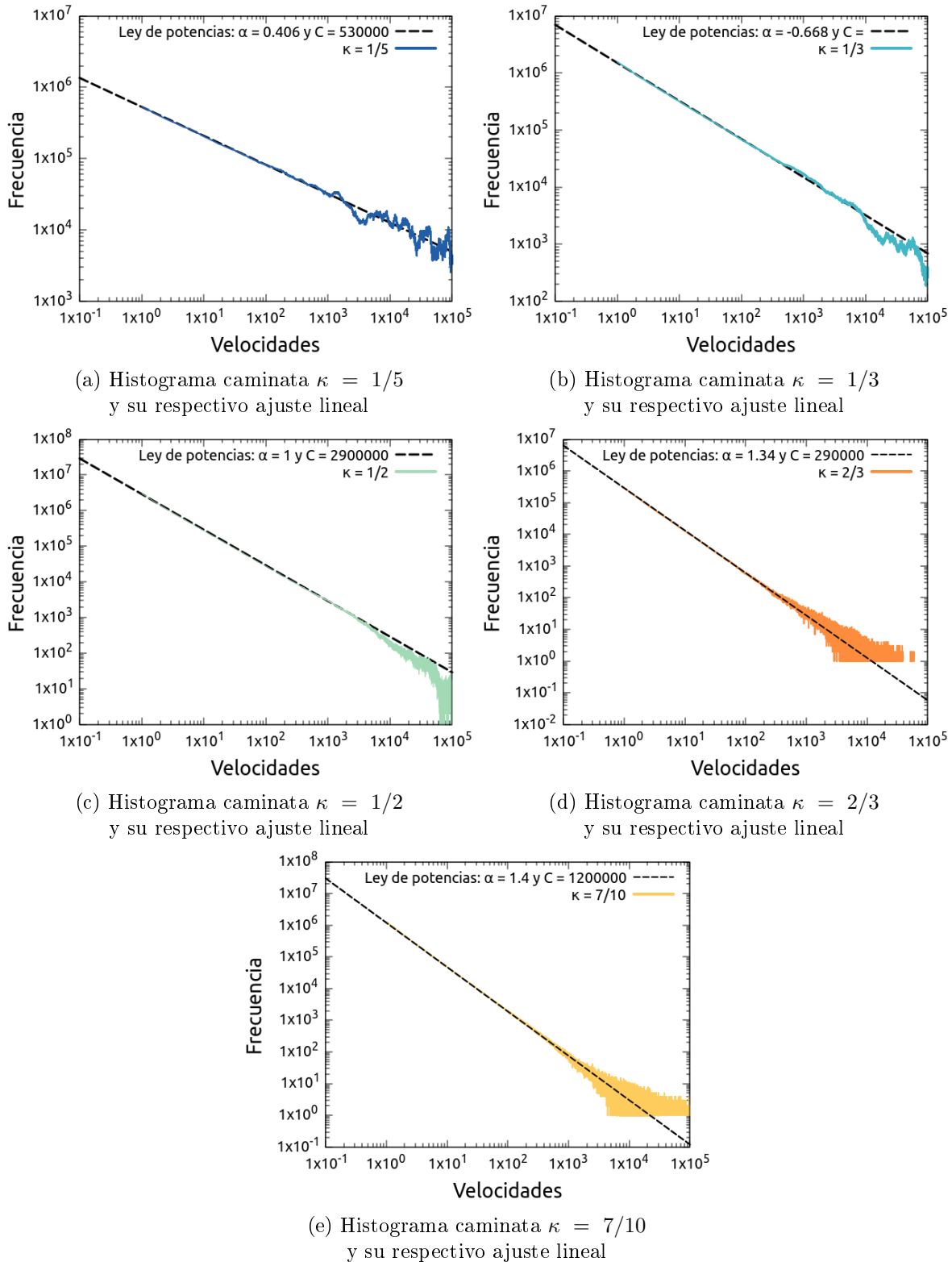


Figura 2.10: En cada subfigura tenemos el histograma de cada caminata para cada  $\kappa$  distinta. Es importante notar que a cada  $\kappa$  corresponde una distribución de ley de potencia distinta.

Esta distribución está señalada con la línea punteada de color negro en cada subfigura. La distribución se obtuvo usando la técnica de ajuste lineal descrita en la primera sección de este capítulo. Notemos que conforme  $\kappa$  aumenta, la pendiente de la recta descrita también lo hace y por tanto también aumenta el exponente de la distribución de ley de potencias asociada.



## 3 Retornos

En este capítulo revisamos la estadística asociada a los retornos de las realizaciones de la ecuación modificada que estudiamos en el capítulo 1. La estadística de los retornos resulta seguir una distribución de ley de potencias también y resulta ser la misma sin importar el valor del parámetro  $\kappa$  de la ecuación. El estudio de estos retornos se complementa a lo largo de todo el capítulo con las referencias [2] y [3].

### 3.1. Retornos y leyes de potencia

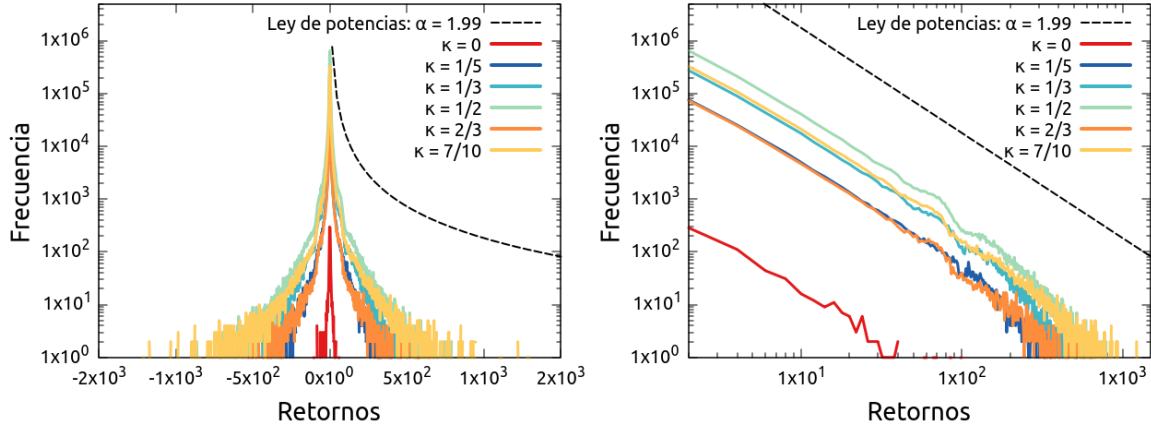
En el capítulo anterior logramos mostrar que nuestra ecuación estocástica (2.10) es libre de escala y que produce velocidades aleatorias que siguen una distribución de ley de potencias. Debido a que estamos tratando con una ecuación estocástica es casi imposible no considerar conceptos relacionados a finanzas, dado que los procesos estocásticos se usan en un esfuerzo por entender las intrincadas dinámicas que ahí surgen. Ejemplo de lo anterior son la ecuación de Black-Scholes (1.5) que mencionamos brevemente en la introducción de este trabajo.

Un concepto ampliamente usado en finanzas es el **valor de retorno** ó **diferencia relativa**. Este concepto permite explorar el comportamiento local de un proceso estocástico. Los retornos se definen de la siguiente manera

$$\text{Retorno}(X(t)) = R(t) = \frac{X(t + dt) - X(t)}{X(t)}, \quad (3.1)$$

con  $X(t)$  una variable estocástica. Notemos que (3.1) nos permite evaluar el valor del proceso aleatorio al tiempo  $t + dt$  tomando como referencia el valor inmediatamente previo del proceso  $dt$ . Es decir, si el proceso aleatorio que se describe es el cambio en el tiempo del valor de una acción, el valor de retorno nos permite conocer qué tanto ha subido o bajado el valor de la acción respecto de un valor de interés, digamos, el valor al que compramos la acción.

La intención ahora es conocer la estadística de los retornos asociados a las realizaciones mostradas en la figura 2.8, una vez calculados los retornos la técnica a emplear será obtener histogramas de estos valores de retorno. A continuación mostramos los histogramas de retornos asociados a los procesos de velocidad estocástica que generamos previamente.



(a) Comparación de los histogramas de los retornos asociados a 6 realizaciones con 6 distintos  $\kappa$  en escala lineal-logarítmica.

(b) Comparación de los histogramas de los retornos asociados a 6 realizaciones con 6 distintos  $\kappa$  en escala logarítmica-logarítmica.

Figura 3.1: Comparación de 6 histogramas cada uno asociado a una realización con  $\kappa$  distinta. Debido a la forma de la ecuación (3.1) los histogramas se generan empleando  $10^{10} - 1$  datos y el tamaño del bin empleado en los histogramas es 1.

La figura 3.1a nuevamente revela la firma gráfica de la ley de potencias ahora para la distribución de los retornos (previamente habíamos revisado la estadística sólo de las velocidades). Esto es notable pues no es evidente que el resultado será tal. En esa misma figura, en negro y punteada, está la distribución de ley de potencias que ajusta a todas las distribuciones. Cuando pasamos a la escala logarítmica-logarítmica, la figura 3.1b, vemos la segunda firma gráfica de la ley de potencias y resulta que la distribución de los retornos es la misma independientemente de la  $\kappa$ . Salvo por una constante de normalización la figura 3.1b muestra este hecho, la línea punteada muestra la distribución de probabilidad que corresponde a los retornos de todas las realizaciones mostradas en 2.8. Ahora, hemos mostrado que estos retornos son libres de escala y siguen una distribución de ley de potencias. Si ahora empleamos la técnica de reconstrucción analítica y la técnica de regresión por ajuste lineal obtenemos lo siguiente:

Retornos - Método	Realización $\kappa = 0$	Realización $\kappa = 1/5$	Realización $\kappa = 1/3$	Realización $\kappa = 1/2$	Realización $\kappa = 2/3$	Realización $\kappa = 7/10$
$\alpha$ estimada de manera analítica con la ecuación (2.9)	$2.048 \pm 0.554$	$2.052 \pm 0.561$	$1.979 \pm 0.455$	$2.031 \pm 0.536$	$2.056 \pm 0.570$	$2.05 \pm 0.563$
$\alpha$ estimada con la técnica de regresión lineal	$1.96 \pm 0.0968$	$2.19 \pm 0.0345$	$2.08 \pm 0.0217$	$2.1 \pm 0.0218$	$2.08 \pm 0.0206$	$2.12 \pm 0.0294$

Tabla 3.1: Estimación de  $\alpha$  usando el método de regresión lineal y el método de reconstrucción analítica. Para el ajuste por método de regresión lineal empleamos, para toda  $\kappa$  distinta de cero, los *bin* 1 a 100 de cada histograma. Para el ajuste por método de regresión lineal de  $\kappa = 0$  empleamos los *bin* 1 a 10. Para el método de reconstrucción analítica, en todos los casos, usamos los datos de la realización en el intervalo  $[0.00001 : 100]$  y empleamos un  $x_{min} = 0.001$ .

El cuadro 3.1 muestra que en efecto la potencia a la que ajustan todas las distribuciones asociadas a los retornos de aproximadamente 2. Notemos que incluso para los retornos de la ecuación con  $\kappa = 0$  (que es el caminante aleatorio de Einstein) recuperamos la misma estadística de ley de potencias con potencia 2. Esto es, que los cambios relativos del proceso, sin importar el valor de  $\kappa$ , siguen la misma estadística. A diferencia de los histogramas del capítulo anterior, aquí la técnica de reconstrucción analítica es formidable, recupera con exactitud el exponente y con un error asociado aceptable, esto es debido a que la distribución de los retornos sí sigue una ley de potencias de la forma (2.1) y por tanto la ecuación (2.9) es adecuada. En este caso nuevamente encontramos que la técnica de reconstrucción analítica supera al ajuste lineal como vimos cuando trabajamos con datos sintéticos.

Prestemos más atención a los histogramas. En la referencia [2] encontramos un resultado notable para los retornos de un grupo de series de tiempo (procesos que se consideran estocásticos), la conclusión final en [2] es que la ley de potencia a la que se ajustan algunas distribuciones de los retornos de acciones reales en el mercado de valores es la misma para todas las distribuciones y tiene un valor de  $\alpha \approx 3$ . Usando tal resultado, se termina de concluir que una manera de catalogar procesos estocásticos es conocer el exponente asociado a la ley de potencias de sus retornos.

Volviendo a nuestros resultados, hasta ahora tenemos un resultado acorde parcial: todos los retornos asociados a nuestro proceso estocástico para  $0 < \kappa < 1$  siguen la misma ley de potencias y el exponente que hemos encontrado es  $\alpha \approx 2$ . Por lo tanto estamos ante un caso similar al de dicho artículo. Una lectura detenida de [2] revela que en dicho artículo se generan los histogramas de manera acumulativa con el siguiente criterio  $\rho(x) = \rho(x_i(t) \geq x)$  con  $x_i$  uno de los posibles valores que puede tomar la distribución. De modo que  $x_i$  es el valor  $i$ -ésimo de los  $N$  pasos dados por la serie de tiempo. Adicionalmente, los datos que se emplean para producir dicho histograma son los retornos normalizados, definidos como

$$r_i(t) = \frac{R_i(t) - \langle R(t) \rangle}{\sqrt{\text{Var}\{R(t)\}}} . \quad (3.2)$$

Donde  $\langle R(t) \rangle$  es el promedio de los  $N$  retornos  $R(t)$  y  $\text{Var}R(t)$  es la varianza de los  $N$  retornos  $R(t)$ . Por lo tanto, para poder comparar nuestros resultados con los de [2] hemos de hacer el mismo tratamiento en nuestros datos. Lo primero es generar los retornos normalizados. Aquí nos encontramos con una limitante, pues nuestros retornos siguen una ley de potencia con  $\alpha \approx 2$ . Para esta distribución ni el primer ni el segundo momento quedan definidos pues las series de retornos para las que se cumple que

$$\langle R(t) \rangle^2 > \langle R(t)^2 \rangle ,$$

tienen varianza negativa y de ese modo la desviación standard no será real sino imaginaria. Esto nos lleva a preguntarnos ¿La transformación que proponen en [2] dada por (3.2) cambia la distribución de los datos?. Para contestar la pregunta comparemos cómo luce la distribución antes y después de la transformación.

Sea  $f(R_i(t)) = r_i(t) = \frac{R_i(t) - \langle R(t) \rangle}{\sqrt{Var\{R(t)\}}}$ , entonces

$$\begin{aligned} P(r_i) &= \left[ \frac{R_i(t) - \langle R(t) \rangle}{\sqrt{Var\{R(t)\}}} \right]^{-\alpha} \\ &= (R_i(t) - \langle R(t) \rangle)^{-\alpha} (Var\{R(t)\})^{\alpha}, \end{aligned}$$

inmediatamente notamos que  $(Var\{R(t)\})^{\alpha}$  sólo es un factor extra a la constante de normalización  $C$  que acompaña a la distribución de ley de potencias pues  $Var\{R(t)\}$  es una constante para cada serie de retornos. Luego,  $\langle R(t) \rangle$  es una constante que se suma a cada valor  $R_i$  de los retornos. Por lo tanto la transformación usada en la referencia [2] no altera la distribución. Es decir, el exponente de la distribución de los retornos es el mismo que el exponente de la distribución de los retornos normalizados.

Dicho lo anterior, no nos detendremos a buscar una normalización de la forma (3.2) y pasaremos directamente a generar los histogramas acumulativos de los retornos sin normalizarlos previamente. La regla para generar dichos histogramas es

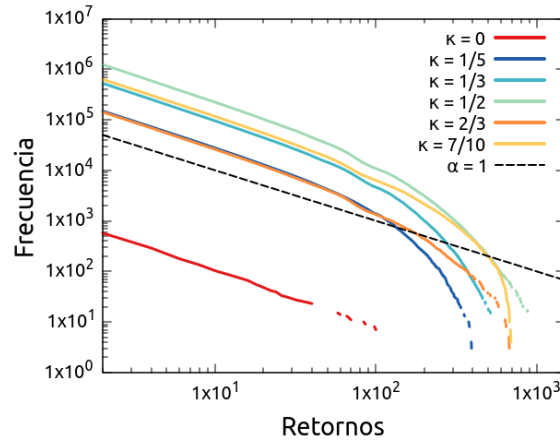


Figura 3.2: Comparación de los histogramas acumulativos de los retornos asociados a 6 realizaciones con 6 distintos  $\kappa$  en escala *logarítmica-logarítmica*. La regla para generar los histogramas acumulativos es  $\rho(R) = \rho(R_i(t) \geq R)$ . Los *bin* son de tamaño 1 y se generan a partir de los  $10^{10} - 1$  retornos asociados a cada realización.

La figura 3.2 muestra los histogramas acumulativos obtenidos. Ahora aplicamos la técnica de ajuste a estos nuevos histogramas. Para realizar dicho ajuste consideramos los *bin* 1 a 100 para los casos en que  $\kappa \neq 0$  y los *bin* 1 a 11 para el caso  $\kappa = 0$ . Los resultados se muestran en el la tabla 3.2

Retornos - Método	Realización $\kappa = 0$	Realización $\kappa = 1/5$	Realización $\kappa = 1/3$	Realización $\kappa = 1/2$	Realización $\kappa = 2/3$	Realización $\kappa = 7/10$
$\alpha$ estimada de manera analítica con la ecuación (2.9)	$1.048 \pm 0.554$	$1.052 \pm 0.561$	$0.979 \pm 0.455$	$1.031 \pm 0.536$	$1.056 \pm 0.570$	$1.05 \pm 0.563$
$\alpha$ estimada con la regresión lineal	$1.11 \pm 0.0121$	$1.1 \pm 0.0074$	$1.13 \pm 0.0081$	$1.1 \pm 0.0067$	$1.1 \pm 0.0068$	$1.09 \pm 0.0071$

Tabla 3.2: Estimación de  $\alpha$  usando el método de regresión lineal para los histogramas acumulativos y el método de reconstrucción analítica.

Nuevamente la técnica de reconstrucción analítica supera al ajuste lineal. Sin embargo lo que encontramos no es consistente con lo que se reporta en [2]. Pues aún que la potencia sí cambia encontramos que se redujo, ahora el exponente asociado es  $\alpha \approx 1$ . Es decir, nos alejamos de el valor  $\alpha = 3$  que se encuentra en [2]. De primera impresión esto parece no poder reconciliarse, sin embargo existen dos detalles a analizar.

En [8] se comenta lo siguiente: un histograma acumulativo de una ley de potencias tiene un exponente  $\gamma = \alpha - 1$ . Por lo tanto la pendiente que se calcula para estos histogramas no es  $\alpha$  es  $\gamma$ . Esto es verificado con nuestros datos, para los histogramas de los retornos tenemos que  $\alpha \approx 2$  y para los histogramas acumulativos de los retornos tenemos que  $\gamma \approx 1$ .

Esto permite hacer la siguiente inferencia de los resultados de la referencia [2]. El exponente que siguen los retornos de dicho artículo es  $\alpha = 4$  tal que  $4 - 1 = \gamma = 3$ . Es decir, los retornos que analizan en el artículo siguen una ley de potencia con  $\alpha = 4$  y por tanto, para los histogramas acumulativos,  $\gamma \approx 3$ . Adicionalmente los primeros tres momentos de dichos datos están definidos. Esto es lo que les permite proponer y usar la normalización que efectúan en el artículo. Recordemos que dicha normalización no tiene efecto alguno en la distribución de los datos. Es decir, que sigan una ley de potencias con  $\alpha \approx 3$  es por una característica común que comparten los resultados analizados en dicho artículo y no debido a la normalización.

En la referencia [8] se comenta brevemente que una manera de clasificar procesos libre de escala es según la potencia que ajusta a la estadística del proceso. Apoyados en esto podemos afirmar que los retornos de nuestra ecuación estocástica pertenecen a una clase distinta respecto de los retornos de las series de tiempo analizadas en la referencia [2].





## 4 La ecuación modificada con disipación

En este capítulo el objetivo es estudiar la modificación en la formulación de Langevin del problema de movimiento browniano. Dado que dicha formulación involucra más parámetros hacemos uso del análisis dimensional para reescribir las ecuaciones modificadas en su forma adimensional y simplificar el estudio de los distintos regímenes de cada parámetro explorando un único parámetro adimensional  $\xi$ . Encontramos que estudiar la modificación en esta formulación arroja como resultado una transición entre estadísticas según el valor de  $\xi$ . El capítulo cierra una vez que determinamos que para  $\xi \gg 1$  tenemos una estadística de distribución normal y para  $\xi \ll 1$  una estadística de ley de potencias.

### 4.1. Considerando disipación

Recordemos la ecuación que hemos estudiado

$$V(t + dt) - V(t) = \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa}} \beta dt N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) aún que caracteriza velocidades tiene la estructura del caminante aleatorio de Einstein. De modo que no es posible aplicar la técnica usual para resolver una ecuación estocástica de este tipo como se comenta en el capítulo 15 de la referencia [13]. Aplicar la técnica de solución recursiva mostrada en el capítulo 5 de la referencia [7] es imposible pues no existe independencia estadística entre los términos estocásticos de cada paso que da la ecuación, cada paso depende de el paso anterior explícitamente.

El objetivo es conocer la estadística de la ecuación y ya la conocemos, una manera de cerrar dicho objetivo es encontrar una solución analítica al problema pero vemos que la forma en la que se planteó presenta dificultades para avanzar a dicha solución. Adicionalmente, la estadística de la ecuación presenta velocidades no acotadas. No existe velocidad mínima ni velocidad máxima que pueda alcanzar el proceso. Que no exista una velocidad máxima es inconsistente con lo que sabemos de la física en general.

De modo que para seguir avanzando en el entendimiento de nuestra modificación ahora la estudiaremos en el contexto del problema de Langevin. En dicho planteamiento de manera consecuente aparece un término de disipación asociado a fluctuaciones en una escala de tiempo mayor, pero considerable, a la escala en la que ocurren las fluctuaciones estocásticas. También existe una conexión directa con la segunda ley de Newton pues se plantea un balance de fuerzas. Sin más, veamos como luce la ecuación de Langevin con la modificación propuesta

$$V(t + dt) - V(t) = -\gamma V(t)dt + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa}} \beta^2 dt N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (4.2)$$

Notemos que ahora existe  $\beta$  el coeficiente de difusión,  $\gamma$  el coeficiente de disipación,  $V_0$  la velocidad de referencia preferencial y  $\kappa$ . Ahora revisemos cómo lucen algunas de las realizaciones de la nueva ecuación (4.2) mostradas en la figura 4.1

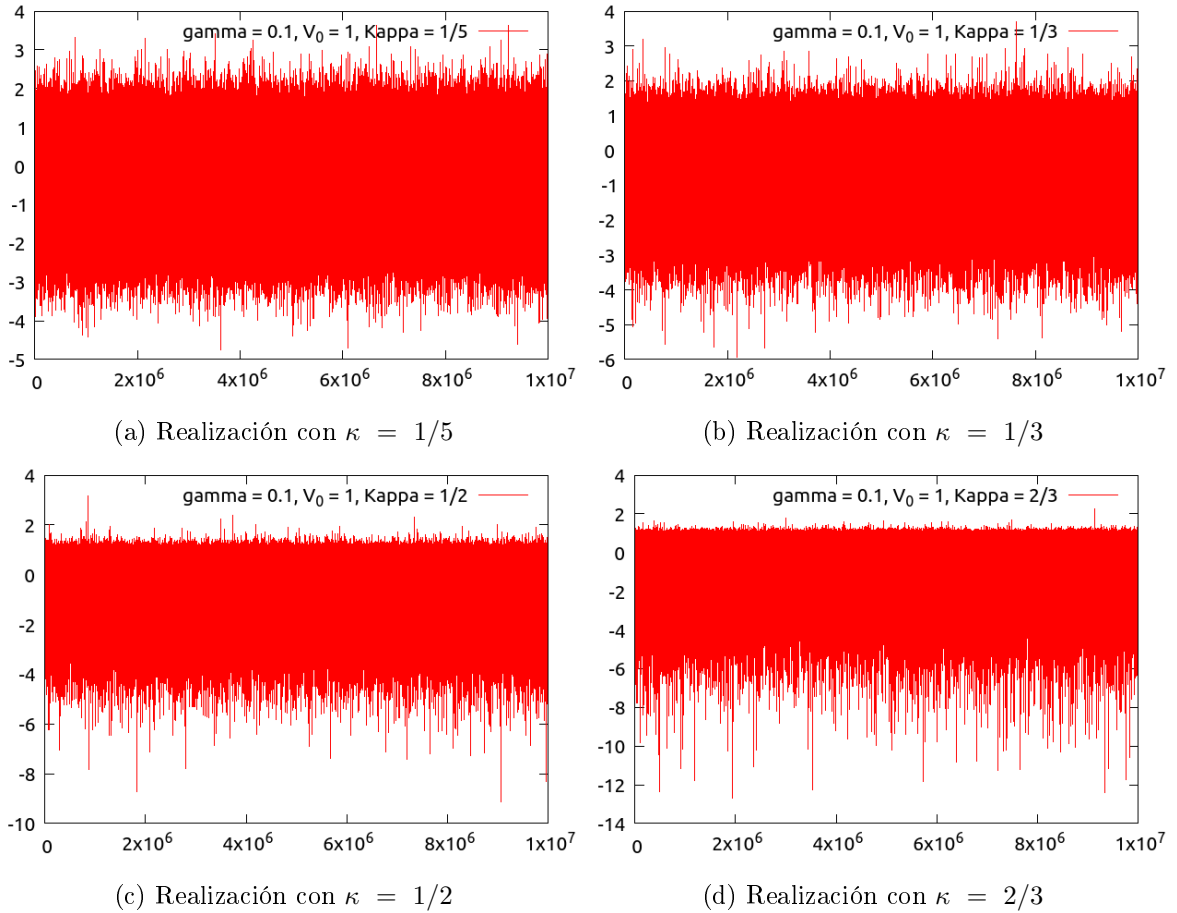
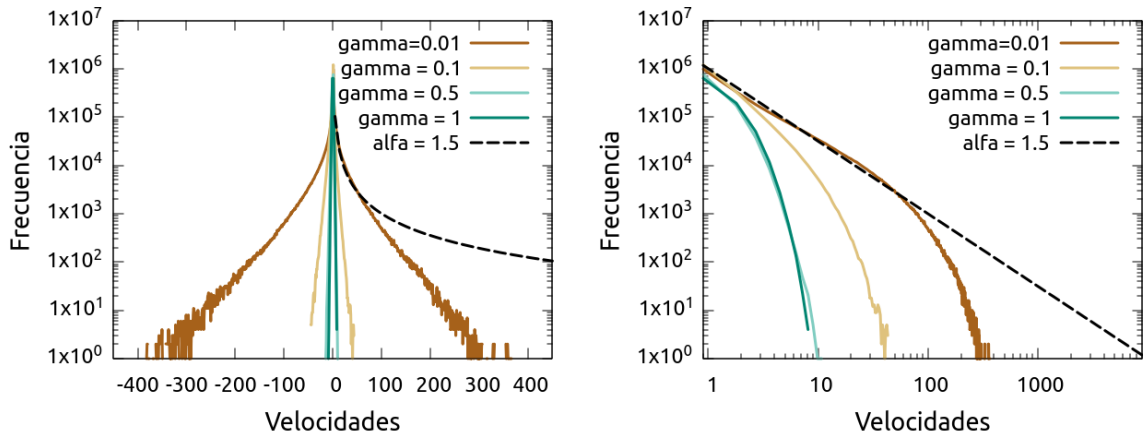


Figura 4.1: Comparación de las realizaciones de la ecuación (4.2) para distintas  $\kappa$  y con mismos parámetros  $\gamma = 0.1$ ,  $V_0 = 1$ . Las realizaciones cuentan con  $10^7$  iteraciones cada una.

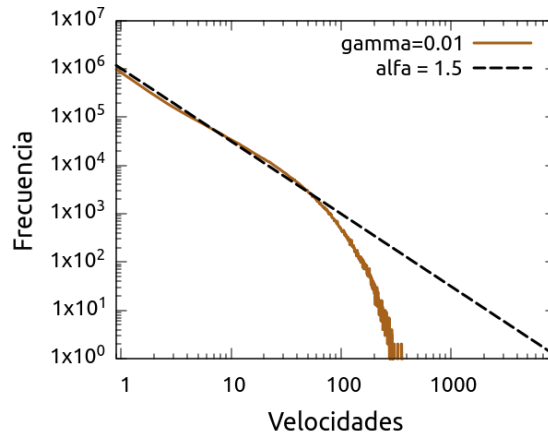
Lo que nos muestra la figura 4.1 es que la disipación acota las posibles velocidades que puede tener el proceso. Entonces podemos preguntarnos ¿cómo luce la estadística

de la modificación ahora que se considera un término de disipación?



(a) Histogramas en escala lineal - logarímic. La línea punteada es la gráfica de una ley de potencias con exponente  $\alpha = 1.5$

(b) Histogramas en escala logarítmica - logarítmica. La línea punteada es la gráfica de una ley de potencias con exponente  $\alpha = 1.5$



(c) Histograma de la realización con  $\gamma = 0.01$  y una ley de potencias con exponente  $\alpha = 1.5$  en escala logarítmica - logarítmica. Notemos que cambiar la magnitud de la disipación tiene un efecto en la estadística de las velocidades producidas.

Figura 4.2: Comparación de histogramas asociados a algunas realizaciones de la ecuación (4.2) para distintas  $\gamma$  y con mismos parámetros  $V_0 = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\kappa = 1/2$  y  $\beta = 1$ . El tamaño del *bin* es 0.001 y se consideran  $10^{10}$  muestras en cada realización. La escala de las figuras es logarítmica para facilitar la comparación de las distribuciones de (4.2) con (4.1).

En la figura 4.2 mostramos los histogramas asociados a algunas realizaciones de la ecuación (4.2). Inmediatamente notamos que ha desaparecido la distribución de ley de potencias cuando  $\gamma = 1$ , en su lugar tenemos distintas distribuciones que parecen evolucionar hacia una ley de potencias cuando  $\gamma = 0.001$ . Aquí nos enfrentamos a que es necesario explorar de manera independiente cada parámetro de la ecuación para conocer el comportamiento estadístico completo de la ecuación. De hecho lo mis-

mo ocurre para (4.1), en el capítulo 1 de este trabajo sólo estudiamos un caso de  $V_0$  y  $\beta$ .

Por lo tanto haremos uso del análisis dimensional para generar versiones adimensionales de las ecuaciones que permitan explorar de manera más simple todos los parámetros físicos involucrados en las ecuaciones. Para llevar a cabo esta tarea comenzaremos por adimensionalizar la ecuación (4.1), esto con la intención de mostrar que adimensionalizar no cambia el comportamiento estadístico al tiempo que mostramos como se efectúa una adimensionalización.

Para comenzar es necesario determinar las dimensiones físicas asociadas al factor  $\beta$  que aparece en (4.1). De manera general diremos que el tiempo tiene dimensión  $[T]$ , la longitud tiene dimensión  $[L]$  y la masa tiene dimensión  $[M]$ . Considerando lo anterior, sabemos que cada término de la ecuación (4.2) tiene unidades de velocidad, es decir dimensiones físicas  $LT^{-1} = \frac{L}{T}$ , de ahí que el término

$$\sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa} \beta^2 dt} [x][T^{1/2}] .$$

deba de tener dimensiones  $L/T$

Lo anterior nos permite plantear la siguiente ecuación

$$[x][T^{1/2}] = \left[\frac{L}{T}\right] .$$

Y resolvemos para encontrar las dimensiones  $[x]$

$$[x] = \left[\frac{L}{T}\right] [T^{-1/2}]$$

$$[x] = \left[\frac{L}{T^{3/2}}\right] .$$

Las dimensiones que hemos obtenido son las dimensiones de  $\beta$  el coeficiente de difusión. Ahora el objetivo es encontrar un factor combinación de los parámetros de la ecuación  $\beta$  y  $V_0$  que logre eliminar las unidades en todos los términos de la ecuación (4.1). Notemos que en dicha ecuación también existe el parámetro  $\kappa$  pero dicho parámetro no tiene dimensiones físicas asociadas y por tal motivo no se considera para efectuar la adimensionalización. Comenzamos por multiplicar ambos lados de la ecuación (4.1) por  $\frac{1}{V_0}$ , tenemos

$$\frac{1}{V_0} \left[ V(t+dt) - V(t) \right] = \frac{1}{V_0} \left[ \left| 1 - \frac{V(t)}{V_0} \right|^\kappa \beta \sqrt{dt} \right] N_t^{t+dt}(0, 1)$$

Notemos que el lado izquierdo ya no tiene dimensiones físicas.

Ahora definimos  $\frac{V(t)}{V_0} \equiv V(t)^*$ , la velocidad adimensional

$$V^*(t+dt) - V^*(t) = \frac{\beta \sqrt{dt}}{V_0} \left| 1 - V^*(t) \right|^\kappa N_t^{t+dt}(0, 1)$$

Prestemos atención a las unidades de el factor  $\frac{\beta\sqrt{t}}{V_0}$ ,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\beta\sqrt{t}}{V_0} \right] &= \frac{(L/T^{3/2})(T^{1/2})}{L/T} \\ &= \frac{LT^{3/2}}{LT^{3/2}} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Es decir, hemos encontrado ya un factor adimensional y la ecuación está escrita de manera que no tiene dimensiones en ningún término. Definiendo  $\sqrt{dt^*} = \frac{\beta\sqrt{dt}}{V_0}$  tenemos la ecuación adimensional

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = \sqrt{|1 - V^*(t^*)|^{2\kappa} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}}(0, 1) . \quad (4.3)$$

Es importante entender a  $t^* = \frac{\beta^2 t}{V_0^2}$  como un tiempo adimensional. Ahora revisemos la estadística de las caminatas producidas por la versión adimensional de nuestra ecuación modificada, la ecuación (4.3).

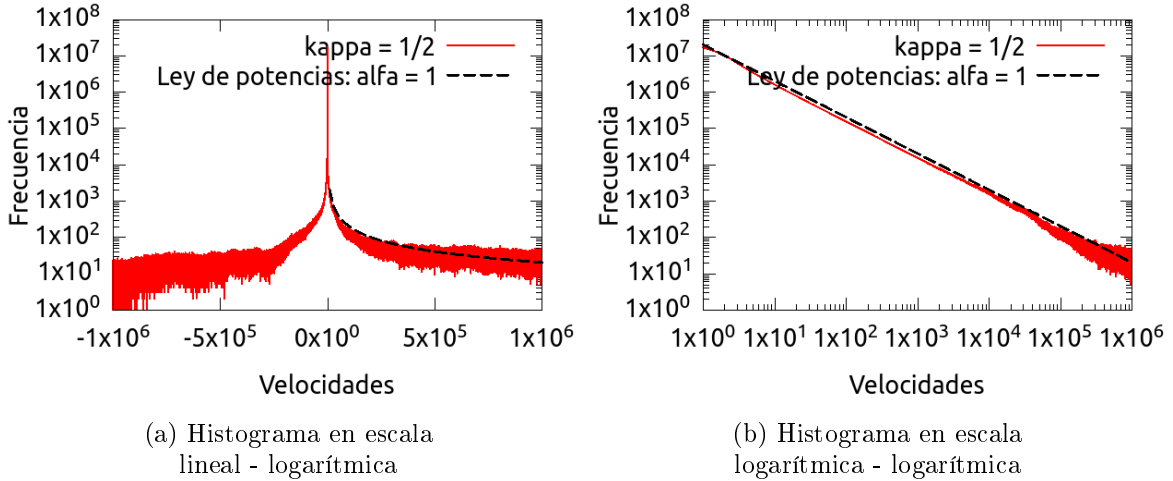


Figura 4.3: Histograma de una realización de la ecuación adimensional de la forma de (4.3), los parámetros son  $\frac{\beta}{V_0} = 1$  y  $\kappa = 1/2$ , con  $10^7$  iteraciones. La escala de 4.3b evidencia la firma gráfica de una ley de potencias y la distribución a la que ajusta el histograma es consistente con el cuadro 2.1.

En la figura 4.3 podemos ver que el proceso de dimensionalización no alteró lo las observaciones en la estadística de la ecuación (4.3). Lo que ha cambiado es que ahora en vez de tener que explorar de manera independiente distintos regímenes de  $\beta$ ,  $V_0$  y  $dt$  ahora sólo es necesario fijar un valor para  $dt^*$  y sabemos que dicho valor es proporcional a  $\beta^2$ ,  $dt$  e inversamente proporcional a  $V_0^2$ . Adimensionalizar ha simplificado el manejo de la ecuación sin perder información de sus cualidades físicas ni estadísticas. Ya que logramos la primer adimenzinalización de manera exitosa avancemos a adimensionalizar al caso de la ecuación con el término de disipación, la ecuación (4.2).

Considerando que las dimensiones físicas de  $\beta$  no cambian para esta ecuación. Sólo es necesario determinar la dimensiones físicas de  $\gamma$  antes de buscar un factor adimensional.

Comenzamos por proponer la siguiente ecuación

$$-\gamma V(t)dt = [x] \left[ \frac{L}{T} \right] [T] .$$

El término en conjunto debe de tener dimensiones  $\left[ \frac{L}{T} \right]$

que son de velocidad, lo que nos permite plantear

$$[x] \left[ \frac{L}{T} \right] [T] = \left[ \frac{L}{T} \right], \text{ entonces}$$

$$[x] = \left[ \frac{L}{T} \right] \left[ \frac{1}{T} \right] \left[ \frac{T}{L} \right]. \text{ Y reduciendo términos}$$

$$[x] = \left[ \frac{1}{T} \right].$$

Es decir,  $[x]$  son las dimensiones del término  $\gamma$  y puede interpretarse como dimensiones de frecuencia, recordemos que  $\gamma$  es conocido como coeficiente de disipación. Luego, la manera más inmediata de adimensionalizar la ecuación es multiplicar ambos lados de (4.2) por el factor  $\frac{\gamma^{1/2}}{\beta}$ , tenemos

$$\frac{\gamma^{1/2}}{\beta} \left[ V(t+dt) - V(dt) \right] = \frac{\gamma^{1/2}}{\beta} \left[ -\gamma V(t)dt \right] + \frac{\gamma^{1/2}\beta}{\beta} \sqrt{\left| 1 - \frac{V(t)}{V_0} \right|^{2\kappa}} dt N_t^{t+dt}(0,1) \quad (4.4)$$

y

$$\frac{\gamma^{1/2}}{\beta} \left[ V(t+dt) - V(dt) \right] = \frac{\gamma^{3/2}}{\beta} \left[ -V(t)dt \right] + \gamma^{1/2} \sqrt{\left| 1 - \frac{V(t)}{V_0} \right|^{2\kappa}} dt N_t^{t+dt}(0,1) \quad (4.5)$$

Ahora, definimos la velocidad adimensional

$$V^*(t) \equiv \frac{\gamma^{1/2}}{\beta} V(t) \quad (4.6)$$

y el tiempo adimensional

$$t^* = t\gamma . \quad (4.7)$$

Con esto, finalmente obtenemos una forma adimensional de nuestra ecuación de interés

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left| 1 - \frac{V^*(t^*)}{\frac{V_0\gamma^{1/2}}{\beta}} \right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0,1) . \quad (4.8)$$

Antes de avanzar definimos

$$\xi \equiv \frac{V_0\gamma^{1/2}}{\beta} , \quad (4.9)$$

y finalmente reescribimos nuestra ecuación como

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V^*(t^*)}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) \quad (4.10)$$

Y ahora el único factor por explorar es  $\xi$ . Y podemos afirmar que dado un valor de  $\xi$ , este es proporcional a  $V_0$ ,  $\gamma^{1/2}$  e inversamente proporcional a  $\beta$ . De este modo ahora sólo es necesario cambiar la magnitud de  $\xi$  para conocer cómo cambia la distribución asociada a cada realización.

Cuando incorporamos el término de disipación  $-\gamma V(t)$ , logramos acotar los valores posibles que puede adoptar la ecuación, la figura 4.1 lo confirma. Pero ya no sabemos nada de su estadística, aramdos con la versión adimensional de la ecuación es posible llevar a cabo este estudio. Ahora revisaremos los histogramas asociados a realizaciones de la ecuación (4.10).

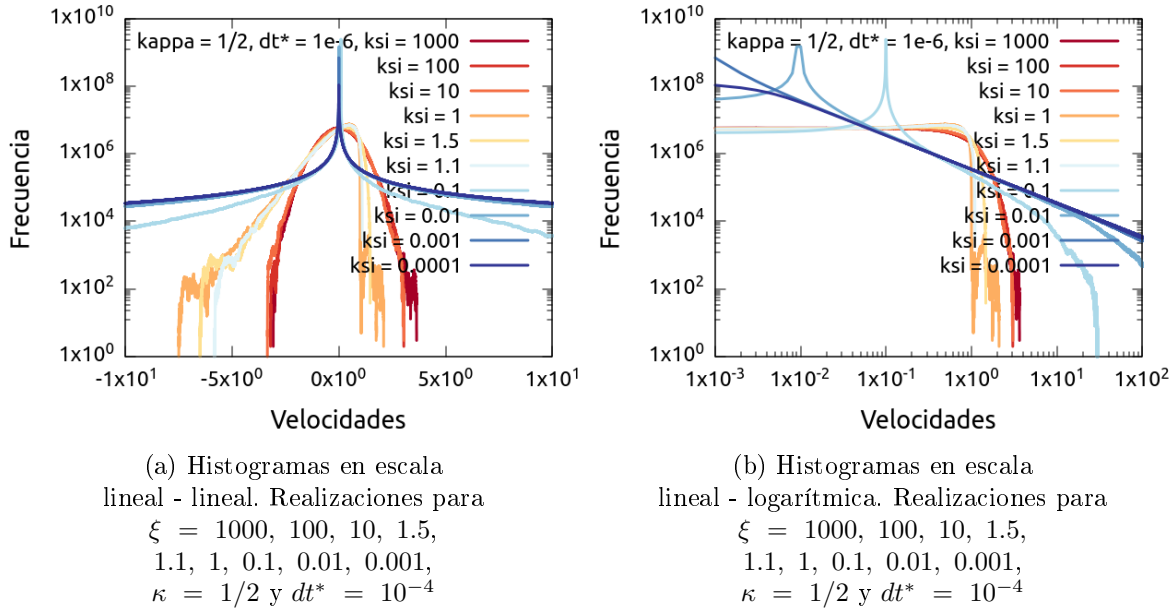


Figura 4.4: Comparación de las realizaciones de la ecuación (4.10) para distintas  $\xi$  y con mismo parámetro  $\kappa = 1/2$ . Los histogramas tienen *bin* de tamaño 0.001 y se generan a partir de realizaciones de  $10^{10}$  iteraciones.



Lo que revela la figura 4.4 es que en efecto hay una transición del tipo de distribución que siguen las realizaciones según la magnitud de  $\xi$  como ya observábamos en la figura 4.2. Adicionalmente, la figura 4.4b muestra que los máximos de las realizaciones no se encuentran en cero si no que son asimétricos. Si hacemos un acercamiento a la figura 4.4a se aprecia mejor la transición, como se muestra en a figura 4.5.

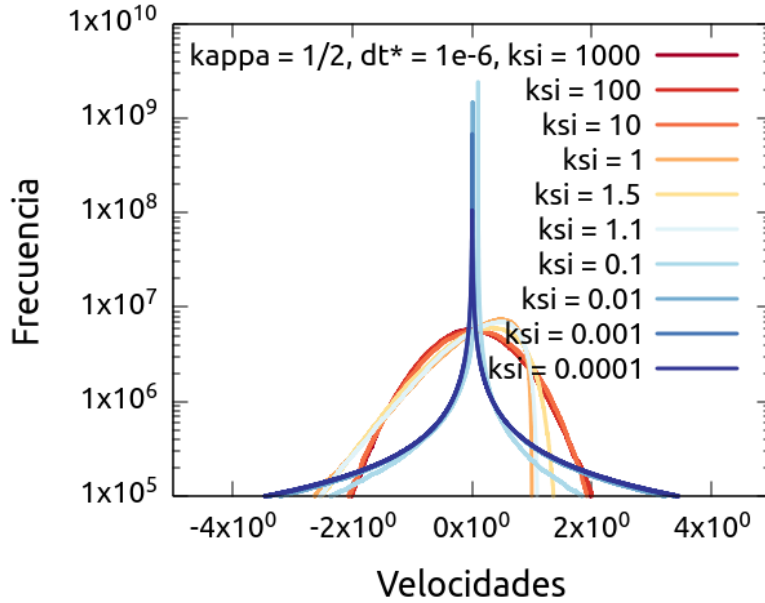
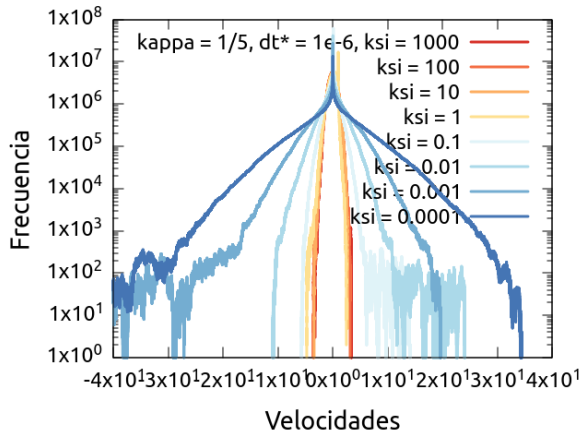


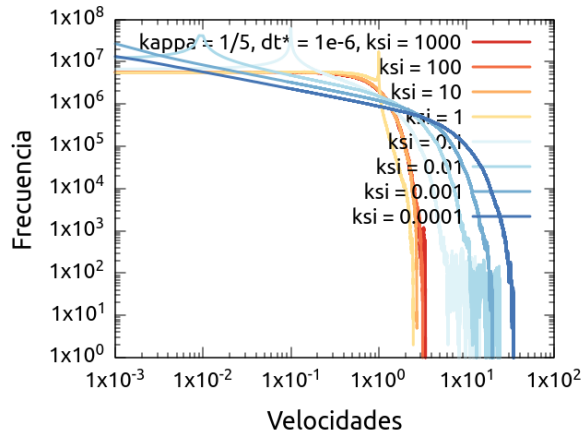
Figura 4.5: Histogramas en escala lineal - logarítmica. Realizaciones para  $\xi = 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \kappa = 1/2$  y  $dt^* = 10^{-4}$ . Acercamiento de la figura 4.4a en el intervalo  $x \in [-5 : 5]$

En la figura 4.5 encontramos que  $\xi = 1$  marca la transición y la distribución deja de asemejarse a las distribuciones que corresponden a valores extremos de  $\xi$ , ya sea una de ley de potencias o lo que aparece ser una distribución normal. Es importante notar que para este conjunto de realizaciones la magnitud de  $dt^* = 10^{-4}$  mientras que para los histogramas mostrados en 4.2 consideramos simplemente  $dt = 1$ . Esto es resultado de obtener un número adimensional independiente de la variable temporal  $t$ . Como consecuencia la magnitud de  $dt^*$  debe de cumplir  $dt^* \ll \xi$  en la simulación pues recordemos que el objetivo es simular una ecuación diferencial cuyas diferencias son infinitamente pequeñas, más de esta discusión se encuentra en el apéndice B. Aclarada la razón por la cual  $dt^* = 10^{-4}$  pasemos a revisar qué pasa con las distribuciones para distintos valores de  $\kappa$ , en particular para  $\kappa = 1/5$  ( $\kappa$  pequeña) y para  $\kappa = 6/8$  ( $\kappa$  grande), en el conjunto de figuras 4.6 tenemos los histogramas correspondientes.

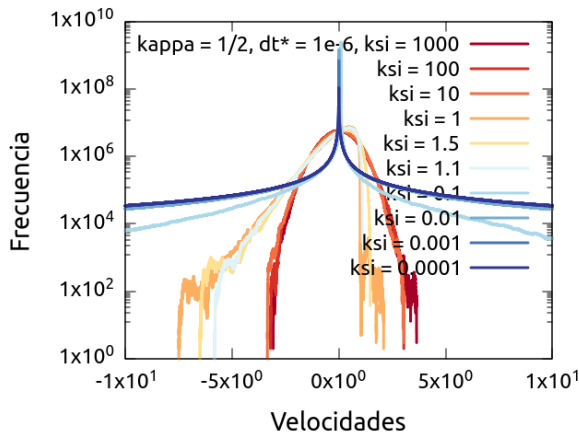
En las figuras 4.6a y 4.6b encontramos de nuevo la transición. Mientras que en un extremo, ( $\kappa = 0.0001$ ), tenemos distribuciones que parecen ser una ley de potencias en realidad aún no sabemos qué son estas distribuciones. Se vuelve de interés conocer qué tan bien ajustan los histogramas para  $\xi$  pequeña a una ley de potencias y a qué distribución ajustan los histogramas para  $\xi$  grande.



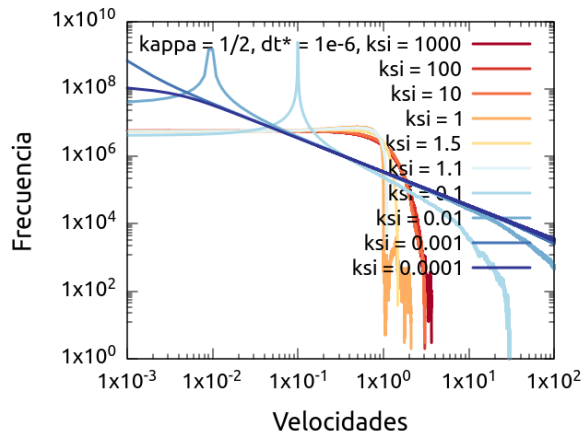
(a) Histogramas en escala lineal - logarítmica. Realizaciones para  $\xi = 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \kappa = 1/5$  y  $dt^* = 10^{-4}$



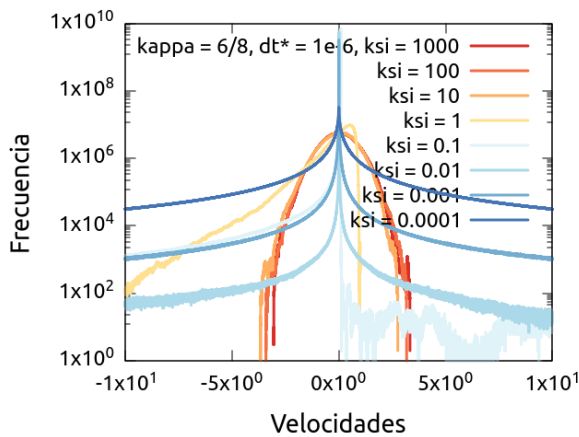
(b) Histogramas en escala logarítmica - logarítmica. Realizaciones para  $\xi = 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \kappa = 1/5$  y  $dt^* = 10^{-4}$



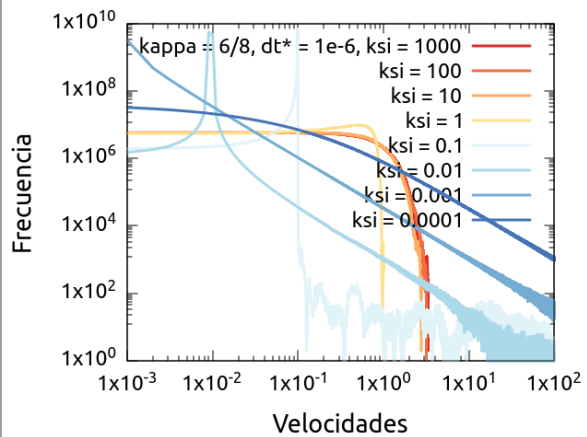
(c) Histogramas en escala lineal - logarítmica. Realizaciones para  $\xi = 1000, 100, 10, 1.5, 1.1, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \kappa = 1/2$  y  $dt^* = 10^{-4}$



(d) Histogramas en escala logarítmica - logarítmica. Realizaciones para  $\xi = 1000, 100, 10, 1.5, 1.1, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \kappa = 1/2$  y  $dt^* = 10^{-4}$

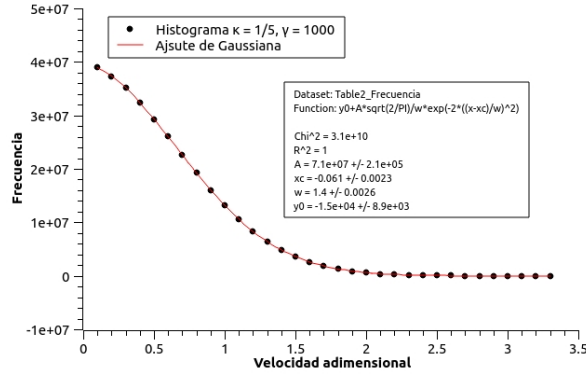


(e) Histogramas en escala lineal - logarítmica. Realizaciones para  $\xi = 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \kappa = 6/8$  y  $dt^* = 10^{-4}$

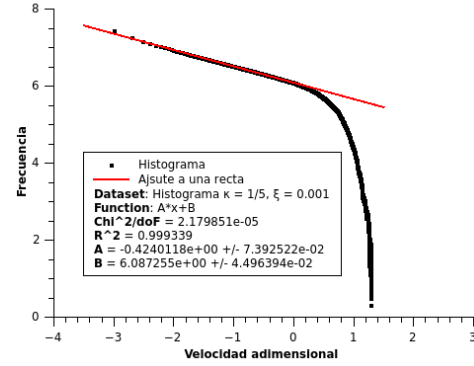


(f) Histogramas en escala logarítmica - logarítmica. Realizaciones para  $\xi = 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \kappa = 6/8$  y  $dt^* = 10^{-4}$

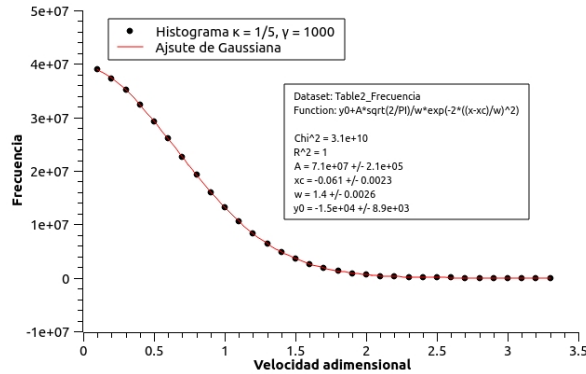
Figura 4.6: Comparación de las realizaciones de la ecuación (4.10) para distintas  $\xi$  y con  $\kappa = 1/2, 6/8$ . Todos los histogramas mostrados tiene un *bin* de tamaño 0.001 y se generan a partir de realizaciones con  $10^{10}$  iteraciones cada una.



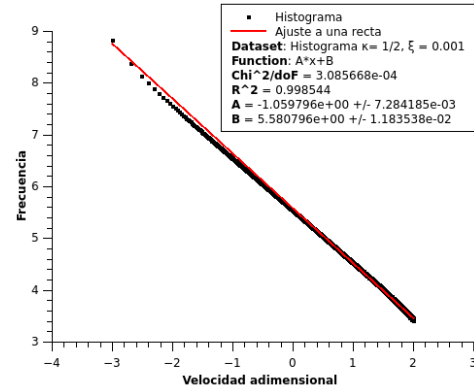
(a) Ajuste a una distribución normal para el histograma de las velocidades de la realización con parámetros  $\xi = 1000$  y  $\kappa = 1/5$ . El ajuste se efectúa considerando los puntos en el intervalo  $[0, 3.4]$ .



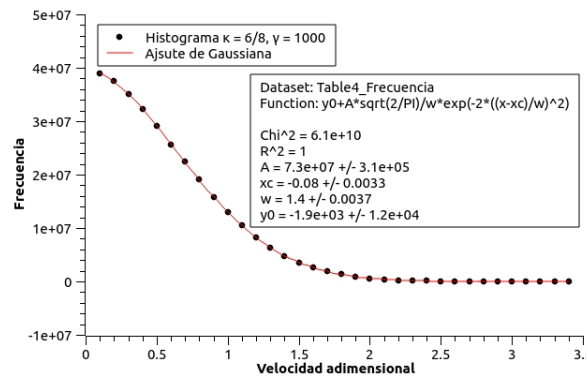
(b) Ajuste a una recta para el log-histograma de las velocidades de la realización con parámetros  $\xi = 0.001$  y  $\kappa = 1/5$ . El ajuste se efectúa considerando los puntos en el intervalo  $[-2, 0]$ .



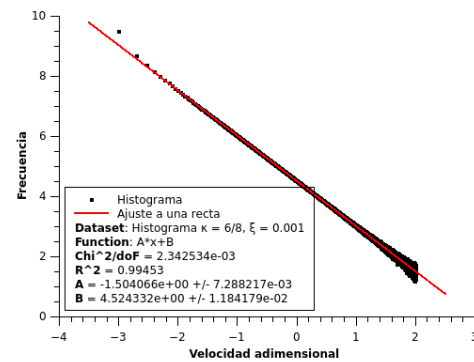
(c) Ajuste a una distribución normal para el histograma de las velocidades de la realización con parámetros  $\xi = 1000$  y  $\kappa = 1/2$ . El ajuste se efectúa considerando los puntos en el intervalo  $[0, 3.4]$ .



(d) Ajuste a una recta para el log-histograma de las velocidades de la realización con parámetros  $\xi = 0.001$  y  $\kappa = 1/2$ . El ajuste se efectúa considerando los puntos en el intervalo  $[-1, 2]$ .



(e) Ajuste a una distribución normal para el histograma de las velocidades de la realización con parámetros  $\xi = 1000$  y  $\kappa = 6/8$ . El ajuste se efectúa considerando los puntos en el intervalo  $[0, 3.4]$ .



(f) Ajuste a una recta para el log-histograma de las velocidades de la realización con parámetros  $\xi = 0.001$  y  $\kappa = 6/8$ . El ajuste se efectúa considerando los puntos en el intervalo  $[-2, 2]$ .

Figura 4.7: Ajustes para los regímenes de  $\xi \ll 1$  y  $\xi \gg 1$  considerando  $\kappa = 1/5, 1/2$  y  $6/8$ . Para el régimen  $\xi \ll 1$  encontramos que el histograma ajusta a una distribución normal y para  $\xi \gg 1$  encontramos que el histograma ajusta a una ley de potencias.

Los ajustes se muestran en el conjunto de figuras 4.7. Las figuras 4.7a, 4.7c y 4.7e muestran que en el régimen de alta disipación ( $\xi \gg 1$ ) el término de amortiguamiento acota los valores producidos por el término estocástico y obliga a la estadística a una normal, es decir tenemos el comportamiento estadístico de la ecuación de Langevin. Por otro lado, las figuras 4.7d, 4.7b y 4.7f muestran que en el régimen de mínima disipación ( $\xi \ll 1$ ) el término de amortiguamiento se vuelve despreciable frente al efecto de el valor absoluto asociado al término estocástico y las distribuciones tienden a una ley de potencias. Adicionalmente, en dicha región se pierde la simetría de las distribuciones, la pérdida de dicha simetría está asociada a la interacción entre el término  $|1 - \frac{V^*}{\xi}|$  y el término de disipación. Notemos que cuando  $\xi = 1$  ocurre que  $|1 - \frac{V^*}{\xi}| = |1 - V^*|$  y cuando  $V^* = 1$  entonces  $||1 - V^*|| = 0$ . Para este preciso valor de  $V^*$  el término estocástico deja de existir y es sólo la disipación la que genera que el caminante siga avanzando. Por lo tanto la fricción es asimétrica respecto de 1 y esto tiene como resultado una distribución no simétrica pero sólo cuando nos acercamos a valores de  $\xi$  cercanos a 1 que podemos advertir dicha asimetría.

Ya revisamos qué pasa con las realizaciones en los regímenes extremos de  $\xi$  de manera estadística, ahora revisemos de manera teórica el régimen  $\xi \gg 1$  y veamos qué pasa en el límite en el que  $\xi \rightarrow \infty$ . Esto pues los ajustes sugieren que en  $\xi \gg 1$  la estadística de las velocidades es análoga a la estadística que se recupera con la ecuación de Langevin original (1.2), la estadística de distribución normal. Para comenzar revisemos qué pasa con el término que involucra a  $\xi$

$$\left|1 - \frac{V^*(t^*)}{\xi}\right|^{2\kappa}. \quad (4.11)$$

Notamos lo siguiente

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} 1 - \frac{V(t)}{\xi} = 1, \quad (4.12)$$

por lo tanto

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left|1 - \frac{V(t)}{\xi}\right|^{2\kappa} = 1 \quad (4.13)$$

y bajo esta condición nuestra ecuación se reescribe como

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \left[ \sqrt{dt^*} N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) \right] \quad (4.14)$$

Notemos que la ecuación (4.14) es una versión adimensional de la ecuación de Langevin, cuya solución está dada por una distribución normal con lo siguientes parámetros

$$\langle \{V^*(t^*)\} \rangle = V_i^* e^{-t^*} \quad (4.15)$$

$$var\{V^*(t^*)\} = \frac{1}{2}, \quad (4.16)$$

para la condición inicial  $V^*(t^* = 0) = V_i^*$ . El resultado analítico concuerda, en el límite  $\xi \rightarrow \infty$ , con la figura 4.4. Cuando  $\xi$  es grande la ecuación (5.1) es equivalente

a la ecuación de Langevin adimensional (4.14) y la distribución que sigue la estadística es la de una distribución normal. Ahora exploremos el límite  $\xi \rightarrow 0$ . Notemos que estrictamente

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{V(t)}{\xi} \right|^{2\kappa} = \infty. \quad (4.17)$$

El límite está indeterminado, estrictamente  $\xi$  jamas puede ser igual a cero. Sin embargo no es lo único que queda por decir de este régimen, recordemos que en la discusión previa acerca del tamaño de  $dt^*$  concluimos que  $dt^* \ll \xi$  para que se cumpla la hipótesis acerca de  $dt^*$  como una diferencial, de modo que al hacer pequeño  $\xi$  surge la necesidad de hacer aún más pequeño  $dt^*$  para que se siga cumpliendo el carácter diferencial y se aprecie de mejor manera la completa transición.

Considerando lo anterior y volviendo a la límite (4.17), es posible afirmar que siempre que  $V^*(t^*) \gg \xi$  se cumple la aproximación  $1 - \frac{V(t)}{\xi} \approx V(t)/\xi$  y podemos afirmar que  $V^*(t^*)/\xi \gg V^*(t^*)$ , es decir el término estocástico crece respecto del término de disipación lo suficiente como para que este último sea ignorado. Lo anterior es equivalente a decir que la disipación es despreciable y en tal caso recuperamos la forma de la ecuación 4.3.

La conclusión es la siguiente: cuando estudiamos nuestra modificación desde el planteamiento de Einstein encontramos un proceso que, para toda  $\kappa$ , la distribución asociada a la estadística del proceso era una ley de potencias. Ahora que hemos estudiado la modificación desde el planteamiento de Langevin encontramos que existe una transición entre estadísticas y que dicha transición esta asociada a la manera en que el término estocástico crece respecto del término de disipación. Hemos encontrado un parámetro  $\xi$  que permite cambiar la estadística a la que se adapta nuestro proceso con tan sólo cambiar su valor. Antes de continuar en la búsqueda de la solución revisemos más a detalle la transición que hemos encontrado.

## 5 La transición

En este capítulo estudiamos a fondo la transición entre estadísticas que presenta la ecuación modificada en la formulación de Langevin. Damos una explicación de la forma de la modificación. Investigamos los máximos de las distribuciones y encontramos que son asimétricos pues se alcanzan en el valor  $\rho(\xi)$ . Luego cambiamos el signo dentro de la modificación y encontramos que la consecuencia es cambiar el signo del máximo de la distribución. La modificación con signo menos tiene su máximo en la región positiva de la distribución y la modificación con signo más en la región negativa de la distribución. Finalmente quitamos el 1 dentro del valor absoluto con la intención de conocer si la transición es debido unicamente a la dependencia de pasos previos  $V(t)$  o si depende de la forma de la modificación y encontramos que en efecto si cambiamos la modificación que propusimos se pierde la transición entre estadísticas.

### 5.1. De normal a ley de potencia

En el capítulo pasado al analizar la estadística de la ecuación (5.1) encontramos que existe una transición en la estadística asociado al factor adimensional  $\xi$ . Para  $\xi \gg 1$  encontramos que el histograma corresponde a una distribución normal mientras que para  $\xi \ll 1$  el histograma asociado corresponde a una distribución de ley de potencias. El objetivo de este capítulo es entender la transición y sus efectos en los histogramas.

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) \quad (5.1)$$

Para comenzar es importante revisar el término estocástico de la ecuación, dicho término es de la forma:  $\sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1)$ . Ahora, el término algebraico que acompaña y que se encuentra dentro del término de la raíz cuadrada se formulo basados en la noción, previamente estudiada, de retorno financiero. Fijémonos en el siguiente desarrollo de dicho término

$$\left|1 - \frac{V^*}{\xi}\right| = \left|\frac{\xi - V^*}{\xi}\right|. \quad (5.2)$$

La forma de la modificación mostrada en el lado derecho de la ecuación (5.2) recuerda la forma de la ecuación con la que se define el concepto de retorno, la ecuación 3.1. Notemos que la función del signo menos es comparar al valor de referencia  $\xi$  con la velocidad estocástica  $V^*(t^*)$ . Esta comparación resulta en un valor positivo siempre que  $\xi > V^*$  y negativo en el caso contrario, para cualquier caso el signo es despreciable debido al valor absoluto. La modificación a la ecuación compara  $V^*$  respecto de  $\xi$  de manera instantánea. De modo que la varianza de la ecuación está dada por el crecimiento de la  $V^*$  respecto del término  $\xi$  proporcional a  $\gamma^{1/2}$ ,  $\beta^{-1}$  y  $V_0$ .

Ahora que conocemos la justificación del signo menos dentro del término del valor absoluto podemos preguntarnos qué ocurre si cambiamos el signo dentro de dicho término?. La modificación a la ecuación se reescribe como

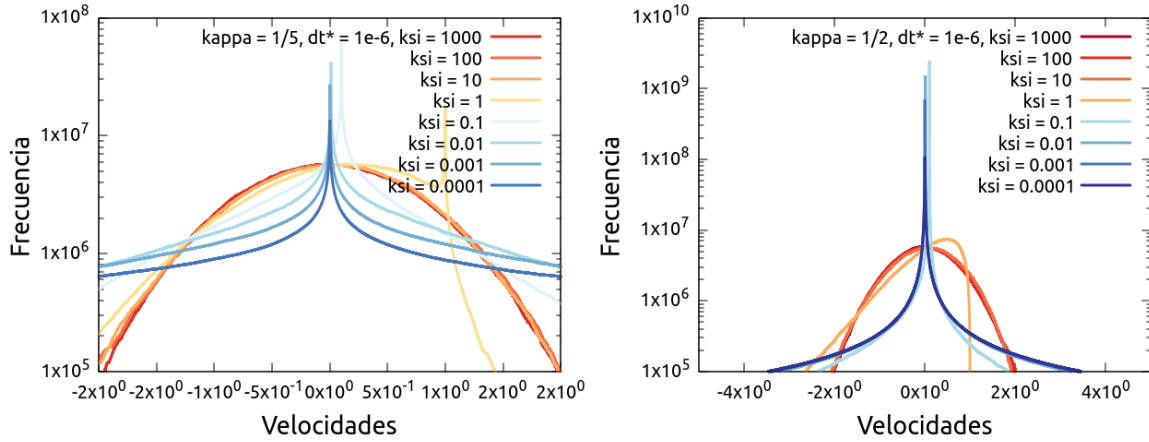
$$\left| 1 + \frac{V^*}{\xi} \right| = \left| \frac{\xi + V^*}{\xi} \right|. \quad (5.3)$$

Y ahora se invierte las condiciones para cuando retorno tendrá un valor positivo y un valor negativo, condiciones despreciables pues recordemos que estamos considerando el valor absoluto. La discusión anterior muestra que el signo de la modificación funge como un marco de referencia relativo que pierde importancia debido al valor absoluto. Ya que exploramos las dos posibilidades del signo dentro del valor absoluto revisamos que pasa si quitamos completamente el 1. Al quitar el  $\pm 1$  de dentro del valor absoluto tenemos simplemente

$$\left| \frac{V^*(t^*)}{\xi} \right|, \quad (5.4)$$

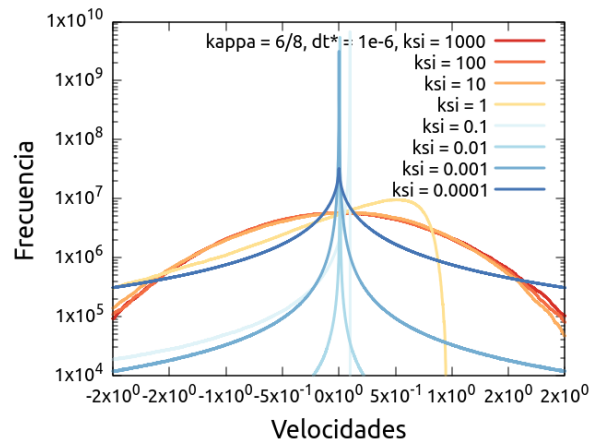
y como consecuencia se pierde el carácter de retorno y quedamos con una simple comparación de la magnitud de  $V^*$  respecto de la magnitud del término adimensional  $\xi$ . Ahora que entendemos la motivación y la forma de la modificación al término estocástico revisemos una vez más la transición de los histogramas en el conjunto de figuras 4.6. La intención es observar más de cerca las figuras en escala lineal-logarítmica.

En las figuras mostradas en 5.1 es posible notar que existe una asimetría en los histogramas sesgada hacia la región positiva de las gráficas sin importar el valor de  $\kappa$ . Por lo tanto a partir de ahora llevaremos a cabo el estudio de la transición sólo para el caso  $\kappa = 1/2$ .



(a) Acercamiento a los histogramas para distintos valores de  $\xi$  con  $\kappa = 1/5$  en escala lineal-logarítmica

(b) Acercamiento a los histogramas para distintos valores de  $\xi$  con  $\kappa = 1/2$  en escala lineal-logarítmica



(c) Acercamiento a los histogramas para distintos valores de  $\xi$  con  $\kappa = 6/8$  en escala lineal-logarítmica

Figura 5.1: Acercamientos a los histogramas de las velocidades en escala lineal-logarítmica para  $\kappa = 1/5, 1/2$  y  $6/8$

Entonces nos fijamos en un acercamiento mayor en escala lineal-lineal y sólo para el régimen de  $\xi \gg 1$ , el régimen de distribución normal, para apreciar mejor la asimetría. La figura 5.2 muestra dicho acercamiento. Podemos apreciar que en el régimen de distribución normal existe una asimetría que se hace más notable conforme  $\xi$  disminuye de magnitud hasta alcanzar  $\xi = 1$  valor en el que la asimetría es absolutamente visible y adicionalmente encontramos una caída abrupta en la frecuencia de velocidades en la región positiva del histograma.



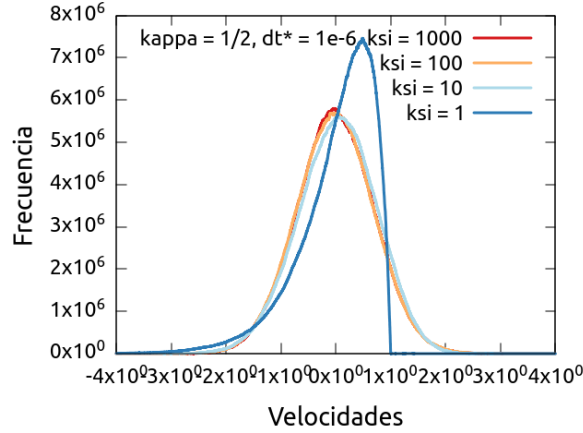


Figura 5.2: Acercamiento a histogramas para valores de  $\xi$  correspondientes a una distribución normal con  $\kappa = 1/2$  en escala lineal-lineal

Si hacemos un acercamiento al régimen de  $\xi \ll 1$ , mostrado en la figura 5.3, nuevamente encontramos la asimetría y un comportamiento notable, el máximo de la ley de potencia se encuentra justo en el valor  $V^*(t^*) = \xi$ , las líneas punteadas verticales sirven para visualizar mejor el enunciado anterior. Notemos también que la forma del máximo que vemos para los casos de  $\xi \leq 0.1$  aparece también en  $\xi = 0.5$ , de modo que la transición ocurre entre los valores de  $\xi = 1$  y  $\xi = 0.5$ .

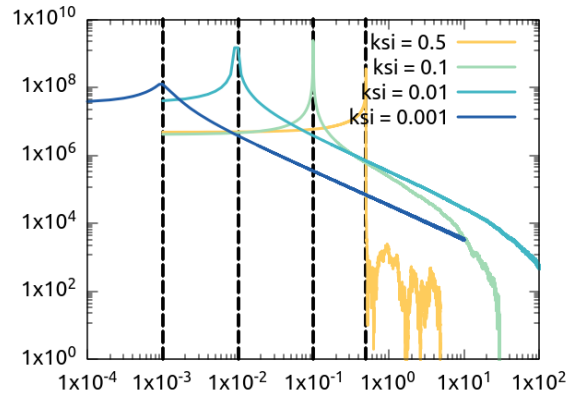


Figura 5.3: Histogramas para valores de  $\xi$  correspondientes a una distribución de ley de potencias con  $\kappa = 1/2$  en escala logarítmica-logarítmica

En conjunto las figuras 5.2 y 5.3 ilustran a detalle la asimetría en las distribuciones y la transición producida por el cambio en la magnitud de  $\xi$ . La asimetría es resultado de la función que acompaña al término estocástico y que revisamos en la ecuación (5.2) y es posible mostrarlo de manera analítica. Pues si determinamos el máximo de la ecuación encontraremos que este siempre se alcanza cuando  $V^*(t^*) = \xi$  y por esa razón los máximos de las distribuciones mostradas en la figura 5.3 se encuentran siempre en  $\xi$ . Lo anterior se mantiene para el caso régimen de  $\xi$  grande y por tanto la asimetría también aparece en el régimen de distribución normal.

El cambio abrupto en la región positiva de los histogramas que se muestra en las figuras en escala logarítmica-logarítmica de 4.6 muestran una transición abrupta y debido a que el logaritmo de número menores o iguales a cero está indefinido es imposible estudiar cómo es la transición en la región negativa sin hacer una manipulación adicional de los datos. A continuación mostramos el valor absoluto de la parte negativa de los histogramas en escala logarítmica-logarítmica mostrados en 4.6c

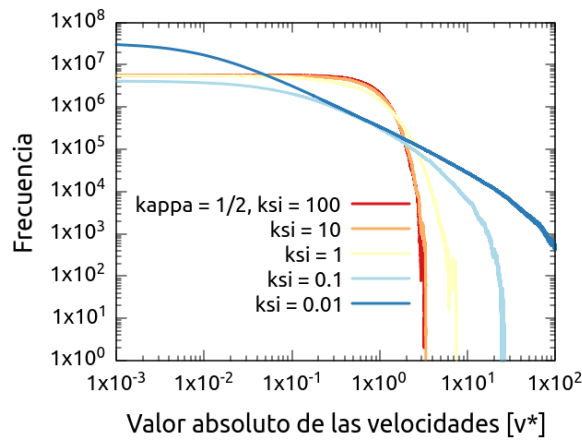
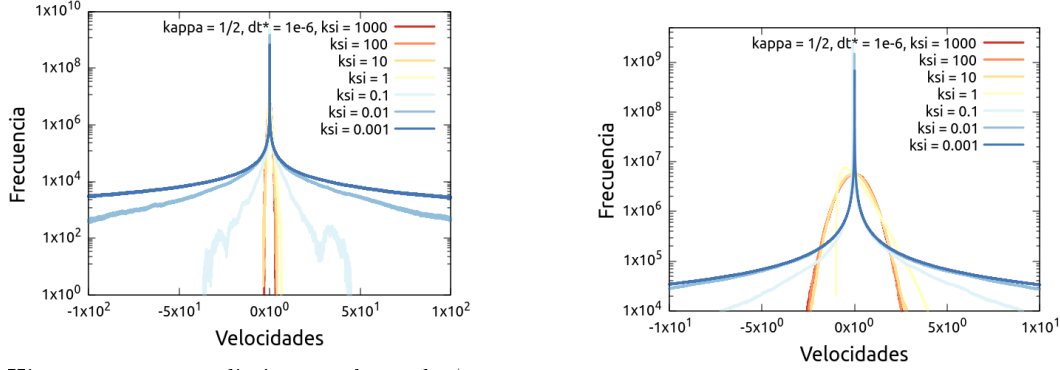
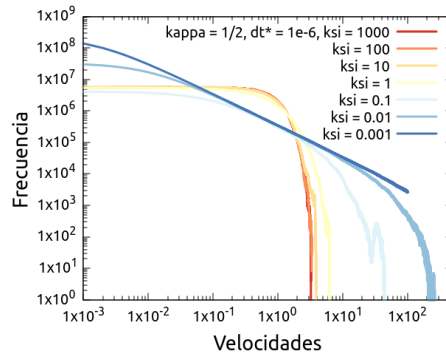


Figura 5.4: Histogramas del valor absoluto de la región negativa de los histogramas mostrados en 4.6c para distintos valores de  $\xi$  con  $\kappa = 1/2$  en escala logarítmica-logarítmica

Lo que nos muestra la figura 5.4 es que para los valores negativos de las realizaciones la transición es suave a diferencia de los valores positivos. Por lo tanto es válido volver a preguntarnos ¿qué pasará con la transición si cambiamos el signo dentro del valor absoluto?. Al inicio de este capítulo discutimos que el signo no tenía aparente consecuencia debido al valor absoluto, sin embargo al calcular el máximo de la ecuación encontramos que, si la modificación es con un signo +, el máximo se alcanza en  $V^*(t^*) = -\xi$ . Lo anterior debería de invertir la región donde observamos la asimetría. Por lo tanto ahora nos fijamos en los histogramas de realizaciones considerando que la modificación es (5.3).



(a) Histogramas para distintos valores de  $\xi$  con  $\kappa = 1/2$  en escala lineal-logarítmica considerando que la modificación a la ecuación está dada por la función (5.3) (b) Acercamiento a los histogramas para distintos valores de  $\xi$  con  $\kappa = 1/2$  en escala lineal-logarítmica (5.3)

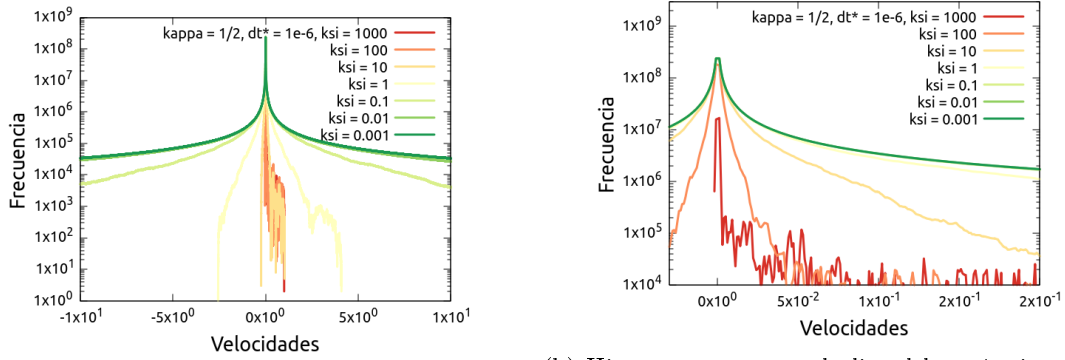


(c) Histogramas para distintos valores de  $\xi$  con  $\kappa = 1/2$  en escala logarítmica-logarítmica (5.3)

Figura 5.5: Histogramas en distintas escalas para la ecuación modificada con la función dada por la ecuación (5.3) en distintas escalas para  $\kappa = 1/2$  y distintos valores de  $\xi$

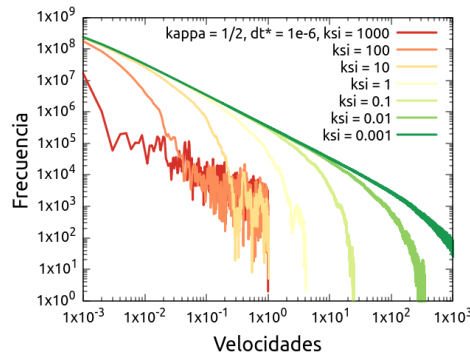
En el conjunto de figuras 5.5 encontramos a la figura 5.5b que nos muestra que la asimetría se ha invertido tal como vimos cuando estudiamos el término del valor absoluto. Ahora el lado positivo de los histogramas presenta una transición suave como se ve en la figura 5.5c. Esta vez es el lado negativo el que guarda los efectos de la asimetría del valor estocástico que centra los máximos en  $-\xi$ . Recordando la conclusión de que es equivalente tener un signo positivo o negativo en el valor absoluto, pues el signo es un marco de referencia relativo, entonces podemos asegurar que la transición es suave tanto para los valores negativos o positivos. Es según los valores de interés que se elige el signo a emplear en las realizaciones.

Ahora exploremos brevemente cómo lucen los histogramas para el caso en que quitamos el  $\pm 1$  del valor absoluto, recordando que tal forma del valor absoluto pierde el carácter de retorno. Una primer hipótesis es que tendremos una transición suave pues no hay una asimetría impuesta por el  $\pm 1$ , lo que tenemos es lo siguiente.



(a) Histogramas en escala lineal-logarítmica para  $\kappa = 1/2$  y  $\sin \pm 1$  en el valor absoluto

(b) Histogramas en escala lineal-logarítmica para  $\kappa = 1/2$  y  $\sin \pm 1$  en el valor absoluto. Acercamiento.



(c) Histogramas en escala logarítmica-logarítmica para  $\kappa = 1/2$  y  $\sin \pm 1$  en el valor absoluto

Figura 5.6: Histogramas en distintas escalas para la ecuación modificada de Langevin sin considerar el  $\pm 1$  dentro de la modificación en el valor absoluto. Se muestra el caso  $\kappa = 1/2$  y distintos valores de  $\xi$ .

Lo que muestran las figuras de 5.6 es que en efecto la transición es suave en la región positiva y negativa de los histogramas, sin embargo la figura 5.6b muestra que en el régimen de  $\xi \gg 1$  se pierde completamente la simetría de los histogramas y sólo se obtienen valores positivos en las realizaciones. Por otro lado, la figura 5.6a muestra que para estas realizaciones, con el término  $|\frac{V^*}{\xi}|$  acompañando al término estocástico, no existe la transición de una normal a una ley de potencias. En cambio la distribución evoluciona entre distribuciones de leyes de potencias que abarcan más órdenes de magnitud conforme disminuye el término  $\xi$ . Finalmente, la figura 5.6b muestra que cuando  $\xi \gg 1$  la distribución deja de asemejar a una distribución de ley de potencia pero no se asemeja a una distribución normal, en cambio tenemos una cola pesada fluctuante que no tiene forma definida. Por lo tanto, quitar el  $\pm 1$  de dentro del valor absoluto no es equivalente a simplemente quitar los efectos de la asimetría en la transición.

Con el análisis anterior cerramos este capítulo en donde logramos entender la transición que encontramos al estudiar a la ecuación (5.1) en el capítulo 3. Resumiendo lo que encontramos, la asimetría impuesta por  $\pm 1$  es relevante en la ecuación para el efecto de transición que observamos, la transición es suave en la sección de histograma

correspondiente al signo dentro del valor absoluto y hay una transición de normal a ley de potencias conforme  $\xi$  disminuye de magnitud. Que los máximos de la ley de potencia aparezcan en la región del histograma de signo opuesto se debe a que la ecuación alcanza su máximo en  $\mp\xi$  según el signo dentro del valor absoluto. Ahora que entendemos el efecto de transición resolveremos la ecuación 5.1 de forma numérica en el siguiente capítulo.

## 6 Solución numérica

En este capítulo mostramos una solución numérica, en el lenguaje *mathematica*, a la ecuación modificada de Langevin que incorpora disipación a partir de la ecuación cinética asociada. Para desarrollar dicha solución primero mostramos como solucionar numéricamente un problema bien conocido en su versión adimensional: la ecuación cinética asociada del caminante aleatorio de Langevin. Una vez que encontramos que el método que empleamos es congruente con la solución conocida del problema avanzamos a aplicar el método a nuestra ecuación modificada. Derivamos la ecuación cinética asociada a la ecuación modificada con disipación y aplicamos la rutina numérica para obtener la solución. La solución que encontramos reproduce fielmente la transición entre distribuciones.

### 6.1. Ecuación de Langevin y la ecuación cinética asociada

Hasta ahora lo que sabemos de la ecuación

$$V(t + dt) - V(t) = \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa} \beta^2 dt} N_t^{t+dt}(0, 1) \quad (6.1)$$

lo hemos obtenido a partir de un análisis estadístico de los datos generados por realizaciones, con distintos valores en los parámetros, de la ecuación. Para evitar analizar un volumen excesivo de datos usamos análisis dimensional para obtener una versión adimensional de (6.1). Sin embargo aún con dichos análisis no conocemos la solución a la ecuación.

Para avanzar en la búsqueda de dicha solución volteamos a ver los métodos numéricos de solución de E.D.P. usando *Mathematica*. Para procesos estocásticos como el descrito por la ecuación de Langevin ó (6.1) existe una ecuación diferencial parcial (E.D.P.) asociada conocida como la ecuación de Fokker-Planck o ecuación cinética. La solución a dicha ecuación es la función de densidad de probabilidad que describe al proceso en cuestión.

### 6.1.1. Probando el método con la ecuación de Langevin

Para probar el método de solución numérica comenzaremos por resolver la ecuación de Langevin. Recordemos que en el caso particular en el que  $\kappa = 0$  en 5.1 recuepramos la ecuación de Langevin, de modo que comenzar con esta ecuación resulta una manera natural de abordar los métodos de solución numérica. Para comenzar, reescribimos la ecuación de Langevin en su versión adimensional usando el factor  $\gamma^{1/2}/\beta$ ,

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{dt^*}N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0,1). \quad (6.2)$$

La ecuación 6.2 es la versión adimensional de la ecuación de Langevin que mostramos en la introducción en la ecuación 1.2. Ahora, obtenemos la ecuación cinética asociada o ecuación de Fokker-Planck tal como se describe en [7]. La ecuación que buscamos resulta ser

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho}{\partial x^*}v^* = \rho + v^* \frac{\partial \rho}{\partial v^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^{*2}}, \quad (6.3)$$

donde  $v^*$  y  $x^*$  son las variables reales asociadas a cada una de las variables estocásticas  $V^*(t^*)$  y  $X^*(t^*)$  respectivamente. La solución a (6.2) se conoce de resolver una ecuación diferencial ordinaria para  $\langle x \rangle$  y otra para  $\langle x^2 \rangle$  suponiendo que la solución es una variable normal, detalles de dicho procedimiento se encuentran en el apéndice B de la referencia [7]. La solución que se obtiene por dicho procedimiento resulta ser independiente de la posición, *i.e.*  $\rho(v^*, x^*, t^*) = \rho(v^*, t^*)$ , este resultado se puede constatar en el capítulo 15 de la referencia [13] y el capítulo 7 de la referencia [7]. Lo anterior permite igualar el término de la derivada respecto de la posición a cero en la ecuación (6.3) y así pasamos a buscar una solución independiente de la variable espacial y reescribimos la ecuación mencionada como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} = \rho + v^* \frac{\partial \rho}{\partial v^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^{*2}}. \quad (6.4)$$

La solución (6.4) es la función de densidad de probabilidad de las velocidades y el tiempo. Que resulte independiente de la posición se traduce en que sin importar la posición la distribución de probabilidad de las velocidades será siempre la misma y evolucionara temporalmente del mismo modo.

El objetivo ahora es resolver la ecuación (6.4) en *Mathematica* empleando una rutina numérica: la rutina **NDSolve**. En particular se resuelve la ecuación en los intervalos  $v \in [-5, 5]$ ,  $t \in [0, 50]$ . Se emplea la condición inicial  $\rho(v, 0) = N(0, 10^4)$  que es una distribución normal extremadamente delgada que asemeja una delta de Dirac y se usan las condiciones de borde  $\rho(v, -5) = 0$ ,  $\rho(v, 5) = 0$ , tales condiciones se eligen de previamente conocer el comportamiento de la solución analítica en valores extremos del intervalo en que se quiere conocer la solución. La intención de emplear la función **NDSolve** es que es una rutina numérica, es emplear esta misma función para la ecuación modificada que involucra la función valor absoluto. Ahora, la solución numérica que obtenemos para la ecuación (6.4) la podemos ver en el conjunto de figuras 6.1.

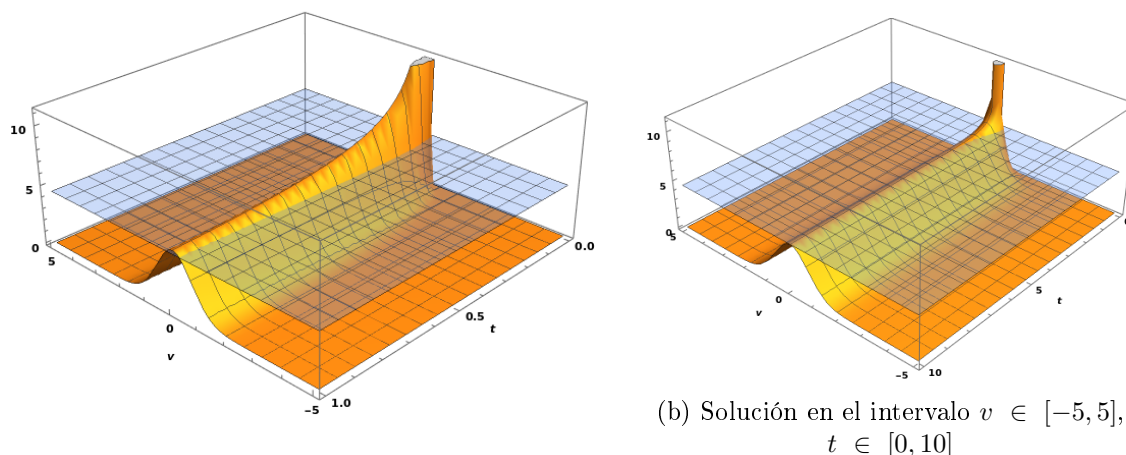
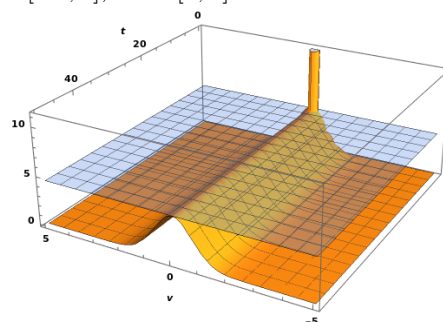
(a) Solución en el intervalo  $v \in [-5, 5]$ ,  $t \in [0, 1]$ (c) Solución en el intervalo  $v \in [-5, 5]$ ,  $t \in [0, 50]$ 

Figura 6.1: Solución a la ecuación (6.4) en distintos intervalos temporales. Notemos que el método numérico converge a una solución estable y constante luego de transcurridas 10 unidades de tiempo adimensional.

Vemos que la solución numérica es estable en todo el intervalo en que la solucionamos. El plano azul que se observa en cada figura de 6.1 es para mostrar que, en efecto, al transcurrir el tiempo se alcanza una distribución constante en media y varianza. Esta observación es importante pues nos permite proponer una nueva versión de la ecuación ahora que sabemos que, para un tiempo “suficientemente largo”, es válido asumir que  $\rho = \rho(v)$ , es decir, la distribución es independiente del tiempo también. En tal caso reescribimos a la ecuación 6.4 como

$$0 = \rho + v^* \frac{\partial \rho}{\partial v^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^{*2}}, \quad (6.5)$$

Para resolver esta nueva ecuación con **NDSolve** el intervalo de solución es  $v \in [-10, 10]$  con condiciones iniciales  $\rho(0) = 4.5$ ,  $\rho'(0) = 0$ . La condición para  $\rho'$  se interpreta como que en 0 se alcanza el máximo de la función  $\rho$  y la condición para  $\rho$  en 0 es que el máximo se alcanza en el valor 0 y tiene una altura de 4.5 en el eje  $y$ . Notemos que en esta ecuación ha pasado de ser una ecuación diferencial parcial a ser una simple ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Es la solución ha pasado de



evolucionar en el tiempo a ser una solución estacionaria para el problema, es decir que la distribución será constante en el límite  $t \rightarrow \infty$ . La solución numérica que obtenemos para (6.5) se muestra en la figura 6.2.

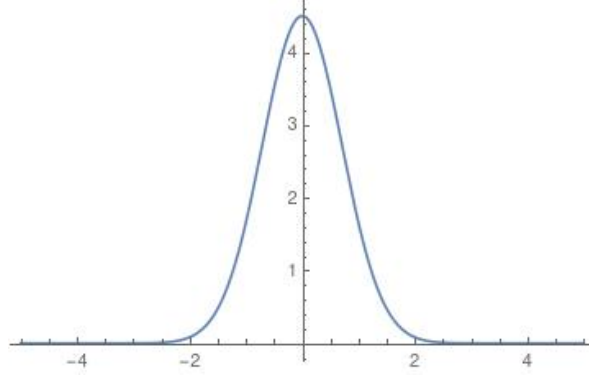


Figura 6.2: Solución a la ecuación (6.5) en el intervalo  $t \in [-5, 5]$

Como condición inicial para resolver (6.5) se propuso  $\rho(0) = 4.5$ . La intención es recuperar una solución que empate con la región estable que se muestra en la figura 6.1. Esta sección sirve a manera de entrenamiento para tratar de resolver la ecuación cinética asociada a nuestro caminante con disipación usando la rutina numérica **NDSolve** pues hemos logrado usarla para resolver la versión adimensional de la ecuación cinética asociada a Langevin y obtuvimos resultados congruentes con los resultados de la versión no adimensionalizada. La distribución que obtenemos en el estado estacionario en efecto corresponde a una distribución normal en todos los casos.

## 6.2. Nuestra ecuación modificada y su ecuación cinética

Nuestro objetivo ahora es aplicar el método descrito en la sección anterior para resolver nuestra ecuación modificada con término de disipación

$$V(t + dt) - V(t) = -\gamma V(t)dt + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa} \beta^2 dt N_t^{t+dt}(0, 1)}. \quad (6.6)$$

Recordemos que la manera de simplificar el estudio de la ecuación (6.6) fue reescribiéndola de forma adimensional. Usando que  $[\beta] = \frac{L}{T^{3/2}}$  y que  $[\gamma] = \frac{1}{T}$  se definió el parámetro  $\xi = \frac{V_0 \gamma^{1/2}}{\beta}$  y se escribió la ecuación en términos de un tiempo adimensional  $t^*(t) = t\gamma$ , y una velocidad adimensional  $V^*(V) = \frac{\gamma^{1/2}}{\beta} V$ , la versión adimensional resultó

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1)}. \quad (6.7)$$

Ahora el objetivo es derivar la ecuación cinética asociada a la ecuación (6.7) tal como hicimos para la ecuación de Langevin adimensional empleando el método descrito en [7]. La ecuación que obtenemos es la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial \rho}{\partial x^*} = -\frac{\partial}{\partial v^*}(v^* \rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} \left( \left| 1 - \frac{v^*}{\xi} \right|^{2\kappa} \rho \right). \quad (6.8)$$

En donde las variables  $v^*$  y  $x^*$  son las variables reales asociadas a las variables estocásticas  $V^*$  y  $X^*$  de la ecuación estocástica (6.7). Notemos que la ecuación (6.8) pide resolver para  $\rho = \rho(t^*, x^*, v^*)$ . Sin embargo, de los histogramas de velocidades de las realizaciones que conocemos de 6.7 podemos afirmar que existe una región estacionaria de la solución en la que  $\rho = \rho(v^*)$ , en este caso las derivadas del lado izquierdo de (6.8) son cero y obtenemos la ecuación

$$-\frac{\partial}{\partial v^*}(v^* \rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} \left( \left| 1 - \frac{v^*}{\xi} \right|^{2\kappa} \rho \right) = 0. \quad (6.9)$$

La ecuación (6.9) es la ecuación por resolver usando la rutina **NDSolve**. Recordemos que en las realizaciones de (6.7) observamos que existe un cambio de distribución según la magnitud de  $\xi$ , dicha transición tiene un efecto en las condiciones de frontera a emplear para resolver numéricamente la ecuación. Siempre que estemos en el régimen  $\xi \geq 1$  es necesario emplear las condiciones  $\rho(v_{\text{mínima}}^*) = 0$ ,  $\rho'(v_{\text{máxima}}^*) = \tau$  con  $\tau = 10^{-12}$  y  $[v_{\text{mínima}}^*, v_{\text{máxima}}^*]$ , esto debido a que en este régimen de  $\xi$  estamos en la región de distribución normal y para recuperar soluciones compatibles con los histogramas para cualesquiera dos números considerados en el dominio  $[v_{\text{mínima}}^*, v_{\text{máxima}}^*]$ . Por otro lado, en el régimen  $\xi < 1$  es necesario emplear las condiciones  $\rho(v_{\text{máxima}}^*) = 0$ ,  $\rho'(v_{\text{máxima}}^*) = \tau$  con  $\tau = 10^{-12}$  y para el intervalo  $[v_{\text{mínima}}^*, v_{\text{máxima}}^*]$ . Así, para este régimen lo que afirmamos con las condiciones de borde es que en el valor máximo la distribución es cero y es un mínimo de la función. Empleamos el valor  $\tau$  para evitar problemas numéricos al evaluar el valor absoluto de  $1/v^*$  pues sabemos que la solución ha de incluir la función algebraica  $\frac{1}{v^*}$ .

Al intentar resolver la ecuación nos encontramos con un problema al evaluar la solución en los puntos de las condiciones iniciales. Este problema se debe a la función valor absoluto en el factor que acompaña al término estocástico. La solución que se emplea para este problema es usar una aproximación del valor absoluto en la formulación de la ecuación en el lenguaje *Mathematica*. La aproximación elejida es la siguiente

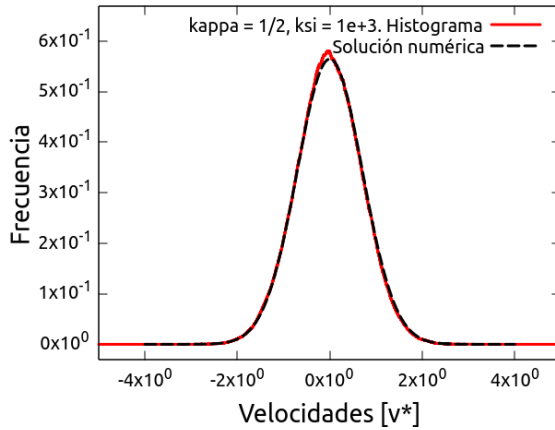
$$|1 - x| \approx (1 - x) \text{Tanh}(\epsilon(1 - x)), \quad (6.10)$$

donde  $\epsilon$  es un número grande con respecto a 1. Para más detalles de dicha aproximación se puede revisar el apéndice A al final de este trabajo. Empleando la aproximación la ecuación 6.10 se reescribe como

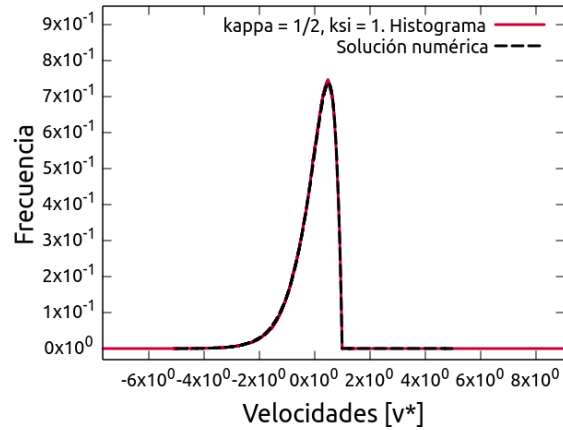
$$-\frac{\partial}{\partial v^*}(v^* \rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} \left( \left[ \left( 1 - \frac{v^*}{\xi} \right) \text{Tanh}(\epsilon(1 - \frac{v^*}{\xi})) \right]^{2\kappa} \rho \right) = 0. \quad (6.11)$$

Al aplicar la rutina **NDSolve** logramos obtener una solución numérica. Dicha solución numérica se puede comparar con los histogramas mostrados en los capítulos anteriores

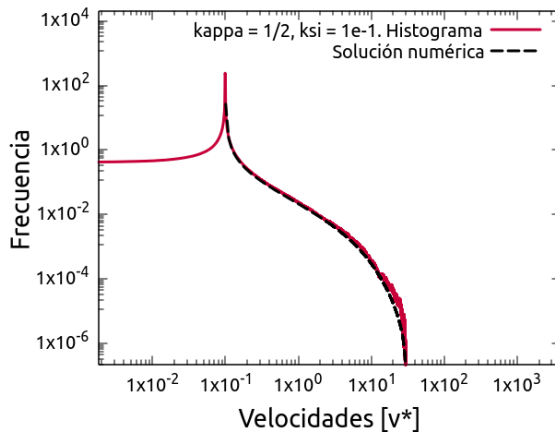
normalizando los histogramas para poder compararlos con la solución numérica de la ecuación también normalizada a uno. El resultado de la comparación de la solución y los histogramas normalizados se muestran en la figura 6.3



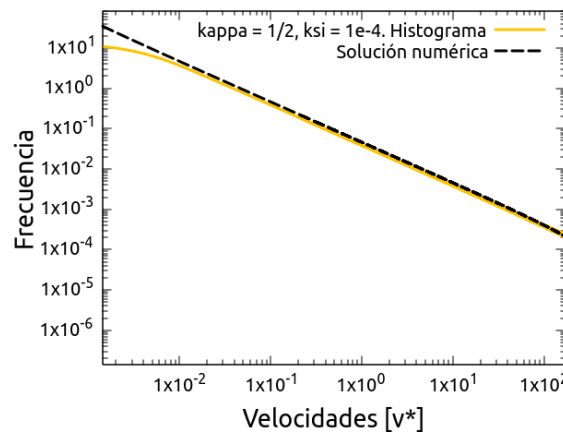
(a) Comparación del histograma de la realización contra la solución numérica para las condiciones  $\xi = 1000$ ,  $\kappa = 1/2$



(b) Comparación del histograma de la realización contra la solución numérica para las condiciones  $\xi = 1$ ,  $\kappa = 1/2$



(c) Comparación del histograma de la realización contra la solución numérica para las condiciones  $\xi = 0.1$ ,  $\kappa = 1/2$



(d) Comparación del histograma de la realización contra la solución numérica para las condiciones  $\xi = 0.0001$ ,  $\kappa = 1/2$

Figura 6.3: Comparación de los histogramas de las realizaciones contra la solución numérica para los tres regímenes de la solución. a) régimen de alta fricción con  $\xi = 1$ , b) régimen de transición con  $\xi = 1, 0.1$  y c) régimen de baja fricción con  $\xi = 10^{-4}$

En la figura 6.3 vemos que la solución numérica coincide con los histogramas de las realizaciones. Es importante notar que 6.3b muestra cómo la solución numérica replica a la perfección la región de transición aún usando la aproximación para el valor absoluto.

Por lo tanto ahora tenemos una solución numérica a la ecuación que coincide con el comportamiento estadístico de la realizaciones. Esto facilita explorar la región de transición pues en vez de explorar dicha región con las realizaciones es posible explorarla usando solamente la solución numérica y evitar ejecutar la realización y después

obtener el histograma.

Esta solución puede verse opacada en los siguientes dos capítulos en donde se exponen dos soluciones analíticas para la ecuación modificada en su versión sin disipación y para la ecuación modificada agregando disipación y arrastre. Sin embargo, la importancia de tener una solución numérica para este caso intermedio de la ecuación sólo con disipación recae en que es la única solución disponible para esta parte del problema pues no fue posible encontrar una solución analítica en este caso.



## 7 Solución analítica

En este capítulo mostramos como solucionar de manera analítica la ecuación modificada de Langevin sin considerar efectos de disipación ni deriva. Partimos de la ecuación cinética asociada a la ecuación estocástica y la llevamos al caso estacionario. Luego mostramos como es posible, por simple inspección, determinar la solución. Finalmente comparamos la solución analítica con los histogramas y constatamos que la solución y el análisis estadístico son congruentes entre sí.

### 7.1. Las ecuaciones estocásticas

Hasta ahora hemos estudiado la estadística de las siguientes dos ecuaciones

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) \quad (7.1)$$

y

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) . \quad (7.2)$$

Mientras que la ecuación (7.1) recupera histogramas que coinciden con una distribución de ley de potencias, cuyas potencias cambian según el valor de  $\kappa$ , la ecuación (7.2) recupera histogramas que evolucionan según la magnitud del término adimensional  $\xi$  y que varían de una distribución normal a una distribución de ley de potencias. El estudio estadístico, aunque útil, puede ser complementado con una solución para la ecuación, recordando siempre que el estudio estadístico de ecuaciones estocásticas es importante pues la solución a dichas ecuaciones resultan ser el promedio de los histogramas de las realizaciones. La ecuación (7.2) la hemos logrado solucionar de manera numérica obteniendo primero la ecuación cinética asociada y posteriormente aplicando una rutina numérica en *Mathematica*. En este capítulo mostraremos cómo recuperar una solución analítica para la ecuación (7.1).

## 7.2. La ecuación cinética asociada a la ecuación modificada

Comenzaremos por obtener la ecuación cinética asociada a (7.1), usando el método descrito en la referencia [7]. Obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial \rho}{\partial x^*} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} \left( |1 - v^*|^{2\kappa} \rho \right). \quad (7.3)$$

Notemos que la ecuación (7.3) pide resolver para  $\rho = \rho(v^*, x^*, t^*)$  pero en los histogramas asociados a las realizaciones de (7.1) tenemos que  $\rho = \rho(v^*)$ , que es el caso estacionario del proceso. De modo que los histogramas muestran la solución para las condiciones estacionarias de nuestra ecuación. Considerando lo anterior podemos igual a cero los términos del lado izquierdo de la ecuación (7.3) y así obtenemos la ecuación cinética bajo las condiciones estacionarias,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} \left( |1 - v^*|^{2\kappa} \rho \right) = 0. \quad (7.4)$$

Es importante notar que la ecuación (7.4) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden cuya solución es fácilmente deducida del bien conocido hecho de que la derivada de una constante es cero. Dicha solución es

$$\rho(v^*) = A|1 - v^*|^{-2\kappa} + Bv^*|1 - v^*|^{-2\kappa}. \quad (7.5)$$

Con  $A$  y  $B$  constantes asociadas a las condiciones iniciales ó de frontera del problema. A continuación mostramos una gráfica de (7.5) y de cada uno de los términos de la solución en la figura 7.1 considerando que todas las constantes son iguales a uno.

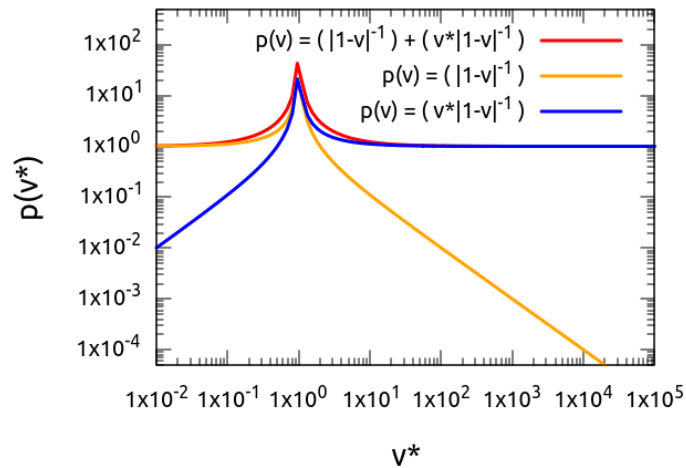
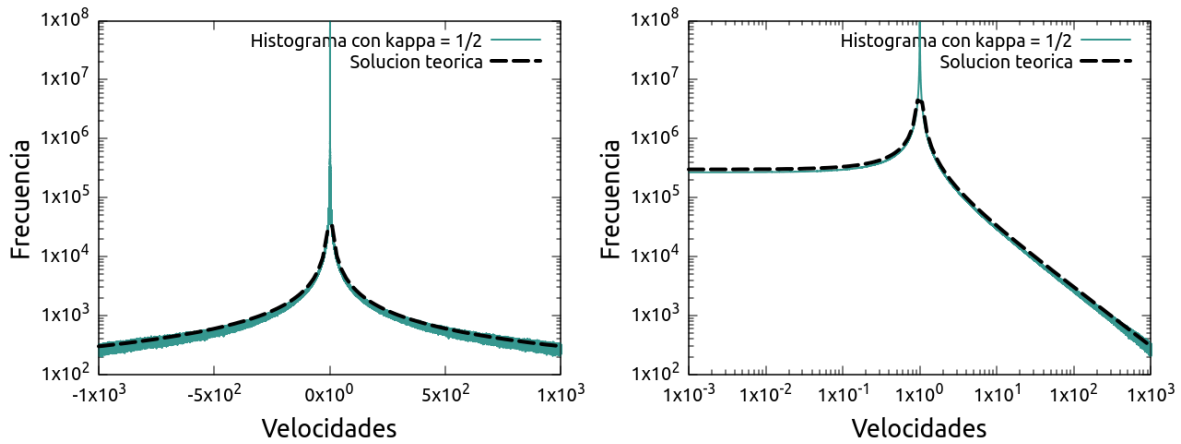


Figura 7.1: Gráfica de  $\rho(v^*)$  y sus partes para  $\kappa = 1/2$ . La solución compelta corresponde a la graáfica en rojo, la parte sólo de ley de potencias corresponde a la gráfica en naranja y la gráfica de ley de potencias producto la velocidad en azul.

Encontramos un resultado interesante, la solución completa (7.5) no parece ser la solución que mejor ajusta a los histogramas, la parte de la solución asociada al término que incluye a la constante  $B$  muestra un comportamiento completamente opuesto a los histogramas también. Sin embargo, la parte de la solución asociada al término que incluye a la constante  $A$  luce bastante cerca, un rápido ajuste revela lo siguiente.



(a) Comparación entre la solución analítica de la ecuación (7.3) y una realización en escala lineal-logarítmica. (b) Comparación entre la solución analítica de la ecuación (7.3) y una realización en escala logarítmica-logarítmica.

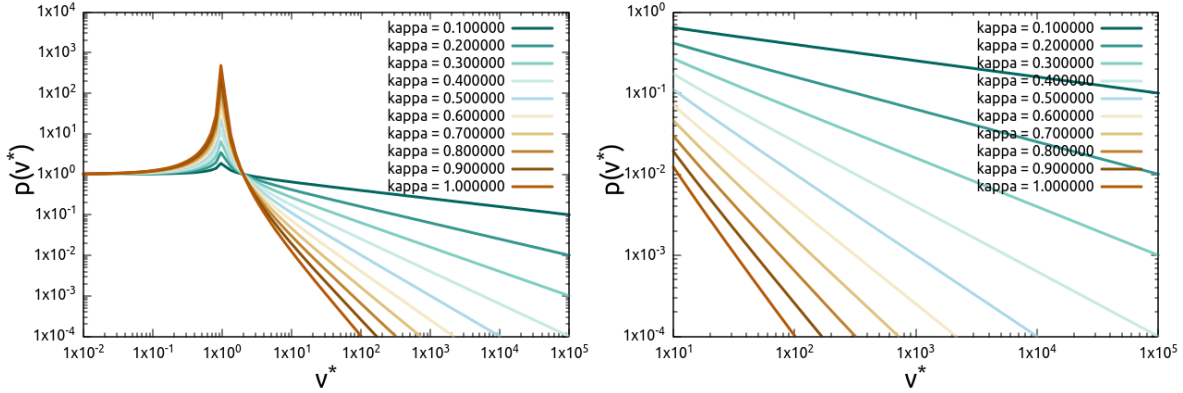
Figura 7.2: Comparación entre la solución analítica de la ecuación (7.3) y una realización del caminante aleatorio (7.1).

La figura 7.2 muestra que la solución que corresponde a la ecuación (7.4), y que a su vez es solución para el proceso estocástico descrito por (7.2), es

$$\rho(v^*) = C|1 - v^*|^{-2\kappa}. \quad (7.6)$$

Por lo tanto hemos resuelto analíticamente el proceso estocástico sin disipación. En la siguiente figura mostramos la solución para distintos valores de  $\kappa$ .





(a) Gráficas de la solución a la ecuación (7.1) dada por la ecuación (7.6) para distintas  $\kappa$  en escala logarítmica-logarítmica

(b) Acercamiento a gráficas de la solución a la ecuación (7.1) dada por la ecuación (7.6) para distintas  $\kappa$  en escala logarítmica-logarítmica

Figura 7.3: Gráficas de la solución a la ecuación (7.1) dada por la ecuación (7.6) para distintas  $\kappa$

La figura 7.3 nos muestra que, en efecto, el exponente de la ley de potencia aumenta conforme aumenta  $\kappa$ . Un resultado notable de conocer la forma de la solución es que el exponente que se encontró cuando comenzamos a estudiar los histogramas de las realizaciones de (7.2) en efecto cumple con  $\alpha = 2\kappa$ . Notemos también que la figura 7.3a muestra un máximo en forma de pellizco en  $v^* = 1$ , dicho máximo no siempre era visible en los histogramas que estudiábamos debido a la resolución de los *bins* que se usaban para generar los histogramas. La figura 7.2 muestra que con un histograma con *bins* suficientemente pequeños es posible observar dicho máximo.

Una interrogante que es posible responder ahora que conocemos la solución dada por (7.6) es que los resultados mostrados en la tabla 2.1 para el ajuste por método analítico se derivan considerando que la solución a la ecuación es de la forma de una ley de potencias simple como la mostrada en (2.1). La manera correcta de aproximar la potencia empleando la técnica de reconstrucción analítica es derivar el exponente tal como hacen en el apéndice B de la referencia [8] empleando la ecuación (7.6).

Hasta ahora hemos resuelto las dos versiones de la ecuación modificada de Langevin que hemos propuesto en este trabajo. En el siguiente capítulo estudiaremos la ecuación modificada agregando disipación y deriva, la exploración de tal versión de la ecuación veremos que será sencilla ya armados con todo lo que hemos encontrado hasta ahora sobre el comportamiento la ecuación.

## 8 La ecuación modificada con deriva

En este capítulo investigamos la estadística de la ecuación modificada de Langevin agregando la acción de un potencial en forma de un término de deriva (*drift* en inglés). Dicho término de deriva impone la misma asimetría que hay en el término estocástico al término de disipación. Recapitulamos los resultados que hasta ahora conocemos de las dos ecuaciones modificadas previas. Luego adimensionalizamos la ecuación para simplificar los parámetros por explorar y nuevamente queda sólo el parámetro adimensional  $\xi$  en la ecuación. Estudiamos la estadística y las realizaciones y concluimos que una vez que agregamos el término de arrastre se pierde la transición entre estadísticas y sólo prevalece la estadística de ley de potencias sin importar la magnitud de  $\xi$ . Se complementa el estudio estadístico con la derivación de una solución analítica para un caso particular de  $\kappa$  y se compara con los histogramas, determinando que la solución es válida.

### 8.1. Agregando *drift*

Hasta ahora hemos estudiado la estadística de las siguientes ecuaciones con la intención de caracterizar el comportamiento de los caminantes aleatorios descritos por ellas

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = \sqrt{\left|1 - V^*(t^*)\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) \quad (8.1)$$

y

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V^*(t^*)}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) . \quad (8.2)$$

Nuestro estudio comenzó con (8.1) y decidimos que la ecuación caracterizara velocidades por la clara conexión que existe con el caminante aleatorio de Langevin cuando  $\kappa = 0$ . El estudio eventualmente condujo a formular una versión con un término de disipación (8.2). Esta versión arrojó una transición en las estadísticas asociadas a las realizaciones según la magnitud del factor adimensional  $\xi$ . Encontramos que la transición iba de un régimen de estadística de distribución de ley de potencias a un régimen de estadística de distribución normal. Esta formulación de la ecuación obligó a explicar la forma del valor absoluto  $|1 - \frac{V^*}{\xi}|$  íntimamente ligada con el concepto de retorno

financiero. Nuestro siguiente paso es incorporar una nueva modificación más acorde a la formulación física de la ecuación.

Antes de avanzar a esta nueva modificación de la ecuación es importante recordar los resultados que hemos encontrado para (8.1) y (8.2) con la intención de generar un panorama claro de lo que conocemos hasta ahora sobre el caminante aleatorio que planteamos en la ecuación (8.1) en el primer capítulo de este trabajo.

- La ecuación (8.1) presenta una estadística de ley de potencias sin importar el valor del término  $\kappa$ . El efecto del término  $\kappa$  es cambiar el exponente asociado a la distribución de ley de potencias. Al encontrar la solución analítica para (8.1) descubrimos que las soluciones son leyes de potencia con exponente  $-2\kappa$ .
- La ecuación (8.2) presenta una transición entre distribuciones según la magnitud del parámetro adimensional  $\xi$ . Para el régimen  $\xi > 1$  tenemos una estadística de distribución normal con una ligera asimetría. Para el régimen  $\xi < 1$  tenemos una ley de potencias en la cola de la distribución que se extiende por 3 o más ordenes de magnitud.
- Para la ecuación (8.2) en el régimen  $\xi > 1$  la distribución normal presenta una asimetría que disminuye según aumenta la magnitud de  $\xi$  aumenta. Dicha asimetría surge por el valor absoluto del termino estocástico que es asimétrico respecto de  $\xi$ .
- Para la ecuación (8.2) en el régimen  $\xi < 1$  la distribución de ley de potencias presenta un máximo en la distribución siempre en  $\xi$  y la solución obtenida para (8.1) es válida en este régimen.
- Mientras que la ecuación (8.1) presenta valores no acotados para las velocidades, la ecuación 8.2 logra acotar las posibles velocidades y dicha cota está asociada a la magnitud de  $\xi$ .
- En el apéndice B concluimos que, sin importar la versión de la ecuación, el valor de  $dt^*$  en la simulación ha de ser mucho menor que la escala impuesta por el termino adimensional  $\xi$  que abrevia la física de la ecuación. Por tanto se usa un valor de  $dt^* = 10^{-6}$  para las simulaciones.

En el capítulo 5 de este trabajo explicamos que la ecuación (8.2) toma a  $\xi$  como valor de referencia para determinar la magnitud de la varianza en los pasos aleatorios, esto genera una asimetría en las distribuciones. Sin embargo, la disipación que exploramos en el capítulo 4 es respecto de 0. Por lo tanto, resulta más coherente incorporar la asimetría del término estocástico también en el término de disipación como un término adicional de deriva ó *drift* en inglés. Entonces incluimos una velocidad de deriva  $V_d$  en el término de disipación y de manera dimensional la ecuación se reescribe como

$$V(t + dt) - V(t) = \gamma V_d dt - \gamma V(t) dt + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa}} \beta^2 dt N_t^{t+dt}(0, 1). \quad (8.3)$$

En este contexto de caracterización de velocidades se puede interpretar a  $V_d$  como una velocidad terminal que impone una cota a las velocidades posibles de la ecuación. Nuevamente, para simplificar el estudio de (8.3) reescribiremos la ecuación en su versión adimensional. La adimensionalización a usar es la misma que se usó previamente pues notemos que el término de *drift* comparte unidades con el término de disipación. Las unidades del término de disipación son de velocidad como se ilustra a continuación,

$$\begin{aligned} [\gamma V_0 dt] &= \frac{1}{T} \frac{L}{T} T \\ &= \frac{LT}{T^2} \\ &= \frac{L}{T}. \end{aligned}$$

De modo que multiplicando al término de deriva  $V_d$  por el factor dimensional dado por  $\frac{\gamma^{1/2}}{\beta}$  tenemos

$$\begin{aligned} \left[ \gamma V_d dt \frac{\gamma^{1/2}}{\beta} \right] &= \frac{1}{T^{1/2}} \frac{1}{T} \frac{L}{T} T \frac{T^{3/2}}{L} \\ &= \frac{LT^{5/2}}{LT^{5/2}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

Recordando que  $\xi = \frac{V_0 \gamma^{1/2}}{\beta}$  y pidiendo que  $V_d = V_0$  entonces la ecuación con *drift* adimensional se reescribe como

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = - (V^*(t^*) - \xi) dt^* + \sqrt{\left| 1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi} \right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^* + dt^*}(0, 1). \quad (8.4)$$

El siguiente paso es generar los histogramas de (8.4). Dichos histogramas se muestran a continuación en las figuras contenidas en la serie 8.1. Nos encontramos con que la transición entre distribuciones ha desaparecido. Los histogramas para  $\xi \leq 1$  mostrados en las figuras 8.1a, 8.1b corresponden a distribuciones cuya cola se ajusta a una ley de potencias, notemos que aún para  $\xi = 1$  la ley de potencias se mantiene. Cuando cruzamos al régimen  $\xi > 1$  encontramos que los histogramas no corresponden a una distribución normal; que era lo que veíamos cuando no se había incorporado el término de disipación. En cambio, las figuras 8.1c y 8.1d muestran una ley de potencia en uno de los extremos respecto del máximo y una serie de oscilaciones en las frecuencias en el otro extremo, es decir, nada que asemeje a una distribución normal.

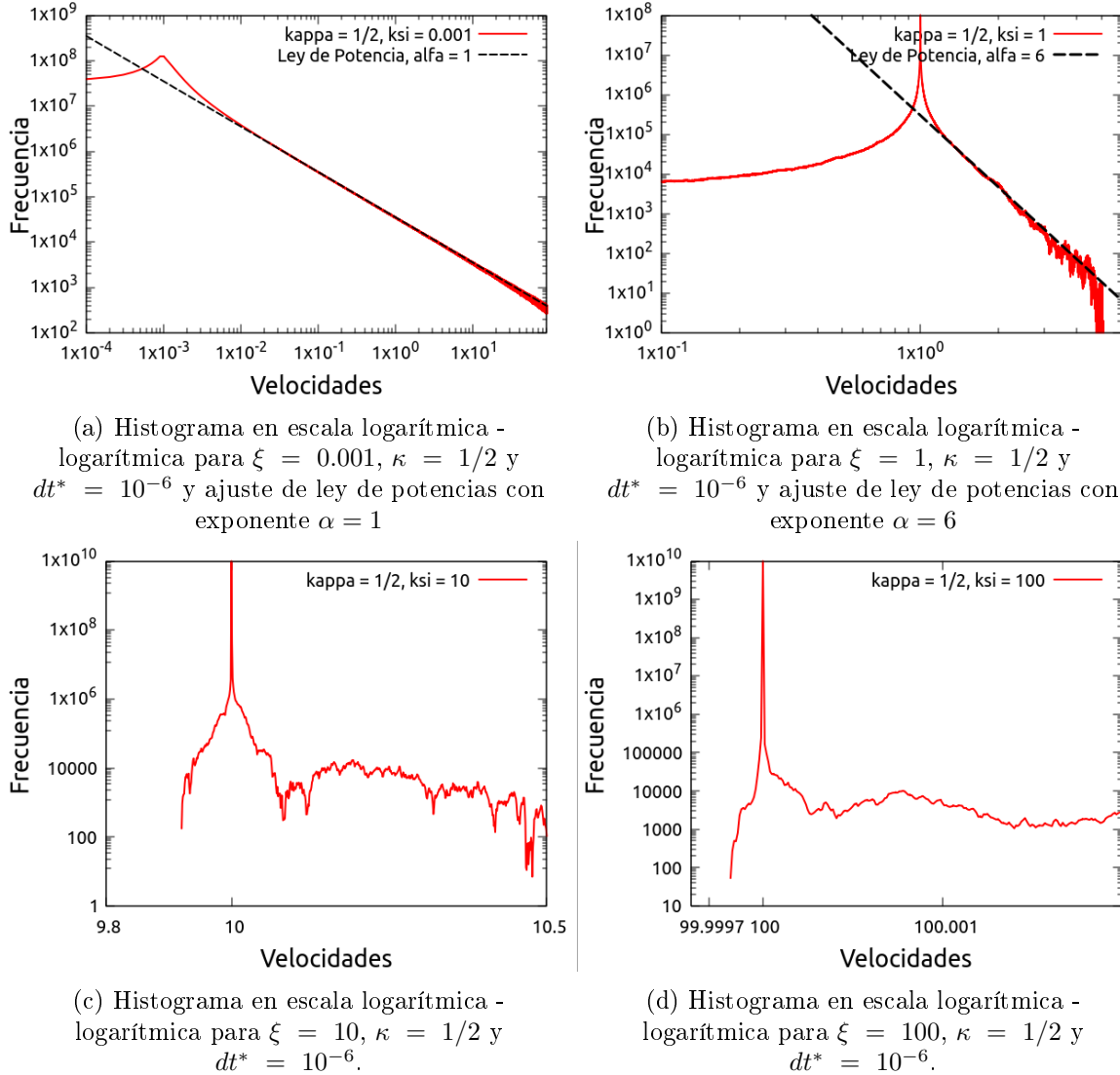


Figura 8.1: Histogramas de realizaciones de la ecuación (8.4) para distintos parámetros de  $\xi$  y  $\kappa$ . Cada realización consta de  $10^{10}$  iteraciones. Todas las figuras se grafican en escala logarítmica-logarítmica. El efecto de transición que observábamos en la figura 5.3 ha desaparecido.

En resumen, la serie 8.1 muestra que incorporar el término de *drift* elimina el efecto de transición. Adicionalmente, es importante notar que el tamaño de los *bins* empleados en los histogramas es inversamente proporcional a la magnitud de  $\xi$ .

Ahora revisemos rápidamente algunas realizaciones para visualizar mejor que el comportamiento de las excusiones es muy similar sin importar la magnitud de  $\xi$ .

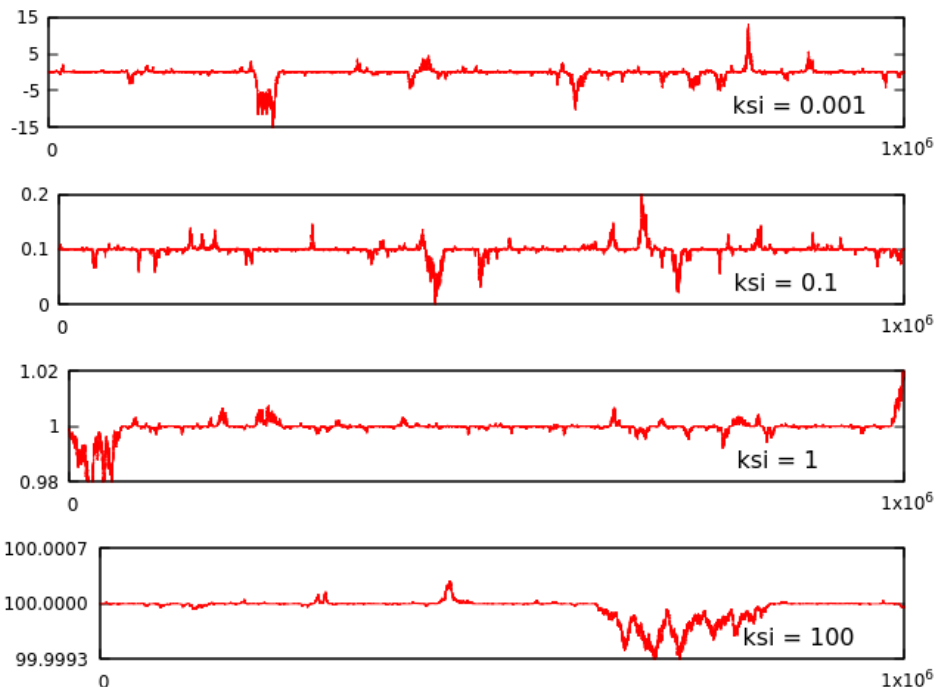


Figura 8.2: Cuatro intervalos de realizaciones con parámetros  $\kappa = 1/2$ ,  $dt = 10^{-6}$  y  $\xi = 0.001, 0.1, 1, 100$  de  $10^7$  iteraciones. Se cumple en todos los casos que el cociente de la magnitud de la excursión más grande de cada realización y el valor  $|y_{max} - y_{min}|$  respectivo es igual a  $1/2$ .

En la figura 8.2 es evidente que cuando la magnitud de  $\xi$  aumenta la magnitud de las excursiones al rededor de  $\xi$  disminuye. Sin embargo, la propiedad de libertad de escala se mantiene en todas las realizaciones siendo equivalente el fenómeno mostrado para  $\xi = 0.001$  con el fenómeno mostrado para  $\xi = 100$ . Esto muestra que con la ecuación que incorpora término de *drift* (8.4) es imposible recuperar la transición entre distribuciones. Recordemos que en el caso de (8.2) la transición ya era evidente desde  $\xi = 2$ . Desde el punto de vista analítico podemos explicar lo anterior de la siguiente manera.

Cuando tratamos con la ecuación

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1), \quad (8.5)$$

encontramos que la condición para obtener una distribución normal es  $\xi > 2$ . Es decir, cuando la varianza crecía proporcional a  $\frac{V^*}{\xi}$  respecto de 0. Ahora notemos que la ecuación (8.3) es equivalente a (8.5) si pedimos que  $V_d = 0$ . Ahora, en el contexto de la ecuación con el término de deriva,

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -(V^*(t^*) - \xi)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1), \quad (8.6)$$

la condición anterior cambia. No es posible pedir que  $\xi = 0$  pues se indefine la función dentro del valor absoluto. Por lo tanto, ahora es  $\xi$  el valor de referencia respecto del cual hay que hacer crecer al término que dicta la varianza de las excursiones en el caminante. Es necesario que  $\xi$  en el valor absoluto crezca respecto de  $\xi$  en el deriva. Tal condición no puede cumplirse dada la forma de la ecuación y por tal motivo es imposible recuperar la transición entre distribuciones que se observaba en las realizaciones de la ecuación (8.5).

## 8.2. La solución analítica en el régimen $\xi \leq 1$

Ahora mostraremos un resultado importante de nuestra ecuación con término de *drift*

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -(V^*(t^*) - \xi)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1). \quad (8.7)$$

Lo primero es recordar la forma de la solución analítica para la ecuación en su forma (8.1). Cuando el caminante llevaba a cabo las excursiones sin deriva ni disipación la solución que encontramos usando la ecuación cinética asociada es

$$\rho(v^*) = \frac{C}{|1 - v^*|^{2\kappa}} \quad (8.8)$$

Con  $C$  una constante de normalización,  $\xi$  el parámetro adimensional y  $\kappa$  el exponente del valor absoluto. Ahora escribimos la ecuación cinética asociada a (8.7) en el caso estacionario e independiente de la posición

$$-\frac{\partial}{\partial v^*}((\xi - v^*)\rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}}(|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}\rho) = 0. \quad (8.9)$$

El objetivo es encontrar una solución a (8.9). En el capítulo donde exploramos la transición en el caso de la ecuación con disipación encontramos que los máximos de las distribuciones se hallan en  $\xi$  cuando  $\xi \leq 1$ . Con la idea anterior en mente reescribimos la solución (8.8) del siguiente modo

$$\rho(v^*) = \frac{C}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}}, \quad (8.10)$$

y ahora la proponemos como solución a (8.9). Comenzamos por sustituir la solución modificada en (8.9)

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial v^*} \left( (\xi - v^*) \frac{C}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} \left( |1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa} \frac{C}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}} \right) = 0 \\ \implies & -\frac{\partial}{\partial v^*} \left( \frac{C(\xi - v^*)}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial v^{*2}} = 0. \end{aligned}$$

Es importante notar lo siguiente, se esta aplicando la derivada parcial a la función

$$\frac{C(\xi - v^*)}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}}, \quad (8.11)$$

que tiene forma de función  $sgn(x)$  con  $x = 1 - \frac{v^*}{\xi}$ , pues  $\xi - v^* = \xi(1 - \frac{v^*}{\xi})$  y reescribimos la ecuación anterior como

$$\frac{C\xi(1 - \frac{v^*}{\xi})}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}}, \quad (8.12)$$

y si ahora pedimos que  $\kappa = 1/2$  entonces la expresión se simplifica a

$$C\xi \frac{(1 - \frac{v^*}{\xi})}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|} = C\xi sgn(1 - \frac{v^*}{\xi}). \quad (8.13)$$

Por lo tanto, en el caso  $\kappa = 1/2$  el segundo término también resulta ser constante pues para toda  $v^*$  la función signo opera del siguiente modo

$$sgn(1 - \frac{v^*}{\xi}) = \begin{cases} -1 & \text{si } v^* > \xi \\ 0 & \text{si } v^* = \xi \\ 1 & \text{si } v^* < \xi \end{cases}. \quad (8.14)$$

Por lo tanto, se cumple lo siguiente

$$-\frac{\partial}{\partial v^*} \left( \frac{C(\xi - v^*)}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|} \right) = -\frac{\partial}{\partial v^*} (C\xi \text{Constante}) = 0. \quad (8.15)$$

Y así, para  $\kappa = 1/2$  la solución al caminante aleatorio con disipación y deriva es

$$\rho(v^*) = \frac{C}{|1 - \frac{v^*}{\xi}|^{2\kappa}} \quad (8.16)$$

con  $C$  una constante de normalización.

Por último probemos cómo se compara la solución analítica con realizaciones para tres casos  $\xi = 0.001, 1, 100$ .



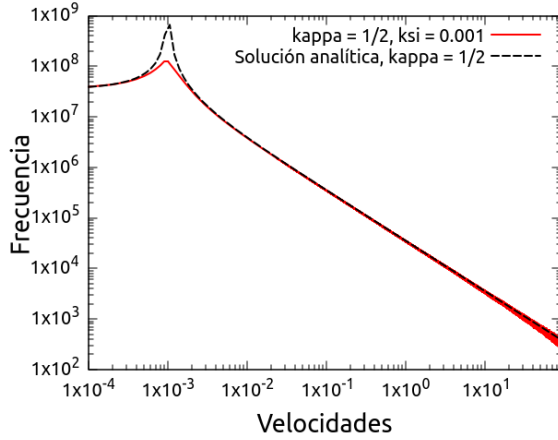
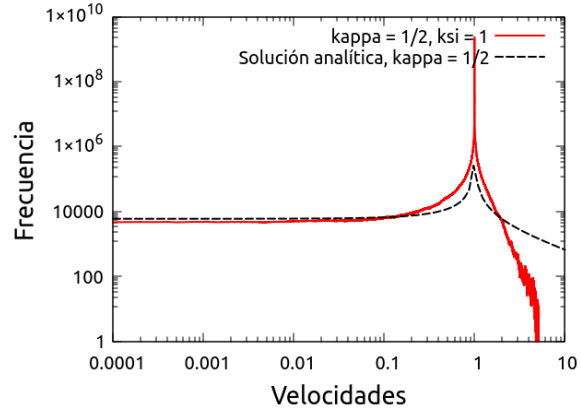
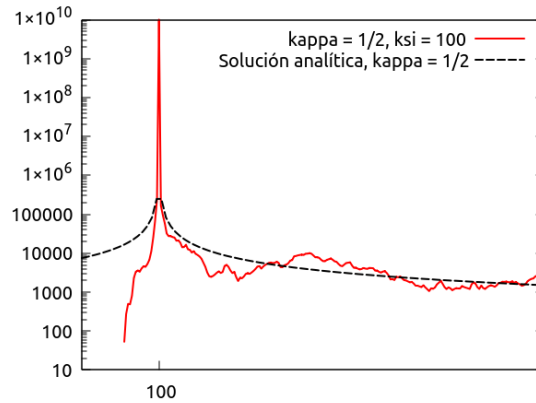
(a) Comparación para  $\xi = 0.001$ (b) Comparación para  $\xi = 1$ (c) Comparación para  $\xi = 100$ 

Figura 8.3: Comparación de la solución analítica dada por la ecuación (8.16) y los histogramas de tres realizaciones con parámetros  $\xi = 0.001, 1, 100$  y  $\kappa = 1/2$ . Cada realización consta de  $10^{10}$  iteraciones.

La serie de figuras 8.3 muestra que la solución analítica que hemos obtenido para la ecuación con deriva es válida sólo en el límite  $\xi \gg 1$  como lo muestra la figura 8.3a. A pesar de que analíticamente la solución no impone ninguna restricción a la magnitud de  $\xi$ , las figuras 8.3b y 8.3c muestran que la solución analítica se aleja del histograma a medida que crece  $\xi$ . Por otro lado, las tres figuras de la serie 8.3 comparten una característica importante, la solución siempre se asemeja más al histograma en las colas de las distribuciones. De modo que la solución dada por (8.16) cobra relevancia al ser la solución al caminante con disipación y drift límite  $\xi \ll 1$ , y de manera más general para el caminante con disipación y drift para todo  $\xi$  en la cola de las distribuciones.

## 9 Bitcoin

En este último capítulo presentamos una aplicación de las técnicas de ajuste de ley de potencias a una serie de tiempo real: la serie de tiempo del precio de *Bitcoin*. Revisamos la estadística del precio y sus retornos asociados. Determinamos que el precio no sigue una distribución clara pero encontramos que los retornos sí presentan la firma gráfica de ley de potencias. Determinamos la ley de potencias asociada a este histograma empleando la técnica de reconstrucción analítica y encontramos el exponente. Luego, recordando que es posible catalogar procesos estocásticos según la ley de potencias asociada a sus retornos, tomamos cuatro periodos de tiempo de la serie de tiempo del precio de *Bitcoin* y calculamos la potencia a la que ajustan los retornos asociados a los cuatro periodos. Encontrando que los tres periodos más similares (en su gráfica) entre sí, siguen la misma ley de potencia en sus retornos mientras que el periodo distinto sigue una ley de potencias distinta.

### 9.1. Una aplicación de leyes de potencias en finanzas

A lo largo de este trabajo hemos explorado las leyes de potencias debido a la relación que hay con la estadística de las ecuaciones modificadas de Langevin que planteamos. Una simple relación está presente en todos los ejemplos anteriores, las caminatas aleatorias producidas por las ecuaciones presentan excursiones muy grandes (alta varianza). Con la idea anterior en mente se buscaron series de tiempo reales que presentaran un carácter similar con la intención de emplear el modelo que describen las ecuaciones estudiadas en un caso real. En este capítulo se exponen los resultados de dicho esfuerzo.

La serie de tiempo con la que se trabajará en este capítulo es la serie asociada al precio de *Bitcoin*. El precio asociado a este moderno activo financiero presenta grandes fluctuaciones en su precio en periodos de tiempo muy cortos (respecto de activos más convencionales), es poco estable y por tales razones ajusta a los dos requisitos que se requieren para empatar con las realizaciones de las ecuaciones que hemos formulado: (1) una serie de tiempo aleatoria (2) con grandes excursiones. La serie de tiempo con la que estaremos trabajando se muestra en el conjunto de figuras 9.1.

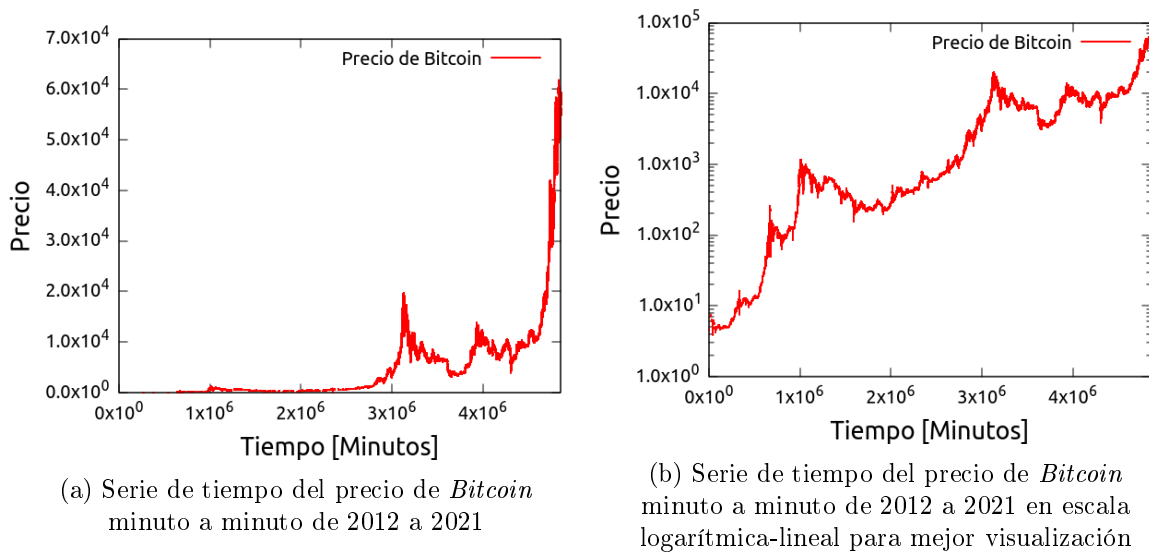


Figura 9.1: Serie de tiempo del precio de *Bitcoin* minuto a minuto de 2012 a 2021 graficados dos escalas distintas. Al graficar la serie de tiempo en escala lineal-logarítmica es posible apreciar la magnitud relativa de los cambios de precio durante toda la serie de tiempo. Datos obtenidos de [15].

La figura 9.1a muestra 4,857,377 muestras que representan el precio de *Bitcoin* minuto a minuto desde el año 2012 hasta el año 2021, considerando 2 años de precio previos al listado de *Bitcoin* en registros de activos oficiales. Es importante notar que en la figura 9.1a los cambios en precio son tan abruptos que para una mejor visualización es necesario reajustar la escala del eje del precio a escala logarítmica. Notemos que en la figura 9.1b es más simple visualizar los cambios de precio a la vez que se aprecian las drásticas subidas de precio que hubo durante el año 2021. Volviendo a la figura con escala lineal, la figura 9.1a, revisaremos algunos periodos de tiempo de la serie que presentan subidas abruptas en el precio.

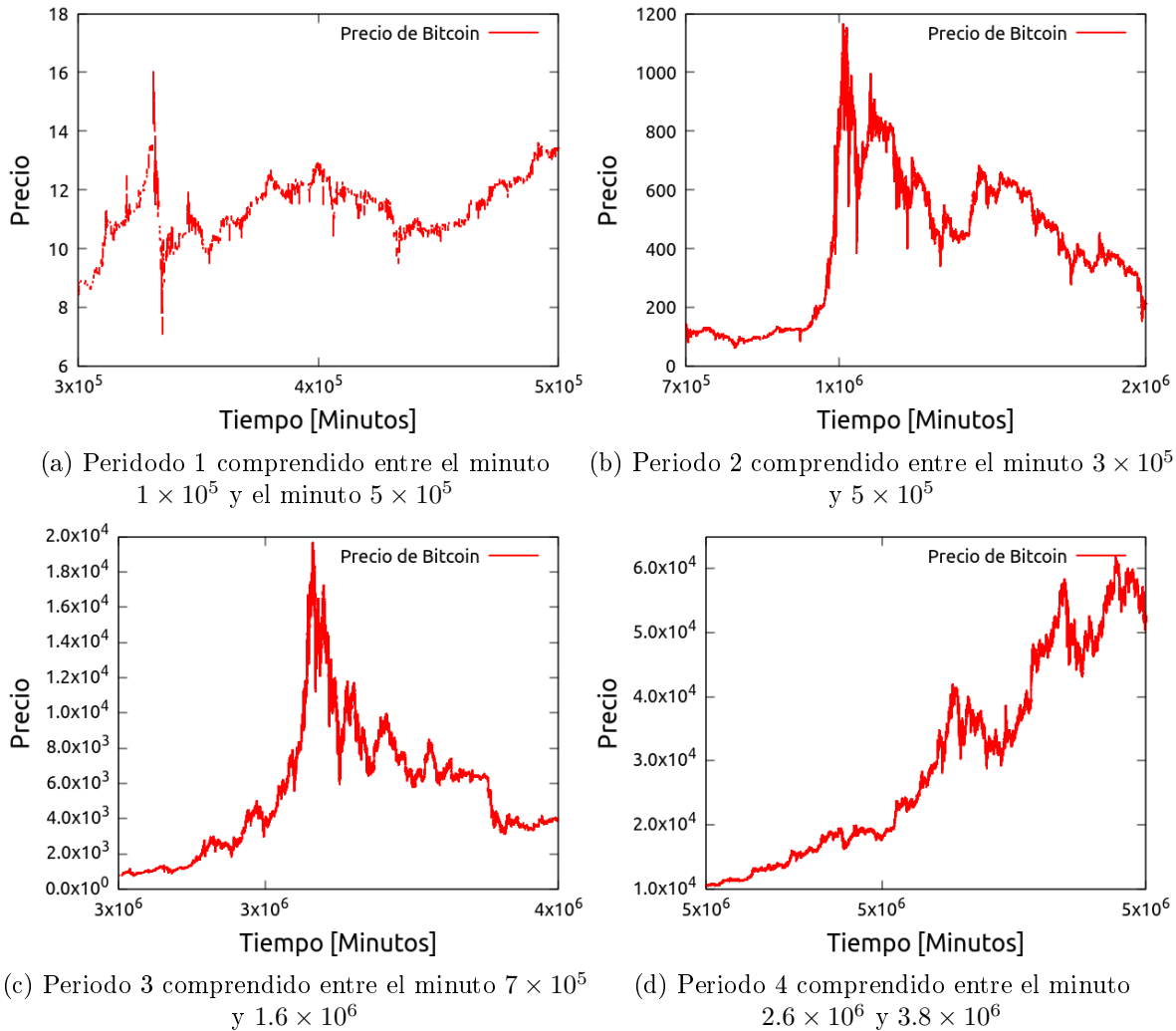
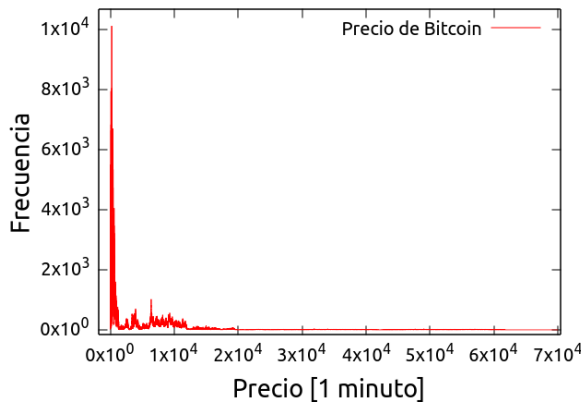
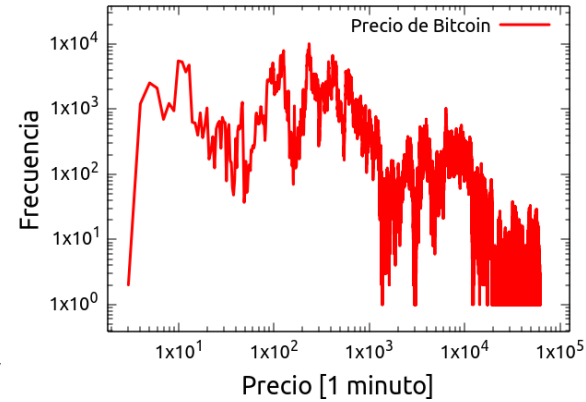


Figura 9.2: Conjunto de cuatro periodos de la serie de tiempo del precio de *Bitcoin*. Los cuatro periodos comparten semejanzas en la duración de la excursión en precios y el orden de magnitud del cambio de precio.

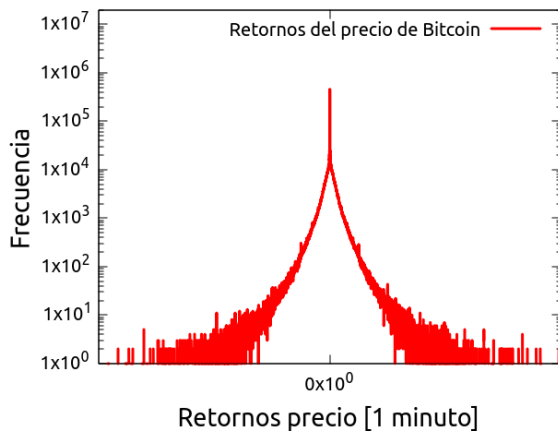
El conjunto de figuras 9.2 muestra cuatro periodos de tiempo en los que la serie de tiempo presenta un comportamiento similar, las graficas por si solas sugieren que estamos ante un proceso estadísticamente autosimilar ó libre de escala. Es importante mencionar que dicho comportamiento está sujeto a la resolución de los datos que en este caso es de 1 minuto. En conjunto las figuras 9.1 y 9.2 nos sirven de motivación para analizar este conjunto de datos empleando las técnicas que desarrollamos a fondo para las tres versiones del proceso estocástico de este trabajo. Por lo tanto, el siguiente paso en este análisis es obtener los retornos de la serie de tiempo y los respectivos histogramas tanto de la serie de tiempo como de los retornos, dichas figuras se muestran en 9.3.



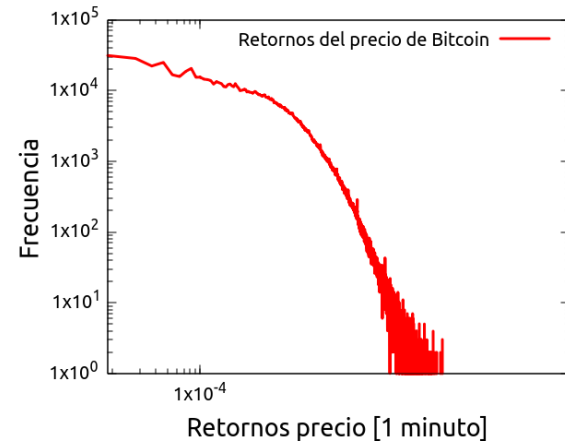
(a) Histograma asociado a la serie de tiempo de precio de *Bitcoin*. El tamaño del *bin* es de 0.01



(b) Histograma asociado a la serie de tiempo de precio de *Bitcoin* en escala logarítmica. El tamaño del *bin* es de 0.01



(c) Histograma asociado a los retornos de la serie de tiempo de *Bitcoin*. El tamaño del *bin* es de 0.00001

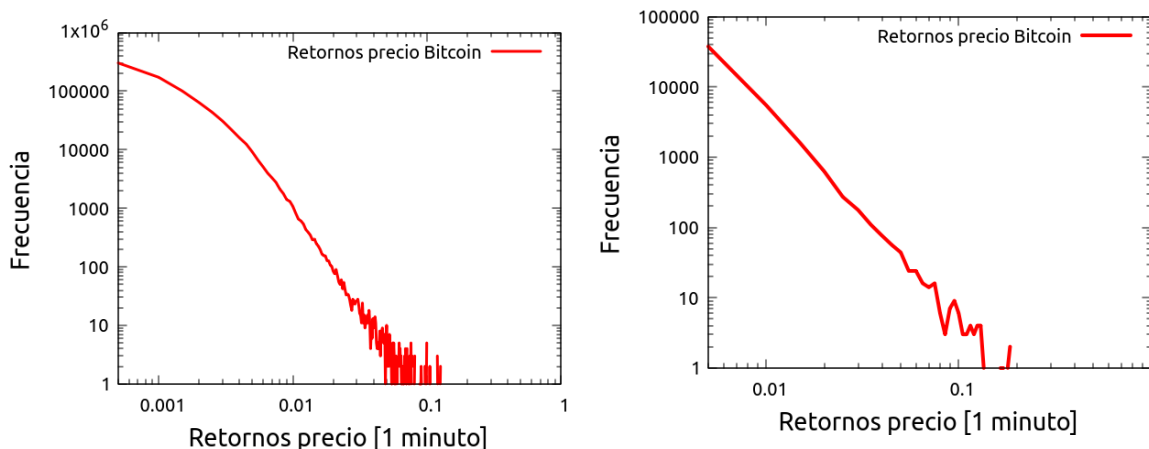


(d) Histograma asociado a los retornos de la serie de tiempo de *Bitcoin* en escala logarítmica. El tamaño del *bin* es de 0.00001

Figura 9.3: Histogramas de la serie de tiempo del precio de *Bitcoin* y sus retornos asociados.

Las figuras 9.3a y 9.3b son el histograma de la serie de tiempo y muestran una distribución poco definida. Estas figuras en conjunto con 9.1a nos permiten decir que la serie de tiempo parece no estar en un estado de equilibrio. Entendamos por equilibrio, en un proceso financiero, a un activo cuyo precio evoluciona de manera uniforme en el tiempo. La serie muestra que en el proceso existe una tendencia alcanzar un valor más alto que los previos registrados, las llamadas fuerzas de mercado dan pie a estos cambios. Desde los conceptos físicos que hemos empleado podemos sugerir que en el proceso de la serie de tiempo de *Bitcoin* existe disipación y arrastre. Disipación pues hay fluctuaciones en el precio que tratan de estabilizarlo y arrastre pues parece existir un potencial externo que aumenta este precio. Que el histograma obtenido no se ajuste a una distribución conocida termina de apoyar lo anterior. Por otro lado las figuras 9.3c y 9.3d, que son los histogramas de los retornos, sí muestran la firma gráfica de una ley de potencias. Por lo tanto son los retornos los datos que analizaremos empleando la técnica de reconstrucción analítica con la intención de determinar la ley de potencia que mejor les ajusta.

Antes de seguir con los resultados del análisis es importante comentar una característica de la figura 9.3d. En dicha figura el histograma muestra que a medida que crece el valor del retorno aparece ruido estadístico en la cola del histograma, una manera de mejorar la visualización consiste en aumentar el tamaño de los *bin* del histograma. Los *bin* de la figura 9.3d tienen un tamaño de  $10^{-5}$ . Si agrandamos en dos o tres órdenes de magnitud el tamaño del *bin* entonces el ruido estadístico disminuye como se observa en los histogramas de la figura 9.4, cuyos *bin* son de tamaño 0.0005 y 0.005 respectivamente. Dado que la técnica de reconstrucción analítica es independiente del tamaño del *bin* usaremos el histograma mostrado en 9.4a para propósitos de visualización.



(a) Histograma de los retornos de la serie de tiempo de *Bitcoin* con un bin de tamaño 0.0005

(b) Histograma de los retornos de la serie de tiempo de *Bitcoin* con un bin de tamaño 0.005 en escala logarítmica

Figura 9.4: Histogramas de los retornos asociados a la serie de tiempo de *Bitcoin* con distinto tamaño de *bin*.

Pasemos a determinar la potencia asociada al histograma de los retornos mostrado en 9.4a. Para comenzar recordemos que técnica de reconstrucción analítica para determinar el valor de  $\alpha$  de una distribución de ley de potencias depende de  $x_{min}$ , el valor mínimo a considerar en el algoritmo, y de que los datos sean finitos. Antes de mostrar el exponente que se determinó es importante revisar la siguiente figura.

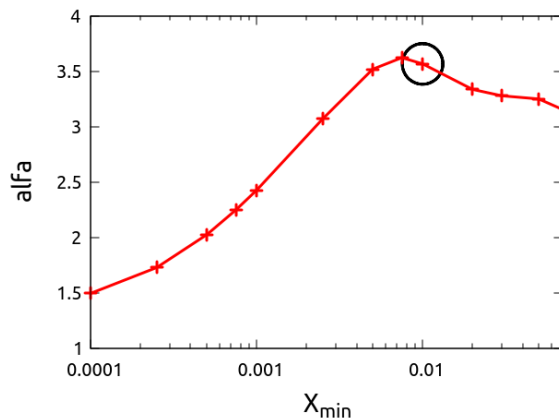


Figura 9.5: Valor de  $\alpha$  en función de  $x_{min}$  empleando la técnica de reconstrucción analítica, el eje x se muestra en escala logarítmica para mejor visualización. Es importante notar que luego de cierto valor de  $x_{min}$  el valor que se calcula de  $\alpha$  parece saturarse.

La figura 9.5 muestra cómo el exponente calculado aumenta en función del valor mínimo respecto del cual se calcula la potencia empleando el método de reconstrucción analítica, la intención de conocer la función  $\alpha = \alpha(x_{min})$  es poder tener una herramienta auxiliar en determinar qué valor de  $x_{min}$  es mejor para el conjunto de datos en cuestión. El valor de  $\alpha = 3.56530$  se alcanza para  $x_{min} = 0.01$ . Al comparar la ley de potencias con el valor elegido y el histograma encontramos lo siguiente.

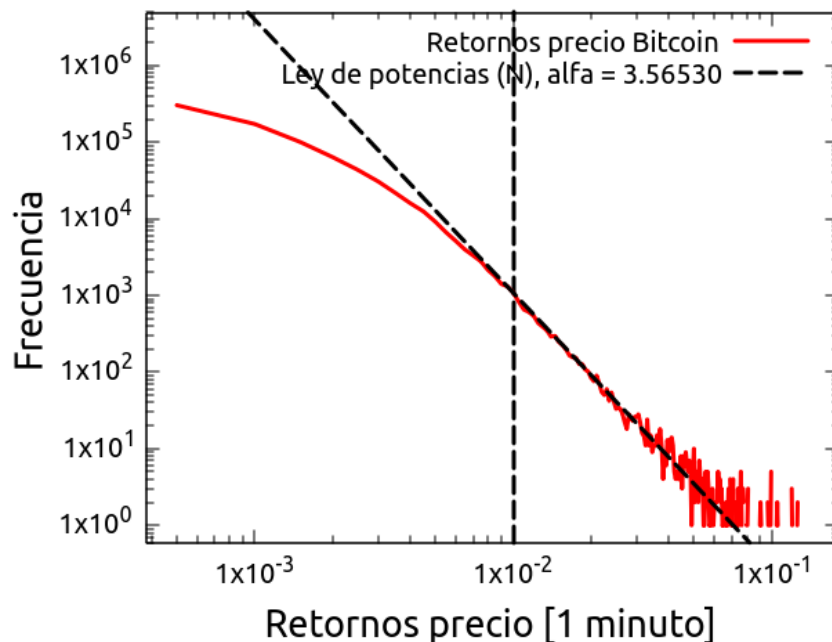
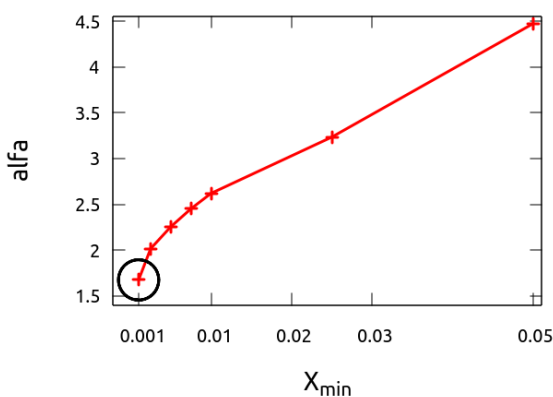


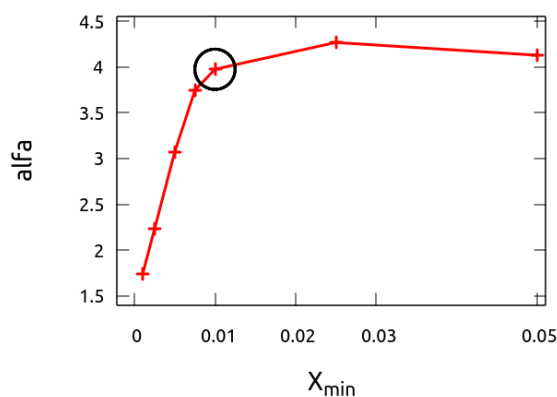
Figura 9.6: Histograma de los retornos del precio de *Bitcoin* y ajuste por método de reconstrucción analítica. La línea punteada vertical indica la  $x_{min}$  que se empleó en el método de reconstrucción de  $\alpha$ .

En la figura 9.6 podemos apreciar que la potencia que mejor ajusta según el algo-

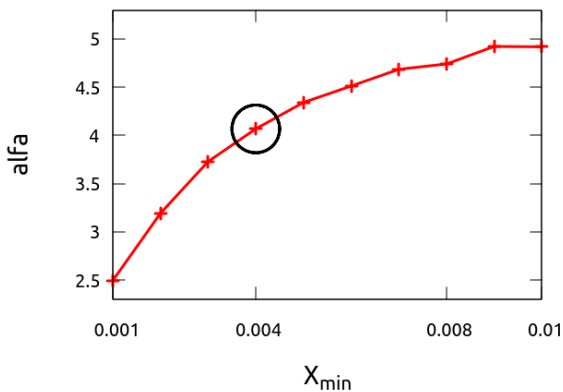
ritmo de Newman es el punto circulado en negro en la figura 9.5. Lo que muestra la gráfica 9.6 es que el exponente de  $\alpha = 3.56530$  ajusta a los datos. La línea punteada vertical en la figura señala el punto 0.01. Hecho este análisis pasamos a revisar cómo se comportan localmente los retornos de la serie de tiempo. Recordemos los intervalos mostrados en el conjunto de figuras 9.2. Si obtenemos sus retornos y calculamos sus histogramas encontramos de nuevo la firma gráfica de una ley de potencias, de modo que nuevamente podemos emplear la técnica de reconstrucción analítica para determinar el valor del exponente asociado a la ley de potencias que describen los histogramas. Antes de mostrar tales histogramas y los ajustes determinados es importante discutir las siguientes cuatro gráficas cuyo proposito es similar al de la gráfica de la figura 9.6.



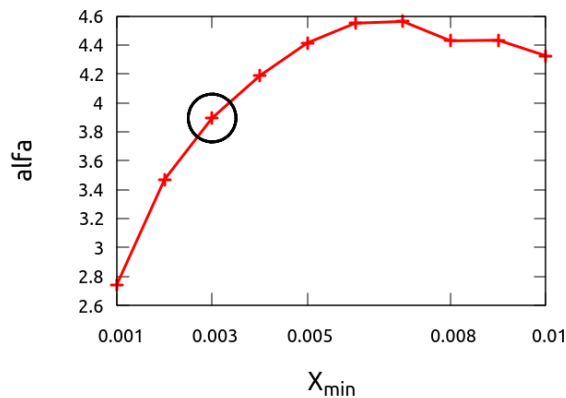
(a) Gráfica de  $\alpha$  como función de  $x_{min}$  para la ley de potencias asociada al histograma 9.8a. El punto circulado en negro corresponde a 0.001, 1.67513



(b) Gráfica de  $\alpha$  como función de  $x_{min}$  para la ley de potencias asociada al histograma 9.8b. El punto circulado en negro corresponde a 0.01, 3.97409



(c) Gráfica de  $\alpha$  como función de  $x_{min}$  para la ley de potencias asociada al histograma 9.8c. El punto circulado en negro corresponde a 0.004, 4.06767



(d) Gráfica de  $\alpha$  como función de  $x_{min}$  para la ley de potencias asociada al histograma 9.8d. El punto circulado en negro corresponde a 0.003, 3.89509

Figura 9.7: Gráficas de  $\alpha$  como función de  $x_{min}$  para determinar el exponente asociado a cada uno de los histogramas de la figura 9.8



La figura 9.7 muestra el valor calculado de  $\alpha$  como función de  $x_{min}$  para cada uno de los intervalos de tiempo mostrados en 9.2. La figura 9.7 muestra comportamientos similares a lo que muestra 9.5. En 9.7 también se ha circulado en negro el exponente que mejor ajusta y la  $x_{min}$  correspondiente, los histogramas y los ajustes se muestran a continuación. Es importante mencionar que el exponente elegido de entre los mostrados en cada una de las figuras anteriores es seleccionado por inspección considerando que  $x_{min}$  considere al menos  $2/3$  de los datos mostrados en cada histograma.

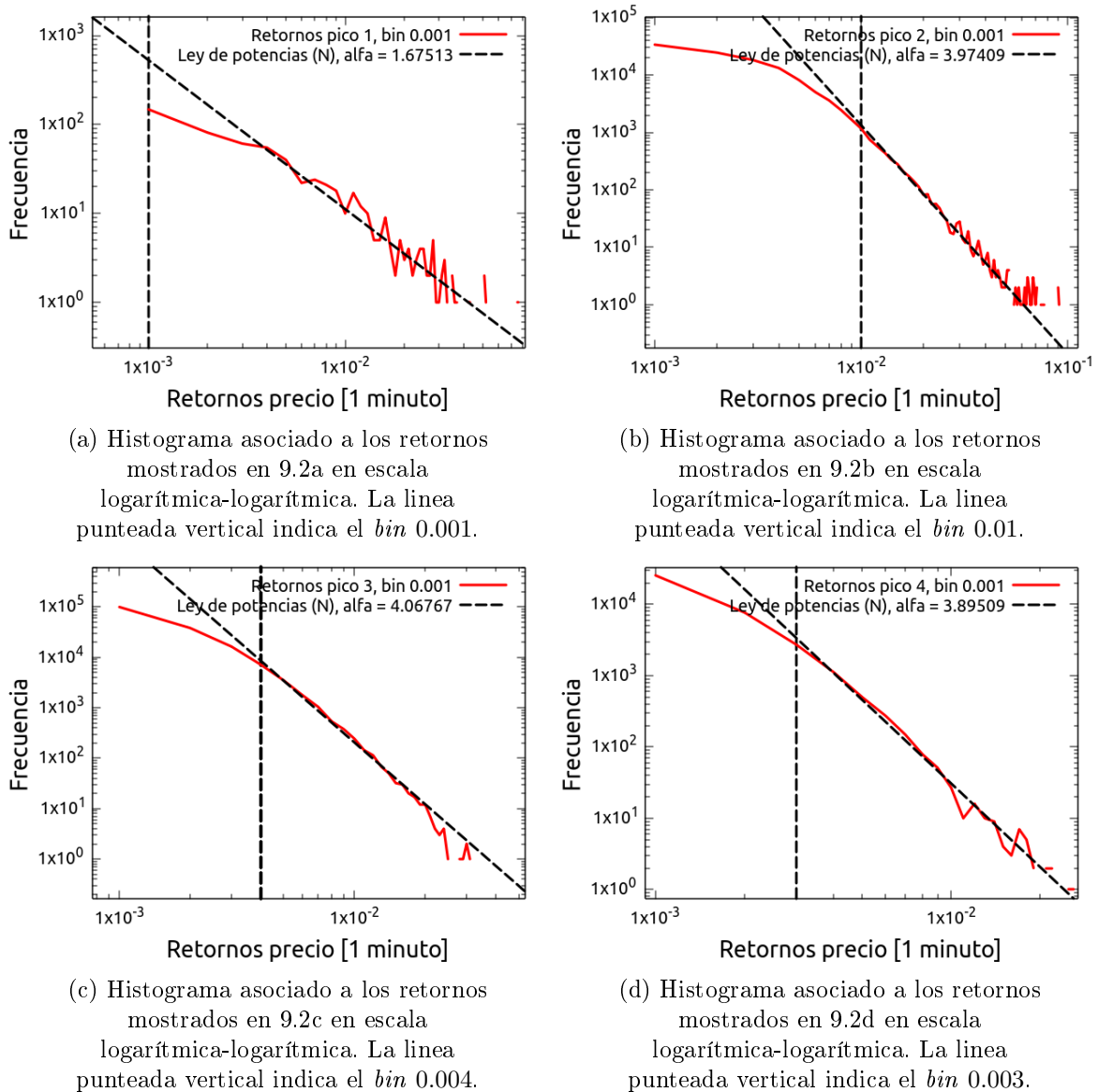


Figura 9.8: Histogramas asociados a los retornos de los acercamientos mostrados en la figura 9.2 y sus respectivos ajustes

En la figura 9.8 tenemos los respectivos ajustes a cada uno de los retornos asociados a los cuatro periodos elegidos. La potencia que ajusta a los periodos 9.2b, 9.2c y 9.2d resulta ser muy similar y es de  $\alpha = 4$  aproximadamente. Notemos que en cada caso se usó una  $x_{min}$  distinta. Por otro lado, la potencia que ajusta al periodo 1, figura 9.2a, es radicalmente distinta. Resulta ser  $\alpha = 1.6$ .

Es importante recordar el concepto de retorno y su significado. En esencia es un cambio instantáneo normalizado a alguno de los puntos de referencia, es un cambio relativo. Los retornos caracterizan cambios y en los periodos mostrados en la figura 9.2 mostramos cambios muy particulares, mostramos cambios abruptos en el precio. Por eso es notable el resultado de emplear la técnica de Newman para determinar los exponentes asociados. En los tres casos más similares recuperamos una exponente similar, dicho resultado en conjunto con el concepto de retorno y el análisis desarrollado nos permite afirmar que los retornos sirven para caracterizar la magnitud de las excursiones en una caminata aleatoria o en algún intervalo de esta. Lo anterior es incluso apoyado por la figura 9.8a que no mantiene semejanza con las otras tres figuras, de hecho resulta ser una excursión del precio radicalmente distinta según la potencia que ajusta a el histograma de sus retornos. Por si mismo el desarrollo previo ofrece una herramienta que permite determinar la frecuencia de las magnitudes de retornos involucradas en un segmento dado de una serie de tiempo.

En resumen, la distribución del precio de *Bitcoin* no muestra una distribución que se reconcilie de manera directa con los resultados asociados a los tres modelos que se han planteado en este trabajo. Por otro lado, la distribución de los retornos, en congruencia con lo discutido en la referencia[2], corresponden a una ley de potencias y pudimos determinar de manera adecuada la potencia empleando la técnica de Newman. Esto nos permitió encontrar una manera de caracterizar cambios dentro de la serie de tiempo de *bitcoin* empleando los retornos.

Tal y como hemos presentado los datos y hasta donde se desarrolló la investigación concerniente a nuestros tres procesos estocásticos no existe manera de acoplar la distribución del precio y retornos con las distribuciones de alguno de nuestros procesos formulados; con los conjuntos de parámetros investigados. Hasta ahora, en los tres procesos estocásticos que estudiamos no es posible cambiar la potencia asociada a la distribución de los retornos que es de  $\alpha = 2$ . Sólo es posible para la distribución del proceso. En el apéndice B encontramos una importante consecuencia en el proceso asociada al tamaño del  $dt$  empleado en las realizaciones, un posible camino por explorar es variar el tamaño de  $dt$  respecto de la escala de tiempo máxima impuesta por la cantidad de pasos en las realizaciones. Recordemos que hasta ahora la investigación de los tres procesos se ha hecho empleando las versiones adimensionales de las ecuaciones y en tales casos el tiempo adimensional permite asociar dos escalas de tiempo adimensionales importantes: El tiempo total del proceso dado por el número de iteraciones y el tiempo mínimo en el que ocurren los pasos estocásticos dados por el inverso del total de pasos.



# 10 Conclusiones

## 10.1. Revisando el objetivo

Al inició de esta tesis planteamos una ecuación modificada de tipo Langevin

$$V^*(t + dt) - V^*(t) = \sqrt{|1 - V^*(t)|^{2\kappa}} dt^* N_t^{t+dt}(0, 1) . \quad (10.1)$$

La intención era haer un análisis estadístico de las realizaciones de la ecuación con el objetivo de econtrar una solución para esta ecuación. El enfoque estadístico requirió de estudiar la distribución de ley de potencias debido a que la estadística de las realizaciones corresponde a dicha distribución. Adicionalmente exploramos los retornos asociados a las realizaciones de la ecuación (10.1) cuyas distribuciones también resultaron ser leyes de potencia. Finalmente en el capítulo 6, luego de abordar el problema desde otra óptica, encontramos la solución analítica a la ecuación y resultó ser completamente congruente con el análisis estadístico ampliamente mostrado en el capítulo 1.

Luego del análisis estadístico de la ecuación (10.2) nos propusimos estudiar la modificación en la formulación de Langevin y pasamos a estudiar la estadística de la ecuación

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -V^*(t^*)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) . \quad (10.2)$$

esta segunda ecuación, a diferencia de a primera, considera un término de disipación. El acercamiento que tuvimos para estudiar a la ecuación con disipación (10.2) fue similar al que aplicamos a la ecuación (10.1). La disipación resultó producir un efecto de transición entre distribuciones asociado a la magnitud del término adimensional  $\xi$ . Entender dicha transición fue útil pues dió pie a determinar una solución analítica a la ecuación 10.1 al tiempo que se investigaba una solución numérica para 10.2.

Ya con las dos ecuaciones resueltas, la transición entendida y motivados siempre por la perspectiva física que incorpora la ecuación original de Langevin, decidimos agregar un efecto de arrastre a la ecuación con disipación con el argumento de tener la misma asimetría del término estocástico en el término de disipación. Dicha ecuación es

$$V^*(t^* + dt^*) - V^*(t^*) = -(V^*(t^*) - \xi)dt^* + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t^*)^*}{\xi}\right|^{2\kappa}} dt^* N_{t^*}^{t^*+dt^*}(0, 1) . \quad (10.3)$$

Explorar (10.3) resultó menos complicado que las primeras dos versiones de la ecuación pues para este punto ya estábamos armados con soluciones a las ecuaciones y un claro panorama de la estadística de las realizaciones. Encontramos que es crucial que la varianza crezca respecto del término de disipación para poder obtener el efecto de transición estadística y logramos obtener una solución analítica para un caso particular de (10.3) inspirados por la solución analítica encontrada para (10.1). Esta versión de la ecuación resulta seguir siempre una estadística de ley de potencias sin importar el valor de  $\xi$ .

Como intermedio y a manera de motivación discutimos dos trabajos donde se encuentran fenómenos que pueden ser explicados empleando el modelo que desarrollamos durante los primeros ocho capítulos. Encontramos un sistema físico óptico que describe gases ultra fríos y un análisis estadístico de mercados de valores. En ambos trabajos se describen transiciones entre una distribución normal y una distribución de ley de potencias, y en el trabajo relativo a finanzas se dan resultados empleando el concepto de retorno que es de interés en este trabajo.

Finalmente aplicamos las técnicas desarrolladas durante todo el trabajo a un sistema financiero: la serie de tiempo de *Bitcoin*. Aunque no fue posible adaptar enteramente los modelos descritos por las ecuaciones (10.1), (10.2) y (10.3), las técnicas empleadas para analizar leyes de potencias fueron cruciales para poder determinar lo anterior. Logramos dar una interpretación al comportamiento actual de la serie de tiempo pues el precio de *Bitcoin* no se encuentra en un estado de equilibrio. Una vez que analizamos el histograma de los retornos nos encontramos nuevamente con una distribución de ley de potencias. La técnica de reconstrucción analítica de la referencia [8] resultó provechosa para ajustar la potencia de los retornos de la serie de tiempo. Recordando que es posible catalogar procesos estocásticos según la potencia de los retornos asociados, nos dispusimos a estudiar periodos dentro de la serie de tiempo de *bitcoin*. Estudiamos cuatro periodos y pudimos encontrar tres periodos iguales según la potencia de sus retornos y uno diferente bajo este mismo criterio.

Recordando que la motivación principal de esta tesis es estudiar la estadística de la modificación a la ecuación original de Langevin y determinar su solución analítica el objetivo se cumplió. Queda pendiente determinar en qué tipo de sistema pueden ser empleados los tres modelos propuestos, descritos y resueltos. Finalmente, la teoría detrás de la distribución de ley de potencias y sus ajustes pudo ser empleada para estudiar un proceso estocástico real con la intención de determinar si alguno de los modelos podía describirlo, determinamos que no es posible.

# A Una buena aproximación al valor absoluto

## A.1. La aproximación

La intención de este apéndice es justificar el uso de una aproximación a la función valor absoluto en la rutina de solución numérica de la ecuación (6.7). La motivación de emplear una aproximación es resultado de la discontinuidad del valor absoluto en el punto  $\frac{v^*}{\xi} = 1$  y sus subsecuentes derivadas. La aproximación que emplearemos es la siguiente

$$|1 - x| \approx (1 - x)\text{Tanh}(\epsilon(1 - x)) , \quad (\text{A.1})$$

para  $\epsilon \gg 1$ . De modo que la aproximación funciona mejor mientras más grande sea  $\epsilon$ . Ahora revisemos como evoluciona la aproximación según la magnitud de  $\epsilon$ .

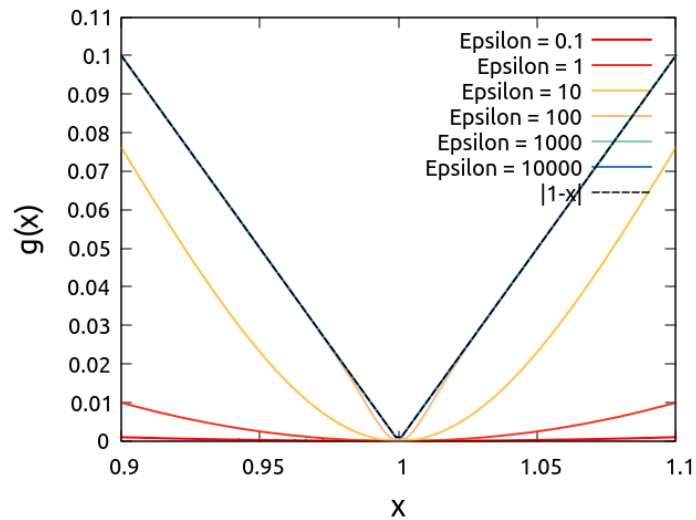


Figura A.1: Comparación de la aproximación A.1 para distintos valores del parámetro  $\epsilon$  y la función valor absoluto señalada con la línea punteada.

En efecto la figura A.1 muestra que la aproximación mejora proporcionalmente a la magnitud de el parámetro  $\epsilon$  acercandose de forma asintótica a la función valor absoluto. De modo que para solucionar la ecuación se emplea la aproximación dada por A.1 y usando  $\epsilon = 10^5$ .



## B Consecuencias dimensionales en la diferencial

### B.1. Sobre la importancia de lo *infinitesimalmente* pequeño

Este apéndice contiene una importante observación sobre la magnitud que debe de asignarse a un diferencial en una simulación computacional. Esto es relevante pues todas las realizaciones de esta tesis son generadas a partir de una rutina en Fortran y es importante conocer cuál debe de ser la magnitud de  $dt^*$  a emplear en dichas simulaciones. Comencemos por recordar nuestra ecuación de interés con el término de fricción:

$$V(t + dt) - V(t) = -\gamma V(t)dt + \sqrt{\left|1 - \frac{V(t)}{V_0}\right|^{2\kappa}} \beta^2 dt N_t^{t+dt}(0, 1) \quad (\text{B.1})$$

El término de disipación es de la forma  $-\gamma V(t)dt$  y es análogo al término de amortiguamiento del oscilador armónico amortiguado que es de la forma  $2a\zeta$  con  $a$  una constante. En el caso del oscilador armónico amortiguado se presenta el siguiente comportamiento en la solución según la magnitud de  $\zeta$  que es el factor de amortiguamiento.



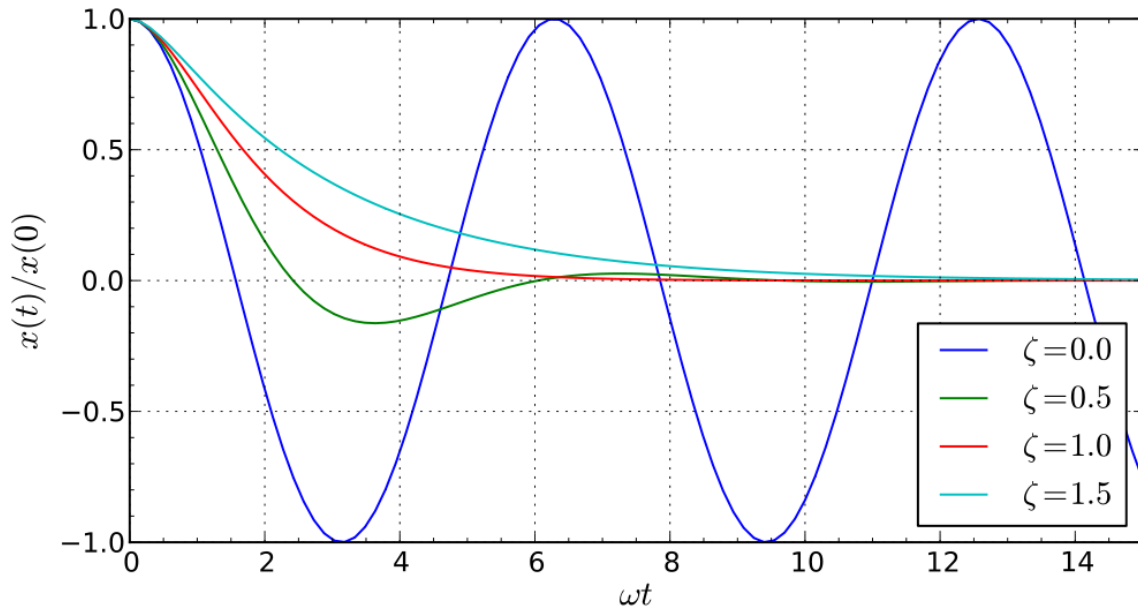


Figura B.1: Regímenes de amortiguación para el oscilador armónico amortiguado, obtenida de [12]

Los tres casos mostrados en la figura B.1 son los siguientes:

- $\zeta < 1$ ,
- $\zeta = 1$ ,
- $\zeta > 1$ .

Usaremos este resultado cualitativo para analizar el comportamiento de el término de disipación de las realizaciones de la ecuación. Antes de avanzar a los resultados es importante entender la amortiguación en el contexto de una ecuación estocástica. Una ecuación estocástica toma valores aleatorios según una distribución predeterminada, cuando se agrega el término de disipación el efecto es acotar los posibles valores que puede tomar la ecuación pero no detiene las fluctuaciones, estas continúan por efecto del término estocástico.

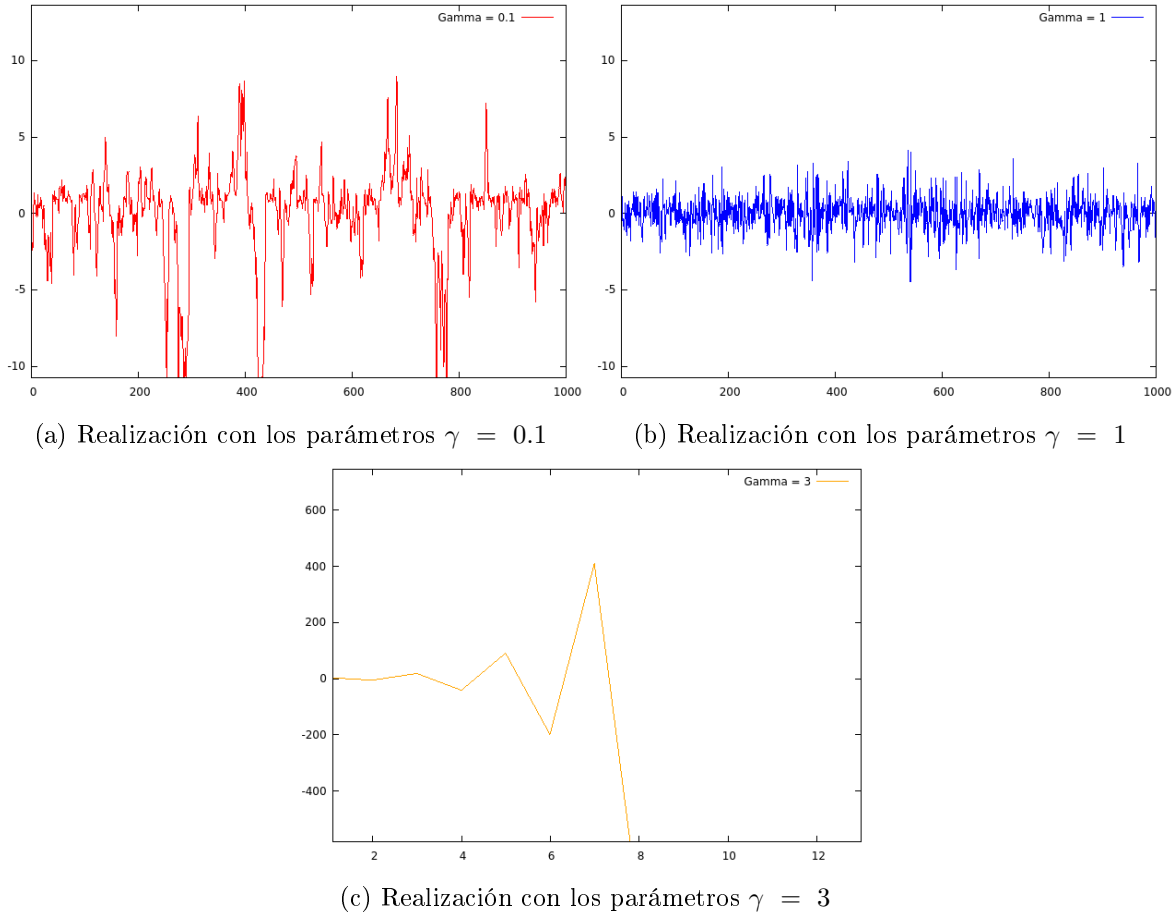


Figura B.2: Comparación del efecto de amortiguamiento en la realización en función de la magnitud de  $\gamma$ .

Revisando el conjunto de figuras B.2, lo que encontramos no parece coincidir con lo que ya sabemos acerca del oscilador armónico amortiguado pues sólo vemos valores acotados por efecto de  $\gamma$  pero no sabemos cómo evolucionó el sistema a dicha condición. Es importante mencionar que en las realizaciones mostradas el valor inicial de la velocidad, con el cual se comienza la simulación, es un valor aleatorio elegido de una distribución normal con media 1 y varianza 1, *i.e.*  $N(1, 1)$ . Veamos qué ocurre cuando imponemos que  $V_i \gg 1$  para alejarnos de los valores a los que se acota la realización. A continuación tenemos las realizaciones para cuando  $V_i = 100$  en los regímenes de  $\gamma$  en que la realización no falla.

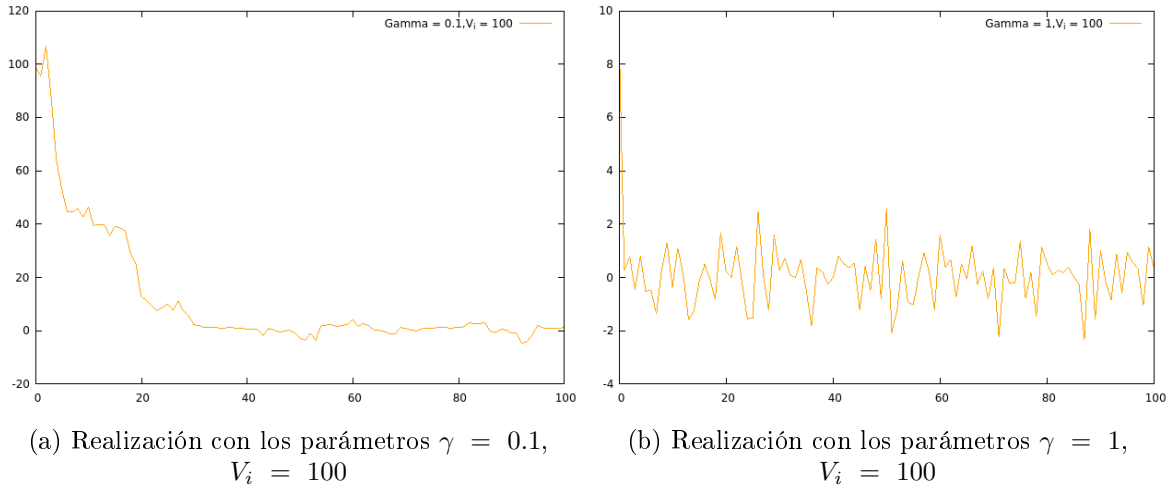
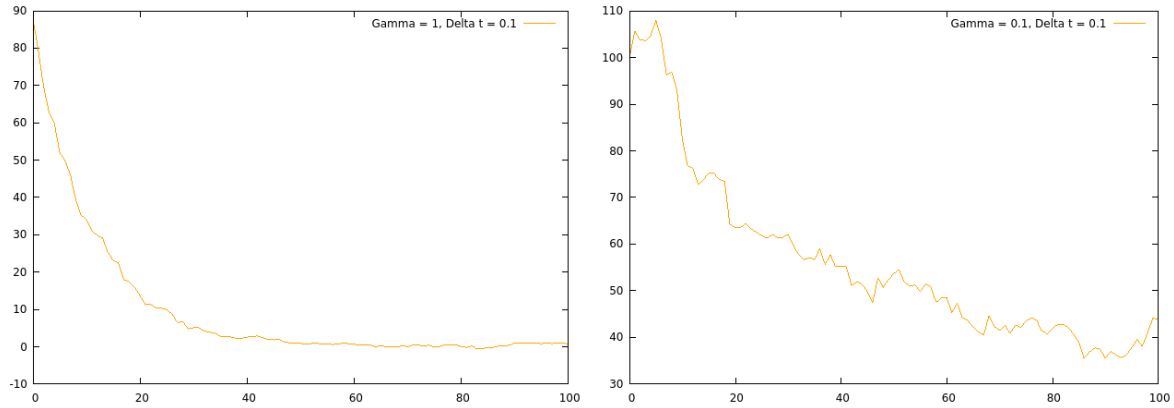


Figura B.3: Comparación del efecto de amortiguamiento en la realización en función de la magnitud de  $\gamma$  considerando un valor inicial de la velocidad tal que  $V_i \gg 1$ .

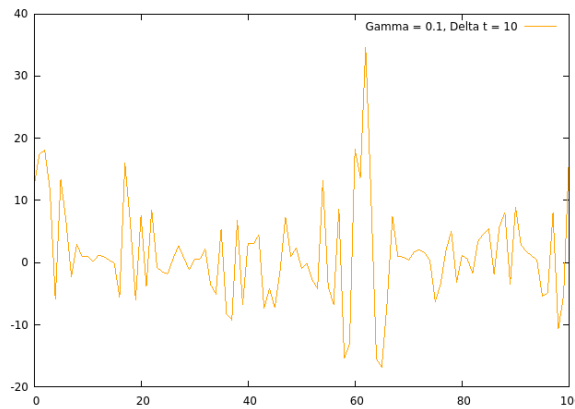
Los resultados que muestra la figura B.3

- $\gamma < 1$  Disipación que tarda más tiempo en acotar las oscilaciones.
- $\gamma = 1$  El caso de disipación más eficiente, el tiempo más corto en que se acotan las oscilaciones.
- $\gamma > 1$  La simulación falla y los valores aleatorios crecen de forma descontrolada.

Ahora que sabemos que hay un efecto análogo entre el efecto de disipación en la ecuación estocástica y el efecto de disipación en la ecuación de mecánica clásica podemos explorar el efecto que tiene la magnitud de  $dt$  en la ecuación. A continuación tenemos las realizaciones para  $V_i = 100$  en los dos distintos regimenes de  $\gamma$  y probado para  $dt = 10$  y  $dt = 0.1$



(a) Realización con los parámetros  $\gamma = 1$ ,  $V_i = 100$ ,  $dt = 0.1$       (b) Realización con los parámetros  $\gamma = 0.1$ ,  $V_i = 100$ ,  $dt = 0.1$



(c) Realización con los parámetros  $\gamma = 0.1$ ,  $V_i = 100$ ,  $dt = 10$

Figura B.4: Comparación del efecto de amortiguamiento en la realización respecto de la magnitud del paso  $dt$ .

Los que la figura B.4 es lo siguiente

- $\gamma = 1$ ,  $dt = 10$ , la simulación falla.
- $\gamma = 1$ ,  $dt = 0.1$ , el caminante se amortigua.
- $\gamma = 0.1$ ,  $dt = 10$ , Parece no haber amortiguación pues tenemos fluctuaciones entre  $-20$  y  $20$ .
- $\gamma = 0.1$ ,  $dt = 0.1$ , el caminante se amortigua pero más lento que en el caso  $dt = 0.1$  y  $\gamma = 1$ .

La conclusión es que, dado un  $dt$ , el efecto de amortiguamiento es proporcional a la magnitud de  $\gamma$  y adicionalmente la magnitud de  $\gamma$  tiene que ser similar a la de  $dt$  para que el amortiguamiento tenga efecto. Esto es un resultado meramente cualitativo.

Ya contamos con una primer noción de la relación entre el efecto de amortiguamiento y el tamaño del paso estocástico, surge las preguntas ¿cómo es esta relación en

el caso adimensional en el que todos los efectos físicos se han abreviado en el factor  $\xi = \frac{V_0\gamma^{1/2}}{\beta}$ ?, ¿cómo cambia la forma de la distribución cuando cambiamos la magnitud de  $dt^* = \gamma dt$  el diferencial estocástico adimensional?

Podemos hacer realizaciones e histogramas o aventurarnos a contestar con lo que sabemos al respecto de las ecuaciones adimensionales. Recordemos que el objetivo de adimensionalizar es considerar a todas las cantidades físicas, cuya magnitud tiene algún efecto en la ecuación, y codificar dichas magnitudes en un número adimensional que acople las interacciones entre las magnitudes físicas del problema.

De manera que, una vez se ha adimensionalizado una ecuación, el efecto de amortiguamiento está codificado en  $\xi = \frac{V_0\gamma^{1/2}}{\beta}$  y notemos que si escalamos al diferencial adimensional por un factor  $\lambda \in \mathcal{R}$  el resultado es

$$\lambda dt^* = \lambda \gamma dt . \quad (\text{B.2})$$

Dado que  $\lambda$  es real podemos redefinir nuestro nuevo diferencial adimensional como

$$dt^+ = \lambda dt^* = \lambda \gamma dt , \quad (\text{B.3})$$

de modo que  $\gamma^+ = \gamma\lambda$  y el factor adimensional  $\xi$  se reescribe como

$$\xi = \frac{V_0\gamma^{1/2}}{\beta\lambda^{1/2}} . \quad (\text{B.4})$$

La conclusión es que escalar el paso  $dt$  es una contribución ya considerada en el término  $\xi$ . Notemos que esto no cambia la condición de mucha disipación ni la condición de poca disipación. Dado que  $\gamma \propto \xi$  mucha disipación es equivalente a  $\xi \gg 1$  y poca disipación es equivalente a  $\xi \ll 1$ . Lo que ahora podemos afirmar es que  $\gamma \propto \frac{1}{\lambda}$  esto es compatible con lo que observamos en las graficas de la figura B.4.

Notemos que al explorar el efecto de el tamaño de  $dt$  desde el análisis dimensional encontramos que el efecto de escalar  $dt^*$  está considerado en el término adimensional  $\xi$ , sin embargo hay que considerar que  $dt^*$  sigue representando una diferencial de modo que en el contexto de la simulación  $dt^*$  tiene que ser infinitesimalmente más pequeño que el término de menor magnitud considerado en la ecuación. La condición para que esto se cumpla en nuestras simulaciones es que  $dt^* \ll \xi$ .

# C Código para la simulación de las realizaciones

En este apéndice se encuentran los códigos de simulación usados para producir las realizaciones que se analizan en este trabajo. El código simula las tres ecuaciones adimensionales (10.1), (10.2) ó (10.3) según sea el caso. El código está escrito en el lenguaje FORTRAN 90.

En la figura C.1 tenemos la primera parte del código. En la línea 2 tenemos a la variable  $R$  que es la variable aleatoria que se encuentra en el término estocástico de cada una de las tres ecuaciones que se estudian. En la línea 3 generamos el valor aleatorio  $V\_Ndt\_mas\_t$  a partir del cual comenzaremos la simulación. La variable  $R$  se obtiene de una distribución normal centrada en 0 y con varianza 1. La variable  $V\_Ndt\_mas\_t$  se obtiene de una distribución normal centrada en 0 y con varianza  $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ .

En las líneas 10, 13 y 16 de la figura C.1 tenemos declaradas las tres versiones que es posible simular en el bucle DO de las tres figuras posteriores. En la línea inmediata anterior a cada versión de la ecuación se describe qué ecuación se simula al emplear tal línea de código.

```
1  !Generamos el paso aleatorio
2  CALL Random_StdNormal(R)
3  CALL Random_Normal(KSI,V_Ndt_mas_t)
4
5  !Generamos las condiciones iniciales
6  CONDICION_INICIAL = V_Ndt_mas_t
7  WRITE(*,*) 'V(0) = ',V_Ndt_mas_t
8
9  !SIMULACION ECUACION MODIFICADA
10 V_dt = V_Ndt_mas_t + (KSI)*SQRT( ( ABS(1.0-(V_Ndt_mas_t))**(2.0*KAPPA) )*(DeltaT) )*(R)
11
12 !SIMULACION ECUACION MODIFICADA CON DISIPACION
13 V_dt = V_Ndt_mas_t + SQRT( ( ABS(1.0-(V_Ndt_mas_t/KSI))**(2.0*KAPPA) )*(DeltaT) )*(R) - ((V_Ndt_mas_t)*(DeltaT))
14
15 !SIMULACION ECUACION MODIFICADA Y CON DISIPACION Y DERIVA
16 V_dt = V_Ndt_mas_t + SQRT( ( ABS(1.0-(V_Ndt_mas_t/KSI))**(2.0*KAPPA) )*(DeltaT) )*(R) - ((KSI - V_Ndt_mas_t)*(DeltaT))
17
18 !Generamos el primer paso de la realización necesario el bucle, este paso no se considera para las trayectorias ni los
19 !histogramas.
19 V_Ndt_mas_t = V_dt
20
21 !Inicia el bucle de la simulación
22 DO i = 1, N
```

Figura C.1

En la figura C.2 tenemos el bucle DO que genera la realización de la ecuación con

$N$  iteraciones. En la línea 26 de la imagen encontramos la variable aleatoria  $R$  que se genera a partir de una distribución normal centrada en 0 y con varianza 1. La línea 29 genera uno de los  $N$  pasos de la realización. Las variables *Emergency\_Dummy* y *Actual\_Dummy*, de las líneas 24 y 38 respectivamente, sirven para calcular el retorno al vuelo. El IF que encontramos de las líneas 32 a 36 sirve para evitar que un número lo suficientemente grande sature la memoria de la computadora y recupera el último número válido en el bucle DO desde el cual se continua la realización.

```

21 !Inicia el bucle de la simulación
22 DO i = 1, N
23
24     Emergency_Dummy = V_Ndt_mas_t
25
26     CALL Random_StdNormal(R)
27
28     !SIMULACION ECUACIÓN MODIFICADA
29     V_Ndt_mas_t = V_Ndt_mas_t &
30     + (KSI)*SQRT( ( (ABS(1.0-(V_Ndt_mas_t)))**(2.0*KAPPA) )*(DeltaT) )*(R)
31
32     IF ( (ieee_is_finite(V_Ndt_mas_t) .NEQV. .TRUE. ) ) THEN
33
34         V_Ndt_mas_t = Emergency_Dummy
35
36     END IF
37
38     Actual_Dummy = V_Ndt_mas_t
39
40     Retorno = ( ( Actual_Dummy - Emergency_Dummy )/( Emergency_Dummy ) )
41
42 END DO

```

Figura C.2

Las figuras C.3 y C.4 tienen la misma estructura que C.2 pero emplean las otras dos versiones de la ecuación que se estudian en este trabajo.

```

21 !Inicia el bucle de la simulación
22 DO i = 1, N
23
24     Emergency_Dummy = V_Ndt_mas_t
25
26     CALL Random_StdNormal(R)
27
28     !SIMULACION ECUACIÓN MODIFICADA Y CON DISIPACIÓN
29     V_Ndt_mas_t = V_Ndt_mas_t &
30     + SQRT( ( (ABS(1.0-(V_Ndt_mas_t/KSI)))**(2.0*KAPPA) )*(DeltaT) )*(R) - ((V_Ndt_mas_t)*(DeltaT))
31
32     IF ( (ieee_is_finite(V_Ndt_mas_t) .NEQV. .TRUE. ) ) THEN
33
34         V_Ndt_mas_t = Emergency_Dummy
35
36     END IF
37
38     Actual_Dummy = V_Ndt_mas_t
39
40     Retorno = ( ( Actual_Dummy - Emergency_Dummy )/( Emergency_Dummy ) )
41
42 END DO

```

Figura C.3

```
21  !Inicia el bucle de la simulación
22  DO i = 1, N
23
24      Emergency_Dummy = V_Ndt_mas_t
25
26      CALL Random_StdNormal(R)
27
28      !SIMULACION ECUACION MODIFICADA Y CON DISIPACION Y DERIVA
29      V_Ndt_mas_t = V_Ndt_mas_t &
30      + SQRT( ( (ABS(1.0-(V_Ndt_mas_t/KSI)))*(2.0*KAPPA) )*(DeltaT) )*(R) - ((KSI - V_Ndt_mas_t)*(DeltaT))
31
32      IF ( (ieee_is_finite(V_Ndt_mas_t) .NEQV. .TRUE.) ) THEN
33
34          V_Ndt_mas_t = Emergency_Dummy
35
36      END IF
37
38      Actual_Dummy = V_Ndt_mas_t
39
40      Retorno = ( ( Actual_Dummy - Emergency_Dummy )/( Emergency_Dummy ) )
41
42  END DO
```

Figura C.4





# D Código de la solución numérica

En este apéndice se encuentran los códigos de *Mathematica* empleados para resolver numéricamente la ecuación modificada de Langevin, la ecuación (10.1).

En la figura D.1 se declara la aproximación a la función valor absoluto que es necesaria para pasos posteriores de la rutina numérica. La aproximación a usar se detalla en el apéndice A. Una vez que se ha declarado la aproximación es posible aplicar la rutina **NDSolve**. Para aplicar la rutina son necesarias dos consideraciones para la condiciones de borde a emplear que varían según el régimen de  $\xi$  en el que se quiera resolver la ecuación.

## Aproximación para el valor absoluto

La aproximación hace uso del parámetro  $\epsilon$ . Mientras más grande sea dicho parámetro respecto de 1 mejor funciona la aproximación

```
In[2]:=
 $\xi = 1;$ 
Aprox[ $\epsilon_+$ ,  $\epsilon_-$ ] :=  $\left(-\left(\frac{\nu}{\xi}\right) + 1\right) \text{Tanh}\left[\epsilon \left(1 - \frac{\nu}{\xi}\right)\right]$ 
Plot[{Aprox[1,  $\xi$ ], Aprox[2,  $\xi$ ], Aprox[50,  $\xi$ ]}, { $\nu$ , 0, 2}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1, Frame -> True]
```

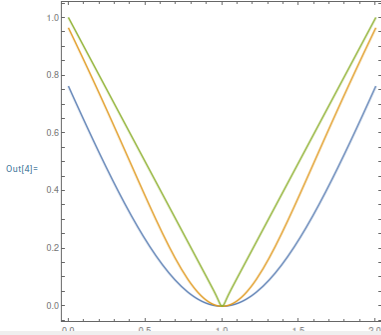


Figura D.1

En la figura D.2 tenemos la estructura del código de solución para el caso de  $\xi > 1$ . En este régimen las condiciones de borde necesarias para poder emplear la rutina **NDSolve** deben de ser para la función en el valor mínimo a solucionar igual a cero y para la derivada evaluada en el valor máximo a resolver igual a un valor muy cercano pero distinto de cero.

## Soluciones $\xi$ grande

```

EcuacionAdm := - ∂v(v P[v]) -  $\frac{1}{2}$  ∂v ∂v ((Aprox[ε, ξ])2κ * P[v])
ε = 1 * 103;
ξ = 100;
κ = 1 / 2;
EpsilonCero = 1 * 10-8;

Derivada = -1 * 10-11;

VValMax = 5;
VValMin = -5;
solucion = NDSolve[{EcuacionAdm == 0, P[VValMin] == 0, P(1)[VValMax] == Derivada}, P, {v, VValMin, VValMax}, InterpolationOrder → All, StartingStepSize → 0.001,
  MaxStepSize → 0.01];
f[v_] = P[v] /. solucion[[1];
(* ConstInteracion=NIntegrate[f[v],{v,VValMin-EpsilonCero,MaxPlot}]; *)
MaxPlot = VValMax;
ConstInteracion = NIntegrate[f[v], {v, VValMin, VValMax}] = NIntegrate[f[v], {v, VValMin, VValMax}]
Plot[{ $\frac{f[v]}{\text{ConstInteracion}}$ }, {v, VValMin, MaxPlot}, PlotRange → All, AspectRatio → 1]
LogLogPlot[{ $\frac{f[v]}{\text{ConstInteracion}}$ }, {v, VValMin, MaxPlot}, PlotRange → All, AspectRatio → 1]
Tabla1 = Table[{ $\frac{f[v]}{\text{ConstInteracion}}$ }, {v, VValMin, VValMax, 0.01}];

```

Figura D.2

En la figura D.3 tenemos la estructura del código de solución para el caso de  $\xi < 1$ . En este régimen las condiciones de borde necesarias para poder emplear la rutina NDSolve deben de ser para la función en el valor máximo a solucionar igual a cero y para la derivada evaluada en el valor máximo a solucionar igual a un valor muy cercano pero distinto de cero.

## Soluciones $\xi$ pequeña

```

In[ ]:= EcuacionAdm := - ∂v(v P[v]) -  $\frac{1}{2}$  ∂v ∂v ((Aprox[ε, ξ])2κ * P[v])
ε = 1 * 103;
ξ = .001;
κ = 1 / 2;
EpsilonCero = 1 * 10-8;
Derivada = -1 * 10-10;

VValMax = 100;
VValMin = 1;
solucion = NDSolve[{EcuacionAdm == 0, P[VValMax] == 0, P(1)[VValMax] == Derivada}, P, {v, VValMin + EpsilonCero, VValMax}, InterpolationOrder → All,
  StartingStepSize → 0.0001, MaxStepSize → 0.001, AccuracyGoal → 20];
f[v_] = P[v] /. solucion[[1];

MaxPlot = 55;
Plot[{f[v]}, {v, VValMin, MaxPlot}, PlotRange → All, AspectRatio → 1]
LogLogPlot[{f[v]}, {v, VValMin, MaxPlot}, PlotRange → All, AspectRatio → 1]
ConstInteracion = NIntegrate[f[v], {v, VValMin + EpsilonCero, MaxPlot}]
Tabla2 = Table[{v, f[v]}, {v, 1, MaxPlot, 0.01}];
WriteString["Archivo Fernando 001.txt", ExportString[Tabla2, "CSV", Alignment → Left] ];
Close["Archivo Fernando 001.txt"];

```

Figura D.3

# Bibliografía

- [1] P. Douglas, S. Bergamini y F. Renzoni. «Tunable Tsallis distributions in dissipative optical lattices». En: *Physical Review Letters* 96.11 (mar. de 2006). DOI: 10.1103/physrevlett.96.110601.
- [2] P. Gopikrishnan. «Inverse cubic law for the distribution of stock price variations». En: *The European Physical Journal B* (1998), págs. 139-140. DOI: <https://doi.org/10.1007/s100510050292>.
- [3] P. Gopikrishnan y col. «Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices». En: *Physical Review E* 60.5 (1999), págs. 5305-5316. DOI: 10.1103/physreve.60.5305.
- [4] M. S. Joshi. «The Ito Calculus». En: *The concepts and practice of Mathematical Finance*. Cambridge University Press, 2008.
- [5] Hidetoshi Katori, Stefan Schlipf y Herbert Walther. «Anomalous Dynamics of a single ion in an optical lattice». En: *Physical Review Letters* 79.12 (sep. de 1997), págs. 2221-2224. DOI: 10.1103/physrevlett.79.2221.
- [6] P. Langevin. «Sur la théorie du mouvement brownien.» En: *Comptes rendus Académie de Sciences* 146 (1908), págs. 50-533.
- [7] D. S. Lemons. *An introduction to stochastic processes in physics: Containing "on the theory of Brownian motion" by Paul Langevin, translated by Anthony Gythiel*. Johns Hopkins University Press, 2002.
- [8] M. E. J. Newman. «Power laws, pareto distributions and Zipf's law». En: *Contemporary Physics* 46.5 (2005), págs. 323-351. DOI: 10.1080/00107510500052444.
- [9] Christophe Dang Ngoc Chan. *File:von koch 2 etapes.svg*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von\\_koch\\_2\\_etapes.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von_koch_2_etapes.svg).
- [10] Christophe Dang Ngoc Chan. *File:von koch 3 etapes.svg*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von\\_koch\\_3\\_etapes.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von_koch_3_etapes.svg).
- [11] Christophe Dang Ngoc Chan. *File:von koch 5 etapes.svg*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von\\_koch\\_5\\_etapes.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Von_koch_5_etapes.svg).
- [12] Nuno Nogueira. *Archivo:damping 1.SVG*. Ed. por Dicklyon. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Damping\\_1.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Damping_1.svg).
- [13] Frederick Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, 2009.

- [14] Peter Scott. *Brownian Motion*. URL: <http://physics.ucsc.edu/~drip/5D/brown/brown.pdf>.
- [15] Zielak. *Bitcoin historical data*. Abr. de 2021. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/mczielinski/bitcoin-historical-data>.

...