



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

Posgrado en Ciencias Físicas

INTERACCIÓN DE 2 PARTÍCULAS EN EL MODELO DE
CÚMULOS DE CAPAS

Tesis

que para optar por el grado de :

Maestro en Ciencias (Física)

presenta

Omar Alejandro Díaz Caballero

Tutor principal: Dr Roelof Bijker
Instituto de Ciencias Nucleares

Miembros del Comité Tutor:

Dr Luis Armando Acosta Sánchez
Instituto de Física

Dr Efraín Rafael Chávez Lomelí
Instituto de Física

Ciudad Universitaria, CD. MX, Junio 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción y Motivación	3
2. Simetría no esférica: ACM y CSM	8
2.1. El Grupo $U(\nu + 1)$ y los Cúmulos de Partículas	8
2.2. Modelo Algebráico de Cúmulos	10
2.3. Modelo de Cúmulos de Capas	14
2.4. Single Particle Levels in Cluster Potentials	18
2.5. Solucionando el CSM	19
3. Niveles Energéticos	22
3.1. Pairing Potential	23
3.2. Elementos de Matriz	24
3.3. Acoplamiento + CSM	26
3.4. Interacción de Delta Superficial	33
4. Transiciones Electromagnéticas	37
4.1. Transiciones electromagnéticas	37
5. Resultados	42
5.1. Niveles energéticos en el ^{10}Be	42
5.2. Pairing interaction	45
5.3. Interacción de Delta Superficial	47
5.4. Transiciones Eléctricas	53
6. Análisis de Resultados	57
6.1. Potenciales	58
6.2. Funciones de Onda	59
6.3. Conclusiones	61

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
7. Apendices	62
7.1. Soluciones exactas $U(4)$	62
7.2. Oscilador Morse Cuántico	66
7.3. Coordenadas Hiperesféricas	68
7.4. Pairing interaction	71

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi padre por enseñarme a pensar, detenerme y darme el tiempo de entender, y por su paciencia inagotable a lo largo de treinta y tres años y contando. A mi madre por estar siempre ahí para nosotros y ser un apoyo constante a lo largo de mi vida con su cariño, siempre dispuesta a perderse horas conmigo platicando. A mi hermana por ser esa pequeña presencia encantadora en la vida que no sabía que necesitaba y al Dr Bijker, por darme el privilegio de trabajar a su lado, con un conocimiento enciclopédico, una disposición y claridad para atender dudas y preguntas, no podría haber encontrado mejor tutor, y mejor persona para trabajar todos estos años.

Capítulo 1

Introducción y Motivación

A principios del siglo XX, con la llegada de la mecánica cuántica, la inegable naturaleza discreta de la materia demostrada de manera contundente por Einstein en una publicación en la que describe el movimiento Browniano en 1905, los experimentos de Rutherford que fueron los primeros en mostrar la estructura del átomo como la conocemos, demostrando la existencia del núcleo atómico y la carga eléctrica del electrón mostrada en el experimento de R. Milikan en 1912. Un nuevo campo se abrió en la física, el modelo predominante en esa época para describir la energía de amarre del núcleo era el modelo de gota líquida.

$$E_B = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm \delta(A, Z) \quad (1.1)$$

Si bien fue una gran primera aproximación en la descripción de la naturaleza del núcleo, tomando en cuenta la interacción entre nucleones, con corrección a aquellos que no tenían vecinos en la superficie, la repulsión coulombiana, así como la asimetría entre protones y neutrones y la paridad, no daba cuenta de la naturaleza particularmente estable de ciertos núcleos, que poseían números “mágicos” de protones y/o neutrones (Figura 1)

El Modelo de Capas Nucleares fue desarrollado ya no como un ajuste, este modelo partía de un Hamiltoniano con dos términos, el primer término, conocido como el término de partícula independiente, en el cual los nucleones se mueven independientemente bajo el efecto de un potencial, el segundo término, da cuenta de las interacciones nucleón-nucleón, generalmente conocido como interacción residual.

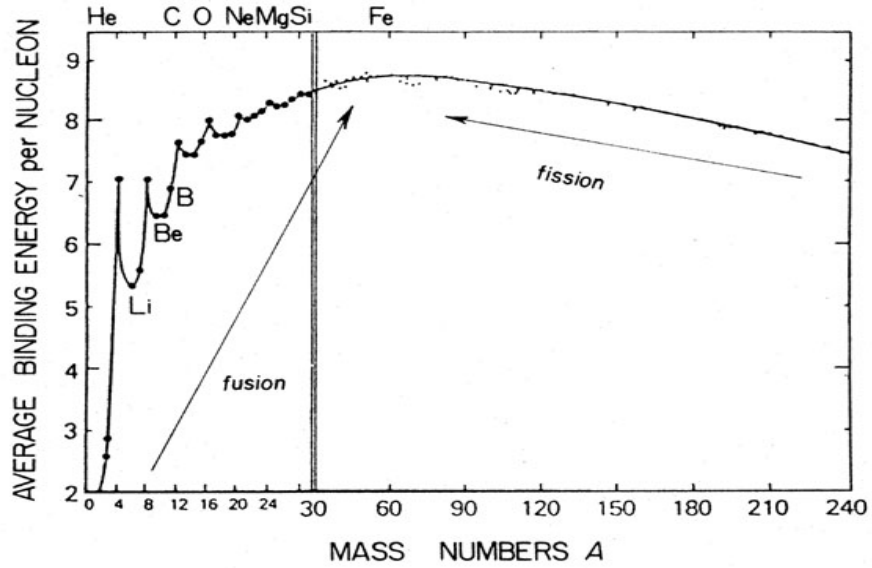


Figura 1.1: Energía de amarre en función del número de nucleones

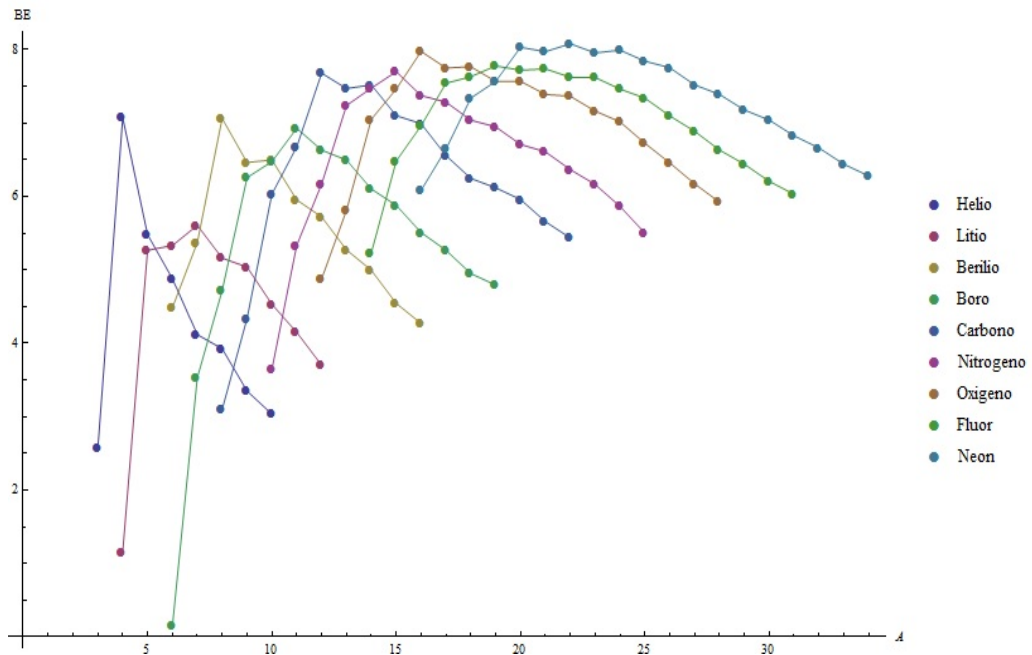


Figura 1.2: Energía de amarre de distintos isótopos de núcleos ligeros $3 \leq A \leq 34$

$$H = H_0 + V_{res} \quad (1.2)$$

El Modelo de Capas Nucleares (NSM por sus siglas en inglés Nuclear Shell Model) usa un potencial de oscilador armónico además de la interacción de Espin-Orbita, este predice los números mágicos. Es interesante notar que aun sin incluir el término SO se predicen los tres primeros números mágicos, agregar el término espinorbita predice todos los números mágicos, además este término evita la degeneración para estados con idéntico momento angular en cada capa, pues la energía queda en función de l y n .

La interacción SO que es proporcional al producto entre el momento angular radial y el spin $V_{SO} = 2\alpha \vec{l} \cdot \vec{s}$.

Juntos estos potenciales pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$U(r) = \frac{mw^2r^2}{2} - \alpha[\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2] \quad (1.3)$$

Esta forma no solo permite calcular facilmente los eigenvalores en la base del oscilador harmónico, pues los tres terminos conmutan, también da una idea intuitiva del significado de este término. El momento angular total es $j = l \pm s = l \pm \frac{1}{2}$. Por lo tanto, al elevar al cuadrado, la diferencia entre el cuadrado de la suma (o resta) y la suma de los cuadrados $(a \pm b)^2 \neq a^2 + b^2$ genera una separación entre estados cuánticos con el mismo número l

$$\Delta E = \alpha \begin{cases} -l, & j = l + \frac{1}{2} \\ l + 1, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.4)$$

Niveles energéticos degenerados se separan aún son al menos doblemente degenerados, pero la estructura resultante predice núcleos superestables correspondientes a capas llenas.

El desarrollo de modelos de un cuerpo (SP por sus siglas en inglés Single Particle) en núcleos con números mágicos de protones y neutrones permite calcular muchas propiedades de los núcleos como lo son Energías, Factores de forma, Transiciones electromagnéticas entre otras de una manera muy eficiente. Los modelos de muchos cuerpos donde para calcular sistemas con, por ejemplo 12 fermiones de valencia, digamos dos protones y diez neutrones de valencia, requiere una cantidad de 10^{14} configuraciones, ya no es manejable, considerando el determinante de Slater se vuelve demasiado grande para ser

manejable.

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \phi_1(\vec{r}_2) & \dots & \phi_1(\vec{r}_A) \\ \phi_2(\vec{r}_1) & \phi_2(\vec{r}_2) & \dots & \phi_2(\vec{r}_A) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_A(\vec{r}_1) & \phi_A(\vec{r}_2) & \dots & \phi_A(\vec{r}_A) \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

El modelo de Nilsson es usado para describir núcleos pesados con simetría oblata o prolata. Este modelo es bastante efectivo en núcleos pesados en capas no llenas, además de que presentan bandas rotacionales de energía no presentes en el NSM.

$$H_{Nilsson} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_{\perp}^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m\omega_3^2 z^2}{2} + \hbar\omega_0(V_{ls}\vec{l} \cdot \vec{s} + V_{ll}(\vec{l} \cdot \vec{l} - \langle \vec{l} \cdot \vec{l} \rangle)) \quad (1.6)$$

Es claro ver que este hamiltoniano, separa las oscilaciones en el plano x, y de aquellas en el eje z , tiene de nuevo la interacción spin órbita además de un par de términos adicionales que, podríamos pensarlo como una generalización del cluster shell model, con unos terminos extra (V_{ll}).

Existe, sin embargo, la necesidad de buscar distintos modelos. Configuraciones que no sean esféricas, prolatas u oblatas. Una de las que considero más importantes es la predicción y posterior descubrimiento del Hoyle state en el ^{12}C , propuesto por Fred Hoyle, propone un mecanismo para la creación del átomo de carbono a partir de partículas alfa, tomando en cuenta su increíble estabilidad Hoyle propone que dos partículas alfa se unan para formar un núcleo de ^8Be que posteriormente con una tercer partícula alfa forme este nucleo.

Esto explicaría la abundancia de Carbono en el universo, que previamente no cuadraba con los metodos de decaimiento conocidos hasta ese entonces, Hoyle predijo un estado exitado que corresponde a esta reacción, los estados base poseen las siguientes energías:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3727.37\text{MeV} \\ ^8\text{Be} &= 7456.89\text{MeV} \\ ^{12}\text{C} &= 11177.96\text{MeV} \end{aligned} \quad (1.7)$$

El proceso $^8\text{Be} + \alpha$ está aproximadamente 6.33MeV por encima del estado base del carbono, tomando en cuenta la energía necesaria para romper la barrera coulombiana Hoyle propuso un estado 0^+ con una energía de 7.65MeV

la cual fue descubierta posteriormente.

Si la estabilidad de las partículas alfa juega un rol tan importante en estos estados excitados, es de esperarse que también este presente en la configuración geométrica de estos. Recientemente, se han hallado estados excitados del carbono correspondientes a la banda de excitación del estado Hoyle [10, 11, 12, 13], así como evidencia de estructura triangular para el ^{12}C y estructura tetrahedral en el ^{16}O que correspondería a un estado excitado formado por 4 partículas alfa [14, 15].

En el siguiente capítulo ahondaremos en el Algebraic Cluster Model (ACM) así como en el Cluster Shell Model (CSM), modelos que describen núcleos con estas simetrías así como el comportamiento de nucleones en estos.

Capítulo 2

Simetría no esférica: ACM y CSM

2.1. El Grupo $U(\nu + 1)$ y los Cúmulos de Partículas

Para una mejor comprensión y análisis de estos modelos es necesario estudiar los generadores del algebra, ya que nos permitira poder entender y clasificar los observables, es necesario hacer notar que partiremos de Hamiltonianos que sóloamente contienen Operadores de Casimir de \mathfrak{G} . En este capítulo se aclara el por qué se parte de la estructura algebraica de estos grupos así como las suposiciones que simplifican y facilitan el tratamiento algebraico.

$$H = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathfrak{G} \quad (2.1)$$

Este modelo ha sido desarrollado en [16, 17, 18], para describir éstas configuraciones no esféricas/prolatas/oblatas partimos de la estabilidad de las partículas alfa para proponer configuraciones nucleares formadas por n de éstas en lugar de tratar los nucleones, esto nos impone una simetría bajo permutación.

Bajo la idea de qué dado un problema de mecánica cuántica de ν grados de libertad el algebra que genera este espectro es $U(\nu + 1)$ ya que se agrega un operador de creación escalar con el fin de describir dos subgrupos de álgebras. En este caso los grados de libertad espaciales son las coordenadas de Jacobi, para n cuerpos tenemos $3n - 3$ coordenadas, agregamos el bosón escalar, por lo tanto, el algebra que genera esto es $U(3n - 2)$. Ejemplificando con el caso

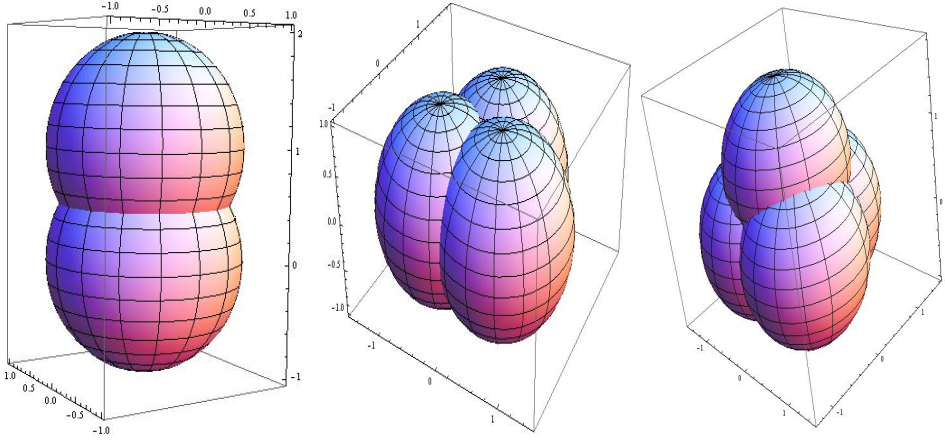


Figura 2.1: Configuraciones de cúmulos de partículas alfa

de $n = 3$ correspondiente al ^{12}C y el álgebra $U(7)$:

Dadas las coordenadas de Jacobi

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}} \quad \vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3}{\sqrt{6}} \quad (2.2)$$

Nos lleva a usar dos operadores bosonicos vectoriales, además de un operador extra, escalar, para así tener los generadores del álgebra de Lie de $U(7)$

$$b_{\rho,m}^\dagger, b_{\lambda,m}^\dagger, s^\dagger = c_\alpha^\dagger \quad m = (-1, 0, 1) \quad \alpha = (1, 2, \dots, 7) \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{G} : G_{\alpha\beta} = c_\alpha^\dagger c_\beta$$

Estos representan la segunda cuantización de las coordenadas y momentos de Jacobi. El álgebra $U(n)$ contiene distintas subálgebras

$$U((3n - 2)) \supset \begin{cases} U(3n - 3) \\ SO(3n - 2) \supset SO(3n - 3) \supset \dots \supset SO(3) \supset SO(2) \end{cases} \quad (2.4)$$

El algebra $U(n)$ corresponde a un oscilador armónico n dimensional, que predice espectros vibracionales mientras que el álgebra $SO(n)$ predice una banda rotacional. Que como veremos más adelante podemos asociar a las configuraciones excitadas no esféricas como por ejemplo el estado de Hoyle en el Carbono. Este tipo de excitaciones se han estudiado ya en la física molecular, con la diferencia de que en las moléculas los niveles energéticos rotacionales y vibracionales se encuentran muy separados por lo que no hay transiciones

entre estos, mientras que en el presente modelo se consideran dentro del mismo orden de magnitud. Esta es una de las razones por las cuales partimos de un grupo que contenga ambas excitaciones, excluir las excitaciones vibratorias no tiene mucho sentido físico, pues es necesario mantener la estructura ya proporcionada por el NSM correspondiente al grupo $U(3)$, finalmente es importante recordar que ambas álgebras contienen $SO(3)SU(2)$ importantes números cuánticos asociados al momento angular y su proyección.

2.2. Modelo Algebráico de Cúmulos

El Modelo Algebráico de Cúmulos (ACM por sus siglas en inglés Algebraic Cluster Model) es un modelo que permite describir excitaciones tanto vibratorias como rotacionales, si bien no es el tema central de esta tesis, que se enfoca en el Cluster Shell Model, funciona muy bien como una introducción a la caracterización de estos modelos.

Partiremos de la versión más elemental del ACM, formada por dos cúmulos de partículas alfa:

$$U(4) \supset \begin{cases} U(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \\ SO(4) \supset SO(3) \supset SO(2) \end{cases} \quad (2.5)$$

Los generadores del álgebra de $U(4)$ son tres operadores vectoriales y un operador escalar bajo la convención $i, j = 1, 2, 3$ $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ tenemos:

$$\begin{aligned} U(4) : & \quad b_\mu^\dagger b_\nu \\ U(3) : & \quad b_j^\dagger b_k \\ SO(4) : & \quad -i\epsilon_{jkl} b_k^\dagger b_l, -i(b_j^\dagger b_4 - b_4^\dagger b_j) \\ SO(3) : & \quad -i\epsilon_{jkl} b_k^\dagger b_l \\ SO(2) : & \quad -i(b_1^\dagger b_2 - b_2^\dagger b_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Además de las relaciones de conmutación

$$[b_\mu, b_\nu^\dagger] = \delta_\nu^\mu \quad (2.7)$$

Con estos ingredientes es fácil trabajar este tipo de problemas de manera algebraica.

Partiremos primero de la parte $U(3)$ con el hamiltoniano del oscilador armónico en tres dimensiones, si bien es cierto que no es el hamiltoniano más general de a lo mucho orden cuadrático que conserva paridad y momento angular que podemos escribir, dicho hamiltoniano no corresponde a una simetría dinámica. Los hamiltonianos que utilizaremos, por otro lado, al estar escritos en terminos de estas algebras, si lo serán. Éste tratamiento es muy facil en la configuración de dos partículas alfa, suele complicarse más en las configuraciones D_{3h} y T_d .

Sin más preambulos, escribiendo el Hamiltoniano del oscilador armónico en terminos de estos operadores tenemos:

$$H_1 = \sum_{i=1}^3 (b_i^\dagger b_i + \frac{1}{2}) \quad (2.8)$$

Ahora los operadores invariantes son:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum b_\mu^\dagger b_\mu \\ \hat{n} &= \sum b_j^\dagger b_j \\ \hat{L}^2 &= \sum_j (-i\epsilon_{jkl} b_k^\dagger b_l)^2 \\ \hat{L}_z &= (-i\epsilon_{312l} b_1^\dagger b_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Con estas relaciones podemos caracterizar los eigenvalores de las eigenfunciones (apéndice para detalles)

$$\begin{aligned} \hat{N} | N, n, l, m \rangle &= N | N, n, l, m \rangle \\ \hat{n} | N, n, l, m \rangle &= n | N, n, l, m \rangle \\ L^2 | N, n, l, m \rangle &= l(l+1) | N, n, l, m \rangle \\ L_z | N, n, l, m \rangle &= m | N, n, l, m \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

Con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} n &= 0, 1, 2, \dots, N \\ l &= n, n-2, n-4, \dots, 1 \quad \text{ó} \quad 0 \\ m &= l, l-1, \dots, 0, \dots, -l+1, -l \end{aligned} \quad (2.11)$$

El espectro de los niveles energéticos depende de n con una estructura lineal entre los niveles como se puede observar en la figura 2.2

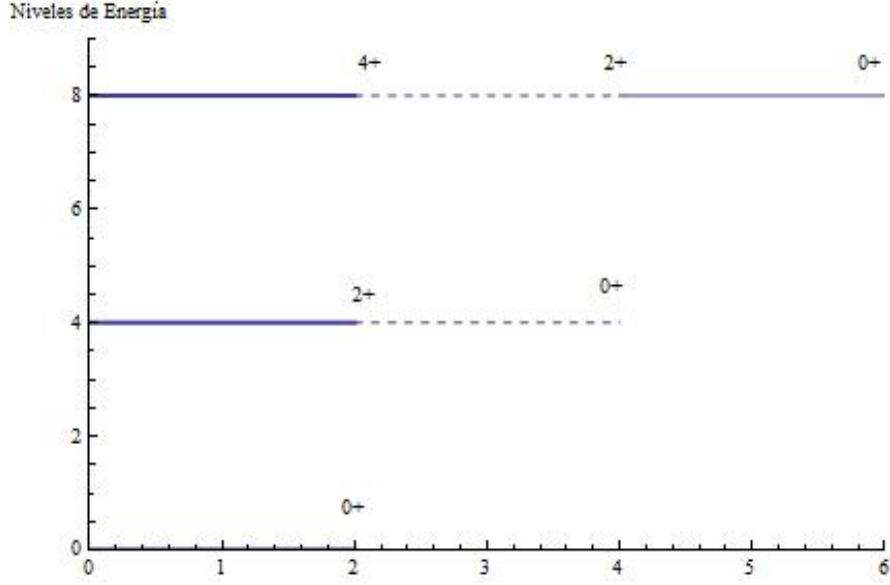


Figura 2.2: Espectro de energías del oscilador armónico

La otra cadena, el límite $SO(4)$ corresponde a un oscilador Morse tridimensional, los operadores invariantes son:

$$\begin{aligned}
 \hat{N} &= \sum b_{\mu}^{\dagger} b_{\mu} \\
 \hat{L}^2 + T^{\hat{E}l^2} &= \sum_j (-i\epsilon_{jkl} b_k^{\dagger} b_l)^2 + (b_j^{\dagger} b_4 - b_4^{\dagger} b_j)^2 \\
 \hat{L}^2 &= \sum_j (-i\epsilon_{jkl} b_k^{\dagger} b_l)^2 \\
 \hat{L}_z &= (-i\epsilon_{312} b_1^{\dagger} b_2)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Los eigenvalores y las restricciones son:

$$\begin{aligned}
 \hat{N} | N, w, l, m \rangle &= N | N, w, l, m \rangle \\
 (L^2 + T^{(El)^2}) | N, w, l, m \rangle &= w(w+2) | N, w, l, m \rangle \\
 L^2 | N, w, l, m \rangle &= l(l+1) | N, w, l, m \rangle \\
 L_z | N, w, l, m \rangle &= m | N, w, l, m \rangle
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

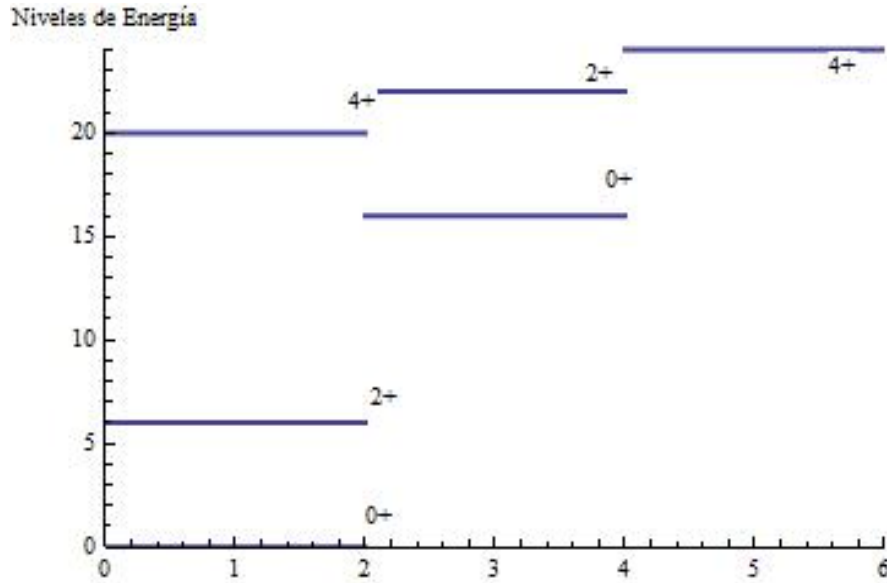


Figura 2.3: Espectro de energías del oscilador Morse

$$\begin{aligned}
 \omega &= N, N - 2, \dots, 1 \quad \text{ó} \quad 0 \\
 l &= 0, 1, \dots, \omega \\
 m &= l, l - 1, \dots, 0, \dots, -l + 1, -l
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

En este caso ω juega un papel similar al de n , pero con la diferencia de que la estructura de los niveles energéticos es rotacional, es decir del tipo $\omega(\omega + 1)$ como podemos observar en la figura 2.3. Con estos elementos podemos ver claramente cómo la distribución del espectro energético cambia al cambiar la distribución geométrica del núcleo manteniendo simetrías dinámicas, además de los números cuánticos que caracterizan los modelos. Es importante recalcar que este caso, no solamente es el más sencillo de trabajar por tener la menor cantidad de partículas alfa (mayor a uno), también es el más fácil de caracterizar en términos de números cuánticos, es el más similar al oscilador armónico, este problema se complica al aumentar la cantidad de partículas alfa.

Para completar a grosso modo la descripción del ACM, el hamiltoniano usado es una combinación del oscilador armónico y el oscilador morse $H =$

$(1 - X)H_{U(3)} + XH_{SO(4)}$ donde $X \in (0, 1)$ de manera que se puede mantener la estructura rotacional del oscilador morse al mismo tiempo que se permiten transiciones entre bandas, característica del oscilador armónico, que están prohibidas en el oscilador morse, pues el operador de transición entre bandas es precisamente $T^{(El)}$ que es claramente diagonal en el límite $SO(4)$. (detalles en el apéndice)

2.3. Modelo de Cúmulos de Capas

El Modelo de Cúmulos de Capas, que abreviaremos CSM por sus siglas en inglés (Cluster Shell Model) fue desarrollado [19] para estudiar el comportamiento de nucleones dentro de las estructuras de partículas alfa descritas en la sección anterior. Teniendo dos tipos de partículas ahora, partículas alfa y nucleones (protón o neutrón) en vez de mantener la descripción algebraica del ACM partiremos de un potencial que describa la configuración de k partículas alfa y a partir de ahí calcularemos el comportamiento de un nucleón. Es importante tomar en cuenta que las partículas alfa no se considerarán afectadas por el nucleón, es decir no se toma en cuenta la estructura de nucleones que las forman, el tratamiento tendrá la forma de un modelo de capas con distribuciones geométricas específicas.

Las partículas alfa tendrán una distribución gaussiana de carga y masa dada por la siguiente expresión:

$$\rho_\alpha(\vec{r}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha r^2} \quad (2.15)$$

El parámetro alfa viene representando el “tamaño” de la partícula alfa. Estas cargas se encontrarán a una distancia β del centro de masa con coordenadas β, θ_i, ϕ_i . Usando la expansión de onda plana podemos expresar la configuración final como:

$$\rho_\alpha(\vec{r}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha(r^2 + \beta^2)} 4\pi \sum_{\lambda\mu} i_\lambda(2\alpha\beta r) Y_\lambda^\mu(\theta, \phi) \sum_{i=1}^k Y_\lambda^{*\mu}(\theta_i, \phi_i) \quad (2.16)$$

Donde las funciones $Y_{\lambda\mu}(\theta_i, \phi_i)$ son los armónicos esféricos e i_λ es la función esférica modificada de Bessel de orden λ . La densidad de carga y de

masa se derivan de esta expresión.

$$\begin{aligned}\rho_Q &= \frac{Ze}{k} \rho_\alpha(\vec{r}) \\ \rho_M &= \frac{A}{k} \rho_\alpha(\vec{r})\end{aligned}\quad (2.17)$$

Con $Z = 2k$ contando el número de protones en la partícula alfa y $A = 4k$ contando el número de nucleones. En la configuración así como la orientación de nuestro sistema pueden simplificar bastante la expresión dada para la densidad. En el caso del ${}^8\text{Be}$ con coordenadas $(\theta_1, \phi_1) = (0, -)$ y $(\theta_2, \phi_2) = (\pi, -)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 Y_{\lambda}^{*\mu}(\theta_i, \phi_i) &= \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \left[\delta_{\mu}^0 + \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)!}{(\lambda-\mu)!}} P_{\lambda}^{-\mu}(-1) \right] \\ &= \delta_{\mu}^0 \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} [1 + P_{\lambda}(-1)]\end{aligned}\quad (2.18)$$

La expresión es distinta de cero para $\mu = 0$ y λ par.

También podemos ver el caso del ${}^{16}\text{O}$ con coordenadas $(\theta_1, \phi_1) = (0, -)$, $(\theta_2, \phi_2) = (\gamma, 0)$, $(\theta_3, \phi_3) = (\gamma, \frac{2\pi}{3})$ y $(\theta_4, \phi_4) = (\gamma, \frac{4\pi}{3})$ se reduce a :

$$\sum_{i=1}^4 Y_{\lambda\mu}^*(\theta_i, \phi_i) = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \begin{cases} 1 + 3P_{\lambda}(-\frac{1}{3}) & \mu = 0 \\ \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)!}{(\lambda-\mu)!}} 3P_{\lambda}^{-\mu}(-\frac{1}{3}) & \mu = 3k \neq 0 \end{cases}\quad (2.19)$$

Para determinar el valor de alfa usamos el factor de forma de una partícula alfa, por lo que el resultado obtenido es

$$F_{\alpha}(\vec{q}) = e^{-\frac{q^2}{4\alpha}} \quad \alpha = 0.56(2) fm^{-2}\quad (2.20)$$

El parámetro β determina la distancia entre alfas, en la siguiente figura podemos observar como la distribución varía desde una Gaussiana en el límite $\beta = 0$ hasta dos cumulos disconexos, para calcular estas figuras tome $\lambda \in (0, 4)$.

En las figura 2.3, el límite en el que están sobrepuestas la distribución no depende del ángulo, mientras que en las figuras 2.4 y 2.5 la distribución varía respecto al ángulo theta, el cual es medido respecto al eje z .

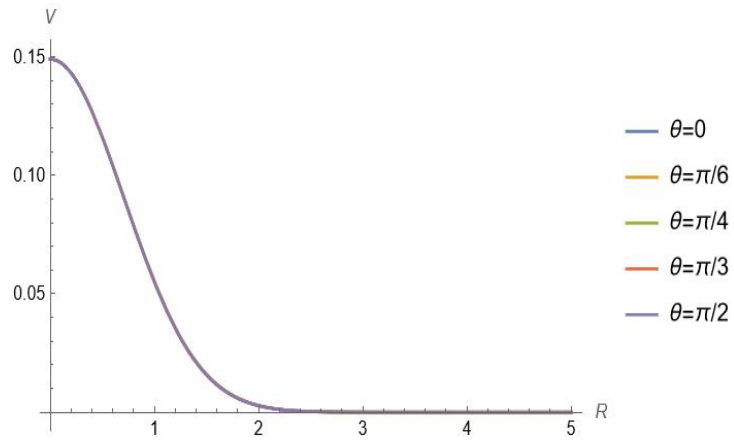


Figura 2.4: Densidad en función de r para $\beta = 0$

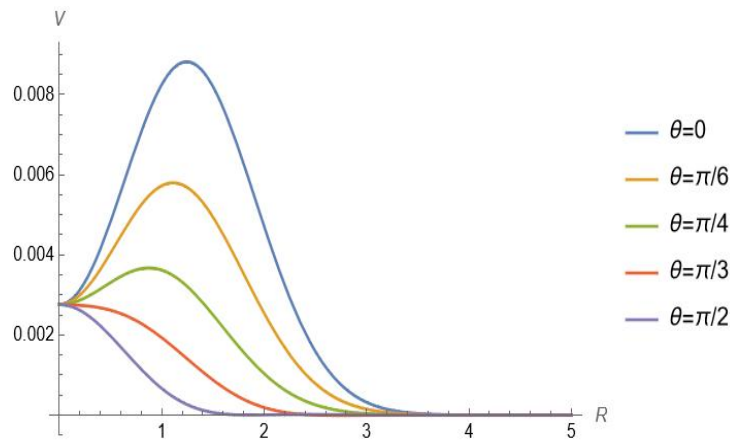


Figura 2.5: Densidad en función de r para $\beta = 2$

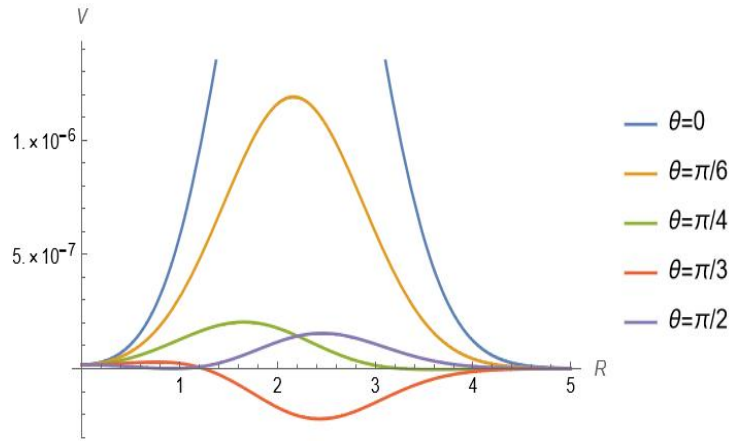


Figura 2.6: Densidad en función de r para $\beta = 4$

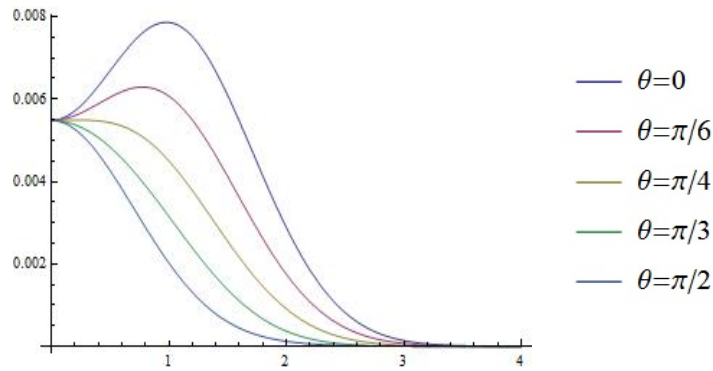


Figura 2.7: Densidad para el valor calculado $\beta = 1.82$

Para el caso de ${}^8\text{Be}$ el núcleo es inestable no se puede usar el scattering del electrón para determinar β

Pero se puede obtener a partir del momento de inercia \mathfrak{I} de la banda rotacional $0^+, 2^+, 4^+, \dots$

$$\mathfrak{I} = 8m\left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (2.21)$$

Ajustando con los datos experimentales obtenemos $\beta = 1.82$ La distribución la podemos observar en la figura 2.6

2.4. Single Particle Levels in Cluster Potentials

El primer problema a tratar en el CSM será el de un nucleón sujeto a esta distribución. El potencial que describe esto será la convolución de un potencial $v(\vec{r} - \vec{r}')$ tipo Volkov en la distribución dada, es decir.

$$V(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') v(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \quad (2.22)$$

Lo que nos da como resultado:

$$V(\vec{r}) = -V_0 \sum_{\lambda\mu} e^{-\alpha(r^2 + \beta^2)} 4\pi i_\lambda (2\alpha\beta r) Y_\lambda^\mu(\theta, \phi) \sum_{i=1}^k Y_\lambda^{*\mu}(\theta_i, \phi_i) \quad (2.23)$$

Es importante notar que el " α " no es la misma que usamos en las ecuaciones anteriores. Además puesto que los nucleones son partículas con espín incluimos una interacción spin órbita:

$$V_{SO} = V_{0,so} \vec{s} \cdot (-\vec{\nabla} V \times \vec{p}) \quad (2.24)$$

El potencial que estamos usando se separa en parte radial y angular, la parte angular tiene contribuciones muy pequeñas que solo contribuyen a órdenes grandes de β y en el cálculo actual su contribucion cae dentro del margen de error de los cálculos numéricos, por lo tanto, nos quedaremos únicamente con la parte radial.

$$V_{so,r} = V_{0,so} \frac{1}{r} \frac{\delta V}{\delta r} \vec{s} \cdot \vec{l} \quad (2.25)$$

En este caso la expresión correspondiente es:

$$V_{so,r}(\vec{r}) = V_{0,so} \sum_{\lambda\mu} \left(-2\alpha f_\lambda + \frac{\lambda}{r^2} f_\lambda + \frac{2\alpha\beta}{r} f_{\lambda+1} \right) Y_\lambda^\mu(\theta, \phi) \sum_{i=1}^k Y_\lambda^{*\mu}(\theta_i, \phi_i) \vec{s} \cdot \vec{l} \quad (2.26)$$

Donde estamos usando $f_\lambda = e^{-\alpha(r^2 + \beta^2)} 4\pi i_\lambda (2\alpha\beta r)$.

Si el nucleón en cuestión es un protón, debemos agregar además la interacción Coulombiana dada por la convolución de una función de Green en la distribución de partículas alfa.

$$V_C(\vec{r}) = \frac{Ze^2}{k} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (2.27)$$

Obtenemos como resultado:

$$V_C(\vec{r}) = \frac{Ze^2}{k} \sum_{\lambda\mu} \left[\frac{r^\lambda}{\beta^{\lambda+1}} \right] \frac{4\pi}{2\lambda+1} Y_\lambda^\mu(\theta, \phi) \sum_{i=1}^k Y_\lambda^{*\mu}(\theta_i, \phi_i) \quad (2.28)$$

2.5. Solucionando el CSM

Para resolver el Hamiltoniano del CSM recurrimos al oscilador armónico, expandiendo en la base de este:

$$\Psi_{nlm}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2(\frac{n-l}{2})!(2\nu)^{l+\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{n+l+3}{2})}} r^l e^{-\nu r^2} L_{\frac{n-l}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(2\nu r^2) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.29)$$

Expresando la base. $|\chi\Omega\rangle = \sum_{n,l,j,m} C_{n,\frac{1}{2},l,j,m}^\Omega |n, \frac{1}{2}, l, j, m\rangle$ facilita los calculos de los elementos de matriz.

Usando la base del oscilador armónico los elementos de matriz del hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) + V_{so,r} + V_C(\vec{r}) \quad (2.30)$$

Nos enfocaremos en el caso más sencillo es decir un neutrón, se obtuvieron las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} & \langle n, \frac{1}{2}, l, j, m | V(\vec{r}) | n', \frac{1}{2}, l', j', m' \rangle = \\ & V_0 \sum_{\lambda\mu} \langle n, l | f_\lambda(r) | n', l' \rangle \sum_{i=1}^k Y_\lambda^{*\mu}(\theta_i, \phi_i) \times \\ & \langle \frac{1}{2}, l, j, m | Y_\lambda^\mu(\theta, \phi) | \frac{1}{2}, l', j', m' \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & \langle n, \frac{1}{2}, l, j, m | V_{so}(\vec{r}) | n', \frac{1}{2}, l', j', m' \rangle = \\ & V_{0,so} \frac{1}{2} \left[j'(j'+1) - \frac{3}{4} - l'(l'+1) \right] \sum_{i=1}^k Y_\lambda^{*\mu}(\theta_i, \phi_i) \\ & \times \sum_{\lambda,\mu} \langle n, l | (-2\alpha f_\lambda(r) + \frac{\lambda}{r^2} f_\lambda(r) + \frac{2\alpha\beta}{r} f_{\lambda+1}(r)) | n', l' \rangle \\ & \times \langle \frac{1}{2}, l, j, m | Y_\lambda^\mu(\theta, \phi) | \frac{1}{2}, l', j', m' \rangle \end{aligned} \quad (2.32)$$

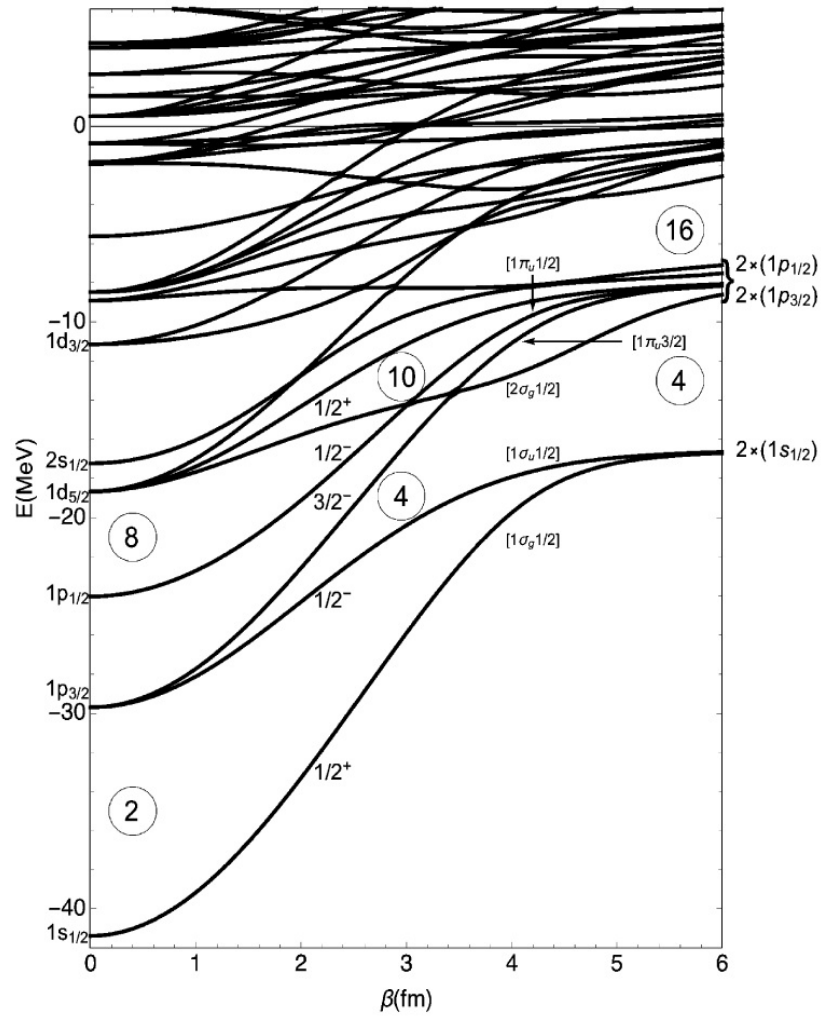


Figura 2.8: Niveles energéticos de un neutrón en un núcleo de simetría Z_2 en función de β

A continuacion nos enfocaremos en el caso del ${}^9\text{Be}$, puesto que en los siguientes capítulos se mostrará el desarrollo de este modelo para el caso ${}^{10}\text{Be}$. Para el ${}^9\text{Be}$ los niveles energéticos se comportan como se observa en la figura 2.8, en este cálculo $V_0 = 32\text{MeV}$, $V_{0,so} = 27.5\text{Mevf}^2$ y $\alpha = 0.0511\text{fm}^{-1}$.

Podemos observar como en el límite $\beta = 0$ regresamos a los niveles energéticos de un modelo de capas esférico y pueden ser clasificados con los mismos números cuánticos, al incrementar el valor de β los niveles se separan. Debido a la simetría axial del potencial podemos caracterizar estos niveles por la proyección respecto al eje de simetría, llamemosle eje z , y estos niveles estaran caracterizados por la proyección del momento angular respecto a este eje, llamemos a este número K , todos estos niveles serán doblemente degenerados, $\pm K$, al ser proyecciones cada nivel puede ser etiquetado por su nivel de origen en el límite esférico, pues cada j se desdobra en sus proyecciones $K = j, j - 1, j - 2, \dots, \frac{1}{2}$.

Para finalizar este capítulo presentamos las energías calculadas con el ajuste de $\beta = 1.82$ para los primeros cinco niveles.

$$\begin{aligned}
 1s_{1/2} \quad K \rightarrow \frac{1}{2}^+ &= -10.38\text{MeV} \\
 1p_{3/2} \quad K \rightarrow \frac{1}{2}^- &= -3.8071\text{MeV} \\
 1p_{3/2} \quad K \rightarrow \frac{3}{2}^- &= -1.7481\text{MeV} \\
 1p_{1/2} \quad K \rightarrow \frac{1}{2}^- &= 0.3482\text{MeV} \\
 1d_{5/2} \quad K \rightarrow \frac{1}{2}^+ &= 1.3837\text{MeV}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Capítulo 3

Niveles Energéticos

El CSM describe sistemas $k\alpha + x$, en el capítulo anterior se mostraron los resultados de $k = 2$ y un nucleón que en este caso era un neutrón, es decir el ${}^9\text{Be}$, si queremos además agregar un segundo nucleon, debemos tomar en cuenta además la interacción entre nucleones, desde el modelo de la gota líquida se tienen datos de que los núcleos con nucleones acoplados tienen cierta estabilidad extra, están favorecidos. Una primera aproximación entonces será agregar un potencial de acoplamiento.

La interacción de acoplamiento ha sido desarrollada y estudiada ampliamente para modelos como el nuclear Shell Model así como para el modelo de Nilsson [20, 21, 22], antes de entrar en la descripción y tratamiento algebraico daremos una descripción intuitiva.

El potencial de acoplamiento actúa sobre pares de nucleones siempre que estos tengan espín o momento angular antiparalelo, este potencial favorece esos estados, bajo esta descripción son estados de menor energía que los no acoplados. En el caso en que no hay posibilidad de acoplamiento el potencial no contribuye, también podemos describir casos mixtos con N partículas de las cuales solamente una fracción, por obviamente, se hallan acopladas.

Este potencial se usa mucho como una contribución a los single particle models, como una manera de describir interacciones entre partículas. Este potencial permite calcular fácilmente las interacciones de manera muy efectiva, pues solamente toma en cuenta la cantidad de partículas y su proyección de momento angular.

3.1. Pairing Potential

El potencial es tal que aniquila un par de partículas y crea otro par, no de manera arbitraria, las parejas son un estado y su correspondiente contraparte bajo inversión temporal, esta es una manera bastante general de describir estados que pueden acoplarse o aparearse.

Una manera mas intuitiva de visualizar este concepto es, por ejemplo el espin, si tenemos una partícula con espin $\frac{1}{2}$ y proyección positiva, bajo una inversión temporal el espin total no cambia pero cambia el signo de la proyección $-\frac{1}{2}$. Sean a_μ^\dagger y $a_{\bar{\mu}}^\dagger$ los operadores de creación de estos estados, donde $\bar{\mu}$ representa esta inversion temporal, el potencial de apareamiento lo podemos escribir como:

$$V_{pair} = -G \sum_{\mu, \nu} a_\mu^\dagger a_{\bar{\mu}}^\dagger a_\nu a_{\bar{\nu}} \quad (3.1)$$

Donde G es una constante que define la magnitud de la interacción, definimos los operadores

$$Q_+(\mu) = a_\mu^\dagger a_{\bar{\mu}}^\dagger \quad Q_-(\nu) = a_\nu a_{\bar{\nu}} \quad (3.2)$$

Algunas veces conocidos como operadores de creación y aniquilación de cuasipartículas, porque actúan como operadores de creación y aniquilación de pares, si definimos además

$$Q_0(\mu) = \frac{a_\mu^\dagger a_\mu - a_{\bar{\mu}} a_{\bar{\mu}}^\dagger}{2} \quad (3.3)$$

Podemos escribir el álgebra de $SU(2)$

$$[Q_+(a), Q_-(b)] = 2\delta_a^b Q_0(a) \quad (3.4)$$

$$[Q_0(a), Q_\pm(b)] = \pm\delta_a^b Q_\pm(a) \quad (3.5)$$

En la base de la interacción de pairing, los eigenestados se pueden construir de la siguiente forma

$$|a\rangle = Q_+(a) |0\rangle \quad \langle b| = \langle 0| Q_-(b) \quad (3.6)$$

Para terminar de caracterizar esta interacción, debemos tomar en cuenta no solo los pares de partículas acoplados, también los niveles disponibles

que pueden ocupar llamemosles Ω además de la cantidad de partículas no acopladas, está en la literatura se conoce como seniority o señoridad y suele usarse la letra ν .

Las eigenfunciones pueden entonces construirse de manera más general:

Para funciones con N nucleones todos acoplados y por lo tanto $\nu = 0$ tenemos

$$|\Psi^0\rangle = \prod_{\mu=1}^{\frac{N}{2}} Q_+(\mu) |0\rangle \quad (3.7)$$

Si tenemos un par no acoplado es decir $\nu = 2$

$$|\Psi_{\alpha_1, \alpha_2}^2\rangle = \prod_{\mu \neq \alpha_1, \alpha_2}^{\frac{N}{2}-1} Q_+(\mu) a_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger |0\rangle \quad (3.8)$$

Así en general tenemos la expresión para N nucleones de los cuales ν están desacoplados:

$$|\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu}^\nu\rangle = \prod_{\mu \neq \alpha_1, \dots, \alpha_\nu}^{\frac{N-\nu}{2}} Q_+(\mu) \prod_{i=1}^{\nu} a_{\alpha_i}^\dagger |0\rangle \quad (3.9)$$

Los elementos de matriz del Hamiltoniano pueden expresarse por completo en término de los operadores de creación y aniquilación,

$$\langle H_{pair} \rangle = -G \sum_{b,c>0} \langle a | Q_+(b)Q_-(c) | d \rangle = -G \sum_{b,c>0} \langle 0 | Q_-(a)Q_+(b)Q_-(c)Q_+(d) | 0 \rangle \quad (3.10)$$

Las relaciones de conmutación del algebra $SU(2)$ nos permite calcular la expresion algebraica, en este caso.

$$\langle H_{pair} \rangle = -G \sum_{b,c>0} \delta_a^b \delta_c^d \quad (3.11)$$

En el apéndice se muestran las expresiones obtenidas para más pares de partículas acopladas

3.2. Elementos de Matriz

Aquí presentamos los elementos de matriz obtenidos, es importante recordar que hablamos exclusivamente de la interacción de acoplamiento, en la

Para el caso de un par de nucleones no acoplados y un par si acoplado usamos la ecuación (3.8) y las propiedades de los operadores de creación y aniquilación para calcular los elementos de matriz. En este caso los neutrones no acoplados nos permiten escribir el resultado en una serie de matrices idénticas, este resultado es casi inmediato basta con escribir las bases y el potencial.

En el caso $N=4$ $\Omega=4$ $\nu=2$ obtenemos veinticuatro matrices idénticas de cuatro por cuatro

$$\begin{pmatrix} -G & -G \\ -G & -G \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

y para el caso $N=6$ $\Omega=5$ $\nu=2$ Tenemos cuarenta matrices idénticas de tres por tres

$$\begin{pmatrix} -2G & -G & -G \\ -G & -2G & -G \\ -G & -G & -2G \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Finalmente en $N=6$ $\Omega=5$ $\nu=4$ Obtenemos una matriz diagonal de cinco por cinco.

$$\begin{pmatrix} -G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

3.3. Acoplamiento + CSM

La interacción entre el CSM y la interacción de apareamiento está presente únicamente en estados de proyección de momento angular sobre el eje de simetría, $K = 0$, pues como vimos en el capítulo anterior el momento angular total no es un buen número cuántico, pero la proyección de este sobre el eje de simetría si lo es, dos neutrones llenan un estado $K = 0$ solamente si están acoplados.

Para ilustrar partiremos del caso de dos neutrones, acoplados, con tres niveles disponibles, es decir $N = 2$, $\Omega = 3$, $\nu = 0$.

Asumimos que los primeros dos niveles están ocupados por los neutrones pertenecientes a las partículas alfa que estructuran los cúmulos. Los siguientes tres niveles disponibles serían E_3, E_4, E_5 , si no tuvieramos ningún tipo de interacción la energía de un estado con dos neutrones en , digamos el primer nivel libre sería simplemente $2E_3$, tomando en cuenta la interacción de acoplamiento los eigenvalores vienen de diagonalizar la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -G + 2E_3 & -G & -G \\ -G & -G + 2E_4 & -G \\ -G & -G & -G + 2E_5 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Usando los resultados experimentales del Berilio nueve para las últimas tres capas (3,4,5).

$$\begin{aligned} E_1 &= 1s_{1/2} & K \rightarrow \frac{1}{2}^+ &= -10.38 MeV \\ E_2 &= 1p_{3/2} & K \rightarrow \frac{1}{2}^- &= -3.8071 MeV \\ E_3 &= 1p_{3/2} & K \rightarrow \frac{3}{2}^- &= -2.38 MeV \\ E_4 &= 1p_{1/2} & K \rightarrow \frac{1}{2}^- &= 1.33 MeV \\ E_5 &= 1d_{5/2} & K \rightarrow \frac{1}{2}^+ &= 0.45 MeV \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se muestra a continuación los distintos casos:

La figura 3.1 nos muestra el resultado de $N = 2$, $\Omega = 3$, $\nu = 0$, caso que usamos de ejemplo. La notación que se usa para nombrar las funciones en estas gráficas es, dos partículas en el nivel E_3 son nombradas como $2E_3 \rightarrow 33$ Los niveles energéticos están en función del parámetro G que determina la intensidad de la interacción de apareamiento, en este caso se puede ver como el nivel de menor energía se separa de los siguientes dos.

La figura 3.2 ilustra el caso de cuatro partículas acopladas distribuidas en cuatro niveles, podríamos decir que estamos tomando un par de neutrones del cluster y, por lo tanto, el estado E_2 queda disponible lo que corresponde al caso $\Omega = 4$ $N = 4$ $\nu = 0$. Aquí se observa como los niveles se desdobl原因 en tres bandas.

Finalmente, la figura 3.3 todos los neutrones están sujetos a la interacción de

acoplamiento y los cinco niveles energéticos están disponibles. Aunque no es drástica la diferencia, se puede apreciar la formación de cuatro bandas

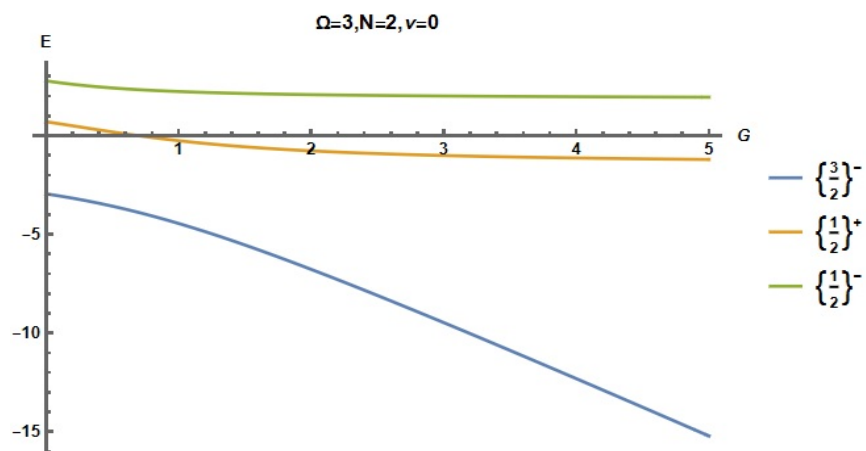


Figura 3.1: Interacción de acoplamiento para dos partículas acopladas distribuidas en tres niveles

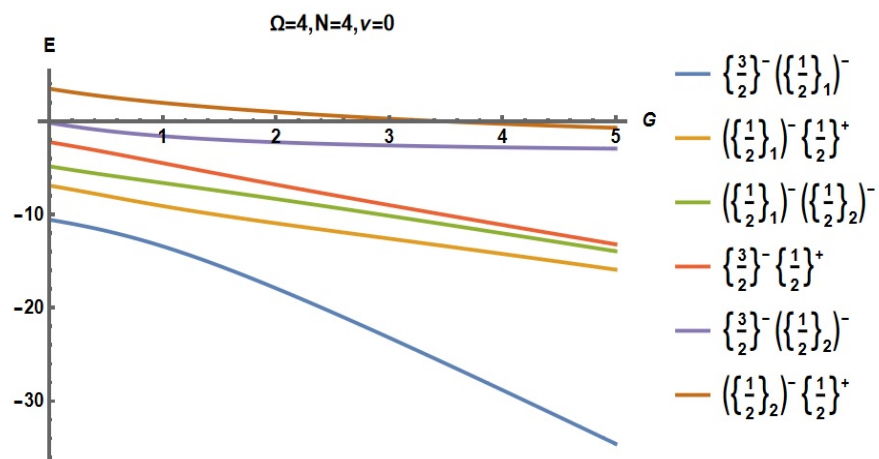


Figura 3.2: Interacción de acoplamiento para cuatro partículas acopladas distribuidas en cuatro niveles

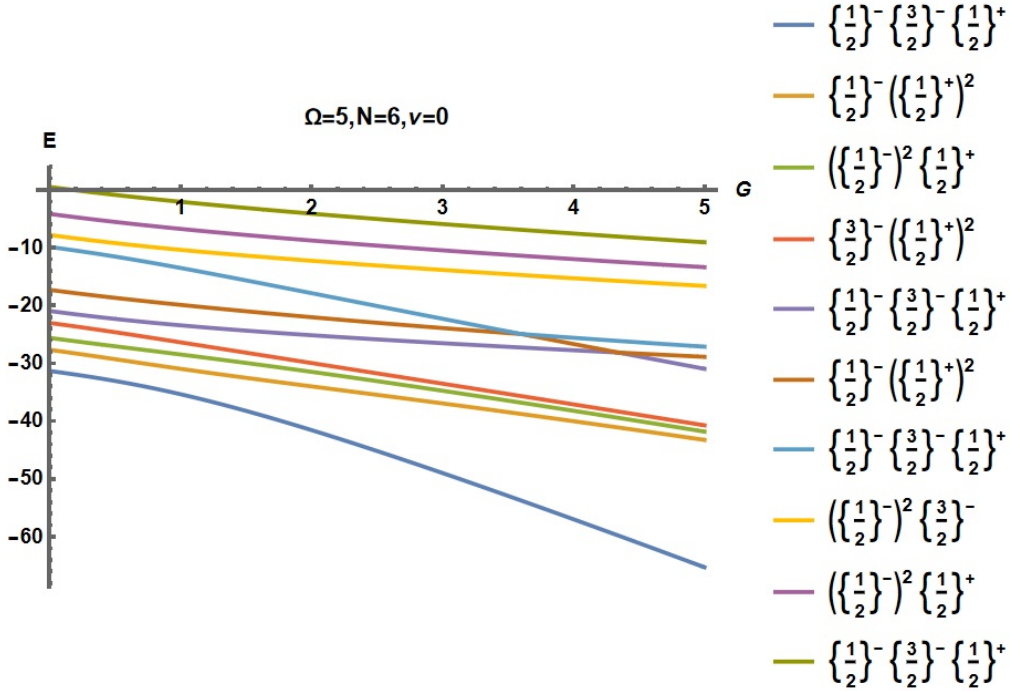


Figura 3.3: Interacción de acoplamiento para seis partículas acopladas distribuidas en cinco niveles

Las siguientes figuras, 3.4, 3.5 muestran el caso en que la señoría, o seniority es igual a dos, es decir tenemos un par de neutrones no acoplados, que deberán ocupar niveles distintos. Para mantener las etiquetas de las gráficas en una notación comprensible, nos basaremos en la notación de la ecuación 3.19 (técnicamente hablando es una tabla pero esta dentro de la numeración de las ecuaciones) donde escribiremos $5 = E_5$ etcétera.

La figura 3.4 corresponde al caso $\Omega = 4$ $N = 4$ $\nu = 2$, se observa claramente que los doce estados forman dos bandas distintas. En la figura 3.5 correspondiente al caso $\Omega = 5$ $N = 6$ $\nu = 2$ no es tan claro al principio, pero conforme la interacción aumenta se observa también la separación en dos bandas.

Finalmente en la figura 3.6 se ilustra el caso de $\Omega = 5$ $N = 6$ $\nu = 4$ debido a la cantidad de partículas no acopladas la interacción de acoplamiento

afecta de la misma manera a todos los estados por lo que cualitativamente no hay una diferencia relativa entre cada estado al aumentar la interacción de acoplamiento.

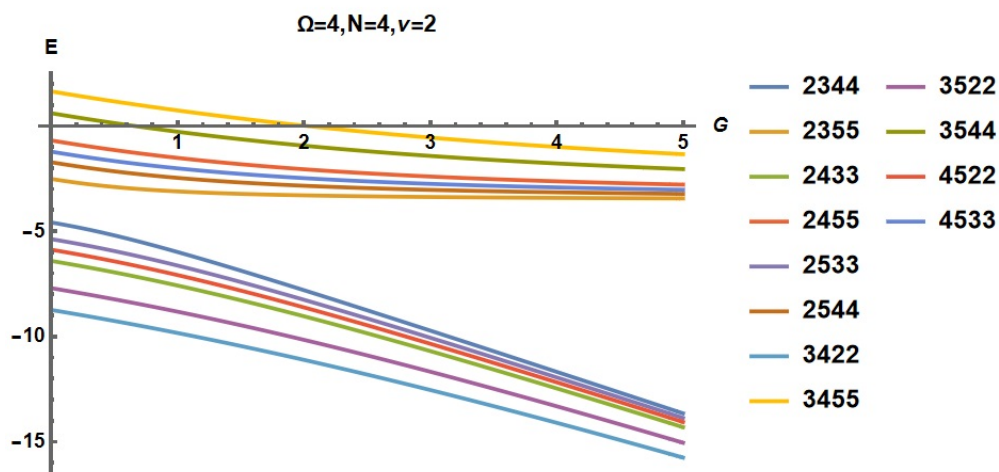


Figura 3.4: Interacción de acoplamiento para dos partículas acopladas, y dos desacopladas, distribuidas en cuatro niveles

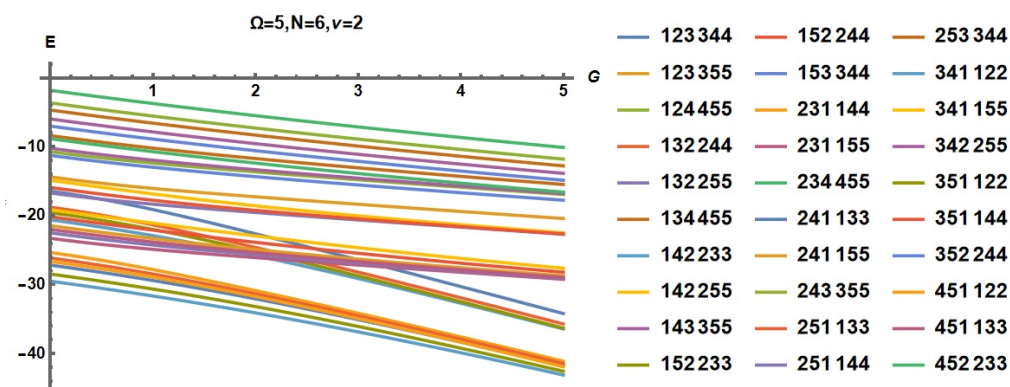


Figura 3.5: Interacción de acoplamiento para cuatro partículas acopladas, y dos desacopladas, distribuidas en cinco niveles

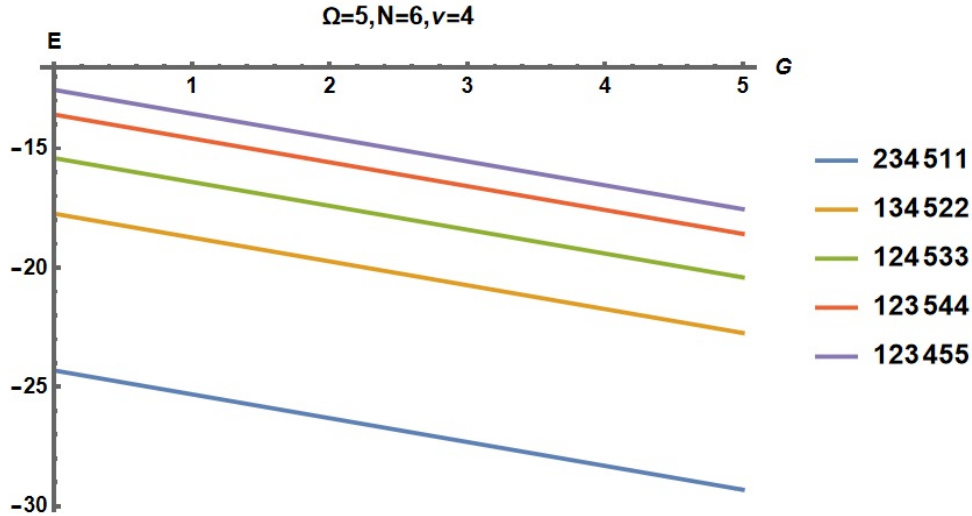


Figura 3.6: Interacción de acoplamiento para dos partículas acopladas, y cuatro desacopladas, distribuidas en cinco niveles

Ahora vamos a comparar el efecto que tienen las partículas no acopladas de manera cualitativa, dejando N y Ω fijos.

En las figuras 3.7 y 3.8 y 3.9 tenemos los casos de $\Omega = 4$ $N = 4$ y $\Omega = 5$ $N = 6$ respectivamente, podemos observar en la figura 3.7 como los niveles se desdoblan, pero las bandas energéticas mantienen la misma estructura, si bien el nivel de menor energía no es accesible al desacoplar un par de partículas, este comportamiento es de esperarse, pues los estados acoplados son más estables bajo esta interacción, estados con partículas desacopladas son menos estables.

La figura 3.8 reafirma esta interpretación, vemos que con un par de partículas no acopladas pasamos de tener tres niveles a dos niveles desdoblados, y al aumentar a dos pares desacoplados, tenemos solamente una banda energética desdoblada aún más.

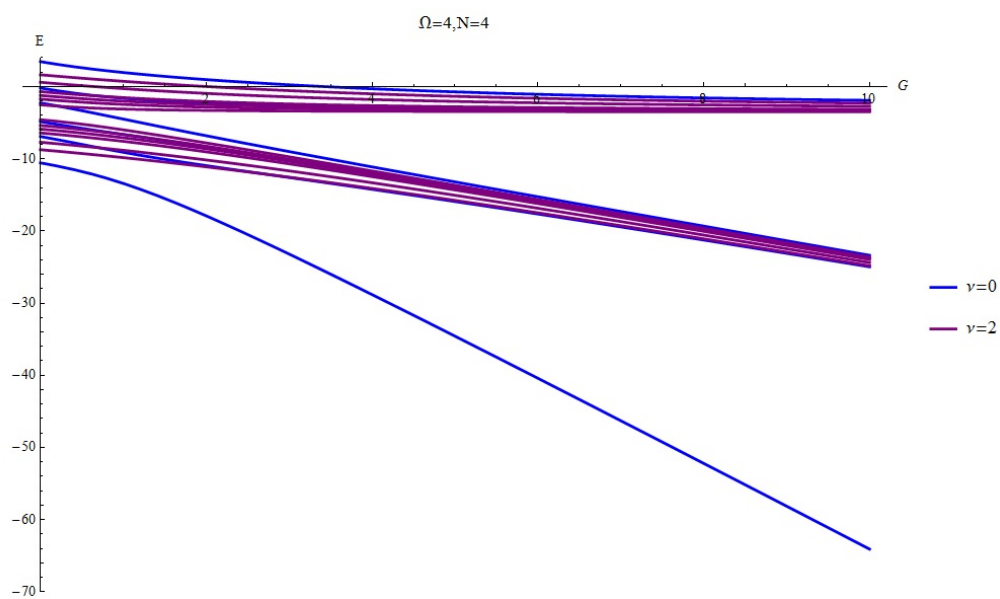


Figura 3.7: El efecto de desacoplamiento de dos partículas para el caso $\Omega = 4 N = 4$

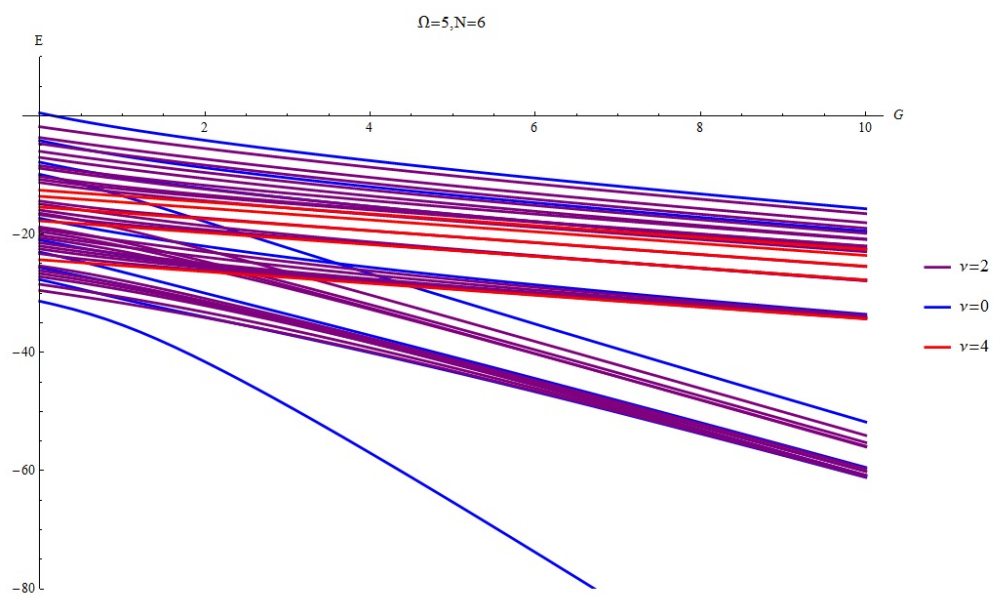


Figura 3.8: El efecto de desacoplamiento de partículas para el caso $\Omega = 5 N = 6$

Finalmente, para no dejar nada al aire vamos a dejar fija la cantidad de

partículas desacopladas para comparar el efecto de los niveles y cantidad de partículas disponibles, en la figura 3.9 tenemos todas las partículas acopladas, aunque no tan claro como en el caso anterior, cuando G es más grande se observa la misma estructura de bandas, los mismos niveles.

Estamos poniendo un límite en los niveles energéticos superiores, eso quiere decir que partimos de E_5, E_4, E_3 y Ω aumenta cuando permitimos que las partículas estén en E_2 y así sucesivamente.

La figura 3.10 es un caso análogo a la figura 3.9 con 2 partículas desacopladas. El comportamiento es análogo aunque es importante mencionar que a mayor cantidad de niveles las bandas se vuelven más anchas.

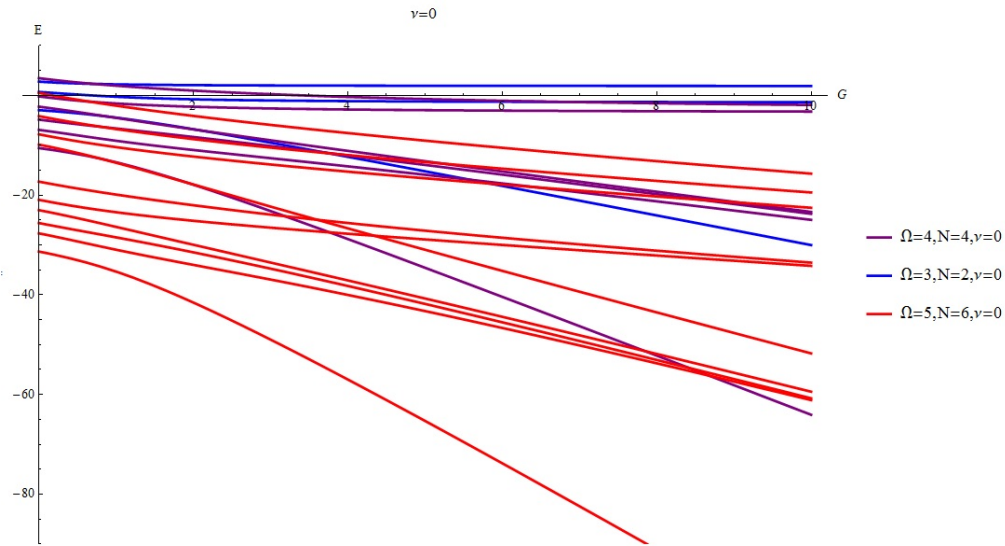


Figura 3.9: Distintos casos con todas las partículas acopladas; $\nu = 0$

3.4. Interacción de Delta Superficial

La Interacción Delta Superficial, que abreviaremos SDI por sus siglas en inglés es la siguiente alternativa que utilizaremos para describir la interacción entre partículas. Para darnos una idea intuitiva consideremos una interacción delta:

$$-V\delta(x - x_0) \quad (3.20)$$

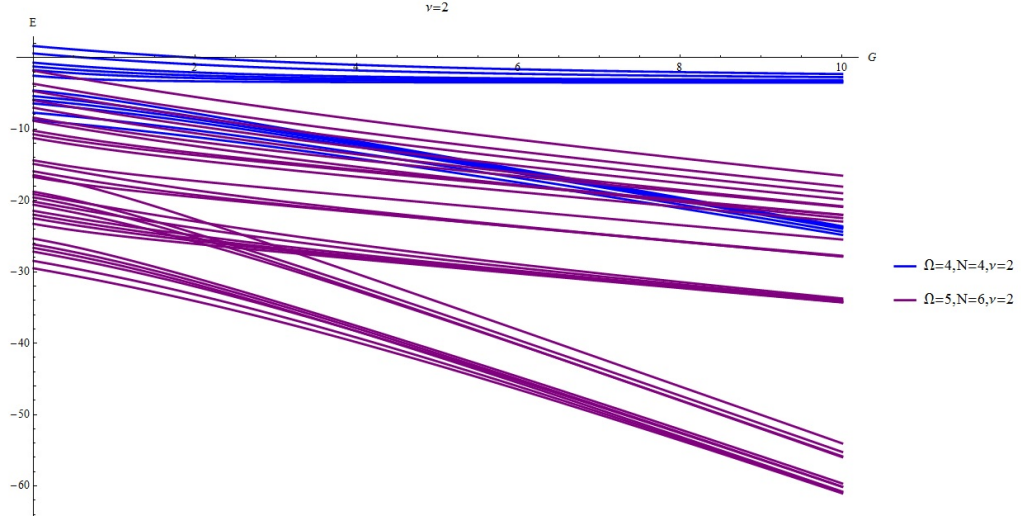


Figura 3.10: Distintos casos con dos partículas desacopladas; $\nu = 2$

Este tipo de interacciones se desvanecen para cualquier valor de x exepcto en x_0 y tiene una magnitud V . De manera análoga la SDI viene dada por la siguiente fórmula:

$$V_{SDI} = -V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(r_1 - R_0) (1 + \alpha \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (3.21)$$

Aquí vemos que el primer término es idéntico al anterior, y los nucleones solo interactúan cuando se encuentran en la misma posición. Su movimiento está delimitado a un radio r_0 de ahí el segundo término de esta ecuación y finalmente el último término viene dado por la simetría de isospin entre nucleones, es una simetría que tomaremos en cuenta en esta interacción que nos ayudara a delimitar las energías permitidas. Aquí la magnitud de esta interacción esta determinada por el término V_0

Antes de continuar, podemos observar que este potencial tiene una simetría aparentemente esférica, delimitada a una esfera de radio r_0 ; sin embargo, este problema es facilmente evitado cuando tomamos en cuenta como aplicamos esto al CSM, como vimos en el capítulo 2, resolvemos el CSM en la base del oscilador armónico, es decir cada estado está reescrito de la siguiente manera:

$$|K\rangle = \sum_{n,l,j,m=K} C_{n,l,j,m}^K |n, l, j, m\rangle \quad (3.22)$$

Donde la única restricción es que debido a la simetría del problema debemos usar estados del oscilador donde $m = K$.

Así, calculando los elementos de matriz en la base del oscilador armónico, lo cual permite una descripción adecuada de la interacción en el CSM.

$$\begin{aligned} & \langle K_1 | \langle K_2 | V_{SDI} | K_3 \rangle | K_4 \rangle \\ &= \sum_{n_1, l_1, j_1} \sum_{n_2, l_2, j_2} \sum_{n_3, l_3, j_3} \sum_{n_4, l_4, j_4} C_{n_1, l_1, j_1, m_1}^{K_1} C_{n_2, l_2, j_2, m_2}^{K_2} C_{n_3, l_3, j_3, m_3}^{K_3} C_{n_4, l_4, j_4, m_4}^{K_4} \\ & \times \langle n_1, l_1, j_1, m_1 | \langle n_2, l_2, j_2, m_2 | V_{SDI} | n_3, l_3, j_3, m_3 \rangle | n_4, l_4, j_4, m_4 \rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para hacer estos cálculos hacemos uso de los símbolos $3 - J$ de Wigner o equivalentemente de los coeficientes de Clebsch-Gordan, en las siguientes expresiones usaremos los símbolos 3-J.

La expresión obtenida es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \sum_{n_i, l_i, j_i, J} C_{n_1, l_1, j_1}^{\mu_1} C_{n_2, l_2, j_2}^{\mu_2} C_{n_3, l_3, j_3}^{\mu_3} C_{n_4, l_4, j_4}^{\mu_4} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)} \\ & (2J+1) \frac{1 + (-1)^{l_1+l_2+l_3+l_4}}{2} \frac{1 - (-1)^{J+1+l_3+l_4}}{2} (-1)^{j_1+l_2+j_3+l_4+1} \\ & \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ m_3 & m_4 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} F0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

En el caso en que hay pairing $M = 0$ usamos la siguiente identidad $C_{n_1, l_1, j_1, m_1}^{\bar{\mu}_1} = -1^{j_1+m_1} C_{n_1, l_1, j_1, -m_1}$ y obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \sum_{n_i, l_i, j_i, J} C_{n_1, l_1, j_1}^{\mu_1} C_{n_2, l_2, j_2}^{\mu_2} C_{n_3, l_3, j_3}^{\mu_3} C_{n_4, l_4, j_4}^{\mu_4} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)} \\ & (2J+1) \frac{1 + (-1)^{l_1+l_2+l_3+l_4}}{2} \frac{1 - (-1)^{J+1+l_3+l_4}}{2} (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+l_2+l_4+m_2+m_4+1} \\ & \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ m_3 & -m_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & -m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} F0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esta expresión expresa la parte angular explícitamente, el término F_0 expresa la parte radial, está dada por la siguiente expresión:

$$F_0 = -\frac{V_0}{4\pi} R_0^2 R_{n1,l1}^*(R_0) R_{n2,l2}^*(R_0) R_{n3,l3}(R_0) R_{n4,l4}(R_0) \quad (3.26)$$

Donde el término $R_{n,l}(r)$ viene de la solución radial para el oscilador armónico tridimensional.

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\frac{2^{\frac{n-l}{2}}!}{\Gamma[\frac{n+l+3}{2}] \alpha^3}} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^l e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}} L_{\frac{n-l}{2}}^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2}{\alpha^2}\right) \quad (3.27)$$

Finalmente, al computar esta interacción y comparando con los resultados experimentales podemos determinar el valor de V_0 , dejaremos esto para la parte de los resultados.

Capítulo 4

Transiciones Electromagnéticas

4.1. Transiciones electromagnéticas

Las transiciones electromagnéticas juegan un rol muy importante en la física nuclear. El estudio del decaimiento nuclear via decaimiento gamma presenta una prueba de los modelos nucleares. Una vez que se han obtenido las eigenfunciones de un hamiltoniano y se han determinado constantes comparando con las energías experimentales, se ponen a prueba las funciones de onda obtenidas de estos con los operadores de transición. El estudio de los decaimientos gamma permite determinar la paridad y el spin de los estados excitados. En el presente trabajo se estudia el operador de transición reducida $B(\lambda; J_i^{P_i} \rightarrow J_f^{P_f})$.

Dentro del CSM tendrán mucho peso la parte de un cuerpo (SP por sus siglas en inglés Single Particle) un orden de magnitud más grande que la interacción de dos partículas, en el caso que analizaremos serán neutrones, sin embargo, estas permiten transiciones entre distintas bandas, lo cual está prohibido en la parte SP.

Primero tenemos que definir las funciones de onda en el sistema de laboratorio. Hasta ahora se trabajó en el sistema en centro de masa donde el momento angular total no es un buen número cuántico, (aunque la proyección K sobre el eje de simetría sí, debido a la configuración geométrica) en el sistema de laboratorio, si contamos con los números cuánticos de paridad P y momento angular I además de la proyección K.

Considerando al Berilio diez como un cúmulo de dos partículas alfa del CSM más dos neutrones, estos neutrones ocuparan los niveles energéticos disponibles, asumiendo que los neutrones constituyentes de las partículas alfa ocupan los primeros niveles energéticos del CSM, éstos neutrones se encuentran en niveles caracterizados por la proyección K_i y paridad P_i , por lo tanto, los estados descritos tendrán una proyección $K = K_1 + K_2$ y paridad $P = P_1 P_2$ además del ya mencionado momento angular total. La función de onda deberá a su vez ser invariante ante una transformación $R_i^{-1} R_e$, donde R_e actúa sobre la parte rotacional de la función de onda:

$$R_e D_{M,K}^I(\omega) = e^{-i\pi I_2} D_{M,K}^I(\omega) = (-1)^{I+K} D_{M,-K}^I(\omega) \quad (4.1)$$

Aquí $D_{M,K}^I(\omega)$ representa las funciones de Wigner. La parte R_i^{-1} es una transformación sobre la parte intrínseca de la función, Invirtiendo la proyección K_i de éstas, si escribimos la parte intrínseca de la función de onda en términos de la base acoplada:

$$\begin{aligned} \Phi_{K_1, K_2}(\sigma) &= \sum_{n_i, l_i, j_i} C_{n_1, l_1, j_1}^{K_1} C_{n_2, l_2, j_2}^{K_2} (1 + \delta_1^2) \\ &\sum_{J, K} \langle j_1, K_1, j_2, K_2 | J, K \rangle (n_1, n_2, l_1, l_2, j_1, j_2) J, K \end{aligned} \quad (4.2)$$

Entonces, aplicando el operador R_i^{-1} obtenemos

$$\begin{aligned} R_i^{-1} \Phi_{K_1, K_2}(\sigma) &= - \sum_{n_i, l_i, j_i} (-1)^{j_1+K_1} C_{n_1, l_1, j_1}^{K_1} (-1)^{j_2+K_2} C_{n_2, l_2, j_2}^{K_2} (1 + \delta_1^2) \\ &\sum_{J, K} \langle j_1, -K_1, j_2, -K_2 | J, -K \rangle (n_1, n_2, l_1, l_2, j_1, j_2) J, -K \end{aligned} \quad (4.3)$$

La función de onda que describe el ^{10}Be dentro del CSM en el sistema de referencia del laboratorio es:

$$| K_1^{P_1} K_2^{P_2}; I^P M K \rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}} \psi_\nu(\tau) \Phi_{K_1, K_2}(\sigma) (1 + R_i^{-1} R_e) D_{M,K}^I(\omega) \quad (4.4)$$

Para calcular las transiciones separaremos el operador de transición en dos partes, la parte colectiva y la parte SP

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^c(\tau) + T_{\mu\nu}^{sp}(\sigma) \quad (4.5)$$

Los elementos de matriz del operador de transición son:

$$\begin{aligned}
A &= \langle K_1^{P1} K_2^{P2}; I^P K M | T_{\mu\nu} | K_3^{P3} K_4^{P4}; I^{P'} K' M' \rangle \\
&= \frac{\sqrt{(2I+1)(2I'+1)}}{16\pi^2} \int d\tau d\sigma d\omega \psi_\nu^*(\tau) \Phi_{K_1, K_2}^*(\sigma) D_{M, K}^{*I}(\omega) \\
&\quad (1 + R_i^{-1} R_e) \sum_{\mu} D_{\mu\nu}^\lambda(\omega) [T_{\lambda\nu}^{\prime c}(\tau) + T_{\lambda\nu}^{\prime sp}(\sigma)] \\
&\quad (1 + R_i^{-1} R_e) D_{M', K'}^{I'}(\omega) \Phi_{K_3, K_4}(\sigma) \psi_{\nu'}(\tau) \\
&= A^c + A^{sp} \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Es importante hacer notar que $\sum_{\mu} D_{\mu\nu}^\lambda(\omega) [T_{\lambda\nu}^{\prime c}(\tau) + T_{\lambda\nu}^{\prime sp}(\sigma)]$ es la transformación del operador de transición al sistema intrínseco. El resultado obtenido es:

$$\begin{aligned}
A^c &= \delta_{K_1}^{K3} \delta_{K_2}^{K4} \delta_{P_1}^{P3} \delta_{P_2}^{P4} \sqrt{\frac{(2I'+1)}{(2I+1)}} \\
&\langle I', M', \lambda, \mu | I, M \rangle \langle I', K', \lambda, K - K' |, I, K \rangle G_{\nu, \nu'}^c \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{sp} &= \delta_{\nu'}^{\nu} \sqrt{\frac{(2I'+1)}{(2I+1)}} \\
&\langle I', M', \lambda, \mu | I, M \rangle \langle \langle I', K', \lambda, K - K' |, I, K \rangle G_{K_1, K_2, K_3, K_4}^{sp} \\
&\quad + (-1)^{I+K} \langle I', K', \lambda, -K - K' |, I, -K \rangle H_{K_1, K_2, K_3, K_4}^{sp} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

En este caso $\lambda = 2$ los terminos G y H son:

$$G_{0,0}^c = (Ze)_c \beta^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \delta_{K-K'}^0 \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
G^{sp} &= \sum_{ni, li, ji} C_{n_1, l_1, j_1}^{K_1} C_{n_2, l_2, j_2}^{K_2} C_{n_3, l_3, j_3}^{K_3} C_{n_4, l_4, j_4}^{K_4} \\
&\sum_{J, K, J', K'} \langle j_1, K_1, j_2, K_2 | J, K \rangle \langle j_3, K_3, j_4, K_4 | J', K' \rangle \\
&\quad (1 + \delta_1^2)(1 + \delta_3^4) \langle J', K', 2, K - K' | J, K \rangle \\
&\quad \frac{\langle J || T_2^{\prime sp} || J' \rangle}{\sqrt{2I+1}} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{sp} = & \sum_{ni,li,ji} C_{n_1,l_1,j_1}^{K_1} C_{n_2,l_2,j_2}^{K_2} C_{n_3,l_3,j_3}^{K_3} C_{n_4,l_4,j_4}^{K_4} (-1)^{j_1+j_2+K_1+K_2} \\
& \sum_{J,K,J',K'} \langle j_1, -K_1, j_2, -K_2 | J, -K \rangle \langle j_3, K_3, j_4, K_4 | J', K' \rangle \\
& (1 + \delta_1^2)(1 + \delta_3^4) \langle J', K', 2, -K - K' | J, -K \rangle \\
& \frac{\langle J || T_2'^{sp} || J' \rangle}{\sqrt{2I+1}} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Donde el operador que estamos es el de las transiciones cuadrupolares.

$$T_{2,\mu}^{el} = \sum_i e_i' r_i^2 Y_{2,\mu}(\theta_i, \phi_i) \quad (4.12)$$

El elemento de matriz de este operador es:

$$\begin{aligned}
& \langle (n_1, l_1, j_1, n_2, l_2, j_2); J_1 | T_{2,\mu}^{el} | (n_3, l_3, j_3, n_4, l_4, j_4); J_2 \rangle = \\
& \sqrt{\frac{(2J_1+1)(2J_2+1)}{(1+\delta_{j_1}^{j_2} \delta_{l_1}^{l_2} \delta_{n_1}^{n_2})(1+\delta_{j_3}^{j_4} \delta_{l_3}^{l_4} \delta_{n_3}^{n_4})}} \\
& ((-1)^{j_1+j_4+J_1} \delta_{j_1}^{j_3} \delta_{l_1}^{l_3} \delta_{n_1}^{n_3} \begin{Bmatrix} j_2 & J_1 & j_1 \\ J_2 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} \langle n_2, l_2, j_2 || T_{el}^2 || n_4, l_4, j_4 \rangle \\
& + (-1)^{j_1+j_2+J_2} \delta_{j_2}^{j_4} \delta_{l_2}^{l_4} \delta_{n_2}^{n_4} \begin{Bmatrix} j_1 & J_1 & j_2 \\ J_2 & j_3 & 2 \end{Bmatrix} \langle n_1, l_1, j_1 || T_{el}^2 || n_3, l_3, j_3 \rangle \\
& + (-1)^{J_1+J_2+1} \delta_{j_1}^{j_4} \delta_{l_1}^{l_4} \delta_{n_1}^{n_4} \begin{Bmatrix} j_2 & J_1 & j_1 \\ J_2 & j_3 & 2 \end{Bmatrix} \langle n_2, l_2, j_2 || T_{el}^2 || n_3, l_3, j_3 \rangle \\
& + (-1)^{j_1+j_4} \delta_2^3 \delta_{j_2}^{j_3} \delta_{l_2}^{l_3} \delta_{n_2}^{n_3} \begin{Bmatrix} j_1 & J_1 & j_2 \\ J_2 & j_4 & 2 \end{Bmatrix} \langle n_1, l_1, j_1 || T_{el}^2 || n_4, l_4, j_4 \rangle) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

En esta expresión $\langle n_1, l_1, j_1 || T_{el}^2 || n_4, l_4, j_4 \rangle$ es el elemento reducido de matriz, dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& \langle n, l, j || T_{el}^2 || n', l', j' \rangle = \\
& \hat{e} \sqrt{\frac{5(2j+1)}{4\pi}} (-1)^{j-j'} \frac{1 + (-1)^{l+l'}}{2} \langle j, -\frac{1}{2}, 2, 0 | j', -\frac{1}{2} \rangle R_{n,l,n',l'} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Donde \hat{e} es la carga efectiva. Esta expresión separa la parte angular y la parte radial $R_{n,l,n',l'}$, está dada por la expresión:

$$\begin{aligned}
& R_{n,l,n',l'} = \\
& \frac{B_{n,l} B_{n',l'}}{8\nu} \sum_k^{\frac{n-l}{2}} \sum_{k'}^{\frac{n'-l'}{2}} a_{n,l}^k a_{n',l'}^{k'} \Gamma[\frac{2k+2k'+l+l'+5}{2}] \quad (4.15)
\end{aligned}$$

La parte radial está expresada en términos de los polinomios de Laguerre, los términos $B_{n,l}$ son las constantes que normalizan estos y los términos $a_{n,l}^k$ están relacionados a una expresión de estos polinomios en términos de una expansión polinomial:

$$B_{n,l} = \sqrt{\frac{2^{\frac{n-l}{2}}!}{\Gamma[n+l+\frac{3}{2}]}} \quad (4.16)$$

$$a_{n,l}^k = b_{\frac{n-l}{2}, l+\frac{1}{2}}^k \quad (4.17)$$

$$b_{n,\alpha}^k = (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} \quad (4.18)$$

Con todos estos elementos se calculan los elementos de matriz del operador reducido de transición.

$$\begin{aligned} & B(2; K_3^{P_3} K_4^{P_4}; I^{P'} K' \rightarrow K_1^{P_1} K_2^{P_2}; I^P K) \\ &= \left(\langle I', K', 2, K - K' | I, K \rangle (\delta_{K_1}^{K_3} \delta_{K_2}^{K_4} \delta_{P_1}^{P_3} \delta_{P_2}^{P_4} G_{0,0}^c + \delta_{\nu}^{\nu'} G^{sp}) \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{I+K} \langle I', K', 2, -K - K' | I, -K \rangle \delta_{\nu}^{\nu'} H^{sp} \right)^2 \quad (4.19) \end{aligned}$$

Capítulo 5

Resultados

Un modelo teórico es tan bueno como sus predicciones así como su capacidad de reproducir resultados experimentales, entre más general sea y menos constantes requiera ajustar mejor, ya que siempre podemos ajustar una curva a una serie de datos con suficientes iteraciones, pero un modelo con menos ajustes ab initio que predice los resultados obtenidos poseera una mejor representación de la física en cuestión, razones por las cuales la fenomenología es fundamental.

Pasaremos a poner a prueba el CSM comparando las energías obtenidas tanto con la interacción de Acoplamiento como con la interacción SD, estas ponen a prueba el hamiltoniano propuesto particularmente el potencial. Después pasaremos a las transiciones cuadrupolares, que ponen a prueba de manera más sensible las funciones de onda obtenidas.

5.1. Niveles energéticos en el ^{10}Be

Hasta ahora los resultados mostrados tanto por la interacción de Pairing como por la interacción SD han sido dados en el sistema de referencia intrínseco del núcleo, los datos experimentales son medidos obviamente en el sistema de referencia del laboratorio, donde la energía es la suma de la energía intrínseca con la energía rotacional:

$$E_{total} = E_{int} + \beta l(l + 1) \tag{5.1}$$

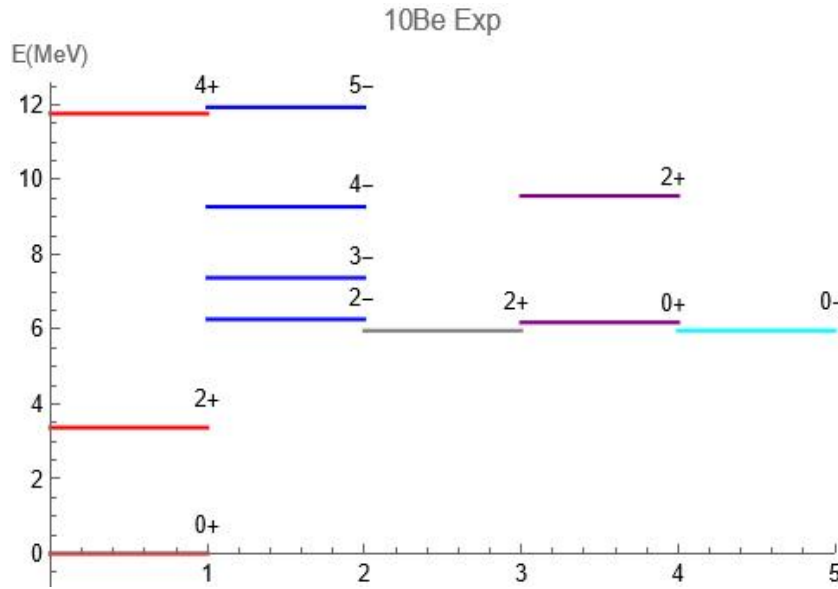


Figura 5.1: Valores Energéticos experimentales del ^{10}Be

el valor de β lo determinamos de los valores experimentales, la estructura energética medida para el ^{10}Be están en la figura 5.1 así como en el cuadro 5.1:

De estos resultados nos enfocaremos en los estados 0_1^+ , 0_2^+ , 2^+ , 2^- , 0^- . Esto se debe a que en el CSM asumimos que la estructura de cumulos de partículas alfa que contienen dos neutrones y dos protones ocupan los primeros dos niveles, que se pueden observar en la figura 2.8, los tres siguientes niveles disponibles son $\frac{3}{2}^-$, $\frac{1}{2}^-$ y $\frac{1}{2}^+$ cuyos valores experimentales obtenidos para el ^9Be están en el cuadro 5.2.

Con estos valores podemos construir los estados mencionados previamente y aplicando las interacciones construir las energías en el sistema intrínseco, finalmente pasando al sistema del laboratorio comparamos con los resultados experimentales, en las siguientes secciones se seguirá con detalle el procedimiento.

Estado	Valor (MeV)
0_1^+	0
2_1^+	3.368
4_1^+	11.76
2_1^-	6.263
3_1^-	7.371
4_1^-	9.27
5_1^-	11.93
2_3^+	5.958
0_2^+	6.179
2_2^+	9.56
0_1^-	5.96

Cuadro 5.1: Eigenestados energéticos del Berilio diez en terminos absolutos

Estado	Valor (MeV)
$\frac{3}{2}^-$	-2.39
$\frac{1}{2}^-$	1.33
$\frac{1}{2}^+$	0.45

Cuadro 5.2: Eigenestados energéticos del Berilio nueve no en terminos absolutos

5.2. Pairing interaction

El caso que nos interesa es $\Omega = 3$, $N = 2$ y $\nu = 0$ es decir tres niveles disponibles, con dos partículas acopladas. Como se explicó en la sección 3.3 la interacción de acoplamiento solo afecta a las partículas acopladas, por redundante que suene, por lo cual solo afecta los estados 0^+ estas energías están dadas por los eigenvalores de la matriz 3.18 y se observan en la figura 3.1, por comodidad repetiremos estas figuras

$$\begin{pmatrix} -G + 2E_3 & -G & -G \\ -G & -G + 2E_4 & -G \\ -G & -G & -G + 2E_5 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

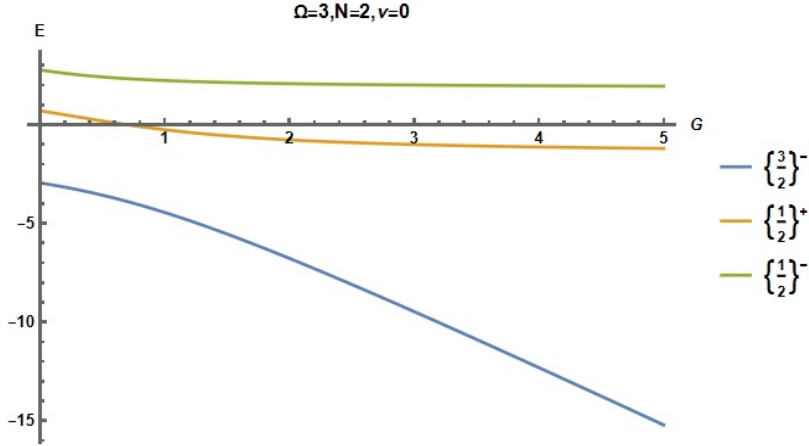


Figura 5.2: $\Omega = 3$ $N = 2$ $\nu = 0$

Una manera de ajustar el potencial de acoplamiento es basandonos en la diferencia entre los primeros ceros, en este caso la diferencia es de 6.179 MeV graficando la diferencia entre estos en función de G

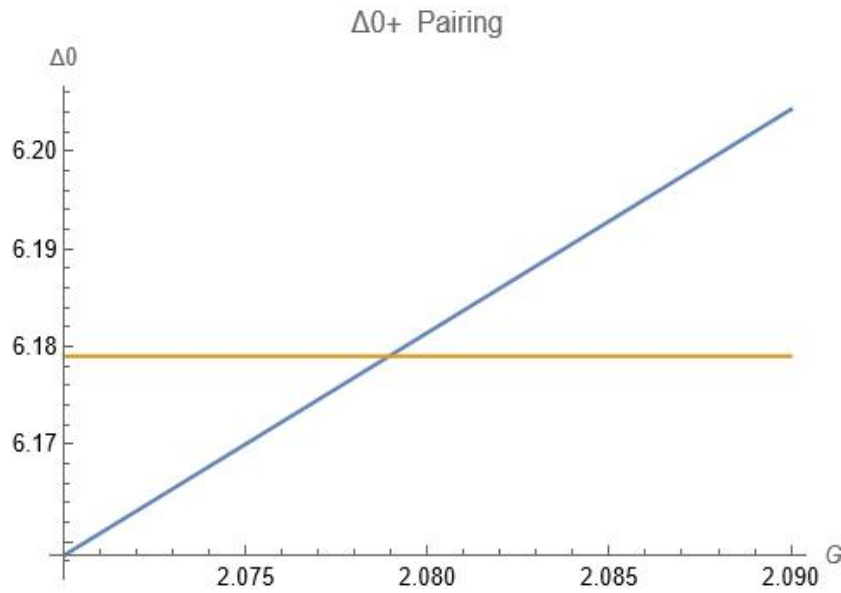


Figura 5.3: Diferencia entre los primeros ceros y la diferencia experimental

Nos permite determinar el valor de $G = 2.079 \text{ MeV}$ las siguientes figuras nos permiten ver la estructura obtenida y esta comparada con los datos experimentales:

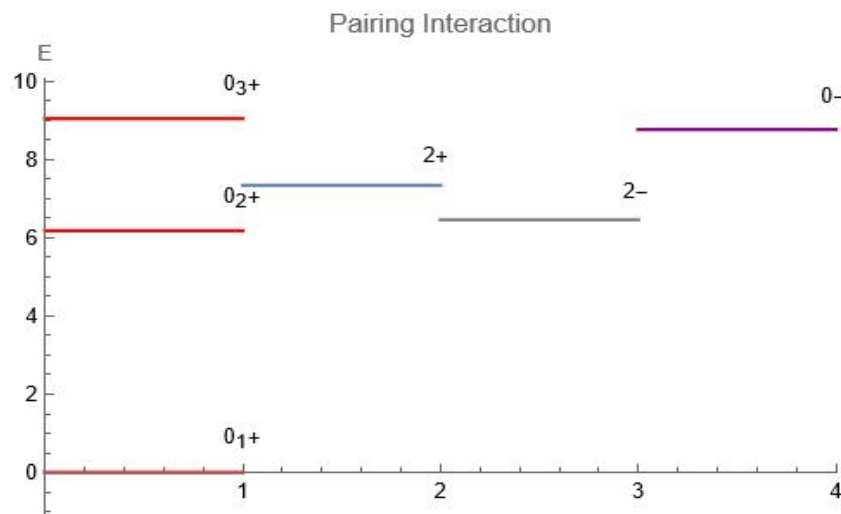


Figura 5.4: Estructura energética Pairing interaction

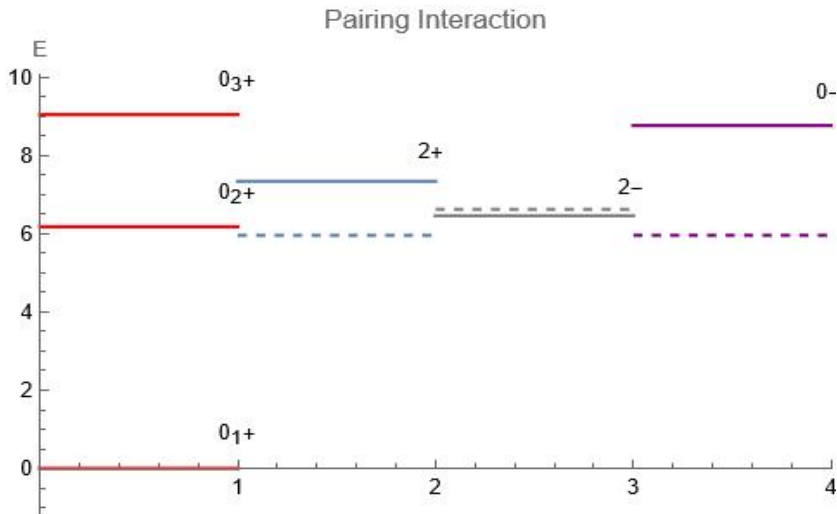


Figura 5.5: Paring y datos experimentales (Lineas punteadas)

Esta interaccion no afecta los estados no acoplados, es importante mencionar que de los valores experimentales se determinó $\beta = 0.236 MeV$ para la banda 2^- y se asumió el mismo valor para el caso 2^+ , pues por falta de datos no se puede obtener este valor.

5.3. Interacción de Delta Superficial

De manera análoga realizaremos un análisis de la interacción de Delta superficial (SDI por sus iniciales en inglés), es importante notar que esta interacción está descrita en terminos de la base del oscilador armónico, como vemos en la ecuación 4.3, dependiendo de la cantidad de capas o shells que tomemos mejor será nuestra interacción, en este trabajo se tomaron ocho capas, la razón principal es que para fines prácticos no es necesario tomar más capas, ya que los resultados convergían, las siguientes figuras muestran la intensidad de la interacción SD en función del número de capas usadas:

A diferencia de la interacción de Acoplamiento, la SDI también afecta a los estados $2^+2^-0^-$. Lo cual nos da más libertad para ajustar respecto a otros resultados experimentales. Primero repetiremos el ajuste con respecto a la diferencia entre el primer y el segundo estado 0^+ de manera que $\Delta 0^+ = 6.179 MeV$. Las figuras 5.7 y 5.8 nos muestran el efecto de la interacción SD

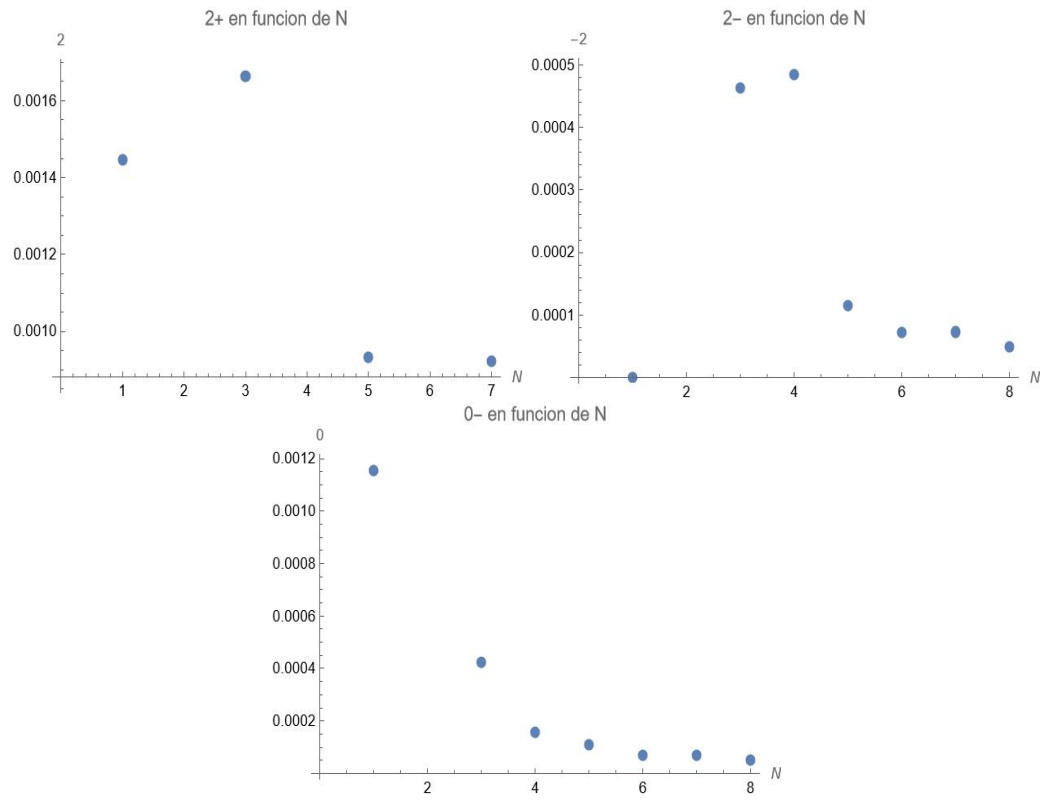


Figura 5.6: Intensidad de la interacción SDI en terminos de las capas usadas.

y el ajuste $\Delta 0^+$

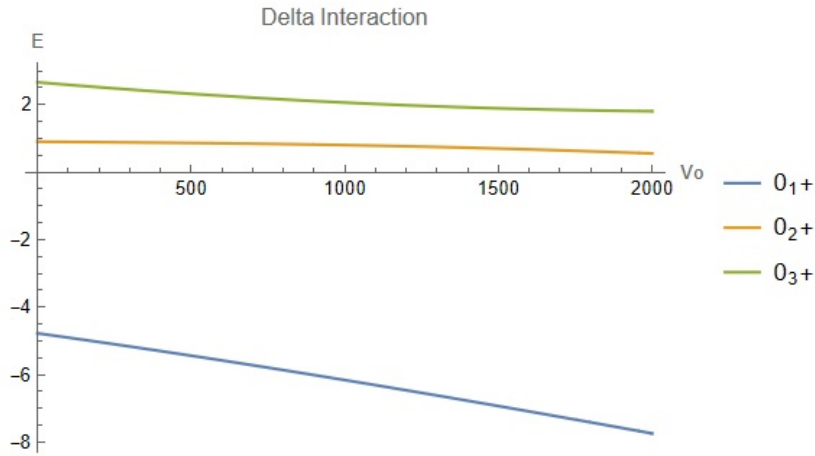


Figura 5.7: Estados 0^+ dados por la interacción SD, en función de V_0

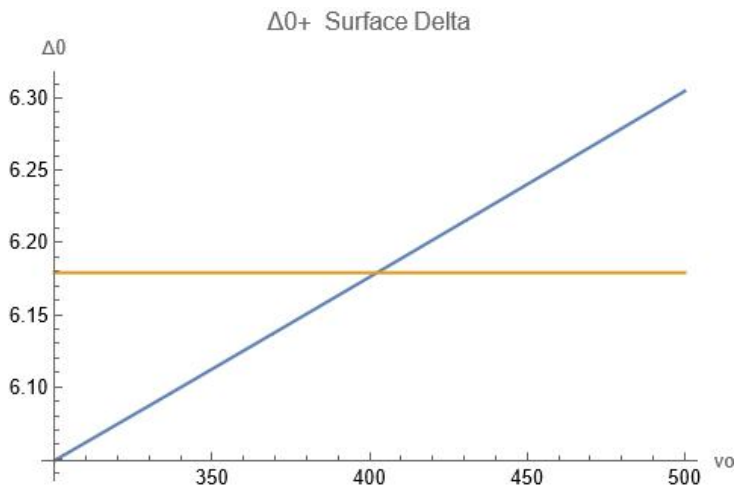


Figura 5.8: Diferencia entre los primeros estados 0^+ valor teórico en función de V_0 contra los resultados experimentales

Esto nos permite encontrar la intensidad de la interacción, en este caso de $V_0 = 402 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^4}$. Con estos datos obtenemos la siguiente estructura, incluiremos los datos experimentales:

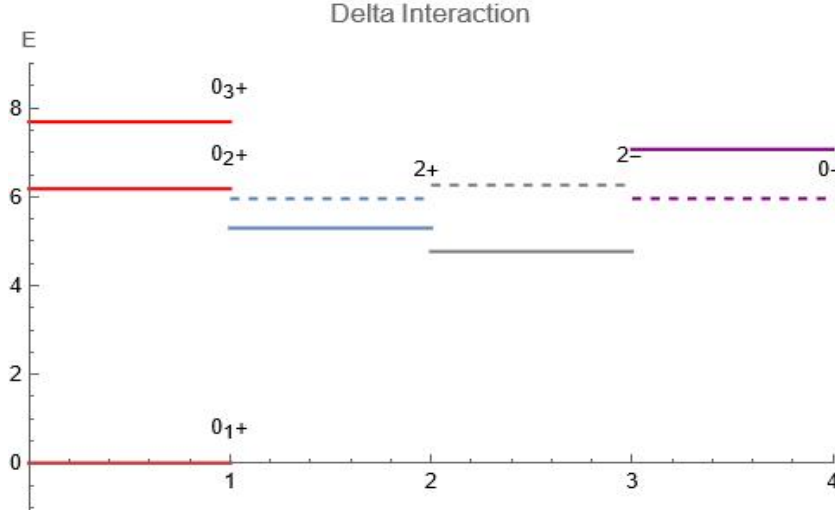


Figura 5.9: Espectro energético SDI y datos experimentales (Lineas punteadas)

Por otro lado, podemos ajustar con respecto al estado 2^- , es uno de los mejores candidatos, pues es el estado del cual si conocemos el parametro β de los datos experimentales. En este caso $0_1^+ - 2^- = 6.263 \text{ MeV}$. Repitiendo para este caso el proceso para hallar la intensidad de V_0 , ilustrado en la figura 5.10 obtenemos un valor distinto, que pondremos a prueba con el resto de las energías para evaluar este ajuste.

En este caso determinamos $V_0 = 1450 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^4}$ lo cual nos da la estructura de la figura 5.11; Si bien este ajuste tiene además una mejora para el estado 2^+ es a costa del ajuste anterior, es claro que los valores obtenidos para v_o son muy distintos como para poder obtener ambos estados simultaneamente.

Para cerrar esta parte del análisis obtendremos un punto medio donde la diferencia con los resultados experimentales se minimice, para esto basta con hallar el mínimo de la ecuación 5.3:

$$(0^+(v_o) - 0_{exp}^+)^2 + (2^-(v_o) - 2_{exp}^-)^2 \quad (5.3)$$

La figura 5.12 ilustra el comportamiento de esta ecuación. De manera inmediata es facil determinar que mínimo se encuentra $v_o = 979 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^4}$

Una vez determinado el valor óptimo de v_o graficaremos la estructura energética correspondiente para así poder cotejar con los resultados experimentales, el ajuste se observa en la figura 5.13

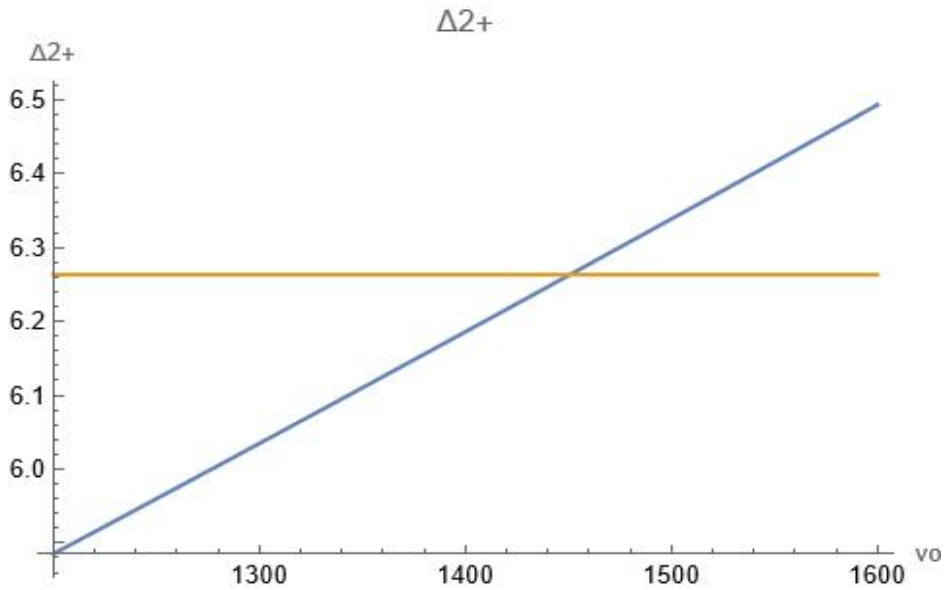


Figura 5.10: Diferencia con el estado 2^- Valor teórico en función de V_0 y el valor experimental

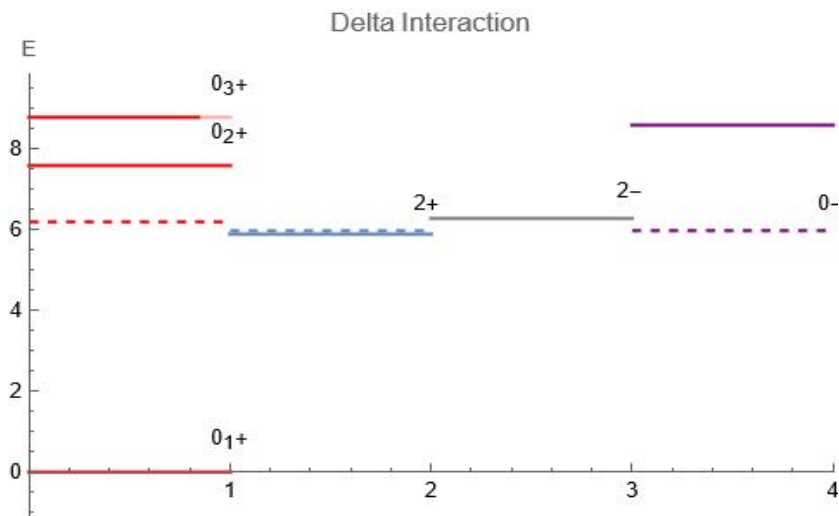


Figura 5.11: SDI segundo ajuste y datos experimentales (Lineas punteadas)

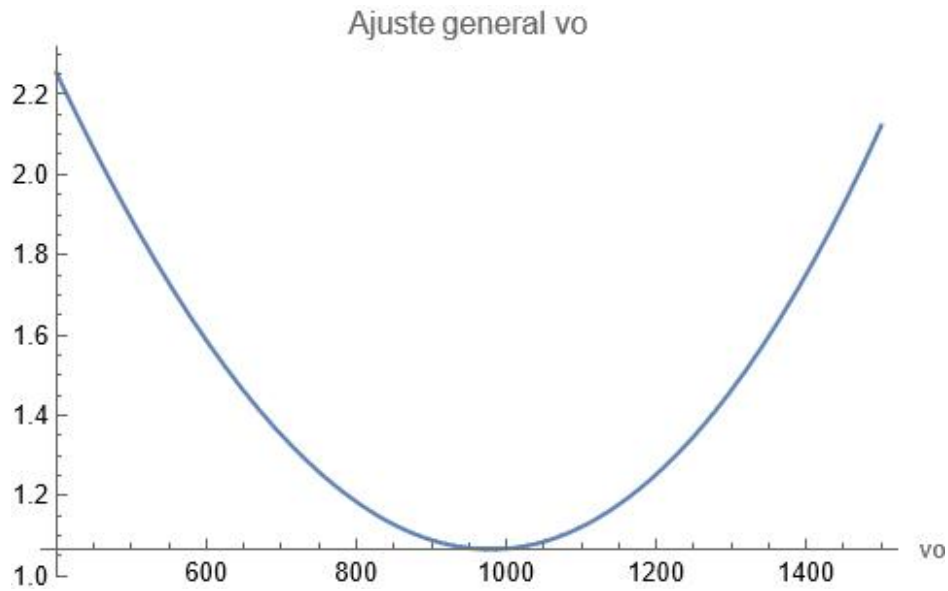


Figura 5.12: en esta figura se observa como para $V_0 = 979 \frac{MeV}{fm^4}$ la diferencia con los resultados experimentales se minimiza

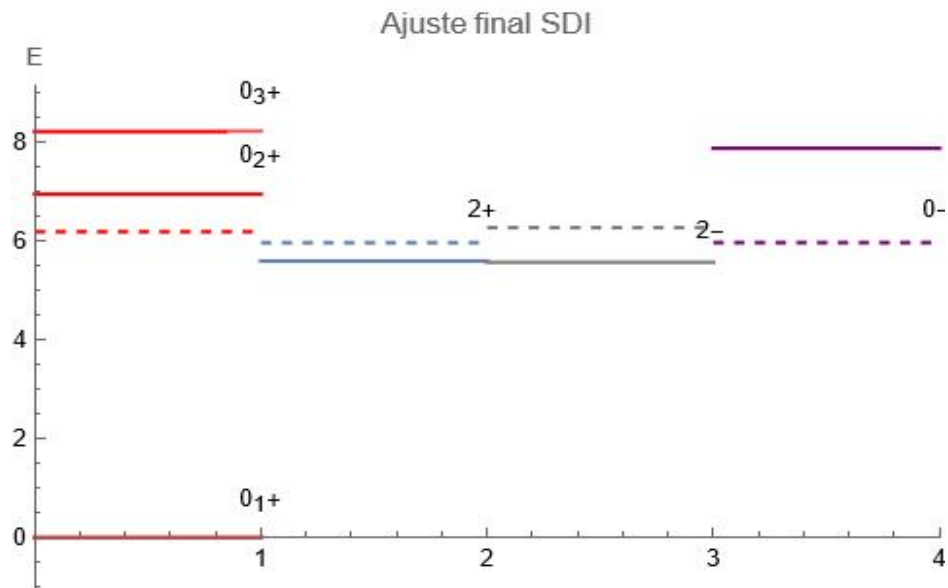


Figura 5.13: Esta es la estructura obtenida al minimizar la diferencia entre los resultados teóricos y los experimentales

5.4. Transiciones Eléctricas

Las transiciones eléctricas calculadas por la ecuación 4.21 son comparadas con los resultados experimentales. Al igual que con la interacción SD calculamos con ocho capas del oscilador armónico al expandir las eigenfunciones. Esto debido a que los resultados convergen a partir de seis, por lo que más capas solamente añaden tiempo de cómputo sin mejorar la precisión.

Al momento de redactar este trabajo, solamente se cuenta con resultados experimentales para las siguientes transiciones eléctricas cuadrupolares del ^{10}Be

$$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0^+) = 9.2(3)e^2 fm^4 \quad (5.4)$$

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0^+) = 0.11e^2 fm^4 \quad (5.5)$$

Tenemos únicamente dos parámetros que podemos ajustar al realizar este cálculo, la carga efectiva \hat{e} y la distancia entre los centros de los cúmulos, denominada β .

La ecuación 4.13 para la transición 5.4 da como resultado

$$\frac{1}{5} \left(-5.654285\hat{e} + 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta^2 \right)^2 \quad (5.6)$$

Cuyo comportamiento se puede observar en la figura 5.14. Mientras que para la ecuación 5.5 la transición carece de parte colectiva por lo que queda solamente la dependencia de la carga efectiva, la expresión calculada es:

$$26.9695\hat{e}^2 \quad (5.7)$$

La cual describe una parábola como se observa en la figura 5.15.

Si usamos el valor obtenido de beta en el ^9Be , es decir $\beta = 1.82 fm$ la ecuación 5.6 se convierte en la siguiente expresión (se puede observar en la figura 5.16):

$$\frac{1}{5} \left(-5.654285\hat{e} + 8.35762 \right)^2 \quad (5.8)$$

Esto con el fin de generalizar el modelo del CSM del ^9Be , y de esta forma cotejar los datos experimentales contra el modelo del CSM donde $^{10}\text{Be} \rightarrow ^9\text{Be} + n$.

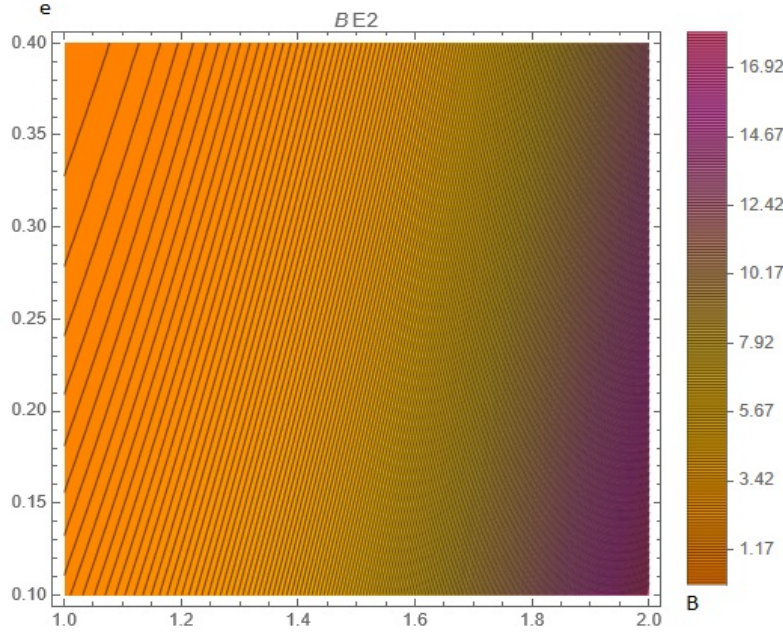


Figura 5.14: Ecuación 5.6 de las transiciones electricas cuadrupolares en funcion de la carga efectiva \hat{e}

Para obtener un ajuste a estos valores vamos a considerar ambas ecuaciones así como los valores experimentales, sea ΔM la maxima diferencia obtenida entre el valor experimental y nuestras ecuaciones dentro de un intervalo razonable, en este caso el rango graficado. La ecuación en cuestión, formada por las ecuaciones 5.7 y 5.8 llamemoslas $BE00(\hat{e})$ y $BE02(\hat{e})$ respectivamente, es:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{BE00(\hat{e}) - 9.2}{\Delta M_1} \right)^2 + \left(\frac{BE02(\hat{e}) - 0.11}{\Delta M_2} \right)^2 \right] \quad (5.9)$$

Esta ecuacion nos proporciona la diferencia normalizada entre los calculos del CSM y los valores experimentales, Esta función tiene un mínimo en $\hat{e} = 0.21e$, como se observa en la grafica de la figura 5.17.

La figura 5.17 nos muestra que para una carga efectiva de alrededor de $0.21e$ tenemos una diferencia del 5% respecto a los resultados experimentales. Los valores de estas transiciones dentro del CSM son:

$$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0^+) = 10.28e^2 fm^4 \quad (5.10)$$

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0^+) = 1.18e^2 fm^4 \quad (5.11)$$

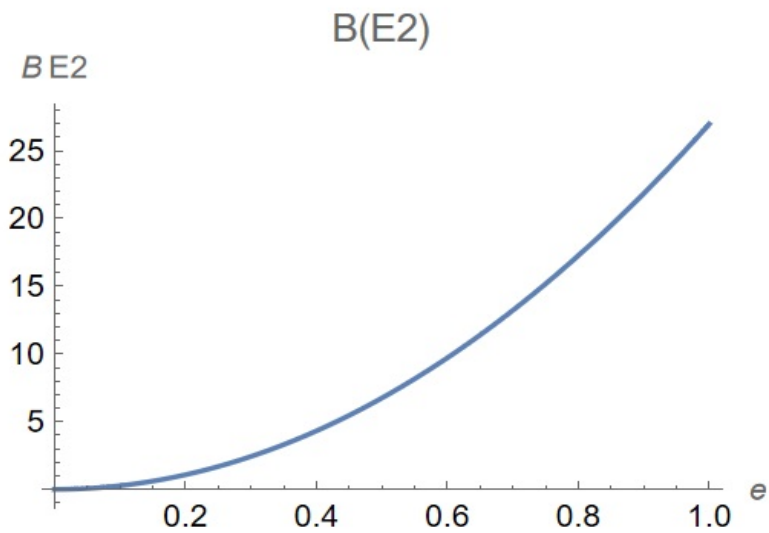


Figura 5.15: Ecuación 5.7 de las transiciones electricas cuadrupolares en funcion de la carga efectiva \hat{e}

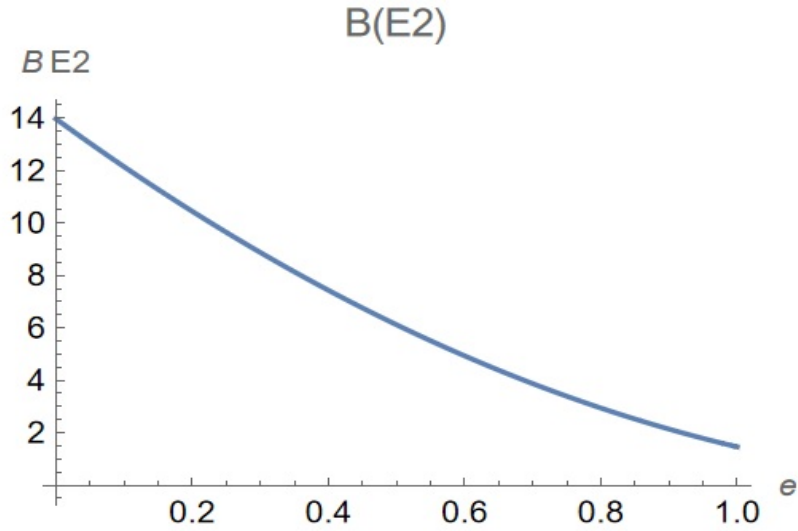


Figura 5.16: Ecuación 5.8 de las transiciones electricas cuadrupolares en funcion de la carga efectiva \hat{e}

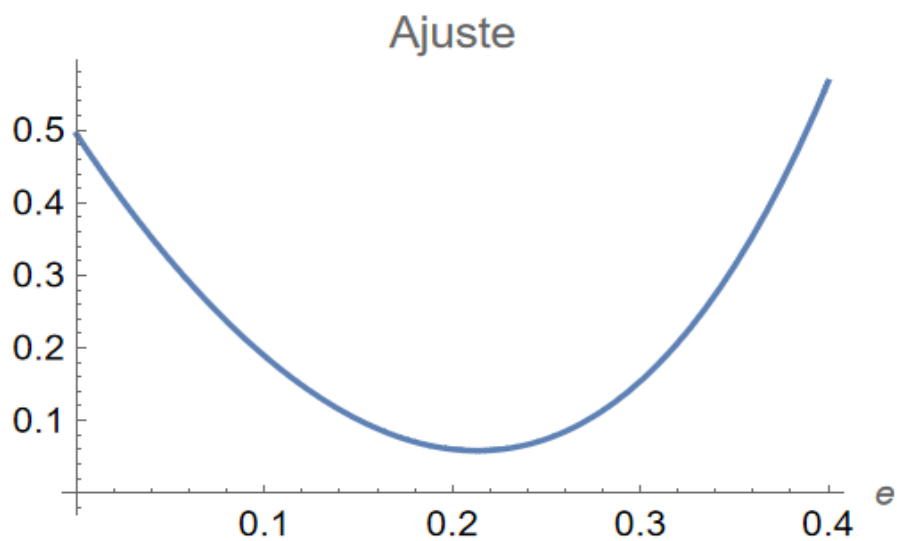


Figura 5.17: Diferencia normalizada entre los valores obtenidos y los valores experimentales en función de la carga efectiva

Con esto tenemos todos los datos calculados en el presente trabajo para el CSM aplicado al ^{10}Be

Capítulo 6

Análisis de Resultados

En los primeros dos capítulos se menciona la motivación y los beneficios de usar el CSM, configuración geométrica, estabilidad de partículas alfa, menor cantidad de funciones para describir los componentes, entre otras, además de que los primeros capítulos exponen este modelo aplicado ya previamente al ${}^9\text{Be}$, probando ser una buena aproximación para su descripción. El objetivo principal de esta tesis es expandir esta descripción al caso en el que hay dos neutrones en el berilio es decir ${}^{10}\text{Be}$.

La calidad de un modelo viene no solamente de su capacidad para ajustarse a una serie de datos, cualquier expansión de polinomios puede ajustarse, la calidad de un modelo consiste en que, además, hace predicciones de nuevos datos, cuya medición darán o no el visto bueno a este. La aplicabilidad de este modelo a distintos escenarios, es bastante prometedora, si bien estamos explorando el CSM en el Berilio, este modelo es aplicable al Oxígeno y al Carbono con configuraciones tetrahedral y triangular, el presente trabajo sería el primer paso para aplicar este modelo al ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{C}$ y ${}^{18}\text{O}$ entre otros, en fin un buen modelo dará buenas predicciones así como una gran versatilidad, todo esto requiere una comprensión de la física subyacente, cosa que el CSM elaborado por el Dr Bijker tiene de sobra.

Nada de esto puede evaluarse sin cotejar con los datos experimentales, sin más preambulos comenzamos.

6.1. Potenciales

Debido a que solo afecta partículas acopladas solamente podemos ajustar la interacción respecto a los estados 0^+ , en el caso que estamos estudiando, la energía viene por la diagonalización de la matriz 5.2 que está ilustrado en la figura 5.2. Estamos considerando dos partículas acopladas en tres niveles disponibles para ocupar. El potencial no afecta ninguno de los otros, como se observa en la figura 5.5, donde el mejor valor para esta interacción es $G = 2.079 \text{ MeV}$ no presenta un buen ajuste para los otros estados.

Por otro lado, el segundo potencial estudiado, el Potencial de Interacción Delta Superficial interactúa con otros estados, no únicamente con aquellos con proyección de momento angular cero, lo que va a permitir un mejor ajuste al determinar la magnitud de esta interacción. Es importante hacer notar que en este caso la interacción SD debe tomar en cuenta la geometría propuesta por el CSM, esta interacción, podríamos decir que permite la interacción entre los neutrones mientras se encuentran en la superficie de los cúmulos. Debido a esto las unidades para la constante V_0 que determinan la magnitud de esta interacción son de $\frac{\text{MeV}}{\text{fm}^4}$ (son unidades que se derivan de manera natural al desarrollar esto matemáticamente, el comentario hace referencia a una interpretación, la potencia a la cuarta podemos entenderla cualitativamente como una consecuencia de que estamos aplicando esta interacción por unidad de área a dos partículas).

En la figura 5.12 determinamos que en este caso $V_0 = 979 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^4}$, en la figura 5.13 se observa el ajuste de esta interacción, mucho más cercano a los estados 0^+ , 2^+ y 2^- , desafortunadamente el estado 0^- se comporta distinto en cualquier caso.

Es mi opinión que ésta interacción, que va muy ad hoc con el CSM, representa una buena aproximación para la descripción del Berilio, sobre todo tomando en cuenta que estamos continuando un trabajo ya aplicado al ${}^9\text{Be}$ y relacionado al Algebraic Cluster Model que fue aplicado al ${}^8\text{Be}$. La verdadera prueba de fuego del presente trabajo será aplicarlo a las transiciones electromagnéticas, en este caso transiciones eléctricas cuadrupolares, donde las funciones suelen ser más susceptibles, ya que un buen ajuste al Hamiltoniano no necesariamente implica un buen comportamiento de sus Eigenfunciones a otros operadores.

6.2. Funciones de Onda

El operador de las transiciones electricas cuadrupolares aplicado al CSM fue ilustrado en la última parte del capítulo anterior, como se mencionó quedaban dos parámetros, la carga efectiva y la distancia entre los clusters. La carga efectiva calculada para un núcleo con simetría esférica en el caso de las transiciones cuadrupolares es:

$$e_2 = \hat{e} + \frac{Z^2}{2A} = 0.24e \quad (6.1)$$

en nuestro modelo la carga efectiva tiene un valor de $0.21e$ es un valor suficientemente cercano, dentro del mismo orden de magnitud, esto debido a que la ecuación 5.7 es sumamente sensible a este parámetro, usando el valor de 0.21 obtenemos un resultado que difiere por un orden de magnitud. Esto debido a que en ésta ecuación solamente juegan un papel las interacciones single particle, y no la parte colectiva, (chechar ecuaciones 4.14 4.15 y 4.16 para ver con más detalle como cuando las transiciones son entre distintas bandas la parte colectiva es cero (representado por una δ''_v)).

La ecuación 5.6 representando transiciones en la misma banda es dominada por la parte colectiva sujeta al valor de β , en la figura 6.1 observamos que para un valor de $1.75 fm$ es decir, únicamente $0.07 fm$ menos que el valor calculado para el 9Be obtenemos el mejor ajuste. Esta es una diferencia de solamente el 3.84% muy buena estimación sobre todo considerando que no hay una medida experimental que podamos tomar de β para el caso específico del Berilio diez, por lo que un ajuste con un valor tan cercano al Berilio nueve viene siendo un buen indicador. Mientras β no se aleje de manera significativa de este valor este modelo no perderá precisión.

El CSM no es el primer modelo que describe estas transiciones o al ${}^{10}Be$ la siguiente tabla nos muestra distintos modelos y los resultados obtenidos: Como podemos observar el CSM obtiene resultados muy cercanos a los experimentales, en esta tabla extraída de [23] podemos comparar con otros modelos, en este caso tenemos Green's Function Monte Carlo (GFMC) con diferentes potenciales, así como en No-Core Shell Model (NCSM), la precisión del CSM muestra que aproximar al núcleo como un cúmulo de partículas alfa es una

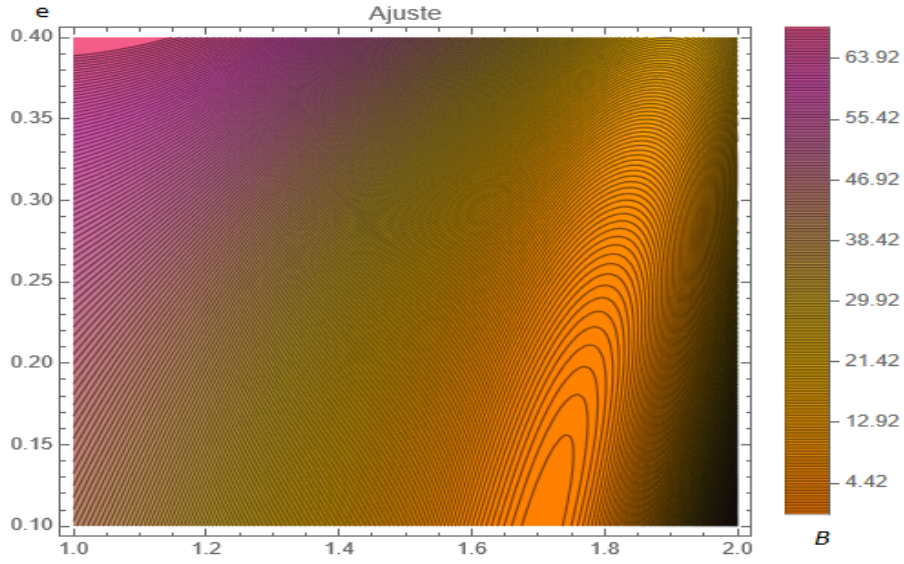


Figura 6.1: Diferencia normalizada entre los valores obtenidos y los valores experimentales en función de la carga efectiva y la distancia entre cúmulos; β

	$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0^+)$	$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0^+)$
NCSM	9.8(4)	0.2(2)
GFMC(AV18)	10.5(4)	3.4(2)
GFMC(AV18+IL2)	8.1(3)	3.3(2)
GFMC(AV18+IL7)	8.8(4)	1.8(1)
CSM ($\beta=1.75\text{fm}$)	9.46(4)	0.6(2)
CSM ($\beta=1.82\text{fm}$)	10.28(4)	1.18(2)
Expt	9.2(3)	0.11(2)

aproximación acertada, si bien no aislada pues es una continuación del trabajo hecho previamente para el ${}^8\text{Be}$ y el ${}^9\text{Be}$ en el primer caso el valor de β es de 1.82 fm. Esto pone al CSM como un modelo que va más allá de una aproximación a un núcleo en particular, es un modelo para la descripción de núcleos ligeros, pues muestra que para núcleos vecinos ah probado ser una buena descripción.

6.3. Conclusiones

Una vez analizados todos los resultados es claro que el CSM es una aproximación bastante certera cuando se trata de la descripción de los núcleos ligeros, por un lado la parte single particle del modelo, como su nombre lo dice, es relativamente sencilla de trabajar comparada con modelos de muchos cuerpos donde el número de interacciones entre estos crece de manera acelerada y a la mitad de la tabla periódica tenemos un número colosal de ecuaciones, mientras que la parte colectiva, tratándose de un par de partículas puede calcularse con facilidad y permite un muy buen ajuste, podemos decir con certeza que los datos obtenidos, además de coincidir con lo observado experimentalmente, dan luz verde para investigar y aplicar el CSM a otros núcleos atómicos como el Boro, Carbono, Nitrógeno, Oxígeno, Fluor y Neón. También abre la posibilidad a el estudio de reacciones de transferencia de nucleones, una vez teniendo las distintas eigenfunciones de distintos núcleos, podemos concluir que este es solamente un primer paso en el desarrollo de un modelo efectivo en los nucleones ligeros.

Capítulo 7

Apendices

7.1. Soluciones exactas $U(4)$

Veremos el caso de $U(3k-2) \supset U(3k-3)$ con $k=2$, es decir el oscilador armónico en 3 dimensiones:

$$H\Psi = E\Psi \quad (7.1)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad (7.2)$$

$$\Psi = \Psi(x, y, z) \quad (7.3)$$

En vez de resolverlo de la manera usual, pasando a coordenadas esféricas y separando variables definimos los operadores de creación y aniquilación:

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(r_i + \frac{d}{dr_i}\right) \\ b_i^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(r_i - \frac{d}{dr_i}\right) \\ & i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Estos operadores cumplen con las relaciones de conmutación

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (7.5)$$

$$[b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0 \quad (7.6)$$

Es fácil reescribir el hamiltoniano de la siguiente manera

$$H = \sum_{i=1}^3 (b_i^\dagger b_i + \frac{1}{2}) \quad (7.7)$$

Cuyos eigenvalores son:

$$E_n = n + \frac{3}{2} \quad (7.8)$$

Ahora caracterizaremos el álgebra del oscilador armónico encontrando los operadores invariantes, en este caso sabemos que son L^2 y L_z , podemos reescribir estos en términos de los operadores de creación y aniquilación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_x &= -i(b_2^\dagger b_3 - b_3^\dagger b_2) \\ L_y &= -i(b_3^\dagger b_1 - b_1^\dagger b_3) \\ L_z &= -i(b_1^\dagger b_2 - b_2^\dagger b_1) \\ L^2 &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Estos operadores cumplen con el hamiltoniano la invariancia ante el conmutador pues

$$[H, L^2] = [H, L_z] = [L^2, L_z] = 0 \quad (7.10)$$

Tratándose este problema del grupo $U(3)$ la cadena de subgrupos contenida es

$$U(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \quad (7.11)$$

Como estos operadores conmutan entre sí las funciones de onda satisfacen las ecuaciones de eigenvalores

$$H |n, l, m\rangle = (n + \frac{3}{2}) |n, l, m\rangle \quad (7.12)$$

$$L^2 |n, l, m\rangle = l(l+1) |n, l, m\rangle \quad (7.13)$$

$$L_z |n, l, m\rangle = m |n, l, m\rangle \quad (7.14)$$

Para resolver el problema de los eigenvalores y como se relacionan entre sí, definimos operadores de ascenso y descenso de cada álgebra y subálgebra.

Definimos los siguientes operadores que conservan el momento angular:

$$Q_+ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 b_i^\dagger b_i^\dagger \quad Q_- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 b_i b_i \quad (7.15)$$

Usando las propiedades de los operadores de creación y aniquilación se obtienen las siguientes relaciones:

$$[H, Q_{\pm}] = \pm 2Q_{\pm} \quad [Q_-, Q_+] = H \quad (7.16)$$

De ahí se puede observar cómo actúan como operadores de ascenso y descenso

$$HQ_{\pm} |n, l, m\rangle = (E_n \pm 2)Q_{\pm} |n, l, m\rangle \quad (7.17)$$

Por lo tanto $Q_{\pm}\Psi$ es también un eigenestado del Hamiltoniano, pero con eigenvalor $E_n \pm 2$. El Hamiltoniano es siempre positivo por lo que debe existir el estado de mínima energía en el cual

$$Q_- |n_0, l, m\rangle = 0 \quad (7.18)$$

Usando la identidad

$$Q_+Q_- = \frac{1}{4} = [\hat{n}(\hat{n} + 1) - L^2] \quad (7.19)$$

Con $\sum b_i^\dagger b_i = \hat{n}$ para obtener

$$Q_+(Q_- |n_0, l, m\rangle) = 0 = \frac{1}{4}[n_0(n_0 + 1) - l(l + 1)] |n_0, l, m\rangle \quad (7.20)$$

Por lo tanto, dado un momento angular l , la mínima energía de ese estado es $n_0 = l$ y el operador Q_+ genera los demás estados con el mismo momento angular l , y los valores permitidos de n serían $n = l, l + 2, l + 4, l + 6, \dots$, podemos concluir que dado un eigenestado

$$|n, l, m\rangle \Rightarrow l = n, n - 2, n - 4, \dots \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (7.21)$$

Así la eigenfunción normalizada es

$$|n, l, m\rangle = \left[\frac{2^{n-l}(2l+1)!!}{(n-l)!!(n+l+1)!!} \right]^{\frac{1}{2}} (-Q_+)^{\frac{n-l}{2}} |l, l, m\rangle \quad (7.22)$$

Análogamente podemos definir el siguiente operador para los estados del momento angular

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad (7.23)$$

que satisface las siguientes relaciones:

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad [L_+, L_-] = 2L_z \quad (7.24)$$

Da pie a la relación entre la proyección del momento angular m y l :

$$m = -l, -l + 1, -l + 2, \dots, l - 1, l \quad (7.25)$$

y las eigenfunciones normalizadas son:

$$|l, l, m\rangle = \left[\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!} \right]^{\frac{n-l}{2}} (L_-)^{l-m} |l, l, l\rangle \quad (7.26)$$

$$|l, l, l\rangle = \frac{1}{\sqrt{l!}} l \left(\frac{-b_1^\dagger - ib_2^\dagger}{\sqrt{2}} \right) |000\rangle \quad (7.27)$$

resolviendo así exactamente el problema del oscilador armónico en 3 dimensiones sin la necesidad de recurrir a ecuaciones diferenciales.

En esta cadena, correspondiente al oscilador armónico tenemos los eigenvalores relacionados a los subgrupos y los generadores de la siguiente forma:

$$\left| \begin{array}{cccc} U(4) & \supset & U(3) & \supset & SO(3) & \supset & SO(2) \\ N & & n & & l & & m \end{array} \right\rangle \quad (7.28)$$

Las relaciones quedan como:

$$\begin{aligned} n &= 0, 1, 2, \dots, N \\ l &= n, n-2, n-4, \dots, 1 \text{ ó } 0 \\ m &= -l, -l+1, -l+2, \dots, l-1, l \end{aligned} \quad (7.29)$$

Además, para complementar a las ecuaciones (2.36), (2.40) y (2.41) tenemos:

$$|Nnlm\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N-n)!}} (b_4^\dagger)^{N-n} |nnlm\rangle \quad (7.30)$$

A continuación están las relaciones de las eigenfunciones:

$$\begin{aligned} \hat{N} |N, n, l, m\rangle &= N |N, n, l, m\rangle \\ \hat{n} |N, n, l, m\rangle &= n |N, n, l, m\rangle \\ L^2 |N, n, l, m\rangle &= l(l+1) |N, n, l, m\rangle \\ L_z |N, n, l, m\rangle &= m |N, n, l, m\rangle \end{aligned} \quad (7.31)$$

Finalmente, analizamos el espectro del oscilador armónico. Dado el hamiltoniano (ec 2.21) los niveles de energía están dados por la fórmula:

$$E = \left(n + \frac{3}{2} \right) \quad (7.32)$$

7.2. Oscilador Morse Cuántico

La otra cadena, el límite $SO(4)$ corresponde a un oscilador Morse tridimensional,

$$\left| \begin{array}{cccc} U(4) & \supset & SO(4) & \supset & SO(3) & \supset & SO(2) \\ N & & w & & l & & m \end{array} \right\rangle \quad (7.33)$$

En este caso la relación entre los distintos valores de los eigenvalores es la siguiente:

$$\begin{aligned} w &= N, N-2, N-4, N-6, \dots, 1 \text{ ó } 0 \\ l &= 0, 1, \dots, w \\ m &= -l, -l+1, \dots, l \end{aligned} \quad (7.34)$$

Los generadores de $SO(4)$ son:

$$D_J = -i(b_j^\dagger b_4 - b_4^\dagger b_j) \quad L_j = -i\epsilon_{jkl} b_k^\dagger b_l \quad (7.35)$$

Definimos los operadores de creación y aniquilación de un par de bosones de esta manera:

$$P^\dagger = \sum_{\mu} b_{\mu}^\dagger b_{\mu}^\dagger \quad (7.36)$$

$$P = \sum_{\mu} b_{\mu} b_{\mu} \quad (7.37)$$

Así podemos escribir fácilmente el Hamiltoniano como:

$$H_2 = \kappa P_{\pm}^\dagger P_{\pm} + \beta L^2 \quad (7.38)$$

Las ecuaciones de eigenvalores son:

$$\begin{aligned} \hat{N} | N, w, l, m \rangle &= N | N, w, l, m \rangle \\ (L^2 + T^{(El)^2}) | N, w, l, m \rangle &= w(w+2) | N, w, l, m \rangle \\ L^2 | N, w, l, m \rangle &= l(l+1) | N, w, l, m \rangle \\ L_z | N, w, l, m \rangle &= m | N, w, l, m \rangle \end{aligned} \quad (7.39)$$

. Si bien los operadores de creación y aniquilación son los mismos que hemos estado usando para definir el resto de los operadores, conviene mas en este caso pasar a coordenadas hiperesféricas ([19]):

$$\begin{aligned}x &= r \sin(\chi) \sin(\theta) \cos(\phi) \\y &= r \sin(\chi) \sin(\theta) \sin(\phi) \\z &= r \sin(\chi) \cos(\theta) \\s &= r \cos(\chi)\end{aligned}\tag{7.40}$$

Así los operadores se transforman de la siguiente manera:

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2 + \hat{D}^2}{r^2} + r^2 - 4 \right)\tag{7.41}$$

$$\hat{L}^2 + T^{(El)^2} = -\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \frac{\hat{L}^2}{\sin^2 \chi}\tag{7.42}$$

$$\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\hat{L}_z^2}{\sin^2 \theta}\tag{7.43}$$

$$\hat{L}_z^2 = -i \frac{\partial}{\partial \phi}\tag{7.44}$$

Resolvemos esta ecuación usando la separación de variables:

$$\Psi(r, \chi, \theta, \phi) = R_{Nw}(r) S_{wl}(\chi) Y_{lm}(\theta, \phi)\tag{7.45}$$

Resolviendo las ecuaciones de eigenvalores obtenemos las eigenfunciones normalizadas:

$$S_{wl}(\chi) = 2^l l! \left[\frac{2(w-l)!(w+1)}{\pi(w+l+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \sin(\chi)^l C_{w-l}^{l+1}(\cos(\chi))\tag{7.46}$$

$$R_{Nw} = (-1)^{\frac{N-w}{2}} \left[\frac{2 \left(\frac{N-w}{2} \right)!}{\left(\frac{N+w+2}{2} \right)!} \right]^{\frac{1}{2}} r^w e^{-\frac{r^2}{2}} L_{\frac{N-w}{2}}^{w+1}(r^2)\tag{7.47}$$

Donde $C_{w-l}^{l+1}(x)$ son los polinomios de Gegenbauer, $L_{\frac{N-w}{2}}^{w+1}(x)$ son polinomios asociados de Laguerre y $Y_{lm}(\theta, \phi)$ son armónicos esféricos

Análogamente al oscilador armónico analizamos el espectro de energías del oscilador Morse.

Dado el Hamiltoniano llegamos a la siguiente estructura en sus niveles de energía

$$(N-w)(N+w+2) + \beta l(l+1)\tag{7.48}$$

Donde los valores posibles de $w = N, N - 2, N - 4, \dots, 0$ o 1 dependiendo si N es par o impar, y $l = w, w - 1, w - 2, \dots, 0$. Si tomamos $N = 4$ y $k = 2$ obtenemos el espectro de energías de la figura 2.2.

7.3. Coordenadas Hiperesféricas

Cada punto en \mathbb{R}^2 puede ser representado por un único par de coordenadas $\{x, y\}$, conocidas como coordenadas cartesianas. Sin embargo, no es la única forma de representar un punto en \mathbb{R}^2 . Otra manera de hacerlo es recurrir a coordenadas polares. El punto caracterizado $\{x, y\}$ se puede representar de manera única por la distancia de este al origen y el ángulo que forma con algún eje, en este caso digamos el eje x . Trazando un triángulo rectángulo donde el cateto adyacente es la coordenada x y el cateto opuesto la coordenada y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \iff \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7.49)$$

Donde θ es el ángulo entre el eje x y la recta que va del punto al origen. De estas ecuaciones podemos obtener las coordenadas cartesianas en términos de las variables r, θ . A partir de este momento adoptaré la notación $r = r_1$ con motivo de simplificar la notación en cálculos posteriores:

$$\begin{aligned} x &= r_1 \cos(\theta) \\ y &= r_1 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (7.50)$$

Dado $r_1 = c$ con c una constante mayor o igual a cero los puntos que quedan representan un círculo de radio c . Si $c = 1$ obtenemos el círculo unitario escrito como \mathbb{S}^1 en geometría.

Llevando esta idea a \mathbb{R}^3 tomamos un punto caracterizado por las coordenadas $\{x, y, z\}$, la distancia del origen al punto es:

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7.51)$$

Conviene notar que $x^2 + y^2 = r_1^2$, por lo que la ecuación 5.3 se puede reescribir como:

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + z^2} \quad (7.52)$$

De aquí podemos repetir el proceso anterior de las coordenadas polares esta vez con el triángulo formado por r_2, r_1, z siendo r_2 la hipotenusa, r_1 el cateto opuesto y z el cateto adyacente, entonces:

$$\phi = \arctan\left(\frac{r_1}{z}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad (7.53)$$

Donde ϕ es el ángulo entre el plano xy y el eje z , además:

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{r_2 \sin(\phi)}{r_2 \cos(\phi)} = \frac{r_1}{z} \quad (7.54)$$

y de esta última ecuación y las ecuaciones 5.2, 5.3 podemos deducir la expresión de las coordenadas cartesianas en término de coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r_2 \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y &= r_2 \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z &= r_2 \cos(\phi) \end{aligned} \quad (7.55)$$

Es importante notar que en este caso basta con darle un intervalo $\phi \in \{0, \pi\}$ para poder representar cualquier punto en \mathbb{R}^3 ; y si $r_2 = c$ se obtiene una esfera de radio c , en particular con $c = 1$ obtenemos la esfera unitaria \mathbb{S}^2 .

Finalmente, para llegar a las coordenadas hiperesféricas en \mathbb{R}^4 repetimos el proceso anterior para el punto $\{x, y, z, w\}$ podemos realizar un proceso análogo al de las coordenadas esféricas y de las polares de la siguiente manera:

$$r_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = \sqrt{r_2^2 + w^2} \quad (7.56)$$

Entonces si nombramos ψ el ángulo entre el espacio xyz y el eje w obtenemos

$$\psi = \arctan\left(\frac{r_2}{w}\right) \quad (7.57)$$

y así usando las relaciones anteriores de la misma manera en que las usamos para las coordenadas esféricas obtenemos las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^4 en términos de las variables hiperesféricas [19]

$$\begin{aligned} x &= r_3 \sin(\psi) \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y &= r_3 \sin(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z &= r_3 \sin(\psi) \cos(\phi) \\ w &= r_3 \cos(\psi) \end{aligned} \quad (7.58)$$

De nuevo $\psi \in \{0, \pi\}$.

Haciendo $r_3 = 1$ obtenemos la hiperesfera \mathbb{S}^3 que es una 3-variedad.

Por último, aunque ya no será demostrado, pues no se utiliza en el presente trabajo, las coordenadas esféricas generales se pueden escribir, si hacemos un cambio de notacion $x, y, z, \dots = x_1, x_2, x_3$ y $\theta, \phi, \psi, \dots = \theta_1, \theta_2, \theta_3$, de la siguiente manera: Dado un espacio \mathbb{R}^n

$$r_{n-1} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{r_{n-2}^2 + x_n^2} \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \\ \theta_2 &= \arctan\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}\right) = \arctan\left(\frac{r_1}{x_3}\right) \\ \theta_3 &= \arctan\left(\frac{r_2}{x_4}\right) \\ &\vdots \\ \theta_{n-1} &= \arctan\left(\frac{r_{n-2}}{x_n}\right) \end{aligned} \quad (7.60)$$

Donde solamente $\theta_1 \in \{0, 2\pi\}$ y $\theta_2, \dots, \theta_{n-1} \in \{0, \pi\}$

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-3}) \dots \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ x_2 &= r_{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-3}) \dots \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \\ x_3 &= r_{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-3}) \dots \sin(\theta_3) \cos(\theta_2) \\ x_4 &= r_{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-3}) \dots \cos(\theta_3) \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= r_{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-3}) \\ x_{n-1} &= r_{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}) \\ x_n &= r_{n-1} \cos(\theta_{n-1}) \end{aligned} \quad (7.61)$$

Es decir:

$$x_k = r_{n-1} \prod_{i=k}^{n-1} \sin(\theta_i) \cos(\theta_{k-1}) \quad (7.62)$$

con $k \in \{1, n\}$, $\sin(\theta_n) = 1$ y $\cos(\theta_0) = 1$

7.4. Pairing interaction

Usando las propiedades del Algebra de cuasispin de $SU(2)$

$$[Q_+(a), Q_-(b)] = 2\delta_a^b Q_0(a) \quad (7.63)$$

$$[Q_0(a), Q_+(b)] = \delta_a^b Q_+(a) \quad (7.64)$$

y expresando los eigenestados de ésta base en términos de estos operadores de creación y aniquilación obtenemos una expresión exacta de los elementos de matriz del hamiltoniano por métodos puramente algebraicos. Si N es el número de partículas, Ω representa los niveles que pueden ser ocupados, y ν es el número de partículas no acopladas.

Para el caso de $N = 2$, $\nu = 0$

$$\begin{aligned} \langle H_{pair} \rangle &= -G \sum_{b,c>0} \langle a | Q_+(b)Q_-(c) | d \rangle \\ &= -G \sum_{b,c>0} \langle 0 | Q_-(a)Q_+(b)Q_-(c)Q_+(d) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.65)$$

conmutando y eliminando terminos obtenemos

$$\langle H_{Pair} \rangle = -G \sum_{b,c>0} \delta_a^b \delta_c^d \quad (7.66)$$

Para $N = 4$

$$\begin{aligned} \langle H_{pair} \rangle &= -G \sum_{c,d>0} \langle a, b | Q_+(c)Q_-(d) | e, f \rangle \\ &= -G \sum_{c,d>0} \langle 0 | Q_-(a)Q_-(b)Q_+(c)Q_-(d)Q_+(e)Q_+(f) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.67)$$

Una vez más aplicando las propiedades del algebra obtenemos una expresion en términos de deltas de kronequer, estas expresiones crecen bastante en tamaño conforme introducimos más partículas como se observa.

$$\begin{aligned} \langle H_{pair} \rangle &= -4G \sum_{c,d>0} \left(\frac{1}{2} \delta_a^c \left(\frac{1}{2} \delta_b^e \delta_d^f + \delta_d^e \left(\frac{1}{2} \delta_b^f + \delta_b^e \delta_c^f \right) \right) + \right. \\ &\left. \delta_b^c \left(\frac{1}{2} \delta_d^f \left(\frac{1}{2} \delta_a^e + \delta_a^c \delta_c^e \right) + \delta_d^e \left(\frac{1}{4} \delta_a^f + \frac{1}{2} \delta_a^c \delta_c^f + \delta_e^f \left(\frac{1}{2} \delta_a^e + \delta_a^c \delta_c^e \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (7.68)$$

A diferencia del caso anterior, aquí la estructura de la matriz estara en funcion de los valores que pueden tomar las partículas. Los valores dentro de la diagonal son mayores que fuera de esta.

Finalmente para tres pares de partículas, $N = 6$

$-G \sum_{c,d>0} \langle 0 | Q_-(a)Q_-(b)Q_-(c)Q_+(d)Q_-(e)Q_+(f)Q_+(g)Q_+(h) | 0 \rangle$ La siguiente expresión se calculó y verifíco varias veces a mano, es un ejercicio que se puede hacer para pasar el tiempo en la pandemia y matar el tiempo de manera productiva, el uso de hojas bond y colores para no perder el rastro de términos en la expresión al simplificar es altamente recomendado.

$$\begin{aligned}
& \langle a, b, c \mid Q_+(d)Q_-(e) \mid f, g, h \rangle = \\
& 8 \sum_{d,e} \left\{ \delta_a^d \left[\delta_b^f \left(\delta_c^g \delta_e^h \frac{1}{2} + \delta_e^g \left(\delta_c^h \frac{1}{2} + \delta_c^g \delta_f^h \right) \right) + \delta_c^f \left(\delta_e^h \frac{1}{2} \left(\delta_b^g \frac{1}{2} + \delta_b^f \delta_f^g \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_e^g \left(\delta_b^h \frac{1}{4} + \delta_b^f \delta_f^h \frac{1}{2} + \delta_g^h \left(\delta_b^g \frac{1}{2} + \delta_b^f \delta_f^g \right) \right) \right) + \delta_e^f \left(\delta_b^g \frac{1}{2} \left(\delta_c^h \frac{1}{2} + \delta_c^g \delta_f^h \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_c^g \left(\delta_b^h \frac{1}{4} + \delta_b^g \delta_f^h \frac{1}{2} + \delta_f^h \left(\delta_b^f \frac{1}{2} + \delta_b^g \delta_f^g \right) \right) + \delta_f^g \left(\delta_b^f \delta_c^h \frac{1}{2} + \delta_c^f \left(\delta_b^h \frac{1}{2} + \delta_b^f \delta_f^h \right) \right) \right) \right] + \\
& \quad \delta_b^d \left[\frac{1}{2} \left(\delta_a^f \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^f \right) \left(\delta_c^g \delta_e^h \frac{1}{2} + \delta_e^g \left(\delta_c^h \frac{1}{2} + \delta_c^g \delta_f^h \right) \right) + \delta_c^f \left(\delta_e^h \frac{1}{2} \left(\delta_a^g \frac{1}{4} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^d \delta_d^g \frac{1}{2} + \delta_f^g \left(\delta_a^f \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^f \right) \right) + \delta_e^g \left(\delta_a^h \frac{1}{8} + \delta_a^d \delta_d^h \frac{1}{4} + \delta_f^h \frac{1}{2} \left(\delta_a^f \frac{1}{2} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^d \delta_d^f \right) + \delta_g^h \left(\delta_a^g \frac{1}{4} + \delta_a^d \delta_d^g \frac{1}{2} + \delta_f^g \left(\delta_a^f \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^f \right) \right) \right) + \delta_e^f \left(\frac{1}{2} \left(\delta_a^g \frac{1}{2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^d \delta_d^g \right) \left(\delta_c^h \frac{1}{2} + \delta_c^f \delta_f^h \right) + \delta_c^g \left(\delta_a^h \frac{1}{8} + \delta_a^d \delta_d^h \frac{1}{4} + \delta_g^h \frac{1}{2} \left(\delta_a^g \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^g \right) + \delta_f^h \left(\delta_a^f \frac{1}{4} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^d \delta_d^f \frac{1}{2} + \delta_f^g \left(\delta_a^g \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^g \right) \right) \right) + \delta_f^g \left(\delta_c^h \frac{1}{2} \left(\delta_a^f \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^f \right) + \delta_c^f \left(\delta_a^h \frac{1}{4} + \delta_a^d \delta_d^h \frac{1}{2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_f^h \left(\delta_a^f \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^f \right) \right) \right) \right] + \delta_c^d \left[\delta_a^f \frac{1}{2} \left(\delta_e^h \frac{1}{2} \left(\delta_b^g \frac{1}{2} + \delta_b^f \delta_f^g \right) + \delta_e^g \left(\delta_b^h \frac{1}{4} + \delta_b^f \delta_f^h \frac{1}{2} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_g^h \left(\delta_b^g \frac{1}{2} + \delta_b^f \delta_f^g \right) \right) \right) + \delta_b^f \left(\delta_e^h \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\delta_a^g \frac{1}{2} + \delta_a^f \delta_f^g \right) + \delta_d^g \left(\delta_a^d \frac{1}{2} + \delta_a^f \delta_f^d \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \delta_e^g \left(\delta_a^h \frac{1}{8} + \delta_a^f \delta_f^h \frac{1}{4} + \delta_d^h \frac{1}{2} \left(\delta_a^d \frac{1}{2} + \delta_a^f \delta_f^d \right) + \delta_g^h \left(\delta_a^g \frac{1}{4} + \delta_a^f \delta_f^g \frac{1}{2} + \delta_d^g \left(\delta_a^d \frac{1}{2} + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^f \delta_f^d \right) \right) \right) + \delta_d^f \left(\delta_a^d \frac{1}{2} \left(\delta_b^g \delta_e^h \frac{1}{2} + \delta_e^g \left(\delta_b^h \frac{1}{2} + \delta_b^f \delta_f^h \right) \right) + \delta_b^d \left(\delta_e^h \frac{1}{2} \left(\delta_a^g \frac{1}{2} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^d \delta_d^g \right) + \delta_e^g \left(\delta_a^h \frac{1}{4} + \delta_a^d \delta_d^h \frac{1}{2} + \delta_g^h \left(\delta_a^g \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^g \right) \right) \right) + \delta_e^f \left(\delta_a^g \frac{1}{2} \left(\delta_b^h \frac{1}{4} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_b^f \delta_f^h \frac{1}{2} + \delta_f^h \left(\delta_b^f \frac{1}{2} + \delta_b^d \delta_d^f \right) \right) + \delta_b^g \left(\delta_a^h \frac{1}{8} + \delta_a^g \delta_g^h \frac{1}{4} + \delta_d^h \frac{1}{2} \left(\delta_a^d \frac{1}{2} + \delta_a^g \delta_d^g \right) + \right. \\
& \quad \left. \delta_f^h \left(\delta_a^f \frac{1}{4} + \delta_a^g \delta_g^f \frac{1}{2} + \delta_d^f \left(\delta_a^d \frac{1}{2} + \delta_a^g \delta_d^g \right) \right) \right) + \delta_d^g \left(\delta_a^d \frac{1}{2} \left(\delta_b^h \frac{1}{2} + \delta_b^f \delta_f^h \right) + \delta_b^d \left(\delta_a^h \frac{1}{4} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^d \delta_d^h \frac{1}{2} + \delta_f^h \left(\delta_a^f \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^f \right) \right) \right) + \delta_f^g \left(\delta_a^f \frac{1}{2} \left(\delta_b^h \frac{1}{2} + \delta_b^d \delta_d^h \right) + \delta_b^f \left(\delta_a^h \frac{1}{4} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \delta_a^d \delta_d^h \frac{1}{2} + \delta_d^f \left(\delta_a^d \frac{1}{2} + \delta_a^g \delta_d^g \right) \right) \right) + \delta_d^f \left(\delta_a^d \delta_b^h \frac{1}{2} + \delta_b^d \left(\delta_a^h \frac{1}{2} + \delta_a^d \delta_d^h \right) \right) \right) \right] \left. \right\} \quad (7.69)
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] J.A. Wheeler, Phys. Rev. 52 (1937) 1083.
- [2] L.R. Hafstad, E. Teller, Phys. Rev. 54 (1938) 681.
- [3] D.M. Dennison, Phys. Rev. 96 (1954) 378.
- [4] S.L. Kameny, Phys. Rev. 103 (1956) 358.
- [5] D.M. Brink, in: Proc. Int. School of Physics “Enrico Fermi”, Course XXXVI, 1965, p.247.
- [6]]D.M. Brink, H. Friedrich, A. Weiguny, C.W. Wong, Phys. Lett. B 33 (1970) 143.
- [7] D. Robson, Nucl. Phys A 308 (1978) 381.
- [8] D. Robson, Prog. Part. Nucl. Phys. 8 (1982) 257.
- [9] V.DellaRoccaa, R.Bijker, F.Iachello (2017) *Nuclear PhysicsA* 966158–184
- [10] Itoh M *et al* 2011 *Phys. Rev. C* 84 054308
- [11] Freer M *et al* 2012 *Phys. Rev. C* 86 034320
- [12] Zimmerman W R *et al* 2013 *Phys. Rev. Lett.* 110 152502
- [13] Freer M *et al* 2011 *Phys. Rev. C* 83 034314
- [14] D. J. Marín-Lámbarri, Bijker R. M. Freer, M. Gai, Tz. Kokalova, D.J Parker,C. Wheldon, Physical Review Letters, 113 (2014) 012502
- [15] R. Bijker, F. Iachello, Physical Review Letters, 112 (2014) 152501

- [16] R. Bijker and F. Iachello *Physical Review C* 61(2000) 067305
- [17] R. Bijker, *Physica Scripta* 91 (2016) 073005
- [18] R. Bijker, F. Iachello, *Nuclear Physics A.* 957(2017) 154-176
- [19] V. Della Rocca, R. Bijker, F. Iachello, *Nuclear Physics A.* 966(2017) 158-184
- [20] Y. Wang, F. Pan, K. D. Launey, Y. Luo, J.P. Draayer, *Nuclear Physics A* 950 (2016) 1-28
- [21] D.R. Bes, R.A. Broglia, E. Maglione, A. Vitturi, *Physica Scripta* , Vol 28 (1983) 527-531
- [22] O. Burglin, N. Rowley, *Nuclear Physics A.* 602(1996) 21-40
- [23] E.A. McCutchan, C.J. Lister, Steven C. Pieper, R. B. Wiringa, D. Swewryniak, J.P. Greene, P.F. Bertone, M.P. Carpenter, C.J. Chiara, G. Gurdal, C.R. Hoffman, R.V.F. Janssens, T.L. Khoo, T. Lauritsen, S. Zhu, *Physical Review C* 86(2012) 014312
- [24] Bijker R, Iachello F, 2002 *Annals of Physics* 298, 334-360
- [25] A. Tumino, R. Bijker and F. Iachello in *Clustering Aspects in Nuclear Structure and Nuclear Dynamics*, edited by M. Korojila, Z. Basrak and R. Caplar (World Scientific, Singapore, 2000), p271
- [26] Reuter W, Fricke G, Merle K and Miska H, 1982 *Phys. Rev. C* 26 806
- [27] Strehl P and Schucan Th H 1968 *Phys, Lett. B* 27 641
- [28] Ajzenberg-Selove F 1990 *Nucl. Phys. A* 506
- [29] Iachello F and Levine R D 1995 *Algebraic Theory of Molecules* (Oxford:Oxford U. Press)
- [30] Bijker R, 2015 *Phys. Scr.* 90 074006
- [31] Dr Roelof Bijker 2008 *Symmetries and Group Theory* (ICN-UNAM, AP 70-543, 04510)

- [32] Kurt Bernardo Wolf 1971/2 *Recursive Method for the Computation of the SO_n , $SO_{n, 1}$, and ISO_n , Representation Matrix Elements* *Journal of Mathematical Physics* 12 2 197-206