



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA
DE DETERMINAR LA EXISTENCIA DE
TRAYECTORIAS COMPATIBLES EN GRÁFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Licenciado en Ciencias de la Computación

PRESENTA:

Kevin Axel Prestegui Ramos

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Gerardo Miguel Tecpa Galván



Ciudad Universitaria, CDMX, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Prestegui

Ramos

Kevin Axel

55 7667 9861

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Ciencias de la Computación

316201373

2. Datos del tutor

Dr.

Gerardo Miguel

Tecpa

Galván

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Dra.

María del Rocío

Sánchez

López

5. Datos del sinodal 3

Dra.

Laura Clementina

Eslava

Fernández

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Adriana

Ramírez

Vigueras

7. Datos del trabajo escrito

Complejidad computacional del problema de determinar la existencia de trayectorias compatibles en gráficas

96p

2023

Agradecimientos

A mi querido padre Dario y a mi querida madre Manu, quienes han sido el soporte de mi vida y me han apoyado en toda decisión que he tomado. Por enseñarme con el ejemplo propio a ser honrado y trabajador. Por ser comprensivos y en extremo amorosos. Gracias a ambos.

A toda mi familia por el gran cariño que siempre me han brindado. Especialmente a mi abuelita Angelina. De igual forma a mi tía Bere por instaurar el amor a la ciencia en mí desde mi niñez.

A mi asesor, Miguel Tecpa, por todo el tiempo invertido en la revisión y corrección de este trabajo. Por los comentarios y sugerencias que me guiaron en la redacción del mismo. Por las enseñanzas y el conocimiento compartido conmigo, así como la confianza depositada en mí para ser su ayudante. Pero sobre todo, por la amistad que me ha brindado.

A cada una de mis sinodales: las doctoras Hortensia Galeana, Rocío Sánchez, Laura Eslava y Adriana Ramírez. Por haber sido tan amables para aceptar hacer la revisión de este trabajo, así como por sus comentarios. Un agradecimiento especial a la Dra. Rocío Sánchez por haberme brindado los dos cursos más bonitos que estudié en la facultad e introducirme al fascinante mundo de las gráficas.

A todos y cada uno de mis amigos. Particularmente a aquellos que hice durante la universidad y que fueron un gran sostén estos últimos cuatro años de mi vida: Ariana, Vianey, Sebas, Helen, Mau, Karlita, Ana Pau y Merino.

A la Facultad de Ciencias y a la UNAM, por darme una educación de calidad y una segunda casa.

Gracias a todos.

*From Königsberg to König's book,
So runs the graphic tale,
And still it grows more colorful...*

The Expanding Unicurse.

Blanche Descartes (alias W. T. Tutte).

Resumen

El capítulo 1 consta de un breve repaso del contexto histórico de las áreas a la que pertenece esta tesis, es decir, la teoría de gráficas y la complejidad computacional. Asimismo, se proporciona una pequeña introducción a ambas ramas, donde se exponen los conceptos fundamentales y algunos otros que usaremos a lo largo del trabajo.

El capítulo 2 es un estudio detallado del artículo *Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions* publicado por Stefan Szeider, en donde estudiamos a profundidad los resultados proporcionados respecto a la NP-Complejidad del problema planteado en su artículo.

El capítulo 3 consiste de una primera sección, donde se da una aplicación a gráficas coloreadas por aristas, también hecha por Szeider, en tanto que el resto del capítulo consta de resultados propios elaborados a lo largo de este trabajo.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Contexto Histórico	1
1.2. Definiciones y resultados generales en teoría de gráficas	4
1.3. Definiciones y resultados generales en complejidad computacional	12
1.3.1. La notación O -grande	12
1.3.2. Problemas de decisión, lenguajes y codificaciones	13
1.3.3. Máquinas de Turing Deterministas y la clase P	15
1.3.4. La clase NP	17
1.3.5. Reducciones polinomiales, problemas NP -Difíciles y NP -Complejidad	18
1.4. El problema \mathcal{A} - CP	21
2. NP-Complejidad del problema \mathcal{A}-CP	24
2.1. El problema \mathcal{A} - CP es NP -Completo	24
2.2. Casos particulares de \mathcal{A} bajo los cuales \mathcal{A} - CP es lineal	53
3. Consecuencias de los resultados previos	59
3.1. Una aplicación en gráficas coloreadas por aristas	59
3.2. Ciclos T -compatibles	60
3.3. Paseos T -compatibles	64

3.4. Equivalencia entre gráficas con sistemas de transición y gráficas H -coloreadas	81
Conclusiones	86
Bibliografía	88

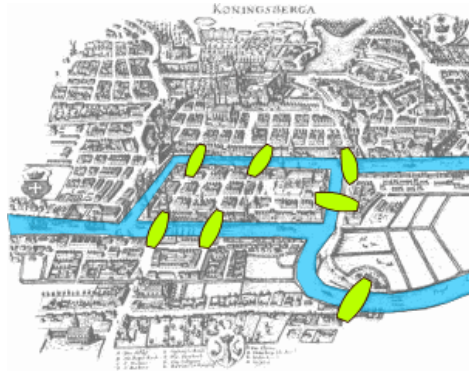
Introducción

En este capítulo se presentan varias nociones básicas de la teoría de gráficas y la complejidad computacional. En la primera sección se muestra brevemente la historia tanto de la teoría de gráficas como de la complejidad computacional. La segunda sección introduce las definiciones y conceptos básicos dentro de la teoría de gráficas. Asimismo, la tercera sección consta de las definiciones y conceptos básicos respectivos a la complejidad computacional. La última sección presenta el problema \mathcal{A} -Compatible Path, tema principal que se estudia en esta tesis.

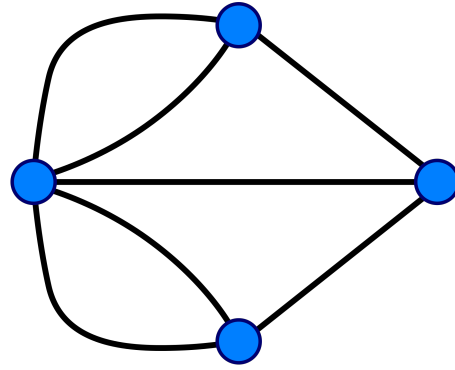
1.1. Contexto Histórico

La teoría de gráficas tiene sus inicios con el problema de los siete puentes de Königsberg. La ciudad de Königsberg en Prusia (ahora Kaliningrad, Rusia) estaba situada en ambos lados del río Pregel, e incluía dos grandes islotes que se conectaban, así como a las dos partes del continente, por siete puentes. En la Figura 1.1a se muestra un mapa de la antigua ciudad. La población de dicho asentamiento se había planteado el siguiente acertijo: ¿es posible recorrer todos los puentes de la ciudad una única vez de manera que se inicie y termine el recorrido en el mismo punto?

Aunque ya se creía que esto era imposible [1], no fue hasta que dicho problema llegó a oídos del matemático Leonhard Euler cuando se obtuvo una demostración formal de la imposibilidad de tal recorrido, misma que fue publicada en 1741 en su artículo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (en español, *La solución a un problema relacionado a la geometría de la posición*). Para resolverlo, abstrajo el problema asociando a cada porción de tierra un punto en el plano, y dos puntos estaban unidos por una línea si las porciones de tierra que representaban estaban unidas por un puente, como se puede ver en la Figura 1.1b. De esta forma, representó el problema con lo que hoy en día conocemos como gráfica. Euler no sólo mostró una solución del problema de los siete puentes, sino que caracterizó aquellas gráficas que



(a) Mapa de la antigua ciudad de Königsberg, resaltando el río Pregel y los siete puentes.



(b) Abstracción del problema de los siete puentes hecha por Euler.

Fig. 1.1

cuentan con un recorrido con las propiedades especificadas en el problema, dichos recorridos son llamados paseos eulerianos en su honor.

Las aplicaciones de la teoría de gráficas son bastas y están esparcidas en una amplia gama de campos que varían desde las ciencias de la computación hasta la lingüística. Para ilustrar esto, supongamos que nos encontramos en un país inmerso en una guerra civil donde la comunicación entre las bases del gobierno se da a través de una red inalámbrica con frecuencias preestablecidas. Si una base recibe un mensaje mediante cierta frecuencia con otra base como destino, entonces no puede reenviar el mensaje usando la misma frecuencia, pues este puede ser interceptado [7]. Más aún, puede que ciertas frecuencias sean incompatibles debido a similitudes en la encriptación usada por el enlace anterior. Esto significa que cada base tiene opciones limitadas para el reenvío de información dependiendo del enlace por el cual recibió la información.

Supongamos ahora que dos bases del gobierno, digamos A y B , no pueden enviarse directamente información y deben comunicarse. Entonces es necesaria una ruta de bases entre A y B cuyos enlaces consecutivos por los que se manda el mensaje sean compatibles respecto a la frecuencia y encriptación usada, de otra forma la comunicación no es segura y el gobierno podría verse comprometido. Considere, ahora, que la comunicación es urgente. Entonces desearíamos que la ruta a seguir, además de ser segura, sea eficiente. En tal caso, el gobierno podría solicitar que la ruta por la que un mensaje es enviado no transite dos veces por una misma base.

Podemos modelar esta situación haciendo uso de una gráfica G donde los vértices son las bases del gobierno y existe una arista entre dos vértices si las bases respectivas pueden comunicarse a través de la red. Ahora, a cada vértice de la gráfica podemos asociarle una *gráfica de transición* cuyos vértices son

sus aristas incidentes en G , es decir, son los posibles enlaces que la base de gobierno puede utilizar para comunicarse mediante las frecuencias, y dos vértices son adyacentes si dichos enlaces son compatibles con respecto a la frecuencia y encriptación usada. De esta forma, una ruta segura y eficiente entre dos bases del gobierno para el transporte de información en la red inalámbrica coincide con una trayectoria en la gráfica G cuyas aristas consecutivas son adyacentes en la gráfica de transición respectiva.

La complejidad computacional de determinar la existencia de estas trayectorias será el tema concerniente de este trabajo.

La historia de la complejidad computacional puede remontarse a la publicación en 1937 del artículo *On computable numbers with an application to the Entscheidungs problem* [14] hecho por Alan Turing, en donde introduce su famosa Máquina de Turing y formaliza la noción de lo que es una función algorítmicamente computable. De esta forma fueron posibles demostraciones sobre las limitaciones y la imposibilidad de las computadoras para realizar ciertas tareas. Como ejemplo, Turing en [14] prueba que no existe un algoritmo tal que, dada una fórmula del cálculo de predicados, decida en un número finito de pasos si es satisfacible o no.

Tras la evolución de la teoría sobre cuáles problemas pueden o no ser resueltos por computadoras, surge naturalmente la pregunta sobre la dificultad computacional de aquellos problemas computables. Este es, precisamente, el campo que estudia la complejidad computacional. Aunque a lo largo de la historia han surgido diferentes medidas para cuantificar esta dificultad, ha sido claro que la complejidad en tiempo y espacio figuran entre las más notables.

Una pregunta importante que surge rápidamente al inicio de la teoría es *¿qué es un paso en un cómputo?* Ésta fue hecha por A. Cobham en su artículo *The intrinsic computational difficulty of functions* en donde hace énfasis en la palabra intrínseco, manifestando interés en una teoría independiente al modelo de cómputo. Aunque no es claro qué es un paso, por suerte los distintos modelos de cómputo no son extremadamente diferentes en cuanto a su tiempo de cómputo y, en general, un modelo puede simular cualquier otro aumentando, a lo más, de forma cuadrática su tiempo de ejecución.

Así, en 1965 se llega al concepto de aquella clase de problemas que son solubles en tiempo acotado por un polinomio en función al tamaño de la entrada, a la que hoy en día conocemos como la clase P. Pese a que la distinción entre algoritmos de tiempo polinomial y tiempo exponencial fue hecha por J. von Neumann en 1953 [15], la clase no fue definida y estudiada hasta su introducción por Cobham en [3], donde además señala que la clase está bien definida y es independiente al modelo de cómputo que se elija.

La concepción de que la computabilidad en tiempo polinomial corresponde con problemas tratables es dada por Jack Edmonds en *Paths, trees and flowers* donde llama a los algoritmos de tiempo polinomial *buenos algoritmos*. En este mismo artículo, Edmonds prueba que el problema **Apareamiento máximo** se encuentra en la clase P y, en palabras de Stephen Cook (1983) en [4]: “este fue quizás el primer problema que se mostró explícitamente en P, cuya pertenencia requiere de un algoritmo complicado” (p. 403). Cabe mencionar que no es inmediatamente obvio el motivo de por qué la clase P está asociada con problemas tratables, dado que un algoritmo de tiempo n^{1000} no es tratable y uno de tiempo $2^{0.000001n}$ sí lo es. Sin embargo, esta intuición proviene del hecho empírico de que problemas que surgen de manera natural no tienen algoritmos óptimos con estos tiempos de ejecución.

En 1971, Stephen Cook introduce en [5] la noción de **NP-Complejidad** y prueba que **SAT** es NP-completo. Un año después, R. Karp en [9] prueba que 21 problemas más son NP-completos, entre ellos, varios concernientes a la teoría de gráficas. De manera paralela e independiente en la Unión Soviética, Leonard Levin en [11] definió una clase equivalente relacionada a *problemas de búsqueda* y probó que seis problemas eran completos en el sentido de su definición, a los que llamó *problemas universales de búsqueda*.

En [10] J. Kratochvíl y S. Poljak estudian la complejidad computacional de encontrar 2-factores en gráficas evitando ciertas transiciones, a dicho problema lo nombran como **\mathcal{A} -Compatible 2-Factor**, en donde utilizan la noción de sistema de transición. S. Szeider en [13] considera gráficas con sistemas de transición contenidos en una clase de gráficas \mathcal{A} y trabaja la complejidad computacional del problema de encontrar trayectorias compatibles respecto al sistema entre dos vértices, al cual llama **\mathcal{A} -Compatible path**.

1.2. Definiciones y resultados generales en teoría de gráficas

Una **gráfica** G es un objeto matemático que consiste en un conjunto finito y no vacío de objetos llamados **vértices**, denotado por $V(G)$, junto a un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de $V(G)$ llamados **aristas**, denotado por $E(G)$. El número de vértices en G , es decir $|V(G)|$, es comúnmente denotado por n y se le llama el **orden** de G . El número de aristas en G , es decir $|E(G)|$, es comúnmente denotado por m y se le llama el **tamaño** de G . Diremos que una gráfica es vacía si tiene tamaño 0. Si $\{u, v\}$ se encuentra en $E(G)$, omitiremos la notación conjuntista y la denotaremos por uv . Dado que una arista uv es un par no ordenado, uv y vu denotan a la misma arista. Diremos que los vértices u y v son los **extremos** de uv . Dada una arista e y v uno de sus extremos, diremos que e es **incidente** en el vértice v .

A toda gráfica podemos asociarle una **representación en el plano** de la siguiente manera: cada vértice es representado por un punto y una arista es representada por una curva continua que une los puntos asociados a sus vértices extremos.

Por ejemplo, tomemos en consideración la gráfica G tal que $V(G) = \{u, v, w, x, y, z, p\}$ y $E(G) = \{uv, uw, vw, vx, wx, yz\}$. Dado que $n = 7$ y $m = 6$, entonces G es de orden 7 y tamaño 6. Los extremos de la arista uv son los vértices u y v , asimismo, uv incide sobre u y v . Una posible representación en el plano de G se muestra en la Figura 1.2.

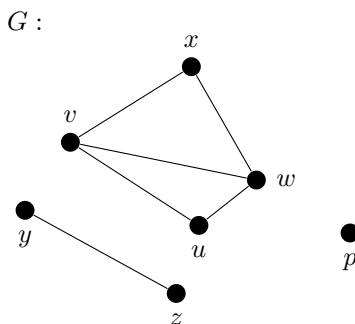


Fig. 1.2: Representación de la gráfica G .

Dos vértices u y v son **adyacentes** en G si $uv \in E(G)$. Dos aristas a y b son **adyacentes** en G si tienen un extremo en común. Una **transición** en una gráfica G es un par de aristas adyacentes en G . Dado v en $V(G)$, la **vecindad de v en G** , denotada por $N_G(v)$, es el conjunto $\{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. El conjunto de aristas incidentes en v , es decir $\{uw \in E(G) \mid u = v \text{ o } w = v\}$, será denotado por $E_G(v)$. Para el vértice v en la gráfica mostrada en la Figura 1.2 tenemos que $N_G(v) = \{u, w, x\}$ y $E_G(v) = \{vu, vw, vx\}$.

El **grado** de v , denotado por $\delta_G(v)$, se define como $|N_G(v)|$. Si $\delta_G(v) = 0$, decimos que v es un **vértice aislado**. Para $d \geq 0$ denotamos por $V_d(G)$ al conjunto $\{v \in V(G) \mid \delta_G(v) = d\}$. Si r es un natural y para todo v en $V(G)$ se cumple que $\delta_G(v) = r$, llamaremos a G una gráfica **r -regular**.

Teorema 1.2.1 (Primer Teorema de Gráficas). *Si G es una gráfica, entonces*

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2m.$$

Demostración. Sean G una gráfica y $D = \{(v, e) \in V(G) \times E(G) \mid v \text{ es extremo de } e\}$. Para cada vértice $v \in V(G) \setminus V_0(G)$, definimos V_v como el conjunto $\{(v, e) \mid v \text{ es extremo de } e\}$. Es claro que para todo $v \in V(G) \setminus V_0(G)$, $|V_v| = \delta_G(v)$ y que $\{V_v \mid v \in V(G)\}$ es una partición de D . De esta forma, $|D| = \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)$. Para cada $e \in E(G)$, definimos E_e como el conjunto $\{(v, e) \mid v \text{ es extremo de } e\}$. Dado que

1. INTRODUCCIÓN

cada arista e tiene dos extremos, entonces $|E_e| = 2$. Además, la familia $\{E_e \mid e \in E(G)\}$ es una partición de D , por lo que $|D| = 2m$.

$$\text{Así, } \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2m. \quad \square$$

Corolario 1.2.1. *Toda gráfica tiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración. Sea G una gráfica. Procediendo por contradicción, supongamos que G tiene un número impar de vértices de grado impar. Entonces la suma de los grados de los vértices de G es impar, lo cual contradice el Teorema 1.2.1. \square

Sean G una gráfica y $e = uv \in E(G)$. Una **subdivisión de la arista** e consiste en la eliminación de e y la adición de un nuevo vértice ajeno a G , digamos w , y las aristas uw y wv .

Diremos que H es **subgráfica** de una gráfica G , y lo denotaremos por $H \leq G$, si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si H cumple que $V(H) = V(G)$, entonces H es llamada **subgráfica generadora**. La gráfica H de la Figura 1.3a es una subgráfica de la gráfica G en la Figura 1.2.



Fig. 1.3: Subgráficas de G .

Una gráfica F es un **k -factor** de G si F es una subgráfica generadora k -regular de G .

Dado S un subconjunto no vacío de $V(G)$, definimos la **subgráfica inducida por S** , denotada por $G[S]$, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es S y $E(G[S]) = \{uv \in E(G) \mid \{u, v\} \subseteq S\}$. Si S un subconjunto propio de $V(G)$, se define la gráfica $G - S$ como la gráfica inducida por el conjunto $V(G) \setminus S$ y para el caso cuando $S = \{v\}$, denotaremos a $G - S$ por $G - v$. Denotaremos por G^o a la gráfica $G - V_0(G)$. En la Figura 1.3b se encuentra G^o para la gráfica G .

Si E es un subconjunto de $E(G)$, definimos la gráfica $G - E$ como la subgráfica generadora de G cuyo conjunto de aristas es $E(G) \setminus E$.

Dada una familia de gráficas \mathcal{A} , la cerradura de la clase mediante subgráficas inducidas por vértices será denotada por \mathcal{A}^{ind} , es decir, \mathcal{A}^{ind} consta de todas las subgráficas inducidas de las gráficas en la familia \mathcal{A} . Nótese que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{ind}$.

Un **camino** en G es una sucesión finita de vértices de G , digamos $W = (v_0, \dots, v_k)$, tal que para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$ se tiene que $v_i v_{i+1} \in E(G)$. El vértice v_0 es llamado el **vértice inicial** de W , mientras que v_k es el **vértice final**. Si $v_0 = u$ y $v_k = v$, llamaremos a W un uv -camino. Denotaremos por $V(W)$ y $E(W)$ al conjunto $\{v_i \in V(G) \mid i \in \{0, \dots, k\}\}$ y $\{v_i v_{i+1} \in E(G) \mid i \in \{0, \dots, k-1\}\}$, respectivamente. La **longitud** de W se define como el número k y es denotada por $l(W)$. Diremos que W es un **camino cerrado** si $v_0 = v_k$. Dados dos caminos $W_1 = (v_0, \dots, v_k)$ y $W_2 = (u_0, \dots, u_i)$, si $v_k = u_0$, definimos la **concatenación** de W_1 con W_2 , denotada por $W_1 \cup W_2$, como el camino $(v_0, \dots, v_k = u_0, \dots, u_i)$.

Debido a la naturaleza del trabajo aquí presentado, dado un camino (v_0, \dots, v_k) , será usual usar la notación $(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k)$, donde para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$, e_i denota la arista $v_i v_{i+1}$.

Un **paseo** es un camino (v_0, \dots, v_k) que no repite aristas, es decir, se tiene que para todo $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ las aristas $v_i v_{i+1}$ y $v_j v_{j+1}$ son distintas. Un paseo es cerrado si su vértice inicial y final son iguales. Diremos que un paseo T en una gráfica G es **euleriano** si $E(T) = E(G)$.

Un **trayectoria** es un camino (v_0, \dots, v_k) que no repite vértices, es decir, para todo $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, k\}$ se cumple que $v_i \neq v_j$. Una trayectoria con n vértices será denotada por P_n .

Un **ciclo** es un camino cerrado que no repite vértices, a excepción del vértice inicial y final, cuya longitud es al menos 3. Diremos que un ciclo C es **hamiltoniano** si $V(C) = V(G)$.

Dada una gráfica G y $S \subseteq V(G)$, diremos que S es un **conjunto independiente** si cualesquiera dos vértices distintos en S no son adyacentes. Diremos que S es un **conjunto dominante** si para cualquier vértice $v \in V(G) \setminus S$ existe $u \in S$ tal que $vu \in E(G)$.

De manera análoga, dado $M \subseteq E(G)$, diremos que M es un **apareamiento** si cualesquiera dos aristas distintas en M no son adyacentes. Un vértice v será llamado **M -saturado** si v es extremo de alguna arista en M . Dado un apareamiento M , una trayectoria P será llamada **M -alternante** si alterna aristas de M y $E(G) \setminus M$. Si, además, P cumple que su vértice inicial y vértice final no son M -saturados, entonces llamaremos a P una trayectoria **M -aumentante**. En la Figura 1.4 se muestra una gráfica F , un conjunto independiente $\{a, b, d\}$ resaltado en azul y las aristas de un apareamiento $M = \{dg, ea, bh\}$, resaltadas en naranja. La trayectoria (b, h, a, e, g, d, c) es M -alternante, mientras que la trayectoria (c, d, g, e, a, f) es

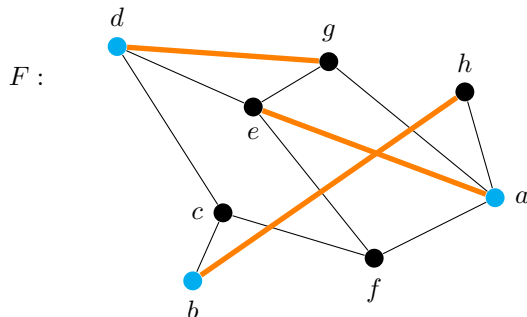


Fig. 1.4: En naranja un apareamiento y en azul un conjunto independiente de la gráfica \$F\$.

\$M\$-aumentante.

Diremos que \$G\$ es una gráfica **conexa** si para cualesquiera dos vértices \$u\$ y \$v\$ en \$V(G)\$ se tiene que existe un \$uv\$-camino en \$G\$. Una **componente conexa** de \$G\$ es una subgráfica conexa de \$G\$ tal que es máxima por contención con esta propiedad. La gráfica \$F\$ de la Figura 1.4 es conexa, mientras que la gráfica \$G\$ de la Figura 1.2 es no conexa. En dicha gráfica, las subgráficas inducidas por los conjuntos \$\{a, b, c, d\}\$, \$\{e, f\}\$ y \$\{g\}\$ son las componentes conexas de \$G\$.

Sea \$G\$ una gráfica conexa. Un vértice \$v\$ en \$V(G)\$ es llamado **vértice de corte** si la gráfica \$G - v\$ es no conexa. Si \$G\$ es no trivial, un subconjunto \$S\$ de \$V(G)\$ es llamado un **conjunto de corte** si la gráfica \$G - S\$ no es conexa o es trivial. Una arista \$e\$ en \$E(G)\$ es un **puente** si la gráfica \$G - e\$ no es conexa. Un conjunto \$E \subseteq E(G)\$ es un **conjunto de corte por aristas** si \$G - E\$ no es conexa. De esta manera, si \$u\$ y \$w\$ son dos vértices de \$G - S\$ tales que se encuentran en distintas componentes conexas de \$G - S\$, entonces diremos que \$S\$ es un **conjunto separador** de \$u\$ y \$w\$, si \$S = \{v\}\$, diremos que \$v\$ es un **vértice separador** de \$u\$ y \$w\$.

Una gráfica \$G\$ es **completa** si cualesquiera dos vértices distintos \$u\$ y \$v\$ en \$V(G)\$ son adyacentes. Denotaremos a la gráfica completa de orden \$n\$ por \$K_n\$. Diremos que \$G\$ es **multipartita completa** si existe una partición de \$V(G)\$ en conjuntos independientes, digamos \$\{A_1, \dots, A_k\}\$, tal que si \$\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, k\}\$, entonces para todo \$u \in A_i\$ y para todo \$v \in A_j\$ se tiene que \$uv \in E(G)\$. En particular, una gráfica multipartita completa con una partición en dos conjuntos independientes es llamada **bipartita completa**. En la Figura 1.5 se puede observar una gráfica completa y una gráfica multipartita completa.

Lema 1.2.2. *Si \$G\$ no es una gráfica multipartita completa, entonces existen tres vértices, digamos \$u, u'\$ y \$v\$, en \$V(G)\$ tales que \$uu' \in E(G)\$, \$uv \notin E(G)\$ y \$u'v \notin E(G)\$.*

Demostración. Procederemos por inducción fuerte sobre el orden de \$G\$. Dado que toda gráfica de orden a lo más 2 es multipartita completa, iniciamos la inducción con \$n = 3\$.

- *Caso Base.* Si G es una gráfica de orden 3 y no es multipartita completa, entonces existen tres vértices de G , digamos u, u', v tales que $uu' \in E(G)$, $uv \notin E(G)$ y $u'v \notin E(G)$.

Observe que si $m \in \{0, 2, 3\}$, entonces G es una gráfica multipartita completa. Por tanto, sólo resta verificar el caso $m = 1$, sin embargo, en este caso G tiene la estructura que buscamos.

- *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que si H tiene orden k , con $3 \leq k \leq n$, y no es multipartita completa, entonces existen tres vértices de H , digamos u, u', v tales que $uu' \in E(H)$, $uv \notin E(H)$ y $u'v \notin E(H)$.

- *Paso inductivo.*

Sea G una gráfica de orden $n + 1$ que no es multipartita completa. Notemos que como G no es multipartita completa, entonces G no es vacía, por lo que consideremos $uu' \in E(G)$. Si existe $v \in V(G)$ tal que $uv \notin E(G)$ y $u'v \notin E(G)$, entonces tenemos la subestructura deseada. En otro caso, definimos $A = \{x \in V(G) \mid ux \in E(G)\}$ y $B = \{x \in V(G) \mid u'x \in E(G)\}$.

Observe que $V(G) = A \cup B \cup \{u, u'\}$ por la suposición sobre los vértices u y u' .

Consideremos los siguientes casos.

1. $A = B$.

Notemos que entonces A no puede ser un conjunto independiente, pues en tal caso G sería tripartita completa con partición $\{A, \{u\}, \{u'\}\}$ en conjuntos independientes. Por tanto, existen $w, w' \in A$ tal que $ww' \in E(G)$. Si $A = \{w, w'\}$, entonces $G \cong K_4$, lo cual es una contradicción, pues G no es multipartita completa. Debe ser entonces que $3 \leq |A| = n - 1$.

Definimos $G' = G[A]$. Afirmamos que G' no es multipartita completa. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una partición de A en conjuntos independientes $\{A_1, \dots, A_k\}$ tal que cualesquiera dos vértices, en conjuntos distintos de la partición, son adyacentes. Dado que u y u' son adyacentes a todos los vértices de A , entonces $\{A_1, \dots, A_k, \{u\}, \{u'\}\}$ es una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes tal que cualesquiera dos vértices, en conjuntos distintos de la partición, son adyacentes, lo cual es una contradicción, pues G no es multipartita completa, mostrando así la afirmación.

Se sigue que G' es una gráfica que no es multipartita completa de orden $n - 1$ tal que $3 \leq n - 1$. Por hipótesis de inducción obtenemos que G' contiene la subestructura deseada y al ser ésta una subgráfica inducida de G , entonces G contiene la subestructura deseada.

2. $A \neq B$.

En tal caso, observe que si el conjunto $A \setminus B$ no es un conjunto independiente, entonces existen x y y en A que son adyacentes que no se encuentran en B , por lo que $u'x$ y $u'y$ no son aristas de G y de esto, G tiene la subestructura deseada. Note, además, que si existen z en $A \setminus B$ y z'

en B tales que $z'z \notin E(G)$, entonces los vértices z , z' y u' cumplen que $z'z \notin E(G)$, $u'z \notin E(G)$ y $u'z' \in E(G)$, por lo que G tendría nuevamente la subestructura deseada. De manera análoga, esto sucede para el conjunto $B \setminus A$.

Supongamos, entonces, que (i) tanto $A \setminus B$ como $B \setminus A$ son conjuntos independientes, además, que (ii) para todo vértice $x \in A \setminus B$ y para todo vértice $v \in B$, $xv \in E(G)$, y que (iii) para todo vértice $z \in B \setminus A$ y para todo vértice $v \in A$, $zv \in E(G)$.

Consideremos los siguientes subcasos para $A \cap B$:

2.1 $A \cap B = \emptyset$.

Entonces $\{A \cup \{u'\}, B \cup \{u\}\}$ es una partición en conjuntos independientes tal que para cualesquiera dos vértices en conjuntos distintos, estos son adyacentes. Esto es una contradicción, pues G no es una gráfica multipartita completa.

2.2 $A \cap B \neq \emptyset$.

Consideremos los siguientes casos.

2.2.1 $A \cap B$ es un conjunto independiente.

Entonces $\{(A \setminus B) \cup \{u'\}, (B \setminus A) \cup \{u\}, A \cap B\}$ es una partición en conjuntos independientes tal que para cualesquiera dos vértices en conjuntos distintos, estos son adyacentes. Esto es una contradicción, pues G no es una gráfica multipartita completa.

2.2.2 $A \cap B$ no es un conjunto independiente.

Consideremos $G' = G[A \cap B]$

Entonces existen z y z' en $A \cap B$ tales que $z'z \in E(G)$.

Si G' es una gráfica multipartita completa, entonces existe una partición de $A \cap B$ en conjuntos independientes, digamos $\{A_1, \dots, A_k\}$ tal que si $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ entonces para todo $u \in A_i$ y para todo $v \in A_j$ se tiene que $uv \in E(G')$. Se sigue, por tanto, que $\{A_1, \dots, A_k, (A \setminus B) \cup \{u'\}, (B \setminus A) \cup \{u\}\}$ es una partición en conjuntos independientes de $V(G)$ tal que para cualesquiera dos vértices en conjuntos distintos, estos son adyacentes. Esto es una contradicción, pues G no es una gráfica multipartita completa.

Si G' no es una gráfica multipartita completa, entonces debe existir un vértice distinto a z y z' , pues K_2 es multipartita completa. De esto, $3 \leq |A \cap B|$. Por hipótesis de inducción G' tiene la subestructura deseada. Como G' es una subgráfica inducida de G , entonces G debe contener como subgráfica dicha subestructura.

Por el principio de inducción el lema queda demostrado. □

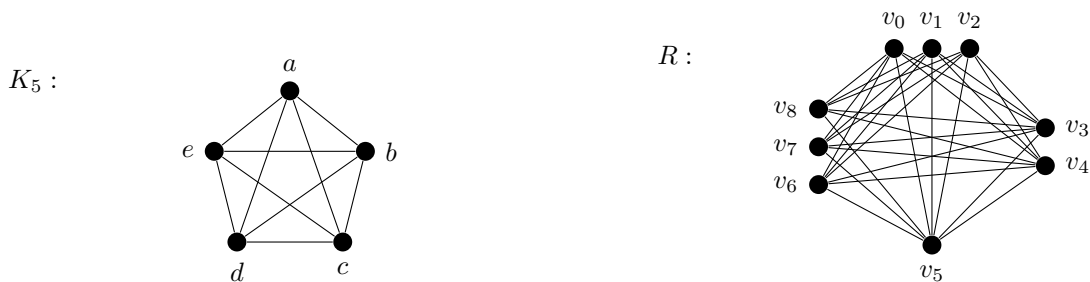


Fig. 1.5: La gráfica completa de orden cinco y R una gráfica multipartita completa.

Dadas dos gráficas G y H , diremos que son **isomorfas**, y lo denotaremos por $G \cong H$, si existe una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in E(H)$. La función f es llamada una **función de isomorfismo** entre G y H . Las gráficas J y K de la Figura 1.6 son isomorfas, pues $f : V(J) \rightarrow V(K)$ dada por $f(0) = a, f(1) = c, f(2) = e, f(3) = b$ y $f(4) = d$ es una función de isomorfismo.



Fig. 1.6: Gráficas isomorfas.

Si G_1, \dots, G_k son gráficas, entonces $\langle G_1, \dots, G_k \rangle$ denotará la clase de gráficas cerrada bajo isomorfismos más pequeña que contenga a $\{G_1, \dots, G_k\}$.

Denotaremos por $P_3, K_3, K_2 + K_2, P_4$ y L_4 a las gráficas mostradas en la Figura 1.7.

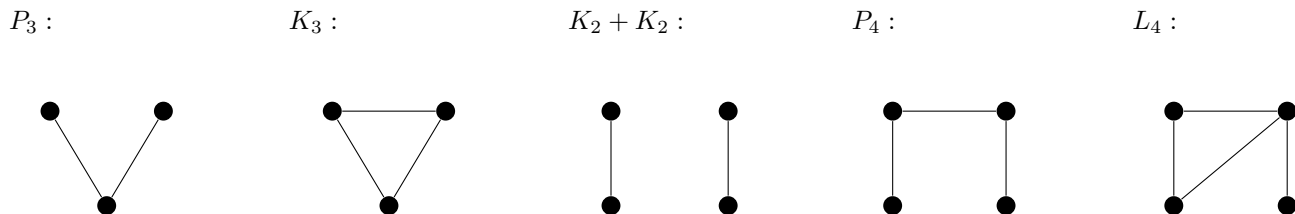


Fig. 1.7

1.3. Definiciones y resultados generales en complejidad computacional

1.3.1. La notación O -grande

Dada una función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, denotamos por $O(g(n))$, leído como O grande de g , al conjunto de funciones

$$\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{existen } c \in \mathbb{R}^+ \text{ y } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(n) \leq cg(n) \text{ para toda } n \geq n_0\}.$$

Dicha notación es usada para acotar superiormente a una función dentro de un factor constante. En la Figura 1.8 se muestra de manera intuitiva la idea detrás de la notación O grande. Para todos los valores n a la derecha de n_0 , el valor que toma la función f está en o por debajo de la función cg .

Decimos que $f(n)$ es $O(g(n))$ para indicar que f es una función en $O(g(n))$. Usaremos la notación O -grande principalmente para describir el tiempo de ejecución de un algoritmo, de forma que se nos permite considerar el consumo más significativo de algún recurso en el peor de los casos sin la necesidad de realizar un estudio detallado del algoritmo en cuestión. Dicha notación también nos será de utilidad para acotar el orden o tamaño de una gráfica respecto al orden o tamaño de otra gráfica.

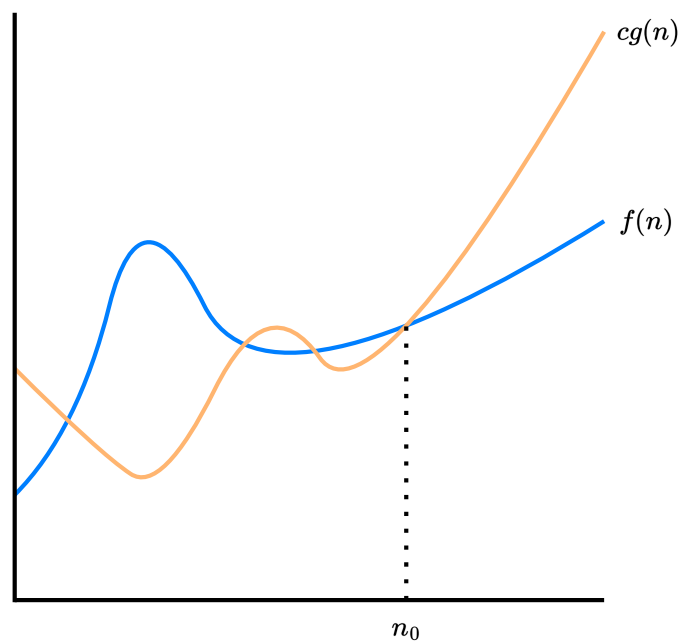


Fig. 1.8: Esquema de las gráficas de las funciones f y cg . A partir del valor n_0 la gráfica de f queda por debajo de la gráfica de cg .

1.3.2. Problemas de decisión, lenguajes y codificaciones

La teoría de la NP-Complejidad está diseñada y aplicada a **problemas de decisión**. Estos son aquellos problemas cuya solución está dada por una respuesta de *sí* o *no*. De manera abstracta, un problema de decisión Π consiste de un conjunto D_Π de **ejemplares** y un subconjunto $Y_\Pi \subseteq D_\Pi$ de ejemplares cuya respuesta es *sí*. Una forma común de presentar problemas de decisión está dada por dos partes; la primera está dada por un **ejemplar genérico** del problema donde se especifica el problema en términos de sus componentes, que pueden ser gráficas, funciones, números, etc. y la segunda por una pregunta en términos del ejemplar genérico cuyas únicas respuestas pueden ser *sí* o *no*. De esta manera, un ejemplar pertenece a D_Π si puede ser obtenido del ejemplar genérico de Π sustituyendo todos sus componentes genéricos por objetos particulares del tipo especificado, y el ejemplar pertenece a Y_Π si y sólo si la respuesta a la pregunta hecha, cuando se particulariza al ejemplar, es *sí*.

Dentro de la teoría de gráficas existe una inmensa variedad de problemas de decisión muy conocidos, a continuación listamos algunos de ellos:

Conjunto Dominante.

Ejemplar: Una gráfica G y un entero positivo k .

Pregunta: ¿Existe un conjunto dominante $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| \leq k$?

Conjunto Independiente.

Ejemplar: Una gráfica G y un entero positivo k .

Pregunta: ¿Existe un conjunto independiente $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| \geq k$?

Ciclo Hamiltoniano.

Ejemplar: Una gráfica G .

Pregunta: ¿ G contiene un ciclo hamiltoniano?

Conexidad.

Ejemplar: Una gráfica G .

Pregunta: ¿Es la gráfica G conexa?

Paseo Euleriano.

Ejemplar: Una gráfica G .

Pregunta: ¿ G contiene un paseo euleriano cerrado?

La razón por la que se trabajan problemas de decisión en complejidad computacional es debido a

que tienen una abstracción matemática rigurosa para ser representados y estudiados a la que llamamos **lenguajes** y que definiremos a continuación.

Un **alfabeto** es un conjunto finito y no vacío de elementos a los que llamamos **símbolos** y es comúnmente denotado por Σ . Una **cadena** es una sucesión finita de símbolos tomados de un alfabeto. La cadena vacía, denotada por ϵ , es la cadena con cero ocurrencias de símbolos y es una cadena que puede ser tomada de cualquier alfabeto. Por ejemplo, ϵ y 10110 son cadenas sobre el *alfabeto binario* $\Sigma = \{0, 1\}$. El **tamaño** de una cadena $w = a_0 \dots a_k$ es el número $k + 1$ y lo denotamos por $|w|$.

Dado un alfabeto Σ , expresamos el conjunto de todas las posibles cadenas sobre Σ por Σ^* . De esta manera, cualquier subconjunto L de cadenas tomadas de Σ^* es llamado un **lenguaje sobre Σ** .

La relación entre problemas de decisión y lenguajes está dada a través de los esquemas de codificación. Un **esquema de codificación** e de un problema de decisión Π provee una forma de describir un ejemplar de Π usando una cadena de símbolos sobre un alfabeto Σ . De esta forma, el esquema de codificación e para Π parte a Σ^* en tres conjuntos: aquellas cadenas que no son codificaciones de ejemplares de Π , aquellas que son codificaciones de ejemplares de Π cuya respuesta es *no* y aquellas que son codificaciones de ejemplares de Π cuya respuesta es *sí*. Este último conjunto es el **lenguaje asociado al problema Π bajo la codificación e** y es denotado por $L[\Pi, e]$, es decir,

$$L[\Pi, e] = \{x \in \Sigma^* \mid \Sigma \text{ es el alfabeto usado por } e \text{ y } x \text{ es la codificación bajo } e \text{ para algún } I \in Y_\Pi\}.$$

La teoría de la complejidad computacional asegura que si un resultado se satisface para el lenguaje $L[\Pi, e]$, entonces se satisface para Π bajo el esquema e .

Es común ser informal en este ámbito. Esto debido a que es normal que una propiedad sea independiente al esquema de codificación siempre y cuando nos restrinjamos a esquemas de codificación *razonables*. Esto es, si e y e' son dos esquemas de codificación para Π , entonces la propiedad se cumple para $L[\Pi, e]$ y $L[\Pi, e']$ o para ninguno. Así, se nos permite hablar de propiedades del problema Π sin tener que especificar ningún esquema de codificación, lo cual es práctica común. De esta manera, probar que la codificación x bajo una esquema e de una instancia $I \in \Pi$ pertenece al lenguaje $L[\Pi, e]$ nos permite concluir que $I \in Y_\Pi$.

Por esquemas razonables nos referimos a aquellos esquemas tal que al codificar mismos ejemplares de un problema, estas codificaciones difieran en tamaño polinomial. Por ejemplo, supongamos que deseamos

codificar una gráfica G . Podemos hacerlo simplemente listando todos sus vértices y aristas, o listando los renglones de la matriz de adyacencia, o una lista que contenga la lista de vecinos de cada vértice. Dichos ejemplos de codificaciones difieren en tamaño de manera polinomial.

1.3.3. Máquinas de Turing Deterministas y la clase P

Para poder formalizar la noción de algoritmo primero necesitamos definir un modelo de cómputo. Una **Máquina de Turing Determinista**, usualmente abreviada por MTD , es una máquina abstracta que consiste de un control de estado, un cabezal de lectura/escritura y una cinta infinita hacia ambos lados dividida en celdas numeradas; cada celda contiene un símbolo de un alfabeto dado. Una representación de dicha máquina puede visualizarse en la Figura 1.9.

Un **programa** para una MTD especifica la siguiente información:

1. Un alfabeto Γ de símbolos para la cinta, incluyendo $\Sigma \subseteq \Gamma$ un *alfabeto de símbolos de entrada*, así como el símbolo vacío $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$,
2. Un conjunto finito de estados Q , incluidos un estado distinguido de inicio q_0 y dos estados distinguidos de término q_Y y q_N ,
3. Una *función de transición* $\delta : (Q \setminus \{q_Y, q_N\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{1, -1\}$.

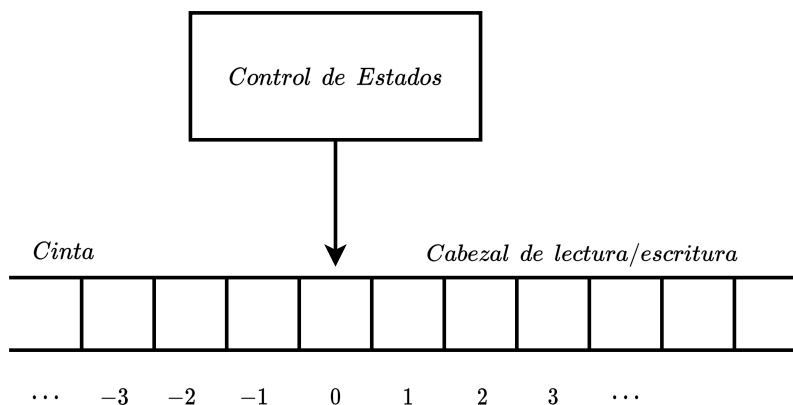


Fig. 1.9: Esquema de una Máquina de Turing Determinista.

El funcionamiento de dicho programa es simple. La *entrada* de la MTD es una cadena $x \in \Sigma^*$. La cadena x es colocada, símbolo por símbolo, en las celdas 1 a $|x|$. Todas las demás celdas inicialmente contienen el símbolo vacío \sqcup . El programa inicia su operación en el estado q_0 , con el cabezal de lectura/escritura escaneando la celda 1. El cómputo después procede paso por paso usando la función de transición. Si el

estado actual q es q_Y o q_N , entonces el cómputo termina con respuesta *Sí* si $q = q_Y$, o con respuesta *No* si $q = q_N$. En otro caso, el estado actual q se encuentra en $Q \setminus \{q_Y, q_N\}$, algún símbolo $s \in \Gamma$ se encuentra en la celda siendo escaneada, y el valor $\delta(q, s)$ está definido. Supongamos que $\delta(q, s) = (q', s', \Delta)$. Entonces el cabezal de lectura/escritura borra el símbolo s , escribe el símbolo s' en su lugar, y se mueve una celda a la izquierda si $\Delta = -1$, o una celda a la derecha si $\Delta = 1$. Al mismo tiempo, el estado de control cambia su estado de q a q' . Esto completa un paso del cómputo, y se puede proceder al siguiente, si existe.

Decimos que un programa para una *MTD*, digamos M , **acepta** a $x \in \Sigma^*$ si y sólo si M se detiene en el estado q_Y cuando es aplicado como entrada x . El **lenguaje reconocido** por M está dado por

$$L_M = \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ acepta a } x\}.$$

Observe que esta definición de lenguaje reconocido no requiere que M termine para todas las cadenas de entrada sobre Σ^* , sólo para aquellas en L_M . Si $x \in \Sigma^* \setminus L_M$, entonces el cómputo de M para x puede terminar en el estado q_N , o puede que continúe para siempre sin detenerse. Para que un programa dada una *MTD* corresponda a nuestra noción de **algoritmo**, dicho programa debe detenerse en todas las posibles cadenas sobre su alfabeto de entrada.

La correspondencia entre lenguajes *reconocibles* y la resolución de problemas es simple. Decimos que un programa *MTD*, digamos M , resuelve el problema de decisión Π bajo el esquema de codificación e si M se detiene para todas las posibles cadenas sobre su alfabeto de entrada y $L_M = L[\Pi, e]$.

El **tiempo** usado por el cómputo de un programa M para una entrada x es el número de pasos que ocurren en el cómputo hasta que se llega a un estado de término, es decir, algún estado en $\{q_Y, q_N\}$. Dado un programa M para una *MTD* que se detiene en todas las entradas $x \in \Sigma^*$, su **función de complejidad en tiempo** $T_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ está dada por:

$$T_M(n) = \text{máx}\{m \mid \text{existe } x \in \Sigma^*, \text{ con } |x| = n, \text{ tal que el cómputo de } M \text{ con } x \text{ toma tiempo } m\}.$$

Dicho programa M es llamado un **programa de tiempo polinomial** si existe un polinomio p tal que $T_M(n)$ es $O(p(n))$. Si p es el polinomio constante, es usual decir que M toma tiempo constante o que es $O(1)$. Sucede lo mismo cuando p es n , n^2 o n^3 , en cuyo caso decimos que toma tiempo lineal, cuadrático o cúbico, respectivamente.

Con lo anterior, podemos definir la primera clase importante de lenguajes: la clase P. Dicha clase se

define como sigue:

$$P = \{L \mid \text{existe un programa de tiempo polinomial } M \text{ tal que } L = L_M\}.$$

Decimos, entonces, que un problema de decisión Π está en P bajo el esquema de codificación e si $L[\Pi, e] \in P$, es decir, si existe un programa para la *MTD* que resuelve a Π bajo el esquema de codificación e . Considerando la equivalencia anteriormente discutida respecto a esquemas de codificación razonables, omitiremos la especificación particular del esquema de codificación razonable, simplemente diciendo que el problema de decisión Π pertenece a P .

También seremos informales respecto al término **algoritmo de tiempo polinomial**. La contraparte formal de dicho término es un programa de tiempo polinomial para una *MTD*. Sin embargo, dada la equivalencia polinomial entre modelos realistas de cómputo usados, como las máquinas de acceso aleatorio, con la *MTD*, la definición formal de P podría haber sido reformulada en términos de programas para cualquier modelo de cómputo y la misma clase de lenguajes habría resultado. Por tanto, no necesitamos atarnos a los detalles del modelo de la *MTD* cuando se demuestra que ciertas tareas pueden ser resueltas por algoritmos de tiempo polinomial. De hecho, se seguirá práctica estándar y se discutirán algoritmos de manera independiente al modelo de cómputo, así, trabajaremos directamente con los componentes de los ejemplares y no en su descripción codificada. La afirmación implícita que se hace es que, de desearse, se podría diseñar un programa de tiempo polinomial para una *MTD* por cada algoritmo de tiempo polinomial del que se habla.

1.3.4. La clase NP

Para introducir esta clase de lenguajes/problemas de decisión presentamos una idea intuitiva de la noción que dicha clase pretende capturar.

Consideremos el problema **Ciclo Hamiltoniano** descrito en la Sección 1.3.2: Dada una gráfica G , ¿existe un ciclo C de G tal que $V(G) = V(C)$? No sabemos si existe un algoritmo polinomial para resolver este problema. Sin embargo, supongamos que alguien afirma, para un ejemplar específico, que la respuesta es *sí*. En tal caso, podríamos solicitar que pruebe su afirmación proporcionando una sucesión de vértices con las propiedades requeridas por el problema. Sería entonces simple verificar la veracidad o falsedad de su afirmación comprobando que dicha sucesión es, en efecto, un ciclo hamiltoniano. Más aún, podríamos especificar un algoritmo de tiempo polinomial respecto al orden de la gráfica que verificase, dada una sucesión, si es o no un ciclo hamiltoniano. La clase NP proviene justamente de la noción de *verificabilidad*

en tiempo polinomial.

Un **verificador**, digamos V , para un lenguaje A sobre un alfabeto Σ , es un algoritmo tal que

$$\{w \in \Sigma^* \mid V \text{ acepta } (w, c) \text{ para alguna cadena } c\} = A.$$

Se mide el tiempo de un verificador respecto al tamaño de w , de manera que un verificador de tiempo polinomial toma tiempo $O(p(|w|))$ para algún polinomio p . Un lenguaje es **polinomialmente verificable** si tiene un verificador en tiempo polinomial. Los verificadores usan información adicional que es representada por el símbolo c al cual llamamos **certificado** de pertenencia a A . Observe, por tanto, que dicho certificado debe tener tamaño polinomial respecto a w , pues es el tiempo que el verificador tiene acceso a su cómputo, en especial, a leer c .

Definimos de esta manera a la clase NP como la clase de lenguajes polinomialmente verificables. El término NP proviene de **tiempo polinomial no determinista** y es una forma alternativa de definir la clase usando máquinas de Turing no deterministas.

Dicho esto, para probar que un problema, digamos Π , se encuentra en NP, basta describir un algoritmo polinomial V tal que para cada $I \in \Pi$, $I \in Y_\Pi$ si y sólo si existe un certificado de tamaño polinomial respecto a I con el cual V acepte a I .

Note que la clase P está contenida en NP, pues dado un lenguaje en P podemos usar como verificador algún algoritmo polinomial que lo resuelva y como certificado la cadena vacía.

1.3.5. Reducciones polinomiales, problemas NP-Difíciles y NP-Compleitud

Dados dos lenguajes $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ y $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, una **reducción polinomial de L_1 a L_2** es una función $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ tal que:

1. Existe un programa polinomial para una *MTD* que computa f .
2. Para toda $x \in \Sigma_1^*$, $x \in L_1$ si y sólo si $f(x) \in L_2$.

Si dicha función existe, decimos que L_1 **se reduce polinomialmente a L_2** y lo denotamos por $L_1 \propto L_2$.

La importancia de las reducciones polinomial proviene del siguiente lema.

Lema 1.3.6. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes. Si $L_1 \propto L_2$, entonces $L_2 \in P$ implica $L_1 \in P$.

Demostración. Sean Σ_1 y Σ_2 los alfabetos de L_1 y L_2 , respectivamente, y $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ una reducción polinomial de L_1 a L_2 . Denotemos por M_f el programa polinomial para la *MTD* que computa f y por M_2 el programa polinomial para la *MTD* que reconoce a L_2 . Un programa de tiempo polinomial que reconozca a L_1 puede ser construido al componer M_f con M_2 . Para cada entrada $x \in \Sigma_1^*$, aplicamos la primera parte que corresponde al programa M_f para construir $f(x) \in \Sigma_2$. Luego, aplicamos la segunda parte que corresponde al programa M_2 para determinar si $f(x) \in L_2$. Puesto que $x \in L_1$ si y sólo si $f(x) \in L_2$, entonces hemos obtenido un programa que reconoce a L_1 . Se sigue inmediatamente que su tiempo de ejecución es polinomial debido al hecho que M_f y M_2 operan en tiempo polinomial. Si p_1 y p_2 son los polinomios de las funciones de complejidad en tiempo de M_f y M_2 , entonces $|f(x)| \leq p_f(|x|)$, y el tiempo de ejecución del programa descrito es $O(p_f(|x|) + p_2(p_f(|x|)))$, lo cual está acotado por un polinomio sobre $|x|$. \square

Si Π_1 y Π_2 son dos problemas de decisión con esquemas de codificación e_1 y e_2 , respectivamente, escribiremos $\Pi_1 \propto \Pi_2$ si $L[\Pi_1, e_1] \propto L[\Pi_2, e_2]$. Nuevamente, se omitirá la referencia a los esquemas de codificación, teniendo en mente que asumimos el uso de esquemas de codificación razonables. Así, al nivel de problemas de decisión, podemos considerar una **reducción polinomial del problema de decisión Π_1 al problema de decisión Π_2** como una función $f : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ tal que:

1. f es computable por un algoritmo de tiempo polinomial.
2. Para todo $I \in D_{\Pi_1}$, $I \in Y_{\Pi_1}$ si y sólo si $f(I) \in Y_{\Pi_2}$.

La relación dada por las reducciones polinomiales es especialmente útil al ser transitiva.

Lema 1.3.7. Sean L_1 , L_2 y L_3 lenguajes. Si $L_1 \propto L_2$ y $L_2 \propto L_3$, entonces $L_1 \propto L_3$.

Demostración. Sean Σ_1 , Σ_2 y Σ_3 los alfabetos de los lenguajes L_1 , L_2 y L_3 , respectivamente. Denotemos por $f_1 : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ a la reducción polinomial de L_1 a L_2 y por $f_2 : \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_3^*$ a la reducción polinomial de L_2 a L_3 . Entonces la función $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_3^*$ dada por $f(x) = f_2(f_1(x))$ para toda $x \in \Sigma_1^*$ es la reducción polinomial requerida de L_1 a L_3 . Es evidente que $x \in L_1$ si y sólo si $f(x) \in L_3$, y el hecho de que f puede ser computada por un programa de tiempo polinomial para una *MTD* es análogo al argumento usado en el Lema 1.3.6. \square

Formalmente, un lenguaje L es **NP-difícil** si para cualquier lenguaje L' en NP sucede que $L' \propto L$. Informalmente, un problema de decisión Π es **NP-difícil** si para todo problema de decisión Π' en NP sucede que $\Pi' \propto \Pi$.

De esta forma, un lenguaje L es **NP-completo** si L está en NP y es NP-difícil. Nuevamente, de manera informal, un problema de decisión Π es NP-completo si Π está en NP y para todo problema de decisión Π' en NP sucede que $\Pi' \leq \Pi$. El Lema 1.3.6 nos conlleva a considerar a los problemas NP-completos como los problemas “más difíciles en NP”. Encontrar un algoritmo polinomial para algún problema NP-completo implicaría que todos los problemas en NP son solubles en tiempo polinomial. Si se demuestra que para algún problema NP-completo no existe un algoritmo polinomial que lo resuelva, entonces ningún problema NP-completo es soluble en tiempo polinomial.

Sin embargo, probar que un problema es NP-completo dada la definición proporcionada puede parecer complicado y, en principio, no es aparente que dichos problemas existan. El siguiente lema muestra que poseer un problema NP-completo nos simplificaría esta tarea.

Lema 1.3.8. *Sean L_1 y L_2 lenguajes. Si L_1 y L_2 se encuentran en NP, L_1 es NP-completo y $L_1 \leq L_2$, entonces L_2 es NP-completo.*

Demostración. Dado que L_2 se encuentra en NP, basta verificar para todo $L \in \text{NP}$, $L \leq L_2$. Sea $L \in \text{NP}$. Como L_1 es NP-completo, entonces $L \leq L_1$ y por el Lema 1.3.7, obtenemos que $L \leq L_2$. Por tanto, L_2 es NP-completo. \square

Este lema traducido a problemas de decisión nos expresa que para probar que un problema Π es NP-completo basta probar que:

1. Π se encuentra en NP.
2. Existe un problema NP-completo que se reduce a Π .

Antes de enunciar el Teorema de Cook-Levin, que nos provee del primer problema NP-completo, necesitamos las siguientes definiciones.

Sea $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ un conjunto de variables booleanas. Una *asignación de verdad* para A es una función $s: A \rightarrow \{1, 0\}$. Si $a \in A$ y $s(a) = 1$, decimos que a es verdadera bajo s , en otro caso, decimos que a es falsa bajo s . La negación de una variable a es denotada por \bar{a} y es verdadera bajo s si y sólo si $s(a) = 0$. Llamamos a a y \bar{a} *literales* sobre A .

Una *cláusula* es un conjunto de literales sobre A , por ejemplo, $\{a_1, \bar{a}_3, a_5\}$. Este conjunto representa la disyunción de dichas literales y es *satisfecha* por una asignación de verdad si y sólo si al menos una de las literales es verdadera bajo la asignación. Diremos que una asignación de verdad s *satisface* una colección de cláusulas φ sobre A si y sólo si s satisface a todas las cláusulas de φ .

El problema de **Satisfacibilidad**, o **SAT**, plantea lo siguiente:

Satisfacibilidad (o **SAT**).

Ejemplar: Una colección de cláusulas φ sobre un conjunto de variables booleanas A .

Pregunta: ¿Existe una asignación de variables para A tal que satisfaga φ ?

Teorema 1.3.1 (Teorema de Cook-Levin). **Satisfacibilidad** es NP-completo.

A partir del Teorema de Cook-Levin y el Lema 1.3.8 es posible demostrar que una gran variedad de problemas son NP-Completos [9], como por ejemplo **3-SAT**, **Conjunto independiente**, **Conjunto dominante**, etc. Entre ellos, **3-SAT** es especialmente importante debido a su amplio uso, por lo que es presentado a continuación.

3-SAT.

Ejemplar: Una colección de cláusulas $\varphi = \{C_1, \dots, C_n\}$ sobre un conjunto de variables booleanas A tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $|C_i| = 3$.

Pregunta: ¿Existe una asignación de variables para A tal que satisfaga a φ ?

1.4. El problema \mathcal{A} -CP

Sea v un vértice de una gráfica G . Una **gráfica de transición de v** es cualquier gráfica cuyos vértices son las aristas que inciden en v . Si G es una gráfica y, para todo vértice v en G , $T(v)$ denota una gráfica de transición de v , la familia $\{T(v) \mid v \in V(G)\}$ es llamada **sistema de transición** de G . En la Figura 1.10 podemos ver un ejemplo de una gráfica G con un sistema de transición T .

Dada una gráfica G con sistema de transición T , un camino $W = (x_0, e_0, x_1, \dots, e_{n-1}, x_n)$ es **T -compatible** si para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ se tiene que $e_{i-1}e_i \in E(T(x_i))$. Si, además, W es cerrado y $e_{n-1}e_0 \in E(T(x_0))$, entonces W es un camino cerrado T -compatible. Por ejemplo, la trayectoria $(e, e_0, f, e_1, i, e_2, c, e_3, g, e_4, d)$ considerada en la Figura 1.10 es T -compatible para la gráfica G y el sistema de transición T , pues satisface que $e_0e_1 \in E(T(f))$, $e_1e_2 \in E(T(i))$, $e_2e_3 \in E(T(c))$ y $e_3e_4 \in E(T(g))$, mientras que la trayectoria $(e, a_0, h, a_1, b, a_2, g, a_3, d)$ no es T -compatible ya que $a_2a_3 \notin E(T(g))$.

Con estas definiciones y dada \mathcal{A} una familia de gráficas, Szeider en [13] estudia el siguiente problema de decisión:

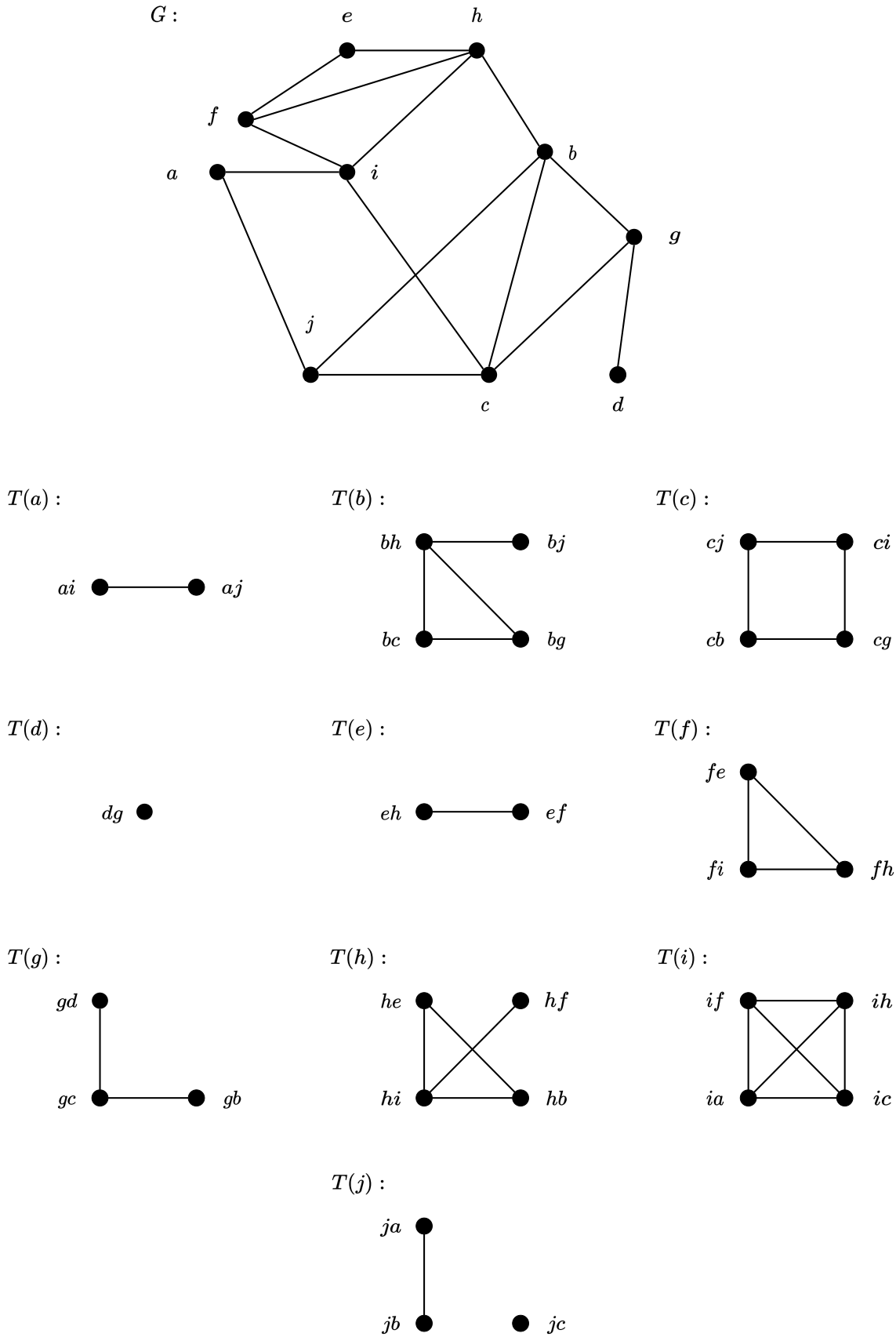


Fig. 1.10: Una gráfica G y la gráfica de transición para cada vértice de un sistema de transición T .

\mathcal{A} -Compatible Path (o \mathcal{A} -CP).

Ejemplar: Una gráfica G con un sistema de transición $T \subseteq \mathcal{A}$ y dos vértices distintos x y y .

Pregunta: ¿Existe una xy -trayectoria T -compatible?

Proposición 1.4.1. *El problema \mathcal{A} -CP se encuentra en NP.*

Demostración. Sea (G, T, x, y) un ejemplar de dicho problema. Podemos, entonces, considerar como certificado una xy -trayectoria en G . Basta verificar si aristas consecutivas cumplen con ser adyacentes en la gráfica de transición del vértice extremo en común.

Así, \mathcal{A} -CP está en NP. □

Un problema estudiado anteriormente y cercano a \mathcal{A} -CP se puede encontrar en [10]. Dicho problema establece lo siguiente:

\mathcal{A} -Compatible 2-Factor (o \mathcal{A} -C2F).

Ejemplar: Una gráfica G con un sistema de transición $T \subseteq \mathcal{A}$.

Pregunta: ¿Existe F un 2-factor de G tal que todo ciclo de F sea T -compatible?

En [10] Kratochvíl y Poljak prueban que el problema \mathcal{A} -C2F general es NP-completo, sin embargo, es soluble en ciertos casos especiales. En particular, demuestran el siguiente teorema que nos será de utilidad más adelante.

Teorema 1.4.1. *Sea G una gráfica con sistema de transición T . Entonces \mathcal{A} -C2F es soluble en tiempo polinomial si \mathcal{A} consiste únicamente de gráficas multipartitas completas.*

NP-Complejidad del problema \mathcal{A} -CP

En este capítulo se hace un estudio detallado del artículo *Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions* publicado por Stefan Szeider. En [13] se prueba que el problema \mathcal{A} -CP es NP-completo y para esto, primero es necesario demostrar varias proposiciones y lemas donde \mathcal{A} contiene únicamente gráficas muy específicas y, sin embargo, el problema continúa siendo NP-completo, lo cual permitirá finalmente mostrar la NP-Complejidad del problema general. La última sección muestra que bajo dos casos particular de \mathcal{A} , \mathcal{A} -CP puede ser resuelto en tiempo lineal.

2.1. El problema \mathcal{A} -CP es NP-Completo

Proposición 2.1.1. *El problema $\langle K_3, K_2 + K_2 \rangle$ -CP es NP-completo.*

Demostración. Demostraremos que **3-SAT** se reduce polinomialmente a $\langle K_3, K_2 + K_2 \rangle$ -CP, es decir,

$$\mathbf{3-SAT} \propto \langle K_3, K_2 + K_2 \rangle\text{-CP}. \quad (2.1)$$

Sean $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ un conjunto de variables booleanas y $\varphi = \{C_1, \dots, C_n\}$ una colección de cláusulas sobre A tal que para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ la cláusula C_i es de la forma $\{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$ para tres literales distintas $x_{i,j}$, donde $j \in \{1, 2, 3\}$. Podemos asumir que (i) ninguna cláusula de φ contiene a x y \bar{x} para cada una de sus literales, ya que en caso contrario la cláusula sería verdadera bajo cualquier asignación de verdad, y (ii) que φ no contiene literales puras, es decir, literales que suceden sólo positiva o negativamente, pues en tal caso su valor de verdad ya está determinado. Para cada cláusula C_i construimos una gráfica G_i tal que su conjunto de vértices es $\{s_i, t_i, v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ y su conjunto de aristas es $\bigcup_{j=1}^3 \{s_i v_{i,j}, v_{i,j} t_i\}$. El vértice $v_{i,j}$ representa la literal $x_{i,j}$ de la cláusula C_i . Además, supondremos que si $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, entonces $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ subdividimos la arista $v_{i,1} t_i$ introduciendo

un nuevo vértice t_i^* . De manera análoga, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ subdividimos la arista $s_i v_{i,1}$ introduciendo un nuevo vértice s_i^* . Denotemos, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, por G_i^* a la gráfica resultante de esta construcción.

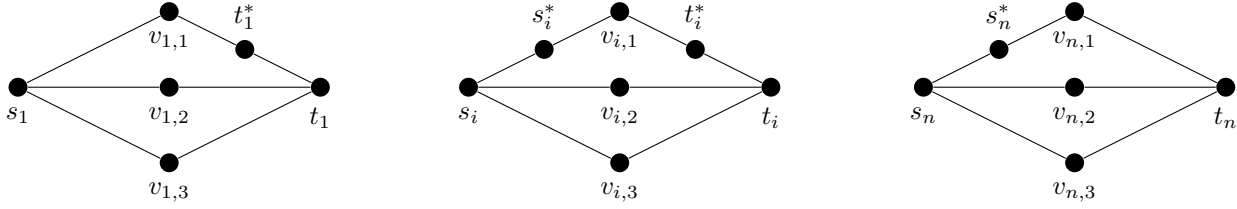


Fig. 2.1: De izquierda a derecha: G_1^* , G_i^* con $i \in \{2, \dots, n-1\}$ y G_n^* .

Ahora, unimos las gráficas G_1^*, \dots, G_n^* añadiendo las aristas $t_i^* s_{i+1}^*$ con $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y llamemos G a esta gráfica.

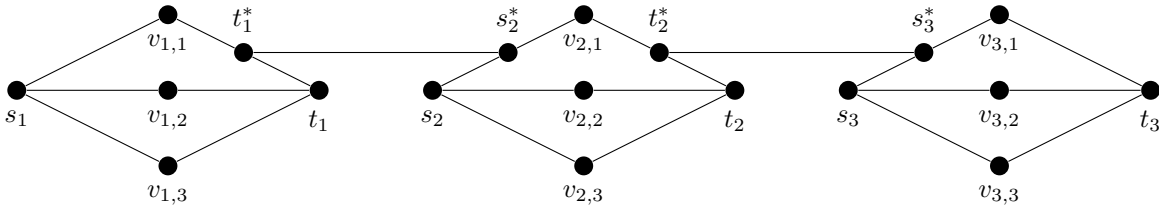


Fig. 2.2: La gráfica G para una colección de tres cláusulas.

Llamaremos a un par de vértices $\{v_{i,j}, v_{i',j'}\}$ *prohibidos* si $x_{i,j} = \overline{x_{i',j'}}$ para las literales correspondientes en φ y denotaremos por F al conjunto de todos los pares prohibidos en G . Una $s_1 t_n$ -trayectoria P en G es *satisfacible* si $V(P)$ no contiene ambos vértices de un par prohibido.

Afirmación 1. Una asignación de verdad s satisface a φ si y sólo si corresponde a una trayectoria satisfacible en G .

Primero mostraremos la parte suficiente, es decir, supondremos que s es una asignación de verdad que satisface a φ y encontraremos una trayectoria satisfacible en G a partir de s . Dado que s satisface a φ , entonces para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ al menos una literal $x_{i,j}$, con $1 \leq j \leq 3$, es verdadera bajo s , es decir, sucede que $s(x_{i,j}) = 1$. Sea $B = \{x_{1,s_1}, \dots, x_{n,s_n}\}$ el conjunto de literales tal que si $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces x_{k,s_k} es una literal de C_k y $s(x_{k,s_k}) = 1$. Observemos que si $\{u, v\} \subseteq B$ y $u \neq v$, entonces $u \neq \bar{v}$, pues en otro tendríamos que $s(u) = s(\bar{v}) = 1$ y $s(v) = 1$, por lo que s no sería una asignación de verdad.

Para cada $x_{k,s_k} \in B$, definimos la trayectoria T_k en G de la siguiente forma:

- Si $s_k = 1$,

$$T_k = \begin{cases} (s_1, v_{1,1}, t_1^*, s_2^*) & \text{si } k = 1 \\ (s_n^*, v_{n,1}, t_n) & \text{si } k = n \\ (s_k^*, v_{k,1}, t_k^*, s_{k+1}^*) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

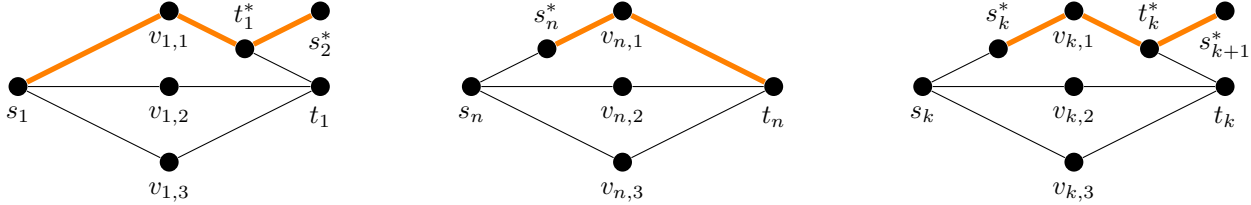


Fig. 2.3: De izquierda a derecha la trayectoria resultante para $k = 1$, $k = n$ y $k = 2, \dots, n - 1$.

- Si $s_k = 2$,

$$T_k = \begin{cases} (s_1, v_{1,2}, t_1, t_1^*, s_2^*) & \text{si } k = 1 \\ (s_n^*, s_n, v_{n,2}, t_n) & \text{si } k = n \\ (s_k^*, s_k, v_{k,2}, t_k, t_k^*, s_{k+1}^*) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

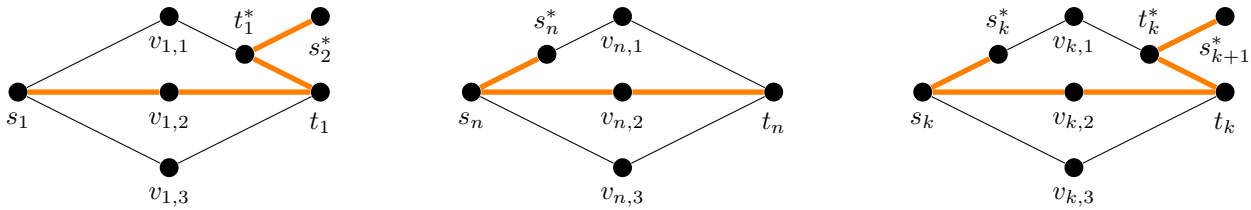


Fig. 2.4: De izquierda a derecha la trayectoria resultante para $k = 1$, $k = n$ y $k = 2, \dots, n - 1$.

- Si $s_k = 3$,

$$T_k = \begin{cases} (s_1, v_{1,3}, t_1, t_1^*, s_2^*) & \text{si } k = 1 \\ (s_n^*, s_n, v_{n,3}, t_n) & \text{si } k = n \\ (s_k^*, s_k, v_{k,3}, t_k, t_k^*, s_{k+1}^*) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

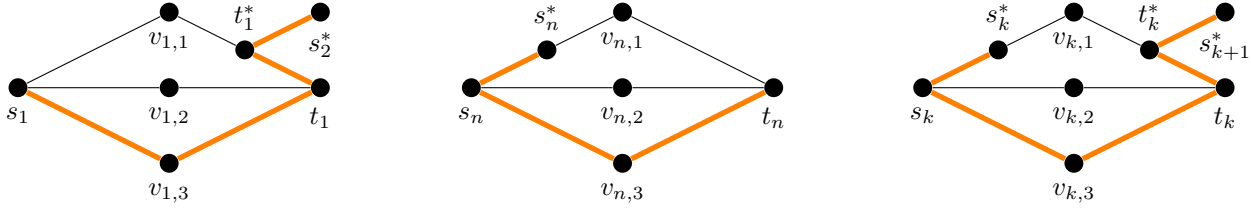


Fig. 2.5: De izquierda a derecha la trayectoria resultante para $k = 1$, $k = n$ y $k = 2, \dots, n - 1$.

Sea T el camino obtenido al concatenar las trayectorias antes mencionadas, es decir:

$$T = \bigcup_{i=1}^n T_i$$

Notemos que al ser T_1 una $s_1 s_2^*$ -trayectoria, T_n una $s_n^* t_n$ -trayectoria y para toda $k \in \{2, \dots, n - 1\}$, T_k una $s_k^* s_{k+1}^*$, se tiene que T está bien definido. Puesto que las trayectorias T_k son ajenas por vértices internos, entonces T es una $s_1 s_n$ -trayectoria. Además, recordemos que si $\{u, v\} \subseteq B$ y $u \neq v$, entonces $u \neq \bar{v}$, por lo que T es una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible.

Ahora, demostraremos la parte necesaria, es decir, supondremos que existe una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible en G , digamos T , y a partir de ella encontraremos una asignación de verdad s que hace verdadera a φ . Como para toda $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ la arista $t_i^* s_{i+1}^*$ es un puente entre los vértices de las subgráficas G_k^* , $k \in \{1, \dots, i\}$, y los vértices de las subgráficas G_l^* , $l \in \{i + 1, \dots, n\}$, entonces la trayectoria T debe usar forzosamente los pares de vértices $\{s_1, t_1^*\}$, $\{s_n^*, t_n\}$ y $\{s_i^*, t_i^*\}$, con $i \in \{2, \dots, n - 1\}$. Además, observemos que los conjuntos $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ son conjuntos separadores para los vértices s_i^* y t_i^* en la subgráfica G_i^* de G para toda $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, así como $\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}\}$ y $\{v_{n,1}, v_{n,2}, v_{n,3}\}$ son conjuntos separadores para los pares de vértices $\{s_1, t_1^*\}$ y $\{s_n^*, t_n\}$ en las subgráficas G_1^* y G_n^* de G , respectivamente. Debe ser entonces que $V(T) \cap \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

Para cada vértice $v_{i,j}$, con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$, tal que $v_{i,j} \in V(T)$ consideremos su literal $x_{i,j}$ en la cláusula C_i y $a \in A$ la variable que usa dicha literal. Si $x_{i,j}$ es la negación de a , definimos $s(a) = 0$, en otro caso, definimos $s(a) = 1$. Cualquier variable a la que no se le haya asignado un valor puede tomar cualquier valor de verdad. Dicha asignación de variables está bien definida, pues al ser T una trayectoria satisfacible, a cada variable de A le asignamos un único valor de verdad. Más aún, s hace verdadera a φ , puesto que para cada cláusula en $\{C_1, \dots, C_n\}$ existe al menos una literal que se hace verdadera bajo s , por lo que la cláusula resulta verdadera.

Con lo anterior, queda demostrada la afirmación 1.

En vista de que φ no contiene literales puras, como se había supuesto en (ii), entonces cada vértice $v_{i,j}$, con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$, está contenido en al menos un par prohibido, modificaremos G y F de tal manera que cada vértice esté contenido en, a lo más, un par prohibido. Supongamos que un vértice v está contenido en q pares prohibidos, digamos $\{v, v_i\}$ con $i \in \{1, \dots, q\}$ y $q > 1$. Sean u y u' los dos vértices adyacentes a v en G . Removemos v de G y agregamos una uu' -trayectoria de longitud $q + 1$ introduciendo nuevos vértices w_1, \dots, w_q . Para cada $i \in \{1, \dots, q\}$, reemplazamos en F el par $\{v, v_i\}$ por el nuevo par $\{w_i, v_i\}$. Repetimos este proceso para cada vértice que esté contenido en más de un par prohibido de F . Llamemos a la gráfica resultante y al nuevo conjunto de pares prohibidos G' y F' , respectivamente. Observe que todo vértice v en G' tiene grado 2 o 3; si $\delta(v) = 2$, entonces v se encuentra en exactamente un par prohibido de F' ; si $\delta(v) = 3$, entonces $v \in \{s_i, t_i, s_i^*, t_i^*\}$ para algún $i \in \{2, \dots, n-1\}$ o $v \in \{s_1, t_1, t_1^*, s_n, s_n^*, t_n\}$.

Afirmación 2. G contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible si y sólo si G' contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible.

Demostramos primero la parte suficiente: si G contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible, digamos T , entonces G' contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible.

Supongamos que $T = (v_0 = s_1, v_1, \dots, v_k = t_n)$. Sea V el conjunto de vértices reemplazados de G por trayectorias en G' y $R = V(T) \cap V$. Si R es vacío, entonces T es una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible en G' , pues $V(T) \subseteq V(G')$ y $A(T) \subseteq A(G')$. En otro caso, supongamos sin pérdida de generalidad que $R = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_z}\}$ y para todo $j \in \{1, \dots, z\}$ llamemos u_{i_j} y u'_{i_j} los dos vecinos de v_{i_j} en G . Observemos que los vértices u_{i_j} y u'_{i_j} deben ser usados por T ya que $\delta_G(v_{i_j}) = 2$. Tenemos entonces que para toda $j \in \{1, \dots, z\}$ el vértice v_{i_j} fue reemplazado en G' por una $u_{i_j} u'_{i_j}$ -trayectoria, llamémosla T_{i_j} . Definiremos el camino T' mediante la trayectoria T al sustituir el camino (u_{i_j}, v_j, u'_{i_j}) por la trayectoria T_{i_j} , es decir:

$$T' = (v_0 = s_1, T, u_{i_1}) \cup \bigcup_{p=1}^{i_z-1} (T_{i_p} \cup (u'_{i_p}, T, u_{i_{p+1}})) \cup T_{i_z} \cup (u'_{i_z}, T, v_k = t_n)$$

Donde el subcamino $(u'_{i_z}, T, v_k = t_n)$ puede ser el camino trivial.

Notemos que T' es un $s_1 t_n$ -camino en G' por construcción. Más aún, T' es una trayectoria pues las trayectorias T_{i_j} son ajenas por vértices. T' debe ser satisfacible, pues en otro caso existe un par prohibido de F' , digamos $\{u, v\}$, tal que $\{u, v\} \subseteq V(T')$, pero por construcción este debe venir de un par prohibido $\{u', v'\}$ en F que usa la trayectoria T , lo cual es una contradicción, pues T es satisfacible.

Demostremos ahora la parte necesaria, es decir, si G' contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible, digamos T' , entonces G contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible.

Para cada vértice v que haya sido removido de G , llamemos T_v la trayectoria que sustituyó a v en G' . Sea $B = \{T_{x_1}, \dots, T_{x_j}\}$ el conjunto de dichas trayectorias y supongamos que T_{x_i} es una $u_{x_i} u'_{x_i}$ -trayectoria para toda $i \in \{1, \dots, z\}$. Observe que entonces los vértices u_{x_i} y u'_{x_i} son los vecinos del vértice x_i en G . Si T' no hace uso de trayectorias en B , entonces T' debe ser una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible en G , pues $V(T) \subseteq V(G)$ y $A(T) \subseteq A(G)$. En otro caso, supongamos que T' usa las trayectorias $\{T_{v_1}, \dots, T_{v_z}\} \subseteq B$ y sea $V = \{v_1, \dots, v_z\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que el vértice v_i es usado en T' antes que el vértice v_{i+1} para todo $i \in \{1, \dots, z-1\}$. Definimos el camino T mediante la trayectoria T' al sustituir la trayectoria T_{v_i} por el camino (u_{v_i}, v_i, u'_{v_i}) para cada $i \in \{1, \dots, z\}$, es decir:

$$T = (s_1, T', u_{v_1}) \cup \bigcup_{p=1}^{z-1} \left((u_{v_p}, v_p, u'_{v_p}) \cup (u'_{v_p}, T', u_{v_{p+1}}) \right) \cup (u_{v_z}, v_z, u'_{v_z}) \cup (u'_{v_z}, T', t_n)$$

Donde el subcamino (u'_{v_z}, T', t_n) es posiblemente el camino trivial.

T es un $s_1 t_n$ -camino en G por construcción. Más aún, T es una trayectoria ya que en otro caso existen dos vértices $v_i, v_j \in \{v_1, \dots, v_z\}$, con $i \neq j$, tales que $v_i = v_j$, por lo que entonces añadimos dos trayectorias distintas en G' por el vértice v_i , lo cual es una contradicción, pues por construcción en G' se agregó exactamente una trayectoria por cada vértice contenido en más de un par prohibido.

Supongamos ahora que T no es satisfacible, de modo que existe un par prohibido de F , digamos $\{u, v\}$, tal que $\{u, v\} \subseteq V(T)$. Dicho par debe cumplir que: (a) $\{u, v\} \subseteq V$ o, sin pérdida de generalidad, (b) $u \in V$ y $v \in V(T) \setminus V$, pues T' es satisfacible. Consideremos ambos casos:

- (a) Como u se sustituyó por T_u en G' y al ser $\{u, v\}$ un par prohibido de F , entonces se reemplazó $\{u, v\}$ por un nuevo par prohibido, digamos $\{u', v\}$, tal que $u' \in V(T_u)$. Análogamente, se sustituyó $\{u', v\}$ por un nuevo par prohibido, digamos $\{u', v'\}$, tal que $v' \in V(T_v)$. Debe ser, por tanto, que T' usa el par prohibido $\{u', v'\} \in F'$. Esto es una contradicción, pues T' era una trayectoria satisfacible.
- (b) Como u se sustituyó por T_u en G' y al ser $\{u, v\}$ un par prohibido de F , entonces se reemplazó $\{u, v\}$ por un nuevo par prohibido, digamos $\{u', v\}$, tal que $u' \in V(T_u)$. Como v no fue reemplazado en G' , entonces $\{u', v\}$ es un par en F' tal que $\{u', v\} \in V(T')$. Esto es una contradicción, pues T' era una trayectoria satisfacible.

Dado que de ambos casos se deriva una contradicción, debe ser que T es una trayectoria satisfacible.

Esto demuestra la afirmación 2.

Construimos ahora la gráfica G^* mediante el colapso de vértices que forman un par prohibido. Es decir, si $\{v_1, v_2\} \in F'$, $E_{G'}(v_1) = \{e_1, f_1\}$ y $E_{G'}(v_2) = \{e_2, f_2\}$, entonces removemos los vértices v_1 y v_2 , y hacemos a las aristas e_1, e_2, f_1 y f_2 incidentes a un nuevo vértice $v_{1,2}$. Observemos que las aristas de $\{e_1, f_1\}$ no son adyacentes a las aristas de $\{e_2, f_2\}$, pues sus extremos se encuentran en subgráficas G_i^* distintas de G' , las cuales son ajenas en vértices. Notemos, además, que todos los vértices de G^* tienen grado 3 o 4: todo vértice de G^* proviene de un vértice de grado 3 en G' o del colapso de un par prohibido en G' , en este último caso como todo vértice de grado dos en G' , digamos u , se encontraba en exactamente un par prohibido, digamos $\{u, v\}$, debió ser colapsado en un único vértice que resulta de grado 4, pues tanto u como v sólo se encuentran en el par prohibido $\{u, v\}$ y ambos vértices son de grado dos en G' . Para cada nuevo vértice $v_{1,2}$, definimos su gráfica de transición $T^*(v_{1,2})$ tal que $E(T^*(v_{1,2})) = \{e_1f_1, e_2f_2\}$, de manera que $T^*(v_{1,2}) \in \langle K_2 + K_2 \rangle$; observe, por tanto, que dos vértices son adyacentes en $T^*(v_{1,2})$ si y sólo si son aristas adyacentes en G' . Para el resto de vértices v de G^* definimos su gráfica de transición tal que $T^*(v) \in \langle K_3 \rangle$. Con todo lo anterior, definimos el sistema de transición $T^* = \{T^*(v) \mid v \in V(G^*)\}$. Nótese que $T^* \subseteq \langle K_3, K_2 + K_2 \rangle$.

Afirmación 3. G' contiene una s_1t_n -trayectoria satisfacible si y sólo si G^* contiene una s_1t_n -trayectoria T^* -compatible.

Mostramos primero la parte suficiente, es decir, si G' contiene una s_1t_n -trayectoria satisfacible, digamos P , entonces G^* contiene una s_1t_n -trayectoria T^* -compatible.

Supongamos que $P = (v_0 = s_1, e_0, v_1, \dots, v_{z-1}, e_{z-1}, v_z = t_n)$. Para cada v_i , con $i \in \{0, \dots, z\}$, si v_i se encuentra en un par prohibido de F' , denotemos por $v'_i \in V(G^*)$ al vértice en el cual colapsó v_i junto al vértice que se encontraba en su par prohibido, en otro caso definimos $v'_i = v_i$. Observe entonces que para toda arista $e_i \in E(P)$ esta se encuentra en G^* y se tiene que e_i es incidente a los vértices v'_i y v'_{i+1} por construcción de G^* . Por tanto, $P^* = (v'_0 = s_1, e_0, v'_1, \dots, v'_{z-1}, e_{z-1}, v'_z = t_n)$ es un camino en G^* . Más aún, P^* es una trayectoria, pues en caso de repetir vértices estos deben provenir del colapso de un par prohibido, digamos $\{u, v\}$, lo cual implica que P usó dos veces un mismo vértice o P usó ambos vértices del par prohibido, en cualquier caso esto es una contradicción ya que P es una trayectoria satisfacible.

Afirmamos que P^* es una s_1t_n -trayectoria T^* -compatible en G^* . Procedamos por contradicción, por lo que entonces existe una transición $\{e_{i-1}, e_i\}$ tal que $e_{i-1}e_i \notin E(T^*(v'_i))$, con $i \in \{1, \dots, z-1\}$. Entonces $(v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, e_i, v_{i+1})$ no es un camino en G' , ya que $\{e_{i-1}, e_i\}$ son aristas no adyacentes en G' y por tanto,

no tienen extremos en común. Esto es una contradicción, pues $(v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, e_i, v_{i+1})$ es un subcamino de P , la cual es una trayectoria en G' .

Demostremos ahora la parte necesaria, es decir, si G^* contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria T^* -compatible, digamos P^* , entonces G' contiene una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible.

Supongamos que $P^* = (v'_0 = s_1, e_0, v'_1, \dots, v'_{z-1}, e_{z-1}, v'_z = t_n)$. Recordemos que por construcción de G^* se tiene que $E(P^*) \subseteq E(G')$. Para cada vértice interno de P^* , es decir, para cada v_i , con $i \in \{1, \dots, z-1\}$ analicemos la subtrayectoria $(v'_{i-1}, e_{i-1}, v'_i, e_i, v'_{i+1})$ y supongamos que $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$ y $e_i = u_i u_{i+1}$ con $\{v_{i-1}, v_i, u_i, u_{i+1}\} \subseteq V(G')$. Consideremos los siguientes casos respecto a v'_i :

1. Si $v'_i \in V_3(G^*)$. Entonces $v'_i \in V_3(G')$ y por tanto las aristas e_{i-1} y e_i son aristas incidentes a v'_i en G' , ya que los vértices de grado 3 conservan sus aristas incidentes entre G' y G^* . Supongamos sin pérdida de generalidad que el extremo v_i de e_{i-1} y el extremo u_i de e_i son iguales a v'_i . Tenemos, por tanto, que $(v_{i-1}, e_{i-1}, v'_i, e_i, u_{i+1})$ es un camino de G' . Definimos $P_i = (v_{i-1}, e_{i-1}, v'_i)$.
2. Si $v'_i \in V_4(G^*)$. Entonces, como P^* es una trayectoria compatible debe ser que $e_{i-1}e_i \in T^*(v'_i)$, por lo que e_{i-1} y e_i tienen un extremo en común en G' . Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_i = u_i$. Tenemos, por tanto, que $(v_{i-1}, e_{i-1}, v_i = u_i, e_i, u_{i+1})$ es un camino en G' . Definimos $P_i = (v_{i-1}, e_{i-1}, v_i = u_i)$ si $i \neq z-1$, $P_i = (v_{i-1}, e_{i-1}, v_i = u_i, e_i, u_{i+1} = t_n)$ en otro caso.

De lo anterior, tenemos que

$$P = \bigcup_{i=1}^{z-1} P_i$$

es un $s_1 t_n$ -camino en G' .

Afirmamos que P es una $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible. Primero veremos que P es una trayectoria. Supongamos por contradicción que P no es una trayectoria, por lo que repite al menos un vértice, digamos v . Si $v \in V_3(G')$, entonces P^* también repite dicho vértice, lo cual no es posible, pues P^* es una trayectoria. Si $v \in V_2(G')$, entonces debe ser que P^* repite el vértice colapsado del par prohibido en el que se encuentre el vértice v . En cualquier caso obtenemos una contradicción, debido a que P^* es una trayectoria.

Ahora mostraremos que P es satisfacible. Supongamos por contradicción que P no es satisfacible, por tanto, usa un par prohibido $\{u, v\} \in F'$. Entonces, debe ser que P^* repitió al menos dos veces el vértice colapsado del par prohibido $\{u, v\}$ pues agregamos a u y v a P en P_i y P_j para distintas i y j . Esto es una contradicción, pues P^* es una trayectoria.

Así, la afirmación 3 ha sido demostrada.

Afirmación 4. La construcción descrita arriba es realizable en tiempo polinomial.

Primero mostramos que G y F pueden construirse en tiempo polinomial respecto a $n = |\varphi|$.

Observe que para cada cláusula $C_i \in \varphi$ construir su gráfica G_i toma tiempo $O(1)$, pues $|V(G_i)| \leq 7$ y $|E(G_i)| \leq 8$, y puesto que son construidas n gráficas G_i , tenemos que G puede ser construida en $O(n)$.

Ahora mostramos que F puede ser construido en tiempo $O(n^2)$.

Para cada vértice v en $V_2(G)$, es decir, los vértices que se encuentran en pares prohibidos, definimos el conjunto $PP_v = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \in F\}$. Es claro que podemos encontrar el conjunto $V_2(G)$ en tiempo $O(n)$, simplemente iterando sobre $V(G)$ y seleccionando aquellos vértices de grado dos. Luego, podemos construir PP_v para cada vértice v en $V_2(G)$ iterando $V_2(G)$ y verificando por cada vértice si su literal es la negación de la literal de v , esta verificación puede hacerse en tiempo constante. Como $|V_2(G)| = 3n$ y por cada vértice $V_2(G)$ se vuelve a iterar $V_2(G)$, entonces construir PP_v para cada vértice v en $V_2(G)$ puede realizarse en tiempo $O(n^2)$.

Es claro que $\bigcup_{v \in V_2(G)} PP_v = F$. Más aún, debido a que un par prohibido $\{u, v\}$ se encuentra en exactamente dos conjuntos PP , a saber, PP_u y PP_v , tenemos que $\sum_{v \in V_2(G)} |PP_v| = 2|F|$.

Hemos entonces construido G y F en tiempo $O(n^2)$.

Veamos que $|F| \leq \frac{9}{4}n^2$ y por tanto $\sum_{v \in V_2(G)} |PP_v| \leq 5n^2$. Recordemos que $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ es el conjunto de variables. Note que $m = |A| \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ pues cada literal debe estar en al menos un par prohibido, en otro caso, podríamos tener literales puras. Para cada literal a_i , con $i \in \{1, \dots, m\}$, supongamos que a_i es usada k_i veces en distintas literales, ya sea positiva o negativamente, es decir, k_i es el número de vértices en G tal que su literal correspondiente usa la variable a_i . Observe, además, que la mayor cantidad de pares prohibidos que podemos generar con cada literal a_i es $\lceil \frac{k_i}{2} \rceil \lfloor \frac{k_i}{2} \rfloor$. De esto, tenemos que:

$$|F| \leq \sum_{i=1}^m \left\lceil \frac{k_i}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor \quad (2.2)$$

Consideremos los siguientes casos para k_i :

- k_i es par, es decir, existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $k_i = 2j_i$.

En tal caso,

$$\left\lceil \frac{k_i}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2j_i}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{2j_i}{2} \right\rfloor = j_i^2 = \frac{k_i^2}{4}.$$

Por tanto,

$$\left\lceil \frac{k_i}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor \leq \frac{k_i^2}{4}.$$

- k_i es impar, es decir, existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $k_i = 2j_i + 1$.

En tal caso,

$$\left\lceil \frac{k_i}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2j_i + 1}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{2j_i + 1}{2} \right\rfloor = (j_i + 1)(j_i) = j_i^2 + j_i = \frac{k_i^2 - 1}{4},$$

pues $k_i^2 = 4j_i^2 + 4j_i + 1$, lo cual implica que $j_i^2 + j_i = \frac{k_i^2 - 1}{4}$. Así,

$$\left\lceil \frac{k_i}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor \leq \frac{k_i^2}{4}.$$

De (2.2) y los casos anteriores conseguimos:

$$|F| \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m k_i^2 \tag{2.3}$$

Dado que para toda $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que $k_i \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^m k_i = 3n$, obtenemos que:

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^m k_i^2 \leq \frac{1}{4} 9n^2 \tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) se concluye que

$$|F| \leq \frac{9}{4} n^2$$

Se sigue, entonces, que $\sum_{v \in V_2(G)} |PP_v| \leq 5n^2$.

Procedemos a mostrar que G' y F' pueden construirse en tiempo polinomial respecto a n .

Para cada vértice $v \in V_2(G)$ realizamos los siguientes pasos:

1. Verificamos si $1 < |PP_v|$.
2. Si $1 < |PP_v| = q$, construimos la trayectoria $T_v = (w_1, \dots, w_q)$, removemos v de G y suponiendo que

u y u' son los vecinos de v en G , añadimos T_v y las aristas uw_1 y $w_q u'$ a G .

3. Para cada vértice v_i en algún par $\{v, v_i\} \in PP_v$:

3.1 Sustituimos $\{v, v_i\}$ por el nuevo par prohibido $\{w_i, v_i\}$ en PP_v .

3.2 Buscamos PP_{v_i} .

3.3 Eliminamos $\{v, v_i\}$ de PP_{v_i} y añadimos el nuevo par prohibido $\{w_i, v_i\}$.

Es claro que el paso 1 se puede realizar en tiempo $O(1)$ si mantenemos los conjuntos PP en alguna estructura de datos de acceso constante, como un arreglo o diccionario. Observe que el paso 2 construye trayectorias de tamaño $|PP_v|$ para cada $v \in V_2(G)$ y al tener que $\sum_{v \in V_2(G)} |PP_v| \leq 5n^2$, entonces el paso dos al finalizar la iteración toma en total tiempo $O(n^2)$. El paso 3.1 se realiza en tiempo $O(1)$, el paso 3.2 puede ser realizado en tiempo constante, mientras que el paso 3.3 se realiza en tiempo $O(n)$ pues $|PP_{v_i}| \leq 3n - 1$, por lo que eliminar el par $\{v, v_i\}$ de PP_{v_i} debe tomar tiempo lineal. Tenemos entonces que el paso 3 toma tiempo cuadrático. Como se realizan estos tres pasos para cada vértice en $V_2(G)$ y $|V_2(G)| = 3n$, entonces la iteración total toma tiempo $O(n^3)$.

Notemos que al finalizar de iterar $V_2(G)$, la gráfica G ha sido reemplazada por G' y que el conjunto de pares prohibidos F' es igual $\bigcup_{v \in V_2(G)} PP_v$, por lo que se han construido G' y F' en tiempo $O(n^3)$. Observe, además, que los pasos 3.1 y 3.3 garantizan que $|PP_v|$ y $|PP_{v_i}|$ se mantienen constante y que cada nuevo par prohibido $\{v_i, w_i\}$ se encuentra nuevamente en exactamente dos conjuntos PP , a saber, los conjuntos PP_v y PP_w de los vértices v y w que fueron intercambiados por su respectiva trayectoria T_v y T_w , por lo que $|F'| = |F|$ y como añadimos un total de $\sum_{v \in V_2(G)} (|PP_v| - 1) \leq 5n^2$ vértices nuevos, se sigue que G' tiene orden cuadrático respecto a n .

Finalmente, demostraremos que G^* y el sistema de transición T^* se construye en tiempo polinomial.

Para cada par prohibido $\{v_1, v_2\} \in F'$, encontrar v_1 y v_2 en G' toma tiempo $O(n^2)$, pues el orden de G' es cuadrático respecto a n . Colapsarlos en un vértice $v_{1,2}$ se realiza en tiempo constante, mientras que construir $T^*(v_{1,2})$ toma tiempo $O(1)$ dado que $|V(T^*(v_{1,2}))| = 4$ y $|E(T^*(v_{1,2}))| = 2$. Como $|F'| \leq \frac{9}{4}n^2$, entonces al iterar F' para colapsar los vértices prohibidos y crear los sistemas de transición toma tiempo $O(n^4)$. Nuevamente, encontrar los vértices $V_3(G')$ toma tiempo $O(n^2)$ y, de manera análoga, construir sus sistemas de transición toma tiempo constante. Por tanto, construir G^* y el sistema de transición T^* toma tiempo $O(n^4)$.

Esto demuestra la afirmación 4 y se concluye que la construcción de G^* y T^* se realiza en tiempo polinomial.

Por tanto, de las afirmaciones 1, 2, 3 y 4 se obtiene (2.1). En consecuencia, el problema $\langle K_3, K_2 + K_2 \rangle$ -CP es NP-completo. \square

Utilizando la idea de la demostración de la proposición anterior, podemos mostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.2. *El problema $\langle P_3, K_2 + K_2 \rangle$ -CP es NP-completo. En particular, es NP-completo incluso si consideramos únicamente ejemplares (G, T, x, y) tales que:*

1. *Los vértices x y y están en $V_3(G)$.*
2. *Existe un apareamiento M tal que $V(M) = V_3(G) \setminus \{x, y\}$.*
3. *Para cada $v \in V_3(G)$ con $E_G(v) = \{e_1, e_2, e_M\}$ y $e_M \in M$ se tiene que $e_1 e_M, e_2 e_M \in E(T(v))$.*

Demostración. Dado un ejemplar del **3-SAT**, construimos G^* y T^* como en la Proposición 2.1.1. Demostraremos que es posible reemplazar T^* por un sistema de transición $T^{**} \subseteq \langle P_3, K_2 + K_2 \rangle$.

Primero, para cada vértice $v \in V_3(G^*) \setminus \{s_1, t_n\}$ tomaremos una de sus aristas incidentes, a la que denotaremos por h_v de la siguiente forma:

- Si $v = s_i$, con $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces $h_v := s_i s_i^*$.
- Si $v = s_i^*$, con $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces $h_v := s_i^* t_{i-1}^*$.
- Si $v = t_i$, con $i \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces $h_v := t_i t_i^*$.
- Si $v = t_i^*$, con $i \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces $h_v := t_i^* s_{i+1}^*$.

Afirmación 1. Para toda $s_1 t_n$ -trayectoria T^* -compatible en G^* , digamos P^* , si $v \in V_3(G^*) \setminus \{s_1, t_n\}$ y $v \in V(P^*)$, entonces $h_v \in E(P^*)$.

Sea P la $s_1 t_n$ -trayectoria satisfacible en G' construida a partir de P^* como en la afirmación 3 de la Proposición 2.1.1. Recuerde que por construcción de P se tiene $E(P^*) = E(P)$ y por construcción de G^* se tiene que $V_3(G^*) = V_3(G')$, por lo que procedemos a demostrar que si $v \in V_3(G') \setminus \{s_1, t_n\}$ y $v \in V(P)$, entonces $h_v \in E(P)$.

Sea v un vértice tal que $v \in V_3(G') \setminus \{s_1, t_n\}$ y $v \in V(P)$, consideremos los siguientes casos:

- Si $v = s_i^*$, con $i \in \{2, \dots, n\}$.

Dado que toda arista $s_i^* t_{i-1}^*$, con $i \in \{2, \dots, n\}$, es un puente de la gráfica G' tal que s_1 y t_n se encuentran en diferentes componentes conexas de $G' - s_i^* t_{i-1}^*$, entonces cualquier $s_1 t_n$ -trayectoria en G' usa la arista $s_i^* t_{i-1}^*$. Más aún, en caso de que s_i fuera utilizado en P haciendo uso de las otras dos aristas incidentes a s_i , como P debe usar la arista $s_i^* t_{i-1}^*$ entonces P no sería una trayectoria, lo cual

es una contradicción.

- Si $v = t_i^*$, con $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Análogo al caso $v = s_i^*$.

- Si $v = s_i$, con $i \in \{2, \dots, n\}$.

Supongamos que P utiliza al vértice s_i sin hacer uso de la arista $s_i s_i^*$. Observe que en la gráfica $G - s_i s_i^*$ el vértice t_i^* es un vértice separador para los vértices s_i y s_i^* , por lo que cualquier trayectoria entre estos par de vértices usa al vértice t_i^* . Además, como $t_i^* s_{i+1}^*$ es un puente de la gráfica G' tal que s_1 y t_n se encuentran en diferentes componentes conexas, entonces el vértice t_i debió de ser usado dos veces por P , lo cual es una contradicción pues P es una trayectoria.

- Si $v = t_i$, con $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Supongamos que P utiliza el vértice t_i sin hacer uso de la arista $t_i t_i^*$. Nuevamente como $t_i^* s_{i+1}^*$ es un puente de la gráfica G' tal que s_1 y t_n se encuentran en diferentes componentes conexas de $G - t_i^* s_{i+1}^*$ y el vértice t_i queda en la misma componente conexa que t_i^* , entonces el vértice t_i debe ser usado antes de t_i^* en P . En tal caso, P debió haber utilizado el vértice s_i dos veces, lo cual es una contradicción, pues P es una trayectoria.

De esta manera, la afirmación queda demostrada.

Para todo $v \in V_4(G^*)$ definimos $T^{**}(v) = T^*(v)$. Teniendo en cuenta que toda $s_1 t_n$ -trayectoria usa una sola arista incidente a s_1 y una sola arista incidente a t_n , entonces las gráficas de transición de s_1 y t_n son irrelevantes respecto a una $s_1 t_n$ -trayectoria compatible, por lo que podemos tomar $T^{**}(s_1), T^{**}(t_n) \in \langle P_3 \rangle$ de manera arbitraria.

Para todo $v \in V_3(G^*) \setminus \{s_1, t_n\}$ con $E_{G^*}(v) = \{e, f, h_v\}$, definimos su gráfica de transición $T^{**}(v)$ tal que $E(T^{**}(v)) = \{eh_v, fh_v\}$. De la afirmación 1 se sigue que toda $s_1 t_n$ -trayectoria T^* -compatible es también T^{**} -compatible. El regreso es inmediato.

Dado que construir el sistema de transición T^{**} puede ser realizado en tiempo polinomial, tenemos entonces que

$$\langle K_3, K_2 + K_2 \rangle\text{-CP} \propto \langle P_3, K_2 + K_2 \rangle\text{-CP}.$$

Por tanto, $\langle P_3, K_2 + K_2 \rangle\text{-CP}$ es NP-completo.

Más aún, observe que $M = \{t_i t_i^* \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{s_i s_i^* \mid i \in \{2, \dots, n\}\}$ es un apareamiento de G^* tal que satura al conjunto $V_3(G^*) \setminus \{s_1, t_n\}$. Entonces por construcción de T^{**} , se tiene que para todo

vértice $v \in V_3(G^*)$ con $E_{G^*}(v) = \{e, f, h_v\}$ y $h_v \in M$ se cumple que $eh_v, fh_v \in E(T^{**}(v))$. Esto demuestra la última parte de la proposición. \square

Ahora, definiremos una construcción que será usada en varias de las siguientes proposiciones.

Construcción 2.1.3. Sean G una gráfica y v_0 un vértice de grado 4 en G tal que $E_G(v_0) = \{e_1, \dots, e_4\}$. Modificamos a G de la siguiente manera. Eliminamos el vértice v_0 y agregamos dos nuevos vértices $v_{1,4}$ y $v_{2,3}$ tal que las aristas e_1 y e_4 inciden en el vértice $v_{1,4}$ y las aristas e_2 y e_3 inciden en el vértice $v_{2,3}$. Añadimos dos nuevos vértices w y w' , así como las aristas $f_1 = v_{1,4}w$, $f_2 = wv_{2,3}$, $f_3 = v_{2,3}w'$ y $f_4 = w'v_{1,4}$. Ahora, añadimos dos copias de la gráfica K_5 , digamos H y H' , y removemos una arista de cada copia, digamos la arista u_1u_2 de H y la arista u_3u_4 de H' . Finalmente, agregamos las aristas $g_1 = u_1w$, $g_2 = u_2w$, $g_3 = u_3w'$ y $g_4 = u_4w'$. Llamemos G' a la nueva gráfica resultante. Observe que todos los nuevos vértices introducidos a G' tienen grado 4.

Notemos que la Construcción 2.1.3 es realizable en tiempo constante, pues se agregan exactamente 13 vértices a la gráfica, o en tiempo lineal respecto al orden de G si es necesario buscar el vértice v_0 . La Figura 2.6 contiene un ejemplo de dicha construcción para una gráfica particular G y v_0 .

Observación 2.1.4. Dado que w es un vértice de corte en G' , se tiene que si P es un uv -camino tal que $\{u, v\} \subseteq V(G') \setminus V(H)$ y $(V(H) \setminus \{w\}) \cap V(P) \neq \emptyset$, entonces P no puede ser una trayectoria. De manera análoga, esto es verdadero para el vértice w' y la gráfica H' . Más aún, note que el conjunto de aristas $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es un conjunto de corte por aristas para la gráfica G' tal que los nuevos vértices introducidos quedan en una componente conexa distinta a los vértices originales de la gráfica G .

Lema 2.1.5. Sea Z una gráfica de orden a lo más 4 tal que K_3 o P_3 es subgráfica inducida de Z . Entonces el problema $\langle Z, K_2 + K_2 \rangle$ -CP es NP-completo.

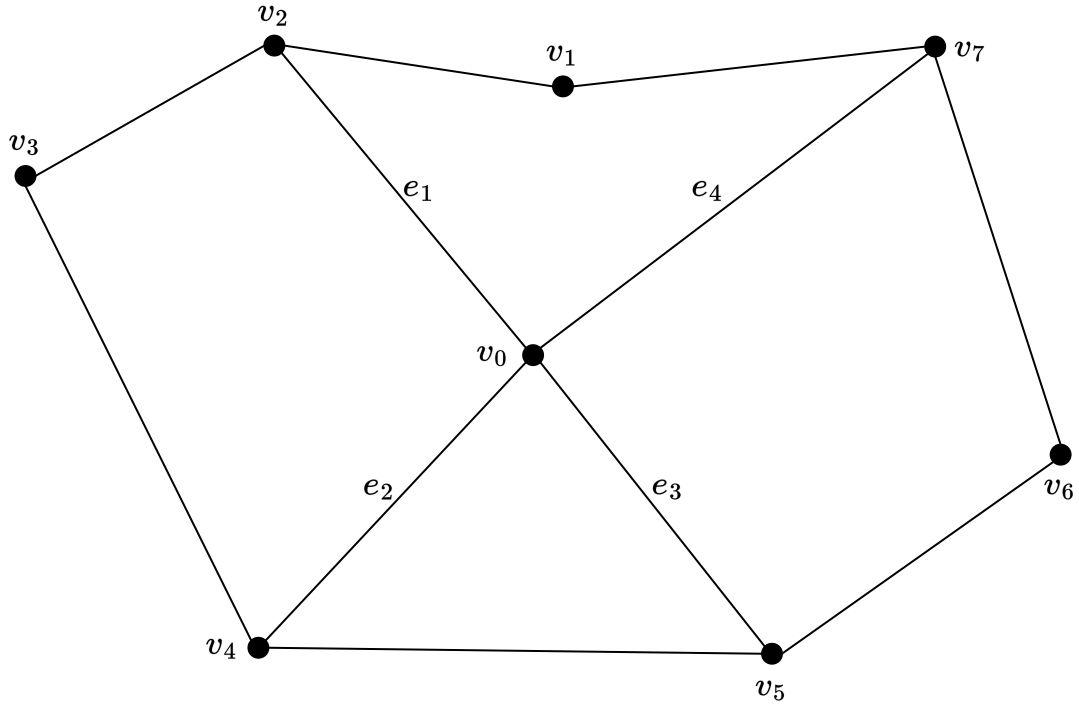
Demostración. Sea $X \in \langle K_3, P_3 \rangle$ tal que X es subgráfica inducida de Z . Observe que si $|V(Z)| = 3$, entonces el lema se sigue directamente de las proposiciones 2.1.1 y 2.1.2, por lo que supondremos que $|V(Z)| = 4$.

Nombrando $\langle X, K_2 + K_2 \rangle$ -CP* el problema $\langle X, K_2 + K_2 \rangle$ -CP restringido a ejemplares que satisfacen las propiedades adicionales consideradas en la Proposición 2.1.2, demostraremos que

$$\langle X, K_2 + K_2 \rangle\text{-CP}^* \propto \langle Z, K_2 + K_2 \rangle\text{-CP}. \quad (2.5)$$

Consideremos (G, T, x, y) un ejemplar de $\langle X, K_2 + K_2 \rangle$ -CP* y M el apareamiento de G acorde a la Proposición 2.1.2. Realizaremos el siguiente reemplazo para eliminar aquellos vértices cuya gráfica de transición se encuentra en $\langle X \rangle$.

G :



G' :

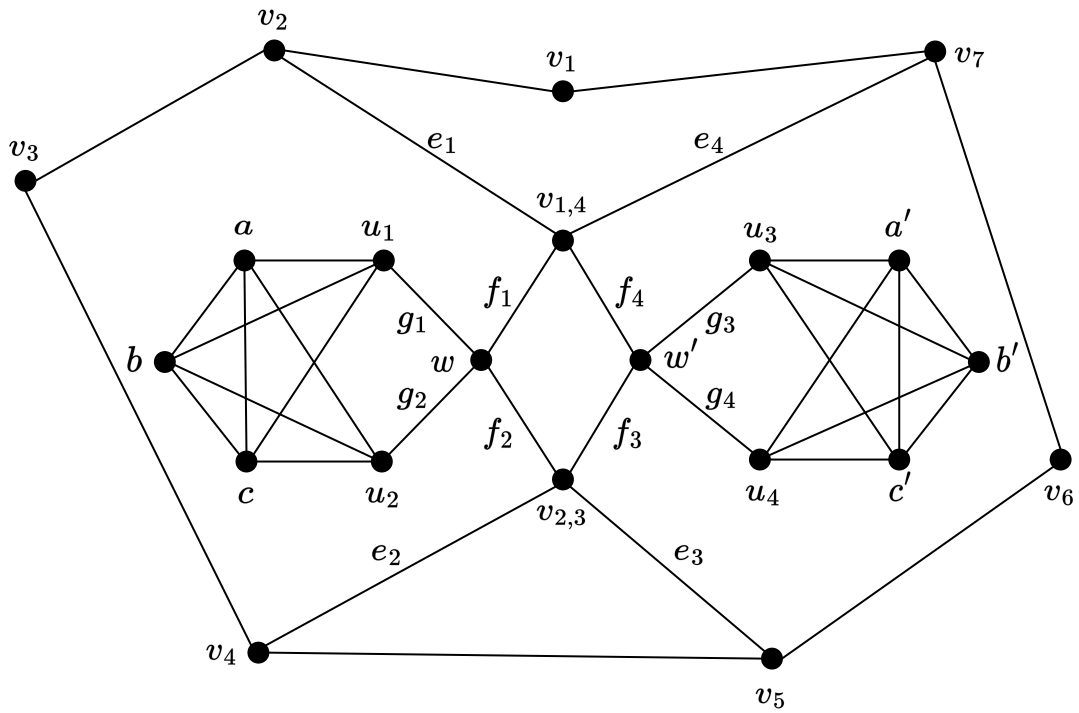


Fig. 2.6: Construcción 2.1.3 de una gráfica G .

Sea $e_M = vv' \in M$ tal que $E_G(v) = \{e_1, e_4, e_M\}$ y $E_G(v') = \{e_2, e_3, e_M\}$. Notemos que por la restricción del problema, tenemos que

$$e_1e_M, e_4e_M \in E(T(v)) \text{ y } e_2e_M, e_3e_M \in E(T(v'))$$

Removemos la arista e_M de G y colapsamos los vértices v y v' en un nuevo vértice al que llamaremos v_0 . Ahora, aplicamos la Construcción 2.1.3 en G y v_0 para obtener la gráfica G' . Construimos un sistema de transición T' como sigue: para cada vértice $v \in V(G') \setminus V(G)$ escogemos su gráfica de transición de la familia $\langle Z \rangle$, teniendo en consideración:

- si $X \in \langle P_3 \rangle$, solicitamos que $\{e_1f_1, e_4f_1\} \subseteq E(T'(v_{1,4}))$, $\{f_2e_2, f_2e_3\} \subseteq E(T'(v_{2,3}))$ y $f_1f_2 \in E(T'(w))$, así como $e_1e_4 \notin E(T'(v_{1,4}))$ y $e_2e_3 \notin E(T'(v_{2,3}))$.
- si $X \in \langle K_3 \rangle$, solicitamos que $\{e_1f_1, e_4f_1, e_1e_4\} \subseteq E(T'(v_{1,4}))$, $\{f_2e_2, f_2e_3, e_2e_3\} \subseteq E(T'(v_{2,3}))$ y $f_1f_2 \in E(T'(w))$.

Note que la elección de estas aristas es posible puesto que la gráfica Z tiene como subgráfica inducida a P_3 o K_3 . Para el resto de los vértices en $V(G') \setminus V(G)$, consideramos una gráfica de transición arbitraria en $\langle Z \rangle$ y para el resto de vértices $v \in V(G) \cap V(G')$, tomamos $T'(v) = T(v)$.

Afirmación 1. G contiene una xy -trayectoria T -compatible si y sólo si G' contiene una xy -trayectoria T' -compatible.

Mostraremos primero la parte suficiente, es decir, supondremos que existe una xy -trayectoria T -compatible en G , digamos P , y construiremos una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

Consideremos los siguientes casos:

1. Si $e_M \notin E(P)$. Consideremos los siguientes tres posibles casos:

- 1.1 P no usa la transición $\{e_1, e_4\}$ ni la $\{e_2, e_3\}$.

En este caso, P debe ser una xy -trayectoria T' -compatible en G' puesto que P sólo usa vértices en $V(G)$, y en dichos vértices se tienen los mismos sistemas de transición tanto en T como en T' .

- 1.2 P usa la transición $\{e_1, e_4\}$ o la transición $\{e_2, e_3\}$, y sólo una.

Supongamos que P usa la transición $\{e_1, e_4\}$ y supongamos que

$$P = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1} = e_1, u_i = v, a_i = e_4, u_{i+1}, \dots, u_k = y).$$

Como P es T -compatible, entonces $e_1e_4 \in E(T(v))$ y, por tanto, debe ser que $X \in \langle K_3 \rangle$. Así, por definición del sistema de transiciones T' , tenemos que $e_1e_4 \in E(T'(v_{14}))$. Se obtiene, por definición de T' , que:

$$(u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1} = e_1, v_{1,4}, a_i = e_4, u_{i+1} \dots, u_k = y)$$

es una xy -trayectoria T' -compatible en G' . El caso cuando P usa la transición $\{e_2, e_3\}$ es análogo.

1.3 P usa ambas transiciones $\{e_1, e_4\}$ y $\{e_2, e_3\}$.

Procediendo de manera análoga al caso 1.2, tenemos que $X \in \langle K_3 \rangle$. Sin pérdida de generalidad supongamos que:

$$P = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, a_{i-1} = e_1, u_i = v, a_i = e_4, \dots, a_{j-1} = e_2, u_j = v', a_j = e_3, \dots, u_k = y).$$

Por definición del sistema T' obtenemos que:

$$(u_0 = x, a_0, u_1, \dots, a_{i-1} = e_1, v_{1,4}, a_i = e_4, \dots, a_{j-1} = e_2, v_{2,3}, a_j = e_3, \dots, u_k = y)$$

es una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

2. Si $e_M \in E(P)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que:

$$P = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1}, u_i = v, a_i = e_M, u_{i+1} = v', a_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_k = y)$$

Y es tal que $a_{i-1} \in \{e_1, e_4\}$ y $a_{i+1} \in \{e_2, e_3\}$. Luego, por la construcción de G' y T' , obtenemos que:

$$(u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1}, v_{1,4}, f_1, w, f_2, v_{2,3}, a_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_k = y)$$

es una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

Lo anterior prueba que si existe una xy -trayectoria T -compatible en G , entonces existe una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

Mostramos ahora la parte necesaria: supondremos que G' contiene una xy -trayectoria T' -compatible, digamos P' , y construiremos una xy -trayectoria T -compatible en G .

Si P' no usa los vértices $v_{1,4}$ y $v_{2,3}$, entonces P' debe ser una xy -trayectoria T -compatible en G , pues tendríamos que $V(P') \subseteq V(G) \cap V(G')$ y en dichos vértices, los sistemas de transiciones en T y T'

coinciden. Por tanto, supongamos que $\{v_{1,4}, v_{2,3}\} \cap V(P') \neq \emptyset$ y consideremos los siguientes casos:

1. P' utiliza ambos vértices $v_{1,4}$ y $v_{2,3}$.

Analicemos ahora los posibles subcasos:

- 1.1 Si P' utiliza la transición $\{e_1, e_4\}$. Observe que como P' es T' -compatible y por construcción de T' , tenemos que $X \in \langle K_3 \rangle$ y, además, en el vértice $v_{2,3}$ se debe hacer uso de la transición $\{e_2, e_3\}$, en otro caso, la trayectoria usaría una arista en $\{f_2, f_3\}$ lo que implicaría que P' utiliza al menos dos veces el vértice $v_{1,4}$. Esto sería una contradicción a nuestra suposición de que P' es una trayectoria. Así, supongamos sin pérdida de generalidad que:

$$P' = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, a_{i-1} = e_1, u_i = v_{1,4}, a_i = e_4, \dots, a_{j-1} = e_2, u_j = v_{2,3}, a_j = e_3, \dots, u_k = y).$$

Se observa que:

$$(u_0 = x, a_0, u_1, \dots, a_{i-1} = e_1, v, a_i = e_4, \dots, a_{j-1} = e_2, v', a_j = e_3, \dots, u_k = y)$$

es una xy -trayectoria T -compatible en G , puesto que $T(v)$ y $T(v')$ se encuentran en $\langle K_3 \rangle$.

- 1.2 Si P' no utiliza la transición $\{e_1, e_4\}$. Afirmamos que P' no hace uso de la transición $\{e_2, e_3\}$. Procediendo por contradicción, supongamos que P' recorre la transición $\{e_2, e_3\}$. Como P' no recorre la transición $\{e_1, e_4\}$, entonces debe hacer uso de una arista en $\{f_1, f_4\}$. En cualquier caso, la trayectoria P' se vería obligada a utilizar alguna arista en $\{f_2, f_3\}$ al utilizar el vértice w o w' , según sea el caso. Esto implicaría que la trayectoria P' usa 3 aristas incidentes a $v_{2,3}$, lo cual es una contradicción.

Así, obtenemos que las transiciones $\{e_1, e_4\}$ y $\{e_2, e_3\}$ no son usadas en P' . Con esto, se sigue que P' hace uso de una arista en $\{f_1, f_4\}$ y una arista en $\{f_2, f_3\}$ y por tanto, hace uso de la transición $\{f_1, f_2\}$ o $\{f_4, f_3\}$.

Supongamos que se usa la transición $\{f_1, f_2\}$ y f_1 aparece antes que f_2 en P' . Sea, así:

$$P' = (u_0, a_0, \dots, u_{i-1}, a_{i-1}, v_{1,4}, f_1, w, f_2, v_{2,3}, a_{i+2}, u_{i+3}, \dots, u_k)$$

Nótese que las subtrayectorias $P_1 = (u_0, P', u_{i-1})$ y $P_2 = (u_{i+3}, P', u_k)$ son trayectorias T -compatibles en G por la construcción de T' . Ahora, observe que $a_{i-1} \in \{e_1, e_4\}$ y $a_{i+2} \in \{e_2, e_3\}$. Así, podemos considerar la trayectoria $P_1 \cup (u_{i-1}, a_{i-1}, v, e_M, v', a_{i+2}, u_{i+3}) \cup P_2$ en G . Debido a la restricción del sistema de transición T con respecto al apareamiento M , obtenemos que dicha

trayectoria es T -compatible en G . El caso cuando se usa la transición $\{f_3, f_4\}$ es análogo.

2. P' utiliza únicamente un vértice en $\{v_{1,4}, v_{2,3}\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que dicho vértice es $v_{1,4}$. Note que la transición usada en $v_{1,4}$ debe ser $\{e_1, e_4\}$, en otro caso, de usar una arista en $\{f_1, f_4\}$, P' se vería obligada a usar el vértice $v_{2,3}$, lo cual no es posible por el caso en que nos encontramos. Como P' es T' -compatible y usa la transición $\{e_1, e_4\}$, por construcción de T' tenemos que $X \in \langle K_3 \rangle$. Así, puesto que los vértices en $V(P) \setminus \{v_{1,4}\}$ están en $V(G)$ y dado que $T(v) \in \langle K_3 \rangle$, podemos sustituir el vértice $v_{1,4}$ en P' por el vértice v para obtener una trayectoria T -compatible en G . El caso cuando se usa el vértice $v_{2,3}$ es análogo.

Con lo anterior, si existe una xy -trayectoria T' -compatible en G' , entonces es posible encontrar una xy -trayectoria T -compatible en G . Esto demuestra la afirmación 1.

Obsérvese que realizar esta construcción toma a lo más tiempo lineal: cuando es necesario buscar la arista e_M , pues el colapso de los vértices extremos de e_M en v_0 y la Construcción 2.1.3 toman tiempo constante. Más aún, observe que al sólo introducir 13 vértices nuevos, la gráfica G' mantiene un orden constante respecto al orden de G' .

Aplicamos esta construcción para cada $e \in M$ y llamemos G'' y T'' a la gráfica y sistema de transición resultantes. Observe que al ser M un apareamiento de la gráfica original G tenemos que $|M| \leq \frac{|V(G)|}{2}$, de manera que la construcción descrita arriba es realizable en tiempo lineal respecto a $|V(G)|$. Así pues, G'' y T'' pueden construirse en tiempo polinomial. Más aún, como G'' tiene a lo más orden $12|V(G)|$, entonces G'' y T'' tienen tamaño polinomial. De esta forma, tenemos que para todo vértice $v \in V(G'') \setminus \{x, y\}$ se cumple que $T''(v) \in \langle Z, K_2 + K_2 \rangle$ y si $v \in \{x, y\}$, entonces $T''(v) \in \langle X \rangle$. Por tanto, resta construir las gráficas de transición de x y y de manera que se encuentren en $\langle Z \rangle$.

Sea G_1'' una gráfica ajena en vértices con G'' tal que $G'' \cong G_1''$ y $f : V(G'') \rightarrow V(G_1'')$ una función de isomorfismo. Además, consideramos T_1'' un sistema de transición para la gráfica G_1'' tal que se comporta exactamente igual al sistema de transición T'' en G'' . Obtenemos la gráfica H realizando la unión de G'' y G_1'' y añadiendo las aristas $xf(x)$ y $yf(y)$. Observe que que $x, y, f(x)$ y $f(y)$ son vértices de grado 4 en H .

Construimos un sistema de transición T_H para la gráfica H de la siguiente forma: para $v \in \{x, y\}$, escogemos $T_H(z) \in \langle Z \rangle$ y $T_H(f(z)) \in \langle Z \rangle$ tales que $T''(z)$ sea subgráfica inducida de $T_H(z)$ y $T_1''(f(z))$ sea subgráfica inducida de $T_H(f(z))$; para todo vértice v en $V(H) \setminus \{x, y\}$, mantenemos su gráfica de transición heredada de T'' y T_1'' , es decir, $T_H(v) = T''(v)$ si $v \in V(G'')$ o $T_H(v) = T_1''(v)$ si $v \in V(G_1'')$. Observemos

que por construcción tenemos que $T_H \subseteq \langle Z, K_2 + K_2 \rangle$. Note también que construir H y T_H es realizable en tiempo polinomial respecto a $|V(G)|$, pues G'' y T'' tenían tamaño polinomial respecto a $|V(G)|$.

Afirmación 2. H contiene una xy -trayectoria T_H -compatible si y sólo si G'' contiene una xy -trayectoria T'' -compatible.

Demostraremos primero la parte necesaria. Supongamos que P es una xy -trayectoria T_H -compatible en H . Si $V(P) \subseteq V(G'')$ entonces P es una xy -trayectoria T'' -compatible en G'' por construcción de la gráfica H y el sistema de transición T_H , en otro caso, observe que el conjunto de aristas $\{xf(x), yf(y)\}$ es conjunto de corte por aristas, de manera que si $V(P) \cap V(G''_1)$ es no vacío, entonces P forzosamente debió hacer uso de dichas aristas. En consecuencia, P debe contener una $f(x)f(y)$ -trayectoria T_H -compatible como subtrayectoria, digamos P' . Es fácil observar que P' coincide con una xy -trayectoria T'' -compatible en G'' por definición de G''_1 y T''_1 .

La parte suficiente es trivial de observar, por ello, la afirmación queda demostrada.

De la afirmación 1 y 2, y en vista de que la construcción de H y T_H puede ser realizada en tiempo polinomial, obtenemos (2.5). Debido a que $\langle X, K_2 + K_2 \rangle$ -CP* es NP-difícil, se sigue que $\langle Z, K_2 + K_2 \rangle$ -CP es NP-completo. \square

Lema 2.1.6. *Sea Z una gráfica de orden a lo más 4 tal que K_3 o P_3 es subgráfica inducida de Z . Entonces los problemas $\langle Z, P_4 \rangle$ -CP y $\langle Z, L_4 \rangle$ -CP son NP-completos.*

Demostración. Para este lema, mostraremos que:

$$\langle Z, K_2 + K_2 \rangle\text{-CP} \propto \langle Z, P_4 \rangle\text{-CP} \quad (2.6)$$

y también que:

$$\langle Z, P_4 \rangle\text{-CP} \propto \langle Z, L_4 \rangle\text{-CP}. \quad (2.7)$$

Sea (G, T, x, y) un ejemplar de $\langle Z, K_2 + K_2 \rangle$ -CP. Si la gráfica de transición de x o y se encuentra en $\langle K_2 + K_2 \rangle$, entonces podemos reemplazarla por alguna gráfica en $\langle P_4 \rangle$ sin alterar la existencia de xy -trayectorias T -compatibles puesto que no se usan transiciones en el vértice inicial o final. De esto, consideremos a $v_0 \in V(G) \setminus \{x, y\}$ tal que $T(v_0) \in \langle K_2 + K_2 \rangle$. Sea $E(T(v_0)) = \{e_1e_2, e_3e_4\}$. Aplicamos la Construcción 2.1.3 al vértice v_0 para obtener la gráfica G' . Construimos un nuevo sistema de transición T' como sigue: todas las gráficas de transición de los nuevos vértices introducidos son escogidas de $\langle P_4 \rangle$ a condición de que $f_1f_2 \in E(T'(w))$, $f_3f_4 \in E(T'(w'))$, $E(T'(v_{1,4})) = \{e_1f_1, f_1f_4, f_4e_4\}$ y $E(T'(v_{2,3})) =$

$\{e_2f_2, f_2f_3, f_3e_3\}$; para el resto de vértices $v \in V(G) \setminus V(G')$ tomamos $T'(v) = T(v)$.

Afirmación 1. G contiene una xy -trayectoria T -compatible si y sólo si G' contiene una xy -trayectoria T' -compatible.

Probaremos primero la parte suficiente, es decir, supondremos que G tiene una xy -trayectoria T -compatible, digamos P , y encontraremos una xy -trayectoria T' -compatible en G' . Si $v_0 \notin V(P)$, entonces P es una xy -trayectoria T' -compatible en G' , por tanto, consideremos el caso cuando $v_0 \in V(P)$. Supongamos que

$$P = (u_0, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1}, u_i = v_0, a_i, u_{i+1}, \dots, u_k = y)$$

Nótese que, debido a la gráfica de transición de v_0 , se tiene que si $a_{i-1} = e_1$, entonces $a_i = e_2$ y que si $a_{i-1} = e_3$, entonces $a_i = e_4$. En cambio, si $a_{i-1} = e_2$, entonces $a_i = e_1$ y si $a_{i-1} = e_4$, entonces $a_i = e_3$. Por tanto, supongamos sin pérdida de generalidad que $a_{i-1} = e_1$ o $a_{i-1} = e_3$ y consideremos ambos casos.

En el caso en que $a_{i-1} = e_1$, definimos $P' = (v_{1,4}, f_1, w, f_2, v_{2,3})$, y con ello, el camino:

$$(u_0, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1}, v_{1,4}) \cup P' \cup (v_{2,3}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_k)$$

es una trayectoria T' -compatible en G' por definición del sistema de transición T' . De manera similar, si $a_{i-1} = e_3$, definimos $P' = (v_{2,3}, f_3, w', f_4, v_{1,4})$

$$(u_0, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1}, v_{2,3}) \cup P' \cup (v_{1,4}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_k = y)$$

es una trayectoria T' -compatible en G' por definición del sistema de transición T' .

Esto muestra la parte suficiente de la afirmación 1.

Probamos ahora la parte necesaria: si G' contiene una xy -trayectoria T' -compatible, digamos P' , entonces G contiene una xy -trayectoria T -compatible.

Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Observe que si $E(P') \cap E = \emptyset$, entonces P' debe ser una trayectoria tal que $V(P') \subseteq V(G)$ y $E(P') \subseteq E(G)$, y en consecuencia de la definición del sistema de transición T' , P' una xy -trayectoria T -compatible en G , por lo que consideramos el caso cuando $E(P') \cap E$ es no vacío.

Supongamos que $P' = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_{k-1}, a_{k-1}, u_k = y)$. Afirmamos que P' usa exactamente dos aristas de E . Consideremos i el menor índice tal que $a_i \in E$, observe que dicho índice existe pues

estamos suponiendo que $E(P') \cap E \neq \emptyset$. Debe ser que $u_{i+1} \in \{v_{1,4}, v_{2,3}\}$, pues en otro caso $u_i \in \{v_{1,4}, v_{2,3}\}$, y dado que E es un conjunto de corte por aristas tal que u_i queda en una componente conexa distinta a $u_0 = x$, entonces la subtrayectoria $(u_0 = x, P', u_i)$ debe hacer uso de alguna arista en E , lo cual contradice nuestra elección de i . Nuevamente, como $(u_{i+1}, P', u_k = y)$ es una trayectoria tal que u_{i+1} y u_k son vértices que quedan en componentes conexas distintas de $G - E$, entonces (u_{i+1}, P', u_k) debe usar al menos una arista, digamos a_j , en E . Note que dicha arista es distinta a a_i , pues $i < j$. Luego, como P' es una trayectoria y dado que las aristas e_1 y e_4 son adyacentes al igual que las aristas e_2 y e_3 , se sigue que P' usa únicamente a a_i y a_j en E .

Definimos $P_1 = (u_0 = x, P', u_i)$, $P_2 = (u_i, P', u_{j+1})$ y $P_3 = (u_{j+1}, P', u_k = y)$. Es claro que $P' = P_1 \cup P_2 \cup P_3$. Más aún, de lo anterior y dada la definición del sistema de transición T' , debe ser que P_1 y P_2 son trayectorias T -compatibles en la gráfica G .

Consideremos los siguientes casos respecto a a_i :

1. $a_i = e_1$.

Por definición de $T'(v_{1,4})$ y $T'(w)$ y de la Observación 2.1.4 se tiene que

$$P_2 = (u_i, a_i = e_1, v_{1,4}, a_{i+1} = f_1, w, a_{i+2} = f_2, v_{2,3}, a_{i+3}, u_{i+4}, \dots, u_{j+1}).$$

Debido a la definición de $T'(v_{2,3})$ tenemos que entonces la arista a_{i+3} es f_3 o e_2 , sin embargo, recordando que $a_j \in E$, y dado que $v_{2,3}$ es extremo de e_2 , entonces $a_j = e_2$, de otra manera P' no podría ser una trayectoria ya que en otro caso repetiría el vértice $v_{1,4}$ o $v_{2,3}$ incidente a la arista a_j . Por tanto, debe ser que:

$$P_2 = (u_i, a_i = e_1, v_{1,4}, a_{i+1} = f_1, w, a_{i+2} = f_2, v_{2,3}, a_j = e_2, u_{j+1}).$$

Como resultado del sistema de transición T , entonces tenemos que el camino

$$P_1 \cup (u_i, a_i = e_1, v_0, a_j = e_2, u_{j+1}) \cup P_3$$

es una xy -trayectoria T compatible en G .

2. $a_i = e_2$.

De manera análoga al caso anterior, obtenemos que:

$$P_2 = (u_i, a_i = e_2, v_{2,3}, a_{i+1} = f_2, w, a_{i+2} = f_1, v_{1,4}, a_j = e_1, = u_{j+1}),$$

con lo que el camino $P_1 \cup (u_i, a_i = e_2, v_0, a_{i+3} = e_1, u_{i+3} = u_{j+1}) \cup P_3$ es una xy -trayectoria T -compatible en G .

3. $a_i = e_4$. De manera análoga, obtenemos que $P_1 \cup (u_i, a_i = e_4, v_0, a_j = e_3, u_{j+1}) \cup P_3$ es una xy -trayectoria T -compatible.
4. $a_i = e_3$. De manera análoga, obtenemos que $P_1 \cup (u_i, a_i = e_4, v_0, a_j = e_3, u_{j+1}) \cup P_3$ es una xy -trayectoria T -compatible.

En todos los casos existe una xy -trayectoria T -compatible en G .

Con esto, la afirmación 1 ha sido demostrada.

Realizamos la construcción descrita arriba para cada vértice v tal que $T(v) \in \langle K_2 + K_2 \rangle$. De esta manera, obtenemos una gráfica G'' y un sistema de transición T'' tales que (G'', T'', x, y) es un ejemplar de $\langle Z, P_4 \rangle$ -CP. De manera análoga al Lema 2.1.5, dado que la construcción se realiza a lo más para un número lineal de vértices respecto al orden de G y teniendo en cuenta que la Construcción 2.1.3 puede ser realizada en tiempo lineal, podemos construir G'' y T'' en tiempo polinomial. De esto y la afirmación 1, se sigue (2.6).

Para demostrar (2.7) procederemos de manera análoga. Sea (G, T, x, y) un ejemplar de $\langle Z, P_4 \rangle$ -CP. Nuevamente, reemplazamos las gráficas de transición de x y y por gráficas en $\langle L_4 \rangle$ en caso de ser necesario. Consideramos $v_0 \in V(G) \setminus \{x, y\}$ tal que $T(v_0) \in \langle P_4 \rangle$ y supongamos que $E(T(v_0)) = \{e_1e_2, e_1e_3, e_3e_4\}$. Como se hizo anteriormente, aplicamos la Construcción 2.1.3 al vértice v_0 y construimos un sistema de transición T' para la gráfica G' como sigue: para todo vértice $v \in V(G') \setminus V(G)$ escogemos su gráfica de transición de $\langle L_4 \rangle$ a condición de que $f_1f_2 \in E(T'(w))$, $f_3f_4 \in E(T'(w'))$, $E(T'(v_{1,4})) = \{e_1f_1, f_1f_4, f_4e_4, e_1f_4\}$ y $E(T'(v_{2,3})) = \{e_2f_2, f_2f_3, f_3e_3, e_3f_2\}$; para el resto de vértices $v \in V(G) \setminus V(G')$ tomamos $T'(v) = T(v)$.

Afirmación 2. G contiene una xy -trayectoria T -compatible si y sólo si G' contiene una xy -trayectoria T' -compatible.

Primero demostramos la parte suficiente, es decir, si G contiene una xy -trayectoria T -compatible, digamos P , entonces G' contiene una xy -trayectoria T' -compatible.

Si $v_0 \notin V(P)$, entonces P debe ser una xy -trayectoria T' -compatible en G' , por lo que consideramos el caso contrario cuando $v_0 \in V(P)$. Supongamos que

$$P = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_{i-1}, a_{i-1}, u_i = v_0, a_i, u_{i+1}, \dots, u_k = y).$$

Dada la estructura de $T(u_i)$, sabemos que el grado de a_{i-1} en $T(u_i)$ es 1 o 2. Consideremos los siguientes casos:

1. Si a_{i-1} tiene grado 2. Entonces a_{i-1} debe ser igual a e_1 o e_3 . Examinemos ambos casos:

1.1 Si $a_{i-1} = e_1$. En tal caso, puesto que e_1 es adyacente sólo a e_2 y e_3 en $T(u_i)$, la arista a_i sólo puede ser alguna de estas. Verifiquemos los dos casos:

1.1.1 Si $a_i = e_2$. Entonces por definición de la gráfica G' y del sistema T' tenemos que

$$(u_0 = x, P, u_{i-1}) \cup (u_{i-1}, a_{i-1} = e_1, v_{1,4}, f_1, w, f_2, v_{2,3}, a_i = e_2, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, P, u_k = y)$$

es una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

1.1.2 Si $a_i = e_3$. Entonces por definición de la gráfica G' y del sistema T' tenemos que

$$(u_0 = x, P, u_{i-1}) \cup (u_{i-1}, a_{i-1} = e_1, v_{1,4}, f_1, w, f_2, v_{2,3}, a_i = e_3, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, P, u_k = y)$$

es una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

1.2 Si $a_{i-1} = e_3$. Este caso es análogo a 1.1.

2. Si a_{i-1} tiene grado 1. Entonces a_{i-1} debe ser igual a e_2 o e_4 . Examinemos ambos casos:

2.1 Si $a_{i-1} = e_2$. Puesto que e_2 únicamente es adyacente a e_1 en $T(u_i)$, la arista a_i es forzosamente e_1 . Así, por definición de G' y el sistema de transición T' obtenemos que

$$(u_0 = x, P, u_{i-1}) \cup (u_{i-1}, a_{i-1} = e_2, v_{2,3}, f_2, w, f_1, v_{1,4}, a_i = e_1, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, P, u_k = y)$$

es una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

2.2 Si $a_{i-1} = e_4$. Este caso es análogo a 2.1.

En cualquier de los casos anteriores obtenemos una xy -trayectoria T' -compatible en G' .

Ahora demostramos la parte necesaria: si G' contiene una xy -trayectoria T' -compatible, entonces G contiene una xy -trayectoria T -compatible.

Sea $P' = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_{k-1}, a_{k-1}, u_k = y)$ dicha xy -trayectoria T' -compatible en G' . De manera análoga a la afirmación 1, si $E(P')$ no contiene a ninguna de las aristas e_1, e_2, e_3, e_4 , se obtiene que P' es una xy -trayectoria T -compatible en G . En otro caso, una demostración igual a la mostrada en la afirmación 1 prueba que existen exactamente dos aristas distintas $\{a_i, a_j\} \subseteq E(P')$, con $i < j$, tales que $\{a_i, a_j\} \subseteq \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y P' se puede descomponer en $P' = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, donde $P_1 = (u_0 = x, P', u_i)$, $P_2 = (u_i, P', u_{j+1})$ y $P_3 = (u_{j+1}, P', u_k = y)$, de manera que P_1 y P_3 son trayectorias T -compatibles en la gráfica G .

Consideremos los siguientes casos respecto a a_i :

1. Si $a_i = e_1$. Entonces, debido a la definición de $T'(v_{1,4})$ se tiene que la arista a_i sólo puede ser f_1 o f_4 .

Consideremos ambos casos:

- 1.1 Si $a_{i+1} = f_1$. Entonces, por definición de $T'(w)$ y de la Observación 2.1.4 tenemos que

$$P_2 = (u_i, a_i = e_1, v_{1,4}, a_{i+1} = f_1, w, a_{i+2} = f_2, v_{2,3}, a_{i+3}, u_{i+1}, \dots, u_{j+1}).$$

Debido a la definición de $T'(v_{2,3})$ tenemos que la arista a_{i+3} es e_2, e_3 o f_3 . Sin embargo, recordando que $a_j \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y dado que $v_{2,3}$ es extremo de e_2 y e_3 , entonces $a_j = a_{i+3} \in \{e_2, e_3\}$, de otra manera P' no podría ser una trayectoria. Consideremos ambos casos:

- 1.1.1 Si $a_j = e_2$. En consecuencia a que $e_1 e_2 \in T(v_0)$ obtenemos que

$$P_1 \cup (u_i, a_i = e_1, v_0, a_j = e_2, u_{j+1}) \cup P_3$$

es una xy -trayectoria T -compatible en G .

- 1.1.2 Si $a_j = e_3$. En consecuencia a que $e_1 e_3 \in T(v_0)$ obtenemos que

$$P_1 \cup (u_i, a_i = e_1, v_0, a_j = e_3, u_{j+1}) \cup P_3$$

es una xy -trayectoria T -compatible en G .

- 1.2 Si $a_{i+1} = f_4$. Entonces, por definición de $T'(w')$ y de la Observación 2.1.4, tenemos que

$$P_2 = (u_i, a_i = e_1, v_{1,4}, a_{i+1} = f_4, w', a_{i+2} = f_3, v_{2,3}, a_{i+3}, u_{i+1}, \dots, u_{j+1}).$$

Debido a la definición de $T'(v_{2,3})$ tenemos que entonces la arista a_{i+3} es e_3 o f_2 . Sin embargo, recordando que $a_j \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y dado que $v_{2,3}$ es extremo e_3 , entonces a_{i+3} debe ser la arista

$a_j = e_3$, de otra manera P' no podría ser una trayectoria.

Dado que $e_1 e_3 \in T(v_0)$ se obtiene que

$$P_2 \cup (u_i, a_i = e_1, v_0, a_j = e_3, u_{j+1}) \cup P_3$$

es una xy -trayectoria T -compatible en G .

2. Si $a_i = e_2$. Entonces, debido a la definición de $T'(v_{2,3})$, se tiene que la arista a_{i+1} sólo puede ser f_2 . Por definición de $T'(w)$ y de la Observación 2.1.4 tenemos que

$$P_2 = (u_i, a_i = e_2, v_{2,3}, a_{i+1} = f_2, w, a_{i+2} = f_1, v_{1,4}, a_{i+2}, u_{i+1}, \dots, u_{j+1}).$$

Debido a la definición de $T'(v_{1,4})$ tenemos que entonces la arista a_{i+3} es e_1 o f_4 . Sin embargo, recordando que $a_j \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y dado que $v_{1,4}$ es extremo de e_1 , entonces $a_j = e_1$, de otra manera P' no podría ser una trayectoria.

Se obtiene, entonces, que $P_1 \cup (u_i, a_i = e_2, v_0, a_j = e_1, v_{j+1}) \cup P_3$ es una xy -trayectoria T -compatible en G .

3. Si $a_i = e_3$. Se procede de manera análoga al caso (1) y obtenemos, según el caso $a_j = e_1$ o $a_j = e_4$, que $P_1 \cup (u_i, a_i = e_3, v_0, a_j = e_1, u_{j+1}) \cup P_3$ o que $P_1 \cup (u_i, a_i = e_3, v_0, a_j = e_4, u_{j+1}) \cup P_3$ es una xy -trayectoria T -compatible en G .
4. Si $a_i = e_4$. Se procede de manera análoga al caso (2) y obtenemos que $P_1 \cup (u_i, a_i = e_4, v_0, a_j = e_3, u_{j+1}) \cup P_3$ es una xy -trayectoria T -compatible.

En cualquiera de los casos anteriores se obtiene una xy -trayectoria T -compatible en G . Por tanto, la afirmación 2 ha sido demostrada.

Realizamos esta construcción para todo vértice $v \in V(G) \setminus \{x, y\}$ tal que su gráfica de transición $T(v)$ se encuentre en $\langle P_4 \rangle$. De esta forma, conseguimos una gráfica G'' y un sistema de transición T'' tales que (G'', T'', x, y) es un ejemplar de $\langle Z, L_4 \rangle$ -CP. Nuevamente, puesto que esta construcción puede ser realizada en tiempo polinomial y como consecuencia de la afirmación 2 se sigue que (2.6) es verdad.

Con todo lo anterior, mostramos que ambos problemas son NP-completos. □

Para demostrar el último lema referente a NP-Complejidad antes del teorema principal, necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 2.1.7. *Sean n y k dos enteros positivos tales que $n > k$ y $n \equiv k \pmod{2}$. Entonces existen una*

gráfica $G_{n,k}$ y $v^* \in V(G_{n,k})$ tales que

1. Para todo $v \in V(G_{n,k}) \setminus \{v^*\}$ se tiene que $\delta(v) = n$.
2. $\delta(v^*) = k$.
3. $|V(G_{n,k})| \leq 2n + 4$.

Demostración. Consideremos los siguientes casos:

1. Si k es par. Para este caso, n puede ser par o impar. Consideremos la gráfica K_{n+1} y un apareamiento $M \subseteq E(K_{n+1})$ tal que $|M| = \frac{k}{2}$. Note que dicho apareamiento existe, pues $\frac{n}{2} > \frac{k}{2}$. Subdividimos las aristas de M y colapsamos los nuevos vértices introducidos en un vértice v^* . Observe, por tanto, que el grado de v^* en la nueva gráfica es k y el resto de vértices tienen grado n , de manera que (1) y (2) se cumplen, además, dicha gráfica tiene orden $n + 2$, por lo que de igual manera (3) se satisface.
2. Si k es impar. Para este caso, nótese que n también debe ser impar, pues $n \equiv k \pmod{2}$. Primero veremos el caso en el que $k = 1$. Consideremos la gráfica $G_{n,n-1}$ descrita en el caso anterior; sea $u^* \in V(G_{n,n-1})$ tal que $\delta(u^*) = n - 1$, añadimos un nuevo vértice v^* y la arista v^*u^* . Es claro que esta gráfica cumple las tres propiedades requeridas, por lo que es $G_{n,1}$.

Supongamos ahora que $k > 1$. Construimos dos gráficas ajenas en vértices $G_{n,k-1}$ y $G_{n,n-1}$ como lo hicimos en el caso 1. Sean $v^* \in V(G_{n,k-1})$ y $u^* \in V(G_{n,n-1})$ tales que $\delta_{G_{n,k-1}}(v^*) = k - 1$ y $\delta_{G_{n,n-1}}(u^*) = n - 1$, respectivamente. Unimos ambas gráficas y añadimos la arista v^*u^* . La gráfica que se obtiene tiene orden $2n + 4$ y todos sus vértices tienen grado n a excepción de v^* , cuyo grado es k , de modo que se satisfacen las tres propiedades.

En cualquier caso, la gráfica $G_{n,k}$ existe. □

Observe que si k es impar y n es par, entonces la gráfica $G_{n,k}$ no puede existir debido al Corolario 1.2.1. Por tanto, en la demostración del siguiente lema tendremos que aplicar el Lema 2.1.5 como un paso intermedio antes de poder aplicar el Lema 2.1.7.

Lema 2.1.8. Sean $X \in \{K_3, P_3\}$, $Y \in \{K_2 + K_2, P_4, L_4\}$ y \mathcal{A} una clase de gráficas cerrada bajo isomorfismos tal que $\{X, Y\} \subseteq \mathcal{A}^{ind}$. Entonces el problema \mathcal{A} -CP es NP-completo.

Demostración. Sea $\{X', Y'\} \subseteq \mathcal{A}$ tales que X y Y son subgráficas inducidas de X' y Y' , respectivamente. Si $X = X'$, entonces sea $Z = X$; de otra forma, sea Z una gráfica de orden 4 tal que X es subgráfica inducida de Z y Z es subgráfica inducida de X' . Mostraremos que

$$\langle Z, Y \rangle\text{-CP} \propto \langle X', Y' \rangle\text{-CP}. \quad (2.8)$$

Sea (G, T, x, y) un ejemplar de $\langle Z, Y \rangle$ -CP. Consideremos $v_0 \in V(G)$ tal que $T(v_0) \notin \langle X', Y' \rangle$ y en consecuencia, $\delta_G(v_0) = 4$. Para asignar al vértice v_0 una gráfica de transición que pertenezca a $\langle X', Y' \rangle$ primero debemos aumentar su grado. Si $T(v_0) \in \langle Z \rangle$ consideramos $n = |V(X')|$, en otro caso $n = |V(Y')|$. Ahora, construimos $G_{n, n-4}$ tal que $v^* \in V(G_{n, n-4})$ tiene grado $n - 4$ y obtenemos la gráfica G' al añadir a G la gráfica $G_{n, n-4}$ y colapsar los vértices v_0 y v^* en un nuevo vértice v_0^* . Se sigue que v_0^* tiene grado n en la gráfica resultante. Llamemos x' y y' a los vértices correspondientes a x y y , respectivamente, de G en G' .

Observación 1. Note que el vértice v_0^* es un vértice de corte de G' . Además, (i) si $v_0^* \notin \{x', y'\}$, entonces en la gráfica $G' - v_0^*$, ambos vértices x' y y' quedan en una componente conexa distinta a los vértices en $V(G') \setminus (V(G) \cup \{v_0^*\})$, por tanto, cualquier $x'y'$ -trayectoria en G' que haga uso del vértice v_0^* debe usar forzosamente las aristas correspondientes a $E_G(v_0)$ en G' , llamemos a este conjunto $E_G(v_0)'$. Es decir, $E_G(v_0)' = \{v_0^*u \mid u \in N_G(v_0)\}$. (ii) Si $v_0^* \in \{x', y'\}$ sucede un caso análogo al anterior, únicamente que el vértice en $\{x', y'\} \setminus \{v_0^*\}$ queda en una componente conexa distinta a la que pertenecen los vértices en $V(G') \setminus (V(G) \cup \{v_0^*\})$.

Consideremos una gráfica H cuyo conjunto de vértices es $E_G(v_0)'$ y dos vértices v_0^*u y v_0^*w son adyacentes si y sólo si v_0u y v_0w son adyacentes en $T(v_0)$.

Definimos un sistema de transición T' para G' de la siguiente manera: si $T(v_0) \in \langle Z \rangle$, entonces tomamos $T'(v_0^*) \in \langle X' \rangle$, en otro caso tomamos $T'(v_0^*) \in \langle Y' \rangle$, de tal manera que se asegure que H es subgráfica inducida de $T'(v_0^*)$. Recordando que Z es subgráfica inducida de X' y Y es subgráfica inducida de Y' , observe que esta elección es posible puesto que en cualquier caso, como $H \cong T(v_0)$ y $T(v_0) \in \langle Z, Y \rangle$, entonces $H \in \langle Z, Y \rangle$. Para $v \in V(G) \cap V(G')$ tomamos $T'(v) = T(v)$ y para $v \in V(G_{n, n-4}) \setminus \{v^*\}$ escogemos $T'(v) \in \langle T'(v_0^*) \rangle$ de manera arbitraria.

Afirmación 1. G contiene una xy -trayectoria T -compatible si y sólo si G' contiene una $x'y'$ -trayectoria T' -compatible.

Probaremos primero la parte suficiente: supondremos que existe una xy -trayectoria T -compatible en G , digamos P , y encontraremos una $x'y'$ -trayectoria T' -compatible en G' .

Para el caso en el que v_0 no pertenezca a $V(P)$ se sigue de manera inmediata que P es una $x'y'$ -trayectoria T' -compatible en G' , por lo que consideramos $v_0 \in V(P)$. Supongamos que $P = (u_0 = x, a_0, u_1, \dots, u_k = y)$. Si $v_0 \in \{x, y\}$ basta sustituir el vértice final o inicial por v_0^* en P para obtener una $x'y'$ -trayectoria T' -compatible en G' , pues no se realizó ninguna modificación a las transiciones de vértices

internos de P y las gráficas de transición del sistema T de dichos vértices coinciden con las de T' por construcción de T' . En otro caso, supongamos que $v_0 = u_i$, con $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Debe ser, por tanto, que

$$(u_0 = x', P, u_{i-1}) \cup (u_{i-1}, a'_{i-1}, v_0^*, a'_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, P, u_k = y')$$

es una $x'y'$ -trayectoria T' -compatible en G' , pues como $a_{i-1}a_i \in E(T(v_0))$ sabemos que $a'_{i-1} = u_{i-1}v_0^*$ y $a'_i = v_0^*u_{i+1}$ son adyacentes en H y así, dado que H es subgráfica inducida de $T'(v_0^*)$, obtenemos que $a'_{i-1}a'_i \in E(T'(v_0^*))$ y por definición de T' , las gráficas de transición del resto de vértices en $V(P)$ coinciden en ambos sistemas de transiciones.

Probamos ahora la parte necesaria, es decir, si G' contiene una $x'y'$ -trayectoria T' -compatible, digamos P' , entonces G contiene una xy -trayectoria T -compatible.

Para el caso $v_0^* \notin V(P')$ se sigue de la definición de T' que P' es una xy -trayectoria T -compatible en G , por lo que consideremos $v_0^* \in V(P')$. Supongamos que $P = (u_0 = x', a_0, u_1, \dots, u_k = y')$. Si $v_0^* \in \{x', y'\}$, basta sustituir el vértice inicial o final por x o y , en su respectivo caso, para obtener una xy -trayectoria T -compatible en G , pues no se realizó ninguna modificación en las transiciones de vértices internos de P' y las gráficas de transición del sistema T' de dichos vértices coinciden con las de T , por construcción de T' . En otro caso, supongamos que $v_0^* = u_i$, con $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Por la observación (1) tenemos que tanto u_{i-1} como u_{i+1} son vértices en $V(G)$. Además, $u_{i-1}v_0^*$ y $v_0^*u_{i+1}$ son adyacentes en $E(T'(v_0^*))$. Esto es, $u_{i-1}v_0^*$ y $v_0^*u_{i+1}$ son adyacentes en H , puesto que H es subgráfica inducida de $T'(v_0^*)$. Por definición de la gráfica H obtenemos que $u_{i-1}v_0$ y v_0u_{i+1} son adyacentes en $T(v_0)$. Obtenemos que

$$(u_0 = x' = x, P', u_{i-1}) \cup (u_{i-1}, v_0, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, P', u_k = y' = y)$$

es una xy -trayectoria T -compatible en G . Esto demuestra la afirmación.

Aplicando esta construcción a cada uno de los vértices de G' cuya gráfica de transición no está en $\langle X', Y' \rangle$ obtenemos un ejemplar (G'', T'', x', y') de $\langle X', Y' \rangle$ -CP de forma que la afirmación 1 garantiza que G contiene una xy -trayectoria T -compatible si y sólo si G' tiene una trayectoria $x''y''$ -trayectoria T'' -compatible.

Observe que esta construcción se realiza para, a lo más, un número lineal de vértices. Más aún, note que las gráficas añadidas en cada paso tienen orden lineal respecto al orden de las gráficas X' y Y' , de modo que si $a = \max\{|V(X')|, |V(Y')|\}$, construir la gráfica G' toma tiempo $O(a|V(G)|)$, no obstante, al a ser

una constante tenemos que dicho tiempo es lineal. Por tanto, la construcción de G'' y T'' es realizable en tiempo polinomial.

Así pues, obtenemos que (2.8) es verdadera. En vista de los lemas 2.1.5 y 2.1.6 la demostración queda concluida. \square

Teorema 2.1.1. *El problema \mathcal{A} -CP es NP-completo si \mathcal{A}^{ind} contiene alguno de los siguientes conjuntos*

$$\{P_3, K_2 + K_2\}, \{K_3, K_2 + K_2\}, \{P_4\}, \{L_4\};$$

en cualquier otro caso es posible resolverse en tiempo lineal.

Demostración. Del Lema 2.1.8 y dado que P_3 es subgráfica inducida tanto de P_4 como de L_4 , la NP-Completitud de \mathcal{A} -CP se sigue. \square

2.2. Casos particulares de \mathcal{A} bajo los cuales \mathcal{A} -CP es lineal

Lema 2.2.1. *Sea \mathcal{A} una clase de gráficas cerrada bajo isomorfismo tal que ninguno de los conjuntos*

$$\{P_3, K_2 + K_2\}, \{K_3, K_2 + K_2\}, \{P_4\}, \{L_4\}$$

está contenido en \mathcal{A}^{ind} . Entonces al menos uno de los siguientes casos sucede:

1. *Para cada $X \in \mathcal{A}^{ind}$, X^o es 1-regular.*
2. *Para cada $X \in \mathcal{A}^{ind}$, X^o es una gráfica multipartita completa.*

Demostración. Dado que los conjuntos

$$\{P_3, K_2 + K_2\}, \{K_3, K_2 + K_2\}, \{P_4\}, \{L_4\}$$

no están contenidos en \mathcal{A}^{ind} , observemos que se tiene lo siguiente:

1. Si $K_2 + K_2 \in \mathcal{A}^{ind}$, entonces $\{P_3, K_3\} \cap \mathcal{A}^{ind} = \emptyset$.
2. Si $K_2 + K_2 \notin \mathcal{A}^{ind}$, entonces $\{K_2 + K_2, P_4, L_4\} \cap \mathcal{A}^{ind} = \emptyset$.

Sea $X \in \mathcal{A}^{ind}$. Consideremos los siguientes casos:

- Si $K_2 + K_2 \in \mathcal{A}^{ind}$.

Afirmamos que si $X \in \mathcal{A}^{ind}$, entonces X^o es 1-regular. Procediendo por contradicción, supongamos que X^o no es 1-regular. En tal caso, existe un vértice de X^o , digamos v , de grado al menos dos. Sean

u y u' los vecinos de v . Entonces $X[\{v, u, u'\}] \in \mathcal{A}^{ind}$, pues $X \in \mathcal{A}^{ind}$, y $X[\{v, u, u'\}] \in \langle P_3, K_3 \rangle$, lo cual contradice (1).

- Si $K_2 + K_2 \notin \mathcal{A}^{ind}$.

Afirmamos que si $X \in \mathcal{A}^{ind}$, entonces X° es una gráfica multipartita completa. Procediendo por contradicción, supongamos que X° no es una gráfica multipartita completa. Por el Lema 1.2.2, existen tres vértices distintos $v, u, u' \in V(X^\circ)$ tales que $uu' \in E(X^\circ)$, $uv \notin E(X^\circ)$ y $u'v \notin E(X^\circ)$. Dado que X° no contiene vértices aislados debe ser que v tiene al menos un vecino, digamos v' . Si consideremos $G = X^\circ[\{v, v', u, u'\}]$, entonces $G \in \mathcal{A}^{ind}$, pues $X \in \mathcal{A}^{ind}$. Tengamos en cuenta los siguientes casos:

- $E(G) = \{u'u, v'v\}$

Entonces $G \in \langle K_2 + K_2 \rangle$ y $G \in \mathcal{A}^{ind}$, lo cual contradice (2).

- $E(G) = \{u'u, v'v, v'u'\}$

Entonces $G \in \langle P_4 \rangle$ y $G \in \mathcal{A}^{ind}$, lo cual contradice (2).

- $E(G) = \{u'u, v'v, v'u\}$

Entonces $G \in \langle P_4 \rangle$ y $G \in \mathcal{A}^{ind}$, lo cual contradice (2).

- $E(G) = \{u'u, v'v, v'u, v'u'\}$

Entonces $G \in \langle L_4 \rangle$ y $G \in \mathcal{A}^{ind}$, lo cual contradice (2).

De esto, debe ser entonces que X° es una gráfica multipartita completa.

En cualquier caso se satisface el lema. □

Proposición 2.2.2. *Sea \mathcal{A} una clase de gráficas cerrada bajo isomorfismos tal que para todo $X \in \mathcal{A}$ se tiene que X° es una gráfica 1-regular. Entonces \mathcal{A} -CP puede ser resuelto en tiempo lineal. En particular, dado un ejemplar (G, T, x, y) de \mathcal{A} -CP se necesita tiempo $O(|E(G)|)$ para encontrar una xy -trayectoria T -compatible si existe, o para determinar que no existe.*

Demostración. Sea (G, T, x, y) un ejemplar de \mathcal{A} -CP. Consideremos $v_0 = x$ y $E_G(v_0) = \{f_1, \dots, f_r\}$. Construimos una trayectoria T -compatible con vértice inicial v_0 , digamos P , como sigue. Iniciamos en v_0 y tenemos r posibles aristas para escoger, de manera arbitraria, la primera arista $e_1 = v_0v_1$, y hacemos $P := (v_0, e_1, v_1)$. Sea v_j el vértice final de P . Dado que para todo vértice v en $V(G)$ se tiene que $T(v)^\circ$ es 1-regular, entonces la arista e_j tiene dos posibilidades: es un vértice aislado en $T(v_j)$ y la trayectoria no puede seguir extendiéndose, o hay una única arista $v_jv_{j+1} \in E_G(v_j)$ tal que es una transición válida con la arista e_j . En el segundo caso, si $v_{j+1} \notin V(P)$, extendemos la trayectoria $P := P \cup (v_j, e_{j+1}, v_{j+1})$. Repetimos este proceso hasta que P no pueda seguir siendo extendida. Observe que entonces el único paso no determinista es la elección de e_1 , por lo que hay exactamente r trayectorias T -compatibles que no pueden seguir siendo extendidas con vértice inicial x , digamos P_1, \dots, P_r . Por tanto, si existe una xy -trayectoria

T -compatible, esta debe ser una subtrayectoria de P_i , para algún $i \in \{1, \dots, r\}$.

Afirmación 1. Cada arista de G es usada en, a lo más, dos trayectorias P_i , con $i \in \{1, \dots, r\}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe una arista, digamos $e = uv$, que se encuentra en al menos tres de estas trayectorias. Dado que la arista e sólo tiene dos opciones para el sentido en que es usada, ya sea (u, e, v) o (v, e, u) , se sigue que al menos dos trayectorias usan e con el mismo sentido, digamos P_j y P_k , $\{j, k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$. Supongamos que $P_j = (v_0 = x, e_1, v_1, \dots, e_s, v_s)$ y $P_k = (u_0 = x, f_1, u_1, \dots, f_{s'}, u_{s'})$ y sea $i \in \{1, \dots, s\}$ el mínimo índice tal que la arista e_i es usada por P_j y P_k en el mismo sentido, supongamos que $e_i = f_{i'}$, para algún $i' \in \{1, \dots, s'\}$, y por tanto $v_i = u_{i'}$. Por construcción de P_j y P_k tenemos que $i \neq 1$ e $i' \neq 1$. Dado que P_k es T -compatible, entonces la arista $f_{i'-1}$ forma una transición permitida con $f_{i'}$, por lo que $f_{i'-1}f_{i'} = f_{i'-1}e_i \in E(T(v_{i-1}))$. Además, como P_j es T -compatible, entonces $e_{i-1}e_i \in E(T(v_{i-1}))$. Por hipótesis, sabemos que $T(v_{i-1})^o$ es 1-regular, lo que implica que $e_{i-1} = f_{i'-1}$ y por tanto, $f_{i'-1} \in E(P_j)$. De esto, e_{i-1} es usada por P_j y P_k en el mismo sentido, lo cual contradice nuestra elección de i , concluyendo la demostración de la afirmación.

De la afirmación 1 se sigue que

$$\sum_{i=1}^r |E(P_i)| \leq 2|E(G)|.$$

Como la construcción de cada trayectoria P_i , con $i \in \{1, \dots, r\}$, puede ser realizada en tiempo polinomial, entonces encontrar una xy -trayectoria T -compatible si existe, o para determinar que no existe, puede realizarse en tiempo $O(|E(G)|)$. \square

Proposición 2.2.3. *Sea \mathcal{A} una clase de gráficas cerrada bajo isomorfismos tal que para todo $X \in \mathcal{A}$ se tiene que X^o es una gráfica multipartita completa. Entonces \mathcal{A} -CP puede ser resuelto en tiempo lineal. En particular, dado un ejemplar (G, T, x, y) de \mathcal{A} -CP se necesita tiempo $O(|V(G)| + |E(G)|)$ para encontrar una xy -trayectoria T -compatible si existe, o para determinar que no existe.*

Demostración. Reduciremos el problema \mathcal{A} -CP al problema de encontrar una xy -trayectoria M -aumentante para algún apareamiento M . Sea (G, T, x, y) un ejemplar de \mathcal{A} -CP. Es claro que eliminar todos los vértices aislados de G puede realizarse en

$$O(|V(G)|). \tag{2.9}$$

Si el vértice x o el vértice y son eliminados de G , entonces no existen xy -trayectorias T -compatibles. Por tanto, supongamos que G no tiene vértices aislados.

Para cada vértice $v_i \in V(G) \setminus \{x, y\}$ realizaremos la siguiente construcción. Sea $E_0^i \subseteq V(T(v_i))$ el

conjunto de vértices aislados de $T(v_i)$. Dado que $T(v_i)^o = T(v_i) - E_0^i$ es una gráfica multipartita completa, entonces existe una partición de $E_G(v_i) \setminus E_0^i$, digamos $\{E_1^i, \dots, E_{k_i}^i\}$, tal que $ef \in E(T(v_i)^o)$ si y sólo si $e \in E_j^i$ y $f \in E_k^i$, para $\{j, k\} \subseteq \{1, \dots, k_i\}$. Eliminamos el vértice v_i de G y agregamos nuevos vértices $\{v_0^i, \dots, v_{k_i}^i\}$ tal que si av_i era una arista de G y $av_i \in E_t^i$, entonces av_t^i es una arista de la nueva gráfica, con $t \in \{0, \dots, k_i\}$. Para cada $t \in \{0, \dots, k_i\}$ añadimos un nuevo vértice $v_t^{i'}$ y la arista $v_t^i v_t^{i'}$. Finalmente, añadimos dos nuevos vértices w_1^i y w_2^i , la arista $w_1^i w_2^i$ y para cada $t \in \{1, \dots, k_i\}$ y $j \in \{1, 2\}$, las aristas $v_t^{i'} w_j^i$. Observe que entonces $v_0^{i'}$ no es adyacente a los vértices w_1^i y w_2^i , por lo que es un vértice de grado 1. Por construcción, el conjunto de aristas $M(v_i) = \{v_0^i v_0^{i'}, \dots, v_{k_i}^i v_{k_i}^{i'}, w_1^i w_2^i\}$ es un apareamiento que satura a todos los vértices que fueron agregados.

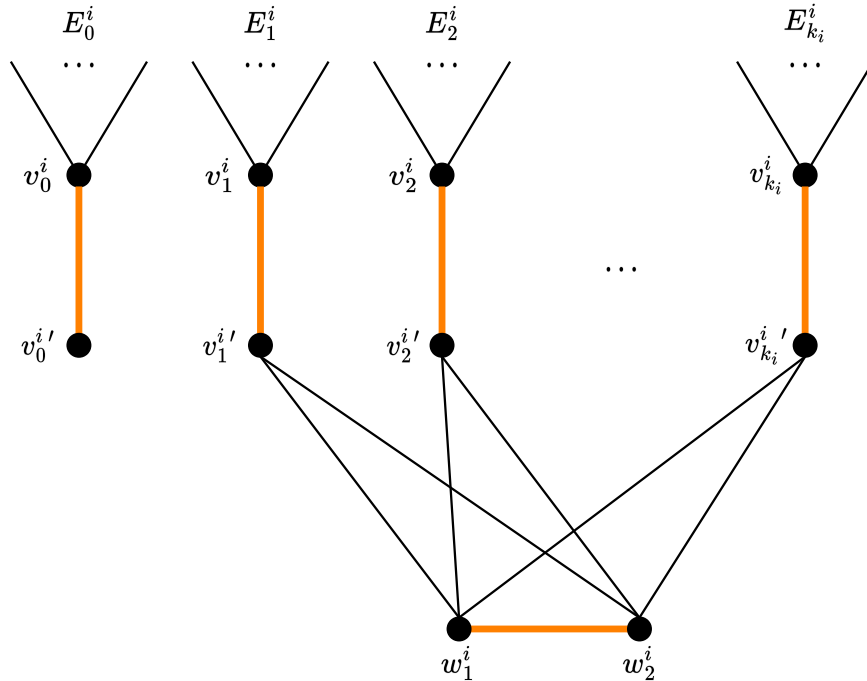


Fig. 2.7: Construcción para el vértice $v_i \in V(G) \setminus \{x, y\}$. En naranja el apareamiento $M(v_i)$.

Creamos la gráfica G' al aplicar la construcción descrita arriba para cada vértice $v \in V(G) \setminus \{x, y\}$. Observemos que en el peor de los casos estamos añadiendo $3\delta_G(v) + 1$ aristas por cada vértice en $V(G)$ en el caso cuando cada conjunto E_i tiene cardinalidad 1 y $E_0 = \emptyset$. Por tanto, se sigue que

$$|E(G')| \text{ es } O(|E(G)|). \tag{2.10}$$

Definimos M como el conjunto $\cup_{v \in V(G) \setminus \{x, y\}} M(v)$. Note que por construcción M es un apareamiento que satura a todos los vértices de G' , excepto x y y .

Afirmación 1. G contiene una xy -trayectoria T -compatible si y sólo si G' contiene una xy -trayectoria

M -aumentante.

Mostraremos primero la parte suficiente, es decir, supondremos que G contiene una xy -trayectoria T -compatible, digamos P , y demostraremos que entonces G' contiene una xy -trayectoria M -aumentante.

Sea $P = (v_0 = x, e_0, v_1, \dots, v_{z-1}, e_{z-1}, v_z = y)$. Dado que P es T -compatible, entonces para toda $i \in \{1, \dots, z-1\}$ se tiene que $e_{i-1}e_i \in T(v_i)$ y al ser $T(v_i)^\circ$ una gráfica multipartita completa, entonces e_{i-1} y e_i se encuentran en distintos conjuntos independientes de $T(v_i)^\circ$. Supongamos sin pérdida de generalidad que se encuentran en los conjuntos E_1^i y E_2^i , respectivamente. Por tanto, de la construcción de la gráfica G' y la definición del apareamiento M tenemos que $P_i = (v_1^i, v_1^{i'}, w_1^i, w_2^i, v_2^i, v_2^i)$ es una trayectoria M -alternante tal que $v_1^i v_1^{i'}$ y $v_2^i v_2^i$ se encuentran en M . Observemos que para todo $j \in \{1, \dots, z-2\}$ los vértices v_2^j y v_1^{j+1} son adyacentes, pues $v_2^j v_1^{j+1}$ es la arista que sustituyó en G' a la arista e_j , y de manera análoga, x es adyacente a v_1^1 y y a v_2^{z-1} . Más aún, dichas aristas no pertenecen a M , pues no se encuentran en ningún conjunto $M(v)$ con $v \in V(G)$. Tenemos, entonces, que

$$(x, v_1^1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{z-2} P_i \cup (v_2^i, v_1^{i+1}) \right) \cup (v_1^{z-1}, v_1^{z-1'}, w_1^{z-1}, w_2^{z-1}, v_2^{z-1'}, v_2^{z-1}, y)$$

es una xy -trayectoria M -aumentante.

Mostramos ahora la parte necesaria. Supongamos que G' tiene una xy -trayectoria M -aumentante, digamos $P = (u_0 = x, e_0, u_1, \dots, u_{k-1}, e_{k-1}, u_k = y)$. Como $e_0 \notin M$, entonces e_1 debe encontrarse en M , por lo que la arista e_1 debe ser de la forma $v_j^i v_j^{i'}$ tal que v_i es un vértice de G , supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 1$. Luego entonces, como P es M -alternante, tenemos que únicamente puede ser de la forma

$$(u_0 = x, e_0, v_j^1, e_1, v_j^{1'}, e_2, w_l^1, e_3, w_{(l \bmod 2)+1}^1, e_4, v_j^{1'}, e_5, v_j^{1'}, e_6, u_7, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = y)$$

con $j \neq j'$ y $l \in \{1, 2\}$. Llamemos v_2 al vértice de G del cuál se originó el vértice u_7 . Por construcción de G' , obtenemos que $v_0 v_1$ y $v_1 v_2$ se encuentran en conjuntos independientes distintos de $T(v_1)^\circ$, pues $j \neq j'$. De esto, se sigue que (x, v_1, v_2) es una trayectoria T -compatible en G . Si $v_2 = y$, entonces hemos encontrado una xy -trayectoria T -compatible, en otro caso, podemos repetir el proceso descrito arriba y dado que P es una xy -trayectoria, debemos terminar en algún momento con una xy -trayectoria T -compatible en G .

Por tanto, la afirmación ha sido demostrada.

Dado que en tiempo $O(|E(G')|)$ es posible encontrar una xy -trayectoria M -aumentante en G' o determinar que no existe [12, p. 121], entonces la proposición se sigue de la afirmación 1 y de (2.9) y (2.10). \square

En vista del Lema 2.2.1 la última parte del Teorema 2.1.1 ha sido demostrada.

Consecuencias de los resultados previos

Este capítulo se divide en varias secciones en las que se aplican algunos de los resultados del capítulo previo. Con excepción de los resultados de la primera sección, todos los demás son resultados propios. En la primera sección se muestra una aplicación dada por S. Szeider en [13] para gráficas coloreadas por aristas. En la segunda sección se usan los resultados del capítulo anterior para mostrar que, dado un vértice, es NP-completo decidir si dicho vértice se encuentra en un ciclo T -compatible. La tercera sección lidia con paseos T -compatibles, mientras que en la última se presenta la definición de gráfica H -coloreada, así como la de H -camino, y se da una equivalencia entre gráficas con sistema de transición y H -coloreadas.

3.1. Una aplicación en gráficas coloreadas por aristas

Sea G una gráfica. Una **k -coloración de aristas** de la gráfica G es una función $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Dada dicha función para G , decimos que G es una gráfica **k -coloreada por aristas**. Una trayectoria en G , digamos P , está **propriadamente coloreada** si cualesquiera dos aristas consecutivas de P tienen colores distintos. Consideremos entonces el siguiente problema:

Trayectoria Propriadamente Coloreada.

Ejemplar: G una gráfica k -coloreada por aristas y dos vértices distintos x y y de G .

Pregunta: ¿Existe una xy -trayectoria propriadamente coloreada en G ?

Proposición 3.1.1. *El problema Trayectoria Propriadamente Coloreada puede ser resuelto en tiempo lineal.*

Demostración. Sea (G, c, x, y) un ejemplar de dicho problema. Para cada vértice v de G , la función c induce una partición de $E_G(v)$. Así, para cada $v \in V(G)$, construimos una gráfica de transición $T(v)$ en la que cualesquiera dos aristas incidentes en v son adyacentes en $T(v)$ si y sólo si tienen color distinto en

G . Nótese que tal gráfica de transición es multipartita completa. Llamemos T al sistema de transición $\{T(v) \mid v \in V(G)\}$.

Afirmación. G contiene una xy -trayectoria T -compatible si y sólo si G contiene una xy -trayectoria propiamente coloreada.

Demostremos primero la parte suficiente. Supongamos que G contiene una xy -trayectoria T -compatible, digamos $P = (v_0 = x, e_0, v_1, \dots, v_{z-1}, e_{z-1}, v_z = y)$. Debe ser entonces que $e_{i-1}e_i \in E(T(v_i))$ para toda $i \in \{1, \dots, z-1\}$, por lo que e_{i-1} y e_i se encuentran en conjuntos independientes distintos de $T(v_i)$, lo cual implica, por construcción de dicha gráfica, que $c(e_{i-1}) \neq c(e_i)$. Por tanto, P es una trayectoria propiamente coloreada.

Probamos ahora la parte necesaria. Supongamos que G contiene una xy -trayectoria propiamente coloreada, digamos $P = (v_0 = x, e_0, v_1, \dots, v_{z-1}, e_{z-1}, v_z = y)$. Entonces para toda $i \in \{1, \dots, z-1\}$ se tiene que las aristas e_{i-1} y e_i se encuentran en conjuntos distintos de la partición inducida por la coloración. Por construcción de T , obtenemos que $e_{i-1}e_i \in T(v_i)$. En consecuencia, P es una trayectoria T -compatible, concluyendo así la afirmación.

Como la construcción de T puede ser realizada en tiempo polinomial, se sigue que

Trayectoria Propiamente Coloreada \propto \mathcal{A} -**CP**.

y dado que el sistema de transición T cumple las hipótesis del Lema 2.2.3, se concluye que **Trayectoria propiamente coloreada** puede ser resuelto en tiempo lineal. □

3.2. Ciclos T -compatibles

En esta sección mostramos resultados concernientes al problema análogo a \mathcal{A} -**CP** que considera ciclos compatibles. Para esto, presentamos formalmente dicho problema de decisión:

\mathcal{A} -Ciclo compatible (o \mathcal{A} -**CC**).

Ejemplar: Una gráfica G con sistema de transición $T \subseteq \mathcal{A}$ y un vértice v en G .

Pregunta: ¿Existe un ciclo T -compatible C en G tal que $v \in V(C)$?

La siguiente proposición hace uso del Teorema 2.1.1 para demostrar la NP-Complejidad de \mathcal{A} -**CC**.

Proposición 3.2.1. *El problema \mathcal{A} -CC es NP-completo.*

Demostración. Para ver que \mathcal{A} -CC se encuentra en NP, basta considerar como certificado un ciclo C en G tal que $v \in V(C)$. Luego, verificar que C sea T -compatible es realizable en tiempo polinomial. Por tanto, \mathcal{A} -CC pertenece a NP.

Ahora, mostramos que

$$\mathcal{A}\text{-CP} \propto \mathcal{A}\text{-CC}. \quad (3.1)$$

Sea (G, T, u, v) un ejemplar de \mathcal{A} -CP. Consideremos G' la gráfica resultante de agregar a G un nuevo vértice w y las aristas $e_1 = uw$ y $e_2 = vw$. Creamos un sistema de transición T' para G' tal que $T'(z) = T(z)$ para todo $z \in V(G) \setminus \{v, u, w\}$, $E(T'(u)) = E(T(u)) \cup \{e_1e\mid e \in E_G(u)\}$, $E(T'(v)) = E(T(v)) \cup \{e_2e\mid e \in E_G(v)\}$ y $E(T'(w)) = \{e_1e_2\}$.

Afirmación. G contiene una uv -trayectoria T -compatible si y sólo si G' contiene un ciclo T' -compatible C tal que $w \in V(C)$.

Supongamos que G contiene una trayectoria T -compatible, digamos $P = (u, \dots, v)$. Así, $C = (w, u) \cup P \cup (v, w)$ es un ciclo tal que, por definición del sistema T' , es T' -compatible.

Supongamos ahora que G' contiene C un ciclo T' -compatible tal que $w \in V(C)$. Dado que $\delta_{G'}(w) = 2$, debe ser que $C = (w, u, \dots, v, w)$. Es claro que la trayectoria $P = (u, C, v)$ es T -compatible, pues para todo vértice interno de P los sistemas de transición T' y T coinciden. Luego, P es una uv -trayectoria T -compatible.

De la afirmación anterior y en vista de que G' y T' pueden ser construidos en tiempo constante obtenemos (3.1). El Teorema 2.1.1 nos permite concluir que \mathcal{A} -CC es NP-completo. \square

Como era de esperarse, \mathcal{A} -CC puede ser resuelto en tiempo polinomial cuando la familia de gráficas \mathcal{A} son todas 1-regulares o todas multipartitas completas, como demostramos a continuación.

Proposición 3.2.2. *Sea \mathcal{A} una clase de gráficas cerrada bajo isomorfismos tal que para toda $X \in \mathcal{A}$ se tiene que X^o es una gráfica 1-regular. Entonces \mathcal{A} -CC puede ser resuelto en tiempo $O(nm)$.*

Demostración. Sea (G, T, v) un ejemplar de \mathcal{A} -CC. Construimos una gráfica G' a partir de G al eliminar el vértice v y para cada $e \in V(T(v)^o)$, sea u el vértice extremo de e en G distinto de v , introducimos un nuevo vértice v_e y la arista v_eu a G' . Consideremos el sistema de transición T' para G' de la siguiente manera: para los vértices x en $V(G) \setminus (N_G(v) \cup \{v\})$, su gráfica de transición en T' es la misma que en T .

Si $z \in N_G(v)$, su gráfica de transición es modificada simplemente renombrando al vértice $e = zv$ por zv_e y conservando las adyacencias; mientras que la gráfica de transición de los vértices v_e , con $e \in V(T(v)^o)$, será una gráfica sin aristas.

Afirmación. G contiene un ciclo T -compatible C tal que $v \in V(C)$ si y sólo si existe $ef \in E(T(v)^o)$ tal que G' contiene una $v_e v_f$ -trayectoria T' -compatible.

Probamos primero la parte suficiente, esto es, supongamos que G contiene un ciclo T -compatible, digamos $C = (u_0 = v, e_0, u_1, \dots, u_{k-1}, e_{k-1}, u_k = v)$. Entonces tenemos que $e_0 e_{k-1} \in E(T(v)^o)$. Por construcción de G' sabemos que $a = v_{e_0} u_1$ y $a' = u_{k-1} v_{e_{k-1}}$ son aristas de G' tales que, por definición de $T'(u_1)$ y $T'(u_{k-1})$, $ae_1 \in E(T'(u_1))$ y $e_{k-2} a' \in E(T'(u_{k-1}))$. Así, es sencillo verificar de la definición de T' , que $C' = (v_{e_0}, u_1) \cup (u_1, C, u_{k-1}) \cup (u_{k-1}, v_{e_{k-1}})$ es una trayectoria T' -compatible, pues las gráficas de transición de T' de los vértices internos de C' coinciden con el sistema T .

Supongamos ahora que existe $ef \in E(T(v)^o)$ tal que G' contiene una $v_e v_f$ -trayectoria T' -compatible, digamos $P = (u_0 = v_e, a_0, u_1, \dots, u_{k-1}, a_{k-1}, u_k = v_f)$. Observe que los vértices internos de P no pueden encontrarse en el conjunto $\{v_e \mid e \in V(T(v)^o)\}$, pues las gráficas de transición de estos vértices son vacías. De esta forma, las gráficas de transición de los vértices internos de P coinciden en los sistemas T y T' .

Dado que $v_e u_1 \in E(G')$, entonces por construcción de G' tenemos que $e = v u_1$, es decir, vu_1 es una arista en G . Análogamente, $f = u_{k-1} v \in E(G)$. Con lo anterior, $C = (v, u_1) \cup (u_1, P, u_{k-1}) \cup (u_{k-1}, v)$ es un ciclo en G . Note que debido a la definición de T' , como $a_0 a_1 \in E(T'(u_1))$, entonces $ea_1 \in E(T(u_1))$. De la misma manera, $a_{k-2} f \in E(T(u_{k-1}))$. Por último, puesto que $e = v u_1$ y $f = u_{k-1} v$ son vértices adyacentes en la gráfica $T(v)^o$, podemos concluir que C es T -compatible en G .

Esto concluye la afirmación.

Dado que $T(v)^o$ es una gráfica 1-regular, entonces $|E(T(v)^o)| \leq \frac{\delta_G(v)}{2}$. Así, se necesita verificar la existencia de una trayectoria T' -compatible entre a lo más $\frac{\delta_G(v)}{2}$ pares de vértices, lo que es $O(n)$. Ya que la construcción de G' y T' puede realizarse en tiempo lineal, y notando que para todo $x \in V(G')$ la gráfica $T'(x)^o$ es 1-regular, la Proposición 2.2.2 nos permite concluir que \mathcal{A} -CC es soluble en tiempo $O(nm)$. \square

Proposición 3.2.3. *Sea \mathcal{A} una clase de gráficas cerrada bajo isomorfismos tal que para todo $X \in \mathcal{A}$ se tiene que X^o es una gráfica multipartita completa. Entonces \mathcal{A} -CC puede ser resuelto en tiempo $O(n^3 + n^2m)$.*

Demostración. Sea (G, T, v) un ejemplar de \mathcal{A} -CC. Puesto que $T(v)^o$ es una gráfica multipartita completa, consideremos $\{E_1, \dots, E_k\}$ la partición en conjuntos independientes de $T(v)^o$. Creamos una gráfica G' a

partir de G al eliminar el vértice v y agregando k nuevos vértices v_1, \dots, v_k . Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, si $wv \in E_i$, agregamos la arista wv_i . Consideremos el sistema de transición T' para G' de la siguiente manera: para los vértices x en $V(G) \setminus (N_G(v) \cup \{v\})$, su gráfica de transición en T' es la misma que en T . Dado $z \in N_G(v)$, su gráfica de transición simplemente se modifica renombrando el vértice zv por zv_i , si $zv \in E_i$ con $i \in \{1, \dots, k\}$. Por último, para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, la gráfica de transición de v_i en T' será vacía.

Afirmación. G contiene un ciclo T -compatible C tal que $v \in V(C)$ si y sólo si existe una $v_i v_j$ -trayectoria T' -compatible, con $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, en G' .

Demostramos primero la parte suficiente, es decir, supongamos que G contiene un ciclo T -compatible, digamos $C = (u_0 = v, e_0, u_1, \dots, u_{k-1}, e_{k-1}, u_k = v)$. Puesto que $e_0 e_{k-1} \in E(T(v))$, entonces e_0 y e_{k-1} se encuentran en distintos conjuntos independientes de $T(v)$. Sin pérdida de generalidad supongamos están en E_1 y E_2 , respectivamente. Así, $P = (v_1, u_1, \dots, u_{k-1}, v_2)$ es una trayectoria T' -compatible en G' puesto que las gráficas de transición en T de los vértices internos de P coinciden con el sistema T' .

Ahora probamos la parte necesaria. Supongamos que existe una $v_i v_j$ -trayectoria T' -compatible en G' , digamos $P = (v_i, u_1, \dots, u_{k-1}, v_j)$, con $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, k\}$. Debido a que las gráficas de transición de los vértices v_1, \dots, v_k son vacías en el sistema T' y P es T' -compatible, entonces los vértices internos de P son diferentes a los vértices v_1, \dots, v_k . En particular, todos los vértices internos de P están en G , concluyendo que los sistemas de transición de los vértices internos de P son iguales en T y T' , además, obsérvese que a causa de la definición de G' , tanto u_1 como u_{k-1} son vecinos del vértice v en G , por lo que $C = (v, u_1) \cup (u_1, P, u_{k-1}) \cup (u_{k-1}, v)$ es un ciclo en G . Más aún, como $e_0 = vu_1 \in E_i$ y $e_1 = vu_{k-1} \in E_j$, con $i \neq j$, entonces $e_0 e_1 \in E(T(v))$. Así, C es un ciclo T -compatible en G tal que $v \in V(C)$.

Esto concluye la afirmación.

Dado que la construcción de G' y T' puede realizarse en tiempo lineal y en vista de que k está acotado por $\delta_G(v)$, entonces tenemos que verificar la existencia de una trayectoria T' -compatible para a lo más $\frac{\delta_G(v)(\delta_G(v)-1)}{2}$ pares de vértices en G' , lo cual es $O(n^2)$. Observando que las gráficas del sistema T' son todas multipartitas completas, la Proposición 2.2.3 nos permite concluir que esta tarea es realizable en tiempo $O(n^3 + n^2m)$. De esta manera, y dado que la construcción de G' y T' es realizable en tiempo lineal, se concluye que \mathcal{A} -CC puede ser resuelto en tiempo $O(n^3 + n^2m)$. \square

3.3. Paseos T -compatibles

Dados los resultados respecto a la complejidad computacional de \mathcal{A} -CP y \mathcal{A} -CC proporcionados por Szeider y la sección anterior, es natural preguntarse por versiones menos restrictivas del problema en cuestión. Introducimos, por tanto, los siguientes problemas:

\mathcal{A} -Paseo Compatible.

Ejemplar: Una gráfica G con sistema de transición $T \subseteq \mathcal{A}$ y dos vértices u y v distintos en G .

Pregunta: ¿Existe un uv -paseo T -compatible en G ?

\mathcal{A} -Paseo Cerrado Compatible (o \mathcal{A} -PCC).

Ejemplar: Una gráfica G con sistema de transición $T \subseteq \mathcal{A}$ y un vértice v en G .

Pregunta: ¿Existe un vv -paseo cerrado T -compatible en G ?

En esta sección mostraremos que dichos problemas se encuentran en la clase P. De hecho, iremos un poco más lejos y demostraremos que el siguiente problema también pertenece a P:

\mathcal{A} -Descomposición en Paseos Cerrados Compatibles (o \mathcal{A} -DPCC).

Ejemplar: Una gráfica G con sistema de transición $T \subseteq \mathcal{A}$.

Pregunta: ¿Existe una partición de $E(G)$ en paseos cerrados T -compatibles?

Para poder resolver los problemas anteriores necesitaremos la siguiente construcción.

Construcción 3.3.1. Sea G una gráfica con sistema de transición T . Para cada vértice $v \in V(G)$, creamos la gráfica $T(v)'$ agregando a cada vértice de la gráfica de transición $T(v)$ el superíndice v y dos nuevos vértices v_0^* y v_1^* adyacentes a todos los vértices de $T(v)'$. Llamemos V^* al conjunto $\bigcup_{v \in V(G)} \{v_0^*, v_1^*\}$. Construimos la gráfica G^T como la unión de las gráficas $T(v)'$ y dados dos vértices ab^v y cd^w , agregamos la arista $ab^v cd^w$ en la gráfica G^T si $ab = cd$, es decir, ab y cd son la arista vw en G .

Las siguientes son observaciones importantes de la construcción descrita anteriormente.

Observación 3.3.2. El conjunto de aristas agregadas es un apareamiento que satura al conjunto de vértices $V(G^T) \setminus V^*$, llamémosle M .

Observación 3.3.3. Para todo $v \in V^*$, v no es M -saturado.

Observación 3.3.4. Note que por construcción de M , tenemos que para todo $v \in V(G)$, $E(T(v)) \cap M = \emptyset$. Más aún, observe para toda $e \in E(G^T)$ si $e \notin M$, entonces existe $v \in V(G)$ tal que $e \in E(T(v))$.

Observación 3.3.5. El tamaño de las gráficas $T(v)$, con $v \in V(G)$, está acotado por $\frac{\delta_G(v)(\delta_G(v)-1)}{2}$. Por

tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} |E(T(v))| &\leq \sum_{v \in V(G)} \frac{\delta_G(v)(\delta_G(v) - 1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} (\delta_G(v)^2 - \delta_G(v)) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)^2 - m \\ &\leq \frac{1}{2} 4m^2 - m = 2m^2 - m \end{aligned}$$

Adicionalmente, es claro que $|M| = m$ y que el número de aristas incidentes a los vértices en V^* es $\sum_{v \in V(G)} 2\delta_G(v) = 4m$. De este modo, es fácil ver que la construcción de G^T es realizable tiempo $O(m^2)$, así como observar que el tamaño de G^T también es $O(m^2)$.

Presentamos la utilidad de la gráfica G^T con un ejemplo. Consideremos la gráfica G con sistema de transición T mostrada en la Figura 3.1.

Dado el sistema T mostrado anteriormente, en la Figura 3.2 se construyen las gráficas $T(v)'$ para cada $v \in V(G)$.

Por último, en la Figura 3.3 se muestra la gráfica G^T construida a partir de G y T .

Ahora observemos el siguiente ad -paseo T -compatible en la digráfica G mostrada en la Figura 3.1. Nótese que indicamos explícitamente las aristas que recorre dicho camino, pues serán de utilidad:

$$P = (a, ae, e, eb, b, bc, c, cf, f, fe, e, ed, d).$$

Dada la construcción de la gráfica G^T podemos ver que es posible reinterpretar el paseo P a un camino en G^T usando la siguiente estrategia: iniciamos en el vértice a_0^* , nos movemos al vértice representante de la arista ae , la cual es la primera en ser usada en el paseo P , en la subgráfica $T(a)'$, es decir, a ae^a . Usamos la arista en M que satura a dicho vértice y ahora estamos en el vértice ae^e ; empleamos ahora la arista $ae^e eb^e$, las cuales son consecutivas en P y que además sabemos existe pues $ae eb \in E(T(e))$ ya que P es T -compatible; nuevamente, usamos la arista en M que satura al vértice eb^e y ahora nos encontramos en el vértice eb^b . Continuamos de manera análoga hasta llegar al vértice d_1^* . De esta forma, obtenemos el $a_0^* d_1^*$ -camino:

$$P^T = (a_0^*, ae^a, ae^e, eb^e, eb^b, bc^b, bc^c, cf^c, cf^f, fe^f, fe^e, ed^e, ed^d, d_1^*).$$

Nótese la similitud entre la secuencia P^T y las aristas en P .

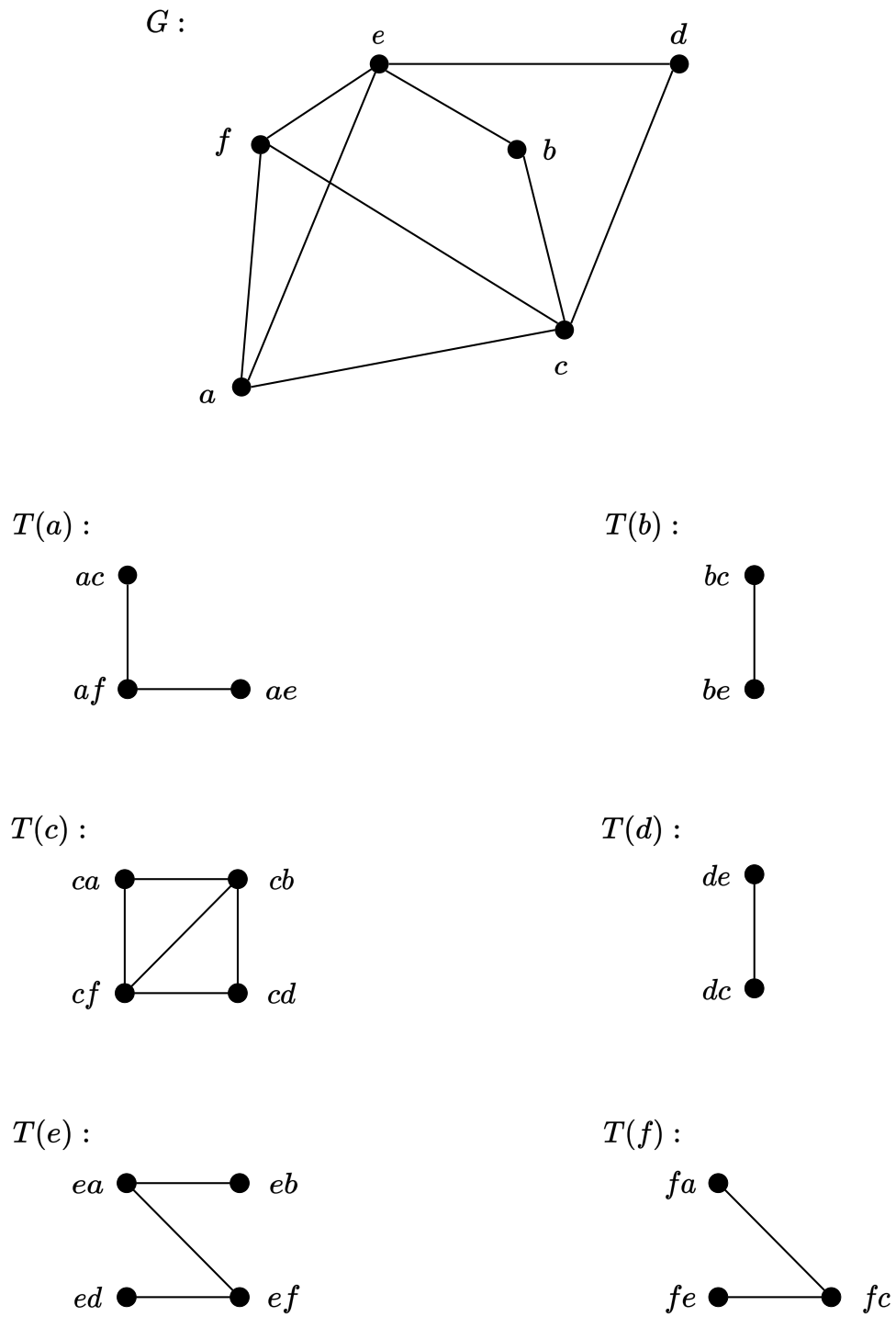
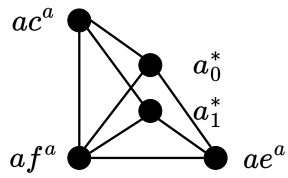
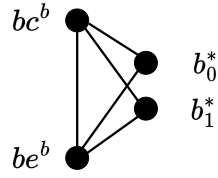


Fig. 3.1: Una gráfica G y la gráfica de transición de cada vértice de G .

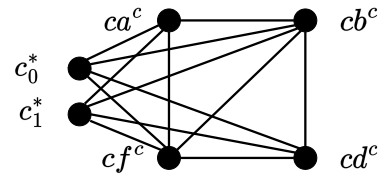
$T(a)'$:



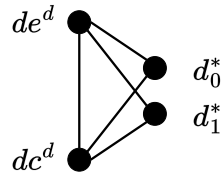
$T(b)'$:



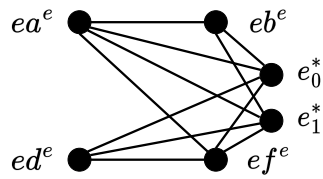
$T(c)'$:



$T(d)'$:



$T(e)'$:



$T(f)'$:

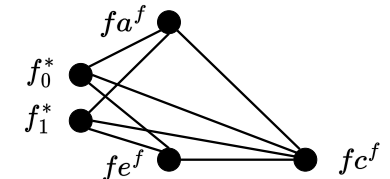


Fig. 3.2: El conjunto de gráficas $T(v)'$ con $v \in V(G)$.

G^T :

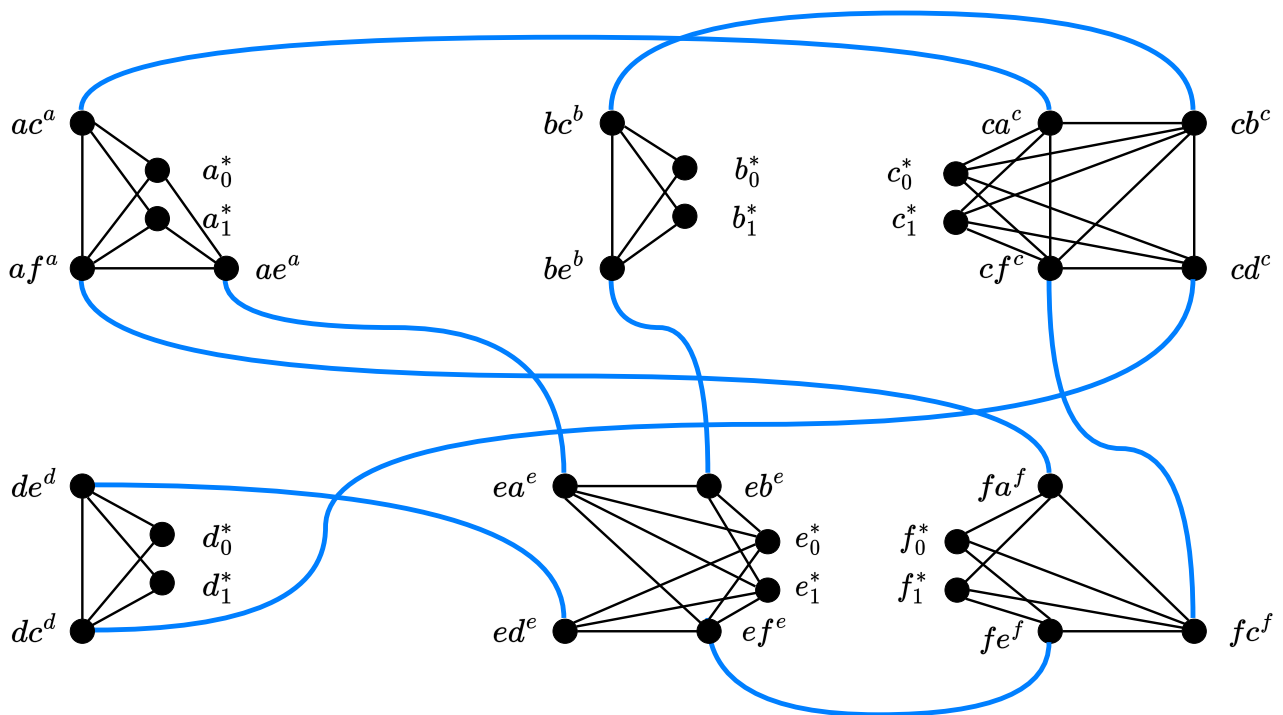


Fig. 3.3: La gráfica G^T obtenida a partir de G y el sistema de transición T . En azul el apareamiento M .

3. CONSECUENCIAS DE LOS RESULTADOS PREVIOS

Con esta idea en mente, introducimos la siguiente definición. Sean G una gráfica con sistema de transición T y

$$P = (v_0 = u, e_0, v_1, e_1, v_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = w)$$

un uv -paseo T -compatible en G . Definimos P^T como la sucesión de vértices

$$(u_0^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, e_1^{v_2}, \dots, e_{k-1}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_k}, w_1^*).$$

Observe que por construcción de G^T tenemos que:

1. $u_0^*e_0^{v_0}$ y $e_{k-1}^{v_k}w_1^*$ son aristas de G^T ,
2. Para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$ tenemos que $e_{i-1}^{v_i}e_i^{v_i} \in E(G^T)$, y en particular, $e_{i-1}^{v_i}e_i^{v_i} \in T(v_i)'$ puesto que P es T -compatible,
3. Para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$ se tiene que $e_i^{v_i}e_i^{v_{i+1}} \in E(G^T)$ y además, $e_i^{v_i}e_i^{v_{i+1}} \in M$.

Nótese que como consecuencia de lo anterior, siempre que P sea un paseo T -compatible en G , podemos garantizar que P^T es un camino en G^T . Pero no sólo eso, podremos garantizar aun más propiedades como mostraremos en el siguiente lema:

Lema 3.3.6. *Sea G una gráfica con sistema de transición T . Si P es un paseo T -compatible en G , entonces P^T es una trayectoria M -aumentante en G^T .*

Demostración. Sea P un paseo T -compatible. Procederemos por inducción sobre la longitud del paseo P .

▪ *Caso Base.*

Supongamos que P tiene longitud 1, por lo que P es de la forma (u, v) . Entonces $P^T = (u_0^*, uv^u, uv^v, v_1^*)$.

Observe que dicho camino es, en efecto, una trayectoria. Ahora, por construcción del apareamiento M tenemos que $uv^uuv^v \in M$, además, u_0^* y v_1^* no son vértices M -saturados. En consecuencia, P^T es una trayectoria M -aumentante.

▪ *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que si P' es un paseo T -compatible en G de longitud k , entonces P'^T es una trayectoria M -aumentante en G^T .

▪ *Paso Inductivo.*

Sea P un uv -paseo T -compatible en G de longitud $k+1$. Supongamos que

$$P = (v_0 = u, e_0, v_1, \dots, v_{k-1} = z, e_{k-1}, v_k = y, e_k, v_{k+1} = v).$$

Ya que $P_1 = (v_0 = u, P, v_k = y)$ es un uy -paseo T -compatible en G de longitud k , por hipótesis de

inducción obtenemos que $P_1^T = (u_0^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, \dots, e_{k-1}^z, e_{k-1}^y, y_1^*)$ es una trayectoria M -aumentante en G^T . Por definición de P^T y P_1^T obtenemos

$$P^T = (u_0^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, \dots, e_{k-1}^z, e_{k-1}^y, e_k^y, e_k^v, v_1^*) = (u_0^*, P_1^T, e_{k-1}^y) \cup (e_{k-1}^y, e_k^y, e_k^v, v_1^*). \quad (3.2)$$

Puesto que P_1^T es una trayectoria M -aumentante, para probar que P^T es una trayectoria M -aumentante basta probar:

1. $V(P_1^T) \cap \{e_k^y, e_k^v, v_1^*\} = \emptyset$.
2. La subtrayectoria $(e_{k-1}^y, e_k^y, e_k^v, v_1^*)$ es M -alternante y $e_{k-1}^y e_k^y \notin M$.
3. El vértice v_1^* no es M -saturado.

Afirmación 1. $V(P_1^T) \cap \{e_k^y, e_k^v, v_1^*\} = \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supóngase que $V(P_1^T) \cap \{e_k^y, e_k^v, v_1^*\} \neq \emptyset$. Es claro que $v_1^* \notin V(P_1^T)$, pues como no es un vértice M -saturado (Observación 3.3.3), no puede ser un vértice interno de P_1 al ser ésta una trayectoria M -aumentante. Entonces $V(P_1^T) \cap \{e_k^y, e_k^v, v_1^*\} \subseteq \{e_k^y, e_k^v\}$. Dado que $e_k^y e_k^v \in M$ se tiene que si se recorre alguno de los extremos en una trayectoria M -aumentante, entonces dicha arista debe estar en la trayectoria. Por consiguiente, $e_k^y e_k^v \in E(P_1^T)$. Dada la definición de P_1^T , debe ser que $e_k \in E(P_1)$, lo que implica que P utiliza al menos dos veces la arista e_k . Esto es una contradicción, pues P es un paseo. Por tanto, $V(P_1^T) \cap \{e_k^y, e_k^v, v_1^*\} = \emptyset$, concluyendo la demostración de esta afirmación.

De esta manera, dada la relación entre P^T y P_1^T en (3.2) y la afirmación anterior, podemos concluir que P^T es una trayectoria.

Afirmación 2. La subtrayectoria $(e_{k-1}^y, e_k^y, e_k^v, v_1^*)$ es una trayectoria M -alternante y $e_{k-1}^y e_k^y \notin M$.

Puesto que P es T -compatible, debe ser que $e_{k-1} e_k \in E(T(y))$, por lo que $e_{k-1}^y e_k^y \in E(T(y)')$ y así, $e_{k-1}^y e_k^y \notin M$ (Observación 3.3.4). Luego, por construcción del apareamiento M , $e_k^y e_k^v \in M$. Además, sabemos que $e_k v_1^* \notin M$ (Observación 3.3.4). De esta manera, $(e_{k-1}^y, e_k^y, e_k^v, v_1^*)$ es una trayectoria M -alternante y $e_{k-1}^y e_k^y \notin M$.

Finalmente, la Observación 3.3.3 nos indica que v_1^* no es M -saturado.

Se concluye que P^T es una trayectoria M -aumentante.

Por el principio de inducción la proposición queda demostrada. □

Lo anterior nos muestra que si G es una gráfica, T un sistema de transiciones para G y P es un paseo T -compatible en G , entonces dicho paseo puede interpretarse como una trayectoria M -aumentante en G^T . La pregunta natural es si el recíproco es verdadero. Para ello, regresemos nuevamente a la gráfica

G^T mostrada en la Figura 3.3 y tengamos en cuenta ahora la trayectoria M -aumentante

$$P = (f_0^*, fa^f, af^a, ae^a, ea^e, ef^e, fe^f, fc^f, cf^c, cb^c, bc^b, b_1^*).$$

Dicha trayectoria en G^T puede trasladarse a G de la siguiente forma. Considere la subtrayectoria (fa^f, af^a, ae^a, ea^e) . Recordemos que los vértices fa^f y af^a representan la misma arista en G , en este caso a $e_1 = fa$, así como ae^a y ea^e representan a la arista $e_2 = ae$. Más aún, debido a que $af^a ae^a$ es una arista de $T(a)'$, entonces se sigue que e_1 y e_2 son aristas que inciden ambas en el vértice a en G . Por tanto, (f, a, e) es un camino en G . Dicho esto, podemos considerar ahora el subcamino (ae^a, ea^e, ef^e, fe^f) y de la misma forma, obtenemos que (a, e, f) es un camino. Con esto, (f, a, e, f) es un camino en G . De manera análoga podemos continuar hasta obtener el siguiente camino, en el cual especificaremos nuevamente las aristas que recorre:

$$P^G = (f, fa, a, ae, e, ef, f, fc, c, cb, b).$$

Nótese que el orden en el que se recorren las aristas de P^G es el mismo en el que se recorren dichas aristas, pero vistas como vértices, en la trayectoria P .

Nuevamente, tomando como base el ejemplo anterior, introducimos la siguiente definición.

Sean G una gráfica con sistema de transición T y consideremos una trayectoria M -aumentante en G^T , digamos:

$$P = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_{2(k-1)}, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1})$$

Dado que P es M -aumentante, se tiene que para toda $i \in \{1, 3, \dots, 2k-1\}$ la arista $u_i u_{i+1}$ pertenece al apareamiento M , y por construcción de este, sabemos que dichas aristas son de la forma $e^u e^v$ para alguna $e = uv \in E(G)$. Más aún, puesto que para toda $i \in \{0, 2, \dots, 2k\}$ la arista $u_i u_{i+1}$ no se encuentra en M la Observación 3.3.4 nos dice que $u_i u_{i+1} \in E(T(v)')$ para algún $v \in V(G)$.

Supongamos que la arista $u_1 u_2$ es igual a $e_0^{v_0} e_0^{v_1}$ para alguna $e_0 = v_0 v_1 \in E(G)$ y por tanto, $u_0 = v_0$, con $i \in \{0, 1\}$. Entonces tenemos que

$$P = (v_0^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, u_3, u_4, \dots, u_{2(k-1)}, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1}).$$

Ahora, dado que $u_2 u_3 = e_0^{v_1} u_3$ no es una arista en M , sabemos que debe suceder que $e_0^{v_1} u_3 \in E(T(v_1)')$ y

así, podemos suponer que $u_3 = e_1^{v_1}$, obteniendo

$$P = (v_{0_i}^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, u_4, \dots, u_{2(k-1)}, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1}).$$

Nuevamente, como $u_3u_4 = e_1^{v_1}u_4$ es una arista de M , podemos suponer que $u_4 = e_1^{v_2}$, para algún $v_2 \in V(G)$.

Por consiguiente:

$$P = (v_{0_i}^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, e_1^{v_2}, \dots, u_{2(k-1)}, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1}).$$

Continuando de esta manera, se observa que podemos renombrar los vértices de P como sigue:

$$P = (v_{0_i}^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, e_1^{v_2}, \dots, e_{k-2}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_k}, v_{k_j}^*)$$

con $\{i, j\} \subseteq \{0, 1\}$.

Con esto, definimos la sucesión de vértices

$$P^G = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k).$$

Observe que por construcción de G^T se tiene que para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $v_i v_{i+1} \in E(G)$, pues $e_i^{v_i}$ representa a la arista $v_i v_{i+1}$ en G . Por tanto, P^G es un camino en G . Más aun, será posible ver que, de hecho, es un paseo T -compatible en G como mostramos a continuación.

Lema 3.3.7. *Sea G una gráfica con sistema de transición T . Si P es una trayectoria M -aumentante en G^T , entonces P^G es un paseo T -compatible en G .*

Demostración. Sea P una trayectoria M -aumentante en G^T . Se sabe que P tiene longitud impar, es decir, $l(P) = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Procederemos por inducción sobre k . Iniciaremos con $k = 1$ debido a que V^* es un conjunto independiente.

- *Caso Base.*

Si $k = 1$. Supongamos $P = (v_{0_i}^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, v_{1_j}^*)$. Entonces, trivialmente $P^G = (v_0, v_1)$ es un $v_0 v_1$ -paseo T -compatible.

- *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que si P' es una trayectoria M -aumentante en G^T de longitud $2(k-1) + 1$, entonces P'^G es un paseo T -compatible en G .

- *Paso inductivo.* Sea P una trayectoria M -aumentante de longitud $2k + 1$ en G^T , y supongamos que:

$$P = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_{2(k-1)}, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1})$$

Por lo visto anteriormente, sabemos que podemos renombrar los vértices de P obteniendo lo siguiente:

$$P = (v_{0_i}^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, e_1^{v_2} \dots, e_{k-2}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_k}, v_{k_j}^*)$$

con $\{i, j\} \subseteq \{0, 1\}$ y donde para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G)$.

Sabemos por la construcción de G^T que $e_{k-2}^{v_{k-1}} v_{(k-1)_{i+1} \bmod 2}^*$ es una arista de G^T .

Podemos considerar, así, el camino

$$P_1 = (v_{0_i}^*, P, e_{k-2}^{v_{k-1}}) \cup (e_{k-2}^{v_{k-1}}, v_{(k-1)_{i+1} \bmod 2}^*).$$

Afirmación 1. P_1 es una trayectoria M -aumentante de longitud $2(k-1) + 1$.

Para observar que P_1 es una trayectoria, basta notar que $(v_{0_i}^*, P, e_{k-2}^{v_{k-1}})$ es una subtrayectoria de P , por lo que el único nuevo vértice introducido en P_1 es $v_{(k-1)_{i+1} \bmod 2}^*$, sin embargo, dicho vértice no es M -saturado, por lo que no puede ser un vértice interno de P . Además, en caso de que $v_0 = v_{k-1}$ se tiene que $v_{0_i}^* \neq v_{(k-1)_{i+1} \bmod 2}^*$, de otra manera, es claro que dichos vértices son distintos. Por tanto, P_1 es una trayectoria.

Ahora, sabemos que $v_{0_i}^*$ no es M -saturado y $(v_{0_i}^*, P, e_{k-2}^{v_{k-1}})$ es M -alternante al ser subtrayectoria de P . Más aún, dado que $(v_{0_i}^*, P, e_{k-2}^{v_{k-1}})$ se obtiene de P al remover sus últimas tres aristas se sigue que esta tiene longitud $2(k-1)$ y que su última arista pertenece a M . Luego, tenemos que la arista $e_{k-2}^{v_{k-1}} v_{(k-1)_{i+1} \bmod 2}^*$ no se encuentra en M y $v_{(k-1)_{i+1} \bmod 2}^*$ no es M -saturado. Con esto, obtenemos que P_1 es una trayectoria M -aumentante de longitud $2(k-1) + 1$, lo que prueba la afirmación.

Nuestra hipótesis de inducción y la afirmación 1 nos conllevan a concluir que

$$P_1^G = (v_0, \dots, v_{k-1})$$

es un paseo T -compatible.

Note, ahora, que

$$P^G = (v_0, e_0, v_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k) = P_1^G \cup (v_{k-1}, e_{k-1}, v_k).$$

Por lo que resta mostrar $e_{k-2} e_{k-1} \in E(T(v_{k-1}))$ para probar que P^G es un camino T -compatible. Sin embargo, puesto que $e_{k-2}^{v_{k-1}} e_{k-1}^{v_{k-1}}$ es una arista de G^T , entonces se debe a que $e_{k-2}^{v_{k-1}} e_{k-1}^{v_{k-1}} \in E(T(v_{k-1})')$, lo que por construcción nos garantiza que $e_{k-2} e_{k-1} \in E(T(v_{k-1}))$. Obtenemos, así, que P^G es un camino T -compatible en G .

Afirmación 2. P^G es un paseo.

Procediendo por contradicción, supongamos que P^G repite al menos una arista. Como P_1^G es un paseo en G , debe ser que la arista repetida es $e_{k-1} = v_{k-1}v_k$. De este modo, $e_{k-1} \in E(P_1^G)$ y dada la definición de P_1^G se obtiene que P_1 recorre la arista $e_{k-1}^{v_{k-1}}e_{k-1}^{v_k}$. Esto es una contradicción, pues implicaría que P repite al menos dos veces los vértices $e_{k-1}^{v_{k-1}}$ y $e_{k-1}^{v_k}$ ya que $P = (v_{0_i}^*, P_1, e_{k-2}^{v_{k-1}}) \cup (e_{k-2}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_k}, v_{k_j}^*)$ y P es una trayectoria.

De esta manera, concluimos que P^G es un paseo T -compatible en G .

Por el principio de inducción el lema ha sido demostrado. □

Como consecuencia del lema obtenemos el siguiente corolario que relaciona trayectorias M -aumentantes con propiedades adicionales de la gráfica G^T y paseos cerrados T -compatibles en G .

Corolario 3.3.8. *Sea G una gráfica con sistema de transición T .*

Si $P = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_{2(k-1)}, u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1})$ es una trayectoria M -aumentante tal que $u_1u_{2k} \in E(G^T)$ y $\{u_0, u_{2k+1}\} = \{w_0^, w_1^*\}$ para algún $w \in V(G)$, entonces P^G es un paseo cerrado T -compatible en G .*

Demostración. Renombremos nuevamente los vértices de la trayectoria M -aumentante P para obtener

$$P = (v_{0_i}^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, e_1^{v_2} \dots, e_{k-2}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_k}, v_{k_j}^*)$$

con $\{i, j\} \subseteq \{0, 1\}$.

Por el Lema 3.3.7 sabemos que

$$P^G = (v_0, e_0, v_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k)$$

es un paseo T -compatible en G .

Note, sin embargo, que como $\{u_0, u_{2k+1}\} = \{w_0^*, w_1^*\}$, entonces sin pérdida de generalidad

$$P = (w_0^*, e_0^w, e_0^{v_1}, e_1^{v_1}, e_1^{v_2} \dots, e_{k-2}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^w, w_1^*),$$

por lo que

$$P^G = (w, e_0, v_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, w),$$

es decir P^G es un paseo cerrado.

Resta simplemente verificar que $e_0e_{k-1} \in E(T(w))$. No obstante, de nuestras hipótesis obtenemos $e_0^w e_{k-1}^w \in E(G^T)$. Por construcción de G^T , $e_0^w e_{k-1}^w \in E(T(w)')$. Se sigue que $e_0e_{k-1} \in E(T(w))$.

Concluimos que P^G es un paseo cerrado T -compatible. \square

Observe que las trayectorias M -aumentantes con las propiedades extra del corolario anterior pueden ser sustituidas por ciclos M -alternantes, por lo que en realidad se está relacionando ciclos M -alternantes con paseos cerrados T -compatibles. A pesar de esto, se redactó el corolario de esta forma debido a la definición de P^G dada una trayectoria M -aumentante P en G^T .

Ahora estamos listos para probar que los problemas \mathcal{A} -Paseo Compatible y \mathcal{A} -PCC pertenecen a la clase P haciendo uso de los lemas demostrados anteriormente.

Teorema 3.3.1. *El problema \mathcal{A} -Paseo Compatible pertenece a P. En particular, dado un ejemplar (G, T, u, v) se necesita tiempo $O(m^2)$ para encontrar un uv -paseo T -compatible, o para determinar que no existe.*

Demostración. Sea (G, T, u, v) un ejemplar de \mathcal{A} -Paseo Compatible. De los lemas 3.3.6 y 3.3.7 se sigue que existe un uv -paseo T -compatible en G si y sólo si existe una $u_0^*v_1^*$ -trayectoria M -aumentante en G^T . De la Observación 3.3.5 sabemos que la construcción de G^T se realiza en tiempo $O(m^2)$. Además, se sabe que encontrar una $u_0^*v_1^*$ -trayectoria M -aumentante en G^T , o determinar que no existe, toma tiempo $O(m^2)$. \square

Teorema 3.3.2. *El problema \mathcal{A} -Paseo Cerrado Compatible pertenece a P. En particular, dado un ejemplar (G, T, v) se necesita tiempo $O(m^2n^2)$ para encontrar un vv -paseo cerrado T -compatible, o para determinar que no existe.*

Demostración. Sea (G, T, v) un ejemplar de \mathcal{A} -PCC. Construimos la gráfica G^T , agregando dos vértices extra v_0 y v_1 .

Sea $E := E(T(v))$. Tomamos $e_0e_1 \in E$. Sabemos, entonces, que $e_0^v e_1^v \in E(G^T)$. Agregamos las aristas $v_0e_0^v$ y $v_1e_1^v$. Dada la Observación 3.3.5, sabemos que es posible encontrar una v_0v_1 -trayectoria M -aumentante en G^T , o determinar que no existe, en tiempo $O(m^2)$. Si existe, supongamos que $P = (v_0, e_0^v, \dots, e_1^v, v_1)$ es la trayectoria M -aumentante encontrada. Entonces $P_1 = (v_0^*, e_0^v) \cup (e_0^v, P, e_1^v) \cup (e_1^v, v_1^*)$ es una trayectoria M -aumentante tal que $e_0^v e_1^v \in E(G^T)$ y el vértice inicial y final forman el conjunto $\{v_0^*, v_1^*\}$, con $v \in V(G)$, por lo que del Corolario 3.3.8 obtenemos que P_1^G es un paseo cerrado T -compatible cuya construcción garantiza que $v \in V(P_1^G)$. En otro caso, de no existir, eliminamos las aristas $v_0e_0^v$ y $v_1e_1^v$ de G^T y repetimos el procedimiento tomando una arista de $E := E \setminus \{e_0e_1\}$. Como E es un conjunto finito, este proceso termina.

Es claro que de existir un paseo cerrado T -compatible que contenga al vértice v , este debe ser encontrado por el algoritmo anterior. Dado que

$$|E(T(v))| \leq \frac{\delta_G(v)(\delta_G(v) - 1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2},$$

entonces dicho algoritmo toma tiempo $O(m^2n^2)$.

Por ende, podemos concluir que \mathcal{A} -PCC es soluble en tiempo $O(m^2n^2)$. □

El siguiente teorema nos muestra una muy interesante relación entre los ciclos M -alternantes de la gráfica G^T y los paseos cerrados T -compatibles en G . Este teorema es de importancia pues nos permitirá probar que el problema \mathcal{A} -DPCC pertenece a la clase P.

Teorema 3.3.3. *Si G es una gráfica con sistema de transición T , entonces: $G^T - V^*$ tiene un 2-factor, digamos F , tal que todo ciclo de F es M -alternante si y sólo si existe una partición de $E(G)$, digamos \mathcal{T} , tal que para todo $P \in \mathcal{T}$, $G[P]$ es un paseo cerrado T -compatible.*

Demostración. Demostramos primero la parte necesaria. Supongamos que existe una partición de $E(G)$, digamos \mathcal{T} , tal que para todo $P \in \mathcal{T}$, $G[P]$ es un paseo cerrado T -compatible.

Sea $P \in \mathcal{T}$. Entonces sabemos que $G[P] = (v_0 = u, e_0, v_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = v_0)$ es un paseo cerrado T -compatible. Para simplificar notación llamemos P a dicho paseo. De la Proposición 3.3.6 obtenemos que $P^T = (u_0^*, e_0^{v_0}, e_0^{v_1}, \dots, e_{k-1}^{v_{k-1}}, e_{k-1}^{v_0}, u_1^*)$ es una $u_0^*u_1^*$ -trayectoria M -aumentante en G^T . Puesto que P es un paseo cerrado T -compatible, entonces $e_{k-1}e_0 \in E(T(v_0))$. Esto implica que $e_{k-1}^{v_0}e_0^{v_0} \in E(G^T)$. Así, definimos el ciclo $C_P^T = (e_0^{v_0}, P^T, e_{k-1}^{v_0}) \cup (e_{k-1}^{v_0}, e_0^{v_0})$.

Nótese que por ser P^T una trayectoria M -aumentante, la primera y última arista de $(e_0^{v_0}, P^T, e_{k-1}^{v_0})$ deben ser M -saturadas, mientras que $e_{k-1}^{v_0}e_0^{v_0}$ no es una arista de M , por lo que C_P^T debe ser M -alternante.

Afirmación 1.1. Si $\{P_1, P_2\} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $V(C_{P_1}^T) \cap V(C_{P_2}^T) = \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe $w \in V(C_{P_1}^T) \cap V(C_{P_2}^T)$. Consideremos entonces $a \in M$ tal que w es extremo de a . Puesto que $C_{P_1}^T$ y $C_{P_2}^T$ son ciclos M -alternantes, entonces ambos ciclos deben usar la arista a . Por definición del apareamiento M , a es de la forma e^ue^v , con $e = uv \in E(G)$. De esta forma, de la definición de P_1^T y P_2^T obtenemos que P_1 y P_2 usan la arista e , lo cual es una contradicción pues \mathcal{T} es una partición de $E(G)$, concluyendo nuestra demostración.

Ahora, definimos la gráfica F obtenida a partir de unir los ciclos C_P^T , con $P \in \mathcal{T}$.

Afirmación 1.2. F es un 2-factor tal que todo ciclo de F es M -alternante.

En vista de que la afirmación 1.1 y del hecho de que F está construida a partir de la unión de ciclos M -alternantes, se sigue que F es 2-regular y todos sus ciclos son M -alternantes, por lo que basta verificar que F es una subgráfica generadora de $G^T - V^*$.

Sea $w \in V(G^T - V^*)$. Como M es un apareamiento perfecto de $G^T - V^*$, consideremos $a \in M$ tal que a incide en w . De la construcción de M sabemos que $a = e^u e^v$, con $e = uv \in E(G)$. Dado que \mathcal{T} es una partición de $E(G)$, existe un paseo cerrado T -compatible en \mathcal{T} , digamos P , tal que $e \in E(P)$. Por definición de P^T tenemos que $a \in E(P^T)$, y como w es un extremo de a , entonces $w \in V(C_P^T)$, concluyendo que $w \in V(F)$.

Por tanto, F es un 2-factor de $G^T - V^*$ tal que todo ciclo de F es M -alternante.

Probaremos ahora la parte suficiente. Supongamos que $G^T - V^*$ tiene un 2-factor, digamos F , tal que todo ciclo de F es M -alternante.

Sea $C = (e_0, e_1, \dots, e_{k-1}, e_k = e_0)$ un ciclo en F y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $e_{k-1}e_0 \notin M$. De la Observación 3.3.4, existe un vértice $v \in V(G)$ tal que $e_{k-1}e_0 \in E(T(v)')$. Por la construcción de G^T , entonces $v_0^*e_0$ y $e_{k-1}v_1^*$ son aristas de G^T . De esta manera, definimos la trayectoria M -aumentante $P_C = (v_0^*, e_0) \cup (e_0, C, e_{k-1}) \cup (e_{k-1}, v_1^*)$. Observe que $M \cap E(C) = M \cap E(P_C)$. Como $e_0e_{k-1} \in E(G^T)$ y el vértice inicial y final forman el conjunto $\{v_0^*, v_1^*\}$, con $v \in V(G)$, el Corolario 3.3.8 nos indica que P_C^G es un paseo cerrado T -compatible en G .

Ahora, procederemos a mostrar la partición requerida en el enunciado. Primero, por cada ciclo en F , digamos C , denotamos por E_C el conjunto de aristas del paseo P_C^G , el cual está en G . Sea $\mathcal{T} = \{E_C \mid C \text{ es un ciclo de } F\}$. Observe que, por la definición de los conjuntos anteriores, para todo E_C en \mathcal{T} , $G[E_C] = P_C^G$, el cual es un paseo cerrado T -compatible en G .

Afirmación 2.1. \mathcal{T} es una partición de $E(G)$.

- Si $E_C \in \mathcal{T}$, entonces $E_C \neq \emptyset$.

Se sigue inmediatamente de la definición de E_C que este es distinto del vacío.

- Si $\{E_{C_1}, E_{C_2}\} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $E_{C_1} \cap E_{C_2} = \emptyset$.

Supongamos por contradicción que $E_{C_1} \cap E_{C_2} \neq \emptyset$. En tal caso, existe $e \in E(P_{C_1}^G) \cap E(P_{C_2}^G)$.

Supongamos $e = vw$. Por definición de $P_{C_1}^G$, entonces $e^v e^w \in E(P_{C_1})$. De la misma forma, $e^v e^w \in$

$E(P_{C_2})$. Note, además, que dicha arista pertenece a M . De lo anterior obtenemos que $e^v e^w \in E(C_1) \cap E(C_2)$, lo cual es una contradicción pues C_1 y C_2 son ciclos distintos de F .

Por consiguiente, los conjuntos en \mathcal{T} son ajenos dos a dos.

- $\bigcup \mathcal{T} = E(G)$.

De la definición de \mathcal{T} es inmediato que $\bigcup \mathcal{T} \subseteq E(G)$.

Sea $e \in E(G)$ y supongamos que $e = uv$. Entonces $e^u e^v$ es una arista de G^T tal que se encuentra en el apareamiento M . Dado que F es un 2-factor de $G^T - V^*$, entonces existe un ciclo C de F tal que $e^u \in V(G)$ y como dicho ciclo es M -alternante por hipótesis, entonces debe hacer uso de la arista $e^u e^v$, de manera que $e \in E(P_C^G)$ y así, $e \in \bigcup \mathcal{T}$.

De esto, $\bigcup \mathcal{T} = E(G)$.

En consecuencia, se sigue que \mathcal{T} es una partición de $E(G)$ en paseos cerrados T -compatibles.

Esto concluye la prueba del teorema. □

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.3.3 es el siguiente corolario que caracteriza aquellas gráficas con sistema de transición T que cuentan con un paseo euleriano cerrado T -compatible.

Corolario 3.3.9. *Sea G una gráfica con sistema de transición T . Entonces G contiene un paseo euleriano cerrado T -compatible si y sólo si $G^T - V^*$ contiene un ciclo hamiltoniano M -alternante.*

Demostración. Supongamos que G contiene un paseo euleriano cerrado T -compatible, digamos P . Entonces $\{E(P)\}$ es una partición de $E(G)$ en paseos cerrados T -compatibles. Por el Teorema 3.3.3 sabemos que $G^T - V^*$ tiene un 2-factor, digamos F , tal que todo ciclo de F es M -alternante. Sin embargo, dada la construcción de F en el Teorema 3.3.3 obtenemos que dicho factor tiene un único ciclo, por lo que debe ser un ciclo hamiltoniano. Por consiguiente, $G^T - V^*$ contiene un ciclo hamiltoniano M -alternante.

Ahora, supongamos que $G^T - V^*$ tiene un ciclo hamiltoniano M -alternante, digamos C . Usando a C como el factor F del Teorema 3.3.3 obtenemos que $\{E(P_C^G)\}$ es una partición de las aristas de G en paseos cerrados T -compatibles, sin embargo, puesto que su cardinalidad es 1, entonces es un paseo euleriano cerrado T -compatible. □

A continuación demostramos que el problema \mathcal{A} -DPCC puede ser resuelto en tiempo polinomial.

Teorema 3.3.4. *Sea G una gráfica con sistema de transición T . Entonces encontrar una partición de $E(G)$ en paseos cerrados T -compatibles, o determinar que no existe, es soluble en tiempo polinomial. Esto es, el problema \mathcal{A} -DPCC pertenece a P.*

Demostración. Mostramos que

$$\mathcal{A}\text{-DPCC} \propto \mathcal{A}\text{-C2F}. \quad (3.3)$$

Sea G una gráfica con sistema de transición T . Construimos la gráfica G^T y consideremos $G' = G^T - V^*$. Así, M es un apareamiento perfecto de G' . Para cada vértice $v \in V(G')$, llamemos e_v a la arista en M que satura a v y construimos una gráfica de transición $T'(v)$ bipartita completa con bipartición $\{\{e_v\}, E_{G'}(v) \setminus \{e_v\}\}$ en conjuntos independientes, llamemos a dicho sistema de transición T' . Es claro que la construcción de T' toma tiempo polinomial.

Afirmación. G' tiene un 2-factor tal que todo ciclo es M -alternante si y sólo si G' tiene un 2-factor cuyos ciclos son T' -compatibles.

Probamos primero la parte suficiente. Supongamos que G' tiene un 2-factor, digamos F , tal que todo ciclo de F es M -alternante y sean $C = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k = u_0)$ un ciclo de F e $i \in \{1, \dots, k\}$ arbitrario. Dado que C es M -alternante una de las aristas consecutivas incidentes en u_i se encuentra en M , mientras que la otra no, por lo que por definición del sistema T' son adyacentes en $T'(v_i)$. De esta forma, todo ciclo de F es T' -compatible.

Demostramos ahora la parte necesaria. Es decir, supondremos que G' contiene un 2-factor F cuyos ciclos son T' -compatibles y mostraremos que todos sus ciclos son M -alternantes. Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k = e_0)$ un ciclo de F y supongamos que C no es M -alternante. Entonces existen al menos dos aristas consecutivas de C , digamos e y e' tal que no se encuentran en el apareamiento M . Sea v el vértice extremo común de dichas aristas. De la definición del sistema T' obtenemos que $e'e \notin E(T'(v))$, lo cual es una contradicción pues F es T' -compatible. De esta forma, todo ciclo de F es un ciclo M -alternante.

Esto prueba la afirmación.

Con la afirmación anterior y el Teorema 3.3.3 obtenemos (3.3). En vista de que el sistema T' consta únicamente de gráficas bipartitas completas el Teorema 1.4.1 nos garantiza que es soluble en tiempo polinomial.

De este modo, partir $E(G)$ en paseos cerrados T -compatibles, o determinar que no es posible, es realizable en tiempo polinomial. \square

Uno de los conceptos más importantes en la teoría de gráficas es el de conexidad. Una posible generalización puede hacer uso de un sistema de transición como sigue. Sea G una gráfica con sistema

de transición T . Decimos que G es **conexa por caminos T -compatibles (conexa por paseos T -compatibles)** si para cualesquiera dos vértices de G existe un camino (paseo) T -compatible que los une. No es difícil ver que esta definición generaliza a la conexidad, puesto que cuando las gráficas del sistema T son todas gráficas completas, todo camino (paseo) en G es T -compatible. Usando los resultados expuestos anteriormente será fácil mostrar que es posible verificar en tiempo polinomial, dada una gráfica G con sistema de transición T , si G es conexa por paseos T -compatibles.

Proposición 3.3.10. *Sea G una gráfica con sistema de transición T . Entonces determinar si G es conexa por paseos T -compatibles es soluble en tiempo $O(m^2n^2)$.*

Demostración. Sabemos que determinar la existencia de paseos T -compatibles entre dos vértices cualesquiera de G es soluble en tiempo $O(m^2)$. Como tenemos exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de vértices, entonces se sigue que saber si entre cualesquiera dos vértices existe un paseo T -compatible es posible en tiempo $O(m^2n^2)$. Así, es posible decidir si G es conexa por paseos T -compatibles en tiempo $O(m^2n^2)$. \square

Dos problemas NP-completos clásicos en la complejidad computacional son **Conjunto independiente** y **Conjunto dominante**. Dada una gráfica G con sistema de transición T , es posible presentar los problemas análogos a estos, pero usando el concepto de paseo T -compatible. Para esto, presentamos las siguientes definiciones. Sea $S \subseteq V(G)$, diremos que:

- S es un conjunto **independiente por paseos T -compatibles** si para todo $\{u, v\} \subseteq S$ no existen uv -paseos T -compatibles en G .
- S es un conjunto **dominante por paseos T -compatibles** si para todo $v \in V(G) \setminus S$ existe $u \in S$ tal que G contiene un uv -paseo T -compatible.

De esta forma, podemos considerar los siguientes problemas:

Conjunto independiente por paseos T -compatibles.

Ejemplar: Una gráfica G con sistema de transición T y un natural $k \leq n$.

Pregunta: ¿Existe un conjunto independiente por paseos T -compatibles en G , digamos S , tal que $|S| \geq k$?

Conjunto dominante por paseos T -compatibles.

Ejemplar: Una gráfica G con sistema de transición T y un natural $k \leq n$.

Pregunta: ¿Existe un conjunto dominante por paseos T -compatibles en G , digamos S , tal que $|S| \leq k$?

A continuación probamos que ambos problemas son NP-completos.

Proposición 3.3.11. *El problema Conjunto independiente por paseos T -compatibles es NP-completo.*

Demostración. Veamos que **Conjunto independiente por paseos T -compatibles** se encuentra en NP. Para esto, tomamos como certificado $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| \geq k$. Basta verificar que para cada par de vértices en S no exista un paseo T -compatible, lo cual es realizable en tiempo polinomial.

Ahora, mostraremos que:

$$\mathbf{Conjunto\ independiente} \propto \mathbf{Conjunto\ independiente\ por\ paseos\ } T\text{-compatibles} \quad (3.4)$$

Sea (G, k) una instancia de **Conjunto independiente**. Para cada vértice v de G construimos su gráfica de transición $T(v)$ tal que $E(T(v)) = \emptyset$. Llamemos T al sistema de transición que consta de dichas gráficas.

Afirmación. G contiene un conjunto independiente de cardinalidad al menos k si y sólo si G contiene un conjunto independiente de cardinalidad al menos k .

Demostramos primero la parte suficiente. Supongamos que G tiene un conjunto independiente de cardinalidad al menos k , digamos S .

Ahora mostraremos que S es independiente por paseos T -compatibles. Procediendo por contradicción, supongamos que S no es independiente por paseos T -compatibles. Entonces existen dos vértices, digamos u y v , tales que existe un uv -paseo T -compatible en G , digamos P . Se sigue que $l(P) = 1$, pues las gráficas de transición de los vértices internos de P son vacías. Así, u y v son vértices adyacentes en G , lo cual es una contradicción al S ser un conjunto independiente. Por tanto, S es independiente por paseos T -compatibles.

Ahora, mostramos la parte necesaria. Supongamos que G contiene un conjunto independiente por paseos T -compatibles de cardinalidad al menos k , digamos S . En especial, no existen paseos T -compatibles de longitud 1, por lo que S es un conjunto independiente de cardinalidad k .

De esto, obtenemos (3.4). En consecuencia, **Conjunto independiente por paseos T -compatibles** es NP-completo □

Proposición 3.3.12. *El problema Conjunto dominante por paseos T -compatibles es NP-completo.*

Demostración. Veamos que **Conjunto dominante por paseos T -compatibles** se encuentra en NP. Tomemos como certificado $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| \leq k$. Basta verificar que para cada vértice en $V(G) \setminus S$ exista un paseo T -compatible hacia algún vértice de S , lo cual es realizable en tiempo polinomial.

Ahora mostraremos que:

$$\mathbf{Conjunto\ dominante} \propto \mathbf{Conjunto\ dominante\ por\ paseos\ } T\text{-compatibles} \quad (3.5)$$

Sea (G, k) una instancia de **Conjunto dominante**. Para cada vértice v de G construimos una gráfica de transición de $E(T(v)) = \emptyset$. Llamemos T al sistema que contiene dichas gráficas de transición.

Afirmación. G contiene un conjunto dominante de cardinalidad menor o igual a k si y sólo si G contiene un conjunto T -dominante de cardinalidad menor o igual a k .

Probamos primero la parte suficiente. Supongamos que G contiene un conjunto dominante, digamos S , tal que $|S| \leq k$. Entonces trivialmente S es un conjunto dominante por paseos T -compatibles.

Demostramos ahora la parte necesaria. Supongamos que G contiene un conjunto dominante por paseos T -compatibles, digamos S , tal que $|S| \leq k$. Mostraremos que S es un conjunto dominante. Supongamos que S no es un conjunto dominante, por lo que existe $v \in V(G) \setminus S$ tal que para todo $u \in S$, $uv \notin E(G)$. Dado que S es dominante por paseos T -compatibles, entonces existe un vértice, digamos $z \in S$ tal que G contiene un z -paseo T -compatible, digamos P . Así, P debe tener longitud igual a 1, pues las gráficas de transición para todos los vértices de G son vacías, lo cual no es posible por elección de v . Por tanto, S es dominante.

De esto, obtenemos (3.5). Por lo tanto, **Conjunto independiente por paseos T -compatibles** es NP-completo. \square

3.4. Equivalencia entre gráficas con sistemas de transición y gráficas H -coloreadas

Sean dos gráficas G y H , H posiblemente con lazos. Una **H -coloración** de G es una función $c: E(G) \rightarrow V(H)$. Bajo estas condiciones, diremos que G está **H -coloreada**.

Un camino $W = (v_0, e_0, v_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k)$ en una gráfica H -coloreada es un H -camino si $(c(e_0), c(e_1), \dots, c(e_{k-1}))$ es un camino de H . En caso de que W sea cerrado, también pediremos que $c(e_{k-1})c(e_0) \in E(H)$. Si W es una trayectoria, ciclo o paseo, entonces es llamado H -trayectoria, H -ciclo o H -paseo, respectivamente.

En seguida probamos dos proposiciones que muestran que las gráficas con sistema de transición y

las gráficas H -coloreadas son equivalentes.

Proposición 3.4.1. *Sea G una gráfica H -coloreada. Existe un sistema de transición para G , digamos T , tal que todo camino en G es un H -camino si y sólo si es un camino T -compatible.*

Demostración. Sean G una gráfica H -coloreada y $c: E(G) \rightarrow V(H)$ la H -coloración. Definimos para cada $v \in V(G)$ una gráfica de transición $T(v)$ como sigue:

$$E(T(v)) = \{e_0e_1 \mid \{e_0, e_1\} \subseteq E_G(v) \text{ y } c(e_0)c(e_1) \in E(H)\}$$

y llamemos T al conjunto que contiene a dichas gráficas de transición. Observe que esta definición puede generar lazos en las gráficas de transición para aquellas aristas coloreadas con vértices que tienen lazos en H . Ahora mostraremos que T es el sistema deseado. Sea $W = (v_0, e_0, v_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k)$ un camino arbitrario en G .

Afirmación. W es un H -camino si y sólo si W es un camino T -compatible.

Demostramos primero la parte suficiente, es decir, supongamos que W es un H -camino en G . Entonces $(c(e_0), c(e_1), \dots, c(e_{k-1}))$ es un camino en H . Se sigue que para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$ $c(e_{i-1})c(e_i) \in E(H)$, por lo que de la definición de T obtenemos que para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$ se tiene que $e_{i-1}e_i \in E(T(v_i))$. Si W es cerrado, como W es un H -camino, entonces debe suceder que $c(e_{k-1})c(e_0) \in E(H)$ y de esto, $e_{k-1}e_0 \in E(T(v_0))$. De esta forma, W es un camino T -compatible.

Probamos ahora la parte necesaria, esto es, supongamos que W es un camino T -compatible en G . Entonces para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$ se tiene que $e_{i-1}e_i \in E(T(v_i))$. Por definición del sistema de transición T , se tiene que $c(e_{i-1})c(e_i) \in E(H)$. Por tanto, $(c(e_0), c(e_1), \dots, c(e_{k-1}))$ es un camino en H . Si W es un camino cerrado, y puesto que W es T -compatible, entonces $e_{k-1}e_0 \in E(T(v_0))$. De esto, tenemos que $c(e_{k-1})c(e_0) \in E(H)$. Esto es, W es un H -camino.

Así, queda demostrada la proposición. □

Proposición 3.4.2. *Sean G una gráfica y T un sistema de transición de G . Existe una gráfica H y una H -coloración de G tal que cualquier camino en G es T -compatible si y sólo si es un H -camino.*

Demostración. Sean G una gráfica y T un sistema de transiciones. Consideremos la gráfica H tal que $V(H) = E(G)$ y el conjunto de aristas de H está dado por:

$$E(H) = \{e_1e_2 \mid \text{existe } x \in V(G) \text{ tal que } \{e_1, e_2\} \subseteq E_G(x) \text{ y } e_1e_2 \in E(T(x))\}.$$

Definimos la H -coloración $c: E(G) \rightarrow V(H)$ tal que $c(e) = e$ para toda $e \in E(G)$. Ahora mostraremos que H y c son la gráfica y la coloración deseada. Sea $W = (v_0, e_0, v_1, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k)$ un camino arbitrario en G .

Afirmación. W es T -compatible si y sólo si W es un H -camino.

Demostramos primero la parte suficiente, es decir, supongamos que W es un camino T -compatible. Entonces para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$ tenemos que $e_{i-1}e_i \in E(T(v_i))$. Por definición de H y la H -coloración c , debe ser que $c(e_{i-1})c(e_i) = e_{i-1}e_i \in E(H)$. Por tanto, tenemos que $(c(e_0), c(e_1), \dots, c(e_{k-1})) = (e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ es camino en H . Si W es cerrado, y dado que es T -compatible, entonces $e_{k-1}e_0 \in E(T(v_0))$, por lo que de la misma forma sucede que $c(e_{k-1})c(e_0) = e_{k-1}e_0 \in E(H)$. Así, W es un H -camino.

Mostramos ahora la parte necesaria, esto es, supongamos que W es un H -camino. Se sigue que $(c(e_0), c(e_1), \dots, c(e_{k-1})) = (e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ es un camino en H . Por definición de H debe ser que $e_{i-1}e_i \in E(T(v_i))$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Si W es cerrado, y dado que es un H -camino, entonces $c(e_{k-1})c(e_0) = e_{k-1}e_0 \in E(H)$, por lo que $e_{k-1}e_0 \in E(T(v_0))$. Por tanto, W es un camino T -compatible.

Esto concluye la prueba de la proposición. □

Usando estas proposiciones de equivalencia podemos obtener varios resultados referentes a gráficas H -coloreadas. Por ejemplo, con la definición presentada al inicio de esta sección es posible definir el siguiente problema:

H -Trayectoria.

Ejemplar: G una gráfica H -coloreada y dos vértices distintos u y v de G .

Pregunta: ¿Existe una H -trayectoria entre u y v ?

El siguiente corolario nos muestra que dicho problema es NP-completo.

Corolario 3.4.3. *El problema H -Trayectoria es NP-completo.*

Demostración. Es fácil ver que dicho problema está en NP: dados dos vértices distintos u y v en G , podemos considerar como certificado una uv -trayectoria; ahora, basta verificar que los colores de aristas consecutivas en la trayectoria son vértices adyacentes en H .

De la Proposición 3.4.2 se sigue que

$$\mathcal{A}\text{-CP} \propto H\text{-Trayectoria.}$$

Dado el Teorema 2.1.1, obtenemos que *H-Trayectoria* es NP-completo. \square

De manera similar a nuestra generalización de la conexidad en gráficas usando sistemas de transición, podemos usar las *H*-coloraciones para generalizar nuevamente este concepto. Sea *G* una gráfica *H*-coloreada. Decimos que *G* es **conexa por *H*-caminos** (**conexa por *H*-paseos**) si para cualesquiera dos vértices de *G* existe un *H*-camino (*H*-paseo) que los une.

En el siguiente corolario usaremos las proposiciones 3.3.10 y 3.4.1 para probar que es posible determinar si una gráfica *H*-coloreada es conexa por *H*-paseos en tiempo $O(n^2m^2)$.

Corolario 3.4.4. *Sea G una gráfica H -coloreada. Entonces es posible determinar si G es conexa por H -paseos en tiempo $O(m^2n^2)$.*

Demostración. Sea *G* una gráfica *H*-coloreada. Primero nótese que construir el sistema de transición *T* asociado a *H*, descrito en la Proposición 3.4.1, toma tiempo $O(m^2)$ puesto que para todo vértice $v \in V(G)$, $|E(T(v))| \leq \frac{\delta_G(v)(\delta_G(v) - 1)}{2} + \delta_G(v)$. Con estas desigualdades y siguiendo un argumento análogo al hecho en la Observación 3.3.5 se sigue que construir *T* toma, en efecto, tiempo $O(m^2)$. Debido a la equivalencia proporcionada en la Proposición 3.4.1, y dada la Proposición 3.3.10, entonces es posible determinar si *G* es conexa por *H*-paseos en tiempo $O(m^2n^2)$. Note que los posibles lazos introducidos a las gráficas de transición no causan conflicto puesto que en paseos *T*-compatibles, estas transiciones no están permitidas, ya que representan usar dos veces una misma arista. \square

En general, obsérvese que todos los resultados proporcionados anteriormente para trayectorias, ciclos y paseos *T*-compatibles pueden ser usados para gráficas *H*-coloreadas dado que los posibles lazos introducidos a las gráficas de transición en la equivalencia presentada en la Proposición 3.4.1 no son transiciones válidas que puedan ser usadas por trayectorias, ciclos y paseos *T*-compatibles, pues de usarlas, repetirían una arista. Así, estos lazos pueden ser eliminados de las gráficas de transición sin pérdida de información respecto a *H*-trayectorias, *H*-ciclos y *H*-paseos.

Para el último resultado de esta sección, necesitaremos el siguiente concepto. Sea *G* una gráfica *k*-coloreada. Decimos que una trayectoria en *G* es monocromática si todas las aristas de la trayectoria coinciden en color. Una gráfica conexa *k*-coloreada por aristas es conexa por trayectorias monocromáticas si entre cualesquiera dos vértices existe una trayectoria monocromática.

Corolario 3.4.5. *Sea G una gráfica conexa k -coloreada. Entonces es posible determinar si G es conexa por trayectorias monocromáticas en tiempo polinomial.*

Demostración. Sea H una gráfica cuyos vértices son el conjunto de colores $\{1, \dots, k\}$ y contiene únicamente lazos. La gráfica G puede verse como una gráfica H -coloreada.

Afirmación. G contiene una uv -trayectoria monocromática si y sólo si G contiene un uv - H -paseo.

La parte suficiente es trivial de observar debido a la definición de H .

Probamos ahora la parte necesaria. Supongamos que G tiene un uv - H -paseo, digamos T . Entonces los colores de cualesquiera dos aristas consecutivas de T son adyacentes en H , pero dado que H contiene únicamente lazos, entonces el color de todas las aristas de T debe coincidir. Así, T es un uv -paseo monocromático, del cual podemos obtener una uv -trayectoria monocromática.

Esto concluye la afirmación.

Debido al Corolario 3.4.3 sabemos que es posible determinar en tiempo $O(m^2n^2)$ si G es conexa por H -paseos y así, podemos determinar si G es conexa por trayectorias monocromáticas en tiempo polinomial. \square

Conclusiones

A lo largo de este trabajo estudiamos y desarrollamos a detalle el problema \mathcal{A} -CP, el cual fue introducido por Stefan Szeider en [13]. En el mismo artículo, se muestra que dicho problema es NP-Completo, para esto último, estudia casos particulares del problema con ciertas clases de familias de gráficas cerradas bajo isomorfismos. Además, se estudian casos particulares bajo los cuales \mathcal{A} -CP puede ser resuelto en tiempo lineal y debido a esto, se obtiene como aplicación que el problema **Trayectoria Propiamente Coloreada** es soluble en tiempo lineal.

En esta misma línea de investigación, y gracias a la NP-Compleitud de \mathcal{A} -CP, en este trabajo demostramos que el problema \mathcal{A} -Ciclo Compatible es NP-completo. Debido a estos resultados referentes a NP-Compleitud, notamos que determinar si existe una trayectoria compatible entre dos vértices de una gráfica arbitraria y con sistemas de transiciones arbitrarios, es un problema en general difícil de abordar. Así, nos planteamos qué pasa en una situación menos restrictiva del problema. En este caso, determinar qué sucede cuando buscamos paseos T -compatibles en lugar de trayectorias compatibles. De esta forma, presentamos dos problema menos restrictivos a los cuales nombramos \mathcal{A} -Paseo Compatible y \mathcal{A} -Paseo Cerrado Compatible. Nosotros demostramos que ambos se encuentran en la clase P, empleando la Construcción 3.3.1.

Dicha construcción resultó ser muy versátil, pues nos permitió, además, relacionar los problemas de transiciones en gráficas con un problema más accesible y muy estudiado: el encontrar trayectorias aumentantes bajo ciertos apareamientos. De este modo, fue posible mostrar que el problema \mathcal{A} -Descomposición en Paseos Cerrados Compatibles pertenece a P y además, brindamos algunos resultados sobre descomposición en paseos T -compatibles en términos de 2-factores, y de condiciones de existencia de paseos eulerianos T -compatibles en términos de ciclos hamiltonianos alternantes.

Finalmente, proporcionamos una equivalencia entre gráficas H -coloreadas y gráficas con sistemas de transición, de manera que se nos permite concluir que determinar si una gráfica es conexa por H -paseos

es soluble en tiempo polinomial, así como obtener que el problema H -trayectoria es NP-completo. En general, estas equivalencias nos expresan que todos los resultados presentados a lo largo del trabajo para trayectorias, ciclos y paseos T -compatibles de igual forma se cumplen para H -trayectorias, H -ciclos y H -paseos.

A pesar de los resultados obtenidos, muchos otros problemas e ideas surgieron a lo largo del trabajo y que pueden ser de interés como futuras líneas de investigación, por ejemplo, aún queda como pregunta abierta si dada una gráfica con sistema de transición T es posible encontrar un paseo euleriano cerrado T -compatible, o determinar que no existe, en tiempo polinomial. S. Szeider consideró gráficas arbitrarias con sistema de transición y probó que \mathcal{A} -CP es NP-Completo, sin embargo, no es difícil ver que dicho problema restringido a árboles puede ser resuelto en tiempo lineal, por lo que una posible línea de investigación sería caracterizar aquellas gráficas que bajo cualquier sistema de transición el problema \mathcal{A} -CP es soluble en tiempo polinomial. Por último, parece factible usar la Construcción 3.3.1 en multigráficas con sistemas de transición para encontrar paseos compatibles en estas, por lo que estudiar estos problemas considerando multigráficas es otro posible camino de investigación.

Bibliografía

- [1] Alexanderson, G. About the cover: Euler and Königsberg's bridges: A historical view. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43 (2006) 567–573.
- [2] Bickle, A. *Fundamentals of Graph Theory*, AMS Pure and Applied Undergraduate Texts No. 43, USA 2020.
- [3] Cobham, A. The intrinsic computational difficulty of functions. *Pmc. 1964 International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Sciences*. Y. Bar-Hillel, Ed., North Holland, Amsterdam, 1965, 24-30.
- [4] Cook, S. A. An overview of computational complexity, *Communications of the ACM*. 26 (1983), 401-408.
- [5] Cook, S. A. The complexity of theorem proving procedures. *Proc. 3rd ACM Symp. on Theory of Computing*. Shaker Heights, Ohio, (May 3-5, 1971), 151-158.
- [6] Edmonds, J. Paths, trees, flowers. *Canad. J. Math.* 17 (1965), 449-67.
- [7] Fujita, S. Magnant, C. Properly colored paths and cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 159 (2011), 1391–1397.
- [8] Garey, M. R. Johnson, D. R. *Computers and Intractability*, W.H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [9] Karp, R. M. Reducibility among combinatorial problems, *Complexity of Computer Computations*. R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds., Plenum Press. New York, 1972, 85-104.
- [10] Kratochvíl, J. Poljak, S. Compatible 2-factors, *Discrete Appl. Math.* 36 (1992), 253–266.
- [11] Levin, L. A. Universal search problems. *Problemy Peredaci Informocii* 9 (1973), 115-116. Traducido en *Problems of Information Transmission* 9, 265- 266.

- [12] R.E. Tarjan. Data Structures and Network Algorithms, Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 44, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1983.
- [13] Szeider, S. Finding paths avoiding forbidden transitions, *Discrete Appl. Math.* 126 (2003), 261-273.
- [14] Turing, A. M. On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc. ser. 2*, 42 (1936-7), 230-265.
- [15] von Neumann, J. A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. *Contributions to the Theory of Games II*. H. W. Kahn and A. W. Tucker, Eds. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953.